TD 4 – Existence, unicité

▷ **Exercice 1.** Soit le problème d'optimisation

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\min f(x) = -x_2^3 - 2x_2^2 - x_2\\ x \in C = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_2 = 0\}.\end{array}\right.$$

1.1. Montrer que (P) possède une solution.

1.2. Déterminer si (P) est convexe.

▷ **Exercice 2.** Soit le problème d'optimisation

$$(P)\left\{\begin{array}{l}\min f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i/(1+x_i)\\ x \in \mathbf{R}^n\\ (b|x) = 1\\ x \geq 0\end{array}\right.$$

où a et b sont des vecteurs fixés de $(\mathbf{R}_+^*)^n$.

2.1. Montrer que (P) possède une solution.

2.2. Déterminer si la solution de (P) est unique.

▷ **Exercice 3.** Soit $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbf{R})$. On rappelle que, par définition, A est dite *coercive* s'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$(Ax|x) \geq \alpha \|x\|^2$$

où $(.|.)$ est le produit scalaire euclidien standard sur $\mathbf{R}^n$. En considérant le problème

$$\left\{\begin{array}{l}\min(Ax|x)\\ x \in \mathbf{R}^n\\ \|x\| = 1\end{array}\right.$$

montrer que A est définie positive si et seulement si A est coercive.

▷ **Exercice 4.** Soit le problème d'optimisation

$$(P)\begin{cases} \min f(x) = (1/2)\,(Ax|x) + (b|x) + c \\ x \in \mathbf{R}^n \\ Cx = d \end{cases}$$

où $A \in \mathrm{Sym}(n, \mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$, $C \in \mathscr{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ et $d \in \operatorname{Im} C$. Donner une condition suffisante sur A assurant l'existence et l'unicité de solution à (P).

Opti 4.1

TD Existence, Unicité

Exercice 1 :

f continue, C fermé (image réciproque d'un fermé par une app cont.)

C borné. $x_2^2 + x_2 + x_1^2 = 0$

$\Delta = 1 - 4x_1^2 \geq 0$

$1 \geq 4x_1^2$

$\frac{1}{4} \geq x_1^2$

$\boxed{\frac{1}{2} \geq |x_1|}$

$x_2^{(1)} = \dfrac{-1 - \sqrt{1 - 4x_1^2}}{2}$

$x_2^{(2)} = \dfrac{-1 + \sqrt{1 - 4x_1^2}}{2}$

$g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_2$

$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1/2 \end{cases}$ centre de l'ellipse.

$\nabla^2 g(x) = 2I$

$g(x + x^*) = g(x_1, x_2 - \frac{1}{2}) = x_1^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})$

chgmt d'origine $\quad = x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{4} = 0$

$C = g^{-1}(\{0\})$ g cont ~~dér~~ $\{0\}$ fermé donc C fermé

$\begin{cases} g(x) \to +\infty \\ \|x\| \to +\infty \end{cases}$?

$g^2(\rho, \theta) = g(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2 + \rho\sin\theta \to +\infty$

$\rho = \|x\| \to +\infty$

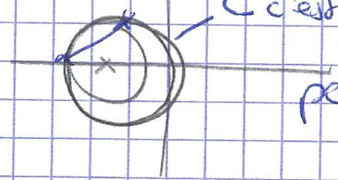
$g(0,0) = 0 = M$

$\exists A > 0, \forall x \; \|x\| > A \quad g(x) > M + 1$

$\Rightarrow \forall x \in C \quad \underline{\|x\| \leq M + 1}$ donc C fermé borné

1.2. C convexe ? f convexe sur C ?

C n'est pas convexe :



C c'est juste le cercle pas le disque.

Exercice 2. f est continue

$\mathbb{R}^n$ fermé

borné car $(b|x) = 1 \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$

$\forall i \in [\![1,n]\!]\ x_i \geq 0$.

→ Compact sur $\mathbb{R}^n$.

Donc (P) admet une sol

$C = \{ x \in \mathbb{R}^n,\ (x|b) = 1,\ x \geq 0,\ \forall i \in [\![1,n]\!]\ b_i > 0 \}$.

$C \neq \emptyset$. $x = \frac{b}{\|b\|^2}$

$\begin{cases} g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ g_i(x) = x_i \end{cases}$ $\begin{cases} C_i = g^{-1}([0,+\infty[) \text{ fermé.} \\ \cdot\ g \text{ cont} \end{cases}$

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — C_i fermé

$x \mapsto (h|x) - 1$. $C_{n+1} = h^{-1}(\{0\})$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]\ x_i \geq 0$.

et $(b|x) = \underbrace{\sum_i x_i b_i}_{\geq 0} \Rightarrow x_i b_i = 1 - \sum_{j \neq i} b_j x_j \leq 1$.

$x_i \leq \frac{1}{b_i}$

donc $\forall i = 1, \dots, n \quad 0 \leq x_i \leq 1/b_i$

Donc C est fermé borné donc compact.

2.2 C est convexe.

$f(x) = \sum_i \frac{a_i}{1+x_i} \quad x \geq 0. \quad \forall i\ a_i > 0$

ex $C = \{x,\ g(x) \leq 0\}$.

⚠ si g convexe C aussi

Espace affine convexe

Opti 4.2.
TD.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = -\frac{a_i}{(1+x_i)^2} \qquad \nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$x \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{a_i}{(1+x_i)^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(x) = \mathrm{Diag}\left(\frac{2a_i}{(1+x_i)^3} \cdots \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \ddots & & 0 \\ & \frac{2a_i}{(1+x_i)^3} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

Donc a au plus une S^*

Exercice 3:

D'après le cours, si A est coercive alors A est sym def >

Mq A sym def $>0 \Rightarrow$ A coercive.

$$(P) : \begin{cases} \min (Ax|x) = f(x) \\ \|x\| = 1 \end{cases}$$

$\forall x \neq \vec{0}, f(x) > 0$

$\begin{cases} f \text{ cont} \\ C = \{x \; \|x\| = 1\} \text{ compact} \end{cases} \Rightarrow$ (P) admet une sol.

$\exists x^*, \|x^*\| = 1$ tq $\forall x, \|x\| = 1 \quad f(x^*) \leq f(x)$.

$\alpha = f^* = f(x^*) > 0$

$\forall x, \|x\| = 1. \quad (Ax|x) \geq \alpha.$

Soit $y \neq \vec{0} \quad x = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \left(\frac{Ay}{\|y\|} \mid \frac{y}{\|y\|} \right) \geq \alpha.$

$(Ay|y) \geq \alpha \|y\|^2.$

Exercice 4 :

$$(P) : \begin{cases} \min f(x) = \frac{1}{2}(Ax|x) + (b|x) + c \\ x \in \mathbb{R}^n \\ Cx = d \end{cases}$$

$d \in \operatorname{Im} C$

$D = \{x \in \mathbb{R}^n, Cx = d\} \Rightarrow D \neq \emptyset$

D est fermé (image réciproque d'un point par C).

Si A def > 0, on a $f(x) \geq \alpha \|x\|^2 - \|b\| \|x\| + c \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$