Examen - Session 1

Tous les documents sont autorisés.
Les trois exercices sont à rédiger sur des feuilles séparées.
Le barême donné est indicatif.

▷ **Exercice 1.** (8 points) On considère, pour $a > b > 0$, le problème

$$(P) \begin{cases} \min f(\theta, z) = (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)/z^2 + z^2 \\ (\theta, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

1.1. Résoudre la condition nécessaire du premier ordre du problème (P).

1.2. Parmi les points de la question précédente, quels sont ceux qui sont des minima locaux?

1.3. Le problème (P) est-il un problème convexe?

1.4.
1. Montrer que l'on peut supposer que $z \geq z_0$, avec $z_0 > 0$ suffisamment petit.
2. En déduire l'existence de solutions et donner ces solutions.

▷ **Exercice 2.** (5 points) On s'intéresse ici à la modélisation via les réseaux de neurones.

Définition 1. Un neurone formel est une fonction paramétrée par $n+1$ paramètres $w_1, \dots, w_n, \theta$:

$$\begin{aligned} g : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto g(x, w, \theta) = \sigma(\textstyle\sum_{i=1}^n w_i x_i + \theta) \end{aligned}$$

où σ est une fonction donnée qui s'appelle une fonction d'activation. Chaque paramètre w_i s'appelle le poids synaptique associé au signal d'entrée x_i.

On prendra dans la suite, sauf mention contraire, comme fonction σ la fonction tangente hyperbolique

$$\begin{aligned} \sigma : \quad & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \end{aligned}$$

Définition 2. On a à notre disposition K points $x^k \in \mathbb{R}^n$ et $y^k \in \mathbb{R}$, on appelle apprentissage du neurone l'estimation par les moindres carrés des paramètres du neurone.

2.1. Écrire le problème au moindres carrés qui défini l'apprentissage. On donnera en particulier la fonction résidu r en précisant clairement l'espace de départ et l'espace d'arrivée.

2.2. Ce problème est-il un problème aux moindres carrés linéaires? Si oui, on donnera la matrice X.

2.3. Si on prend comme fonction d'activation σ l'identité, le problème au moindres carrés devient-il linéaire? Si oui, on donnera la matrice X.

▷ **Exercice 3.** (7 points) Equation d'advection-diffusion 1D

Soit $u : [0,1] \times [0,T] \to \mathbb{R}$ solution du problème

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + a\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in]0,1[\times]0,T[, \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t \in]0,T[, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \forall x \in [0,1]. \end{array}\right. \tag{1}$$

avec $(a,\nu) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, et $u_0(0) = u_0(1) = 0$.

On souhaite approcher u par la méthode des différences finies. Pour cela, on considère une discrétisation régulière de $[0,1] \times [0,T]$, de pas d'espace h et de pas de temps Δt, tous les deux supposés constants. Soit $(x_i)_{i=0:N+1}$, avec $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$, et $(t_n)_{n=0:M+1}$, avec $t_0 = 0$ et $t_{M+1} = T$, les points de discrétisation du maillage.

On suppose u suffisamment régulière. On se propose d'étudier les propriétés de consistance et de stabilité d'un schéma numérique, pour la norme infinie $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^N$. Celui-ci s'écrit :

$$(\mathcal{S}) \quad \forall n = 0:M, \forall i = 1:N, \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + a\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} - \nu\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0. \tag{2}$$

On pose $\lambda = \dfrac{a\Delta t}{h}$ et $c = \dfrac{\nu \Delta t}{h^2}$.

3.1. Montrer que ce schéma s'écrit matriciellement :

$$\forall n = 0:M, \quad u_h^{n+1} = A_h u_h^n + \Delta t F^n \tag{3}$$

avec $u_h^n = (u_i^n)_{i=1:N}$ et $A_h \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et $F^n \in \mathbb{R}^N$ que vous préciserez en fonction de λ et c. Préciser u_0^n et u_{N+1}^n satisfaisant les conditions aux limites.

3.2. Montrer que ce schéma est consistant pour la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^N$ et préciser les ordres de consistance en temps et en espace de ce schéma pour cette même norme. Vous justifierez votre réponse et préciserez les hypothèses de régularité sur la solution u dont vous vous êtes servis.

3.3. On suppose les conditions $0 < \lambda \leq 2c \leq 1$ vérifiées. Montrer que le schéma est alors stable pour la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^N$.

3.4. Conclure quant à la convergence du schéma pour la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^N$.