TD 5 – Problèmes sans contraintes

▷ **Exercice 1.** Donner un exemple de fonction f (de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$), deux fois dérivable, ayant un minimum strict en un point $\overline{x}$ et telle que dans toute boule $\mathcal{B}(\overline{x},\rho)$ il existe un point $x \in \mathcal{B}(\overline{x},\rho)$ vérifiant $f''(x) < 0$.

▷ **Exercice 2.** Soit

$$\left\{\begin{array}{ll} f: & \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ & (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2^2 + x_2^2. \end{array}\right.$$

Déterminer toutes les solutions locales des deux problèmes d'optimisation suivants, et qualifier si ce sont des solutions globales ou non :

$$(P_1)\left\{\begin{array}{ll} Min & f(x_1,x_2) \\ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 & \end{array}\right. \qquad (P_2)\left\{\begin{array}{ll} Max & f(x_1,x_2) \\ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 & \end{array}\right.$$

▷ **Exercice 3.** Soit

$$\left\{\begin{array}{ll} f: & \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ & (x_1,x_2) \mapsto f(x_1,x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1+x_2)^2. \end{array}\right.$$

Déterminer toutes les solutions locales des deux problèmes d'optimisation suivants, et qualifier si ce sont des solutions globales ou non :

$$(P_1)\left\{\begin{array}{ll} Min & f(x_1,x_2) \\ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 & \end{array}\right. \qquad (P_2)\left\{\begin{array}{ll} Max & f(x_1,x_2) \\ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 & \end{array}\right.$$

▷ **Exercice 4.** Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ et soit l'application f définie par

$$\left\{\begin{array}{ll} f_{\alpha,\beta} & \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ & (x_1,x_2) \mapsto f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1x_2) - \beta x_1 - x_2 + 3. \end{array}\right.$$

En discutant les valeurs de (α,β), déterminer toutes les solutions locales des deux problèmes d'optimisation suivants, et qualifier si ce sont des solutions globales ou non :

$$(P_{\alpha,\beta})\left\{\begin{array}{ll} Min & f_{\alpha,\beta}(x_1,x_2) \\ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 & \end{array}\right. \qquad (Q_{\alpha,\beta})\left\{\begin{array}{ll} Max & f_{\alpha,\beta}(x_1,x_2) \\ (x_1,x_2) \in \mathbf{R}^2 & \end{array}\right.$$

Problèmes sans contraintes.

Exercice 2 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2^2 + x_2^2 \end{cases}$$

$$(P_1) : \begin{cases} \min \; f(x_1, x_2) \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2^2 \\ 6x_1x_2 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

On cherche à déterminer les points qui annulent le gradient.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2^2 = 0 \\ 6x_1x_2 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2^2 = 0 \\ (6x_1 + 2)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = 0 \text{ et } x_1 = 0 \\ \begin{cases} x_2 \neq 0 \\ 2x_1 + 3x_2^2 = 0 \\ (6x_1 + 2) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \\ \quad \text{ou} \\ x_1 = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ x_1 = -\frac{1}{3} \text{ et } x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Ainsi $S_{(P_1)} \subset \left\{ (0,0) ; \left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) ; \left(-\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right) \right\}$.

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 6x_2 \\ 6x_2 & 6x_1 + 2 \end{pmatrix}$$

$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ déf $> 0 \overset{\text{C.S 2e ordre}}{\Longrightarrow} (0,0)$ min local de f.

C.S 2e ordre

$\nabla^2 f\left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \det \nabla^2 f\left(-\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) < 0 \Rightarrow \lambda_1 < 0 < \lambda_2$

CN : 2e ordre x^* min local $\Rightarrow \nabla^2 f(x^*)$ semi déf > 0

$\exists \lambda < 0$ vp de $\nabla^2 f(x^*)$

$\Longrightarrow x^*$ non min local.

Or $f(-1,1) = 1 - 3 + 1 < 0 < f(0,0)$

$\Rightarrow (0,0)$ n'est pas un min global.

(P_2) : Max $f(x) \Leftrightarrow$ Min $(-f(x))$.

Exercice 3 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x) \longrightarrow f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^2 \end{cases}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1^3 - 2(x_1 + x_2) \\ 4x_2^3 - 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix}.$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_2^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = 0 \\ 4x_1^3 - 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ 4x_1^3 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1^2 - 1)\, x_1 = 0. \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \text{ et } x_2 = 1 \\ x_1 = 0 \text{ et } x_2 = 0 \\ x_1 = -1 \text{ et } x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12x_2^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -4$$ pas de min.

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \nabla^2 f(-1,-1)$$ dpf > 0 car det > 0 et tr > 0.

$\Rightarrow (1,1)$ et $(-1,-1)$ sont des min locaux.

$$\hat{f}(\rho, \theta) = \rho^4 (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) - \rho^2 (\cos\theta + \sin\theta)^2.$$

$$\geq k\rho^4 - \rho^2 4 \quad k > 0 \xrightarrow[\|x\| = \rho \to +\infty]{} +\infty.$$

Mq $\exists k > 0$ tq $\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) \geq k$.

$$\begin{cases} \text{Min } g(\theta) = \cos^4\theta + \sin^4\theta. \\ \theta \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad \exists \theta^* \in [0, 2\pi] \quad g(\theta^*) \leq g(\theta)$$

Or $g(\theta) > 0 \ \forall \theta$ $\quad g(\theta^*) = k > 0$. $S = \{(-1,-1), (1,1)\}$

Opti TD 5.2

Pour (P_2), $\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 4 \end{matrix}$ semi-def ≥ 0.

On ne peut pas conclure

On a pas de min local. $f(x,0) = x_1^4 - x_1^2 = x_1^2(x_1^2 - 1)$.

$\forall x_1 \in]-1, 1[$ $x_1 \neq 0$. $f(x_1, 0) < 0 = f(0,0)$.

Exercice 4 :

$f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x_1, x_2) \rightarrow f_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 x_2) - \beta x_1 - x_2 + 3$.

$(P_{\alpha,\beta})$: $\begin{cases} \min f_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

$\nabla f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 - \beta \\ x_2 + \alpha x_1 - 1 \end{pmatrix}$

$\nabla f_{\alpha,\beta}(x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 + \alpha x_2 - \beta = 0 \\ x_2 + \alpha x_1 - 1 = 0 \end{cases}$

$x_1 = -\alpha x_2 + \beta$

$x_2 = -\alpha x_1 + 1$

$x_1 + x_2 - \beta = 0$
$x_1 + x_2 - 1 = 0$
$\beta =$

$x_1 = -\alpha(-\alpha x_1 + 1) + \beta$.

Si $\alpha = 1$ $\beta = 1$
et $x_1 = 1 - x_2$.

Si $\alpha \neq 1$ $x_1 = \alpha^2 x_1 - \alpha + \beta$.

$\boxed{x_1 = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha^2}}$ $\quad x_2 = \frac{1 - \alpha\beta}{1 - \alpha^2}$

$x_2 = \frac{-\alpha\beta + \alpha^2 + 1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 - \alpha^2}$.

$\nabla^2 f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ det $= 1 - \alpha^2 > 0$

$\Rightarrow \alpha^2 < 1$

ie $\alpha < 1$

Si $|\alpha| < 1$ est pt min locaux.

Si $\alpha = 1$ indéterminé

Si $\alpha > 1$ pas min local

CN : 1^{er} ordre $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2^{è}$ ordre $\nabla^2 f(x)$ semi-déf >0

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 - \beta \\ x_2 + \alpha x_1 - 1 \end{pmatrix}$ $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$

$\nabla^2 f(x)$ semi-déf pos $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-\alpha^2 \geq 0 \\ 1+1 \geq 0 \end{cases}$ $\alpha \in [-1,1]$

Cas 1 : $\alpha \notin [-1,1]$ alors $\nabla^2 f(x)$ admet une v.p neg $\Rightarrow x$ non min local.

Cas 2 : $\alpha \in [-1,1]$ $\nabla^2 f(x)$ est semi-déf >0 $\forall x$ donc f convexe.

Donc une CNS de sol. est $\nabla f(x) = 0$.

$\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = \beta \\ \alpha x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

$\alpha \neq -1$ et $\alpha \neq 1 \Rightarrow \exists!$ sol.

$\alpha = -1$ ou $\alpha = 1$.

$\beta \in \mathrm{Im} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ alors $\exists$ sol sinon $S = \emptyset$.

On trouve si $\alpha = \pm 1$ $\underline{1 - \alpha\beta = 0}$

Si $1 - \alpha\beta = 0$ alors $S = \{x \in \mathbb{R},\ x_2 = \beta - \alpha x_2\}$.

Sinon $S = \emptyset$.

Pour le max :

$\nabla^2 g(x) = \nabla^2 - f(x) = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{tr}\, \nabla^2 g(x) = -2 < 0$

donc $\exists \lambda < 0$

pas de max.