TD 4 PROBABILITÉS - COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES - 1SN

Exercice 1 : un vecteur non-gaussien de lois marginales gaussiennes.
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = k \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) & (x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer k.
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y
3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer la covariance du couple (X, Y) notée $\text{cov}(X, Y)$.
5) Déterminer les lois de $Z = X + Y$ et de $U = X - Y$ en fonction de $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$
6) Déterminer la loi de $T = Y/X$.

Exercice 2 : Simulation de variables aléatoires normales. Méthode de Box-Müller.
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de mêmes lois uniformes sur $]0, 1]$. On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$R = \sqrt{x^2+y^2}$

$\varphi = \text{Arct}\left(\frac{Y}{X}\right) + k\pi$:

$X = R\cos\varphi$

$Y = R\sin\varphi$

$$\begin{array}{lll} X & = & \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V) \\ Y & = & \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V) \end{array}$$

$J = \begin{matrix} \frac{du}{dx} & \frac{dv}{dx} \\ \frac{du}{dy} & \frac{dv}{dy} \end{matrix}$

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Application ?

Exercice 3 : couple de variables aléatoires continues.
Soit $\theta > 0$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 < y < x\}$. Un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = \theta^2 e^{-\theta x} & (x,y) \in D \\ f(x,y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Applications aux sciences du numérique

Exercice 4 : Lois de Rayleigh et de Rice

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) où X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

1) Déterminer la loi du couple (R, Θ) puis les lois marginales de R et de Θ lorsque

$$\begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{cases}$$

Que peut on en conclure sur la dépendance des va R et Θ ?

Remarque : on dit que R suit la loi de Rayleigh et on vérifie que sa moyenne et sa variance vérifient $E[R] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ et $Var[R] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$.

2) Mêmes questions que précédemment lorque X et Y sont deux va indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. On exprimera les résultats à l'aide de la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\varphi} d\varphi$$

et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Remarque : on dit que R suit la loi de Rice et on vérifie que X et Y sont des va indépendantes si et seulement si $m = 0$.

Application : vous verrez plus tard que la modélisation d'un bruit blanc Gaussien centré à bande étroite conduit au signal

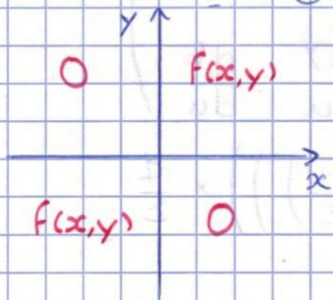
$$\begin{aligned} b(t) &= X(t)\cos(2\pi f_0 t) - Y(t)\sin(2\pi f_0 t) \\ &= R(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta) \end{aligned}$$

À chaque instant t, $R(t)$ représente l'amplitude du signal reçu dont il est important de connaître les propriétés statistiques.

Couples de variables Aléatoires Continues.

Exercice 1 :

$$f(x,y) = K e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \cup (\mathbb{R}^-)^2$$
$$= 0 \quad \text{sinon}$$



1/ On doit avoir $\displaystyle\iint_{(\mathbb{R}^+)^2 \cup (\mathbb{R}^-)^2} k \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx\,dy = 1$

$$= 2 \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} k \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx\,dy = 1$$

$$= 2k \left(\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) dx\right)\left(\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{-y^2}{2}\right) dy\right) = 1$$

$$= 2k \times \sqrt{\frac{\pi}{2}}^{\,2} = 1 \Rightarrow k\pi = 1 \Rightarrow K = \frac{1}{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$
$$= 2\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Intégrale de Gauss.

2/ Pour $x \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{P}_X(x)^+ = \int_0^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dy = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow \text{loi Normale } (0,1) - \text{centrée réduite}$$

Par parité $\mathbb{P}_X(x)^-$ pour $x \in \mathbb{R}^- = \mathbb{P}_X(x)^+$

Par symétrie $\mathbb{P}_Y(y)^+ = \mathbb{P}_Y(y)^- = \mathbb{P}_X(x)^- = \mathbb{P}_X(x)^+$

3/ $\mathbb{P}(X = x_1, Y = y_1) = \dfrac{1}{\pi} e^{-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}}$

$\neq$ Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

$\mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(Y) = \dfrac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}}$

4/ $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\to 0}\underbrace{\mathbb{E}[Y]}_{\to 0}$ car loi Normale centrée réduite.

$$\iint_{(\mathbb{R}^+)^2 \cup (\mathbb{R}^-)^2} xy\, f(x,y)\,dx\,dy = \mathbb{E}[XY]$$

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx = \left[-e^{-x^2/2}\right]_0^{+\infty} = 1$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y e^{-y^2/2} dy\right)$$

par IPP

2 Cov (X, Y)

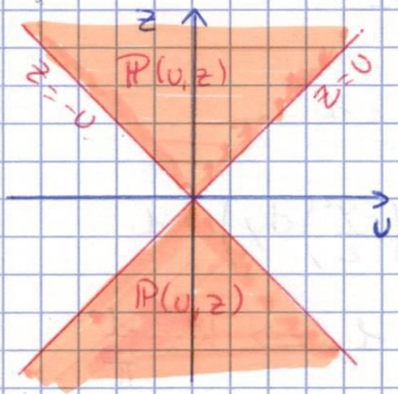
5/ $\mathbb{P}_{U,V}(u,v) = \mathbb{P}_{X,Y}(g^{-1}(u,v))\,|\det(J)|$

$$\begin{cases} Z = X+Y \\ U = X-Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = \dfrac{U+Z}{2} \\ Y = \dfrac{Z-U}{2} \end{cases} \qquad g(X,Y) \begin{cases} (\mathbb{R}^+)^2 \cup (\mathbb{R}^-)^2 \longrightarrow \\ (X,Y) \to U,V \\ \quad \to (X+Y,\ X-Y) \end{cases}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \quad \text{avec } J = \begin{pmatrix} \frac{dX}{du} & \frac{dX}{dz} \\ \frac{dY}{du} & \frac{dz}{du} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathbb{P}(z,u) = \dfrac{1}{\pi} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{z+u}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{z-u}{2}\right)^2\right)\right) \times \dfrac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{4}(z^2+u^2)\right)$$



$y = \dfrac{z-u}{2} \quad x = \dfrac{z+u}{2}$

si $y,x \geq 0$ $\quad z+u \geq 0 \Rightarrow z \geq -u$
$\quad z-u \geq 0 \Rightarrow z \geq u$

si $y,x \leq 0$ $\quad z+u \leq 0 \Rightarrow z \leq -u$
$\quad z-u \leq 0 \Rightarrow z \leq u$

Pour $z \geq 0$ $\mathbb{P}(z) = \displaystyle\int_{-z}^{z} \mathbb{P}(z,u)\,du = \int_{-z}^{z} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}(z^2+u^2)}\,du$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{4}z^2} \int_{-z}^{z} \frac{e^{-\frac{1}{4}u^2}}{\sqrt{2\pi}}\,du \qquad \text{Posons } \frac{u^2}{4} = \frac{v^2}{2}$$

$v = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$

$u = \sqrt{2}v$
$du = \sqrt{2}\,dv$

Pour $z \geq 0$ $\mathbb{P}(z)^+ = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \displaystyle\int_{-z/\sqrt{2}}^{z/\sqrt{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} \sqrt{2}\,dv$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\Phi(z/\sqrt{2}) - \Phi(-z/\sqrt{2})\right] \qquad u = z, \ \sqrt{2}v = z \Rightarrow v = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

Pour $z < 0$ $\mathbb{P}(z)^- = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\Phi(-z/\sqrt{2}) - \Phi(z/\sqrt{2})\right]$

Pour $u \geq 0$ $\mathbb{P}(U)^+ = 2\displaystyle\int_{-\infty}^{-u} \mathbb{P}(z,u)\,dz = 2\int_{-\infty}^{-u} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{4}(z^2+u^2)}\,dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{-u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}}\,dz$

Car $\mathbb{P}(U) \Rightarrow]-\infty, -u] \cup [u, +\infty[$ et fct° paire.

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \int_{-\infty}^{-\frac{u}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \left[2\Phi\left(\frac{-u}{\sqrt{2}}\right)\right]$$

Pour $u < 0$ $\mathbb{P}(U)^- = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{4}} \left[2\Phi\left(\dfrac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]$

TD 4.2.

Probas. 6/ $T = Y/X$

$$\mathbb{P}(T<t) = \mathbb{P}(Y/X < t) = \mathbb{P}(Y < tX)$$

$$\mathbb{P}(T<t) = \mathbb{P}(Y < tX)$$

$$= \int \mathbb{P}(Y < t\overset{x}{\widehat{x}})\, dx$$

$$= \iint_{-\infty}^{tx} F(y \mid x)\, \mathbb{P}(x)\, dy\, dx$$

$$= \iint_{-\infty}^{tx} f(x,y)\, dy\, dx$$

$$= \iint_{-\infty}^{tx} \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{tx} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy\, dx$$

$$= \mathbb{P}(T<t) = F_T(t)$$

$F_T(t) = F_T'(t)$ $\quad T = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = TX \quad dy = x\,dt$

$$F_T(t) = \frac{1}{\pi}\int e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int_{-\infty}^{tx} e^{-\frac{y^2}{2}} x\, dt \right) dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{t^2x^2}{2}} x\, dx$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \, \frac{1}{1+t^2}$$