MAT0236 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS E SÉRIES

Nome: Ygor Sad Machado **Número USP: 8910368**

Prova 1 - Solução **Data: 10/04/2020**

Lista 2 - Ex. 7.4

Queremos determinar a convergência da seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^\lambda}, \lambda > 0$$

A presença de um fatorial no denominador torna conveniente aplicar o teste da razão. Para tanto, vamos definir

$$a_n = \frac{2^n}{(n!)^\lambda} \tag{1}$$

Em posse de a_n, aplicamos o seguinte limite:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)!^\lambda}\cdot\frac{(n!)^\lambda}{2^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{(n!)^\lambda}{(n+1)!^\lambda}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2}{(n+1)^\lambda}\right| \end{aligned} \tag{2}$$

Observe que (2) é sempre maior que zero, pois n vai ao infinito a partir de 1 e $\lambda > 0$. Logo, sem prejuízo, podemos tirar o módulo e continuar o cálculo do limite.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n+1)^\lambda} \\ &= 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^\lambda} \\ &= 2\cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ora, segundo o teste da razão, se $L < 1$, então a série é absolutamente convergente. Logo, como chegamos a $L = 0$, podemos deduzir que (1) converge absolutamente, e portanto converge sempre. $\square$

Lista 2 - Ex. 8.1

Queremos determinar a convergência da seguinte série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

Para isso, comecemos avaliando sua convergência absoluta.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

É fácil notar que (4) é divergente, pois ela é uma p-série com $p = \frac{1}{2}$. Já sabemos, portanto, que a série não converge absolutamente, precisamos então verificar sua convergência condicional. Para isso, vamos aplicar o teste da série alternada. Pelos critérios desse teste, (3) será convergente se, definindo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$:

(i). $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii). a_n for decrescente, ie, $a_{n+1} \leq a_n$ para n suficientemente grandes.

Começando pelo critério (i), é fácil notar que ele vale para o nosso cenário. Como $f(x) = \sqrt{x}$ é uma função crescente, sua discretização também o é. Logo, se fizermos $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, à medida que n cresce, o denominador cresce junto, de modo que $\frac{1}{\sqrt{n}}$ descresce, aproximando-se cada vez mais de zero. Assim $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Verificar o critério (ii) significa afirmar que a razão entre dois valores consecutivos de a_n é sempre inferior ou igual a 1, a partir de um dado n.

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq 1, n \geq N, \text{ para algum } N \geq 1 \tag{5}$$

Expandindo:

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{1} \right) = \left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) \tag{6}$$

Fixemos então $N = 1$. Como já foi exposto no critério (i), $\sqrt{n}$ é crescente, o que significa que $\sqrt{n+1} \geq \sqrt{n}$. Daí podemos deduzir então que, para qualquer $n > N$:

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) \leq 1 \tag{7}$$

Isso mostra que a_n é uma sequência decrescente, o que implica que o critério ii também é verdadeiro. Logo, a série (3) converge absolutamente pelo teste da série alternada. $\square$

Lista 2 - Ex. 10.3

Considere a série abaixo.

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln \mathrm{x}}} \tag{8}$$

Estamos interessados em saber para quais $x \in \mathbb{R}$ ela converge. Para tanto, comecemos verificando sua convergência absoluta.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^{\ln \mathrm{x}}} \right| &= \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln \mathrm{x}}} \right| \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln \mathrm{x}}} \end{aligned} \tag{9}$$

Para que (8) possua convergência absoluta – e portanto convergência –, (9) precisa convergir. Observe que esta última se assemelha a uma p-série com $p = \ln x$. Ora, mas sabemos que p-séries convergem se $p > 1$. Logo, para que (9) convirja, $\ln x > 1$, isto é, $x > e$.

Sintetizando, (8) converge para todo $x > e$, $x \in \mathbb{R}$. $\square$