3.1

INP ENSEEIHT

Spécification Algébrique. Induction Structurelle.

Soit un ensemble A donné, l'ensemble $liste(A)$ des listes contenant des éléments de A est défini par les opérateurs `Nil` et `Cons` comme le **plus petit** ensemble de termes tels que :

1. $\texttt{Nil} \in \texttt{liste}(A)$
2. $\forall t \in A. \forall q \in \texttt{liste}(A).\ \texttt{Cons}(t, q) \in \texttt{liste}(A)$

Cette définition est équivalente à : $\texttt{liste}(A) = \{\texttt{Nil}\} \cup \{\texttt{Cons}(t, q) \mid t \in A, q \in \texttt{liste}(A)\}$.

Exercice 1 La concaténation de deux listes est définie sous la forme d'équations entre termes :

$$\text{(a) } \forall y \in \texttt{liste}(A).\ \text{append}(\texttt{Nil}, y) = y$$
$$\text{(b) } \forall x \in A. \forall y, z \in \texttt{liste}(A).\ \text{append}(\texttt{Cons}(x, z), y) = \texttt{Cons}(x, \text{append}(z, y))$$

a. montrer par induction que :

$$\forall x \in \texttt{liste}(A).\ \text{append}(x, \texttt{Nil}) = x$$

b. montrer par induction que :

$$\forall x, y, z \in \texttt{liste}(A).\ \text{append}(x, \text{append}(y, z)) = \text{append}(\text{append}(x, y), z)$$

Exercice 2 Soit la définition suivante de la fonction rev :

$$\text{(c) } \text{rev}(\texttt{Nil}) = \texttt{Nil}$$
$$\text{(d) } \forall x \in A. \forall y \in \texttt{liste}(A).\ \text{rev}(\texttt{Cons}(x, y)) = \text{append}(\text{rev}(y), \texttt{Cons}(x, \texttt{Nil}))$$

a. montrer par induction que :

$$\forall x \in \texttt{liste}(A).\ \text{rev}(\text{rev}(x)) = x$$

en introduisant éventuellement des lemmes intermédiaires.

[0]La formule "$\forall x \in D.P$" est un raccourci syntaxique pour "$\forall x.(x \in D \rightarrow P)$".

TD Mod

3.1 Spécification Algébrique . Induction structurelle

Règle d'induction:

$$\dfrac{\dfrac{p(e)}{p(cons_1(e))} \quad \cdots \quad \dfrac{p(e)}{p(cons_n(e))}}{\forall e \ p(e)}\ \text{Ind}$$

Exercice 1:

a) append $(x, Nil) = x$

Cas de base

append $(Nil, Nil) = Nil$ (ppté (a))

Cas induction

Supposons que append $(x, Nil) = x$

Append$(cons(t, x), nil) \overset{(b)}{=} Cons(t, App(x, nil))$

$\overset{HR}{=} Cons(t, x)$

Donc $\overset{\forall x}{}$ append $(x, Nil) = x$

b) append$(x, append(y, z)) =$ append(append$(x, y), z)$.

Cas de base

append (Nil, append $(y, z)) \overset{(a)}{=}$ append (y, z)

append (append (Nil, $y), z) \overset{(a)}{=}$ append (y, z)

Cas induction HR app$(x, app(y, z)) = app(app(x, y), z)$

$App(cons(t, x), A(y, z)) \overset{b}{=} Cons(t, A(x, A(y, z)))$ HR

$\overset{HR}{=} Cons(t, A(A(x, y), z))$

$\overset{b}{=} App(Cons(t, A(x, y)), z)$

$\overset{b}{=} App(App(Cons(t, x), y), z))$

Exercice 2 :

Mq $\forall x \in$ liste(A) $rev(rev(x)) = x$

a $rev(rev(x)) = x$

Cas de base $rev(rev(Nil)) \overset{(c)}{=} rev(Nil) \overset{(c)}{=} Nil$

Cas induction:

Supp $rev(rev(x)) = x$

$rev(rev(Cons(t, x)) \overset{(d)}{=} rev(append(rev x, Cons(t, nil)))$

$\overset{\text{lemme}}{\Rightarrow} = append(rev(Cons(t, nil)), rev\ rev(x)))$

$\forall x, y \in$ liste A

Lemme : $rev(append(x, y))) = append(rev\ y, rev\ x)$

$\overset{HR+(d)}{=} append(append(rev(Nil), Cons(t, Nil)), x)$

$\overset{c}{=} append(append(Nil, Cons(t, Nil)), x)$

$\overset{a}{=} app(Cons(t, Nil), x)$

$\overset{b}{=} Cons(t, app(Nil, x))$

$\overset{a}{=} Cons(t, x)$

Démonstration du lemme:

$\forall x, y \in$ liste A : $rev(append(x, y)) = append(rev\ y, rev\ x)$

Cas de base : $rev(append(x, Nil)) \overset{a}{=} rev(x)$

$append(rev\ Nil, rev(x)) \overset{c}{=} append(Nil, rev(x)) \overset{a}{=} rev(x)$

$rev(append(Nil, y)) = rev(y)$

$append(rev\ y, rev\ Nil) = append(rev\ y, Nil) = rev\ y$

Cas induction Supp $rev(append(x, y)) = append(rev\ y, rev\ x)$

$rev(append(Cons(t, x), y) \overset{b}{=} rev(Cons(t, append(x, y)))$

$\overset{d}{=} append(rev\ append(x, y), Cons(t, Nil))$

$\overset{HR}{=} append(append(rev\ y, rev\ x), Cons(t, Nil))$

$\overset{11b}{=} append(rev\ y, append(rev\ x, Cons(t, Nil)))$

$\overset{d}{=} append(rev\ y, rev(Cons(t, x)))$