TD 3 Probabilités - Couples de Variables Aléatoires Discrètes - 1SN

Exercice 1 : Tirages sans remise.

On considère une urne constituée de $N > 1$ boules numérotées de 1 à N. On tire deux boules sans remise dans cette urne. On note X_1 le numéro de la première boule et X_2 le numéro de la seconde boule.
1) Déterminer les lois de X_1, X_2 et du couple (X_1, X_2) (on prendra soin de préciser les domaines de ces variables et vecteur aléatoires).
2) Déterminer la covariance entre X_1 et X_2. On rappelle que :

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3) Déterminer la loi du couple (Z, U) avec $Z = X_1 - X_2$ et $U = X_1$ (on prendra soin de représenter graphiquement l'ensemble des valeurs possibles du couple (Z, U)). En déduire la loi de Z.

Exercice 2 : Décorrélation n'implique pas indépendance !

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une variable aléatoire binaire prenant les valeurs $+1$ et -1 avec $P[Y = 1] = P[Y = -1] = \frac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = XY$.
1) Déterminer la loi de Z
2) Déterminer la covariance du couple (X, Z) notée $\text{cov}(X, Z)$
3) Calculer $P[X + Z = 0]$ et en déduire que X et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 : couple de variables aléatoires discrète et continue.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles telles que Y suit une loi exponentielle de paramètre c (de densité notée $g(y)$) et pour $y > 0$ la loi de X sachant $Y = y$ est la loi de Poisson de paramètre y :

$$\begin{array}{ll} g(y) = ce^{-cy} & y > 0 \\ g(y) = 0 & y \leq 0 \\ P[X = k | Y = y] = \frac{y^k}{k!}e^{-y} & k \in \mathbb{N} \end{array}$$

Déterminer $P[X = k]$.

Exercice 4 : parties entières et fractionnaires

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$. Si k est un entier fixé ($k \in \mathbb{N}^*$), on définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$$\begin{aligned} X &= \text{Ent}(kU) \\ Y &= \text{Frac}(kU) = kU - \text{Ent}(kU) \end{aligned}$$

où $\text{Ent}(kU)$ et $\text{Frac}(kU)$ désignent les parties entières et fractionnaires de kU. Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la première de loi uniforme sur $\{0, ..., k-1\}$, la seconde de loi uniforme sur $[0, 1[$

Applications aux sciences du numérique

Exercice 5 : paquets prioritaires et non prioritaires

On suppose que le nombre de paquets X arrivant dans un commutateur de réseau pendant un intervalle de temps Δ suit une loi de Poisson de paramètre λ. Afin de garantir une certaine qualité de service dans ce réseau, on distingue les paquets prioritaires des paquets non-prioritaires. On note $p \in]0,1[$ la probabilité qu'un paquet soit prioritaire et Y le nombre de paquets prioritaires arrivant au commutateur pendant l'intervalle de temps Δ. On suppose également que les instants d'arrivées de paquets sont des variables aléatoires indépendantes.

1) Déterminer la loi conditionnelle de $Y \,|X = x$ puis la loi du couple (X, Y).

2) Quelle est la loi marginale de Y ? Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3) On pose $Z = X - Y$. Que représente Z ? En déduire sa loi (sans aucun calcul).

4) Quelle est la loi du couple (Z, Y) ? Les variables aléatoires Z et Y sont-elles indépendantes ?

$P(X=n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

$P(Y=k|X=n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$P(X,Y) = P(Y|X)\,P(X)$

$P(Y) = \sum_x P(Y|X=x)\,P(X=x) \to$ Poisson $(p\lambda)$.

X, Y pas ind.

$Z = X - Y$ (nb de paquets non prioritaires)

$P(Z) \sim \mathcal{P}((1-p)\lambda)$ par symétrie.

$P(Z,X) = P(Z = X - Y, Y)$

$= P(X = Z + Y, Y)$ ..

Z et Y st indep car $P(Z,Y) = P(Z) \times P(Y)$

TD3.1
Probas

Couples de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 :

1/ $\left.\begin{array}{l} X_1(\Omega) = [\![1, N]\!] \\ p(X_1 = i) = \dfrac{1}{N} \end{array}\right\} \to X_1 \hookrightarrow$ Uniforme

$X_2(\Omega) = [\![1, N]\!]$

$p(X_2 = j) = p[(X_2 = j \cap X_1 = j) \cup (X_2 = j \cap X_1 \neq j)]$

$= \underbrace{p(X_2 = j \cap X_1 = j)}_{\to 0 \text{ : evt impossible}} + p(X_2 = j \cap X_2 \neq j)$

$= p(X_2 = j \cap X_2 \neq j)$

$p(X_2 = j) = p((X_2 = j) \cap (X_1 \neq j)) = \underbrace{p(X_2 = j \mid X_1 \neq j)}_{\frac{1}{N-1}} \underbrace{P(X_1 \neq j)}_{1 - \frac{1}{N}}$

$= \dfrac{1}{N} \to$ loi X_2

$\underline{X_2 \hookrightarrow U(N)}$

2/ $P(X_1, X_2) = P(X_2 = i \mid X_1 = i)\, P(X_1 = i)$

$= \dfrac{1}{N-1} \times \dfrac{1}{N} \neq P(X_1)\, p(X_2)$ donc pas indep

3/ $\cancel{E}(X_1, X_2) = \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} ij\, P(X_1, X_2)$ $\qquad E(X_1) = E(X_2) = \dfrac{N+1}{2}$

$= \sum\limits_{j=1}^{N} j \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N} i\, P(X_1, X_2)$

$= \dfrac{1}{N(N-1)} \left(\sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{i=1}^{N} ij - \sum\limits_{i=1}^{N} j^2 \right)$

$= \dfrac{1}{N(N-1)} \left(\sum\limits_{j=1}^{N} j \sum\limits_{i=1}^{N} i - \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right)$

$= \dfrac{1}{N(N-1)} \left(\dfrac{N^2(N+1)^2}{4} - \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right)$

$= \left(\dfrac{N(N+1)^2}{4(N-1)} - \dfrac{(N+1)(2N+1)}{6(N-1)} \right)$

$= \dfrac{(N+1)}{(N-1)} \left(\dfrac{N(N+1)}{4} - \dfrac{(2N+1)}{6} \right)$

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 \times X_2) - E(X_1) \times E(X_2).$$

E

$$E(X_1 \times X_2) = \frac{N+1}{N-1}\left(\frac{3N(N+1) - 4N - 2}{12}\right)$$

$$= \frac{N+1}{12(N-1)}(3N^2 - N + 1)$$

$$= \frac{(N+1)(3N+2)(N-1)}{12(N-1)} = \frac{(N+1)(3N+2)}{12}$$

$(N-1)(3N-1)$

$$E(X_1) \times E(X_2) = \frac{(N+1)^2}{4}$$

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{(N+1)(3N+2) - 3(N+1)^2}{12}$$

$$= \frac{(N+1)}{12}(3N+2 - 3(N+1))$$

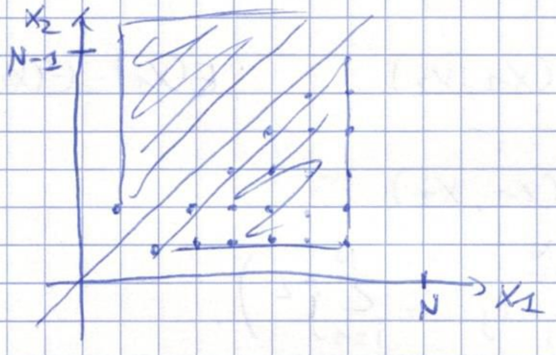
$$= \frac{-(N+1)}{12} =$$

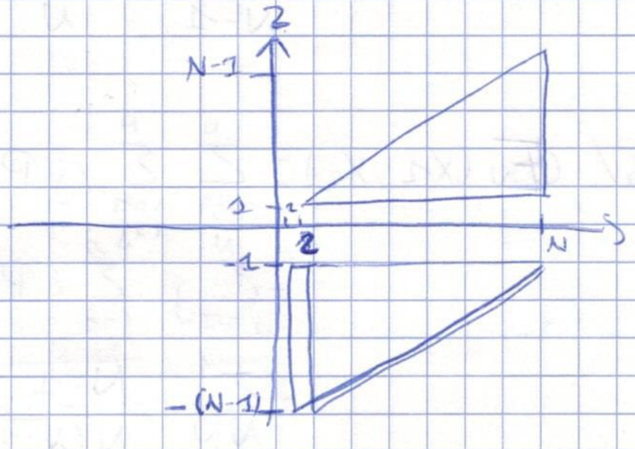
2 v.a. indpdtes -> Cov nulles

3/ $Z = X_1 - X_2$ $\quad Z(\Omega) = [\![1-N, N-1]\!] \setminus \{0\}$

$U = X_1$ $\quad U(\Omega) = [\![1, N]\!]$

$$\begin{cases} X_1 = U \\ X_2 = U - Z \end{cases}$$





$$P(Z, U) = \sum_{i,j} P(X_1 = i, X_2 = j)$$

$$= \sum_{i=} \sum_{j=} \frac{1}{N(N-1)}$$

si $z > 0$ $\quad P(Z=z) = \frac{N-z}{N(N-1)}$

si $z < 0$ $\quad P(Z=z) = \frac{N+z}{N(N-1)}$

$\forall z \in D$ $\quad P(Z=z) = \frac{N-|z|}{N(N-1)}$

$$P(Z=z, U=u) = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j \\ i = u \\ j = u-z}} P(X_1 = i, X_2 = j).$$

$$P(Z) = \sum_U P(Z=z, U=u) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_U$$