TD 4 – Etude de stabilité selon Von Neumann

▷ **Exercice 1.** On s'intéresse à l'équation de transport 1D :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in]0,L[\times]0,T[\tag{1}$$

avec $a \in \mathbb{R}^*$.
On suppose la solution périodique en espace. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,L]\times[0,T]$, de pas d'espace h et de pas de temps Δt, tous les deux supposés constants.

On se propose d'étudier les propriétés de différents schémas numériques pour cette équation.

1.1. Schéma explicite centré en espace

Le schéma s'écrit :

$$\forall n \geq 1, \forall j \in \{1,\cdots,N\}, \quad \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \tag{2}$$

Estimer E_h^n comme dans le TD3 exo 2.

a) Montrer que ce schéma est consistant à l'ordre 1 en temps et 2 en espace pour la norme $\|.\|_h$.

b) On s'intéresse au mode de Fourier $u_j^n = a_k^n e^{ikjh}$, avec $i^2=-1$, associé au nombre d'onde $k \in \mathbb{R}$. Montrer que ce même mode s'écrit au temps t_{n+1} : $u_j^{n+1} = a_k^{n+1}e^{ikjh}$, avec $a_k^{n+1} \in \mathbb{C}$ que vous préciserez. En conclure quant à la stabilité du schéma au sens de Von Neumann.

1.2. Schéma explicite décentré

Le schéma s'écrit :

$$\forall n \geq 1, \forall j \in \{1,\cdots,N\}, \quad \frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\Delta t} + a\begin{cases} \dfrac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} & \text{si } a>0 \\ \dfrac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} & \text{si } a<0 \end{cases} = 0. \tag{3}$$

a) Montrer que ce schéma est consistant à l'ordre 1 en temps et en espace pour la norme $\|.\|_h$.

b) Montrer que ce schéma peut se réécrire :

$$\forall n \geq 1, \forall j \in \{1, \cdots, N\}, \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + f_h(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) = 0. \tag{4}$$

avec le terme f_h à préciser. Comment interprétez-vous cette correction apportée au schéma centré de la question 1?

b) On s'intéresse au mode de Fourier $u_j^n = a_k^n e^{ikjh}$, avec $i^2 = -1$, associé au nombre d'onde $k \in \mathbb{R}$. Montrer que ce même mode s'écrit au temps t_{n+1} : $u_j^{n+1} = a_k^{n+1} e^{ikjh}$, avec $a_k^{n+1} \in \mathbb{C}$ que vous préciserez. Montrer que le schéma est conditionnellement stable au sens de Von Neumann et donner la condition de stabilité.

c) Illustrer les problèmes de divergence qui pourraient survenir dans le cas où la condition de stabilité n'est pas vérifiée.

TD 4.1

EDP

Etude de stabilité selon Von Neumann

Exercice 1:

1/b) $\forall n \geq 1, \forall j \in [\![1, N]\!]$

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} + a\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0$$

Pour la stabilité au sens de Von Neumann on pose

$$U_j^n = a_k^n e^{ikjh} \quad \text{avec } a_k^n \in \mathbb{C}$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{a\Delta t}{2h}\left(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n\right) = a_k^n e^{ikjh} - \frac{a\Delta t}{2h}\left(a_k^n e^{ik(j+1)h} - a_k^n e^{ik(j-1)h}\right)$$

$$= a_k^n e^{ikjh}\left(1 - \frac{a\Delta t}{2h}\left(e^{ikh} - e^{-ikh}\right)\right)$$

$$U_j^{n+1} = a_k^n e^{ikjh}\left(1 - \frac{a\Delta t}{h} i \sin(kh)\right)$$

$$U_j^{n+1} = \underbrace{a_k^n\left(1 - i\frac{a\Delta t}{h}\sin(kh)\right)}_{a_k^{n+1}} e^{ikjh}$$

Pour la stabilité, etudions $\frac{|a_k^{n+1}|}{|a_k^n|} = \left|1 - \frac{ia\Delta t}{h}\sin(kh)\right|$

$$= \sqrt{1 + \frac{a\Delta t}{h}\sin(kh)} \geq 1$$

le schéma centré est donc inconditionnellement instable au sens de Von Neumann

2/b) $\forall n \geq 1, \forall j \in [\![1, N]\!]$ $\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} + a\begin{cases} \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} & \text{si } a>0 = 0 \\ \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} & \text{si } a<0 = 0 \end{cases}$

Pour $a > 0$

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} + a\frac{U_j^n - U_{j+1}^n + U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{h} = 0$$

$$\frac{U_j^{n+1}+U_j^n}{\Delta t} + a\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} + a\left(\frac{U_j^n - U_{j+1}^n}{h} + \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h}\right) = 0$$

$$\frac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t} + a\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} + a\left(-\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2h}\right) = 0$$

Posons $f_n = -a\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{2h}$

On peut écrire $f_h = \frac{ah}{2}\left(\underbrace{\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}}_{\simeq \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x_j, t_n)}\right)$ terme de diffusion.

Ce terme, comme on va le voir, va avoir pour effet de lisser les oscillations dans le schéma centré.

b') Etudions la stabilité au sens de Von Neumann de ce schéma

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{h}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right)$$

$$u_j^{n+1} = a_k^n e^{ikjh} - \frac{a\Delta t}{h}\left(a_k^n e^{ikjh} - a_k^n e^{ik(j-1)h}\right)$$

$$= a_k^n e^{ikjh}\left(1 - \frac{a\Delta t}{h}\left(1 - e^{-ikh}\right)\right)$$

$$= a_k^{n+1} e^{ikjh}$$

avec $a_k^{n+1} = a_k^n\left(1 - \frac{a\Delta t}{h}\left(1 - e^{-ikh}\right)\right)$

Ainsi $\left|\frac{a_k^{n+1}}{a_k^n}\right| = \left|1 - \underbrace{\frac{a\Delta t}{h}}_{=\lambda}\left(1 - e^{-ikh}\right)\right|$

$$= \left|1 - \lambda(1-\cos kh) - i\lambda \sin kh\right|$$

$$= \sqrt{\left(1 - \lambda(1-\cos kh)\right)^2 + \lambda^2 \sin^2 kh}$$

$$= 1 - 2\lambda(1-\cos kh) + \lambda^2(1 - 2\cos kh + \cos^2 kh) + \lambda^2 \sin^2 kh$$

$$= \sqrt{1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda)\cos kh + 1}$$

$$= \sqrt{1 + 2\lambda\underbrace{(1-\cos kh)}_{\geq 0}\underbrace{(\lambda - 1)}_{<0}}$$ On veut ça < 1.

il faut donc $\lambda - 1 \leq 0$

ie $\lambda \leq 1$. Condition de stabilité

Le schéma sera stable au sens de Von Neumann pour peu que

$\frac{a\Delta t}{h} \leq 1$ Schéma conditionnellement stable

c) Poser $\frac{a\Delta t}{h} = 1 + \mu$ et voir comment cela se propage u_{j+1}^n, u_{j-1}^n