Solution de l'examen de théorie des graphes

Session 1, jeudi 17 janvier 2019

▷ Exercice 1.

1.1. On note $V = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ l'ensemble des sommets. On a une arête entre deux sommets P_i et P_j si et seulement si les 2 produits ne peuvent être dans le même wagon.

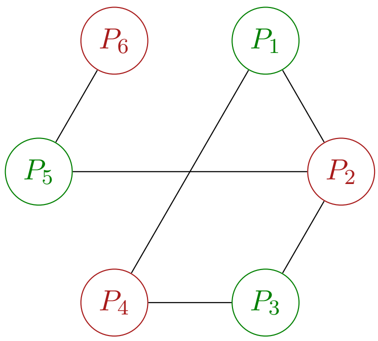

FIGURE 1 – *Modèle.*

1.2. le nombre de wagon minimum est le nombre chromatique. Il existe une arête donc ce nombre est chromatique est au moins de 2 et on trouve facilement une coloration avec 2 couleurs. Par suite le nombre chromatique est bien de 2.

▷ **Exercice 2.**

2.1.

FIGURE 2 – *Graphes 3 réguliers avec 4 et 6 sommets.*

2.2. La somme des degrés des sommets est égale à $3n$ car le graphe est 3-régulier. Mais cette quantité est égale à $2m$, donc est paire. Par suite n est pair.

▷ **Exercice 3.** Un arbre est un graphe connexe donc pour tout sommet $v, \delta(v) \geq 1$. Soit t le nombre de sommet de degré 1 on a

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m = 2(n-1) &= \sum_{v \in V, \delta(v) \geq 2} \delta(v) + t \\ &\geq 2(n-t) + t.\end{aligned}$$

D'où $t \geq 2$.

▷ **Exercice 4.**

4.1. Soit $(v_1, e_1, v_2, \ldots, e_t, v_1)$ un cycle élémentaire (on a réordonné les sommets et arcs). Les t premières colonnes de la matrice d'incidence sommet-arc sont alors (avec $u_i^2 = 1$)

$$\begin{pmatrix} u_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -u_t \\ -u_1 & u_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{t_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -u_{t_1} & u_t \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite, si on note c_j les colonnes de cette matrice $\sum u_j c_j = 0$.

4.2. On considère t colonnes de J (que l'on peut prendre comme étant les t premières en renommant les arcs) telles que $\sum_{j=1}^{t} \alpha_j c_j = 0$ avec $\alpha_j \neq 0$ pour tout j. On considère alors la sous matrice de J constituée des t premières colonnes auxquelles on a enlevé toutes les lignes nulles. On note A cette matrice. Pour chaque ligne de cette matrice on a au moins deux scalaires α_j non nul. Par suite le degré des sommets associés est supérieur ou égale à 2. Si maintenant on considère une composante connexe du graphe G' définie par cette matrice d'incidence. Cette composante connexe ne possède pas de sommet de degré 1 ; ce n'est donc pas un arbre (exercice précédent) et il y a donc un cycle.

4.3. On a monter l'équivalence : les colonnes de la matrice d'incidence sommet-arc sont linéairement dépendants si et seulement si le graphe G possède un cycle. Ce qui est équivalent au théorème.