TD4, Automatique
Intégration numérique

O. Cots, B. Durix & J. Gergaud

1 Introduction

On désire calculer la solution sur un intervalle $[t_0, t_f]$ du problème de Cauchy

$$(IVP)\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=f(t,x(t))\\ x(t_0)=x_0,\end{array}\right.$$

où $f : \Omega \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, Ω ouvert et $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Définition 1.1 (Définition classique). On suppose f continue. On appelle solution classique de (IVP) tout couple (I, x), I intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, contenant t_0 et $x : I \to \mathbf{R}^n$ dérivable en tout point et vérifiant :

1. $(t, x(t)) \in \Omega, \forall t \in I$;
2. $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \forall t \in I$;
3. $x(t_0) = x_0$.

Une telle solution est aussi appelée courbe intégrale de l'équation différentielle.

Remarque 1.2. *Si f est continue (respectivement C^k) et (I, x) est une solution, alors x est C^1 (respectivement C^{k+1}).*

2 Exemples

2.1 Exemple 1

$$(IVP)\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1(t)=x_1(t)+x_2(t)+\sin t\\ \dot{x}_2(t)=-x_1(t)+3x_2(t)\\ x_1(0)=-9/25\\ x_2(0)=-4/25.\end{array}\right.$$

La solution est

$$x_1(t)=(-1/25)(13\sin t+9\cos t)$$
$$x_2(t)=(-1/25)(3\sin t+4\cos t).$$

Sur cet exemple on constate que si on utilise les valeurs des paramètres par défauts dans les codes d'intégrations numériques on peut très rapidement obtenir des résultats faux. Par exemple sur la Fig. 1, la solution calculée pour les valeurs par défauts des paramètres `RelTol` et `AbsTol` de ODE45 n'est pas du tout périodique.

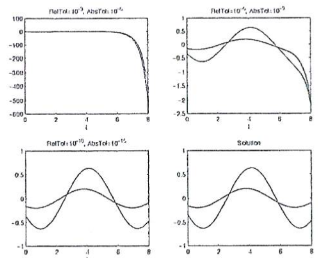


FIGURE 1 – *Solutions calculées avec* ODE45, `RelTol=`10^{-3} et `AbsTol=`10^{-6}, `RelTol=`10^{-6} et `AbsTol=`10^{-9}, `RelTol=`10^{-10} et `AbsTol=`10^{-15} *et solution exacte*

Exemple 2.1. *[Orbite d'Arenstorf] On considère deux corps de masses $(1-\mu)$ et μ en rotation circulaire dans le plan, et un troisième corps de masse négligeable dont on souhaite étudier le mouvement $x(t) = (x_1(t)x_2(t))^T$ en fonction de l'attraction des 2 autres corps dans le même plan. Les équations du mouvement sont*

$$(IVP)\left\{\begin{array}{l}\ddot{x}_1(t)=x_1(t)+2\dot{x}_2(t)-\mu'\frac{x_1(t)+\mu}{r_1^3(t)}-\mu\frac{x_1(t)-\mu'}{r_2^3(t)}\\ \ddot{x}_2(t)=x_2(t)-2\dot{x}_1(t)-\mu'\frac{x_2(t)}{r_1^3(t)}-\mu\frac{x_2(t)}{r_2^3(t)}\\ r_1(t)=\sqrt{(x_1(t)+\mu)^2+x_2^2(t)}\\ r_2(t)=\sqrt{(x_1(t)-\mu')^2+x_2^2(t)}\\ x_1(0)=0.994, \dot{x}_1(0)=0\\ x_2(0)=0\\ \dot{x}_2(0)=-2.00158510637908252240537862224,\end{array}\right.$$

avec $\mu = 0.012277471$ et $\mu' = 1-\mu$. La solution est alors périodique de période $t_f = T = 17.0652165601579625588917206249$. Elle est visualisée sur la figure 2.

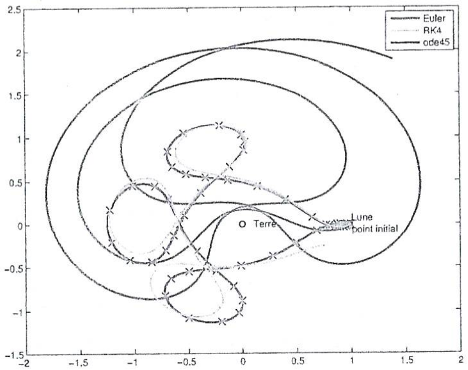


FIGURE 2 – *Orbite d'Arenstorf calculée avec Euler (24000 pas équidistants),* RK4 *(6000 pas équidistants) et* ODE45 *(64 pas variables),* cf.*[3] page 130. Le professeur Ernst Hairer est né en 1949 et est le père de Martin Hairer, médaille Fields 2014.*

3 Intégration numérique par les méthodes de Runge-Kutta

On considère une subdivision $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_f$ de I. On note $h_i = t_{i+1} - t_i, i = 0, N-1$, les pas en temps (non nécessairement égaux), et $h_{max} = \max_i(h_i)$. Nous allons calculer successivement les valeurs approchées $x_1, \ldots, x_N$ de $x(t_1), \ldots, x(t_N)$. $x(t_{i+1}) = x(t_i+h) = x(t_i) + \dot{x}(t_i).h + o(h^2)$ $= x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)) + o(h^2)$.

h_i : cte $= \frac{t_f - t_0}{N}$

Remarque 3.1. *Pour simplifier les notations, nous n'écrirons dans la suite que le premier pas*

$$x_1 = x_0 + \Phi(t_0, x_0, h).$$

Définition 3.2 (Schéma d'Euler (1768)). On appelle méthode d'Euler explicite le schéma

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0). \tag{1}$$

Remarque 3.3. *Le shéma d'Euler explicite est tout simplement une approximation de l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))ds$ par $hf(t_0, x_0)$.*

Exemple 3.4.

$$(IVP)\begin{cases} \dot{x}(t) = t^2 + x^2(t) \\ x(-1.5) = -1.4 \end{cases}$$

$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{x}(s)ds = x(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(s, x(s))ds.$

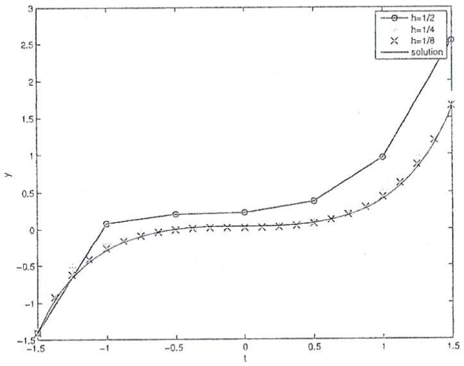


FIGURE 3 – *Schéma d'Euler, $h = 1/2, 1/4, 1/8$.*

L'idée évidente pour améliorer la précision numérique est d'approcher cette intégrale par une formule de quadrature ayant un ordre plus élevé. Si on exploite, pour améliorer l'approximation de l'intégrale, le point milieu, nous obtenons

$$x(t_1) \approx x_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, x(t_0 + \frac{h}{2})).$$

Mais on ne connaît pas la valeur de $x(t_0 + \frac{h}{2})$, d'où l'idée d'approximer cette quantité par un pas d'Euler : $x(t_0 + h/2) \approx x_0 + \frac{h}{2}f(t_0, x_0)$. Nous obtenons ainsi le schéma de Runge.

Définition 3.5 (Schéma de Runge (1895)).

$$x_1 = x_0 + hf(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2}f(t_0, x_0)). \tag{2}$$

4 Méthodes de Runge-Kutta explicite

4.1 Définition

Définition 4.1 (Méthode de Runge-Kutta explicite). On appelle méthode de Runge-Kutta explicite à s étages, la méthode définie par le schéma

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, x_0) \\ k_2 &= f(t_0 + c_2 h, x_0 + h a_{21} k_1) \\ &\vdots \\ k_s &= f(t_0 + c_s h, x_0 + h \textstyle\sum_{i=1}^{s-1} a_{si} k_i) \\ x_1 &= x_0 + h \textstyle\sum_{i=1}^{s} b_i k_i \end{aligned} \tag{3}$$

où les coefficients c_i, a_{ij} et b_i sont des constantes qui définissent précisément le schéma. On supposera toujours dans la suite que $c_1 = 0$ et $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ pour $i = 2, \dots, s$.

On représente en pratique ce schéma par le tableau de Butcher[1][1], *cf.* la figure 4 et la table 1.

$$\begin{array}{c|ccccc}
c_1 & & & & & \\
c_2 & a_{21} & & & & \\
c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\
c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss-1} & \\
\hline
 & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s
\end{array}$$

TABLE 1 – *Tableau de Butcher.*

FIGURE 4 – *Professeur John Butcher.*

Exemple 4.2. *On considère par exemple les schémas*

4.2 Ordre

Rappelons tout d'abord les notations de Landau

Définition 4.3 (Notations de Landau). 1. L'équation (4) ci-après signifie qu'il existe un voisinage U de 0 et il existe une constante C telle que pour tout $h \in U$ on a $\|e(h)\| \leq C|h|^p$.

$$e(h) = O(h^p) \tag{4}$$

2. L'équation (5) ci-après signifie qu'il existe une fonction $\varepsilon(h)$ à valeurs réelles telle que $\|e(h)\| = |h|^p \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

$$e(h) = o(h^p) \tag{5}$$

1. `https://en.wikipedia.org/wiki/John_C._Butcher`

$$\begin{array}{c|c}
0 & \\
\hline
 & 1
\end{array}$$
Euler (ordre 1)

$$\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
1/2 & 1/2 & \\
\hline
 & 0 & 1
\end{array}$$
Runge (ordre 2)

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1/3 & 1/3 & & \\
2/3 & 0 & 2/3 & \\
\hline
 & 1/4 & 0 & 3/4
\end{array}$$
Heun (ordre3)

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/2 & 1/2 & & & \\
1/2 & 0 & 1/2 & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6
\end{array}$$
La méthode RK4 (ordre 4)

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
1/3 & 1/3 & & & \\
2/3 & -1/3 & 1 & & \\
1 & 1 & -1 & 1 & \\
\hline
 & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8
\end{array}$$
RK4, règle 3/8 (ordre 4)

TABLE 2 – *Schémas de Runge-Kutta classiques.*

Définition 4.4 (Ordre). On dit d'une méthode à un pas est d'ordre $p \geq 1$ si, pour tout problème de Cauchy avec f suffisamment dérivable, l'erreur sur un pas, appelée erreur locale satisfait

$$e(h) = x_1 - x(t_1, t_0, x_0) = O(h^{p+1}), \tag{6}$$

où x_1 est la valeur calculée par le schéma et $x(t_1, t_0, x_0)$ est la valeur exacte du problème de Cauchy avec la valeur initiale $x(t_0) = x_0$.

Remarque 4.5. *Attention, un schéma d'ordre p a une erreur locale en $O(h^{p+1})$. On démontre que c'est l'erreur globale $x_N - x(t_f, t_0, x_0)$ qui est en $O(h^p_{max})$.*

Exemple 4.6. *Le schéma d'Euler explicite est d'ordre $p = 1$ car par définition de la dérivée on a*

$$\begin{aligned}
x(t_1) &= x(t_0 + h) = x_0 + h\dot{x}(t_0) + O(h^2) = x_0 + hf(t_0, x_0) + O(h^2) \\
&= x_1 + O(h^2).
\end{aligned}$$

5 Exercices

▷ **Exercice 1.** On considère le schéma de Runge-Kutta explicite à 2 étages

$$\begin{array}{c|cc}
0 & & \\
c_2 & a_{21} & \\
\hline
 & b_1 & b_2
\end{array} \quad \text{avec} \quad c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij},$$

1.1. Écrire le schéma de Runge-Kutta.

1.2. Démontrer que les relations que doivent vérifier les coefficients pour avoir un schéma d'ordre 2 sont

$$b_1 + b_2 = 1 \quad \text{et} \quad b_2 a_{21} = \frac{1}{2}.$$

▷ **Exercice 2.** [2]

On considère dans cet exercice le cas d'un oscillateur harmonique $\ddot{q}(t) = -\omega^2 q(t)$, $q(t) \in \mathbf{R}$ qui modélise le cas d'une masse suspendue à un ressort sans amortissement. Ce système s'écrit sous la forme du problème de Cauchy

$$(IVP) \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}(t) = p(t) \\ \dot{p}(t) = -\omega^2 q(t) \\ q(0) = q0 \\ p(0) = p0. \end{array} \right.$$

2.1. Montrer que sur toute trajectoire on a

$$p^2(t) + \omega^2 q^2(t)$$

qui est constant.

On considère maintenant $\omega = 1$. L'équation différentielle s'écrit donc

$$\dot{q}(t) = p(t) \tag{7}$$
$$\dot{p}(t) = -q(t) \tag{8}$$

On notera $z(t) = (q(t), p(t))$.

2.2. Écrire le schéma d'Euler explicite sur cet exemple et montrer que $||z_1||^2 = (1 + h^2)||z_0||^2$.

2.3. On appelle le schéma d'Euler implicite le schéma $z_1 = z_0 + hf(t_1, z_1)$. Écrire le schéma d'Euler implicite sur cet exemple et montrer que $||z_1||^2 = \frac{1}{(1+h^2)}||z_0||^2$.

2.4. On considère maintenant le schéma d'Euler symplectique de type A. C'est-à-dire le schéma défini par :

— Un pas d'Euler implicite sur la première équation (7) ;
— Un pas d'Euler explicite sur la deuxième équation (8) ;

Montrer que dans ce cas z_0 et z_1 appartienne à la même ellipse d'équation $p^2 + q^2 - hpq = cte$.

2.5. Quels commentaires pouvez-vous faire sur ces deux exercices ?

▷ **Exercice 3.** On considère une subdivision $t_0 < \ldots < t_i < \ldots < t_N = tf$ à pas constant de $[t_0, t_f]$. Écrire l'interface et l'algorithme d'une procédure qui calcule la solution aux instants de la subdivision

— via le schéma d'Euler ;
— via le schéma de Runge ;
— via le schéma de Heun.

Références

[1] J.C. Butcher. *Numerical Methods For Ordinary Differential Equations.* John Wiley & Sons, 2003.

[2] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. *Geommetric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, volume 31 of *Springer Serie in Computational Mathematics.* Springer-Verlag, second edition edition, 2005.

[3] E. Hairer, S.P. Nørsett, and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, volume 8 of *Springer Serie in Computational Mathematics.* Springer-Verlag, second edition, 1993.

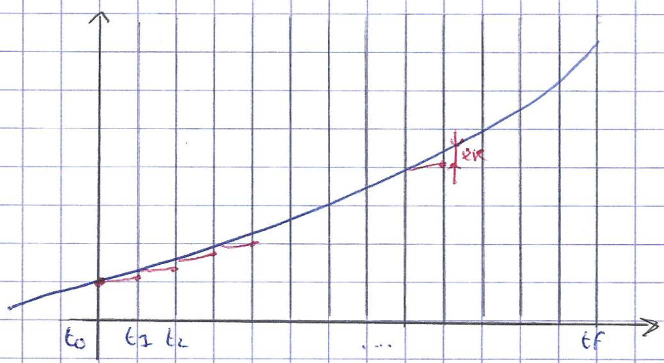
TD 4.1
Auto

Automatique

IV Méthodes de Runge-kutta explicite

$$K_1 = f(t_0, x_0) \qquad\qquad k_1 = f(t_0, x_0).$$
$$x_1 = x_0 + hk_1. \qquad\qquad k_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, x_0 + \frac{h}{2} k_1\right) \qquad \dots$$
$$x_1 = x_0 + h(0k_1 + 1 k_2).$$

Ordre : $e_i(h) = x_{i+1} - x(t_{i+1}, t_i, x(t_i))$.



V Exercices

Exercice 1

0		
c_2	a_{21}	
	b_1	b_2.

avec $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$

1/ Schéma de Runge-kutta : $\begin{cases} k_1 = f(t_0, x_0) \\ k_2 = f(t_0 + c_2 h, x_0 + h a_{21} k_1) \\ x_1 = x_0 + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{cases}$

2/ $x(t_0 + h) = x(t_0) + h\dot{x}(t_0) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(t_0) + O(h^3)$

$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$

$\ddot{x}(t) = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))\,\dot{x}(t).$ où $f_x(t, x(t))$ est la dérivée partielle de f par rapport à x.

Ainsi $x(t_1) = x(t_0) + hf(t_0, x_0) + \frac{h^2}{2}\left(f_t(t_0, x_0) + f_x(t_0, x_0).f(t_0, x_0)\right) + O(h^3)$.

$k_2 = f(t_0, x_0) + \left(f_T(t_0, x_0) c_2 h + f_x(t_0, x_0)(a_{21} h k_1)\right) + O(h^2)$.

$= f(t_0, x_0) + c_2 h f_t(t_0, x_0) + a_{21} h f_x(t_0, x_0) k_1 + O(h^2))$.

$x_1 = x_0 + hb_1 f(t_0, x_0) + hb_2 (f(t_0, x_0) + c_2 h f_t(t_0, x_0) + a_{21} h f_x(t_0, x_0) f(t_0, x_0) + O(h^2))$

$= x_0 + (b_1 + b_2) h f(t_0, x_0) + b_2 c_2 h^2 f_t(t_0, x_0) + a_{21} b_2 h^2 f_x(t_0, x_0) f(t_0, x_0) + O(h^3)$.

$\Rightarrow b_1 + b_2 = 1 \qquad c_2 b_2 = 1/2 \qquad b_2 a_{21} = 1/2$

Exercice 2 : $\ddot{q}(t) = -\omega^2 q(t)$.

$$(IVP) : \begin{cases} \dot{q}(t) = p(t) & (1) \\ \dot{p}(t) = -\omega^2 q(t). & (2) \\ q(0) = q_0 & (3) \\ p(0) = p_0 & (4) \end{cases}$$

1/ Mq $(p^2(t) + \omega^2 q^2(t))' = 0$ ie $2\dot{p}(t)p(t) + 2\omega^2 \dot{q}(t) q(t) = 0$

En multipliant (1) et (2) : $p(t)\dot{p}(t) = -\omega^2 \dot{q}(t) q(t)$.

$$\Rightarrow p(t)\dot{p}(t) + \omega^2 \dot{q}(t) q(t) = 0$$

$$\Rightarrow 2\dot{p}(t)p(t) + 2\omega^2 \dot{q}(t) q(t) = 0$$

2/ $f : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, \beta) \longrightarrow f(t,\beta) = \begin{pmatrix} \beta_2 \\ -\beta_1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$z(t) = (q(t), p(t))$

Le schéma explicite d'Euler s'écrit donc $\beta_1 = \beta_0 + h f(t_0, \beta_0)$.

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} p_0 \\ -q_0 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{q_1^2 + p_1^2} = \sqrt{(q_0 + hp_0)^2 + (p_0 - hq_0)^2}$$

$$q_1^2 + p_1^2 = q_0^2 + h^2 p_0^2 + 2hp_0q_0 - 2hp_0q_0 + p_0^2 + h^2 q_0^2$$

$$\|z_1\|^2 = (1 + h^2)\|z_0\|^2$$

3/ $z_1 = z_0 + h\, f(t_1, z_1)$.

$$\|z_1\|^2 = q_0^2 + h^2 p_1^2 + 2hp_1q_0 - 2hp_0q_1 + p_0^2 + h^2 q_1^2$$

$$= q_0^2 + p_0^2 + h^2(p_1^2 + q_1^2) + 2h(p_1q_0 - p_0q_1)$$

$$= \|z_0\|^2 + h^2\|z_1\|^2 + 2h(p_1(q_1 - hp_1) - (p_1 + hq_1)q_1).$$

$$= \|z_0\|^2 + h^2\|z_1\|^2 - 2h^2\|z_1\|^2.$$

$$\|z_1\|^2 = \frac{1}{1+h^2}\|z_0\|^2.$$

4/ $\begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} p_1 \\ -q_0 \end{pmatrix}$. $\quad q_1 = q_0 + hp_1 \quad \times q_1 \quad \times q_0$

$\quad p_1 = p_0 - hq_0 \quad \times p_1 \quad \times p_0$ (+) (+)

$q_1^2 + p_1^2 = q_0q_1 + hp_1q_1 + p_0p_1 - hq_0p_1 \Rightarrow q_1^2 + p_1^2 - hp_1q_1 = q_0q_1 + p_0p_1 - hq_0p_1$

$q_1q_0 + p_1p_0 = p_0^2 + q_0^2 + hp_1q_0 - hp_0q_0 \Rightarrow p_0^2 + q_0^2 - hp_0q_0 = q_1q_0 + p_1p_0 - hp_1q_0$