Elements de correction, Examen de Théorie des Graphes

Vendredi 27 Mars 2015

Exercice 1 : Multiplication latine

1. $G = \{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 2)\}$ (dessiner le graphe va aussi).
2. OK
3. $M = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 23 & 0 \\ 31 & 0 & 0 & 34 \\ 0 & 42 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou en booléen $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. $M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 142 & 123 & 0 \\ 231 & 0 & 0 & 234 \\ \cancel{312 + 342} & \cancel{0} & 0 & 314 \\ 0 & 0 & 423 & 0 \end{bmatrix}$
5. On voit que $M + M^2 + M^3$ n'a aucun coefficient nul.

Exercice 2 : Une propriété des graphes bipartis

Soit G un graphe biparti et ϕ un coloriage à 2 couleurs de G. Si $(x_0, ..., x_n)$ est une chaîne, on a pour $i \in \{0, ..., n?1\}$, $\phi(x_i) \neq \phi(x_{i+1})$, d'où $\phi(x_{2k}) = \phi(x_0)$ et $\phi(x_{2k+1}) = \phi(x_1)$. Maintenant, si cette chaîne est un cycle, on a $x_0 = x_n$, d'où $\phi(x_0) = \phi(x_n)$, ce qui implique que n est pair. G ne possède donc pas de cycle de longueur impaire.
Soit maintenant $G = (V, E)$ un graphe ne possédant pas de cycle de longueur impaire. On doit construire un coloriage propre de G. Comme les composantes connexes ne communiquent pas entre elles, on peut se ramener au cas où G est connexe : il suffira ensuite de recoller les applications. Soit x_0 un sommet quelconque de V. Pour $x \in V$, on note $l(x)$ la longueur minimale d'un chemin reliant x_0 à x. On pose alors $\phi(x) = 1$ si $l(x)$ est pair, $\phi(x) = 2$ sinon. Soit $\{x, y\} \in E$: il est facile de voir que $|l(x)?l(y)| \leq 1$. Si on avait $l(x) = l(y)$, on pourrait construire un cycle de longueur $2l(x) + 1$ contenant le point x_0 et l'arête $\{x, y\}$. Ceci est contraire à l'hypothèse selon laquelle le graphe ne contient pas de cycle de longueur impaire. On a donc $|l(x)?l(y)| = 1$, donc $l(x)$ et $l(y)$ ne sont pas de même parité, ce qui implique $\phi(x) \neq \phi(y)$. Le coloriage est donc bien propre.

Exercice 3 : Notion de rang sur les DAG

Le graphe orienté G est sans circuit (appelé DAG) si et seulement si on peut attribuer un nombre $r(v)$, appelé le rang de v, à chaque sommet v de manière que pour tout arc (u, v) de G on ait

$$r(u) < r(v) \tag{1}$$

1. D'après la propriété (1) un chemin de sommets a des valeurs de rang strictement croissante, donc ne peut pas être circulaire.
2. Algorithme de calcul du rang

```
Donnee : digraphe G = (V,E) sans circuit.
Resultat : rang r(v) de chaque sommet v dans V du digraphe G .
Debut
r := 0
X := V
R : l'ensemble des sommets de X sans prédécesseur dans X

Tant que X n'est pas vide
faire
r(v) := r pour tout sommet v dans R
X := X - R
R : l'ensemble des sommets de X sans pre?de?cesseur dans X r := r + 1
Fin tant que

Fin
```

Exercice 4 : Propriétés des arbres

(1) => (2) :
par récurrence sur n
Vrai pour $n = 2$
Si vrai pour n. On montre que tout graphe d'ordre $n+1$ qui a n arête a forcément une arête de degré 1 : si toute les arêtes sont de degré 2, la somme de degré $\geq 2(n+1)$ or la somme de degré $= 2m$, où m est le nombre d'arêtes, d'où $m \geq m+1$ impossible donc il existe un sommet de degré 1. Si on enlève l'arête menant à ce sommet (2) est vrai, sinon, on applique la récurrence sur le sous-graphe privé de ce sommet est (2) est donc vraie par récurrence.
(2) => (1) :
On montre que G a $n-1$ arêtes par récurrence sur n. Si il y a un cycle, on peut enlever un arête de ce cycle sans perdre la connexité.