Guiding Principle

脳は自分自身へのfeed backをもっている。
もししきい値処理を考えなければ、ネットワーク行列 W と、各ニューロンの
発火状態 x を使って、$y=W\cdot x$ が このネットワークでの 1 step の処理。
これが自己feedbackされた結果、$W^{(n)}x$ という
形となるが、記憶はその中で残る状態として理解出来る。

$$W = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} & \cdots \\ w_{21} & 0 & & \\ \vdots & & 0 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots & 0 \end{pmatrix}$$

：対角項 $=0$、必ずしも対称性は要求しない。

Q、Wの形はどうすれば良い？
ここでは、全サンプルに対して

$$L^2 = \sum_s \left[x^s - W\cdot x^s \right]^2$$

を最小化するような W を求める。

（ここの定義はいくつか考えられる。研究は必要。
ただし、微分を行う上で、規格化が行われやすい形が理想的。
$L = \sum_s x^s\cdot(W\cdot x^s)$ は、ダメな例。最小が存在しない）

$$\mathcal{L}^2 = \Sigma_s \left[\, |W X^s|^2 - 2\cdot W\cdot X^s + |X^s|^2 \, \right]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial w_{pq}} = \frac{\partial}{\partial w_{pq}} \Sigma_s \left\{ \Sigma_i \left(\Sigma_j w_{ij} x^s_j \right) \cdot \left(\Sigma_k w_{ik} x^s_k \right) - 2\cdot \Sigma_{ij} w_{ij} x_i^s x_j^s \right\}$$

$$= \Sigma_s \left\{ 2\cdot \Sigma_i \, \delta_{ip} x^s_q \, \Sigma_k w_{ik} x_k^s - 2\cdot x_p^s x_q^s \right\}$$

$$= 2\cdot \Sigma_s \left(\Sigma_k w_{pk} x_k^s x_q^s - x_p^s x_q^s \right)$$

ここで、$S_{pq} \equiv \Sigma_s x_p^s x_q^s$ とおくと、

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial w_{pq}} = 2\cdot \left[W\cdot S - S \right]_{pq}$$

これがすべての p, q について ゼロになることが、$\mathcal{L}^2$ 最小の条件。すなわち、

$$W\cdot S = S \qquad (S_{ij} \equiv \Sigma_s x_i^s x_j^s \text{、} W \text{は対角項ゼロの非対称行列})$$

を満たす W が、できるだけ多くの X ベクトルをできるだけ忠実に記憶していることになる。

今回の $\mathcal{L}^2$ の定義の下で

Wの求め方には 2つある。

①、厳密解。

→ W_{ij}の各成分を変数として、$W \cdot \xi = \xi$ の関係式から
連立一次方程式を作り、解けば良い。
ただし、自由度を数えると、

$$(\underbrace{W}_{} - I) \cdot \xi = 0 \quad \cdots ①$$

↓

自由度は、
$\underbrace{N^2 - N}$
(対角項 $=0$ より)

← もしくは、Wが$\underbrace{\text{対称行列}}_{\text{①式の形より}}$でなければならないとするならば、
$\frac{1}{2}N(N-1)$ 個

これに対して、方程式は、①のN行分であり、N自由度。

よって、N大では、Wの自由度の方が大きくなり
そのため、ネットワークの設計自由度が生まれる。

㊟ ただし、ここで求めたWは、E^2を最小化しているだけであって、
個々のベクトルx^sに対し、$x^s = W \cdot x^s$ を成立させているとは限らないことに注意。

②、発火を次々と入れて、反復的に収束させる方法.

今、発火ベクトル v が入ったとする. その時に、$(W-I)S=0$ が成立しつづけるために必要な変更量 ΔW を求める。 $(\Delta S)_{ij} \equiv v_i v_j$ とおく.

$$[(W+\Delta W)-I]\cdot(S+\Delta S) = \underbrace{(W-I)\cdot S}_{=0} + \Delta W\cdot S + (W-I)\cdot\Delta S + \underbrace{\Delta W\cdot\Delta S}_{\text{小}}$$

$$= \Delta W\cdot S + (W-I)\cdot\Delta S = 0$$

よって. $\boxed{\Delta W = (I-W)\cdot\Delta S\cdot S^{-1}}$.

さて. これを近似計算する上で、S (相関行列) は基本的に対角成分のみが大きく、非対角成分は小さいことを使う.

対角成分を D, 非対角成分を A とおくて、

$$S = D + A.$$

この時、S^{-1} は、

$$I = SS^{-1} = (D+A)S^{-1}$$

$$D\cdot S^{-1} = I - AS^{-1}$$

$$S^{-1} = D^{-1}(I - A\cdot S^{-1})$$

$$= D^{-1} - D^{-1}\cdot A\cdot D^{-1} + \cdots$$

と展開出来る.

第一項のみで計算すると、

$$[\Delta W]_{ij} \sim [(I-W)\cdot \Delta S \cdot D^{-1}]_{ij} = \frac{1}{\sum_s (r_j^s)^2}\Big[\underbrace{r_i r_j}_{①} - \underbrace{\textstyle\sum_k W_{ik} r_k \cdot r_j}_{②}\Big]$$

①強化学習項.　②.

となり、強化学習が、基本原理となっていることが分かる。

このモデルにおける学習の