ÆDP TD1

TD 1 – Approximation de dérivées par différences finies

▷ **Exercice 1.** Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction "suffisamment" régulière.

1.1. La formule

$$\frac{1}{h}(u(x+h) - u(x-h))$$

est-elle une bonne approximation de $u'(x)$ quand $h \to 0$?

1.2. Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \alpha u(x) + \beta u(x-h) + \gamma u(x-2h) + \mathcal{O}(h^2)$$

▷ **Exercice 2.** Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction "suffisamment" régulière.

2.1. Donner l'ordre de consistance des approximations de $u'(x)$ suivantes :

a. $\dfrac{u(x) - u(x-h)}{h}$ quand $h \to 0$?

b. $\dfrac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$ quand $h \to 0$?

2.2. Donner un schéma d'approximation centré d'ordre 4 de $u'(x)$.

2.3. Quelles hypothèses de regularité sur u sont requises ?

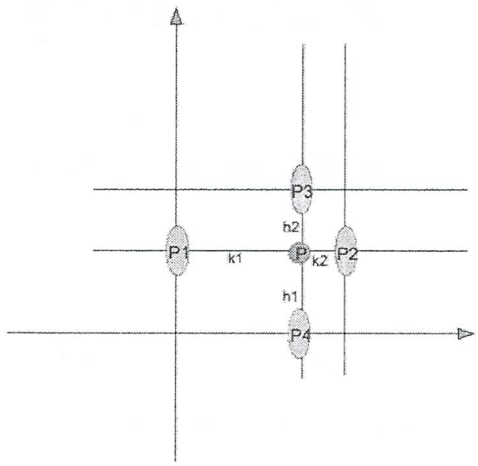
▷ **Exercice 3.** Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur un intervalle $[x-h_0, x+h_0]$, avec $h_0 > 0$.

3.1. Montrer que $\exists C > 0$ tel que $\forall h \in]0, h_0]$

$$\left|\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x)\right| \leq Ch^2.$$

En déduire l'ordre de consistance du schéma d'approximation de $u''(x)$.

▷ **Exercice 4.** On considère la grille suivante :



4.1. On suppose u "suffisamment" régulière. Ecrire un schéma à 5 points qui approche $\Delta u(P)$. Quel est l'ordre de ce schéma en $\max(k_1, k_2)$ et $\max(h_1, h_2)$?

4.2. On suppose $h_1 = h_2 = h$ et $k_1 = k_2 = k$. Quel est l'ordre du schéma en h et k?

TD1.1

EDP Approximation de dérivées par différences finies.

Exercice 1

1/ $u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\varepsilon_1)$

u de classe $\mathcal{C}^2$

$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(\varepsilon_2)$

$u(x+h) - u(x-h) = 2hu'(x) + \frac{h^2}{2}(u''(\varepsilon_1) - u''(\varepsilon_2))$

$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{h} = 2u'(x) + O(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 2u'(x)$

$\left|\frac{u(x+h) - u(x-h)}{h} - 2u'(x)\right| = O(h)$

2/ $\alpha \times u(x) = u(x)$

$\beta \times u(x-h) = u(x) - hu'(x) + h^2/2\, u''(x) - h^3/6\, u'''(\varepsilon_1)$ $\quad \varepsilon_1 \in]x-h, x[$

$\gamma \times u(x-2h) = u(x) - 2hu'(x) + 2h^2 u''(x) - \underbrace{\frac{4}{3}h^3 u'''(\varepsilon_2)}_{O(h^2) \text{ car } \alpha, \beta \text{ en } O(\frac{1}{h})}$ $\quad \varepsilon_2 \in]x-2h, x[$

0 1 0

u de classe $\mathcal{C}^3$ $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ -h\beta - 2h\gamma = 1 \\ \frac{h^2}{2}\beta + 2h^2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta \text{ et } \gamma \text{ en } O(\frac{1}{h})$

On obtient $\begin{cases} \alpha = \frac{3}{2h} \\ \beta = -\frac{2}{h} \\ \gamma = \frac{1}{2h} \end{cases}$ et l'ordre l'approximation est :

$\left(\left|\frac{\beta h^3}{6}\right| + \left|\gamma \frac{4}{3}h^3\right|\right) \sup_{z \in]x-2h, x[} |u'''(z)|$

$\left(\frac{h^2}{3} + \frac{2}{3}h^2\right)$

Ordre d'approx est 2

Exercice 2 :

1/ a) $\left|\frac{u(x) - u(x-h)}{h} - u'(x)\right| \le \frac{h}{2} \sup_{z \in]x-h, x[} |u''(z)|$ ordre de consistance 1.

u de classe $\mathcal{C}^2$

b $\left|\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x)\right| \le \frac{h^2}{6} \sup_{]x-h, x+h[} |u'''(z)|$

u de classe $\mathcal{C}^3$

2/ $\alpha \times u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) + \frac{h^5}{120}u^{(5)}(\xi_1)$

u de classe $\mathcal{C}^5$

$\beta \times u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) - \frac{h^3}{6}u'''(x) + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(x) - \frac{h^5}{120}u^{(5)}(\xi_2)$

$\gamma \times u(x+2h) = u(x) + 2hu'(x) + 2h^2u''(x) + \frac{4}{3}h^3u'''(x) + \frac{2}{3}h^4u^{(4)}(x) + \frac{4}{15}h^5u^{(5)}(\xi_3)$

$\delta \times u(x-2h) = u(x) - 2hu'(x) + 2h^2u''(x) - \frac{4}{3}h^3u'''(x) + \frac{2}{3}h^4u^{(4)}(x) - \frac{4}{15}h^5u^{(5)}(\xi_3)$

0 1 0 0 0

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\delta=0 \\ \alpha h-\beta h+2\gamma h-2\delta h=1 \\ \alpha\frac{h^2}{2}+\beta\frac{h^2}{2}+2\gamma\frac{h^2}{2}+2\delta\frac{h^2}{2}=0 \\ \alpha\frac{h^3}{6}-\beta\frac{h^3}{6}+\gamma\frac{4}{3}h^3-\delta\frac{4}{3}h^3=0 \\ \alpha\frac{h^4}{24}+\beta\frac{h^4}{24}+\gamma\frac{h^4}{24}+\delta\frac{h^4}{24}=0 \end{cases}$$

Posons $\beta=-\alpha$, $\beta=\alpha$, $\gamma=-\beta$, $\delta=\beta$

$$\begin{cases} 2\alpha h+4\beta h=1 \\ \alpha\frac{h^3}{3}+8\beta\frac{h^3}{3}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=\frac{2}{3h} \\ \beta=-\frac{1}{12h} \end{cases}$$

et on vérifie qu'on bien du $O(h^4)$ dans la somme des termes résiduels.

Exercice 3 : u de classe $\mathcal{C}^4$

$$u(x+h)=u(x)+hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)+\frac{h^3}{6}u'''(x)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_1)$$
$$u(x-h)=u(x)-hu'(x)+\frac{h^2}{2}u''(x)-\frac{h^3}{6}u^{(3)}(x)+\frac{h^4}{24}u^{(4)}(\xi_2).$$

$$u(x+h)+u(x-h)=2u(x)+h^2u''(x)+\frac{h^4}{12}\left(u^{(4)}(\xi_1)+u^{(4)}(\xi_2)\right)$$

$$\left|\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}-u''(x)\right|=\frac{h^2}{12}\left|\left(u^{(4)}(\xi_1)+u^{(4)}(\xi_2)\right)\right|$$
$$\leq\frac{h^2}{12}\sup_{z\in]x-h,x+h[}|u^{(4)}(z)|$$
$$\leq\frac{C}{12}h^2$$

schéma d'ordre 2 pour u de classe $\mathcal{C}^4$

Exercice 4 :

$$\alpha\times u(P)=u(P)$$
$$\beta\times u(P_2)=u(P)+k_2\frac{\partial u}{\partial x}(P)+\frac{k_2^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(P)+\frac{k_2^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial^3 x}(z_2)$$
$$\gamma\times u(P_1)=u(P)-k_1\frac{\partial u}{\partial x}(P)+\frac{k_1^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(P)+\frac{k_1^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial^3 x}(z_1)$$
$$\delta\times u(P_3)=u(P)+h_2\frac{\partial u}{\partial y}(P)+\frac{h_2^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(P)+\frac{h_2^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial^3 y}(z_3)$$
$$\mu\times u(P_4)=u(P)-h_1\frac{\partial u}{\partial y}(P)+\frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(P)-\frac{h_1^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial^3 y}(z_4)$$

0   0   1   1

TD 1.2

EDP

$$\alpha = -(\beta + \gamma + \delta + \mu)$$

$$\beta = \gamma \frac{k_1}{k_2}$$

$$\begin{cases} \beta k_2 - \gamma k_1 = 0 \\ \beta \frac{k_2^2}{2} + \gamma \frac{k_1^2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\gamma \frac{k_1 k_2}{2} + \gamma \frac{k_1^2}{2} = 1 \qquad \gamma = \frac{2}{k_1 k_2 + k_1^2}$$

$$\beta = \frac{2}{k_1 k_2 + k_2^2}$$

$$\begin{cases} \delta h_2 - \mu h_1 = 0 \\ \delta \frac{h_2^2}{2} + \mu \frac{h_1^2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\beta = \frac{2}{k_1 k_2 + k_2^2} \qquad \gamma = \frac{2}{k_1 k_2 + k_1^2} \qquad \delta = \frac{2}{h_1 h_2 + h_2^2} \qquad \mu = \frac{2}{h_1 h_2 + h_1^2}$$

Ordre d'approximation: et $\alpha = \ldots$

$$|res| \leq \frac{k_2^2 + k_1^2}{3(k_1 + k_2)} + \frac{h_1^2 + h_2^2}{3(h_1 + h_2)} \max\left(\sup_{\Omega_x} \left| \frac{\partial^3}{\partial^3 x} \right|, \sup_{\Omega_y} \left| \frac{\partial^3}{\partial^3 y} \right| \right)$$