ELEMENTS DE CORRECTION DES EXERCICES DE TDs EN TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année

TD1 : Signaux et spectres

Exercice 1 : Etude du secteur

On considère dans cet exercice différents modèles du secteur et on étudie la densité spectrale de puissance des signaux obtenus à l'aide de ces modèles.

1. Dans une première approche, on utilise le modèle :
$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$$
où $f_0 = 50Hz$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.
Le signal est déterministe à puissance moyenne finie périodique : en notant $T_0 = \frac{1}{f_0}$, on a $P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |X(t)|^2 dt$
$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t)\, dt = \frac{A_0^2}{T_0}\int_{T_0} \frac{1}{2}\{1+\cos(4\pi f_0 t)\}\, dt = \frac{A_0^2}{2} < \infty$
Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par : $R_X(\tau) = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} X(t)X^*(t-\tau)dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} A_0^2 \cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f_0(t-\tau))\, dt$
$= \frac{A_0^2}{T_0}\int_{T_0}\frac{1}{2}\{\cos(2\pi f_0\tau) + \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0 \tau)\}\, dt = \frac{A_0^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$
Sa DSP est donnée par : $S_X(f) = TF[R_X(\tau)] = \frac{A_0^2}{4}\{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\}$
2. On considère ensuite le modèle suivant :
$$X(t) = A_0\cos(2\pi f_0 t + \theta)$$
θ étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, $f_0 = 50Hz$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa moyenne, sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.
Le signal est aléatoire.
Sa moyenne est donc donnée par : $m_X = E[X(t)] = E[A_0\cos(2\pi f_0 t + \theta)] = A_0\int_0^{2\pi}\cos(2\pi f_0 t + \theta) \times \frac{1}{2\pi}d\theta = 0$
Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par : $R_X(\tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)] = E\left[A_0^2\cos(2\pi f_0 t+\theta)\cos(2\pi f_0(t-\tau)+\theta)\right]$
$= \frac{A_0^2}{2}E[\cos(2\pi f_0\tau) + \cos(4\pi f_0 t - 2\pi f_0\tau + 2\theta)] = \frac{A_0^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau)$
Remarque : Le signal est stationnaire au second ordre car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.
Sa DSP est donnée par : $S_X(f) = TF[R_X(\tau)] = \frac{A_0^2}{4}\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\}$
3. La fréquence du courant électrique n'est jamais exactement $f_0 = 50Hz$. Afin de modéliser les variations en fréquence, on considère le modèle :
$$X(t) = A_0\cos(2\pi f t + \theta)$$
f étant une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ indépendante de θ. Calculer alors la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.
Le signal est aléatoire.
Sa moyenne est donc donnée par : $m_X = E[X(t)] = E_{f,\theta}[A_0\cos(2\pi f t+\theta)] = E_f[E_\theta[A_0\cos(2\pi f t + \theta)\,|f]] = E_f[0] = 0$
Sa fonction d'autocorrélation est donc donnée par : $R_X(\tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)]$
$= E_f\left[E_\theta\left[A_0^2\cos(2\pi f t+\theta)\cos(2\pi f(t-\tau)+\theta)\,|f\right]\right]$
$= E_f\left[\frac{A_0^2}{2}\cos(2\pi f\tau)\right] = \frac{A_0^2}{2}\int_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f}\cos(2\pi f\tau)\times\frac{1}{2\Delta f}df = \frac{A_0^2}{4\Delta f}\left[\frac{\sin(2\pi f\tau)}{2\pi\tau}\right]_{f_0-\Delta f}^{f_0+\Delta f}$
$= \frac{A_0^2}{8\pi\tau\Delta f}\{\sin(2\pi(f_0+\Delta f)\tau) - \sin(2\pi(f_0-\Delta f)\tau)\} = \frac{A_0^2}{4\pi\tau\Delta f}\sin(2\pi\Delta f\tau)\cos(2\pi f_0\tau) = \frac{A_0^2}{2}sinc(2\pi\Delta f\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$
Remarque : Le signal est stationnaire au second ordre car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.
Sa DSP est donnée par :
$S_X(f) = TF[R_X(\tau)] = \frac{A_0^2}{2}\frac{1}{2\Delta f}\prod_{2\Delta f}(f) * \frac{1}{2}\{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\} = \frac{A_0^2}{8\Delta f}\left\{\prod_{2\Delta f}(f-f_0) + \prod_{2\Delta f}(f+f_0)\right\}$

Exercice 2 : Modulation d'amplitude

Soit $A(t)$ un signal aléatoire stationnaire, réel, de fonction d'autocorrélation $R_A(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_A(f)$ définie par :

$$S_A(f) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } |f| \leq F \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère le signal $X(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, avec $F \ll f_0$ et θ une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ indépendante de $A(t)$.

1. Montrer que $X(t)$ est un signal aléatoire stationnaire. Déterminer et représenter graphiquement sa densité spectrale de puissance.

   Le signal est aléatoire. Sa moyenne est donc donnée par : $m_X = E[X(t)]$ et sa variance par $R_X(\tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)]$. Pour montrer qu'il est stationnaire il faut montrer que m_X et R_X sont indépendantes du temps.

   $m_X = E[X(t)] = E[A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)] = E[A(t)]\,E[\cos(2\pi f_0 t + \theta)]$ car A et θ sont indépendantes. D'où $m_X = 0$.

   $R_X(\tau) = E[X(t)X^*(t-\tau)] = E[A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)\,A^*(t-\tau)\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)]$
   $= E[A(t)A^*(t-\tau)]\,E[\cos(2\pi f_0 t + \theta)\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)] = R_A(\tau) \times \frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)$

   Le signal est bien stationnaire (au second ordre) car sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation sont indépendantes du temps.

   Sa DSP est donnée par $S_X(f) = TF[R_X(\tau)] = S_A(f) * \frac{1}{4}\{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\} = \frac{1}{4}\{S_A(f - f_0) + S_A(f + f_0)\}$

2. Afin de retrouver le signal $A(t)$ à partir de $X(t)$, on construit le signal $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$.

   (a) Déterminer et tracer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$.

   $R_Y(\tau) = E[Y(t)Y^*(t-\tau)] = E[X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)\,X^*(t-\tau)\cos(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)]$. Attention ici $X(t)$ et le cosinus ne sont pas indépendants, tous deux dépendent de θ.

   D'où $R_Y(\tau) = E\left[A(t)\cos^2(2\pi f_0 t + \theta)\,A^*(t-\tau)\cos^2(2\pi f_0(t-\tau) + \theta)\right] = R_A(\tau) \times E\left[\frac{1+\cos(4\pi f_0 t + 2\theta)}{2}\,\frac{1+\cos(4\pi f_0(t-\tau) + 2\theta)}{2}\right]$
   $= \frac{1}{4}R_A(\tau)E\left[1 + \cos(2\theta + ...) + \cos(2\theta + ...) + \frac{1}{2}\{\cos(4\pi f_0 \tau) + \cos(4\theta + ...)\}\right] = \frac{1}{4}R_A(\tau)\left\{1 + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 \tau)\right\}$

   $S_Y(f) = TF[R_Y(\tau)] = \frac{1}{4}S_A(f) * \left\{\delta(f) + \frac{1}{4}\{\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)\}\right\} = \frac{1}{4}S_A(f) + \frac{1}{16}\{S_A(f - 2f_0) + S_A(f + 2f_0)\}$

   (b) Quel traitement doit-on utiliser pour retrouver $A(t)$ à partir de $Y(t)$?

   Il faudra utiliser un filtre passe-bas pour conserver uniquement la partie $\frac{1}{4}S_A(f)$ et couper la partie qui se trouve autour de $2f_0$

TD2 : Echantillonnage

Exercice 1 : Effet de l'échantillonnage

Soit le signal suivant : $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz.

1. Tracer la transformée de Fourier de $x(t)$: $X(f)$.
   La transformée de Fourier de $x(t)$, $X(f)$, est tracée sur la figure 1.

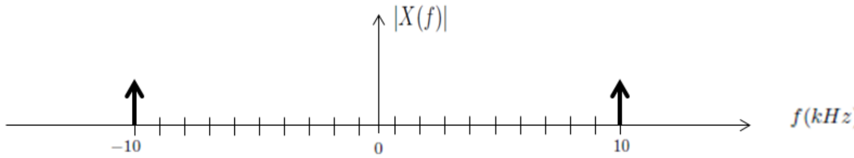

FIGURE 1 – Transformée de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz.

2. Est-il possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ? Si oui à quelle condition ?
   Il est possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information en utilisant une fréquence d'échantillonnage $F_e > 2f_0 = 20$ kHz (respect de la condition de Shannon).
3. Tracer, entre 0 et F_e, la transformée de Fourier de $x(t)$ échantillonné à $T_e = 1/F_e$ quand :
   (a) $F_e = 30$ kHz.
   (b) $F_e = 8$ kHz.
   La transformée de Fourier de $x(t)$, échantillonné à $T_e = 1/F_e$, est tracée entre 0 et F_e sur la figure 2 quand $F_e = 30$ kHz et sur la figure 3 quand $F_e = 8$ kHz.

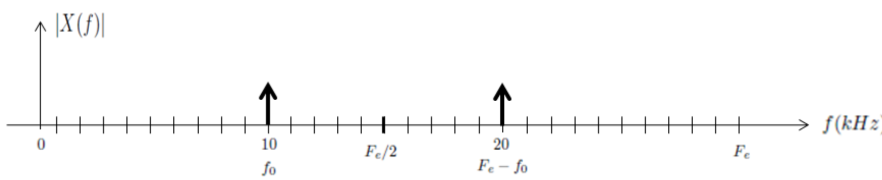

FIGURE 2 – Transformée de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz, $F_e = 30$ kHz.

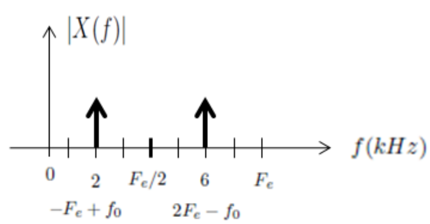

FIGURE 3 – Transformée de Fourier de $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz, $F_e = 8$ kHz.

4. A partir des échantillons nous souhaitons reconstruire $x(t)$ par filtrage passe-bas à $F_e/2$. Quels seront les signaux obtenus pour chaque fréquence d'échantillonnage précédente ?
   Par filtrage passe-bas à $F_e/2$, nous obtenons $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, avec $f_0 = 10$ kHz pour $F_e = 30$ kHz, et $x(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, avec $f_1 = 2$ kHz pour $F_e = 8$ kHz.

Exercice 2 : Echantillonneur moyenneur

L'échantillonneur moyenneur est une méthode pratique d'échantillonnage qui consiste à calculer, toutes les T_e secondes (période d'échantillonnage), la valeur moyenne du signal pendant un intervalle de temps θ ($\theta << T_e$) et à affecter cette valeur moyenne à l'échantillon discrétisé :

$$
\begin{aligned}
y\left(kT_e\right) &= \frac{1}{\theta}\int_{kT_e-\theta}^{kT} x(u)du \\
x_{ech}(t) &= \sum_k y\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right)
\end{aligned}
$$

1. Démontrer que le signal échantillonné $x_{ech}(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta\left(t\right) * x\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right].\text{Ш}_{T_e}\left(t\right)$$

où $\Pi_\theta\left(t\right)$ et $\text{Ш}_{T_e}\left(t\right)$ représentent respectivement la fenêtre rectangulaire de largeur θ et le peigne de Dirac de période T_e.
$x_{ech}(t) = \sum_k y\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right) = y(t)\sum_k \delta\left(t-kT_e\right) = y(t).\text{Ш}_{T_e}\left(t\right)$. Reste à montrer que $y(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta\left(t\right) * x\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right]$:
$y(t) = \frac{1}{\theta}\int_{t-\theta}^{t} x(u)du = \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\times\Pi_\theta\left(u-\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right)du = \frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\times\Pi_\theta\left(\left(t-\frac{\theta}{2}\right)-u\right)du = \frac{1}{\theta}\left(x*\Pi_\theta\right)\left(t-\frac{\theta}{2}\right)$

2. En déduire la transformée de Fourier correspondante $X_{ech}\left(f\right)$.
$X_{ech}(f) = Y(f) * \frac{1}{T_e}\text{Ш}_{1/T_e}\left(f\right) = \frac{1}{T_e}\sum_k Y\left(f-\frac{k}{T_e}\right)$, avec $Y(f) = sinc(\pi f\theta)X(f)e^{-j\pi f\theta}$

3. En considérant un signal à support spectral borné $2\Delta f$ et en prenant en compte que la fonction $sinc(\pi\theta f)$ peut être supposée constante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3\theta},\frac{1}{3\theta}\right]$

$$sinc(\pi\theta f) = \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \approx 1 \text{ pour } f \in \left[-\frac{1}{3\theta},\frac{1}{3\theta}\right]$$

   (a) quelle(s) condition(s) doit vérifier θ pour que le signal $x(t)$ puisse être restitué par filtrage de $x_{ech}(t)$?
   Il faut que $\Delta f \leq \frac{1}{3\theta} \Leftrightarrow \theta \leq \frac{1}{3\Delta f}$

   (b) Dans ces conditions peut-on échantillonner à la fréquence de Shannon ?
   Après filtrage antialiasing on pourra prendre F_e tel que $\Delta f < \frac{F_e}{2} = \frac{1}{2T_e} \Leftrightarrow T_e < \frac{1}{2\Delta f}$

TD3 : Filtrage

Exercice 1 : Filtre moyenneur à mémoire finie

Le filtre moyenneur à mémoire finie est un système défini par la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du,$$

où $x(t)$ représente l'entrée du filtre et $y(t)$ la sortie.

1. Montrer que ce filtre moyenneur à mémoire finie est un filtre linéaire et calculer sa réponse impulsionnelle.

   Il existe plusieurs manière de dépondre à cette question

   (a) si $x(t) = e^{j2\pi ft}$ alors $y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} e^{j2\pi fu}du = sinc(\pi fT)e^{-j\pi fT}e^{j2\pi ft} = H(f)x(t)$ avec $H(f) = sinc(\pi fT)e^{-j\pi fT}$. On a bien un filtre linéaire de réponse en fréquence $H(f) = sinc(\pi fT)e^{-j\pi fT}$ et donc de réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$, si $\Pi_T(t)$ représente une fonction porte de largeur T, de hauteur 1 et centrée en $t = 0$.

   (b) $y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} x(u)\Pi_T\left(u - \left(t - \frac{T}{2}\right)\right)du = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} x(u)\Pi_T\left(\left(t - \frac{T}{2}\right) - u\right)du = x(t) * h(t)$ avec $h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$

   (c) si $x(t) = \delta(t)$ alors $y(t) = h(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\delta(u)du = \frac{1}{T}$ si $0 < t < T$, $= 0$ sinon. D'où $h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$. Il faut alors montrer que nous avons bien un filtre, c'est-à-dire que l'on a bien $y(t) = x(t) * h(t)$: $x(t) * h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) * x(t) = \frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}} x(u)\Pi_T\left(t - \frac{T}{2} - u\right)du = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du$: OK.

   (d) on peut également dériver : $y'(t) = \frac{1}{T}\{x(t) - x(t-T)\}$, d'où par transformée de Fourier $j2\pi fY(f) = \frac{1}{T}\left\{X(f) - e^{-j2\pi fT}X(f)\right\}$ et donc $H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1-e^{-j2\pi fT}}{j2\pi fT} = e^{-j\pi fT}sinc(\pi fT)$. Ce qui donne par transformée de Fourier inverse : $h(t) = \frac{1}{T}\Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right)$.

2. Ce filtre est-il réalisable ?

   Un filtre est réalisable si sa réponse impulsionnelle $h(t)$ est réelle (OK ici), est causale (OK ici : pour $t < 0$ on a $h(t) = 0$) et qu'elle vérifie la condition de stabilité $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\, dt < \infty$ (OK ici : $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|\, dt = \frac{1}{T} \times T = 1$). Ce filtre est réalisable.

Exercice 2 : Calcul d'un Rapport Signal sur Bruit (RSB) en sortie d'un filtre linéaire

Considérons un filtre linéaire de réponse en fréquence :

$$H(f) = \frac{1}{\theta + j2\pi f}$$

On applique à l'entrée de ce filtre un processus aléatoire $X(t)$ constitué de la somme d'un signal sinusoïdal $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$, où f_0 et A sont des constantes et d'un bruit blanc stationnaire réel $B(t)$, de densité spectrale de puissance $s_B(f) = \frac{N_0}{2} \forall f$:

$$X(t) = s(t) + B(t)$$

Le filtre étant linéaire, la sortie du filtre s'écrit :

$$Y(t) = Y_s(t) + Y_B(t)$$

où $Y_s(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $s(t)$ et $Y_B(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $B(t)$.

1. Donner l'expression du rapport Signal sur Bruit à la sortie du filtre :

$$RSB = \frac{P_{Y_s}}{P_{Y_B}}$$

   où P_{Y_s} représente la puissance du signal $Y_s(t)$ et P_{Y_B} la puissance du signal $Y_B(t)$.

   $P_{Y_s} = \int_{\mathbb{R}} S_{Y_s}(f)df = \int_{\mathbb{R}} S_s(f)\,|H(f)|^2\,df = \int_{\mathbb{R}} \frac{A^2}{4}\{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\}\frac{1}{\theta^2+4\pi^2 f^2}df = \frac{A^2}{4}\frac{1}{\theta^2+4\pi^2 f_0^2} \times 2$

   $P_{Y_B} = \int_{\mathbb{R}} S_{Y_B}(f)df = \int_{\mathbb{R}} S_B(f)\,|H(f)|^2\,df = \int_{\mathbb{R}} \frac{N_0}{2}\frac{1}{\theta^2+4\pi^2 f^2}df = \frac{N_0}{4\pi\theta}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+u^2}du = \frac{N_0}{4\pi\theta}\left[arctan(u)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{N_0}{4\theta}$

   Autre solution : $R_{Y_B}(\tau) = TF^{-1}\left[S_{Y_B}(f)\right] = \frac{N_0}{4\theta}e^{-\theta|\tau|}$ (tables) et $P_{Y_B} = R_{Y_B}(0) = \frac{N_0}{4\theta}$

   D'où l'expression du rapport signal sur bruit en sortie du filtre : $RSB = \frac{2\theta A^2}{N_0}\frac{1}{\theta^2+4\pi^2 f_0^2}$

2. Montrer qu'il est maximal pour $\theta = 2\pi f_0$.

   $\frac{dRSB}{d\theta} = 2\frac{A^2}{N_0}\frac{4\pi^2 f_0^2 - \theta^2}{\left(4\pi^2 f_0^2 + \theta^2\right)^2}$ et donc $\frac{dRSB}{d\theta} = 0$ pour $\theta = 2\pi f_0$

Exercice 3 : Filtrage non linéaire de type exponentiel

On considère un filtre non linéaire de type exponentiel. Si $X(t)$ est l'entrée du filtre, la sortie $Y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \exp(X(t))$$

L'entrée du filtre est un bruit gaussien, réel, centré, de variance σ^2.

1. Calculez la moyenne du signal en sortie du filtre.
   $m_Y = E[Y(t)] = E\left[e^{X(t)}\right] = e^{\frac{\sigma^2}{2}}$ (voir remarque)
2. Calculez la variance du signal en sortie du filtre.
   $Var_Y = E\left[(Y(t) - m_Y)^2\right] = E\left[Y^2(t)\right] - m_Y^2 = E\left[e^{2X(t)}\right] - e^{\sigma^2} = e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}$
3. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal en sortie du filtre en fonction de celle du signal à l'entrée.
   On utilise le théorème de Price :
   $$\frac{\partial E[Y_1(t)Y_2(t)]}{\partial E[X_1(t)X_2(t)]} = E\left[\frac{\partial Y_1}{\partial X_1}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2}\right]$$
   avec $X_1(t) = X(t)$, $Y_1(t) = e^{X(t)} = Y(t)$ et $X_2(t) = X(t-\tau)$, $Y_2(t) = e^{X(t-\tau)} = Y(t-\tau)$.
   Cela donne :
   $\frac{\partial R_Y(\tau)}{\partial R_X(\tau)} = E\left[e^{X(t)}e^{X(t-\tau)}\right] = E[Y(t)Y(t-\tau)] = R_Y(\tau)$ et donc $\frac{\partial R_Y(\tau)}{R_Y(\tau)} = \partial R_X(\tau)$, soit $\ln R_Y(\tau) = R_X(\tau) + K$ (K constante) donnant $R_Y(\tau) = e^{K+R_X(\tau)}$
   Calcul de K :
   $R_Y(0) = e^{K+\sigma^2} = E\left[Y^2(t)\right] = E\left[e^{2X(t)}\right] = e^{2\sigma^2}$, d'où $K = \sigma^2$ et $R_Y(\tau) = e^{\sigma^2}e^{R_X(\tau)}$

Remarque : Si la variable aléatoire Z suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et u est une constante alors on a :

$$E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right)$$

Remarque : Le rapport Signal sur Bruit en décibels (dB) est défini par : $RSB = 10\log_{10}\left(\frac{P_{Y_s}}{P_{YB}}\right)$ (dB). On le note aussi SNR (Signal to Noise Ratio).

Rappels

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at+b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	**Série de Fourier**
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \rightleftharpoons \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(f-nf_0)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2 dt=\int_{\mathbb{R}} \lvert X(f)\rvert^2 df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta(f-f_0)$
$\delta(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T(t)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta(t-kT)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}Ш_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}=T\sin c(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2(\pi T f)$
$B\sin c(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B(f)$
$B\sin c^2(\pi B t)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B(f)$

!!!!!! Attention!!!!!

$\Pi_T(t)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.

$\Lambda_T(t)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T(t)*\Pi_T(t)=T\ \Lambda_T(t)$$