3

TD 3 – Intégrale de fonctions mesurables, espaces L^p

▷ **Exercice 1.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions définies par:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{2}}x, \text{ si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

1.1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n$ est intégrable sur $[0,1]$.

1.2. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une fonction f à préciser.

1.3. Calculer $\int_{[0,1]} f d\mu$

▷ **Exercice 2.** Pour chacune des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fonctions boréliennes de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ suivantes, calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f_n d\mu$.

2.1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \sin(nx)1_{[0,n]}(x)$

2.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = |\cos(x)|^{\frac{1}{n}}e^{-x}$

▷ **Exercice 3.** On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_{[0,n]} (1 - \frac{x}{n})^n \cos x d\mu.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \cos x 1_{[0,n]}(x)$.

3.1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3.2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dominée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3.3. Conclure.

▷ **Exercice 4.** Soit F la fonction définie par :

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-tx}}{1+x^2} d\mu(x) \end{array}$$

4.1. Préciser I le domaine de définition de F.

4.2. Calculer $F(0)$.

4.3. Calculer $\lim_{t\to+\infty} F(t)$.

4.4. Domaine de continuité de F ?

4.5. Domaine de dérivabilité de F ?

▷ **Exercice 5.** On pose

$$I = \int_{\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)} d\mu(x)d\mu(y)$$

5.1. Vérifier que le théorème de Fubini s'applique à I.

5.2. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{1+x^2y} d\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\pi}{2}$$

5.3. En déduire que $I = \dfrac{\pi^2}{2}$

5.4. Retrouver ce résultat directement en utilisant le changement de variables:

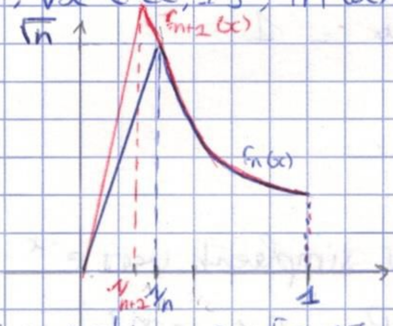
$$\begin{cases} v = x\sqrt{y} \\ t = \sqrt{y} \end{cases}$$

TD 3.1

Intégration **Intégrale de fonctions mesurables, espaces $\mathcal{L}^p$**

Exercice 1.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{2}} x & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$



Les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une suite croissante de fonctions positives mesurables (car continues) qui converge simplement μ-presque partout sur $[0,1]$ vers $f(x) = 1/\sqrt{x}$

f_n positive continue sur $[0,1]$ compact est $\begin{cases} \mathbb{R}\text{-int} \\ \mathcal{L}\text{-int} \end{cases}$

$$\int_0^1 f_n \, d\mu = \int_0^{1/n} n^{3/2} x \, dx + \int_{1/n}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2\sqrt{n}} + \left(2 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 2 - \frac{3}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

Théorème de convergence (de Lebesgue) monotone :

$$\int_{[0,1]} f \, d\mu = \lim \int_{[0,1]} f_n \, d\mu = 2.$$

Montrons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante

$\forall x \in [1/n, 1], \ f_{n+1}(x) = f_n(x)$

$\forall x \in [0, 1/n+1], \ f_{n+1}(x) = (n+1)^{3/2} x \geq n^{3/2} x = f_n(x)$

$\forall x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}], \ f_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{n}. \quad f_n(x) = n^{3/2} x \leq \sqrt{n}$

Exercice 2 :

1/ La fonction $f_n : x \to \sin(nx) \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$ ~~pas~~ n'a pas de limite simple ce n'est pas une suite croissante, les f_n ne sont pas positives.

$$\int_{\mathbb{R}^+} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \sin(nx) \mathbb{1}_{[0,n]} \, d\mu.$$

$\sin(nx)$ continue sur le compact $[0,n]$ est $\begin{cases} \mathbb{R}\text{ int} \\ \mathcal{L}\text{ int} \end{cases}$

et $\int_{\mathbb{R}^+} f_n \, d\mu = \int_0^n \sin(nx) \, dx = \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^n = \frac{1}{n}(1 - \cos n^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2/ $f_n : x \to |\cos(x)|^{1/n} e^{-x}$ suite de fonctions positives et mesurables (car continue sur $\mathbb{R}^+$)

et $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi_1 \Rightarrow |\cos(x)| > 0$ et $|\cos(x)|^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

et comme $A = \{x_n = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable donc de mesure nulle dans $\mathbb{R}^+$.

On peut en conclure que f_n converge simplement μ.p.p sur $\mathbb{R}^+$ vers $f(x) = e^{-x}$

les f_n forment une suite croissante car $\forall x \notin A$ $1 \geq \cos(x) \geq 0$

et $|\cos(x)|^{1/n} \leq |\cos(x)|^{1/(n+1)}$

et $\forall x \in A$ $f_n(x) = 0 = f_{n+1}(x)$

et Thm de Cv monotone:

$$\lim \int_{\mathbb{R}^+} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} \, d\mu = 1.$$

$g_n = e^{-x} \mathbb{1}_{[0,n]}$ $\mathbb{R}$-int $\mathcal{L}$-int.

g_n suite $\uparrow$, pos, mesurables, conv simplement vers e^{-x} sur $\mathbb{R}^+$

et $\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} \, d\mu = \lim_n \int g_n \, d\mu = \lim_n [1 - e^{-n}]$

Exercice 3:

$$u_n = \int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \, d\mu \qquad f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \, \mathbb{1}_{[0,n]}(x).$$

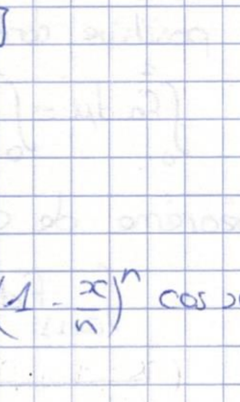
1/ $f_n(x) \longrightarrow e^{-x} \cos(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$

car $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-x}$

2/ $|f_n(x)| \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ $\forall x \in [0,n]$

$\leq e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})} \leq e^{n(-\frac{x}{n})}$

$\leq e^{-x} = g(x).$



$\ln(1+x) \leq x.$

Donc $f_n(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [0,n]$

et $f_n(x) = 0 \leq e^{-x}$ $\forall x \in]n, +\infty[$.

g majore les $|f_n|$ sur $\mathbb{R}^+$

3/ $\int_{\mathbb{R}^+} g \, d\mu = 1$ car g est $\mathcal{L}$ int. sur $\mathbb{R}^+$

On peut appliquer le th de CV dominée de Lebesgue

et on a $\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^+} (\lim f_n) \, d\mu$

$= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} \cos(x) = \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x} e^{ix} \, dx\right).$

$= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-i}\right) = \frac{1}{2}.$

TD 3.2

Intégration.

Exercice 4. $F : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \int_{\mathbb{R}^+} \frac{e^{-tx}}{1+x^2}\, d\mu(x) \end{cases}$

1/ $\forall t \geq 0 \quad f(t,x) = \frac{e^{-tx}}{1+x^2}$ continue sur $\mathbb{R}^+$ donc mesurable (Borélienne).

positive

et $|f(t,x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

$\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \left[\text{Arctan} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ ($\frac{1}{1+x^2}$ pos, R int sur $\mathbb{R}^+$ donc L. int sur $\mathbb{R}^+$ et les $\int$ coïncide)

et $F(t)$ est défini $\forall t \in \mathbb{R}^+$

Par contre pour $t < 0$

$\exists A > 0,\ \forall x \geq A \quad \frac{e^{-tx}}{1+x^2} \geq 1$ mais $\int_{[A,+\infty[} \mathbb{1}\, d\mu(x) = +\infty$.

Donc F n'est pas définie sur $\mathbb{R}^-_*$.

2/ $F(0) = \int \frac{1}{1+x^2}\, d\mu(x) = \left[\text{Arctan}\, x \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

3/ $f(t,x) \xrightarrow[t \to +\infty]{c.s.} 0$ μpp sur $\mathbb{R}^+$ → μpp pour la var d'intégration
($\forall x > 0$)
(pour $x = 0$, ça tend vers 1)

Par exemple pour des $\int \cos^n(x)$ on a $f_n \xrightarrow{cs} 0$ μpp car ts les points $k\pi$ sont un ens. dénombrable donc ça dégage.

→ Majoration indépendante de t en $V(+\infty)$ - voisinage de $+\infty$.

$|f(t,x)| \leq \frac{1}{1+x^2} \quad \forall t \geq 0$
μpp en $x \in \mathbb{R}^+$ (ici $\forall x \geq 0$).

Conclusion $\lim_{t \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^+} f(t,x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} (\lim f(t,x))\, d\mu_x$

$= \int_{\mathbb{R}^+} 0\, d\mu_x = 0$

4/ Continuité en $t_0 \in \mathbb{R}^+$

(a) $x \longmapsto f(t,x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^+$

(b) majoration :
$|f(t,x)| \leq g_0(x) \ \forall t \in V(t_0) \subset I$ μpp par rapport à $x \in \mathbb{R}^+$ avec $g_0 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$.

(c) $t \to f(t,x)$ continue en t_0 μpp en $x \in \mathbb{R}^+$

(b) $|f(t,x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)\ \forall t \in I$.

(c) continuité de $f(t,x)$ par rapport à t OK !

le domaine de continuité de F est donc $\mathbb{R}^+$

5/ Dérivabilité en $t_0 \in \mathbb{R}^+_*$

(a) $t \to f(t,x)$ admet une dérivée partielle$/t$ au voisinage de t_0 μpp en $x \in \mathbb{R}^+$

ici $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{-x e^{-tx}}{1+x^2}$ bien définie $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, continue donc mesurable.

(b) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g_0(x)$ $\forall t \in V(t_0) \subset I$ μpp en $x \in \mathbb{R}^+_*$

$\begin{cases} \forall t \in \left]\dfrac{t_0}{2}, \dfrac{3}{2}t_0\right[& t_0 > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}^+ & \end{cases}$

Remarque : en $t_0 = 0 \in I$, on ne peut trouver de majoration par une f° $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^+)$)

Exercice 5

$$I = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}\, d\mu(x)\, d\mu(y)$$

1/ $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+y)} \times \dfrac{1}{1+x^2y}$ est positive sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ continue donc Borelienne.

et Fubini nous dit que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+} f(x,y)\, d\mu_x\right) d\mu_y = \int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+} f(x,y)\, d\mu_y\right) d\mu_x$

Remarque : Pour f non positive

Si on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+} |f(x,y)|\, d\mu_x\right) d\mu_y < +\infty$

ou $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+} |f(x,y)|\, d\mu_y\right) d\mu_x < +\infty$

alors on a Fubini

2/ pour $y>0$ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{(1+x^2y)}\, d\mu(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2y}\, dx$ (f° cont pos, $R \Leftrightarrow L$)

Chg^t var $u = x\sqrt{y}$ bijectif de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}} [\operatorname{Arctan}(u)]_0^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\pi}{2}$$

TD 3.3

Integration 3/ $I = \int_{\mathbb{R}_*^+} \left(\int_{\mathbb{R}^+} f(x,y)\, d\mu_x \right) d\mu_y$

car y : $\{0\}$ ens de mesure nulle $\forall y \in \mathbb{R}^+$.

$$= \int_{\mathbb{R}_*^+} \frac{1}{1+y} \frac{\pi}{2\sqrt{y}}\, d\mu_y = \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}_*^+} \frac{1}{\sqrt{y}+y\sqrt{y}}\, dy$$

$v = \sqrt{y}$ bijectif de $\mathbb{R}_*^+$ dans $\mathbb{R}_*^+$.

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}_*^+} \frac{2v}{v+v^3}\, dv$$

$$= \pi \int_{\mathbb{R}_*^+} \frac{1}{1+v^2}\, dv = \frac{\pi^2}{2}.$$

4/ Changement de variable bijectif sur $\mathbb{R}_*^+$, $\mathbb{R}_*^+$.

$\varphi : (x,y) \to (v,t) = (x\sqrt{y}, \sqrt{y})$.

$\psi : (v,t) \to (x,y) = \left(\frac{v}{t}, t^2\right)$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y} & 0 \\ \frac{x}{2\sqrt{y}} & \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{pmatrix}$$

$$\psi'(v,t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{v}{t^2} \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$$

$|\det(J)| = 2$.

et on a $\int_{\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+} f(x,y)\, d\mu_x\, d\mu_y = \iint_{\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+} (f \circ \psi)(v,t)\, 2\, d\mu_v\, d\mu_t$

$$= 2 \iint_{\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+} \frac{1}{1+t^2} \times \frac{1}{1+v^2} = 2 \int \frac{1}{1+t^2} \int \frac{1}{1+v^2}\, d\mu_v\, d\mu_t$$

$$= 2\,[\operatorname{Arctan}(x)]_0^{+\infty\, 2}$$

$$= \frac{2\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{2}.$$