2019-2020

EXERCICES DE TRAITEMENT DU SIGNAL
Sciences du Numérique - Première année

TD1 : Signaux et spectres

Exercice 1 : Etude du secteur

On considère dans cet exercice différents modèles du secteur et on étudie la densité spectrale de puissance des signaux obtenus à l'aide de ces modèles.

1. Dans une première approche, on utilise le modèle :
$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t)$$
où $f_0 = 50Hz$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.
2. On considère ensuite le modèle suivant :
$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$
θ étant une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$, $f_0 = 50Hz$ et $A_0 = 220\sqrt{2}V$. Préciser la classe à laquelle appartient le signal $X(t)$ puis déterminer sa moyenne, sa fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$ et sa densité spectrale de puissance $S_X(f)$.
3. La fréquence du courant électrique n'est jamais exactement $f_0 = 50Hz$. Afin de modéliser les variations en fréquence, on considère le modèle :
$$X(t) = A_0 \cos(2\pi f t + \theta)$$
f étant une variable uniformément répartie sur l'intervalle $[f_0 - \Delta f, f_0 + \Delta f]$ indépendante de θ. Calculer alors la moyenne, la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance de $X(t)$.

Exercice 2 : Modulation d'amplitude

Soit $A(t)$ un signal aléatoire stationnaire, réel, de fonction d'autocorrélation $R_A(\tau)$ et de densité spectrale de puissance $S_A(f)$ définie par :
$$S_A(f) = \begin{cases} \alpha, & \text{si } |f| \leq F \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère le signal $X(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$, avec $F \ll f_0$ et θ une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ indépendante de $A(t)$.

1. Montrer que $X(t)$ est un signal aléatoire stationnaire. Déterminer et représenter graphiquement sa densité spectrale de puissance.
2. Afin de retrouver le signal $A(t)$ à partir de $X(t)$, on construit le signal $Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t + \theta)$.
   (a) Déterminer et tracer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$.
   (b) Quel traitement doit-on utiliser pour retrouver $A(t)$ à partir de $Y(t)$?

TD2 : Echantillonnage

Exercice 1 : Effet de l'échantillonnage

Soit le signal suivant : $x(t) = \cos(2\pi f_0 t),\ f_0 = 10$ kHz.

1. Tracer la transformée de Fourier de $x(t)$: $X(f)$.
2. Est-il possible d'échantillonner $x(t)$ sans perte d'information ? Si oui à quelle condition ?
3. Tracer, entre 0 et F_e, la transformée de Fourier de $x(t)$ échantillonné à $T_e = 1/F_e$ quand :
   (a) $F_e = 30$ kHz.
   (b) $F_e = 8$ kHz.
4. A partir des échantillons nous souhaitons reconstruire $x(t)$ par filtrage passe-bas à $F_e/2$. Quels seront les signaux obtenus pour chaque fréquence d'échantillonnage précédente ?

Exercice 2 : Echantillonneur moyenneur

L'‘échantillonneur moyenneur est une méthode pratique d'échantillonnage qui consiste à calculer, toutes les T_e secondes (période d'échantillonnage), la valeur moyenne du signal pendant un intervalle de temps θ ($\theta << T$) et à affecter cette valeur moyenne à l'échantillon discrétisé :

$$\begin{aligned} y\left(kT_e\right) &= \frac{1}{\theta}\int_{kT_e-\theta}^{kT_e} x(u)du \\ x_{ech}(t) &= \sum_k y\left(kT_e\right)\delta\left(t-kT_e\right) \end{aligned}$$

1. Démontrer que le signal échantillonné $x_{ech}(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$x_{ech}(t) = \frac{1}{\theta}\left[\Pi_\theta\left(t\right) * x\left(t-\frac{\theta}{2}\right)\right].Ш_{T_e}\left(t\right)$$

   où $\Pi_\theta\left(t\right)$ et $Ш_{T_e}\left(t\right)$ représentent respectivement la fenêtre rectangulaire de largeur θ et le peigne de Dirac de période T_e.
2. En déduire la transformée de Fourier correspondante $X_{ech}\left(f\right)$.
3. En considérant un signal à support spectral borné $2\Delta f$ et en prenant en compte que la fonction $sinc(\pi\theta f)$ peut être supposé constante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$

$$sinc(\pi\theta f) = \frac{\sin(\pi\theta f)}{\pi\theta f} \approx 1\text{pour } f \in \left[-\frac{1}{3\theta}, \frac{1}{3\theta}\right]$$

   (a) quelle(s) condition(s) doit vérifier θ pour que le signal $x(t)$ puisse être restitué par filtrage de $x_{ech}(t)$?
   (b) Dans ces conditions peut-on échantillonner à la fréquence de Shannon ?

TD3 : Filtrage linéaire

Exercice 1 : Filtre moyenneur à mémoire finie

Le filtre moyenneur à mémoire finie est un système défini par la relation entrée-sortie suivante :

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(u)du,$$

où $x(t)$ représente l'entrée du filtre et $y(t)$ la sortie.

1. Montrer que ce filtre moyenneur à mémoire finie est un filtre linéaire et calculer sa réponse impulsionnelle.
2. Ce filtre est-il réalisable ?

Exercice 2 : Calcul d'un Rapport Signal sur Bruit (RSB) en sortie d'un filtre linéaire

Considérons un filtre linéaire de réponse en fréquence :

$$H(f) = \frac{1}{\theta + j2\pi f}$$

On applique à l'entrée de ce filtre un processus aléatoire $X(t)$ constitué de la somme d'un signal sinusoïdal $s(t) = A\sin(2\pi f_0 t)$, où f_0 et A sont des constantes et d'un bruit blanc stationnaire réel $B(t)$, de densité spectrale de puissance $s_B(f) = \frac{N_0}{2} \forall f$:

$$X(t) = s(t) + B(t)$$

Le filtre étant linéaire, la sortie du filtre s'écrit :

$$Y(t) = Y_s(t) + Y_B(t)$$

où $Y_s(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $s(t)$ et $Y_B(t)$ représente la réponse du filtre à l'entrée $B(t)$.

1. Donner l'expression du rapport Signal sur Bruit à la sortie du filtre :

$$RSB = \frac{P_{Y_s}}{P_{Y_B}}$$

   où P_{Y_s} représente la puissance du signal $Y_s(t)$ et P_{Y_B} la puissance du signal $Y_B(t)$.
2. Montrer qu'il est maximal pour $\theta = 2\pi f_0$.

Remarque : Le rapport Signal sur Bruit en décibels (dB) est défini par : $RSB = 10\log_{10}\left(\frac{P_{Y_s}}{P_{YB}}\right)$ (dB). On le note aussi SNR (Signal to Noise Ratio).

Exercice 3 : Filtrage non linéaire de type exponentiel

On considère un filtre non linéaire de type exponentiel. Si $X(t)$ est l'entrée du filtre, la sortie $Y(t)$ s'écrit :

$$Y(t) = \exp(X(t))$$

L'entrée du filtre est un bruit gaussien, réel, centré, de variance σ^2.

1. Calculez la moyenne du signal en sortie du filtre.
2. Calculez la variance du signal en sortie du filtre.
3. Calculez la fonction d'autocorrélation du signal en sortie du filtre en fonction de celle du signal à l'entrée.

Remarque : Si la variable aléatoire Z suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et u est une constante alors on a :

$$E\left[e^{uZ}\right] = \exp\left(mu + \frac{\sigma^2}{2}u^2\right)$$

Rappels

Propriétés générales

	T.F.	
$ax(t)+by(t)$	$\rightleftharpoons$	$aX(f)+bY(f)$
$x(t-t_0)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)e^{-i2\pi f t_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$X(f-f_0)$
$x^*(t)$	$\rightleftharpoons$	$X^*(-f)$
$x(t)\ .\ y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)*Y(f)$
$x(t)*y(t)$	$\rightleftharpoons$	$X(f)\ .\ Y(f)$
$x(at+b)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{f}{a}\right)e^{i2\pi\frac{b}{a}f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	$\rightleftharpoons$	$(i2\pi f)^n\,X(f)$
$(-i2\pi t)^n\,x(t)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	**Série de Fourier**
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt=\int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t}\rightleftharpoons\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta\left(f-nf_0\right)$
$\int_{\mathbb{R}} \lvert x(t)\rvert^2\,dt=\int_{\mathbb{R}}\lvert X(f)\rvert^2\,df$	

Table de Transformées de Fourier

	T.F.	
1	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f\right)$
$\delta\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	$\rightleftharpoons$	$\delta\left(f-f_0\right)$
$\delta\left(t-t_0\right)$	$\rightleftharpoons$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$Ш_T\left(t\right)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}\delta\left(t-kT\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{T}\,Ш_{1/T}\left(f\right)$
$\cos\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2}\left[\delta\left(f-f_0\right)+\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$\sin\left(2\pi f_0 t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\frac{1}{2i}\left[\delta\left(f-f_0\right)-\delta\left(f+f_0\right)\right]$
$e^{-a\lvert t\rvert}$	$\rightleftharpoons$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$\rightleftharpoons$	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}=T\sin c\left(\pi T f\right)$
$\Lambda_T\left(t\right)$	$\rightleftharpoons$	$T\sin c^2\left(\pi T f\right)$
$B\sin c\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Pi_B\left(f\right)$
$B\sin c^2\left(\pi B t\right)$	$\rightleftharpoons$	$\Lambda_B\left(f\right)$

!!!!!! Attention!!!!!

$\Pi_T\left(t\right)$ note une fenêtre rectangulaire de support égal à T.
$\Lambda_T\left(t\right)$ note une fenêtre triangulaire de support égal à $2T$ (de demi-base égale à T).

$$\Pi_T\left(t\right)*\Pi_T\left(t\right)=T\ \Lambda_T\left(t\right)$$