2

TD 2 – Intégrale de fonctions mesurables positives

▷ **Exercice 1.** Soit $(u_{k,l})_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ une double suite de réels positifs. Montrer que

$$\sum_{l\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} u_{k,l} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{l\in\mathbb{N}} u_{k,l}$$

▷ **Exercice 2.** Soit f mesurable de $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et positive. Soit δ_0 la mesure de Dirac en 0 définie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{array}{rlll}\delta_0: & \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \mapsto & \delta_0(A) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0\in A \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}\end{array}$$

Déterminer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\delta_0$.

▷ **Exercice 3.** Inégalité de Markov

Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soit f mesurable de $(X,\mathcal{A})$ dans $(\bar{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ et positive. Montrer que

$$\forall a>0,\quad \mu(\{f>a\}) \le \frac{1}{a}\int_X f d\mu$$

▷ **Exercice 4.** Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X\to\bar{\mathbb{R}}_+$ mesurable positive telle que:

$$\mu(f^{-1}(\{+\infty\}) = 0.$$

f est-elle intégrable sur X?

▷ **Exercice 5.** Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives. Soit $f=\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

5.1. Montrer que :

$$\int_X f d\mu \le \lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu$$

5.2. Montrer que si $\exists N \in \mathbb{N}$, t.q. $\int_X f_N d\mu < +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

▷ **Exercice 6.** Soit $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mu)$ un espace mesuré avec μ la mesure de Lebesgue. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \bar{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \dfrac{ne^{-x}}{\sqrt{1+n^2x^2}} \end{array}$$

mesurable de $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ dans $(\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+} f_n d\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Indication : on admettra que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-x}}{|x|} d\mu = +\infty$.

▷ **Exercice 7.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et de réunion $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Soit f mesurable de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ positive.

Montrer que

$$\int_B f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{B_n} f d\mu$$

TD 2.1

Integration

Exercice 1 : Soit $(u_{k,\ell})_{k,\ell \in \mathbb{N}^2}$

Mq $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} u_{k,\ell} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\ell \in \mathbb{N}} u_{k,\ell}$

Sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu triviale $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, avec la mesure du dénombrement

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mu_{\mathbb{N}}(A) = \mathrm{Card}(A)$

$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \overline{\mathbb{R}})$ est un espace mesuré.

Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n \geq 0\ \forall n$.

Si on note $f : \begin{cases} \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}} \\ n \to f(n) = u_n \end{cases}$ | f est naturellement mesurable de $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$

$$\boxed{\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_{\mathbb{N}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n}$$

$\sum_n \sum_k u_{nk}$ à n fixé, $\sum_{k=0}^{m} u_{nk} = f_m(n)$

$f_m : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable, positive. $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ constitue ainsi une suite croissante de fonctions positives mesurables de $\mathbb{N}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

→ Théorème de convergence monotone (de Beppo-Levi)

On a : $\int_{\mathbb{N}} \lim_{(C.S.\ m \to +\infty)} f_m(n) \, d\mu_{\mathbb{N}} = \lim_{\substack{m \to +\infty \\ \text{ds } \overline{\mathbb{R}}}} \int_{\mathbb{N}} f_m(n) \, d\mu_{\mathbb{N}}$

$$\int_{\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{nk} \, d\mu_{\mathbb{N}} = \lim_{m \to +\infty} \int_{\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{m} \mathcal{U}_k(n) \, d\mu_{\mathbb{N}} \qquad \mathcal{U}_k(n) = u_{nk}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_{nk} \right) = \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \int_{\mathbb{N}} \mathcal{U}_k(n) \, d\mu_{\mathbb{N}}$$

$$= \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{kn}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{kn} \right)$$

Exercice 2 : $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ pos.

$$\delta_0 : \begin{cases} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \\ A \to \delta_0(A) \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0(A)$ $\iff$ Construire cette intégrale de f pour cette mesure.

On regarde sur une fonction étagée ce que cela donne.

Avec f fonction étagée : $f = \sum_{i=0}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i}$

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{n} a_i 1\!\!1_{A_i} \, d\delta_0 = \sum_{i=0}^{n} \int_{\mathbb{R}} a_i 1\!\!1_{A_i} d\delta_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_0(A_i)$$

A_i 2 à 2 disjoints

$= a_i$

Soit f une fonction étagée positive $f(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i 1\!\!1_{A_i}(x)$
avec $\operatorname{card}(I) < +\infty$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{R}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i \neq j \in I$

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0 = \int_{\mathbb{R}} \sum_{i \in I} \alpha_i 1\!\!1_{A_i} \, d\delta_0 = \sum_{i \in I} \alpha_i \int_{\mathbb{R}} 1\!\!1_{A_i} \, d\delta_0 = \sum_{i \in I} \alpha_i \delta_0(A_i)$$

$$= f(0) \quad \text{car } \delta_0(A_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \alpha_{i_0} \text{ pour } i_0 \text{ tq } 0 \in A_{i_0}$$

Comme toute fonction f mesurable positive sur $\mathbb{R}$ est limite simple d'une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées on applique le thm de convergence monotone pour obtenir le résultat : $\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_0 = \int_{\mathbb{R}} \left(\lim_{\text{simple}} f_n \right) d\delta_0 = \lim_{n \to +\infty} \int f_n \, d\delta_0 = \lim_{n \to +\infty} f_n(0) = f(0)$

Exercice 3 : $\forall a > 0, \ \mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f \, d\mu$

$$\iff \mu(\{x \in X \text{ tq } f(x) > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f \, d\mu$$

$f = \sum_{i \in I} a_i 1\!\!1_{A_i}$ $\quad \frac{1}{a} \int \sum_{i \in I} a_i 1\!\!1_{A_i} \, d\mu$

$\frac{1}{a} a_i \int$

Pour une fct° étagée on a $\mu(\{x \in X \text{ tq } f(x) > a\})$

$\sum_{i \in I} a_i$

I ens des i tq $a_i > a$

$$\mu(\{f > a\}) = \mu(\{x \in X \text{ tq } f(x) > a\}) = \mu(\underbrace{f^{-1}(]a, +\infty[)}_{A \in \mathcal{B} \text{ car } f \text{ mesurable}})$$

Soit $A = f^{-1}(]a, +\infty[)$

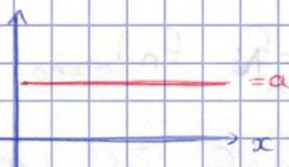
$g = a \times 1\!\!1_A \leq f$ sur X car f positive ou nulle sur $X \setminus A$ et $f(x) > a$ sur A.

Donc $\int_X g \, d\mu = a \mu(A) \leq \int f \, d\mu$ par $\nearrow$ de l'$\int$ et on % par a.

TD 2.2

Integration

Exercice 4 : $\mu(f^{-1}(\{+\infty\})) = 0$.



f intégrable sur X ? **Faux.**

Contre-exemple : $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_{\mathbb{R}})$.

$f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ $f^{-1}(\{+\infty\}) = \emptyset$ mais $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \, d\mu_{\mathbb{R}} = +\infty$

$X = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu_{\mathbb{R}})$

$f = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \in]0,1]. \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$ $f^{-1}(\{+\infty\}) = \{0\}$ de mesure nulle

mais $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ diverge.

Exercice 5 :

5.1 Mq $\int_X f \, d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$ avec $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ et (f_n) ↘ et pos

par ↗ de l'int.

$\int_X f d\mu = \int_X \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq$ vrai $\forall n$. Donc

$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $\int_X f \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \leq \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

(f_n) suite décroissante de fonctions mesurables positives.

La limite simple des f_n existe, notons la f. $f = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$.

$\forall n$ $f \leq f_n$ Donc $\forall n$ $\int_X f \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu$

d'où $\forall n$ $\int_X f \, d\mu \leq \inf_n \int_X f_n d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n \, d\mu$.

car (f_n) ↘

5.2 Contre-exemple : $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_{\mathbb{R}})$

$f_n = (+\infty) \mathbb{1}_{]0, 1/n]}$ $f_n(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in]0, 1/n]. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

f_n suite décroissante de fonctions mesurables pos à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$

$\forall n$. $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = +\infty$ $\lim_{n \to +\infty}$ simple $f_n = 0$ sur $\mathbb{R}$. et il n'y a pas

égalité entre $\lim \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu = +\infty$ et $\int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n d\mu = 0$

Supposons $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\int_X f_N \, d\mu < +\infty$

Posons $(g_n)_{n \geq N} = (f_N - f_n)_{n \geq n_0}$

$g_n = f_N - f_n \geq 0$, mesurable et $(g_n)_{n \geq N}$ forme une suite croissante

Th de CV monotone $\int_X (\lim_{n \to +\infty} g_n) \, d\mu = \lim_n \int_X g_n \, d\mu$

tres les intgles $\int f \, d\mu$, $\int f_n \, d\mu$ et $\int f_N \, d\mu$ st finies $\int_X (f_N - f) \, d\mu = \lim_n \int_X (f_N - f_n) \, d\mu$

On peut écrire $\int_X f_N \, d\mu - \int f \, d\mu = \int (f_N - f) \, d\mu$

idem pour l'autre.

Exercice 6 $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x \longrightarrow \dfrac{n e^{-x}}{\sqrt{1 + n^2 x^2}} \end{cases}$

CV simple x fixé > 0 : $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{e^{-x}}{|x|}$ et $f_n(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

f_n converge donc simplement μ-presque partout sur $\mathbb{R}^+$ vers $\dfrac{e^{-x}}{|x|}$

Les f_n forment une suite de fonctions positives mesurables (car continues sur $\mathbb{R}^+$ et croissante. $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + x^2}}$ $\nearrow$ car $n \nearrow$

Théorème de convergence monotone $\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^+} (\lim_n f_n) \, d\mu = \lim_n \int_{\mathbb{R}^+} f_n \, d\mu$

$+\infty = \int_{\mathbb{R}^+} \dfrac{e^{-x}}{|x|} \, d\mu = \lim_n \int_{\mathbb{R}^+} f_n \, d\mu$

Lemme de Fatou et Def de la $\liminf_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\inf_{k \geq n} f_k(x) \right)$

Exercice 7. $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Partition dénombrable de B (ens 2 à 2 disjoints et mesurables)

Posons $f_n = f \times \mathbb{1}_{\bigcup_{k=0}^{n} B_k}$ Les f_n forment une suite croissante de fonctions positives, mesurables qui convergent simplement vers $f \times \mathbb{1}_B$ sur X

Thm de CV monotone : $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \times \mathbb{1}_B \, d\mu = \int_B f \, d\mu$

$\lim_n \int_X f \mathbb{1}_{\bigcup_{k=0}^{n} B_n} \, d\mu = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \int_X f \mathbb{1}_{B_k} \, d\mu$ car B_n 2 à 2 disjo

$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_k} f \, d\mu$