

EXAMEN PROBABILITÉS - 1SN

15 Novembre 2018 (14h-15h45)

Partiel sans document (Une feuille A4 recto-verso autorisée)

Exercice 1 (7 points)

1. On considère une variable aléatoire continue X définie sur l'intervalle $]0, T[$ ($T > 0$) de densité

$$p(x) = \begin{cases} Ke^{-ax} & \text{si } x \in]0, T[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

où $K > 0$ est une constante dépendant de $a > 0$.

- Déterminer la valeur de K pour que p soit une densité de probabilité (on ne remplacera pas K par son expression dans ce qui suit).
- Montrer que la loi de la variable aléatoire

$$Y = \frac{KT}{a} [1 - \exp(-aX)] \quad (2)$$

est une loi uniforme sur un intervalle à préciser.

2. De manière plus générale, on considère une variable aléatoire continue X définie sur l'intervalle $]0, T[$ ($T > 0$) de densité $p(x)$ et de fonction de répartition strictement croissante. On considère la variable aléatoire Y définie par

$$Y = T \int_0^X p(u) du. \quad (3)$$

- Montrer que dans le cas où X possède la loi définie par (1), la variable aléatoire Y définie dans (3) admet l'expression (2) (ce qui montre que cette question généralise la précédente).
- Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire Y et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $]0, T[$.

Exercice 2: Changement de variables (9 points)

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de lois exponentielles de paramètre 1 (notées $X \sim \mathcal{E}(1)$ et $Y \sim \mathcal{E}(1)$) définies par

$$p(x, \cdot) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad p(\cdot, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarquera que la loi exponentielle est un cas particulier de loi gamma dont les paramètres sont précisés dans les tables de lois.

1. Déterminer la loi du couple (Z, T) lorsque $Z = X + Y$ et $T = X - Y$ en prenant soin (comme d'habitude) de déterminer le domaine de définition de ce couple. En déduire les lois marginales de Z et T , leurs moyennes $E[Z]$ et $E[T]$ et leurs variances $\text{Var}(Z)$ et $\text{Var}(T)$.
2. Déterminer la covariance du couple (Z, T) .
3. Déterminer la fonction caractéristique de Z . En utilisant les tables, retrouver la loi de Z déterminée à la première question.

Exercice 3: Médiane (5 points)

On considère une variable aléatoire réelle X de fonction de répartition notée F continue et strictement croissante et on appelle médiane de X le nombre m tel que $F(m) = 1/2$.

1. Déterminer la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre a notée $\mathcal{E}(a)$ de densité

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En déduire la médiane de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

2. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n de même loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$ et on définit la suite de variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n de la manière suivante

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i > m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où m est la médiane de la loi exponentielle $\mathcal{E}(a)$.

- Déterminer la loi de Y_i , sa moyenne et sa variance
- En déduire la loi de $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.
- En utilisant le théorème de la limite centrale, montrer que la loi de S_n peut s'approcher pour n grand par une loi normale dont on précisera les paramètres.

LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

m : moyenne σ^2 : variance F. C. : fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$ $p_{1,...,m} = P[X_1 = k_1, ..., X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, ..., n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it} (1 - e^{itn})}{n (1 - e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	p	pq	$pe^{it} + q$
Binomiale $B(n, p)$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, ..., n\}$	np	npq	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$p_k = C_{n+k-1}^{n-1} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n \frac{q}{p}$	$n \frac{q}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1 - qe^{it}} \right)^n$
Multinomiale	$p_{1,...,m} = \frac{n!}{k_1! ... k_m!} p_1^{k_1} ... p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, ..., n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	np_j	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left(\sum_{j=1}^m p_j e^{it} \right)^n$
Poisson $P(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	λ	λ	$\exp[\lambda (e^{it} - 1)]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

m : moyenne σ^2 : variance F. C. : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	σ^2	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{(1 - it/\theta)^\nu}$
Inverse gamma $IG(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{- x }$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	σ^2	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi2 χ_ν^2 $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}$ $\nu \in \mathbb{N}^*, x \geq 0$	ν	2ν	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda \left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda t }$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0, b > 0$ $x \in]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)