ラグランジュの未定乗数法を用いて、Wの対角成分$=0$ の条件で $\mathcal{L}$ を最大化する.

$$H \equiv \mathcal{L}^2 + \sum_i \lambda_i W_{ii}$$

に対して.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial W_{ij}} = \dfrac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial W_{ij}} = 0 & (i \neq j) \\ \dfrac{\partial H}{\partial W_{ii}} = \lambda_i + \dfrac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial W_{ii}} = 0 & \\ \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i} = W_{ii} = 0 & \end{cases}$$

を解く。(パラメータ数と方程式数は $n(n+1)$ で一致.)

$$\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial W_{pq}} = 2 \cdot \sum_s \left[\sum_k W_{pk} x_k^s x_q^s - x_p^s x_q^s \right] = 2 \cdot [W - I] \cdot S$$

より.

$$(W - I) \cdot S = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}.$$

$W_{ii} = 0$ に注意すると.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & W_{12} & W_{13} & \cdots \\ W_{21} & -1 & & \\ W_{31} & & -1 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}}_{V} S = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{2} & & & 0 \\ & -\frac{\lambda_2}{2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}}_{B.}$$

$$V \cdot S = B$$

に関して、1つのベクトル r が入って、それで update することを考える。(相関行列 など)

$$(V + \Delta V)\cdot(S + \Delta S) = B + \Delta B.$$

$$\Delta V \cdot S + V \cdot \Delta S = \Delta B.$$

S が対角優位であることに気を付け、$S = \overbrace{D}^{\text{対角成分}} + \overbrace{A}^{\text{非対角成分} \sim 0} \sim D$ とすると、

$$\Delta V \cdot D = \Delta B - V \cdot \Delta S$$

① 対角項は、$\Delta V_{ii} = 0$ に気を付けると、

$$-\frac{1}{2}\Delta\lambda_i = \Sigma_k V_{ik} \cdot r_k r_i = -r_i r_i + \sum_{k \neq i} w_{ik} r_k r_i$$

$$\boxed{\therefore \Delta\lambda_{ii} = 2 \cdot r_i \left[r_i - \sum_{k \neq i} w_{ik} \cdot r_k \right]}$$

② 非対角項は、$\Delta B_{ij} = 0 \ (i \neq j)$ より、

$$\Delta V = -V \cdot \Delta S \cdot D^{-1}$$

$$\Delta w_{ij} = -\Sigma_{k,l} V_{ik} r_k r_l \frac{1}{S_{lj}} \cdot \delta_{lj}$$

$$= -\Sigma_k V_{ik} r_k r_j \frac{1}{S_{jj}}$$

$$= \frac{1}{S_{jj}} \cdot r_j \left[r_i - \sum_{k \neq i} w_{ik} \cdot r_k \right].$$

$$\boxed{\therefore \Delta w_{ij} = \frac{1}{S_{jj}} r_j \left[r_i - \sum_{k \neq i} w_{ik} r_k \right]}$$

$w_{ii} = 0$ を考えて $\sum_{k \neq i} w_{ik}$ は $\sum_{k} w_{ik}$ とゆるめられる.

$$\sum_{k \neq i} w_{ik} \cdot v_k = \sum_{k} w_{ik} \cdot v_k$$ = ニューロン i への入力・y_i (このモデルでは、= 出力)

となっており。

$$\Delta w_{ij} = \frac{1}{S_{jj}} v_j [v_i - y_i]$$ と書くことも出来る.