Solution de l'examen de théorie des graphes

Session 1, jeudi 16 janvier 2020

▷ **Exercice 1.**

1.1. Le graphe est le graphe complet K_5. L'arête $\{i, j\}$ est l'arête qui correspond au domino (i, j).

1.2. Le graphe est le graphe complet K_5 donc le degré de chaque sommet est de 4, donc pair. Par suite le graphe est eulérien et il possède un cycle eulérien.

▷ **Exercice 2.** (5 points)

2.1. Si G est connexe, alors il possède un sous-arbre couvrant qui possède $n-1$ arêtes. Mais G possède exactement $n-1$ arêtes. G coïncide donc avec ce sous-arbre couvrant. Ce qui est impossible car G n'est pas un arbre.

2.2. Soit p le nombre de composantes connexes de G ; p est supérieur ou égal à 2. Notons $n_1, \dots, n_p$ le nombre de sommets de ces composantes connexes. On a $n = n_+ \cdots + n_p$. Si aucune composante connexes n'est un arbre alors le nombre d'arêtes de chaque composante connexe G_i est au moins égale à n_i. Par suite le nombre d'arêtes de G est au moins égale à n.

2.3. Si chaque composante connexe est un arbre alors le nombre d'arête de G est de $(n_1 - 1) + \cdots + (n_p - 1) = n - p$ qui ne peut être égale à $n - 1$ car $p \geq 2$. D'où la contradiction.

2.4. Si $p = 2$ alors la composante connexe G_1 qui est un arbre possède $n_1 - 1$ arêtes et la composante connexe G_2 qui n'est pas un arbre possède $(n-1)-(n_1-1) = n_2$ arêtes. Cette composante connexe possède n_2 sommets. Si on considère un sous-arbre couvrant de cette composante connexe, elle possède $n_2 - 1$ arêtes. Par suite l'ajout d'une arête crée un cycle qui est le seul cycle de cette composante connexe.

▷ **Exercice 3.** On construit le graphe des rencontres : les sommets représentent les élèves ; une arête $\{i, j\}$ signale que les élèves i et j se sont rencontrés. Il reste alors à proposer une coloration du graphe utilisant un nombre minimum de couleurs. Chaque couleur correspondra à une place assise. La coloration montre que la bibliothèque dispose d'au moins quatre places assises, car le graphe contient une clique à quatre sommets $B - E - F - G$. Ces quatre places assises sont suffisantes.

▷ **Exercice 4.**

4.1. Le nombre de chaînes fermées de longueur k allant de v_i à v_i est égale au i-ième terme de la diagonale de la matrice A^k. Donc la quantité recherchée est trace(A^k). Or A est symétrique, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Par suite trace$(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$.

4.2.
1. $c_1 = -\text{trace}(A) = 0$.
2. On a
$$(-1)^2 \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}, Card(J)=2} \det(A_J).$$
Les seules matrices A_J d'ordre 2 non nuls sont de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
ce qui correspond au cas où on a une arête entre les sommets correspondants. D'où le résultat
3. On a
$$(-1)^3 \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}, Card(J)=3} \det(A_J).$$
Les seules matrices A_J d'ordre 3 non nuls sont de la forme
$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$
avec a, b et c dans $\{0, 1\}$. Son déterminant vaut $2abc$. Le seul cas où il est non nul correspond à $a = b = c = 1$, c'est à dire où cette sous matrice correspond à un triangle. D'où le résultat.