/2.1

Thème Logique des prédicats

Vision sémantique. Représentation des connaissances

Exercice 1 Soit la formule bien formée du calcul des prédicats : $G \doteq \forall x.\exists y.p(x, y)$, déterminer la sémantique de G dans les différentes interprétations suivantes.

Domaine	Prédicat
$\mathbb{N}$	$x \geq y$
$\mathbb{N}$	$x > y$
$\mathbb{Z}$	$x > y$
Humanité	y est le père de x

Exercice 2 Exprimer sous la forme d'une formule bien formée de la logique des prédicats les énoncés suivants :

1. Quelqu'un arrive.
2. Tous arrivent.
3. Personne n'arrive.
4. Tous les hommes sont intelligents.
5. Certains hommes sont intelligents.
6. Aucun homme n'est intelligent.
7. Seuls les hommes sont intelligents.
8. Tous les hommes sont soit beaux, soit intelligents.
9. Certains hommes sont intelligents ou beaux.
10. Une condition nécessaire pour que x soit premier est qu'il soit impair ou qu'il soit égal à 2.
11. Il existe un homme qui aime les chiens.
12. Personne ne connait tout le monde.
13. Toute personne connaît au moins une personne.
14. Il existe une personne qui connaît tout le monde.
15. Il y a une chanson qu'aucun enfant ne chante.
16. Tout le monde a un père. Le grand-père paternel est le père du père. Donc tout le monde a un grand-père paternel.

Exercice 3 Montrer que la formule bien formée de la logique des prédicats suivante est valide ou non valide, consistante ou non consistante en utilisant la relation d'équivalence sémantique des formules bien formées:

$$\forall x\, \varphi \rightarrow \exists x\, \varphi$$

Thème Logique des prédicats

Une théorie formalisée

Exercice 4 En utilisant la déduction naturelle, montrer que les formules bien formées suivantes sont des théorèmes :

1. $\forall x\ (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \forall x\ \varphi \wedge \forall x\ \psi$
2. $\exists x\ \forall y\ \varphi \rightarrow \forall y\ \exists x\ \varphi$
3. $\exists x\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\ \varphi \rightarrow \exists x\ \psi)$
4. $\forall y\ \exists x\ \varphi \rightarrow \exists x\ \forall y\ \varphi$

Exercice 5 En utilisant la déduction naturelle constructive sans la règle $E_{\exists}^{SK}$, montrer que la formule 2 de l'exercice précedent est un théorème.

Rappels de cours distribués lors de l'examen écrit.

Relation d'équivalence sémantique des formules bien formées

$\varphi = \psi$ si et seulement si les deux formules bien formées φ et ψ ont la même sémantique, c'est à dire sont valides sémantiquement pour les mêmes modèles $(\forall \mathcal{M}, (\mathcal{M} \models \varphi) \leftrightarrow (\mathcal{M} \models \psi))$.

$\mathcal{U} \neq \emptyset$	$\forall x\ \varphi = \bigwedge_{x \in \mathcal{U}} \varphi$	$\exists x\ \varphi = \bigvee_{x \in \mathcal{U}} \varphi$
$\mathcal{U} = \emptyset$	$\forall x\ \varphi = \top$	$\exists x\ \varphi = \bot$

$$
\begin{array}{rl}
\forall x\ \varphi = \varphi & x \notin VL(\varphi) \\
\exists x\ \varphi = \varphi & x \notin VL(\varphi) \\
\forall x\ \varphi = \forall y\ [y/x]\ \varphi & y \text{ inutilisée} \\
\exists x\ \varphi = \exists y\ [y/x]\ \varphi & y \text{ inutilisée} \\
\forall x\ (\forall y\ \varphi) = \forall y\ (\forall x\ \varphi) & \\
\exists x\ (\exists y\ \varphi) = \exists y\ (\exists x\ \varphi) & \\
\neg(\forall x\ \varphi) = \exists x\ (\neg\varphi) & \\
\neg(\exists x\ \varphi) = \forall x\ (\neg\varphi) & \\
\forall x\ (\varphi \to \psi) = (\exists x\ \varphi) \to \psi & x \notin VL(\psi) \\
\forall x\ (\varphi \to \psi) = \varphi \to (\forall x\ \psi) & x \notin VL(\varphi) \\
\exists x\ (\varphi \to \psi) = (\forall x\ \varphi) \to \psi & x \notin VL(\psi) \\
\exists x\ (\varphi \to \psi) = \varphi \to (\exists x\ \psi) & x \notin VL(\varphi) \\
\forall x\ (\varphi \wedge \psi) = (\forall x\ \varphi) \wedge (\forall x\ \psi) & \\
\forall x\ (\varphi \vee \psi) = (\forall x\ \varphi) \vee \psi & x \notin VL(\psi) \\
\exists x\ (\varphi \vee \psi) = (\exists x\ \varphi) \vee (\exists x\ \psi) & \\
\exists x\ (\varphi \wedge \psi) = (\exists x\ \varphi) \wedge \psi & x \notin VL(\psi)
\end{array}
$$

Déduction naturelle constructive

Opérateur	Introduction	Elimination
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}\ I_\forall\ (x \notin VL(\Gamma))$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\ \varphi}{\Gamma \vdash [t/x]\,\varphi}\ E_\forall$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash [t/x]\,\varphi}{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi}\ I_\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi}{\Gamma \vdash [f(\vec{x})/x]\,\varphi}\ E_\exists^{SK}\ (\vec{x} = VL(\Gamma) \cup VL(\exists x\ \varphi))$ $\dfrac{\Gamma \vdash \exists x\ \varphi \quad \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ E_\exists^{MP}\ (x \notin VL(\Gamma) \cup VL(\psi))$

TD Mod.
2.1

Logique des prédicats

Exercice 1 :
1) Valide
2) Faux.
3) Vraie
4) Vrai ou Faux (ça dépend du contexte / croyance)

Exercice 2 :

1 $\exists x$ arrive (x)
2 $\forall x$ arrive (x).
3 $\neg(\exists x$ arrive $(x)) \Leftrightarrow \forall x \neg$arrive$(x)$.
4 $\forall x$ homme$(x) \rightarrow$ intelligent (x).
5 $\exists x$ homme $(x) \wedge$ intelligent (x).
6 $\forall x$ homme $(x) \rightarrow \neg$intelligent(x).
7 $\forall x$ intelligent $(x) \rightarrow$ home (x).
8 $\forall x$ homme $(x) \rightarrow$ beau $(x) \Leftrightarrow \neg$intelligent (x).
9 $\exists x$ home $(x) \wedge$ (beau $(x) \vee$ intelligent (x)).
10 $\forall x$ premier $(x) \rightarrow$ impair$(x) \vee$ egal2(x).
$\rightarrow$ impair $(x) \vee = (2, x)$.
11 $\exists x$ homme $(x) \wedge$ aime chien (x).
12 $\neg(\exists x, \forall y$ connait$(x,y)) \Leftrightarrow \forall x \exists y \neg$connait$(x,y)$.
13 $\forall x \exists y$ connait (x, y).
14 $\exists x \forall y$ connait (x, y)
15 $\exists c \forall e$ chanson $(c) \wedge$ enfant$(e) \wedge \neg$chante (c, e)
16 $(\forall x \exists y$ pere $(x,y)) \overset{\text{et}}{\wedge} (\forall x \forall y (\exists p$ pere$(x,p) \wedge$ pere $(p,y) \leftrightarrow$ gp$(x,y)))$
$\underset{\text{donc}}{\longrightarrow} \forall x \exists y \, .$ gp(x,y).

Exercice 3 :

$$\forall x \varphi \rightarrow \exists x \varphi$$

$$\forall x \varphi \rightarrow \exists x \varphi$$
$$\equiv \neg(\forall x \varphi) \vee (\exists x \varphi)$$
$$\equiv \exists x \neg \varphi \vee (\exists x \varphi)$$
$$\equiv \bigcup_{x \in U} \neg \varphi \ \bigcup_{x \in U} \varphi$$
$$\equiv \bigcup_{x \in U} (\neg \varphi \vee \varphi)$$
$$\equiv \bigcup_{x \in U} \top$$
$$\equiv \top$$

Exercice 4 :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x(\varphi \wedge \psi)}\,Ax}{\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \wedge \psi}\,E\forall}{\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi}\,E\wedge}{\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x \varphi}\,I\forall \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \varphi \wedge \psi}{\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \psi}\,E\wedge}{\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x \psi}\,I\forall$$

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x \varphi \qquad \forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x \psi}{\forall x(\varphi \wedge \psi) \vdash \forall x \varphi \wedge \forall x \psi}\,I\wedge}{\forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \forall x \varphi \wedge \forall x \psi}\,I\rightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash \exists x \forall y \varphi \qquad \Gamma \vdash \exists y \forall x \neg \varphi}{\exists x \forall y \varphi, \exists y \forall x \varphi \vdash \bot}}{\exists x \forall y \varphi \vdash \forall y \exists x \varphi}}{\exists x \forall y \varphi \rightarrow \forall y \exists x \varphi}\,I\rightarrow$$

TD Mod
2.2

$$\dfrac{}{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \exists x \forall y\, \varphi}\ \text{Ax}$$

$$\dfrac{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \exists x \forall y\, \varphi}{\exists x \forall y\, \varphi \vdash [t/x] \forall y\, \varphi}\ E_\exists^{SK}$$

$$\dfrac{\exists x \forall y\, \varphi \vdash [t/x] \forall y\, \varphi}{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \forall y\, [t/x] \varphi}\ \equiv$$

$$\dfrac{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \forall y\, [t/x] \varphi}{\exists x \forall y\, \varphi \vdash [t/x] \varphi}\ E_\forall$$

$$\dfrac{\exists x \forall y\, \varphi \vdash [t/x] \varphi}{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \exists x\, \varphi}\ I_\exists$$

$$\dfrac{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \exists x\, \varphi}{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \forall y \exists x\, \varphi}\ I_\forall$$

$$\dfrac{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \forall y \exists x\, \varphi}{\exists x \forall y\, \varphi \to \forall y \exists x\, \varphi}\ I_\to$$

Variante:

$$\dfrac{}{\forall y\, \varphi \vdash \forall y\, \varphi}\ \text{Ax}$$

$$\dfrac{\forall y\, \varphi \vdash \forall y\, \varphi}{\Gamma \vdash \forall y\, \varphi}\ \text{Aff}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \forall y\, \varphi}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}\ \equiv$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}{\Gamma \vdash [t/x] \varphi}\ E_\forall$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash [t/x] \varphi}{\Gamma \vdash \exists x\, \varphi}\ I_\exists$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x\, \varphi}{\exists x \forall y\, \varphi, \forall y\, \varphi \vdash \forall y \exists x\, \varphi}\ I_\forall$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \exists x \forall y\, \varphi}\ \text{Ax} \qquad \exists x \forall y\, \varphi, \forall y\, \varphi \vdash \forall y \exists x\, \varphi}{\exists x \forall y\, \varphi \vdash \forall y \exists x\, \varphi}\ E_\exists^{MP}$$

$$\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}\ \text{Ax}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (\varphi \to \psi)}\ \text{Ax} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \forall x\, \varphi}{\Gamma \vdash \varphi\ \psi}\ \equiv}{\Gamma \cup (\varphi \to \psi) \vdash \psi}\ E_\to$$

$$\dfrac{\Gamma \cup (\varphi \to \psi) \vdash \psi}{\Gamma \cup (\varphi \to \psi) \vdash \forall x\, \psi}\ I_\forall\ !$$

$$\dfrac{\Gamma \cup (\varphi \to \psi) \vdash \forall x\, \psi}{\Gamma \cup (\varphi \to \psi) \vdash [t/x] \psi}\ E_\forall$$

$$\dfrac{}{\exists x (\varphi \to \psi) \vdash \exists x (\varphi \to \psi)}\ \text{Ax}$$

$$\dfrac{\exists x (\varphi \to \psi) \vdash \exists x (\varphi \to \psi)}{\Gamma \vdash \exists x (\varphi \to \psi)}\ \text{Aff}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x (\varphi \to \psi) \qquad \Gamma \cup (\varphi \to \psi) \vdash [t/x] \psi}{\exists x (\varphi \to \psi), \forall x\, \varphi \vdash [t/x] \psi}\ E_\exists^{MP}$$

$$\dfrac{\exists x (\varphi \to \psi), \forall x\, \varphi \vdash [t/x] \psi}{\exists x (\varphi \to \psi), \forall x\, \varphi \vdash \exists x\, \psi}\ I_\exists$$

$$\dfrac{\exists x (\varphi \to \psi), \forall x\, \varphi \vdash \exists x\, \psi}{\exists x (\varphi \to \psi) \vdash (\forall x\, \varphi \to \exists x\, \psi)}\ I_\to$$

$$\dfrac{\exists x (\varphi \to \psi) \vdash (\forall x\, \varphi \to \exists x\, \psi)}{\exists x (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \exists x\, \psi)}\ I_\to$$

$$\forall x\, \varphi \vdash \forall x\, \varphi$$
$$\text{(Aff)}\quad \Gamma \vdash \forall x\, \varphi$$
$$\text{(E}\forall\text{)}\quad \Gamma \vdash [t/x]\, \varphi$$

$$\exists x\, (\varphi \to \psi) \vdash \exists x\, (\varphi \to \psi).$$
$$\Gamma \vdash \exists x\, (\varphi \to \psi)$$
$$\text{(E}\exists\text{)}\quad \Gamma \vdash [t/x]\,(\varphi \to \psi)$$
$$(=)\quad \Gamma \vdash [t/x]\,\varphi \to [t/x]\,\psi$$

$$\text{(E}\to\text{)}\quad \Gamma \vdash [t/x]\,\psi.$$
$$\text{(I}\exists\text{)}\quad \exists x\, (\varphi \to \psi), \forall x\, \varphi \vdash \exists x\, \psi$$
$$\text{(I}\to\text{)}\quad \exists x\, (\varphi \to \psi) \vdash (\forall x\, \varphi \to \exists x\, \psi)$$
$$\text{(I}\to\text{)}\quad \emptyset \vdash \exists x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x\, \varphi \to \exists x\, \psi)$$