1

TD 1 – Fonctions mesurables, mesures

▷ **Exercice 1.** Soient f_1 et f_2 deux applications mesurables de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que :

a) $\{x \in E, f_1(x) = f_2(x)\} \in \mathcal{E}$

b) $\{x \in E, f_1(x) \leq f_2(x)\} \in \mathcal{E}$ et $\{x \in E, f_1(x) \geq f_2(x)\} \in \mathcal{E}$.

c) $\{x \in E, f_1(x) < f_2(x)\} \in \mathcal{E}$ et $\{x \in E, f_1(x) > f_2(x)\} \in \mathcal{E}$.

▷ **Exercice 2.** Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables.

Soient $\mu : \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur $(E, \mathcal{E})$ et f une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \mu_f : & \mathcal{F} & \to & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \mapsto & \mu(f^{-1}(A)) \end{array}$$

Montrer que μ_f est une mesure sur $(F, \mathcal{F})$, appelée *mesure image* de μ par f.

▷ **Exercice 3.** Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose

$$\begin{array}{rccc} F : & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & t & \mapsto & p(]-\infty, t]) \end{array}$$

3.1. Monter que F est croissante et continue à droite.

3.2. Calculer (si existence) $\lim_{t \to \pm\infty} F(t)$.

▷ **Exercice 4.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec λ la mesure de Lebesgue. Les propositions sont-elles vraies?

4.1. λ est σ-finie.

4.2. $\forall K \subset \mathbb{R}, \quad K$ compact $\Rightarrow \lambda(K) < +\infty$.

4.3. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}$. $\lambda(A) < +\infty \Rightarrow A$ borné.

▷ **Exercice 5.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une fonction étagée mesurable positive. On définit

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mu_f(A) = \int_X f \mathbb{1}_A d\mu \ .$$

Montrer que μ_f est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

TD 1.1
Intégration

Exercice 1 :

a) $\{x \in E, f_1(x) = f_2(x)\} = \{x \in E, f_1(x) - f_2(x) = 0\}$.

Vu en cours : une C.L. de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Soit $h = f_1 - f_2$

$A = \{x \in E / f_1(x) = f_2(x)\} = h^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{E}$ car $\{0\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et h mesurable

b) $A_{\leq} = \{x \in E / f_1(x) \leq f_2(x)\} = h^{-1}(]-\infty, 0]) \in \mathcal{E}$ car $]-\infty, 0] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et h mesurable

$A_{\geq} = h^{-1}([0, +\infty[) \in \mathcal{E}$.

c) $A_{<} = h^{-1}(]-\infty, 0[) \in \mathcal{E}$

$A_{>} = h^{-1}(]0, +\infty[) \in \mathcal{E}$.

Exercice 2 :

$\mu_f : A \in \mathcal{F} \longmapsto \mu(f^{-1}(A)) \in \overline{\mathbb{R}^+}$ car μ est une mesure sur $(E, \mathcal{E})$

$\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ mesure.

σ-additivité : Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'ensembles mesurables de F ($A_i \in \mathcal{F}$ $\forall i$) deux à deux disjoints ($\forall i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$)

$\mu_f(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \mu(f^{-1}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)) = \mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_i))$ et comme les A_i sont 2 à 2 disjoints les $f^{-1}(A_i)$ aussi.

Donc $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{E}$ $\forall i$ car f est mesurable. Ainsi par σ-additivité de μ sur $(E, \mathcal{E})$, $\mu_f(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(f^{-1}(A_i)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu_f(A_i)$

Exercice 3 : Une probabilité est une mesure finie $p(\Omega) = 1$.

Soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, tq $t_1 < t_2$.

$$F(t_2) = p(]-\infty, t_2[)$$
$$= p(]-\infty, t_1[\cup \{t_1\} \cup]t_1, t_2[) \quad \text{car } p \text{ mesure.}$$
$$= p(]-\infty, t_1]) + p(]t_1, t_2[)$$
$$= F(t_1) + \underbrace{p(]t_1, t_2[)}_{\geq 0 \text{ car } p \text{ mesure.}}$$

Rappel: Croissance d'une mesure μ
$A, B \in \mathcal{E}$. $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

1/ $t_1 \leq t_2$, $]-\infty, t_1] \subset]-\infty, t_2]$
Donc $F(t_1) = p(]-\infty, t_1]) \leq p(]-\infty, t_2]) = F(t_2)$

Pour la continuité à droite en $t \in \mathbb{R}$.
$\forall$ la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$, décroissante tendant vers t.
$F(t_n) = p(]-\infty, t_n])$

Rappel: pour toute suite décroissante d'ensemble mesurables $(A_n) \downarrow$ $A_0 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$ et s'il existe N_0 tq $\forall n \geq N_0$, $\mu(A_n) < +\infty$
$\lim\limits_{n \to +\infty} (\mu(A_n)) = \mu(\bigcap\limits_n A_n) = \mu(\lim\limits_{n \to +\infty} A_n)$.

la suite $A_n =]-\infty, t_n]_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ car $t_n \geq t_{n+1}$ ... et comme p est une proba (mesure finie), on a $\forall i$ $p(A_i) < +\infty$
On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} (F(t_n)) = p(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}}]-\infty, t_n])$

$$= p(]-\infty, t]) = F(t).$$

Donc F est continue à droite.

TD 1.2.
Intégration

2/ Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels tendant vers $-\infty$
$F(t_n) = \rho(]-\infty, t_n])$ comme (t_n) est décroissante et ρ une mesure finie
$\lim_{n\to+\infty} F(t_n) = \rho\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, t_n]\right) = \rho(\emptyset) = 0$

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels tendant vers $+\infty$.
La suite $(]-\infty, t_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est $\nearrow$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ρ étant une mesure,
on a $\lim F(t_n) = \rho\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty, t_n]\right) = \rho(\mathbb{R}) = 1$

Exercice 4:

1/ Pour $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ on peut prendre $E_n = [-n, n] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$
$\lambda(E_n) = 2n < +\infty$ et on a bien $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n]$.

2/ K compact dans $\mathbb{R}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ de dim finie)
K fermé $\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ($C_{\mathbb{R}} K$ ouvert)
et K borné $\Rightarrow K \subset [-n, n]$ (n assez grand)
$\Rightarrow \lambda(K) \leq \lambda([-n, n]) = 2n < +\infty$.

3/ Faux
Soit $A = \bigcup_{n\geq 1} \left] n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n} \right[$ Union dénombrable

d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, 2 à 2 disjoints donc A est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc mesurable et $\lambda(A) \underset{\sigma\text{-add}}{=} \sum \frac{2}{2^n} < +\infty$ car CV

Et de manière évidente A non borné

Exercice 5: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}^+$ étagée s'écrit : $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$
avec $\cup A_k = X$ recouvrement de X $\alpha_k \geq 0$
et $A_i \cap A_j = \emptyset$ $i \neq j$ 2 à 2 disjoints.

$$\mu_F(\emptyset) = \int_X F \underbrace{1\!\!1_{\emptyset}}_{0} d\mu = \int_X 0 \, d\mu = 0$$

$$\mu_F(\cup A_n) = \int_X F 1\!\!1_{\cup A_n} d\mu$$

$$= \int_X F \left(1\!\!1_{A_1} + \dots 1\!\!1_{A_n}\right) d\mu$$

$$= \int_X F 1\!\!1_{A_1} d\mu + \int_X F 1\!\!1_{A_2} d\mu + \dots + \int F 1\!\!1_{A_n} d\mu$$

$$= \sum_n \int_X F 1\!\!1_{A_n} d\mu = \sum_n \mu_F(A_n)$$

$\mu_F(\emptyset) = \int_X F . 1\!\!1_{\emptyset} d\mu = 0$ car $F . 1\!\!1_{\emptyset}$ est une fonction étagée (donc mesurable) et identiquement nulle

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints.
$\mu_F(\bigcup_n B_n) = \int_X F . 1\!\!1_{\bigcup_n B_n} d\mu = \int_X \sum_n F . 1\!\!1_{B_n} d\mu$ (B_n 2 à 2 disjoints)

$F_n = F \times 1\!\!1_{B_n}$ forme une suite de fonctions <u>positives</u> étagées (donc <u>mesurables</u>). On peut donc interverbir Σ et $\int$.
D'où $\mu_F(\bigcup_n B_n) = \sum_n \int F . 1\!\!1_{B_n} d\mu = \sum_n \mu_F(B_n)$

Donc μ_F est une mesure.