MAT0236 FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS E SÉRIES

Nome: Ygor Sad Machado **Número USP: 8910368**

Prova 2 - Solução **Data: 20/05/2020**

Lista 4 - Ex. 7.a

Considere a seguinte função:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \tag{1}$$

Série de potências

Vamos começar determinando a série de potências associada a f. Sabemos que a série de Taylor associada à função $\sin(x)$ é:

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Basta agora dividir essa série por t e teremos a representação desejada:

$$\frac{\sin(t)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \tag{2}$$

Intervalo de convergência

Por conta da presença de fatoriais, é conveniente analisar a convergência de (2) usando o teste da razão. Para isso, seja:

$$a_n = (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$$

Em seguida avaliamos o valor do limite L abaixo.

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot t^{2(n+1)}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(-1)^n \cdot t^{2n}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| (-1) \frac{t^2}{(2n+3)(2n+2)} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{t^2}{(2n+3)(2n+2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $L = 0$, pelo critério da razão, temos que (2) converge absolutamente e, portanto, é convergente sempre. Isso significa que o intervalo de convergência da série é igual à reta real, isto é, $R = +\infty$.

Cálculo de $f(1)$

Para solucionar a última parte do exercício, vamos desenvolver a integral (1) usando a representação em séries de potência para (2).

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} dt \\ &= C + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} \right]_{t=0}^{x} \end{aligned} \tag{3}$$

Para determinarmos o valor de C, podemos usar que função em $t = 0$ vale 1 juntamente com o fato de que o valor de uma integral com limites de integração iguais é sempre 0. Isto é:

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_0^0 \frac{\sin t}{t} = 0 \\ f(0) &= C + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} \right]_{t=0}^{0} \\ 0 &= C + 1 \\ C &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente podemos expandir a expressão (3) usando o valor calculado de C:

$$\begin{aligned} f(1) &= C + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} \right]_{t=0}^{x} \\ &= 1 + \frac{1}{1}\frac{1}{1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{5} - \frac{1}{7!}\frac{1}{7} + \frac{1}{9!}\frac{1}{9} + ... - 1 \\ &= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + ... \\ &\approx 0.94608, \text{ com } |\text{erro}| \leq \frac{1}{9!9} < \frac{1}{10^{-6}} \end{aligned}$$

Observe que, para determinar até onde expandir a série, usamos o argumento de que a precisão de uma expansão de Taylor é, no máximo, o valor do maior termo negligenciado. Nesse caso, expandimos até que encontrássemos o primeiro termo menor que 10^{-6} – em particular esse termo é $\frac{1}{9!9}$. $\square$

Lista 5 - Ex. 2.b

Considere o seguinte limite

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

Para permitir a sua resolução, podemos fazer algumas manipulações:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} &= \lim_{x \to 1} e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} \\
&= \lim_{x \to 1} e^{(\frac{1}{1-x}) \cdot \ln x}
\end{aligned} \tag{4}$$

Agora precisamos encontrar uma expansão de Taylor conveniente para aplicar ao limite. Observe que não podemos trabalhar com a expansão de $\frac{1}{1-x}$, pois ela não converge quando $x = 1$ – de fato, essa expressão sequer está definida nesse ponto. Por isso, prossigamos com a expansão de $f(x) = \ln x$ ao redor de $a = 1$:

Para nos auxiliar, considere os primeiros quatro valores para $f^{(k)}(1)$:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \ln x \implies f^{(0)}(1) = 0 \\
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{x} \implies f^{(1)}(1) = 1 \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{x^2} \implies f^{(2)}(1) = -1 \\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{x^3} \implies f^{(3)}(1) = 2
\end{aligned}$$

De posse desses valores, podemos executar a expansão:

$$\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ln^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\
&= \frac{0}{0!}(x-1)^0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + ... \\
&= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + ...
\end{aligned} \tag{5}$$

Substituindo (5) em (4), obtemos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{1}{1-x}\right)\ln x} &= \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{1}{1-x}\right)\left((x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\ldots\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} e^{\left(\frac{(x-1)}{1-x}-\frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{1-x}+\frac{1}{3}\frac{(x-1)^3}{1-x}+\ldots\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} e^{\left((-1)+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{3}(x-1)^2+\ldots\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to 1}\left((-1)+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{3}(x-1)^2+\ldots\right)} \\
&= e^{-1} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}
$$

Note que, como e^x é função contínua, pudemos passar o limite para dentro do expoente no terceiro passo, o que nos permitiu continuar a demonstração. $\square$

Lista 2 - Ex. 5

Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções tal que $f_n : [1,2] \to \mathbb{R}$, com $f_n(x) = \dfrac{x^2+nx+3}{n}$. Queremos demonstrar que $\lim_{n\to\infty} f_n$ converge uniformemente sobre $[1,2]$.

Iniciamos provando que $\{f_n\}$ converge pontualmente. Para isso considere o seguinte conjunto:

$$S := \{x : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$$

Vamos definir agora $f : S \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2+nx+3}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n} + x + \frac{3}{n} \\ &= x \end{aligned}$$

Isso demonstra que $\{f_n\}$ converge pontualmente a f no conjunto S.

Agora, precisamos determinar um ϵ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in S$.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{x^2+nx+3}{n} - x \right| \\ &= \left| \frac{x^2+3}{n} \right| \\ &= \frac{x^2+3}{n} \end{aligned}$$

Mas sabemos que $x \in [1,2]$, logo $(x^2+3) \in [4,7]$, o que implica:

$$\frac{x^2+3}{n} \leq \frac{7}{n} \leq \epsilon$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, se tomarmos N tal que $N > \dfrac{7}{\epsilon}$, teremos que $\forall n \geq N$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in S$$

O que prova que $\{f_n\}$ é uniformemente convergente sobre $[1,2]$. $\square$