

# Théorie des Graphes

Examen - 1 feuille recto-verso manuscrite autorisée  
1 heure

1 Juin 2017

Les exercices sont indépendants.

## 1 Trafic Aérien

On considère quatre villes  $V_1, V_2, V_3, V_4$  dans un pays où le trafic aérien est encore très réduit: il existe seulement un vol direct de  $V_1$  vers  $V_2$  et vers  $V_4$ , de  $V_2$  vers  $V_3$ , de  $V_3$  vers  $V_1$  et vers  $V_4$ , de  $V_4$  vers  $V_2$ .

1. Modéliser les données par un graphe.
2. Montrer qu'il existe au moins un vol de chaque ville  $V_i$  vers chaque ville  $V_j$ ,  $i \neq j$ , comportant au plus deux escales.
3.
  - a) Ecrire la matrice  $M$  associée à ce graphe.
  - b) Calculer  $M^2$  et  $M^3$  en multiplication latine.
  - c) Retrouver alors le résultat de la question 2)
4. Le graphe est-il (semi-)eulérien/hamiltonien ?

## 2 Graphes cubiques

On s'intéresse aux graphes 3-réguliers (on dit aussi cubiques). Construisez de tels graphes ayant 4, puis 6 sommets.

Montrer qu'il n'existe pas de graphes cubiques ayant un nombre impair de sommets.

## 3 Les examens

Mme de Guibert doit organiser les horaires des examens. Il y a 7 épreuves à planifier, correspondant aux cours numérotés de 1 à 7 et les paires de cours suivantes ont des étudiants communs : 1 et 2, 1 et 3, 1 et 4, 1 et 7, 2 et 3, 2 et 4, 2 et 5, 2 et 7, 3 et 4, 3 et 6, 3 et 7, 4 et 5, 4 et 6, 5 et 6, 5 et 7 et enfin 6 et 7. Comment organiser les épreuves de façon qu'aucun étudiant n'ait à passer deux épreuves dans la même demi-journée et cela sur une durée minimale ?

## 4 Graphes planaires

1. Le graphe  $K_{2,i}$  est le graphe biparti complet avec une partition en un sous-ensemble à 2 éléments, et un sous-ensemble à  $i = n - 2$  éléments, c'est à dire, chacun des 2 éléments est connecté aux  $i$  autres éléments. Le graphe  $K_{2,i}$  est-il planaire?
2. Montrer que si un graphe est planaire, alors  $3m \geq 2f$ , où  $m$  est le nombre d'arêtes, et  $f$  le nombre de faces.