Examen – Automatique

Session 1, mercredi 17 janvier 2018

Documents autorisés : 1 pages A4 recto-verso manuscrite

▷ **Exercice 1.** (7 points) On considère le système

$$(S)\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1(t) = x_1(t) - x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t)\end{array}\right.$$

1.1. Écrire ce système sous la forme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. On donnera les matrices A et B.

1.2. Le système est-il contrôlable ?

1.3. On considère le point de fonctionnement $(x_e, u_e) = (0, 0, 0)$. Donner K de façon à ce que le système contrôlé par retour d'état soit asymptotiquement stable avec comme pôles les valeurs -1 et -2.

1.4. Toujours pour le point de fonctionnement $(x_e, u_e) = (0, 0, 0)$ on prend le contrôle par retour de sortie $u(t) = kx_2(t)$. Le système obtenu est-il asymptotiquement stable ? stable ?

▷ **Exercice 2.** (7 points) Le mouvement d'un satellite autour de son centre de gravité est régi par les équations d'Euler suivantes

$$(S)\left\{\begin{array}{l}J_1\dot{\omega}_1(t) = (J_2 - J_3)\omega_2(t)\omega_3(t) + u_1(t)\\ J_2\dot{\omega}_2(t) = (J_3 - J_1)\omega_3(t)\omega_1(t) + u_2(t)\\ J_3\dot{\omega}_3(t) = (J_1 - J_2)\omega_1(t)\omega_2(t) + u_3(t)\end{array}\right.$$

où $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est la vitesse angulaire, J_1, J_2 et J_3 sont les moments principaux d'inertie et $u = (u_1, u_2, u_3)$ les couples exercés par les moteurs. On suppose que $J_1 > J_2 > J_3 > 0$.

2.1. Donner l'application f telle que le système s'écrive $\dot{\omega}(t) = f(\omega(t), u(t))$.

2.2. On considère le point de fonctionnement $(\omega_e, u_e) = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ et on choisit un contrôle par retour d'état du type $u(t) = K\omega(t)$, avec

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0\\ 0 & k_2 & 0\\ 0 & 0 & k_3\end{pmatrix}.$$

Donner des conditions sur les coefficients k_1, k_2 et k_3 pour que ω_e soit asymptotiquement stable (pour le système $\dot\omega(t) = f(\omega(t), K\omega(t))$).

2.3. On considère le cas $u(t) = (0,0,0)$ pour tout t et le point d'équilibre de ce système $x_e = (0,0,0)$.

1. Donner la fonction g permettant d'écrire le système $\dot\omega(t) = g(\omega(t))$.
2. Donner l'expression de la matrice jacobienne $J_g(x_e)$ en ce point d'équilibre.
3. Que peut-on conclure quant-à la stabilité et la stabilité asymptotique de ce point d'équilibre ?

2.4. On considère toujours $u(t) = (0,0,0)$ pour tout t. On pose V l'application

$$\begin{array}{rcl} V : \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \omega & \longmapsto & V(\omega) = J_1\omega_1^2 + J_2\omega_2^2 + J_3\omega_3^2. \end{array}$$

1. Montrer que le long de toute trajectoire on a V qui est constant.
2. en déduire que le système est stable, mais non asymptotiquement stable.

▷ **Exercice 3.** (6 points) On considère les schémas d'Euler et de Runge

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1/2 & 1/2 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Euler (ordre 1) Runge (ordre 2)

et le système différentiel suivant

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \dot x(t) = x(t) \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$$

où x est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

3.1. Écrire le schéma d'Euler et de Runge sur cet exemple.

3.2. Retrouver pour cet exemple que le schéma d'Euler (respectivement Runge) est d'ordre 1 (respectivement 2).

3.3. Démontrer, à l'aide de ce système, que dans le cas général d'un schéma de Runge-Kutta explicite, l'ordre du schéma ne peut être supérieur au nombre d'étages s.