TD 1 STATISTIQUE - 1SN

Exercice 1. Durée d'attente à un feu rouge.
On considère la variable aléatoire "durée d'attente à un feu rouge". La durée maximale d'attente à ce feu rouge est notée θ, paramètre inconnu strictement positif. On observe un échantillon $t_1, ..., t_n$ de taille n, où t_i désigne la durée d'attente observée pour le $i^{ème}$ individu. On fait l'hypothèse que les variables aléatoires T_i associées aux observations t_i sont indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, \theta]$, i.e., $T_i \sim U\,[0, \theta]$.

1. Représenter le graphe de la densité de la loi $U\,[0, \theta]$ et préciser ses paramètres moyenne et variance.

2. On désire estimer le paramètre θ. Déterminer le biais et la variance de la statistique $\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i$.
   Montrer que $\widehat{\theta}_1 = 2\overline{T}$ est un estimateur sans biais et convergent en probabilité de θ.

3. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ est $Y_n = \sup_i T_i$.

   - En utilisant l'équivalence des événements suivante $Y_n < y \iff T_i < y, \forall i = 1, ..., n$, calculer la fonction de répartition de Y_n. En déduire sa densité et calculer $E\,[Y_n]$ et var (Y_n).
   - Montrer que la statistique $\widehat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n} Y_n$ est un estimateur sans biais et convergent en probabilité de θ.

4. Lequel des deux estimateurs $\widehat{\theta}_1$ et $\widehat{\theta}_2$ choisiriez-vous pour estimer θ ?

Exercice 2. La durée de fonctionnement d'un matériel électrique est représentée par une variable aléatoire réelle X suivant une loi de Weibull de densité :

$$f(x; \theta, \lambda) = \frac{\lambda}{\theta} x^{\lambda - 1} \exp\left\{-\frac{x^\lambda}{\theta}\right\} \qquad x > 0$$

avec $\theta > 0$ et $\lambda > 0$. On suppose que λ est connu.

1. Déterminer la loi de $U = X^\lambda$ puis calculer $E\left(X^\lambda\right)$ et Var $\left(X^\lambda\right)$.

2. On considère un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de même loi que X. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\widehat{\theta}_n$ de θ. Cet estimateur est-il sans biais ? convergent ? efficace ? Calculer son erreur quadratique moyenne.

Exercice 3. Soient $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi de densité :

$$f(x) = \beta e^{\beta(\alpha - x)} 1_{[\alpha, +\infty[}(x)$$

1. α étant connu, déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\omega = 1/\beta$ noté $\widehat{\omega}$. Vérifier qu'il est sans biais et convergent. Montrer enfin que $\widehat{\omega}$ est l'estimateur efficace de ω.

2. β étant connu, étudier l'estimateur du maximum de vraisemblance de α noté $\widehat{\alpha}$. On admet que la densité de probabilité de $\widehat{\alpha}$ est :

$$f(u) = n\beta e^{n\beta(\alpha - u)} 1_{[\alpha, +\infty[}(u)$$

   En s'aidant de ce qui a été fait à la première question, déterminer le biais et la variance de $\widehat{\alpha}$. En déduire un estimateur sans biais et convergent de α. Déterminer $E\left[\frac{\partial^2 \ln f(X_1, ..., X_n; \alpha)}{\partial \alpha^2}\right]$. Que dire de l'efficacité de $\widehat{\alpha}$?

3. β étant connu, déterminer l'estimateur de α obtenu à l'aide de la méthode des moments noté $\overline{\alpha}$. Comparer les deux estimateurs $\overline{\alpha}$ et $\widehat{\alpha}$.

Exercice 4. Lois de Poisson

1. Soient $X_1, ..., X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre λ. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre λ. Est-il sans biais, convergent, efficace ?

2. Même question lorsque $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires de loi de Poisson de paramètres $\lambda_j = j\lambda$, $j \in \{1, ..., n\}$

TD 1.1
Stat

Statistiques

Rappel : - Biais : $b_n(\theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta$

- Variance : $Var(\theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n^2] - \mathbb{E}[\hat{\theta}_n]^2$

- Changement de variable : $f(u) = f(x = \alpha^{-1}(v)) . |J|$ $\quad v = \alpha(x) \quad J = \frac{dx}{du}$

Exercice 2 : $f(x;\theta,\lambda) = \frac{\lambda}{\theta} x^{\lambda-1} e^{-\frac{x^\lambda}{\theta}}$ $x > 0$ avec $\theta > 0$ et $\lambda > 0$

λ connu, θ inconnu

1/ $U = X^\lambda \rightarrow X = U^{1/\lambda}$ $\quad u = \alpha(x) = x^\lambda$ pour $x \in]0, +\infty[$ et $\alpha(x) \in]0, +\infty[$ d'où α bijectif

$x = u^{1/\lambda}$

$\left|\frac{dx}{du}\right| = \left|\frac{1}{\lambda} u^{1/\lambda - 1}\right| = \frac{1}{\lambda} u^{1/\lambda - 1}$

Donc $f(u) = \frac{\cancel{\lambda}}{\theta} u^{1-\frac{1}{\lambda}} \exp\left(\frac{-u}{\theta}\right) \times \frac{1}{\lambda} u^{1/\lambda - 1} = \frac{1}{\theta}\exp\left(\frac{-u}{\theta}\right)$

$U \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$ Donc $\mathbb{E}(X^\lambda) = \theta$ et $Var(X^\lambda) = \theta$.

2/ $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = f(x_1, \dots, x_n, \theta)$ $\quad$ $X_1, \dots X_n$ iid

Vraisemblance $= f(x_1) \times f(x_2) \times \dots \times f(x_n)$

$= \prod_i f(x_i)$

Maximum de vraisemblance : $\underset{\theta}{\text{argmax}}\ L(x_1, \dots x_n, \theta) = \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$.

Estimateur convergent : $Var(\hat{\theta}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Comme α bijective on a à chaque x un u.

Donc on va estimer θ avec la 2e loi :

$L(x_1) \prod_{i=1}^n f(u_i) = \frac{1}{\theta^n} \exp\left(\sum \frac{-u_i}{\theta}\right)$

$= \frac{1}{\theta^n} \exp \frac{1}{\theta} \sum -u_i$

$L_n(\theta) = -n \ln\theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n u_i$

$\frac{\partial L_n(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n u_i = 0$

$\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$

$$L(X_1 \ldots X_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{\theta} x_i^{\lambda-1} \exp\left(\frac{-x_i^{\lambda}}{\theta}\right)$$

$$= \frac{\lambda^n}{\theta^n} \prod x_i^{\lambda-1} \exp{-\frac{1}{\theta}(\Sigma x_i^{\lambda})}$$

$$\ln(L(X_1 \ldots X_n, \theta) = n \ln \lambda - n \ln \theta + \lambda - 1 \ln \prod_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{\theta} \Sigma x_i^{\lambda}$$

$$\frac{\partial \ln L(X_1 \ldots X_n, \theta)}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \Sigma x_i^{\lambda} = 0$$

$$\hat{\theta}_{mv} = \frac{1}{n} \Sigma x_i^{\lambda}$$

$$\hat{\theta}_{mv} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i$$

$$E[\hat{\theta}_{MV}] = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(u_i) = \frac{1}{n} \times n\, E(u_i)$$

$E[\theta_{MV}] = E[U] = \theta \rightarrow$ estimateur sans biais

$$Var[\hat{\theta}_{MV}] = Var\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u_i\right] = \frac{1}{n^2} \Sigma Var(u_i) = \frac{Var(U)}{n} = \frac{\theta^2}{n}.$$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ Estimateur convergent.

Efficacité : Utilisation de la borne de Cramér Rao

$$BCR(\theta) = \frac{-1}{E \frac{\partial^2 \ln L(X_1 \ldots X_n, \theta)}{\partial^2 \theta}}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \Sigma x_i^{\lambda}\right) = \left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda}\right)$$

$$E\left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \Sigma x_i^{\lambda}\right) = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} E(u_i)$$

$$= \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \times n\theta.$$

$$= \frac{n}{\theta^2} - \frac{2n}{\theta^2} = \frac{-n}{\theta^2}.$$

Donc $BCR(\theta) = \frac{\theta^2}{n} = Var[\hat{\theta}_{MV}] \Rightarrow$ efficace

Erreur quadratique moyenne $e_n(\theta) = E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = v_n(\theta) + b_n^2(\theta)$

$$e_n(\theta) = v_n(\theta) = Var(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{\theta^2}{n}.$$

TD 1.2.

Stat

Exercice 3. $f(x) = \beta e^{\beta(\alpha - x)} \mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(x)$

1/ $L(X_1, \dots, X_n, \omega) = f(x_1, \dots x_n, \omega)$

$= f(x_1) \times \dots \times f(x_n)$) V.A iid

$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

$\beta^n e^{\beta \sum_{i=1}^{n} (\alpha - x_i)} \mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(x_i)$

$\beta^n e^{n\beta\alpha - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i}$

$\ln L = n \ln \beta + n\beta\alpha - \beta \sum_{i=1}^{n} x_i$

$= -n \ln \omega + \frac{n}{\omega}\alpha - \frac{1}{\omega} \sum_{i=1}^{n} x_i$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \omega} = \frac{-n}{\omega} - \frac{n}{\omega^2}\alpha + \frac{1}{\omega^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

$= \frac{-n\omega - n\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\omega^2} = 0$

$\hat{\omega} = -\alpha + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha)$

Posons $U = X_i - \alpha = X - \alpha$

et $f(u) = \beta e^{-\beta u}$ $\longrightarrow$ Loi exponentielle de param β.

$E[U] = \frac{1}{\beta} = \omega \qquad V[U] = \frac{1}{\beta^2} = \omega^2$.

Donc $E(\hat{\omega}) = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} E(X_i - \alpha)$

$= \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^{n} E(U_i)$

$= \frac{1}{n} \times n\omega = \omega$ $\longrightarrow$ Estimateur sans biais.

$Var(\hat{\omega}) = \frac{1}{n^2} \times n Var(u) = \frac{\omega^2}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ Estimateur cv

$BCR(\omega) = \frac{-1}{E\left[\frac{\partial^2 \ln L(x_1 \dots x_n, \omega)}{\partial \omega^2}\right]}$

$\frac{\partial}{\partial \omega}\left(-\frac{n}{\omega} - \frac{n}{\omega^2}\alpha + \frac{1}{\omega^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{n}{\omega^2} + \frac{2n\alpha}{\omega^3} - \frac{2}{\omega^3}\sum_{i=1}^{n} x_i$

$E(\;) = \frac{n}{\omega^2} + \cancel{\frac{2n\alpha}{\omega^3}} \cancel{\frac{2}{\omega^3}} - \frac{2}{\omega^3} \sum_{i=1}^{n} x_i - \alpha$

$= \frac{n}{\omega^2} - \frac{2n}{\omega^3} \times \omega = \frac{n - 2n}{\omega^2} = \frac{-n}{\omega^2}$

$BCR(\hat{\omega}) = \omega^2 \dots Var(\hat{\omega})$ Donc estimateur efficace

2/ $f(x) = \beta e^{\beta(\alpha - x)} \mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(x)$

$L(x_1, \dots, x_n, \alpha) \overset{iid}{=} \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$

$\beta^n e^{\beta \sum(\alpha - u_i)}$

$\ln L = \cancel{n \ln n} + n \ln \beta + n\beta\alpha - \beta \sum_{i=1}^{n} u_i$

$\cancel{\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = n\beta}$

$\hat{\alpha} = \arg\max_{\alpha} \left(\ln L(u_1 \dots u_n ; \alpha) \right) = \arg\max_{\alpha} (n\alpha\beta)$

$\rightarrow x \in]\alpha, +\infty[\implies \hat{\alpha} = \inf_i (x_i)$ de loi $f(u)$

$f(u) = n\beta e^{n\beta(\alpha - x)} \mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(x)$

Posons $v = u - \alpha$

$f(v) = n\beta e^{-n\beta v} \quad v \in]0, +\infty[\rightarrow E(v) = \frac{1}{n\beta} \quad \mathrm{Var}\, V = \frac{1}{n^2\beta^2}$

Loi exponentielle de param $n\beta$

$E(\hat{\alpha}) = \cancel{E[f(u)] = E[f(v + \alpha)]}$
$= E[U] = E(V) + \alpha$ Translation due au chg^t de var.
$= \frac{1}{n\beta} + \alpha$

$b_n(\alpha) = E(\hat{\alpha}) - \alpha = \frac{1}{n\beta} \rightarrow$ Asymptotiquement non biaisé. mais est biaisé

$\mathrm{Var}(\hat{\alpha}) = \mathrm{Var}(u) = \mathrm{Var}(v + \alpha) = \mathrm{Var}(v) = \frac{1}{(n\beta)^2}$

Prenons $\hat{\alpha}' = \mathrm{Inf}(x_i) - \frac{1}{n\beta}$

$E(\hat{\alpha}') = E\left[\mathrm{INF}(x_i) - \frac{1}{n\beta}\right]$
$= E(\mathrm{INF}(x_i)) - \frac{1}{n\beta}$
$= 0$
↳ sans biais.

3/ $\mathrm{Var}[\bar{\alpha}] = \frac{1}{n^2} n \mathrm{Var}(X)$
$= \frac{1}{n} \times \omega^2 = \frac{1}{n\beta^2}$

$\mathrm{Var}[\hat{\alpha}] = \frac{1}{(n\beta)^2}$

$\mathrm{Var}[\hat{\alpha}] < \mathrm{Var}[\bar{\alpha}]$
Donc $\hat{\alpha}$ ⊕ efficace $\bar{\alpha}$.

$\frac{\partial}{\partial \alpha}(n\beta) = 0 \longrightarrow$ ⚠ BCR pas def

Come $\alpha \in D(\alpha) \implies$ BCR pas def on ne peut pas en parler. (pas calc.

Efficacité on ne peut pas en parler

$E(\bar{\alpha}) = \frac{n}{n} E(x) = \alpha + \frac{1}{\beta} \quad \frac{1}{\beta} \quad \frac{1}{\beta} \quad \alpha$

3/ $U = X \quad \dots \quad E(\alpha) = E(X) \quad E(x) \quad \frac{1}{n} \sum^{n} \quad 1$