TD3, Automatique

O. Cots, B. Durix & J. Gergaud

▷ **Exercice 1.** On considère le système linéaire suivant

$$(S)\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$$

1.1.

Écrire le système sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t).$$

1.2. Donner les points de fonctionnement, c'est-à-dire les points où $f(x_e, u_e) = 0$.

1.3. Le système est-il contrôlable ?

1.4. On considère le point de fonctionnement $(x_e, u_e) = (0, 0, 0)$.

1. On considère un contrôle par retour d'état $u(t) = Kx(t)$. Quels valeurs doivent avoir les coefficients k_1 et k_2 de K pour que x_e soit un point d'équilibre asymptotiquement stable, pour le système $\dot{x}(t) = f(x(t), Kx(t))$, avec comme unique valeur de pôle -1.
2. On suppose maintenant que l'on a accès en sortie qu'à la première composante de l'état : $y(t) = x_1(t)$ et on considère un contrôle par retour de sortie $u(t) = ky(t)$. Peut-on trouver des valeurs de k pour que, pour le nouveau système, x_e soit asymptotiquement stable, stable ?

▷ **Exercice 2.** La question est de savoir comment faire tenir un balai sur le manche ! Ici le contrôle du pendule est l'accélération du déplacement que l'on peut exercer horizontalement.

Les équations qui régissent le système sont alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{\cos(x_1(t))u(t)}{l} \\ x_1(0) = x_{0,1} = \alpha_0 \\ x_2(0) = x_{0,2} = \dot{\alpha}_0 \end{cases}$$

2.1. Le système non contrôlé est-il stable, asymptotiquement stable, pour $x_e = (0, 0)$?

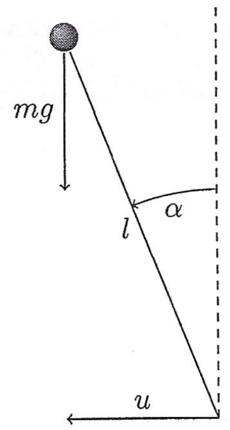

FIGURE 1 – *Pendule inversé contrôlé, version 1.*

2.2. 1. Déterminer les points de fonctionnement du système.

2. On considère un point de fonctionnement où $\cos x_{1e} > 0$, donner les conditions sur K pour que le contrôle par retour d'état $u(t) = u_e + K(x(t) - x_e))$ stabilise asymptotiquement le système.

2.3. On se place ici autour du point de fonctionnement $(x_e, u_e) = (0, 0, 0)$. On suppose maintenant que l'on a accès en pratique qu'à la valeur en sortie $y(t) = x_1(t) = \alpha(t)$ et on considère le contrôle par retour de sortie $u(t) = ky(t)$.

1. Peut-on par la méthode précédente obtenir un contrôle qui stabilise le système ?
2. On considère la fonction

$$\begin{aligned} V : \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (x_1, x_2) &\longmapsto \frac{g+k}{l}(\cos x_1 - 1) + \frac{kx_1}{l}\sin x_1 + \frac{x_2^2}{2}. \end{aligned}$$

   (a) Donner une relation entre g et k pour qu'il existe $B(0, \eta)$ sur laquelle $V(x) > 0$ si $x \neq 0$.

   (b) Si $x(\cdot)$ est une solution du système montrer que $\frac{d}{dt}(V(x(t)) = 0$.

   (c) En déduire que le point $(0, 0, 0)$ n'est pas asymptotiquement stable, mais qu'il est stable.

TD 3.1 Auto

Automatique

Exercice 1 :

(S) $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases}$

1/ $\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$

3./ Contrôlable ssi $rg\{(B\ AB \dots A^{n-1}B)\} = n$ (Critère de Kalman).

$rg\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow$ le système est donc contrôlable.

2/ Point de fonctionnement : (x_e, u_e) tq $f(x_e, u_e) = 0$

$A x_e + B u_e = 0$ $\quad (x_e, u_e) = \left\{ x = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix}, u_e = 0 \right\}$

$x_{2e} = 0$

$u_e = 0$.

4/a) On a $u(t) = Kx(t)$ ie $u(t) = (k_1, k_2)\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t) = (A + BK)x(t) = Cx(t)$.

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} \det(C - \lambda I) = \lambda^2 - k_2\lambda - k_1 \\ \text{On veut } P(\lambda) = (\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow k_1 = -1.\quad k_2 = -2.$

b) $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bky(t)$ on peut l'écrire $\dot{x}(t) = (A + B(k\ 0))x(t) = Cx(t)$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \det(C - \lambda I) = \lambda^2 - k$.

* $k \neq 0$: 1er cas : $k < 0$ $\quad \lambda = \pm i\sqrt{-k} \Rightarrow$ stable ($\lambda = 0$ non vp).

  2è cas : $k > 0$ $\quad \lambda = \pm\sqrt{k}$ ∃ vp pos → non stable

* $k = 0$: instable (on montre par intégration $x_1(t) = x_{20}t + x_{10}$)

Dans le cas linéaire, si 0 est v.p. la dimension du sep engendré par 0 doit être égal à l'ordre de multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique

Exercice 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t). \\ \dot{x}_2(t) = \frac{g}{\ell}\sin(x_1(t)) - \frac{\cos(x_1(t))u(t)}{\ell}. \end{cases}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)\, u(t)) =$$

$$f \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ (x, u) \to \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{\cos(x_1)\times u}{\ell} \end{pmatrix} \end{cases}$$

1/ $g(x) = f(x, 0) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{\ell}\sin(x_1) \end{pmatrix}$ On a bien $g(0) = 0$ donc $x_e = (0,0)$ est bien un pt de fonctionnement

On calcule la Jacobienne de g :

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell}\cos x_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } J_g(0,0) : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche ses v.p. $\lambda = \pm\sqrt{\frac{g}{\ell}}$ $g > 0$, $\ell > 0$.

$\exists$ vp > 0 donc le système est non stable

2/ a/ $f(x_e, u_e) = 0 \iff \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ g\sin x_{1e} - \cos x_{1e}\, u_e = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ u_e = g\tan x_{1e} \end{cases}$

$(S) = \{ (x_e, u_e)\ ,\ x_e = (x_{e1}, 0)\ x_{e1} \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]\ ,\ u = g\tan x_{1e} \}$.

b) Avec $u(t) = K(x(t) - x_e) + u_e$.

$\dot{x}(t) = g(x(t)) = f(x(t), u_e + K(x(t) - x_e)) \Rightarrow x_e$ point d'éq de $\dot{x}(t) = g(x(t))$.

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ x \to g(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{\cos(x_1)}{\ell}\times\left(K_1(x_1 - x_{e1}) + K_2(x_2 - x_{e2}) + u_e\right) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$J_g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell}\cos x_1 + \frac{\sin x_1}{\ell}(u_e + K_1(x_1 - x_{e1}) + K_2(x_2 - x_{e2})) - \frac{\cos x_1 K_1}{\ell} & -\frac{\cos x_1\, K_2}{\ell}. \end{pmatrix}$$

$$J_g(x_e) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell}\cos x_{e1} + \frac{\sin x_{1e}}{\ell}\left(g\tan x_{e1}\right) - \frac{\cos x_{e1}}{\ell}K_1 & -\frac{\cos x_{e1} K_2}{\ell} \end{pmatrix}$$

TD 3.2
Auto

$\det J_g(x_e) = \frac{k_1 - g}{\ell} \cos x_{e1} - \frac{\sin^2 x_{e1}}{\ell \cos x_{e1}} g > 0.$

$tr(J_g(x_e)) = -\frac{\cos x_{e1}}{\ell} k_2 < 0$

Comme $\cos x_{e1} > 0$

$$\begin{cases} \frac{k_1 - g}{\ell} \cos^2 x_{e1} - \sin^2 x_{e1} \times \frac{g}{\ell} > 0 \\ k_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 \cos^2 x_{e1} - g > 0 \\ k_2 > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists$ vp à partie réelle positive $\Rightarrow$ on ne peut rien conclure.

3/ a) $g(t) = k\,x(t)$

$g(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\cos(x_1)}{\ell} k\,x_1(t) \end{pmatrix}$

$0 \qquad 1 \qquad tr = 0$

$\frac{g}{\ell}\cos x_1 + \frac{\sin x_1}{\ell} k x_1(t) - \frac{k\cos x_1}{\ell} \quad 0$

$\det = \lambda^2 - \frac{g-k}{\ell}\cos x_1$

$\lambda = \pm\sqrt{\frac{g-k}{\ell}}$

$\exists$ vp > 0 donc pas stable

b) 1) $V(x) = \frac{g+k}{\ell}\left(-\frac{x_1^2}{2} + o(x_1^4)\right) + \frac{k x_1}{\ell}\left(x_1 + O(x_1^3)\right) + \frac{x_2^2}{2}$

$= \frac{-g+k}{2\ell} x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + O(x_1^4) + r(x_1).$

$\geq \frac{k-g}{2\ell} x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} - C x_1^4.$

car $k-g > 0$: $\exists C > 0\ \exists \varepsilon_1 > 0$ tq $\forall x \in]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[,\ |r(x_1)| < C|x_1|^4$

$\Rightarrow V(x) > x_1^2\left(\frac{k-g}{2\ell} - C x_1^2\right) + \frac{x_2^2}{2}.$

Posons $\varepsilon = \min\left(\varepsilon_1, \sqrt{\frac{k-g}{2\ell C}}\right)$ $\forall x_1 \in]-\varepsilon_1, \varepsilon[$ $V(x) > 0$

2) $\frac{dV(x(t))}{dt} = J_V(x(t)) \times \dot{x}(t).$

$t \xrightarrow{x} x(t) \xrightarrow{V} V(x(t))$

$J_V = \left(\frac{g+\cancel{k}}{\ell}(-\sin x_1) + \frac{k\cos x_1 \cos x_1}{\ell} + \frac{k}{\cancel{\ell}} \sin x_1 \quad x_2 \right)$

$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\cos x_1(t)}{\ell} k x_1(t) \end{pmatrix}$

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = x_2(t)\left(-\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) + \frac{kx_1}{\ell}\cos x_1(t)\right) + x_2(t)\left(\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{kx_1}{\ell}\cos x_1(t)\right).$$

$$= 0.$$

3) Si $x(t, x_0)$ sol de $\begin{cases} \dot{x}(t) = \dots \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ alors $V(x(t)) = V(x_0)$, $\forall t$.

$\Rightarrow$ Le sys n'est pas asymptotiquement stable.

Supposons que le syst soit asympt stable en $(0,0)$

$\exists B \; \forall x_0 \in B \quad x(t, x_0) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

V est continue $\Rightarrow V(x(t, x_0)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} V(0,0) = 0.$

$= V(x_0).$