TD2, Automatique

O. Cots & J. Gergaud

▷ **Exercice 1.** [1] On considère le système contrôlé suivant (pendule inversé linéarisé où on contrôle le couple moteur et avec $g = l$)

$$\ddot{\theta}(t) - \theta(t) = u(t),$$

avec $\theta(0) = 1$ et $\dot{\theta}(0) = -2$.

1.1. Écrire le système sous la forme

$$(IVP)\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1.2. Calculer e^{tA} à l'aide de la définition.

1.3. On considère le contrôle en boucle ouverte $u(t) = 3e^{-2t}$. Résoudre (IVP).

1.4. Résoudre le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

avec comme condition initiale $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = \varepsilon$. En déduire la solution de (IVP) avec $\theta(0) = 1$, $\dot{\theta}(0) = -2+\varepsilon$ et toujours pour le contrôle $u(t) = 3e^{-2t}$.

1.5. Commentaire.

1.6. On prend maintenant $u(t) = -\alpha\theta(t) - \beta\dot{\theta}(t)$. Quelle relation doivent vérifiez les constantes α et β afin que $x_e = 0$ soit un point d'équilibre asymptotiquement stable ?

1.7. On considère maintenant le cas

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) - \theta(t) = u(t) + d(t) \\ \theta(0) = 1, \dot{\theta}(0) = -2, \end{cases}$$

avec

$$d(t) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } t \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Sontag 1.4, page 9

1. Calculer la solution pour $u(t) = 3e^{-2t}$.
2. Calculer la solution pour $u(t) = -\alpha\theta(t) - \beta\dot{\theta}(t)$.
3. commentaire sur la stabilité (limite des solutions pout $t \to +\infty$).

▷ **Exercice 2.** On considère le cas

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) - \theta(t) = u(t) + e \\ \theta(0) = 1, \dot{\theta}(0) = -2, \end{cases}$$

où e est une constante.

2.1. On considère $\alpha > 1, \beta > 0$ et $u(t) = -\alpha\theta(t) - \beta\dot{\theta}(t)$. Montrer que pour tout $e \neq 0$ on ne stabilise plus le système.

2.2. On prend maintenant le système

$$\begin{cases} \dot{\theta}_0(t) = \theta_1(t) \\ \dot{\theta}_1(t) = \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_2(t) = \theta_1(t) + u(t) + e \\ \theta_0 0 = \theta_0, \theta_1(0) = 1, \dot{\theta}_2(0) = -2, \end{cases}$$

et $u(t) = -\mu\theta_0(t) - \alpha\theta_1(t) - \beta\theta_2(t)$.

1. Montrer que l'on peut trouver α, β et μ afin que les valeurs propres de A telle que
$$\dot{\theta}(t) = A\theta(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix}$$
soient réelles et négatives strictement.
2. Montrer que pour un tel cas on a
$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t) = (e/\mu, 0, 0).$$
3. Commentaires
Remarque 0.1. *On dit que l'on a un régulateur ou correcteur ou contrôle Proportionnel Intégral Dérivé(Proportional-Integral-Derivative controller) :*
$$u(t) = -\alpha\theta(t) - \mu \int_0^t \theta(s)ds - \beta\dot{\theta}(t).$$

TD 2.1
Auto

Automatique

Exercice 1 : $\ddot{\theta}(t) - \theta(t) = u(t)$, $\theta(0) = 1$ $\dot{\theta}(0) = -2$.

1/ Posons $x(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$ Donc $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + u(t) \\ x_1(0) = 1, \ x_2(0) = -2. \end{cases}$

Prenons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2/ $e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = I_2 + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \dots$ $e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} & t + \frac{t^3}{3!} + \dots \\ t + \frac{t^3}{3!} + \dots & 1 + \frac{t^2}{2} + \dots \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= I_2 + tA + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} A + \dots$

3/ $x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} B u(s) \, ds$.

$= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} x_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} \cosh(t-s) & \sinh(t-s) \\ \sinh(t-s) & \cosh(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times 3 e^{-2s} ds$.

$= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + 3 \int_0^t \begin{pmatrix} \sinh(t-s) \\ \cosh(t-s) \end{pmatrix} e^{-2s} ds$

$x_1(t) = \cosh t - 2\sinh t + 3 \int_0^t \frac{e^{t-s} - e^{-t+s}}{2} e^{-2s} ds$.

$= \cosh t - 2\sinh t + 3 \int_0^t \frac{e^{t-3s}}{2} - \frac{e^{-(t+s)}}{2} ds$

$= \cosh t - 2\sinh t + \frac{3e^t}{2} \left[\frac{e^{-3s}}{-3} \right]_0^t - \frac{3}{2} e^{-t} \left[\frac{e^{-s}}{-1} \right]_0^t$

$= \cosh t - 2\sinh t + \frac{3}{2} e^t \left[\frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} \right] - \frac{3}{2} e^{-t} \left[1 - e^{-t} \right] = e^{-2t}$

$x_2(t) = \sinh t - 2\cosh t + 3 \int_0^t \left(\frac{e^{t-3s}}{2} + \frac{e^{-(t+s)}}{2} \right) ds$.

$= \sinh t - 2\cosh t + \frac{3}{2} e^t \left[\frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} \right] + \frac{3}{2} e^{-t} \left[1 - e^{-t} \right]$.

$= \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} - e^t - e^{-t} + \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{3}{2} e^{-t} - \frac{3}{2} e^{-2t}$

$= -2e^{-2t}$

$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

4/ $\begin{cases} x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = -2 + \varepsilon. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \theta(0) = 0 \\ \dot{\theta}(0) = \varepsilon \end{cases}$ (1) (1) $\varphi(t) = e^{tA} x_0$ $= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} \sinh t \times \varepsilon \\ \cosh t \times \varepsilon \end{pmatrix}$

(IVP2) $\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} + \varepsilon \sinh t \\ -2e^{-2t} + \varepsilon \cosh t \end{pmatrix} = \varphi(t) + x(t)$

5/ Ce contrôle n'est pas bon car $\varphi(t) \to +\infty_{\mathbb{R}^2}$. Donc $\varphi(t) \to +\infty_{\mathbb{R}^2}$.

6/ $\ddot{\theta}(t) - \theta(t) = -\alpha \theta(t) - \beta \dot{\theta}(t)$. $\dot{x}(t) = B(x(t))$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & -\beta \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t) \end{pmatrix}$ $B \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ stable

$x_e = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ asympt. stable ssi $\det B > 0$ $\operatorname{tr} B < 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1 \\ -\beta < 0 \Leftrightarrow \beta > 0 \end{cases}$

7/ a) Pour $t \geq 2$ $x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} \left(B u(s) + \begin{pmatrix}0\\d(s)\end{pmatrix} \right) ds$.

$= \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A} \begin{pmatrix}0\\d(s)\end{pmatrix}$

Pour $t \geq 2$: $x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} + \int_1^2 e^{(t-s)A} \begin{pmatrix}0\\ \varepsilon\end{pmatrix} ds$.

$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -\cosh(t-2) + \cosh(t-1) \\ -\sinh(t-2) - \sinh(t-1) \end{pmatrix} \longrightarrow +\infty_{\mathbb{R}^2}$.

b) Ici cela correspond à prendre une autre CI donc comme précédement en $t \to +\infty$ on retournait en $(0,0)$ donc ici aussi.

Exercice 2 : $\begin{cases} \ddot\theta(t) - \theta(t) = u(t) + e & \text{avec } e \text{ constante} \\ \theta(0) = 1 \quad \dot\theta(0) = -2 \end{cases}$

1/ $\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = x_1(t) - \alpha x_1(t) - \beta x_2(t) + e \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\alpha & -\beta \end{pmatrix}$ $\dot x(t) = A x(t) + \begin{pmatrix}0\\e\end{pmatrix}$.

$y(t) = x(t) - x_e$ y

$\dot y(t) = A x(t) + \begin{pmatrix}0\\e\end{pmatrix} = A(x(t) - x_e) = A y(t)$

$y(t) \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $t \to +\infty$ ie $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_e$

2/ $\begin{cases} \dot\theta_0 = \theta_1(t) \\ \dot\theta_1 = \theta_2(t). \\ \dot\theta_2 = \theta_1(t) + u(t) + e. \\ \theta_0(0) = \theta_0, \ \theta_1(0) = \cancel{1}, \ \theta_2(0) = -2. \end{cases}$ $u(t) = -\mu\theta_0(t) - \alpha\theta_1(t) - \beta\theta_2(t)$.

a) $\dot\theta(t) = \begin{pmatrix} \dot\theta_0(t) \\ \dot\theta_1(t) \\ \dot\theta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \theta_1(t) - \mu\theta_0(t) - \alpha\theta_1(t) - \beta\theta_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\e\end{pmatrix}$

$\dot\theta(t) = A\theta(t) + \begin{pmatrix}0\\0\\e\end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mu & 1-\alpha & -\beta \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\mu & 1-\alpha & -\beta-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda\left(-\lambda(-\beta-\lambda) - (1-\alpha)\right) - \mu.$

$= -\lambda^3 - \beta\lambda^2 + (1-\alpha)\lambda - \mu.$

Prenons $\beta = 6$, $\alpha = 12$ $\mu = 6$ et on a $\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

b) $y(t) = x(t) - x_e$

$\dot y(t) = \dot x(t) = A x(t) + \begin{pmatrix}0\\0\\e\end{pmatrix} = A y(t)$.

~~Or~~ les vp de A sont à partie réelle $< 0 \Rightarrow y(t) \xrightarrow[+\infty]{} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ Donc $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_e$

On résout $A x_e + \begin{pmatrix}0\\0\\e\end{pmatrix} = 0$ ie $\begin{cases} x_{e1} = 0 \\ x_{e2} = 0 \\ -\mu x_{e0} + (1-\alpha) x_{e1} - \beta x_{e2} = -e \end{cases}$ $x_{e0} = e/\mu$ $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{pmatrix} e/\mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.