ORTAÖĞRETİM
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

MEBİ

# KONU ÖZETLERİ

# MATEMATİK

# TYT

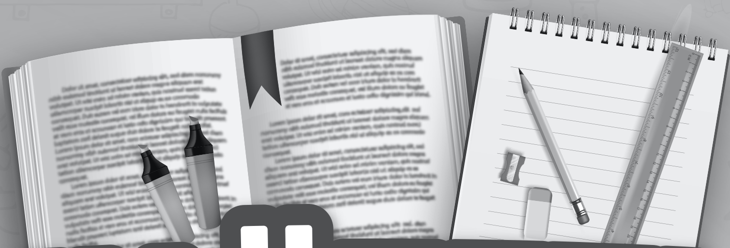
*Zengin ve Anlaşılır İçerik*

*Hızlı ve Etkili Öğrenme*

*Görsel Destekli Anlatım*

ORTAÖĞRETİM
GENEL MÜDÜRLÜĞÜ

MEBİ



# KONU ÖZETLERİ

# MATEMATİK

# TYT

- Zengin ve Anlaşılır İçerik
- Hızlı ve Etkili Öğrenme
- Görsel Destekli Anlatım

MEBİ TYT KONU ÖZETLERİ - MATEMATİK

**ISBN** 978-975-11-8473-3

**Yazar** KOMİSYON

mebi.eba.gov.tr

Millî Eğitim Bakanlığı
Atatürk Bulvarı No: 98
Bakanlıklar / ANKARA

Tel: 0312 4132680
0312 4132681
0312 4131838

www.meb.gov.tr

# İSTİKLÂL MARŞI

Korkma, sönmez bu şafaklarda yüzen al sancak;
Sönmeden yurdumun üstünde tüten en son ocak.
O benim milletimin yıldızıdır, parlayacak;
O benimdir, o benim milletimindir ancak.

Çatma, kurban olayım, çehreni ey nazlı hilâl!
Kahraman ırkıma bir gül! Ne bu şiddet, bu celâl?
Sana olmaz dökülen kanlarımız sonra helâl.
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl.

Ben ezelden beridir hür yaşadım, hür yaşarım.
Hangi çılgın bana zincir vuracakmış? Şaşarım!
Kükremiş sel gibiyim, bendimi çiğner, aşarım.
Yırtarım dağları, enginlere sığmam, taşarım.

Garbın âfâkını sarmışsa çelik zırhlı duvar,
Benim iman dolu göğsüm gibi serhaddim var.
Ulusun, korkma! Nasıl böyle bir imanı boğar,
Medeniyyet dediğin tek dişi kalmış canavar?

Arkadaş, yurduma alçakları uğratma sakın;
Siper et gövdeni, dursun bu hayâsızca akın.
Doğacaktır sana va'dettiği günler Hakk'ın;
Kim bilir, belki yarın, belki yarından da yakın.

Bastığın yerleri toprak diyerek geçme, tanı:
Düşün altındaki binlerce kefensiz yatanı.
Sen şehit oğlusun, incitme, yazıktır, atanı:
Verme, dünyaları alsan da bu cennet vatanı.

Kim bu cennet vatanın uğruna olmaz ki feda?
Şüheda fışkıracak toprağı sıksan, şüheda!
Cânı, cânânı, bütün varımı alsın da Huda,
Etmesin tek vatanımdan beni dünyada cüda.

Ruhumun senden İlâhî, şudur ancak emeli:
Değmesin mabedimin göğsüne nâmahrem eli.
Bu ezanlar -ki şehadetleri dinin temeli-
Ebedî yurdumun üstünde benim inlemeli.

O zaman vecd ile bin secde eder -varsa- taşım,
Her cerîhamdan İlâhî, boşanıp kanlı yaşım,
Fışkırır ruh-ı mücerret gibi yerden na'şım;
O zaman yükselerek arşa değer belki başım.

Dalgalan sen de şafaklar gibi ey şanlı hilâl!
Olsun artık dökülen kanlarımın hepsi helâl.
Ebediyyen sana yok, ırkıma yok izmihlâl;
Hakkıdır hür yaşamış bayrağımın hürriyet;
Hakkıdır Hakk'a tapan milletimin istiklâl!

Mehmet Âkif ERSOY

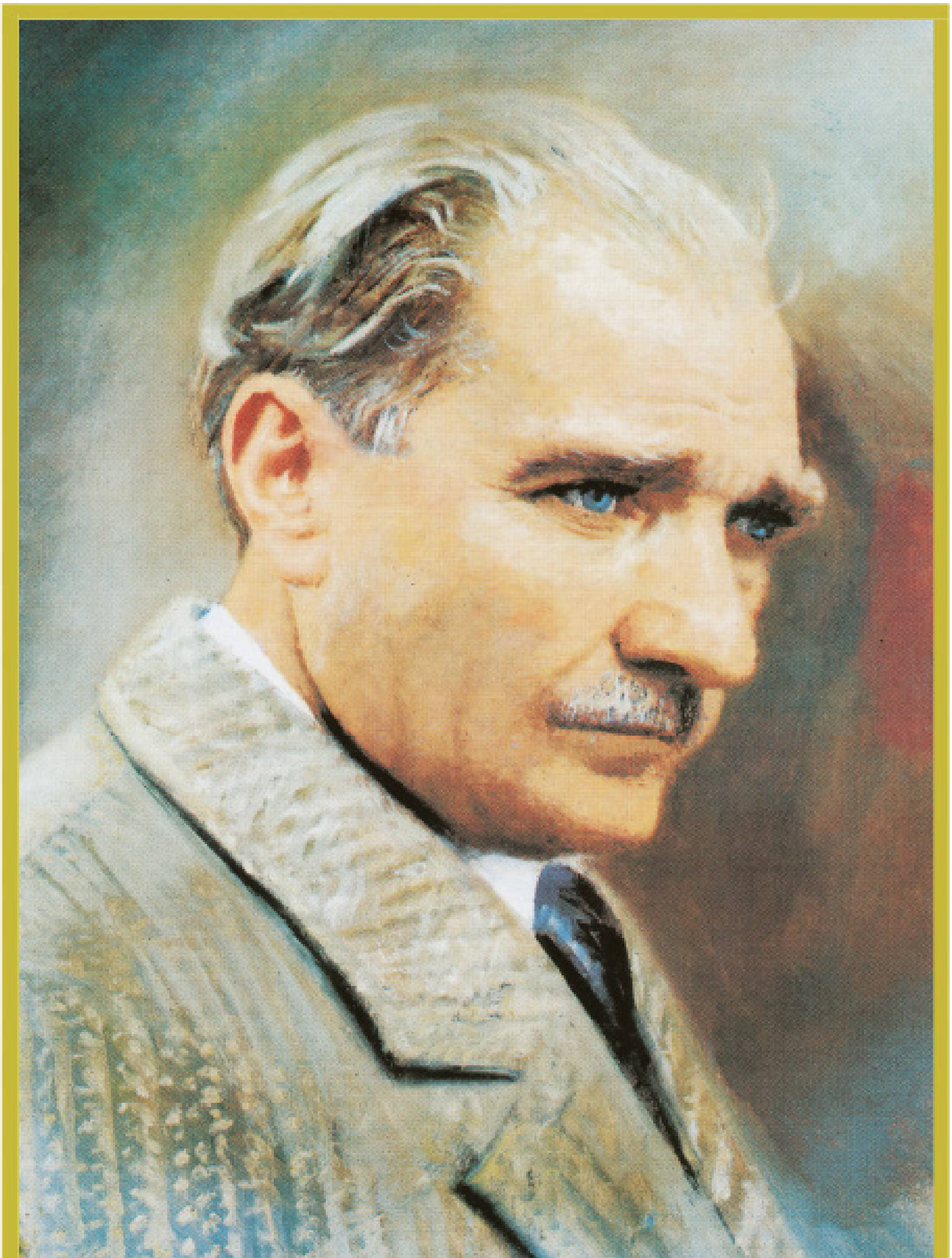
# GENÇLİĞE HİTABE

Ey Türk gençliği! Birinci vazifen, Türk istiklâlini, Türk Cumhuriyetini, ilelebet muhafaza ve müdafaa etmektir.

Mevcudiyetinin ve istikbalinin yegâne temeli budur. Bu temel, senin en kıymetli hazinendir. İstikbalde dahi, seni bu hazineden mahrum etmek isteyecek dâhilî ve hâricî bedhahların olacaktır. Bir gün, istiklâl ve cumhuriyeti müdafaa mecburiyetine düşersen, vazifeye atılmak için, içinde bulunacağın vaziyetin imkân ve şeraitini düşünmeyeceksin! Bu imkân ve şerait, çok namüsait bir mahiyette tezahür edebilir. İstiklâl ve cumhuriyetine kastedecek düşmanlar, bütün dünyada emsali görülmemiş bir galibiyetin mümessili olabilirler. Cebren ve hile ile aziz vatanın bütün kaleleri zapt edilmiş, bütün tersanelerine girilmiş, bütün orduları dağıtılmış ve memleketin her köşesi bilfiil işgal edilmiş olabilir. Bütün bu şeraitten daha elîm ve daha vahim olmak üzere, memleketin dâhilinde iktidara sahip olanlar gaflet ve dalâlet ve hattâ hıyanet içinde bulunabilirler. Hattâ bu iktidar sahipleri şahsî menfaatlerini, müstevlîlerin siyasî emelleriyle tevhit edebilirler. Millet, fakr u zaruret içinde harap ve bîtap düşmüş olabilir.

Ey Türk istikbalinin evlâdı! İşte, bu ahval ve şerait içinde dahi vazifen, Türk istiklâl ve cumhuriyetini kurtarmaktır. Muhtaç olduğun kudret, damarlarındaki asil kanda mevcuttur.

Mustafa Kemal Atatürk



**MUSTAFA KEMAL ATATÜRK**

# İÇİNDEKİLER

- Sayıları yazmak için kullanılan sembollere **rakam** denir.

  Rakamlar kümesi {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} dir.

- 0, 1, 2, 3, ... şeklindeki sayıların oluşturduğu kümeye **doğal sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{N}$ ile gösterilir. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ şeklindedir.

- $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesine –1, –2, –3, ... sayılarının eklenmesiyle oluşan sayı kümesine **tam sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir. $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ şeklindedir.

- a ve b tam sayılar, b sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara **rasyonel sayılar** denir. Rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}$ simgesi ile gösterilir.

- a ve b tam sayılar ve b sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara **irrasyonel sayılar** denir. İrrasyonel sayılar kümesi $\mathbb{Q}'$ simgesi ile gösterilir. İrrasyonel sayılara $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\pi$, … sayıları örnek olarak verilebilir.

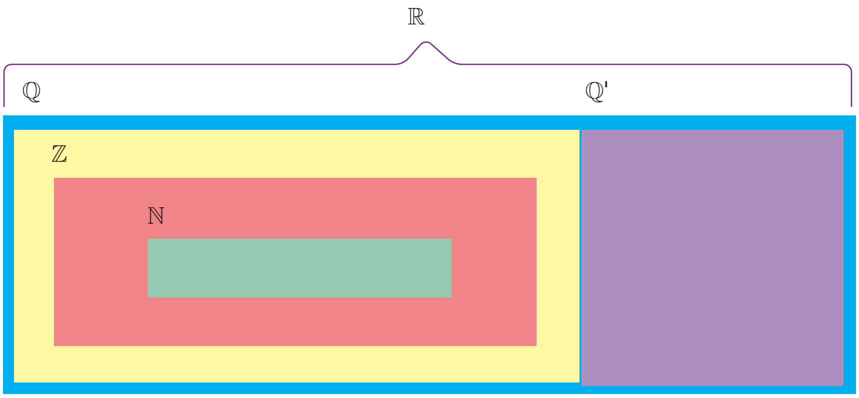
**DİKKAT**

**İrrasyonel sayılar;**

- Kök dışına tam olarak çıkamayan sayılardır.
- Virgülden sonraki kısmı tam olarak bilinmeyen sayılardır.
- İki tam sayının oranı şeklinde yazılamayan sayılardır.
- $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-9}$ gibi içinde negatif sayı bulunan kareköklü sayılar gerçek sayı belirtmez.

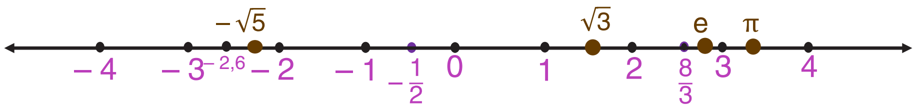
- Rasyonel sayılar kümesi ile irrasyonel sayılar kümesinin birleşiminden oluşan kümeye **gerçek (reel) sayılar kümesi** denir ve $\mathbb{R}$ simgesi ile gösterilir. Gerçek sayılar kümesinin her elemanına sayı doğrusunda bir nokta karşılık gelir.

- Sayı kümeleri arasında $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ilişkisi vardır ve $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ dir.

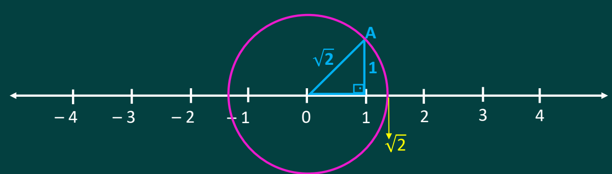



**GERÇEK SAYILARIN SAYI DOĞRUSUNDA GÖSTERİLMESİ**

Sayı doğrusu gerçek sayıların bir gösterim şeklidir. Her gerçek sayı, sayı doğrusu üzerinde bir nokta belirtir.




**ÖRNEK :** $\sqrt{2}$ sayısının sayı doğrusu üzerindeki yerini gösterelim.



## GERÇEK SAYILAR KÜMESİNDE TOPLAMA VE ÇARPMA İŞLEMİNİN ÖZELLİKLERİ

**Kapalılık Özelliği**

Herhangi iki gerçek sayının toplamı ya da çarpımı yine bir gerçek sayıdır. Gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin **kapalılık özelliği** vardır.

Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b \in \mathbb{R}$ ve $a \cdot b \in \mathbb{R}$ dir.

**Değişme Özelliği**

Herhangi iki gerçek sayının toplamında ya da çarpımında sayıların yerlerinin değiştirilmesi sonucu değiştirmez.
Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b = b + a$ ve $a \cdot b = b \cdot a$'dır.

Gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin **değişme özelliği** vardır.

**Birleşme Özelliği**

Herhangi üç gerçek sayının toplamı ya da çarpımında işlem sırası için seçilen gruplamanın belirleniş şekli sonucu değiştirmez.

Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$ ve $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$'dir.

Gerçek sayılar kümesinde toplama ve çarpma işlemlerinin **birleşme özelliği** vardır.

**Toplama ve Çarpma İşlemlerinin Birim (Etkisiz) Elemanları**

Herhangi bir gerçek sayıya 0 eklemek veya herhangi bir gerçek sayı ile 1'i çarpmak sonucu değiştirmez.

Her $a \in \mathbb{R}$ için $a + 0 = 0 + a = a$ ve $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$'dır.

**Toplama işleminin birim elemanı "0"** ve **çarpma işleminin birim elemanı "1"** dir.

**Toplama ve Çarpma İşlemlerine Göre Bir Sayının Tersi**

Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $b \neq 0$ için,

$a + (-a) = (-a) + a = 0$ olduğundan a 'nın toplama işlemine göre tersi $-a$ 'dır.

$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$ olduğundan a 'nın çarpma işlemine göre tersi $\frac{1}{a}$ 'dır.

**DİKKAT**

Gerçek sayılar kümesinde 0'ın çarpmaya göre tersi yoktur.

**Yutan Eleman**

Herhangi bir gerçek sayı 0 ile çarpıldığında sonuç her zaman 0'dır.

Her $a \in \mathbb{R}$ için $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ olduğundan **"0" çarpma işleminin yutan elemanı**dır.

**Çarpma İşleminin Toplama ve Çıkarma İşlemi Üzerine Dağılma Özelliği**

Her a, b, c $\in \mathbb{R}$ için

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ ve $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$'dir

$a \cdot (b - c) = (a \cdot b) - (a \cdot c)$ ve $(a - b) \cdot c = (a \cdot c) - (b \cdot c)$'dir.

**Negatif ve Pozitif Sayılarda Çarpma ve Bölme İşlemleri**

| | |
|---|---|
| $(+) \cdot (-) = (-)$ | $(+) : (-) = (-)$ |
| $(-) \cdot (+) = (-)$ | $(-) : (+) = (-)$ |
| $(+) \cdot (+) = (+)$ | $(+) : (+) = (+)$ |
| $(-) \cdot (-) = (+)$ | $(-) : (-) = (+)$ |

**DİKKAT**

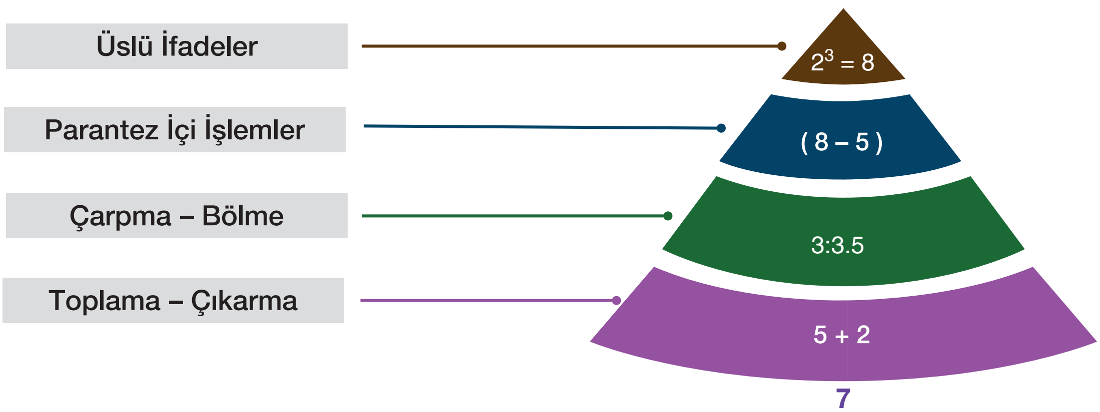
Bir pozitif ve bir negatif gerçek sayının toplamının işareti mutlak değerce büyük olan sayının işareti ile aynı olur.

**İşlem Önceliği:**

1. Üs alınır.
2. Parantez içi işlemler yapılır.
3. Çarpma ve bölme işlemleri yapılır.
4. Toplama ve çıkarma işlemleri yapılır.

**Örnek:**

$(2^3 - 5) : 3 \cdot 5 + 2$ işlemi için aşağıdaki şemayı inceleyiniz.




**DİKKAT**

- Art arda gelen toplama ve çıkarma işlemlerinden istenilen işlem önce yapılabilir.
- Art arda gelen çarpma ve bölme işlemlerinden önce soldaki yapılır.

**Çift Sayılar**

2 ile kalansız bölünebilen sayılara **çift sayılar** denir.

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere çift sayılar **2n** ile gösterilir.

Çift tam sayılar kümesi {…,–4, –2, 0, 2, 4,…} dir.

**Tek Sayılar**

2 ile bölündüğünde 1 kalanını veren sayılara **tek sayılar** denir.

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere tek sayılar **2n – 1** ya da **2n + 1** ile gösterilir.

Tek tam sayılar kümesi {…,–3, –1, 1, 3,…} dir.

**Tek ve Çift Sayılar Arasında Yapılan İşlemler**

Tek ve çift sayılar ile yapılan toplama ya da çıkarma işlemlerinin sonucunun tek ya da çift sayı olma durumları aşağıdaki tablodaki gibidir. Buna göre toplanan sayıların ikisi de çift sayı ya da ikisi de tek sayı ise sonuç çift sayı olur.

| + | T | Ç |
|---|---|---|
| T | Ç | T |
| Ç | T | Ç |

Tek ve çift sayılar ile yapılan çarpma işleminin sonucunun tek ya da çift sayı olma durumları aşağıdaki tablodaki gibidir. Buna göre sadece çarpılan sayıların ikisi de tek sayı olduğunda sonuç tek sayı olur.

| . | T | Ç |
|---|---|---|
| T | T | Ç |
| Ç | Ç | Ç |

**Tek ve Çift Sayıların Pozitif Tam Kuvvetleri**

$n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, tek ve çift sayılarda üs alma işleminin sonucunun tek ya da çift olma durumları aşağıdaki tablodaki gibidir.

| $T^n = T$ |
|---|
| $Ç^n = Ç$ |

## POZİTİF VE NEGATİF SAYILAR

**Pozitif Sayılar**

Sıfırdan büyük olan sayılara **pozitif sayılar** denir.

Bir a sayısı pozitif ise $\forall\ a \in \mathbb{R}^{+}$ ve $a > 0$ olarak ifade edilir.

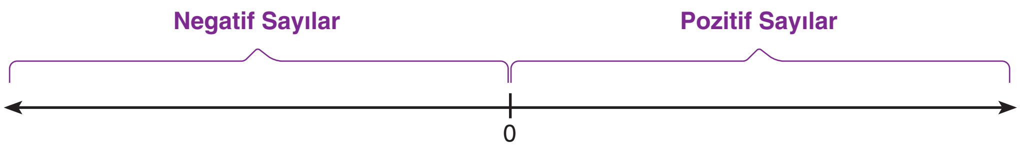
**Negatif Sayılar**

Sıfırdan küçük olan sayılara **negatif sayılar** denir.

Bir a sayısı negatif ise $\forall\ a \in \mathbb{R}^{-}$ ve $a < 0$ olarak ifade edilir.

**DİKKAT**

- Sayı doğrusunda sıfırın sağında pozitif sayılar ve solunda negatif sayılar yer alır.
- Bir sayının önünde bulunan ve sayının pozitif ya da negatif olduğunu gösteren sembole o sayının işareti denir.
- Sayının önünde bir işaret olmadığı durumda sayının pozitif olduğu anlaşılmalıdır.




**DİKKAT**

- Sıfır sayısı ne pozitif ne de negatiftir. Sıfırın önüne yazılacak pozitif ya da negatif işareti sıfır sayısının değerini değiştirmez. $-0 = +0 = 0$ dır.
- Sayı doğrusunda daima sağdaki sayı solundaki sayıdan büyüktür.

Pozitif gerçek sayılar, negatif gerçek sayılar kümeleri ve sıfır sayısının birleşimi gerçek sayılar kümesine eşittir.

$$\mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^{-} = \mathbb{R}$$

Pozitif tam sayılar, negatif tam sayılar kümeleri ve sıfır sayısının birleşimi tam sayılar kümesine eşittir.

$$\mathbb{Z}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^{-} = \mathbb{Z}$$

**Pozitif ve Negatif Sayılar Arasında Yapılan İşlemler**

**Toplama İşlemi**

İki pozitif sayının toplamı daima pozitif, iki negatif sayının toplamı daima negatiftir

| a | b | a+b |
|---|---|---|
| (+) | (+) | + |
| (–) | (–) | – |

Biri negatif diğeri pozitif iki sayının toplamında, mutlak değerce büyük olan sayıdan küçük olanı çıkarılır ve mutlak değerce büyük olan sayının işareti sonucun işareti olur.

Tabloda $a > 0$ ve $b < 0$ dır.

| a | b | a+b |
|---|---|---|
| $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$ | | – |
| $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$ | | + |

**DİKKAT**

- $a + b > 0$ ise a ve b sayılarının ikisi de pozitiftir ya da a ve b sayıları ters işaretlidir ve pozitif olan sayı negatif olan sayıdan mutlak değerce büyüktür.
- $a + b < 0$ ise a ve b sayıların ikisi de negatiftir ya da a ve b sayıları ters işaretlidir ve negatif olan sayı pozitif olan sayıdan mutlak değerce büyüktür.
- $a + b = 0$ ise a ve b sayıların ikisi de sıfırdır ya da a ve b sayıları ters işaretlidir ve mutlak değerce eşittirler.

### Çarpma ve Bölme İşlemleri

Pozitif ve negatif sayıların birbiriyle **çarpımının(bölümünün)** sonucunun pozitif ya da negatif olma durumları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Sayıların işaretleri aynı ise sonuç pozitif, sayılar ters işaretli ise sonuç negatiftir.

| a | b | $a \cdot b$ |
|---|---|---|
| (+) | (+) | + |
| (+) | (–) | – |
| (–) | (+) | – |
| (–) | (–) | + |

### Pozitif Sayıların Kuvvetleri

Pozitif sayıların bütün kuvvetleri pozitiftir.

$a > 0$ ise $a^n > 0$

### Negatif Sayıların Kuvvetleri

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere negatif sayıların kuvvetlerinin sonucunun pozitif ya da negatif olma durumu aşağıdaki tablodaki gibidir.

| | | |
|---|---|---|
| n çift sayı | $a^n$ | + |
| n tek sayı | $a^n$ | – |

**Örnek :**

a ve b sayıları sıfırdan farklı birer gerçek sayıdır.

$a^2 \cdot b^5 < 0$

$a^7 \cdot b^8 > 0$

olduğuna göre a ve b sayılarının işaretlerini bulalım.

**Çözüm :**

$a^2$ ve $b^8$ sayılarında üsler çift sayı olduğundan bu sayılar pozitif sayılardır.

$b^5$ ve $a^7$ sayılarında üsler tek sayı olduğundan sayıların işaretleri, tabanlarında bulunan sayının işaretiyle aynıdır.

$a^2 \cdot b^5 < 0$ eşitsizliğinde $b < 0$ olur. $a^7 \cdot b^8 > 0$ eşitsizliğinde $a > 0$ olur.

### Ardışık Sayılar

Belirli bir kurala göre art arda gelen sayılara **ardışık sayılar** denir. Ardışık sayıların art arda gelen terimleri arasındaki farklar eşittir ve bu farka **ortak fark** denir.

$\ldots, -n-1, -n, -n+1, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots$ sayıları ardışık tam sayılardır.

### Ardışık Çift Sayılar

Ardışık çift sayılar art arda gelen çift sayılardan oluşur ve ortak farkı 2'dir.

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\ldots, -2n-2, -2n, -2n+2, \ldots -4, -2, 0, 2, 4, \ldots, 2n-2, 2n, 2n+2, \ldots$ sayıları ardışık çift tam sayılardır.

24, 26, 28, 30 sayıları dört tane ardışık çift tam sayıdır.

### Ardışık Tek Sayılar

Ardışık tek sayılar art arda gelen tek sayılardan oluşur ve ortak farkı 2'dir.

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\ldots, -2n-1, -2n+1, \ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots, 2n-1, 2n+1, \ldots$ sayıları ardışık tek tam sayılardır.

$-29, -27, -25$ sayıları üç tane ardışık tek tam sayıdır.

### Terim Sayısı

Belirli bir kurala göre artan ya da azalan ardışık sayı dizisindeki terim sayısı;

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Ortak Fark}} + 1$$

ile hesaplanır.

### Terimler Toplamı

Belirli bir kurala göre artan ya da azalan ardışık sayı dizisindeki terimler toplamı;

$$\text{Terimlerin Toplamı} = \frac{\text{Son Terim} + \text{İlk Terim}}{2} \,.\, (\text{Terim sayısı})$$

ile hesaplanır.

**DİKKAT**

- $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$
- $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$
- $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n \cdot (n+1)$

**DİKKAT**

Tek sayıda terim içeren bir dizinin ortanca terimi;

$\dfrac{\text{Son Terim} + \text{İlk Terim}}{2}$ bağıntısı ile elde edilir.

Bir sayıyı oluşturan rakamlardan her birinin o sayı içerisindeki yerine **basamak** denir.

Beş basamaklı abcde sayısının basamakları aşağıdaki gibidir:

| a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|
| On Binler Basamağı | Binler Basamağı | Yüzler Basamağı | Onlar Basamağı | Birler Basamağı |

## BASAMAK DEĞERİ VE SAYI DEĞERİ

Bir sayının basamaklarında bulunan rakamların kendisi o rakamın sayı değeridir.

Bir sayının basamaklarında bulunan rakamın bulunduğu basamak ile çarpımı o rakamın basamak değeridir.

| **Basamak** | On Binler Basamağı | Binler Basamağı | Yüzler Basamağı | Onlar Basamağı | Birler Basamağı |
|---|---|---|---|---|---|
| **Sayı Değeri** | a | b | c | d | e |
| **Basamak Değeri** | $a \cdot 10000$ | $b \cdot 1000$ | $c \cdot 100$ | $d \cdot 10$ | $e \cdot 1$ |

## SAYILARIN ÇÖZÜMLENMESİ

Bir sayının basamak değerlerinin toplamı şeklinde yazılmasına **çözümleme** denir.

abcde beş basamaklı sayısı

$$abcde = 10000 \cdot a + 1000 \cdot b + 100 \cdot c + 10 \cdot d + e$$

olarak çözümlenir.

### DİKKAT

- Bir tam sayının sonuna eklenen bir sıfır, sayının değerini 10 katına çıkarır.
- Basamak sayısı belli olan bir sayının ilk basamağındaki rakam 0 olamaz.
- $AB + BA = 11.(A + B)$

  $AB - BA = 9.(A - B)$
- ABCDE beş basamaklı bir sayı olmak üzere;

$$\begin{aligned} ABCDE &= AB000 + CDE = 1000.\ AB + CDE \\ &= ABC00 + DE = 100.\ ABC + DE \\ &= ABCD0 + E = 10.\ ABCD + E \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

**Asal Sayılar**

1 ve kendisinden başka pozitif böleni olmayan 1’ den büyük tam sayılara **asal sayılar** denir.

Asal sayılar 2, 3, 5, 7, 11, 13, … şeklinde devam eder.

- 2 sayısı en küçük asal sayıdır ve 2’den başka çift asal sayı yoktur.
- Negatif asal sayı yoktur.
- Ardışık tam sayı olan asal sayılar sadece 2 ve 3'tür.

**Aralarında Asal Sayılar**

1’den başka pozitif ortak böleni olmayan pozitif tam sayılara **aralarında asal sayılar** denir.

- 1 ile bütün pozitif tam sayılar aralarında asaldır.
- Aralarında asal sayılar asal olmayabilirler.
- Ardışık tam sayılar aralarında asaldır.
- Ardışık tek tam sayılar aralarında asaldır.
- Ardışık çift tam sayılar 2’ye bölündükleri için aralarında asal değillerdir.

**Örnek:**

a, b ve c asal sayılardır.

$a^{2b-2c} = 121$

eşitliği veriliyor.

Buna göre $a + b \cdot c$ ifadesinin değerini bulunuz.

**Çözüm:**

$a^{2b-2c} = 121$

$a^{2b-2c} = 11^2$

$a = 11$ ve $2b - 2c = 2$

$b - c = 1$

Aralarındaki fark 1’e eşit olan asal sayılar sadece 2 ve 3 tür.

$b = 3$ ve $c = 2$ olur.

Buradan $a + b \cdot c = 11 + 2 \cdot 3 = 17$ olur.

**Örnek:**

$2a + 3b$ ile $2a - 3b$ aralarında asal sayılar olmak üzere

$22 \cdot (2a - 3b) = 18 \cdot (2a + 3b)$ eşitliği veriliyor.

Buna göre a değerini bulunuz.

**Çözüm:**

$22 \cdot (2a - 3b) = 18 \cdot (2a + 3b)$

$11 \cdot (2a - 3b) = 9 \cdot (2a + 3b)$

Buradan $2a + 3b = 11$ ve $2a - 3b = 9$ dur.

$$\begin{array}{rl} & 2a + 3b = 11 \\ + & 2a - 3b = 9 \\ \hline & 4a = 20 \\ & a = 5 \end{array}$$

olur.

## TAM SAYILARDA KALANLI BÖLME İŞLEMİ

$B \neq 0$ ve A, B, C, $K \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{array}{r|l} \text{Bölünen } A & B \text{ Bölen} \\ \cline{2-2} & C \text{ Bölüm} \\ - & \\ \cline{1-1} K \text{ Kalan} & \end{array}$$

Bölme işleminde

- Bölünen = Bölen · Bölüm + Kalan ($A = B \cdot C + K$)
- Kalan sayı K olmak üzere; $0 \leq K < B$ olmalıdır.
- Kalan 0 ise A sayısı B sayısına tam bölünür.

### DİKKAT

- Kalan sayı, bölümden küçük ise bölme işleminde bölen ile bölüm yer değiştirildiğinde kalan değişmez.
- Bölünen sayı ile bölen sayı bir k pozitif tam sayısının katı ise kalan sayı da k sayısının katı olmalıdır.
- $$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} & C \\ - & \\ \cline{1-1} K & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} B & D \\ \cline{2-2} & E \\ - & \\ \cline{1-1} F & \end{array}$$

$x \neq 0$ ve M, N, m, n, $a \in \mathbb{N}$ olmak üzere

şeklinde birden fazla bölme işlemi verildiğinde bu bölme işlemleri denklem şeklinde yazılır.

$A = B \cdot C + K$

$B = D \cdot E + F$

Elde edilen denklem sisteminde yerine koyma yöntemi kullanılarak A'nın C cinsinden değeri elde edilir.

**M** ve **N** pozitif tam sayılarının x pozitif tam sayısına bölümünden kalanlar sırasıyla **m** ve **n** olsun.

- **M + N** ifadesinin **x** ile bölümünden kalan, **m + n** 'nin **x** ile bölümünden kalana eşit olur.
- **M · N** ifadesinin **x** ile bölümünden kalan, **m · n** 'nin **x** ile bölümünden kalana eşit olur.
- **M – N** ifadesinin **x** ile bölümünden kalan, **m – n** 'nin **x** ile bölümünden kalana eşit olur.
- $\mathbf{M^a}$ ifadesinin **x** ile bölümünden kalan, $\mathbf{m^a}$ nın **x** ile bölümünden kalana eşit olur.

**Örnek :**

A sayısının 17 ile bölümünden kalan 4, B sayısının 17 ile bölümünden kalan 3'tür.

**Buna göre** $A^2 + AB - 2B$ **ifadesinin** 17 **ile bölümünden kalanı bulunuz.**

**Çözüm :**

$A^2 + A \cdot B - 2 \cdot B = 4^2 + 4 \cdot 3 - 2 \cdot 3$

$= 16 + 12 - 6$

$= 22$

22'nin 17 ile bölümünden kalan 5 olur.

### 2 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam çift ise bu sayı 2 ile tam bölünür.

- Bir doğal sayı 2 ile tam bölünemiyor ise o sayının 2 ile bölümünden kalan 1 olur.

### 3 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının rakamları toplamı 3'ün katı ise bu sayı 3 ile tam bölünür.

- Bir sayının 3 ile bölümünden kalan, rakamları toplamının 3 ile bölümünden kalana eşittir.

### 4 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının son iki basamağını oluşturan iki basamaklı sayı 4'ün bir katı ise bu sayı 4 ile tam bölünür.

- Bir sayının 4 ile bölümünden kalan, son iki basamağını oluşturan iki basamaklı sayının 4 ile bölümünden kalana eşittir.

### 5 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 ya da 5 ise bu sayı 5 ile tam bölünür.

- Bir sayının 5 ile bölümünden kalan, son basamağındaki rakamın 5 ile bölümünden kalana eşittir.

### 8 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının son üç basamağını oluşturan üç basamaklı sayı 8'in katı ise bu sayı 8 ile tam bölünür.

- Bir sayının 8 ile bölümünden kalan, son üç basamağını oluşturan üç basamaklı sayının 8 ile bölümünden kalana eşittir.

### 9 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının rakamları toplamı 9'un katı ise bu sayı 9 ile tam bölünür.

- Bir sayının 9 ile bölümünden kalan, rakamları toplamının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

### 10 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının birler basamağındaki rakam 0 ise bu sayı 10 ile tam bölünür.

- Sayının birler basamağındaki rakam 0'dan farklı ise sayının 10 ile bölümünden kalan o rakam olur.

### 11 ile Bölünebilme

Bir doğal sayının 11 ile tam bölünebilmesi için sayının rakamları sağdan sola doğru (+), (–), (+), (–) … ile işaretlenerek toplanır. Bu toplam 11'in katı ise sayı 11 ile tam bölünür.

- Beş basamaklı abcde sayısının 11 ile kalanını bulmak için

  $+ - + - +$ şeklinde işaretlenir.

  $(a + c + e) - (b + c)$ işleminin sonucu 11'e bölünür, çıkan sonuç kalanı verir.

**DİKKAT**

11 ile bölünebilme kuralı incelenirken sonuç negatif çıkarsa, çıkan sonuca 11'in katları eklenip kalan bulunur.

**DİKKAT**

- Birden fazla bölünebilme kuralının uygulanması gereken sorularda önce varsa birler basamağı ile ilgili kurala, ardından son iki basamakla ilgili kurala ardından son üç basamakla ilgili kurala daha sonra da tüm basamaklarla ilgili kurala bakılır.
- A sayısı bir k sayısına bölünüyorsa, k'nin bütün bölenlerine de tam bölünür.

  Örnek : 12'in katı olan sayılar 2'nin, 3'ün, 4'ün ve 6'nın da katıdır.

**Örnek:**

34967 sayısının

- 2 ile bölümünden kalan: (7 tek sayı olduğundan) 1'dir.
- 3 ile bölümünden kalan: (3+4+9+6+7 = 29 , 29'un 3 ile bölümünden kalan 2 olduğundan) 2'dir.
- 4 ile bölümünden kalan: (Son iki basamağı 67'nin 4 ile bölümünden kalan 3 olduğundan) 3'tür.
- 5 ile bölümünden kalan: (Birler basamağı 7'nin 5 ile bölümünden kalan 2 olduğundan) 2'dir.
- 8 ile bölümünden kalan: (Son üç basamağı 967'nin 8 ile bölümünden kalan 7 olduğundan) 7'dir.
- 9 ile bölümünden kalan: (3+4+9+6+7 = 29 , 29'un 9 ile bölümünden kalan 2 olduğundan) 2'dir.
- 10 ile bölümünden kalan: (Birler basamağı 7 olduğundan) 7'dir.
- 11 ile bölümünden kalan: (34967 $\rightarrow$ (3 + 9 +7) – (4 + 6) = 9 olduğundan) 9'dur.

**Aralarında Asal Sayıların Çarpımı ile Oluşan Sayıya Bölünebilme**

Aralarında asal sayıların her birine bölünebilen bir doğal sayı bu sayıların çarpımına da tam bölünür.

a ve b aralarında asal iki sayı olsun. Bir x doğal sayısı a ve b sayılarının her birine tam bölünüyor ise x sayısı $a \cdot b$ ile de tam bölünür.

**6 ile Bölünebilme**

2 ve 3 ile tam bölünen sayılar 6 ile de tam bölünür.

**12 ile Bölünebilme**

3 ve 4 ile tam bölünen sayılar 12 ile de tam bölünür.

**15 ile bölünebilme**

3 ve 5 ile tam bölünen sayılar 15 ile de tam bölünür.

**18 ile Bölünebilme**

2 ve 9 ile tam bölünen sayılar 18 ile de tam bölünür.

**24 ile bölünebilme**

3 ve 8 ile tam bölünen sayılar 24 ile de tam bölünür.

**30 ile Bölünebilme**

3 ve 10 ile tam bölünen sayılar 30 ile de tam bölünür.

**44 ile Bölünebilme**

4 ve 11 ile tam bölünen sayılar 44 ile de tam bölünür.

a ve b aralarında asal iki sayı olsun.

- Bir x doğal sayısı a ve b sayılarının her birine tam bölünüyor ise x sayısı $C = a \cdot b$ ile tam bölünür.
- $C = a \cdot b$ olmak üzere bir x doğal sayısının C ile bölümünden kalan sayı a ve b sayılarından büyük olsun. Bu durumda kalan sayının a ve b sayılarına bölümünden kalanlara bakılır.
- Bir sayı 25 sayısına tam bölünüyor ise bu sayının son iki basamağı 00, 25, 50 ya da 75 olmalıdır.

### Bir Tam Sayının Asal Çarpanları

A bir tam sayı; x, y, z asal sayı ve a, b, c doğal sayı olmak üzere A tam sayısının

$A = x^a \cdot y^b \cdot z^c$ şeklinde ifade edilmesine **asal çarpanlarına ayırma** denir.

**DİKKAT**

A sayısının asal çarpanlarına ayrılmasında bölme algoritmasından yararlanılır.

Örnek:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$

**DİKKAT**

$A = x^a . y^b . z^c$ şeklindeki gösterimde x, y ve z birbirinden farklı asal sayılardır.

### Bir Tam Sayının Tam Sayı Bölenlerinin Sayısı

$A = x^a \cdot y^b \cdot z^c$ sayısının;

- Asal Bölenleri = {x, y, z}
- Pozitif Bölenlerinin Sayısı $= (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$
- Negatif Bölenlerinin Sayısı $= (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$
- Tam Sayı Bölenlerinin Sayısı $= 2 \cdot (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1)$
- Tam Sayı Bölenlerinin Toplamı = 0'dır.

**DİKKAT**

A sayısının asal olmayan tam sayı bölenlerinin toplamı $-(x + y + z)$ dir.

Sıfırdan farklı bir x tam sayısı bir a tam sayısını kalansız bölüyor ise x sayısı a sayısının bir bölenidir.

Sıfırdan farklı bir a tam sayısı bir x tam sayısına kalansız bölünüyor ise a sayısı x sayısının bir katıdır.

### En Büyük Ortak Bölen (EBOB)

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak bölenlerinin en büyüğüne bu sayıların **en büyük ortak böleni** denir. Kısaca "EBOB" ile ifade edilir.

- a ve b sayılarının EBOB'u, $EBOB_{(a,b)}$ veya $(a,b)_{EBOB}$ şeklinde gösterilir.
- İki veya daha fazla sayının EBOB'u bulunurken sayılar asal çarpanlarına ayrılarak yazılır. Tabanı aynı olan asal çarpanlardan üssü küçük olanların çarpımı bu sayıların EBOB'una eşittir.

**DİKKAT**

Birbirinden farklı iki sayının ortak bölenleri aynı zamanda bu iki sayının EBOB'unun da bölenleri olduğundan; bu iki sayının tüm ortak bölenlerini bulmak için sayıların EBOB'unun bölenlerini bulmak yeterlidir.

Bir kesrin pay ve paydası bu iki sayının EBOB'una bölünerek kesrin en sade hali elde edilir.

### En Küçük Ortak Kat (EKOK)

En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tam sayının pozitif ortak katlarının en küçüğüne bu sayıların **en küçük ortak katı** denir. Kısaca "EKOK" ile ifade edilir.

- a ve b sayılarının EKOK'u, $EKOK_{(a,b)}$ veya $(a,b)_{EKOK}$ şeklinde gösterilir.
- İki veya daha fazla sayının EKOK'u bulunurken sayılar asal çarpanlarına ayrılarak yazılır. Bu asal çarpanlardan tabanı aynı olmayanlar ile tabanı aynı olanlardan üssü büyük olanların çarpımı bu sayıların EKOK 'una eşittir.

**DİKKAT**

Birbirinden farklı iki sayının ortak katları aynı zamanda bu iki sayının EKOK'unun da katları olduğundan; bu iki sayının-tüm ortak katlarını bulmak için sayıların EKOK'unun katlarını bulmak yeterlidir.

Kesirli sayılarda toplama ve çıkarma işlemleri yapılırken paydalar EKOK'larında eşitlenerek işlem yapılabilir.

### EBOB ve EKOK Özellikleri

1. a ve b sayma sayılarının çarpımı bu sayıların EBOB'u ile EKOK'unun çarpımına eşittir.

   Bu özellik a . b = EBOB (a, b) . EKOK (a, b) olarak ifade edilir.

2. a ve b aralarında asal iki pozitif tam sayı olmak üzere
   - EBOB (a, b) = 1
   - EKOK (a, b) = a . b olur.

3. a ve b pozitif tam sayılarından biri diğerinin tam katı ise EBOB bu sayılardan küçük olana, EKOK ise büyük olana eşittir.

- Bir bütünü eş büyüklükte en büyük parçalara ayırarak en az sayıda parça elde edilmek istenen problemlerde EBOB kullanılır.

  **Örneğin:** Bir tarla ya da bahçenin kare şeklinde ve en büyük alanlara bölünmesi,

  Bir deponun küp şeklinde ve en büyük hacimlere bölünmesi sorularında EBOB kullanılır.

- En az sayıda küçük parçaları birleştirerek büyük bir parça elde edilmek istenen problemlerde EKOK kullanılır.

  **Örneğin:** Eş dikdörtgenlerin birleştirilerek kare şeklinde ve en küçük alan elde edilmesi,

  Eş dikdörtgenler prizmalarının birleştirilerek küp şeklinde en küçük hacim elde edilmesi sorularında EKOK kullanılır.

- Periyodik durum içeren problemlerde tekrarlayan iki ya da daha fazla olayın, en kısa hangi periyotla aynı anda gerçekleşeceğinin hesaplanmasında EKOK kullanılır.

  **Örneğin:** Dairesel bir pisti üç atlet sırasıyla 6 dk, 8 dk ve 9 dk'da koşabiliyorlar. Buna göre bu üç atlet koşmaya başladıktan kaç dakika sonra tekrar başlangıç noktasında karşılaşacaklarının hesaplanmasında EKOK kullanılır.

**ÖRNEK:**

Bir fabrikada bulunan üç farklı makine, bir ürünü sırasıyla 45, 50 ve 60 saniyede üretmektedir. Bu makineler ilk kez 06.30 da birlikte çalışmaya başladığına göre beşinci kez üçü birlikte ürün verdiğinde saatin kaç olacağını bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

Makinelerin tekrar aynı anda üretim yapması için geçen süre 45, 50 ve 60 sayılarının katı olmalıdır. İlk kez için 45, 50 ve 60 sayılarının en küçük ortak katı bulunmalıdır.

$$
\begin{array}{ccc|c}
45 & 50 & 60 & 2 \\
45 & 25 & 30 & 2 \\
45 & 25 & 15 & 3 \\
15 & 25 & 5 & 3 \\
5 & 25 & 5 & 5 \\
1 & 5 & 1 & 5 \\
1 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

EKOK (45, 50, 60)= $2^2 . 3^2 . 5^2$ = 900 saniye

900 saniye = 15 dakikadır.

Birinci kez için geçen süre 15 dakikadır.

Beşinci kez için

$15 \cdot 5 = 75$ dakikalık (1 saat 15 dakika) süre geçmelidir. O hâlde saat 06.30’dan 1 saat 15 dakika sonra saat 07.45 olur.

Günlük hayatta bazı olaylar belli zaman aralıklarında tekrar eder. Bu tür olaylara **periyodik olay** denir.

Haftanın günlerinin 7 günde bir tekrar etmesi, nöbet tutan bir askerin, hemşirenin ya da doktorun belirli zaman dilimi sonunda tekrar aynı gün nöbet tutması, bu tür olaylara örnek olarak verilebilir.

**ÖRNEK:**

Burak, 4 günde bir tenis kursuna gitmektedir. Kursa pazartesi günü başlayan Burak'ın 12. kez kursa hangi gün gideceğini bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

Burak ilk kursuna katıldığı için $12 - 1 = 11$ kez daha kursa gidecektir. Bunun için geçen süre

$4 \cdot 11 = 44$ gün olacaktır. Pazartesi gününden 44 gün sonrasının bulunması gerekir.

$$\begin{array}{r|l} 44 & \underline{\;7\;} \\ -42 & 6 \\ \hline 2 & \end{array}$$

Kalan 2 olduğundan 12. kez kursa gittiği gün çarşamba günü olacaktır.

**ÖRNEK:**

İki askerden biri 5 günde bir, diğeri 8 günde bir nöbet tutmaktadır. Bu askerler, birlikte ilk nöbetlerini salı günü tuttuklarına göre 6. kez birlikte hangi gün nöbet tutacaklarını bulunuz.

**ÇÖZÜM:**

İki asker, EKOK (5, 8) = 40 günde bir birlikte nöbet tutarlar. İlk nöbetlerini tuttuklarına göre $6 - 1 = 5$ nöbetleri kalır. Bunun için geçen süre $40 \cdot 5 = 200$ gün olacaktır. Salı gününden 200 gün sonrası bulunmalıdır.

$$\begin{array}{r|l} 200 & \underline{\;7\;} \\ -14 & 28 \\ \hline 60 & \\ -56 & \\ \hline 4 & \end{array}$$

Kalan 4 olup 6. kez birlikte nöbet tuttukları gün cumartesi günü olacaktır.

### Rasyonel Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

Rasyonel sayılarda toplama (çıkarma) işlemi yapılırken önce sayıların paydaları eşit değilse eşitlenmelidir. Paydalar eşitlendikten sonra paylar toplanır(çıkarılır) paya yazılır, ortak payda sonucun paydası olarak yazılır.

$$\underset{(d)}{\frac{a}{b}} + \underset{(b)}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\underset{(d)}{\frac{a}{b}} - \underset{(b)}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$$

**DİKKAT**

Rasyonel sayılarda toplama(çıkarma) işleminde paydalar EKOK'larında eşitlenir.

### Rasyonel Sayılarda Çarpma İşlemi

Rasyonel sayılarda çarpma işlemi yapılırken çarpılan rasyonel sayılar tam sayılı kesir olmamalıdır. Eğer tam sayılı kesirler varsa tam sayılı kesirler bileşik kesre çevrilmelidir. Daha sonra paylar çarpılıp paya , paydalar çarpılıp paydaya yazılarak çarpma işlemi yapılır.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

**DİKKAT**

Rasyonel sayılarda çarpma işlemi yapılırken çarpılan rasyonel sayıların pay ve paydalarındaki sayıların sadeleştirilmesi çarpma işlemini kolaylaştırır.

### Rasyonel Sayılarda Bölme İşlemi

Rasyonel sayılarda bölme işlemi yapılırken bölünecek rasyonel sayılar tam sayılı kesir olmamalıdır. Eğer tam sayılı kesirler varsa tam sayılı kesirler bileşik kesre çevrilir. Daha sonra birinci sıradaki kesir aynen yazılır, ikinci sıradaki kesir ters çevrilip bu kesirler çarpılır.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

**Örnek:**

$\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{6}{7}\right] : \frac{5}{28}$ işleminin sonucunu bulunuz.

**Çözüm:** $\left[\left(\underset{(4)}{\frac{1}{3}} - \underset{(3)}{\frac{1}{4}}\right) \cdot \frac{6}{7}\right] : \frac{5}{28}$

$$= \left[\left(\frac{4}{12} - \frac{3}{12}\right) \cdot \frac{6}{7}\right] : \frac{5}{28}$$

$$= \left[\frac{1}{12} \cdot \frac{6}{7}\right] : \frac{5}{28}$$

$$= \left[\frac{1}{12} \cdot \frac{6}{7}\right] : \frac{5}{28}$$

$$= \left[\frac{1}{14}\right] : \frac{5}{28}$$

$$= \frac{1}{14} \cdot \frac{28}{5}$$

$$= \frac{1}{14} \cdot \frac{28}{5}$$

$$= \frac{2}{5}$$

**Ondalık Sayılar**

Paydası 10, 100, 1000, … gibi 10'un kuvvetleri olan kesirlere ondalık kesirler, bu kesirlerin belirttiği sayılara **ondalık sayılar** denir.

**Örnek**

$\frac{3}{10} = 0{,}3$

**Rasyonel Sayıyı Ondalık Sayıya Çevirmek**

Rasyonel sayı ondalık sayıya çevrilirken;

Rasyonel sayının payındaki sayı paydasındaki sayıya bölünür veya paydasındaki sayı 10’un kuvveti olarak yazıldıktan sonra sayı ondalık sayı olarak yazılır.

**Örnek:**

$\frac{3}{5}$ rasyonel sayısı;

$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} = 0{,}6$ olarak ondalık sayıya çevrilir.

**Ondalık Sayılarda İşlemler**

**Ondalık Sayılarda Toplama ve Çıkarma**

Ondalık sayılar toplanırken, virgüller alt alta gelecek şekilde yazılır ve doğal sayılarda toplama ve çıkarma işleminde olduğu gibi toplama ve çıkarma işlemi yapılır. Sonuç, virgüllerin hizasından virgülle ayrılır.

**Ondalık Sayılarda Çarpma**

Ondalık sayıların çarpımı yapılırken virgül yokmuş gibi çarpılır. İşlem sonunda çarpılan sayıların virgülden sonraki basamak sayıları toplamı kadar, sağdan sola doğru virgülle ayrılır.

**Bir Sayıyı 10, 100, 1000, … ile Çarpma**

Ondalık sayıları 10 ile çarparken virgül bir basamak sağa, 100 ile çarparken virgül iki basamak sağa kaydırılır. Yani sıfır sayısı kadar basamak soldan sağa doğru virgülle ayrılır.

**Ondalık Sayılarda Bölme**

Ondalık sayılarda bölme işlemi yaparken bölen virgülden kurtarılır. Böleni virgülden kurtarırken çarpılan sayı ile bölünen de çarpılarak normal bölme işlemi yapılır.

**Bir Sayıyı 10, 100, 1000, … ile Bölme**

Ondalık sayıları 10’a bölerken virgül bir basamak sola, 100’e bölerken virgül iki basamak sola kaydırılır. Yani sıfır sayısı kadar basamak sağdan sola doğru virgülle ayrılır.

**Devirli Ondalık Sayılar**

Bir ondalık sayının virgülden sonraki kısmında belli bir düzende tekrar eden sayılar varsa bu sayılara **devirli ondalık sayılar** denir.

$a, bbb\ldots = a, \overline{b}$

$a, bcbc\ldots = a, \overline{bc}$

$a, bcdecde\ldots = a, b\overline{cde}$

**Devirli Ondalık Sayıların Rasyonel Sayıya Dönüştürülmesi**

a, b, c, d ve e birer rakam olmak üzere,

$$a, b\overline{cde} = \frac{abcde - ab}{9990}$$

$$\frac{\text{Sayının tamamı} - \text{Devretmeyen kısım}}{\text{Virgülden sonra (devreden kadar 9 devretmeyen kadar 0)}}$$

**Rasyonel Sayılarda Sıralama**

**Pozitif Rasyonel Sayılarda Sıralama**

1. Paydaları eşit olan kesirlerden payı büyük olan kesir diğerlerinden daha büyüktür.
2. Payları eşit olan kesirlerden paydası küçük olan diğerlerinden daha büyüktür.
3. Basit kesirlerde pay ile payda arasındaki farklar eşitse, payı (veya paydası) büyük olan sayı diğerlerinden büyüktür.
4. Bileşik kesirlerde pay ile payda arasındaki farklar eşitse payı (veya paydası) küçük olan sayı diğerlerinden büyüktür.
5. Rasyonel sayıların ondalık veya devirli ondalık açılımları karşılaştırılarak sayılar arasındaki sıralama yapılabilir.

**Negatif Rasyonel Sayılarda Sıralama**

Sayılar arasında pozitif sıralama yapılır, yapılan sıralamanın tersi alınır.

**Örnek:**

$21,3\overline{78}$ devirli ondalık sayısını rasyonel sayıya çeviriniz.

**Çözüm:**

$21,3\overline{78} = \frac{21378 - 213}{990} = \frac{21165}{990} = \frac{1411}{66}$ olur.

**DİKKAT**

a, b, c, d pozitif ardışık sayılar ve a < b < c < d olmak üzere

$\frac{a}{b} < \frac{b}{c} < \frac{c}{d}$ olur.

## Aralık Kavramı

Sayı doğrusu üzerinde birbirinden farklı iki noktanın arasındaki tüm gerçek sayılardan oluşan alt kümeye **aralık** adı verilir. Aralıklar, verilen kümeye uç noktalarının dahil edilip edilmemesine bağlı olarak adlandırılır.

Aralık gösterimi **[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]** ifadeleri kullanılarak yapılır. Bu gösterimlerdeki a ve b gerçek sayıları birer uç noktadır.

## Kapalı Aralık

Uç noktaların aralığa dâhil edildiği kümelere **kapalı aralık** denir.

$A = \{x \mid a \leq x \leq b$ ve $a, b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi bir kapalı aralık belirtir ve **[a, b]** ile ifade edilir. Sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıdaki gibidir.


## Açık Aralık

Uç noktaların aralığa dâhil edilmediği kümelere **açık aralık** denir.

$A = \{x \mid a < x < b$ ve $a, b, x \in \mathbb{R}\}$ kümesi bir kapalı aralık belirtir ve **(a, b)** ile ifade edilir. Sayı doğrusu üzerindeki gösterimi aşağıdaki gibidir.


## Yarı Açık (Yarı Kapalı) Aralık

Uç noktalardan birinin dâhil edilmediği $a < x \leq b$ veya $a \leq x < b$ şeklinde ifade edilen kümelere yarı açık aralık denir ve aşağıdaki gibi gösterilir.


**Sınırsız Aralıklar**

- $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere a'dan büyük tüm gerçek sayıların kümesidir.


(a,∞)


[a,∞)

- $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere a'dan küçük tüm gerçek sayıların kümesidir.


(–∞,a]


(–∞,a)

- $\mathbb{R}$ 'nin kendiside aralıktır.



(–∞,∞)

**DİKKAT**

- Bir aralıktaki uç noktalardan biri kapalı, diğeri sonsuz ise bu aralık **ışın** olarak adlandırılır.


[AB)

- Aralıkların kesişim, birleşim ve fark işlemleri yapılırken; aralıkları aynı sayı doğrusu üzerinde göstermek kolaylık sağlayacaktır.

**Örnek:**

$A = \{x \mid -4 \leq x < 6,\ x \in \mathbb{R}\}$ **ve** $B = \{x \mid 2 < x \leq 8,\ x \in \mathbb{R}\}$ **olmak üzere aşağıdaki kümeleri aralık biçiminde ifade edip sayı doğrusu üzerinde gösteriniz.**

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A / B$

**Çözüm:**

a) $A \cup B = [-4,8]$


b) $A \cap B = (2,6)$


c) $A / B = [-4,2]$

**Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Tanımı**

İçinde en az bir tane değişken bulunduran iki niceliğin birbirine eşitliğini ifade eden bağıntılara **denklem** adı verilir.

- $-4x + 16 = 0$ ve $2m - n = 24$ ifadeleri denklemdir.
- $2a + 8$ ve $5x - 12$ ifadeleri denklem değildir.

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$ax + b = 0$

genel gösterimi ile ifade edilebilen denklemlere **birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler** denir.

a ve b'ye denklemin **katsayıları**, x'e ise **değişken** adı verilir. Denklemin derecesi değişkeninin kuvvetine göre değişir.

Örneğin

$2y - 6 = 0$ denkleminde değişken y'dir ve denklemin derecesi 1'dir.

$m^2 - 9 = 0$ denkleminde değişken m'dir ve denklemin derecesi 2'dir.

**Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü**

a, b gerçek sayılar olmak üzere $a \cdot x + b = 0$ şeklindeki bir denklemde x değerine **denklemin kökü** adı verilir.

Kökün kümesine de **çözüm kümesi** denir ve "ÇK" ile gösterilir.

1. $a \neq 0$ ise denklemi sağlayan yalnız bir tane x değeri vardır.

   $ÇK = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$ şeklinde gösterilir.

2. $a = 0$ ve $b = 0$ ise denklem $0 \cdot x + 0 = 0$ durumuna dönüşür. Bu durumda x değişkenine hangi gerçek sayı değeri verilirse verilsin eşitlik sağlanır. Yani çözüm kümesi gerçek sayılardır.

   $ÇK = \mathbb{R}$ şeklinde gösterilir.

3. $a = 0$ ve $b \neq 0$ ise denklem $0 \cdot x + b = 0$ durumuna dönüşür. Bu durumda x değişkenine hangi gerçek sayı değeri verilirse verilsin bu eşitlik doğru olmaz. Çözüm kümesi boş kümedir.

   $ÇK = \varnothing$ şeklinde gösterilir.

**DİKKAT**

- Bir eşitlikte, eşitliğin her iki tarafına aynı gerçek sayı eklenir veya çıkarılırsa eşitlik değişmez.
- Bir eşitlikte, eşitliğin her iki tarafını sıfırdan farklı aynı gerçek sayı ile çarpmak veya bölmek eşitliği değiştirmez.
- "Denklemin her iki tarafı" ifadesinden denklemin sol ve sağ olmak üzere iki tarafının olduğu anlaşılmalıdır. Eşittir işareti iki tarafı birbirinden ayırır.
- Bir denklemin çözümünden elde edilen kök ya da kökler denklemin ilk hâlinde yerine yazıldığında denklemi doğrulamalıdır. Bu işleme sağlama adı verilir. Denklemi sağlamayan sayılar çözüm kümesine alınmaz.
- Bir denklemin değişkeni herhangi bir sembol olarak verilebilir. Bu durumda diğer semboller birer sabit sayı olarak düşünülür.

**Basit Eşitsizlikler**

$>, \geq, <, \leq$ gibi sembollerin kullanıldığı ifadelere **eşitsizlik** denir.

a ve b gerçek sayılar olmak üzere $a < b$ , $a \leq b$ , $a > b$ , $a \geq b$ şeklindeki ifadeler birer basit eşitsizliktir.

**Basit Eşitsizliklerin Özellikleri**

1. Bir eşitsizliğin her iki tarafına aynı sayı eklenip çıkarıldığında eşitsizliğin yönü değişmez.
   $a < b$ iken her iki tarafa c sayısını eklersek $a + c < b + c$ olur.

2. Eşitsizliğin her iki tarafı pozitif bir sayı ile çarpılırsa veya bölünürse, eşitsizlik yön değiştirmez.
   $a > b$ ve $c > 0$ iken $a \cdot c > b \cdot c$ dir.

3. Bir eşitsizliğin her iki tarafı negatif bir sayıyla çarpılır veya bölünürse, eşitsizlik yön değiştirir.
   $a < b$ ve $c < 0$ iken $a \cdot c > b \cdot c$ dir.

4. Yönü aynı olan eşitsizlikler taraf tarafa toplanabilir.
   $a < b$ ve $c < d$ iken $a + c < b + d$ olur.

5. Pozitif sayılardan oluşan eşitsizliklerin çarpma işlemine göre tersi alındığında eşitsizlik yön değiştirir.
   $0 < a < b$ iken $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ olur.

6. Zıt işaretli sayılardan oluşan eşitsizliklerin çarpma işlemine göre tersi alındığında eşitsizlik yön değiştirmez.
   $a < 0 < b$ iken iken $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ olur.

7. a ve b birer pozitif gerçek sayı ve x pozitif tam sayı olmak üzere;
   $0 < a < b$ iken $a^x < b^x$ olur.

8. a ve b negatif birer sayı ve x pozitif bir tam sayı olduğunda;
   $a < b < 0$, x tek ise, $a^x < b^x$
   x çift ise, $a^x > b^x$ olur.

**Birinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Eşitsizlikler**

$a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ olmak üzere

$ax + b < 0$

$ax + b > 0$

$ax + b \leq 0$

$ax + b \geq 0$

şeklindeki eşitsizliklere **birinci dereceden bir bilinmeyenli eşitsizlikler** adı verilir.

### Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemlerin Tanımı

$a \neq 0$, $b \neq 0$ ve a, b, $c \in \mathbb{R}$ ; x ile y değişkenler olmak üzere $ax + by = c$ şeklindeki denklemlere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemler** adı verilir. Bu denklemi sağlayan (doğrulayan) x ve y gerçek sayıları ise (**x, y**) olarak yazılır ve bu sıralı ikiliye denklemin **çözüm kümesinin bir elemanı** denir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerin grafikleri doğru belirtir.

a, b, c, d, m ve n gerçek sayılar olmak üzere

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= m \\ cx + dy &= n \end{aligned}\right\}$$

şeklinde verilen aynı değişkenlerden oluşan ve birden fazla denklem bulunduran ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemi** adı verilir.

### Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Denklemlerin Çözüm Yöntemleri

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözüm kümesini bulmak için yok etme, yerine koyma ve grafik çizimi gibi yöntemler kullanılır.

### Yok Etme Yöntemi

Denklem sisteminde bilinmeyenlerden herhangi birinin katsayısı diğer denklemdeki aynı bilinmeyenin katsayısıyla mutlak değerce eşit, işaret bakımından ters olacak şekilde düzenlenir. Taraf tarafa toplama yoluyla seçilen değişken yok edilir.

### Yerine Koyma Yöntemi

Denklem sistemindeki denklemlerin herhangi birinden herhangi bir değişken eşitliğin bir tarafında yalnız bırakılır ve diğer denklemde yerine yazılır.

### Grafik Yorumu

Birinci dereceden iki bilinmeyenli bir denklemin çözüm kümesini oluşturan sıralı ikililer analitik düzlemde bir doğru belirtir.

Denklem sistemini oluşturan denklemlerin belirttiği doğruların kesim noktası ya da noktaları bu denklem sisteminin çözüm kümesini oluşturur.

$$\left.\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ dx + ey + f &= 0 \end{aligned}\right\}$$ denklem sisteminde her bir denklem bir doğru belirtir.

1. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ ise doğrular çakışıktır ve çözüm kümesi sonsuz elemanlıdır.
2. $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ ise doğrular paraleldir ve çözüm kümesi boş kümedir.
3. $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$ ise doğrular tek noktada kesişir.

**Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Tanımı**

a, b, c birer gerçek sayı, a ve b sıfırdan farklı olmak üzere

$ax + by \leq c$

$ax + by < c$

$ax + by \geq c$

$ax + by > c$

şeklindeki ifadelere **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlikler** denir.

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklemlerde olduğu gibi bu eşitsizliğin çözüm kümesi de (x, y) şeklindeki sıralı ikililerden oluşur. Eşitsizliği doğru yapan sonsuz sayıda sıralı ikili bulunacağından çözüm kümesi analitik düzlemde boyalı bölgeler çizilerek gösterilir.

**Birinci Dereceden İki Bilinmeyenli Eşitsizliklerin Çözümü**

$ax + by \leq c$ ifadesinde

$ax + by = c$ alınır ve denklemde y değişkeni yalnız bırakılarak

$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ denklemi elde edilir.

Bu denklemde $m = -\frac{a}{b}$ ve $n = \frac{c}{b}$ düzenlemeleri yapılarak

$y = mx + n$ doğru denklemi elde edilir.

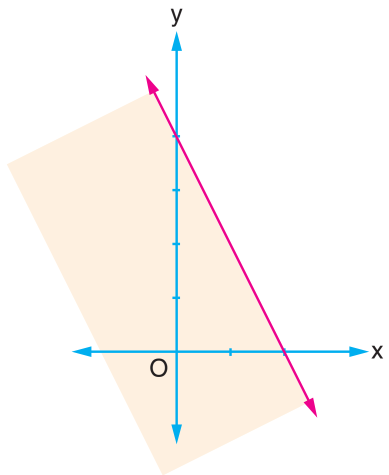
$y = mx + n$ denkleminin çözüm kümesi, doğru üzerindeki noktaları gösterir.

$y > mx + n$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, $y = mx + n$ doğrusunun üst bölgesidir.

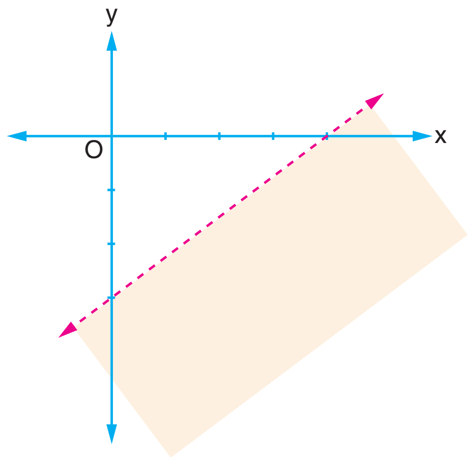
$y < mx + n$ eşitsizliğinin çözüm kümesi, $y = mx + n$ doğrusunun alt bölgesidir.

$\leq$ veya $\geq$ durumunda doğru üzerindeki noktalar, çözüm kümesine ait olduğundan doğru, düz çizgi şeklinde çizilir.

$<$ veya $>$ durumunda doğru üzerindeki noktalar çözüm kümesine ait olmadığından doğru kesikli çizgi şeklinde çizilir.




$y \leq mx + n$




$y < mx + n$

En az iki tane birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizliğin oluşturduğu sisteme **birinci dereceden iki bilinmeyenli eşitsizlik sistemi** denir.

Eşitsizlik sisteminin çözümü, sistemi oluşturan eşitsizliklerin çözüm kümelerinin kesişimidir.

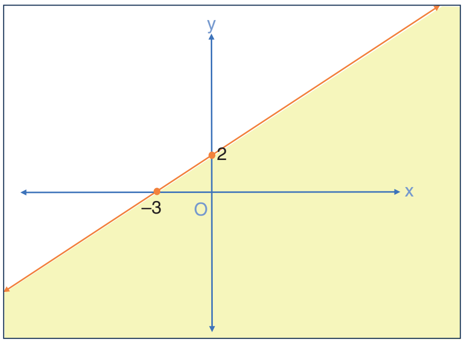
**ÖRNEK:**

$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y \geq -6 \\ 6x - 9y \leq 54 \end{array}\right\}$ eşitsizlik sistemini aynı analitik düzlemde gösterelim.

$2x - 3y \geq -6$ için

$x = 0$ ise $y = 2 \rightarrow (0, 2)$

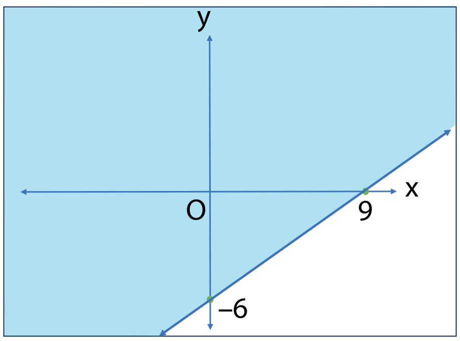
$y = 0$ ise $x = -3 \rightarrow (-3, 0)$



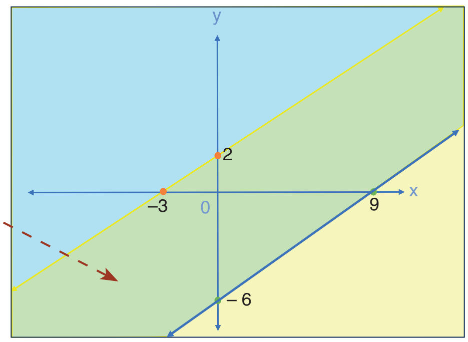

$6x - 9y \leq 54$ için

$x = 0$ ise $y = -6 \rightarrow (0, -6)$

$y = 0$ ise $x = 9 \rightarrow (9, 0)$

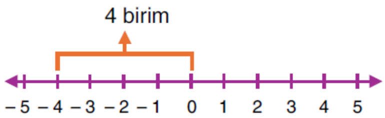



Mavi ve sarı renkli bölgelerin kesiştikleri bölge eşitsizlik sisteminin çözüm kümesidir.

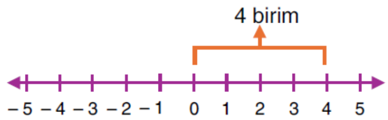


## Mutlak Değer Kavramı

Bir gerçek sayının sayı doğrusu üzerindeki yerinin sıfır noktasına olan uzaklığına bu sayının **mutlak değeri** denir. x gerçek sayısının mutlak değeri |x| ile gösterilir.




– 4 sayısının mutlak değeri 4'tür.
| – 4| = 4 olur.




4 sayısının mutlak değeri 4'tür.
|4| = 4 olur.

• Sayı doğrusu üzerinde a ile b gerçek sayılarının birbirine uzaklığı |a – b| ile gösterilir.

Mutlak değer $|x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ olarak tanımlanır.

• Mutlak değer içindeki ifadenin gerçek sayı değeri 0'a eşit ya da 0'dan büyük ise bu ifadenin mutlak değeri kendisine eşittir.

**Örneğin,**

$|2| = 2$

$a > 0$ ise $|4a| = 4a$

$b < 0$ ise $|-3b| = -3b$

olur.

• Mutlak değer içindeki ifadenin gerçek sayı değeri 0'dan küçükse bu ifadenin mutlak değeri ters işaretlisine eşittir.

**Örneğin,**

$|-13| = 13$

$a > 0$ ise $|-7a| = 7a$

$b < 0$ ise $|5b| = -5b$

olur.

• Bir gerçek sayının mutlak değeri daima kendisine eşit ya da kendisinden büyüktür.

$|x| \geq x$

$|x| = x$ ise $x \geq 0$ ve

$|x| = -x$ ise $x < 0$ olur.

**Mutlak Değerin Ozellikleri**

1. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere çarpım durumundaki iki gerçek sayının mutlak değeri bu sayıların mutlak değerleri çarpımı olarak yazılabilir.

   $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

2. $x, y \in \mathbb{R}$ ve $y \neq 0$ olmak koşuluyla bölüm durumundaki iki gerçek sayının mutlak değeri bu sayıların mutlak değerlerinin bölümü olarak yazılabilir.

   $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

3. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x| = |-x|$ olur.

4. $x \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $|x^n| = |x|^n$ olur.

5. İki gerçek sayının toplamının mutlak değeri sayıların ayrı ayrı mutlak değerlerinin toplamından küçük veya eşittir. Bu durum

   $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|x + y| \leq |x| + |y|$ olarak ifade edilir.

**DİKKAT**

- Çift dereceli köklü sayılarda kök değeri hem pozitif hem negatif olabileceğinden;

  $\sqrt{x^2} = |x|$

  olarak gösterilmelidir.

- Mutlak değer ifadesinin içini sıfır yapan değere **kritik nokta** denir.

**Örnek:**

$x \in \mathbb{R}$ için $|x + 3| + |x| + |2x - 4|$ **ifadesinin en küçük değerini bulunuz.**

**Çözüm:**

Kritik noktalardan bazıları için verilen ifade en küçük değeri alır.

Verilen ifadenin kritik noktaları – 3, 0 ve 2'dir.

$x = -3$ için $|x + 3| + |x| + |2x - 4| = |-3 + 3| + |-3| + |-6 - 4| = 13$

$x = 0$ için $|x + 3| + |x| + |2x - 4| = |0 + 3| + |0| + |0 - 4| = 7$

$x = 2$ için $|x + 3| + |x| + |2x - 4| = |2 + 3| + |2| + |4 - 4| = 7$

olduğundan $|x + 3| + |x| + |2x - 4|$ ifadesinin en küçük değeri 7'dir.

**Örnek:**

$x < 0$ olmak üzere $\left|-4x - \left|-3x + |x|\right|\right|$ **işleminin sonucunu bulunuz.**

**Çözüm:**

x negatif olduğundan

$\left|-4x - \left|-3x + (-x)\right|\right| = \left|-4x - |-4x|\right| = \left|-4x - (-4x)\right| = \left|-4x + 4x\right| = |0| = 0$ olur.

**Mutlak Değerli Denklemlerin Çözümü**

$x, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

- $a \geq 0$ için $|x| = a$ ise $x = a$ veya $x = -a$ olur.
- $a < 0$ için $|x| = a$ ise denklemin çözüm kümesi boş kümedir ve ÇK = Ø olarak yazılır.
- $|ax + b| = c$ denkleminde $c < 0$ ise denklemin çözüm kümesi boş kümedir.
- $a$ ve $b$ gerçek sayıları arasındaki uzaklık $k$ birim ise bu durum $|a - b| = k$ ile gösterilir.
- $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|a| + |b| = 0$ ise $a = 0$ ve $b = 0$ olur.
- Bir değişken hem mutlak değerin içinde hem de dışında kullanılmışsa bulunan değerler, ilk denklemde yerine yazılarak değerlerin denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

**Mutlak Değerli Eşitsizliklerin Çözümü**

- $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ olur.

  $|x| < 0$ ise ÇK $= \varnothing$

  $|x| \leq 0$ ise ÇK $= \{0\}$ olur.
- $x \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a$ veya $x \geq a$ olur.

  $|x| \geq 0$ ise ÇK $= \mathbb{R}$

  $|x| > 0$ ise ÇK $= \mathbb{R} - \{0\}$ olur.
- $x \in \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $a \leq |x| \leq b \Leftrightarrow (a \leq x \leq b$ veya $-b \leq x \leq -a)$ olur.

**Örnek:**

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $|2x - 9| = -4x + 3$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm**:

| | |
|---|---|
| $2x - 9 = -4x + 3$ | $2x - 9 = 4x - 3$ |
| $2x + 4x = 9 + 3$ | $2x - 4x = 9 - 3$ |
| $6x = 12$ | $-2x = 6$ |
| $x = 2$ | $x = -3$ olur. |

Bir değişken hem mutlak değerin içinde hem de dışında kullanılmışsa bulunan değerler, ilk denklemde yerine yazılarak değerlerin denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir.

$x = 2$ için

$|2 \cdot 2 - 9| = -4 \cdot 2 + 3$

$|4 - 9| = -8 + 3$

$|-5| = -5$

$5 = -5$

(Yanlış olduğuna dikkat ediniz.)

$x = -3$ için

$|2 \cdot (-3) - 9| = -4 \cdot (-3) + 3$

$|-6 - 9| = 12 + 3$

$|-15| = 15$

$15 = 15$

olur.

$x = 2$ değeri yanlış bir eşitlik verdiği için çözüm kümesine alınamaz. ÇK $= \{-3\}$ olur.

### Gerçek Sayıların Tam Sayı Kuvvetleri

$a \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^n$ ifadesine **üslü ifade** adı verilir.

$a^n$ ifadesinde a sayısına taban, n ye ise **üs** veya **kuvvet** denir.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ tane}}$ olarak hesaplanır.

- 0'dan farklı sayıların çift sayı kuvvetlerinin sonucu daima 0'dan büyüktür.
  $(-2)^4 = 16$ $2^4 = 16$
- Tek kuvvetler tabanın işaretini etkilemez.
  $(-2)^3 = -8$ $2^3 = 8$
- Pozitif sayıların bütün kuvvetleri pozitiftir.
  $3^3 = 27$ $3^4 = 81$
- 0 sayısının pozitif kuvvetleri 0'dır.
  $0^8 = 0$

### Bir Gerçek Sayının Negatif Kuvveti

$x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$x^{-1} = \frac{1}{x}$

$x^{-n} = (x^{-1})^n = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ olur.

- Sıfır sayısının çarpma işlemine göre tersi olmadığından negatif kuvveti tanımsızdır.

### Üslü Sayılarda Toplama ve Çıkarma İşlemi

Hem tabanı hem de üssü aynı olan üslü sayılar, ortak paranteze alınarak toplanabilir veya çıkarılabilir.

a, b, c ve $x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$a \,.\, x^n + b \,.\, x^n - c \,.\, x^n = (a + b - c) \,.\, x^n$ olur.

### Üslü Sayılarda Çarpma ve Bölme İşlemi

1. Tabanları aynı olan üslü sayılar çarpılabilir.
   $x \in \mathbb{R}$ ve $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere
   $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$ olur.

2. Üsleri aynı olan üslü sayılar çarpılabilir.
   $x, y \in \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere
   $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$ dır.

3. Tabanları aynı olan üslü sayılar bölünebilir.
   $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere
   $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$ dir.

4. Üsleri aynı olan üslü sayılar bölünebilir.
   $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ ve $a \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere
   $\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$ dır.

**Üslü İfadeler ile İlgili Özellikler**

1. $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olmak üzere $x^0 = 1$'dir.
   $0^0$ belirsizdir.
2. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^1 = x$ ve $1^x = 1$'dir.
3. $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(x^a)^b = (x^b)^a = x^{a \cdot b}$
4. İki üslü ifadeyi küçükten büyüğe sıralamak için tabanları eşitlemek ya da üsleri eşitlemek kullanılan yöntemlerden ikisidir.

**Örnek:**

$a = 27^5, b = 81^4$ ve $c = 243^2$ **sayılarını sıralayınız.**

**Çözüm:**

$a = 3^{15}$ $b = 3^{16}$ $c = 3^{10}$

$10 < 15 < 16$ olduğundan

$c < a < b$ olur.

5. İki üslü ifadeyi küçükten büyüğe sıralarken üsler veya tabanlar eşitlenemiyorsa üslü sayıların sayı aralıklarına bakılarak karşılaştırma yapılabilir.

**Örnek:**

$2^x = 17$, $3^y = 29$ ve $5^z = 55$ sayıları veriliyor.

**Buna göre x, y, z sayılarını sıralayınız.**

**Çözüm:**

| | | |
|---|---|---|
| $2^x = 17$ için; | $3^y = 29$ için; | $5^z = 55$ için; |
| $16 < 17 < 32$ | $27 < 29 < 81$ | $25 < 55 < 125$ |
| $2^4 < 2^x < 2^5$ | $3^3 < 3^y < 3^4$ | $5^2 < 5^z < 5^3$ |
| $4 < x < 5$ | $3 < y < 4$ | $2 < z < 3$ |

$z < y < x$ olur.

**Üslü İfade İçeren Denklemler**

1. $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^m = x^n$ ise $m = n$ olur. Yani tabandaki sayının $-1, 0$ ya da $1$ olmadığı üslü denklemlerde eşitliğin her iki tarafındaki tabanlar eşit ise üsler de eşittir.

2. $x, y \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ ve $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ olmak üzere $x^n = y^n$ denkleminde
   a) $n$ tek ise $x = y$
   b) $n$ çift ise $|x| = |y|$ olur.

3) $a^b = 1$ denkleminin sağlanabilmesi için üç durum söz konusudur.
   1. $b = 0$ iken $a \neq 0$ olmalıdır. (Her ikisi de sıfır olur ise $0^0 \neq 1$ olur.)
   2. $a = 1$ iken $b \in \mathbb{R}$ olur.
   3. $a = -1$ iken b'nin bir çift sayı olması gerekir.

**Üslü İfade İçeren Eşitsizlikler**

$a \in \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere

- $0 < a < 1$ ve $a^n < a^m$ ise $n > m$ olur.
- $a > 1$ ve $a^n < a^m$ ise $n < m$ olur.

**ÖRNEK:**

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{25}{9}\right)^{x-4}$ **eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.**

**ÇÖZÜM:**

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{25}{9}\right)^{x-4}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} < \left(\left(\frac{5}{3}\right)^{2}\right)^{x-4}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} < \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}\right)^{x-4}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{3}{5}\right)^{-2x+8}$$

$\frac{3}{5} < 1$ olduğundan

$x - 1 > -2x + 8$

$3x > 9$

$x > 3$ olur.

Bu urumda ÇK = $(3,\infty)$ olur.

**Köklü İfadeler**

$n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geq 2$ ve a, $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x^n = a$ eşitliğini sağlayan x değerlerine **a nın n. kuvvetten kökü** denir ve $x = \sqrt[n]{a}$ ile gösterilir.

$x^n = a$ denkleminin çözümü üç farklı durumda incelenir.

1. $a > 0$ için

   n tek ise $x = \sqrt[n]{a}$ olur.

   n çift ise $x = +\sqrt[n]{a}$ veya $x = -\sqrt[n]{a}$ olur.

2. $a < 0$ için

   n tek ise $x = \sqrt[n]{a}$ olur.

   n çift ise denklemin bir gerçek kökü yoktur.

3. $a = 0$ ise $\sqrt[n]{0} = 0$ olur.

- $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

  $\sqrt[2n+1]{a}$ ifadesinin tanımlı olması için $a \in \mathbb{R}$ olmalıdır.

  $\sqrt[2n]{a}$ ifadesinin tanımlı olması için $a \geq 0$ olmalıdır.

- $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}$ için

  n tek ise $\sqrt[n]{x^n} = a$

  n çift ise $\sqrt[n]{x^n} = |x|$

  olarak kök dışına çıkarılır.

**Köklü Sayılarda Dört İşlem**

**Toplama ve Çıkarma İşlemi**

$n \in \mathbb{R}^+$ $n \geq 2$ olsun. $x \in \mathbb{R}^+$ a, $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$a \cdot \sqrt[n]{x} \pm b \cdot \sqrt[n]{x} = (a \pm b)\sqrt[n]{x}$ dir.

**Çarpma ve Bölme İşlemi**

$n \in \mathbb{R}^+$ ve $n \geq 2$ ve a, $b \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$b \neq 0$ olmak üzere

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ olur.

- Köklü sayılar arasında dört işlem yapabilmek için önce kök derecelerinin eşit olup olmadığına bakılır. Dereceler farklıysa eşit hâle getirildikten sonra işleme başlanır.

  $x \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{R}$; n, $k \in \mathbb{R}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere

  $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot k]{x^{m \cdot k}} = \sqrt[\frac{n}{k}]{x^{\frac{m}{k}}}$ dir.

**Köklü İfadeler ile İlgili Özellikler**

1. $x \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{R}$ ve $n \geq 2$ olmak üzere $\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$ olur.

2. $x, y \in \mathbb{Z}^+$, $n \in \mathbb{R}^+$ ve $n \geq 2$ olmak üzere
   - $\sqrt[n]{x^n \cdot y} = x \cdot \sqrt[n]{y}$ olur.
   - $x \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n \cdot y}$ olur.

3. $x \in \mathbb{Z}^+$, $m, n \in \mathbb{R}^+$, $n \leq 2$ ve $m \geq 2$ olmak üzere
   $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$ olur.

**Köklü İfadelerin Eşleniği**

Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayıdan her biri diğerinin eşleniği olarak tanımlanır.

Köklü rasyonel ifadelerde paydayı kökten kurtarmak için paydadaki sayının eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

| Sayı | Eşleneği | Sayı · Eşleniği |
|---|---|---|
| $\sqrt{a}$ | $\sqrt{a}$ | $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ |
| $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ | $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ | $(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ |
| $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ | $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ | $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b^2$ |
| $\sqrt[n]{x^a}$ | $\sqrt[n]{x^{n-a}}$ | n çift ise $\sqrt[n]{x^a} \cdot \sqrt[n]{x^{n-a}} = \lvert x \rvert$<br>n tek ise $\sqrt[n]{x^a} \cdot \sqrt[n]{x^{n-a}} = x$ |

**Özel Köklü İfadeler**

$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ **şeklindeki ifadeler**

$m, n, a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ olmak üzere

$\sqrt{a \pm 2\sqrt{b}}$ şeklindeki köklü ifadelerde $a = m + n$ ve $b = m \cdot n$ olmak üzere

$\sqrt{a + 2\sqrt{b}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$ ve $\sqrt{a - 2\sqrt{b}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$ $(m > n)$ şeklinde yazılır.

**DİKKAT**

- Bir köklü ifadede kökün derecesi çift ve kök içindeki sayı sıfırdan küçükse bu köklü ifade bir gerçek sayı belirtmez.
- Kök dereceleri çift olan köklü ifadelerin içleri negatif olamayacağından, içindeki sayılar kök dışına 0 ya da 0'dan büyük çıkarılır.
- Köklü sayılar arasında dört işlem yapabilmek için önce kök derecelerinin eşit olup olmadığına bakılır. Dereceler farklıysa eşit hâle getirdikten sonra işleme başlanır.
- Köklü ifadelerde elde edilen her özellik üslü ifadeler yardımıyla ispatlanabilir.

**Köklü İfadeleri İçeren Denklemler**

Bilinmeyenin kök içinde olduğu denklemlere **köklü denklemler** denir. Köklü ifade içeren denklemlerin çözümünden elde edilen sonucun başlangıçtaki denklemi sağlayıp sağlamadığı kontrol edilmelidir.

**Örnek :** $\sqrt{x} + 4 = 11$ olduğuna göre x kaçtır?

$\sqrt{x} = 11 - 4$

$\sqrt{x} = 7$

$(\sqrt{x})^2 = (7)^2$

$x = 49$

Sağlaması: $\sqrt{49} + 4 = 11$

$7 + 4 = 11$

$11 = 11$

Eşitlik sağlandığından x = 49'dur.

**Örnek :** $\sqrt{x} + 13 = 8$ olduğuna göre x kaçtır?

$\sqrt{x} = 8 - 13$

$\sqrt{x} = -5$

$(\sqrt{x})^2 = (-5)^2$

$x = 25$

Sağlaması: $\sqrt{25} + 13 = 8$

$5 + 13 = 8$

$18 \neq 8$

Eşitliği sağlayan x değeri yoktur.

**Köklü İfadeleri İçeren Eşitsizlikler (Sıralama)**

Köklü ifadeler sıralanırken;

- Kök dereceleri eşit olan köklü ifadelerden kökün içindeki sayısı büyük olan daha büyüktür.

  $a = 5\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{20}$, $c = 7\sqrt{2}$ sayılarını sıralayalım.

  $a = \sqrt{75}$, $b = \sqrt{80}$, $c = \sqrt{98}$ olduğundan $a < b < c$ olur.

- Kök içindeki sayıları eşit olan köklü ifadelerden derecesi küçük olan daha büyüktür.

  $a = \sqrt[3]{64}$, $b = \sqrt{64}$, $c = \sqrt[6]{64}$ sayılarını sıralayalım.

  $a = \sqrt[3]{64}$, $b = \sqrt{64}$, $c = \sqrt[6]{64}$

  $a = 4$, $b = 8$, $c = 2$ olduğundan $c < a < b$ olur.

- Köklü ifadenin hangi iki tam sayı arasında olduğu bulunarak sıralama yapılır.

$a = \sqrt[3]{123}$, $b = \sqrt{79}$, $c = \sqrt[4]{234}$ sayılarını sıralayalım.

$\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{123} < \sqrt[3]{125}$ | $\sqrt{64} < \sqrt{79} < \sqrt{81}$ | $\sqrt[4]{81} < \sqrt[4]{234} < \sqrt[4]{256}$

$\sqrt[3]{64} < a < \sqrt[3]{125}$ | $\sqrt{64} < b < \sqrt{81}$ | $\sqrt[4]{81} < c < \sqrt[4]{256}$

$4 < a < 5$ | $8 < b < 9$ | $3 < c < 4$

Bu durumda $c < a < b$ olur.

- Kareköklü bir sayının yaklaşık değeri aşağıdaki şekilde bulunur.

  $\sqrt{a}$ sayısının yaklaşık değeri;

  a sayısından küçük en büyük tam kare sayı x ve a sayısından büyük en küçük tam kare sayı y ise

  $$\sqrt{a} \cong \sqrt{x} + \frac{a - x}{y - x}$$

  işlemi uygulanarak bulunur.

**Oran**

Aynı türden iki çokluğun bölme yoluyla karşılaştırılmasına **oran** denir.

$\frac{a}{b}$ veya a : b şeklinde gösterilir.

**Orantı**

İki ya da daha fazla oranın birbirine eşitlenmesine **orantı** denir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği bir orantı belirtir.

Sabit bir k değeri için $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ eşitliğindeki k değerine **orantı sabiti** denir.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği a : b = c : d şeklinde de yazılabilir. Bu eşitlikte b ve c değerleri **içler**, a ve d değerleri **dışlar** olarak adlandırılır.

**Orantının Özellikleri**

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ orantısında

1. İçler çarpımı ile dışlar çarpımı birbirine eşittir. $a \cdot d = b \cdot c$ olur.
2. İçteki veya dıştaki terimler yer değiştirebilir.

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

3. Oranların paylarının toplamı, paydalarının toplamına bölünürse orantı sabiti değişmez.

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = k$

4. $m \neq 0$ ve $n \neq 0$ olmak üzere oranların biri m sabit sayısıyla diğeri n sabit sayısıyla genişletilip pay ve paydalar kendi aralarında toplanırsa orantı sabiti değişmez.

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{m \cdot a}{m \cdot b} = \frac{n \cdot c}{n \cdot d} = k \Rightarrow \frac{m \cdot a + n \cdot c}{m \cdot b + n \cdot d} = k$

5. Oranlar çarpılırsa orantı sabitinin karesi elde edilir.

   $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = k^2$

**Orantı Çeşitleri**

**Doğru Orantı**

İki çokluktan biri artarken diğeri de aynı oranda artıyorsa ya da biri azalırken diğeri de aynı oranda azalıyorsa bu çokluklara **doğru orantılıdır** denir.

a ve b doğru orantılı ise $\frac{a}{b} = k$ şeklinde gösterilir.

**Ters Orantı**

İki çokluktan biri artarken diğeri aynı oranda azalıyor ya da biri azalırken diğeri aynı oranda artıyor ise bu çokluklara **ters orantılıdır** denir.

a ve b ters orantılı ise $a \cdot b = k$ şeklinde gösterilir.

a, b, c ve x gerçek sayılar olmak üzere

$$\left.\begin{matrix} a & & b \\ & \times & \\ c & & x \end{matrix}\right\}$$ ifadesinde a ile b ve c ile x arasında doğru orantı varsa a · x = b · c olur.

$$\left.\begin{matrix} a \longleftrightarrow b \\ \\ c \longleftrightarrow x \end{matrix}\right\}$$ ifadesinde a ile b ve c ile x arasında ters orantı varsa a · b = c · x olur.

**Oran – Orantı Problemleri**

**Doğru Orantı**

- Satın alınan ürün ile ödenmesi gereken para
- İşçi sayısı ve yapılan iş miktarı
- Hız ve alınan yol
- Yapılan iş miktarı ve harcanan süre

**Ters Orantı**

- Hız ve zaman
- İşçi sayısı ve işin bitirilme süresi
- Kişi sayısı ve yiyeceğin yetme süresi

**Örnek:**

Furkan, Fatih ve Feyza isimli üç arkadaş 144 adet cevizi sırasıyla 3, 4 ve 6 sayıları ile ters orantılı olarak paylaşacaklardır. En az ceviz alan kişiyi ve bu kişinin kaç ceviz alacağını bulunuz.

**ÇÖZÜM**

Furkan x, Fatih y ve Feyza z tane ceviz alsın. x, y ve z sayıları sırasıyla 3, 4 ve 6 ile ters orantılı olduğundan

$$\left.\begin{aligned} x \cdot 3 &= k \text{ ise } x = \frac{k}{3} \\ y \cdot 4 &= k \text{ ise } y = \frac{k}{4} \\ z \cdot 6 &= k \text{ ise } z = \frac{k}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x + y + z = 144 &\Rightarrow \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{6} = 144 \text{ olur.} \\ &\Rightarrow \frac{9k}{12} = 144 \\ &\Rightarrow k = 192 \text{ olur.} \end{aligned}\right.$$

Bu durumda $\frac{k}{3}, \frac{k}{4}$ ve $\frac{k}{6}$ ifadelerinden en küçük olan $\frac{k}{6}$'dır ve en az ceviz alan kişi Feyza'dır.

Feyza $z = \frac{k}{6} = \frac{192}{6} = 32$ ceviz alır.

Bir problemi çözebilmek için sözel olarak belirtilen ifadeler matematiksel değişkenlere dönüştürülerek bir denklem kurulmalıdır. Denklemin çözümü, problemin çözümünü verir. Problemler de kendi içerisinde sayı ve kesir, yaş, yüzde, karışım, hareket, işçi ve havuz, ..... gibi alt başlıklara ayrılır.

**Problemler çözülürken genellikle şu sıra takip edilir:**

a) Problemde kullanılan veri veya veriler belirlenir.

b) Problemde istenen veri veya veriler belirlenir.

c) İstenen veriye uygun bir değişken atanır.

d) Verilere göre denklem veya eşitsizlik yazılır.

e) Yazılan denklem veya eşitsizlik çözülür.

Sayı problemleri ile ilgili bazı cebirsel ifade örnekleri aşağıdaki gibidir.

| **Sözel İfade** | **Cebirsel İfade olarak karşılığı** |
|---|---|
| Bir sayının 5 fazlası | $x + 5$ |
| Bir miktar paranın 5 katının 14 eksiği | $5x - 4$ |
| Bir sınıftaki öğrencilerin yarısının 7 fazlası | $\frac{x}{2} + 7$ |
| Karesi ile kendisinin toplamı 30 olan sayılar | $x^2 + x = 30$ |
| İki katı ile yarısının toplamı 15 ten küçük olan sayılar | $2x + \frac{x}{2} < 15$ |
| Kalemlerinin sayılarının farkı 8 olan iki öğrencinin kalemlerinin toplam sayısı | $x + (x - 8)$ |

**Örnek:**

Bir kafedeki 46 masanın bir kısmı üç kişilik, diğerleri iki kişiliktir.

**Bu kafenin toplam müşteri kapasitesi 117 olduğuna göre kafedeki iki kişilik masa sayısı kaçtır?**

**Çözüm:**

İki kişilik masa sayısı x olsun.

O halde üç kişilik masa sayısı $46 - x$ olur.

Buradan kişi sayısı 117 olduğundan;

$2x + 3(46 - x) = 117$

$2x + 138 - 3x = 117$

$21 = x$

İki kişilik masa sayısı 21 olur.

Kesir problemlerinde verilen sözel ifadeler, aşağıda verilen tablodaki gibi matematiksel ifadelere dönüştürülür.

| | |
|---|---|
| 60 sayısının $\frac{2}{5}$'i | $60 \cdot \frac{2}{5}$ |
| 90 sayısının $\frac{1}{3}$'ünün $\frac{2}{5}$'i | $90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$ |
| Bir sayısının $\frac{1}{4}$'ünün $\frac{5}{6}$'i | $x \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6}$ |

**DİKKAT**

“Bir sayının $\frac{1}{a}$’sının $\frac{1}{b}$’si kaçtır?” şeklindeki ifadelerde kesirlerin paydalarının en küçük ortak katları alıp, bulunan sayı kadar x yazılır.

Örneğin EKOK(a,b) = k ise bu durumda istenen sayı k · x alınarak işlem daha kolay yapılabilir.

**Örnek:**

Göktuğ, çözmesi gereken soruların $\frac{1}{3}$ ‘ünü günde 25 soru çözerek, kalan kısmını ise günde 20 soru çözerek toplam 14 günde bitirmiştir.

**Buna göre Göktuğ’un çözmesi gereken soru sayısı kaçtır?**

**Çözüm**:

Tüm soruların sayısına 3x denilirse 25 soru çözerek bitirdiği kısımda x soru, 20 soru çözerek bitirdiği kısımda 2x soru olur. x soruluk kısmı günde 25 soru çözerek $\frac{x}{25}$ günde, 2x soruluk kısmı günde 20 soru çözerek $\frac{2x}{20}$ günde bitirecektir.

Bu durumda

$$\underset{(4)}{\frac{x}{25}} + \underset{(5)}{\frac{2x}{20}} = 14 \Rightarrow \frac{4x}{100} + \frac{10x}{100} = 14 \Rightarrow \frac{14x}{100} = 14 \Rightarrow x = 100 \text{ bulunur.}$$

Çözülmesi gereken soru sayısı 3x olduğundan $3x = 3 \cdot 100 = 300$ sorudur.

**Örnek:**

Bir telin bir ucundan $\frac{1}{6}$ ‘sı kesilirse orta noktası 15 cm yer değiştirmektedir.

**Buna göre telin kesilmeden önceki boyunun uzunluğu kaç santimetredir?**

**Çözüm:**

Bir telin orta noktası bir ucundan kesilen miktarın yarısı kadar yer değiştireceğinden telin boyuna x cm dersek,

$$\frac{\frac{x}{6}}{2} = 15 \Rightarrow \frac{x}{6} = 30 \Rightarrow x = 180 \text{ cm olarak bulunur.}$$

Yaş problemlerinin çözümünde aşağıdaki tablolarda verilenlerden yararlanılır.

| | Kişi 1 | Kişi 2 | Kişi 3 | Yaşlarının Toplamı |
|---|---|---|---|---|
| a yıl önce | $x - a$ | $y - a$ | $z - a$ | $(x + y + z) - 3 \cdot a$ |
| şimdi | $x$ | $y$ | $z$ | $x + y + z$ |
| b yıl sonra | $x + b$ | $y + b$ | $z + b$ | $(x + y + z) + 3 \cdot b$ |

| | Kişi |
|---|---|
| Şimdiki yaşı | $x$ |
| a yıl önce doğsaydı şimdiki yaşı | $x + a$ |
| b yıl sonra doğsaydı şimdiki yaşı | $x - b$ |

| $x > y$ olmak üzere | Kişi 1 | Kişi 2 |
|---|---|---|
| Şimdiki yaşı | $x$ | $y$ |
| Kişi1, Kişi 2'nin yaşında iken | $y$ | $2y - x$ |
| Kişi 2, Kişi 1'in yaşına geldiğinde | $2x - y$ | $x$ |

Not : İki kişi arasındaki yaş farkı daima sabittir, değişmez.

**Örnek:**

Kardeşi doğduğunda Efe 8 yaşındadır. Kardeşi Efe'nin yaşına geldiğinde Efe ile kardeşinin yaşları toplamı annelerinin yaşının yarısına eşit olacaktır.

**Buna göre Efe doğduğunda annesi kaç yaşındadır?**

**Çözüm:**

- Kardeşi doğduğunda Efe 8 yaşında ise iki kardeşin yaşları farkı 8 dir.
- Kardeşi Efe'nin yaşına geldiğinde aradan geçen süre yaşları farkı kadardır. Yani;

Kardeşi 8 yaşında ve Efe 16 yaşında olacaktır.

Buradan iki kardeşin yaşları toplamı 24 olacaktır.

Annenin yaşı $2 \cdot 24 = 48$ olur.

Efe doğduğunda annesinin yaşı;

$48 - 16 = 32$ olur.

İşçi problemlerinde işlemler, birim zamanda yapılan iş üzerinden gerçekleştirilir.

Bir işçi bir işin tamamını x günde yaparsa

- Bir günde $\frac{1}{x}$ 'ini
- a günde $\frac{a}{x}$ 'ini

  yapar.

Birinci işçinin a günde, ikinci işçinin b günde bitirdiği bir işi bu iki işçi birlikte x günde bitiriyorsa

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ tir.

Bu formülün dışında farklı yöntemler için aşağıda örnekleri inceleyiniz.

**Örnek:**

**Aynı güçteki** 8 **işçinin** 12 **günde boyayabileceği bir duvarı bu işçilerle aynı güçte olan** 6 **işçi kaç günde boyayabilir?**

**Çözüm:**

İşçi sayısı azaldıkça işin yapılma süresi artacağından ters orantı vardır. Bu durumda

8 işçi $\rightarrow$ 12 gün

6 işçi $\rightarrow$ x gün

$8 \cdot 12 = 6 \cdot x$

$x = 16$

Bu durumda 6 işçi bu duvarı 16 günde boyayabilir.

**Örnek:**

Cem bir işi 4 günde, Caner ise aynı işi 6 günde bitirebilmektedir. İkisi birlikte bu işe başladıktan 2 gün sonra Cem işi bırakıyor.

**Buna göre kalan işi Caner kaç günde bitirebilir?**

**Çözüm:**

EKOK (4, 6) = 12 olduğundan yapılan iş miktarı 12k olsun.

Cem işi 4 günde bitirebildiğine göre 1 günde $\frac{12k}{4}=3k$ kadar iş bitirir.

Caner işi 6 günde bitirebiliyorsa 1 günde $\frac{12k}{6}=2k$ kadar iş bitirir.

İkisi birlikte 2 günde $2 \cdot (3k + 2k) = 10k$ kadar iş yaparlar.

Bu durumda $12k - 10k = 2k$ kadar iş kalır ve bu kalan işi Caner 1 günde bitirir.

Yüzde problemlerinin çözümünde aşağıdaki bağıntılardan yararlanılır.

| | |
|---|---|
| Bir A sayısının % x'i kaçtır? | $A \cdot \frac{x}{100}$ |
| Bir A sayının % x'inin % y'si kaçtır? | $A \cdot \frac{x}{100} \cdot \frac{y}{100}$ |
| Hangi sayının % a'sı Y'dir? | $X \cdot \frac{a}{100} = Y$ |
| A sayısı B sayısının % kaçıdır? | $\frac{A}{B} \cdot 100$ |

**DİKKAT**

- Yüzde problemleri çözülürken başlangıç değişkeni 100x olarak seçildiğinde çözüm basamakları daha kolay hale gelir.
- Yüzde problemleri, kesir problemlerini temel alarak, kar- zarar ve karışım problemlerine temel oluşturur.

**Örnek:**

Asiye, Begüm ve Cenk 720 TL parayı aşağıdaki gibi paylaşmıştır.

- Asiye'nin payına düşen para, Begüm'ün payına düşen paranın 4 katıdır.
- Begüm ve Cenk'in payına düşen toplam para Asiye'nin payına düşen paranın $\frac{3}{2}$'si kadardır.

**Buna göre Asiye'nin payına düşen para tüm paranın yüzde kaçıdır?**

**Çözüm:**

Begüm'ün payına düşen paraya x denilirse, Asiye'nin payına düşen para 4x olur.

Cenk'in payına düşen paraya y denilirse,

$x + y = 4x \cdot \frac{3}{2}$

$x + y = 6x$

$y = 5$

Toplam para 720 TL olduğundan

$4x + x + 5x = 720$

ve $x = 72$ olur.

Bu durumda Asiye'nin parası, $4x = 4 \,.\, 72 = 288$ TL olur ve yüzdesi

$\frac{288}{720} = \frac{4}{10}$

$\frac{4}{10} = \%40$

Kâr – zarar problemlerinin çözümünde aşağıdaki bağıntılardan yararlanılır.

- Kâr = Satış fiyatı – Maliyet fiyatı        Zarar = Maliyet fiyatı – Satış fiyatı

  $\text{Kâr yüzdesi} = \dfrac{\text{Kâr}}{\text{Maliyet fiyatı}} \cdot 100$

- A TL'lik bir ürüne % x indirim yapıldığında ürünün yeni satış fiyatı

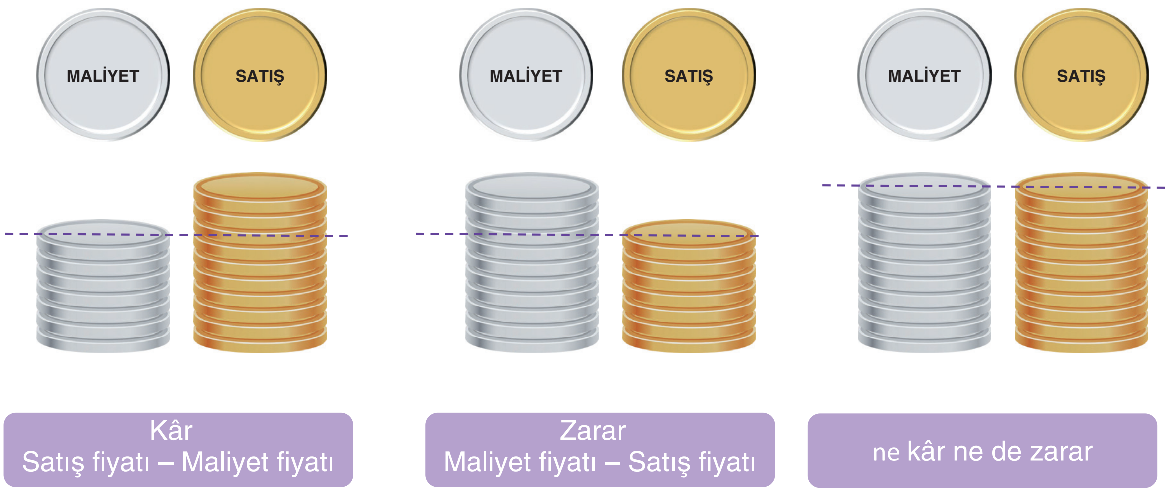
  $A - A \cdot \dfrac{x}{100} = A \cdot \left(\dfrac{100 - x}{100}\right)$ olur.

- A TL'lik bir ürüne % x zam yapıldığında ürünün yeni satış fiyatı

  $A + A \cdot \dfrac{x}{100} = A \cdot \left(\dfrac{100 + x}{100}\right)$ olur.

**Dikkat :**

- Kâr ve zarar maliyet fiyatı üzerinden hesaplanır.
- Kâr ve zarar işlemlerinde kolaylık sağlamak amacıyla genellikle bir ürünün maliyet fiyatına 100x denir.
- İndirim ve zam satış fiyatı üzerinden hesaplanır.
- İndirim ve zam işlemlerinde kolaylık sağlamak amacıyla genellikle bir ürünün satış fiyatına 100x denir.




**İndirim :**

Etiket fiyatı üzerinden yapılan değer düşümü, fiyat indirmedir.

**Zam:**

Etiket fiyatının arttırılmasıdır.

Karışım problemlerinin çözümünde aşağıdaki bağıntılardan yararlanılır.

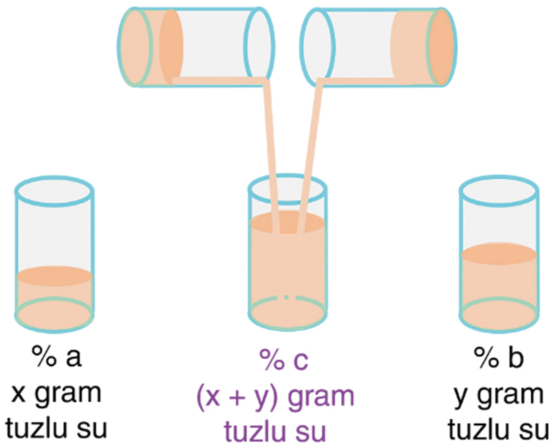
- Saf madde oranı $= \dfrac{\text{Saf madde miktarı}}{\text{Karışım miktarı}}$

- Saf madde yüzdesi $= \dfrac{\text{Saf madde miktarı}}{\text{Karışım miktarı}} \cdot 100$

- A miktardaki bir karışımda bulunan bir miktar maddenin oranı % x, B miktardaki bir karışımda bulunan aynı maddenin oranı % y olmak üzere bu iki karışım karıştırıldığında elde edilen

  A + B miktardaki karışımda aynı maddenin oranı z ise

  $A \cdot x + B \cdot y = z \cdot (A + B)$ olur.




**Yeni Karışımın Tuz Yüzdesi**

$$\frac{c}{100} = \frac{\frac{a}{100} \cdot x + \frac{b}{100} \cdot y}{x + y} \longrightarrow \boxed{c = \frac{a \cdot x + b \cdot y}{x + y}}$$

**DİKKAT**

- Herhangi bir karışımın bir miktarının dökülmesi karışımı oluşturan maddelerin oranlarını değiştirmez.
- Karışıma su ekleme veya karışımdan su buharlaştırma problemlerinde;
  - İstenilen yüzde suya ait değil ise su yüzdesi %0,
  - İstenilen yüzde suya ait ise su yüzdesi %100 alınır.

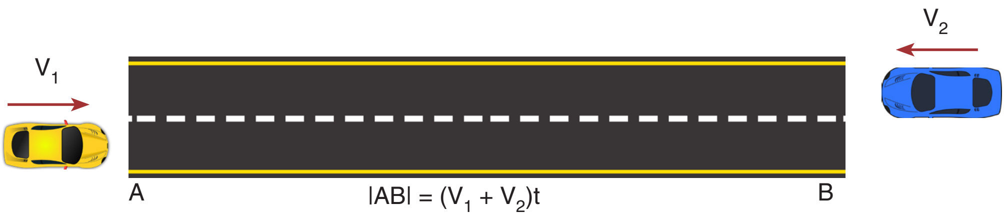
X yol, V hız, t zaman olmak üzere sabit V hızıyla t saatte hareket eden bir aracın alacağı yol

**X = V · t** formülü ile bulunur.

- Hız birimleri km/sa., m/dk., m/sn. şeklindedir.
- 1 km = 1000 m, 1saat = 60 dk., 1 dk.= 60 sn. olacak şekilde birimler arası çevirmeler yapılabilir.
    - V sabit kalmak koşuluyla X ve t doğru orantılı,
    - X sabit kalmak koşuluyla V ve t ters orantılı,
    - t sabit kalmak koşuluyla X ve V doğru orantılıdır.

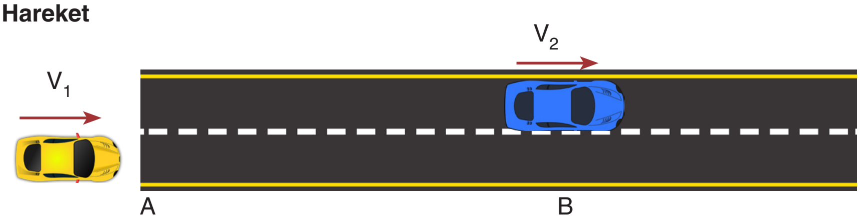
Hızları $V_1$ ve $V_2$ olan iki aracın karşılaşma anına kadar geçen süre t olmak üzere;

**Zıt Yönlü Hareket**




$|AB| = (V_1 + V_2)t$

**Aynı Yönlü Hareket**




$V_1 > V_2$ olmak üzere $|AB| = (V_1 - V_2)\,t$

**Ortalama Hız**

Ortalama Hız $(V_{ort}) = \dfrac{\text{Toplam Yol}}{\text{Toplam Zaman}}$ formülüyle hesaplanır.

- Bir araç bir yolu $V_1$ hızıyla gidip, $V_2$ hızıyla geri dönüyorsa bu aracın gidiş dönüşteki ortalama hızı;

  $V_{ort} = \dfrac{2 \cdot V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2}$ şeklinde bulunur.

Bilinen bir yöntem veya formül ile çözülemeyen, çözümünde verilerin dikkatli analiz edilmesini ve yaratıcı bir girişimde bulunulmasını, bir veya daha fazla strateji kullanılmasını gerektiren problemlerdir.

Rutin olmayan problemler çözülürken sayısal-görsel mantık, örüntüler, sayma ve geometri bilgilerine sıklıkla başvurulur.

Genel olarak problem çözerken aşağıdaki adımlar takip edilebilir.

- Verileri belirleme
- İstenileni anlama
- Gerektiğinde şekil çizme, liste ve tablo yapma
- Sistematik düşünme
- Akıl yürütme

**Örnek:**

Bir köydeki ailelere Ramazan ayı için bir firma tarafından ramazan kolisi dağıtılacaktır. Ailedeki birey sayısı 3 ve 3'ten az ise 2 paket, 3'ten fazla ise 3 paket yardım yapılacaktır.

Köydeki ailelerin her birindeki birey sayısı 8'den fazla değildir.

**Bu köyde toplam 79 adet ramazan kolisi dağıtıldığına göre köyün nüfusu <u>en çok</u> kaç kişi olabilir?**

**Çözüm:**

Birey sayısı 3 ve 3 ten az olan aile sayısı x,

Birey sayısı 3 ten fazla olan aile sayısı y olsun.

Dağıtılacak toplam paket sayısı

$2x + 3y = 79$ olur.

Köy nüfusunun en fazla sayıda olması için x in en küçük y nin en büyük değerini alması gerekir.

x değişkeni 0 değerini aldığında y değişkeni bir tam sayı değeri alamaz,

x değişkeni 1 değerini aldığında y değişkeni bir tam sayı değeri alamayacağından x en az 2 alınırsa y en çok 25 bulunur.

Bu durumda köy nüfusu en fazla

$2 \cdot 3 + 25 \cdot 8 = 6 + 200 = 206$ olur.

**Örnek:**

Aslı telefonunda bulunan bir spor antrenmanı uygulamasını kullanırken ilk egzersize saat 14.45'de başlamış ve hiç ara vermeden son egzersizi saat 15.03'de bitirmiştir. Egzersizlerin her birine eşit süre ayırmıştır.

Aslı bu antrenmanda 24 tane egzersiz yaptığına göre egzersizlerden kaç tanesinin dakika başında başladığını bulunuz.

**Çözüm:**

15.03 – 14.45 = 18 dakika antrenman yapmıştır.

$18 \cdot 60 = 1080$ saniyedir.

Her bir egzersiz 45 saniye sürmüştür.

1. egzersiz 14.45.00
2. egzersiz 14.45.45
3. egzersiz 14.46.30
4. egzersiz 14.47.15
5. egzersiz 14.48.00

Buna göre her dört egzersizde bir yani 1, 5, 9, 13, 17 ve 21. olmak üzere 6 egzersiz dakika başında başlamıştır.

**Önerme**

Doğru ya da yanlış kesin bir hüküm (yargı) bildiren ifadelere **önerme** adı verilir.

Matematikte önermeler genellikle p, q, r, s gibi küçük harflerle gösterilir.

**Örnek:**

Aşağıdaki ifadelerin önerme olup olmadığını inceleyelim.

p : "  Asal olan her sayı tek sayıdır."

q : "  Bugün sinemaya gidelim mi?"

r : "  Adana, Akdeniz Bölgesi'ne ait bir ilimizdir."

s : "  Sevgi, başarılı bir öğrenci değildir."

t : "  Dünyanın en lezzetli meyvesi çilektir."

v : "  13 + 5 = 16 olur."

**Çözüm :**

p : " Asal olan her sayı tek sayıdır. " Önermedir.

q : " Bugün sinemaya gidelim mi? "  Önerme değildir.

r : " Adana, Akdeniz Bölgesi'ne ait bir ilimizdir." Önermedir.

s : " Sevgi, başarılı bir öğrenci değildir."   Önerme değildir.

t : " Dünyanın en lezzetli meyvesi çilektir."   Önerme değildir.

v : " 13 + 5 = 16 olur. " Önermedir.

**Bir Önermenin Doğruluk Değeri**

Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadeler önerme olarak tanımlandığından bir önermenin iki farklı doğruluk değeri olur.

- p önermesi doğru ise D veya 1, yanlış ise Y veya 0 ile gösterilir.
- p önermesi doğru ise $p \equiv 1$, yanlış ise $p \equiv 0$ şeklinde yazılır.

**İki Önermenin Denkliği**

Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye denk önermeler denir.

- p önermesi q önermesine denk ise  "$p \equiv q$"
- p önermesi q önermesine denk değil ise "$p \not\equiv q$"

ile gösterilir.

**Doğruluk Tablosu**

Önermelerin doğruluk değerlerinin gösterildiği tabloya **doğruluk tablosu** denir.

- p önermesinin 2 farklı doğruluk durumu vardır ve tablosu aşağıdaki gibidir.

| p |
|---|
| 1 |
| 0 |

- p önermesinin 2, q önermesinin 2 farklı doğruluk değeri olduğundan p ve q önermelerinin $2 \cdot 2 = 4$ farklı doğruluk durumu vardır. Önermelerin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

| p | q |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 0 | 0 |

- Her önermenin 2 farklı doğruluk değeri olduğundan verilen üç önerme için $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ farklı doğruluk durumu vardır. Önermelerin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

| p | q | r |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

- $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere birbirinden bağımsız n tane önermenin $2^n$ tane doğruluk değeri vardır.

**Bir Önermenin Değili (Olumsuzu)**

Bir önermenin hükmünün değiştirilip yerine olumsuzunun kullanılması ile elde edilen önermeye ilk önermenin **değili (olumsuzu)** denir.

- p önermesinin değili $p'$ veya $\sim p$ ile gösterilir.
- p önermesi doğru ise doğruluk değeri 1'dir ve $p'$ önermesinin doğruluk değeri 0'dır.
  $p \equiv 1$ ise $p' \equiv 0$ ile gösterilir.
- Bir önermenin değilinin değili önermenin kendisine denktir. $[(p')' \equiv p]$

Bu özelliğin doğruluk tablosu ile gösterimi aşağıdaki gibidir.

| p | p' | (p')' |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

**Bileşik Önerme**

İki veya daha fazla önermenin "ve" ($\wedge$), "veya" ($\vee$), "ya da" ($\veebar$), "ise" ($\Rightarrow$), "ancak ve ancak" ($\Leftrightarrow$) gibi bağlaçlarla birbirine bağlanmasıyla elde edilen yeni önermeye **bileşik önerme** denir.

"ve" **Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermeler**

p ile q önermelerinin "ve" bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye **p ve q bileşik önermesi** denir ve bu önerme **$p \wedge q$** biçiminde gösterilir.

$p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri; p ile q önermelerinin her ikisi de doğru iken 1, diğer durumlarında ise 0'dır.

| p | q | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

"ve" **Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri**

1. **Tek Kuvvet Özelliği**

   Her p önermesi için $p \wedge p \equiv p$ dir.

2. **Değişme Özelliği**

   Her p, q önermesi için $p \wedge q \equiv q \wedge p$ dir.

3. **Birleşme Özelliği**

   Her p, q, r önermesi için $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ dir.

- $p \wedge p' \equiv 0$
- $p \wedge 1 \equiv p$
- $p \wedge 0 \equiv 0$

"veya" **Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermeler**

p ile q önermelerinin "veya" bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye **p veya q bileşik önermesi** denir ve önerme **$p \vee q$** biçiminde gösterilir.

$p \vee q$ bileşik önermesi; p ile q önermelerinden en az biri doğru iken 1, her ikisi de yanlış iken 0'dır.

| p | q | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

"veya"**Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri**

1. **Tek Kuvvet Özelliği**

   Her p önermesi için $p \vee p \equiv p$ dir.

2. **Değişme Özelliği**

   Her p, q önermesi için $p \vee q \equiv q \vee p$ dir.

3. **Birleşme Özelliği**

   Her p, q, r önermesi için $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ dir.

- $p \vee p' \equiv 1$
- $p \vee 1 \equiv 1$
- $p \vee 0 \equiv p$

**Dağılma Özelliği**

- **"ve" nin "veya" üzerine soldan dağılma özelliği,** $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ **dir.**
- **"veya" nın "ve" üzerine soldan dağılma özelliği,** $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ **dir.**

**De Morgan kuralları**

p ve q önerme olmak üzere,

- $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$
- $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$

şeklinde verilen kurallara **De Morgan kuralları** denir.

"ya da" **Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermeler**

p ile q önermelerinin “ya da” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye,

p ya da q bileşik önermesi denir ve önerme $p \veebar q$ biçiminde gösterilir.

$p \veebar q$ bileşik önermesi; p ile q önermelerinden yalnız biri doğru iken 1, diğer durumlarda 0’dır.

| p | q | $p \veebar q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

"ya da" **Bağlacı İle Kurulan Bileşik Önermelerin Özellikleri**

1. **Değişme Özelliği**

   Her p ve q önermesi için $p \veebar q \equiv q \veebar p$ dir.

2. **Birleşme Özelliği**

   Her p, q, r önermesi için $(p \veebar q) \veebar r \equiv p \veebar (q \veebar r)$ dir.

## KOŞULLU ÖNERME

İse Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermeler

p ile q önermelerinin “ise” bağlacı ile bağlanmasından oluşan bileşik önermeye **koşullu önerme** denir ve bu koşullu önerme $p \Rightarrow q$ biçiminde gösterilir.

$p \Rightarrow q$ önermesi; p doğru, q yanlış iken yanlış diğer durumlarda doğrudur.

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

### İse Bağlacının Özellikleri

- $p \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \Rightarrow 0 \equiv p'$
- $0 \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \Rightarrow 1 \equiv 1$
- $1 \Rightarrow p \equiv p$
- $p \Rightarrow p' \equiv p'$
- $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

### Koşullu Önermelerin Karşıtı, Tersi, Karşıt Tersi

- $p \Rightarrow q$ önermesinin **karşıtı** $q \Rightarrow p$ ,
- $p \Rightarrow q$ önermesinin **tersi** $p' \Rightarrow q'$ ,
- $p \Rightarrow q$ önermesinin **karşıt tersi** $q' \Rightarrow p'$ olur.
- $p \Rightarrow q$ önermesi **karşıt tersi** olan $q' \Rightarrow p'$ önermesine denktir.
- $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi $p' \Rightarrow q'$ ile $p \Rightarrow q$ önermesinin değili $(p \Rightarrow q)'$ aynı değillerdir.

### Gerektirme

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinde

p : Koşullu önermenin hipotezidir.

q : Koşullu önermenin hükmüdür.

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu koşullu önermeye **gerektirme** denir.

**Ancak ve Ancak Bağlacı ile Kurulan Bileşik Önermeler**

p ve q iki önerme olmak üzere $p \Rightarrow q$ ile $q \Rightarrow p$ koşullu önermelerinin $\wedge$ bağlacı ile birbirine bağlanmasından oluşan $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesine **iki yönlü koşullu önerme** denir.

- İki yönlü koşullu önerme $p \Leftrightarrow q$ şeklinde yazılır ve "p ancak ve ancak q" olarak okunur.
- $p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesinin doğruluk değeri p ile q'nun doğruluk değerleri aynı iken 1, farklı iken 0'dır.
- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

| p | q | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

**Ancak ve Ancak Bağlacının Özellikleri**

- $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$
- $p \Leftrightarrow 0 \equiv p'$
- $p \Leftrightarrow 1 \equiv p$
- $p \Leftrightarrow p \equiv 1$
- $p \Leftrightarrow p' \equiv 0$
- $p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q'$
- $(p \Leftrightarrow q)' \equiv p' \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow q'$

**DİKKAT**

$p \Leftrightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu koşullu önermeye **çift gerektirme** denir.

**DİKKAT**

p ve q önermeleri için $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ önermesinin doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

| **p** | **q** | $(p \Rightarrow q)$ | $(q \Rightarrow p)$ | $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ | $p \Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

## Açık Önerme

İçinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlere verilen değerlerle doğru ya da yanlış olduğu belirlenen önermelere **açık önerme** denir ve bu önerme p(x) ile gösterilir.

p(x) : "x bir tam sayı, $x^2 = 9$" ifadesi bir açık önermedir.

## Doğruluk Kümesi

Bir açık önermeyi doğrulayan elemanların kümesine o açık önermenin **doğruluk kümesi** denir.

Bir a sayısı p(x) açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı ise $p(a) \equiv 1$ dir.

Bir b sayısı p(x) açık önermesinin doğruluk kümesinin elemanı değil ise $p(b) \equiv 0$ dır.

- Her denklem ve her eşitsizlik aynı zamanda bir açık önerme belirtir.
- Denklemler ve eşitsizliklerin çözüm kümeleri ise bu açık önermelerin doğruluk kümesidir.

## Her ve Bazı Niceleyicileri

"Her" sözcüğü, bütün ve tamamı sözcükleri ile aynı anlamdadır.

"Her" niceleyicisi, önüne geldiği elemanların tamamını anlattığı için bu niceleyiciye **evrensel niceleyici** denir ve "∀" sembolü ile gösterilir.

"Bazı" sözcüğü, en az bir ifadesi ile aynı anlamdadır.

"Bazı" niceleyicisi, en az bir tane anlamında kullanıldığı için bu niceleyiciye **varlıksal niceleyici** denir ve "∃" sembolü ile gösterilir.

- Sembolik mantık kullanılarak verilen " $\forall x \in \mathbb{R}^+, x^2 > 0$" ifadesi sözel olarak
  "Her pozitif gerçek sayının karesi sıfırdan büyüktür." şeklinde ifade edilir.
- Sembolik mantık kullanılarak verilen " $\exists x \in \mathbb{R}, x - 2 \leq 8$" ifadesini sözel olarak
  "Bazı gerçek sayıların 2 eksiği 8'e eşit veya 8'den küçüktür."

## Açık Önermenin Değili (olumsuzu)

$\exists x, p(x)$ açık önermesinin değili $\forall x, p'(x)$ dir. Bu özellik sembol ile $[\exists x, p(x)]' \equiv \forall x, p'(x)$ şeklinde ifade edilir.

$\forall x, p(x)$ açık önermesinin değili $\exists x, p'(x)$ dir. Bu özellik sembol ile $[\forall x, p(x)]' \equiv \exists x, p'(x)$ şeklinde ifade edilir.

| GÖSTERİM | DEĞİLİ |
|---|---|
| $\forall$ | $\exists$ |
| $\exists$ | $\forall$ |
| $=$ | $\neq$ |
| $\neq$ | $=$ |
| $<$ | $\geq$ |
| $>$ | $\leq$ |
| $\leq$ | $>$ |
| $\geq$ | $<$ |

**Tanımsız Terimler :** Başka bir terim ya da tanıma ihtiyaç duyulmadan anlaşılabilen terimlerdir. Örneğin nokta, doğru, düzlem tanımsız terimlerdir.

**Tanımlı Terimler:** Kendisinden önce tanımlanan terimler, tanımsız terim ve başkaca kavramlar kullanılarak tanımlanmaya ihtiyaç duyulan terimlerdir.

**Tanım:** Bir kavram ya da terimi, tanımlı veya tanımsız terimler kullanmak suretiyle özelliklerini belirterek açıklamaya **tanım** (tanımlama) adı verilir.

I. Tanımlama; anlamı bilinen sözcükler, tanımsız terimler veya tanımlı terimlerle yapılmalıdır.

II. Tutarlı, açık ve anlaşılır olmalıdır.

Tanım; belirtilmesi gereken özelliği kapsamalı, başka özellikleri kapsamayacak biçimde kesin olmalıdır.

### Aksiyom

İspata gerek duyulmaksızın doğruluğu kabul edilen önermelere **aksiyom** denir. Aksiyomlarda bulunması gereken özellikler aşağıdaki gibidir.

I. Birbirleri ile çelişmemelidir.

II. Birbirlerinden bağımsız olmalıdır. (Bir aksiyom diğer aksiyomlardan çıkarılmamalıdır.)

III. Mümkün olduğu kadar az sayıda olmalıdır.

### Teorem, Hipotez, Hüküm, İspat

**Teorem:** Doğruluğu ispatsız kabul görmeyen önermelere **teorem** denir.

p ve q önermeler olmak üzere p önermesi doğru iken $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluğu ispatlanabiliyorsa $p \Rightarrow q$ önermesi bir teoremdir. Başka bir ifadeyle doğruluğu ispatlanabilen önermelere **teorem** denir.

- $p \Rightarrow q$ teorem olmak üzere p önermesine **hipotez** , q önermesine **hüküm** denir.

**İspat:** Bir teoremin doğru önerme olduğunu göstermeye **teoremin ispatlanması** denir.

$p \Rightarrow q$ teoreminde p önermesi doğru olduğundan teoremi ispatlamak için q önermesinin doğru olduğunu göstermek gereklidir. Teorem ispatlanırken teoremde verilenlerden (hipotezlerden), daha önce ispatlanmış teoremlerden, tanımlardan ve aksiyomlardan yararlanılır.

**Örnek:**

Teorem:"ABC üçgeni eşkenar üçgen ise ABC üçgeninin tüm iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir."

Yukarıda verilen teoremi $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade ederek teoremin hipotezini ve hükmünü belirtiniz.

**Çözüm:**

p: "ABC üçgeni eşkenar üçgendir." ve q: " ABC üçgeninin tüm iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir." olarak alınırsa verilen teorem $p \Rightarrow q$ şeklinde ifade edilmiş olur. Bu durumda teoremin hipotezi p : "ABC üçgeni eşkenar üçgendir." önermesi olurken hükmü q: "ABC üçgeninin tüm iç açılarının ölçüleri birbirine eşittir." önermesi olur.

**Küme Kavramı**

İyi tanımlanmış, birbirinden farklı nesneler topluluğuna **küme** denir.

Buradaki nesneler soyut ya da somut olabilir.

Kümeyi oluşturan nesnelerin veya sembollerin her birine kümenin elemanları adı verilir.

Kümeler genellikle büyük harflerle gösterilir.

- a, A kümesinin elemanı ise bu durum $\mathbf{a \in A}$ ile gösterilir ve **a elemanıdır A** diye okunur.
- a, A kümesinin elemanı değil ise $\mathbf{a \notin A}$ şeklinde gösterilir ve bu durum **a elemanı değildir A** diye okunur.
- $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir A kümesinin eleman sayısı $s(A) = n$ olarak ifade edilir.

**Kümelerin Gösterimi**

I. **Liste Yöntemi ile Gösterim**

Kümeyi oluşturan bütün elemanların { } parantezinin içerisinde aralarına virgül konularak gösterilmesidir.

II. **Venn Şeması Yöntemi ile Gösterim**

Kümeyi oluşturan bütün elemanların kapalı bir eğri içerisinde önüne nokta konularak gösterilmesidir.

III. **Ortak Özellik Yöntemi ile Gösterim**

Genellikle eleman sayıları çok olan kümelerin gösterilmesinde kullanılır. Kümenin bütün elemanlarının sahip olduğu ortak bir özellik varsa bu özelliğin matematiksel veya sözel bir ifade ile gösterilmesidir.

- A = {x | x çift rakam} ifadesi ortak özellik yöntemi ile yapılan bir gösterimdir.
- Kullanılan ‘’|’’ sembolü “öyle ki” anlamına gelir. Küme içerisinde kullanılan değişkenin hemen ardından yazılır.
- “|” sembolü yerine “ : ” sembolü de kullanılabilir.

**Sonlu Küme – Sonsuz Küme ve Evrensel Küme**

**Sonlu Küme :** Eleman sayıları bir doğal sayı ile gösterilebilen kümelere **sonlu küme** denir.

**Sonlu Küme :** Sonlu olmayan kümelere de **sonsuz küme** denir.

**Evrensel Küme :** Üzerinde işlem yapılan, tüm kümeleri içinde bulunduracak şekilde seçilen kümeye **evrensel küme** adı verilir. Evrensel küme **E** ile gösterilir.

**Boş Küme**

Elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir.

Boş kümenin gösterimi ∅ olup liste yöntemi ile gösterimi { } biçimindedir.

Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır.

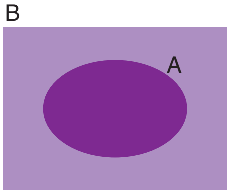
**DİKKAT**

{∅} ve {{ }} kümeleri, birer elemanlı kümeler olduğu için boş küme değildir.

A kümesinin her elemanı aynı zamanda B kümesinin de elemanı ise **A kümesi B kümesinin alt kümesidir** denir ve $A \subset B$ ile gösterilir.

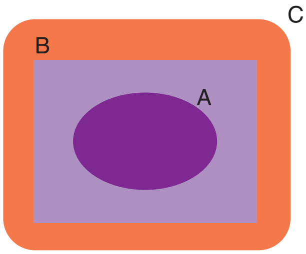
A kümesi B kümesinin alt kümesi iken A'nın elemanları ile B'nin elemanlarının aynı olma durumu varsa $A \subseteq B$ ile gösterilir. B kümesi A kümesini kapsar. Bu ifade ise $B \supset A$ ile gösterilir.

- Venn şeması ile şekildeki gibi gösterilir.




- Boş küme her kümenin alt kümesidir. $\varnothing \subseteq A$ dir.
- Her küme kendisinin alt kümesidir. $A \subseteq A$ dir.
- A, B ve C kümeleri için $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ ise $A \subseteq C$ dir.

  Bu özellik Venn şeması ile şekildeki gibi gösterilebilir.




- Bir kümenin alt kümelerinde a veya b bulunur ifadesi a'nın bulunup b'nin bulunmadığı, b'nin bulunup a'nın bulunmadığı ve a ve b birlikte bulunduğu üç durumu anlatır.
- Bir kümenin alt kümelerinde a ya da b den yalnız biri bulunur ifadesi a'nın bulunup b'nin bulunmadığı, b'nin bulunup a'nın bulunmadığı iki durumu anlatır. a ya da b bulunur ifadesi ile aynıdır.

**Alt Küme Sayısı**

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı $2^n$ formülü ile hesaplanır.

Bir kümenin kendisi dışındaki alt kümelerine **öz alt kümesi** denir.

Bir kümenin öz alt kümelerinin sayısı $2^n - 1$ ile hesaplanır.

| | Alt Kümeler | Alt Küme Sayısı |
|---|---|---|
| A = { } | { } | 1 |
| B = {a} | { }, {a} | 2 |
| C = {a, b} | { },{a},{b},{a, b} | 4 |
| D = {a, b, c} | { },{a},{b},{c},{a, b},{a, c},{b, c},{a, b, c} | 8 |
| … | … | … |
| S(V) = n | … | $2^n$ |

**İKİ KÜMENİN EŞİTLİĞİ**

A ve B iki küme olsun. A ve B kümelerinin tüm elemanları aynı ise bu kümelere **eşit kümeler** denir.

Bu durum **A = B** şeklinde gösterilir.
Eğer bu kümeler birbirine eşit değilse bu durum $\mathbf{A \neq B}$ şeklinde gösterilir.

A ve B kümelerinin birbirine eşit kümeler olması ancak ve ancak bu kümelerin birbirlerinin alt kümesi olmasıyla mümkündür. Bu durum $\mathbf{(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow (A = B)}$ şeklinde ifade edilir.

## KÜMELERDE KESİŞİM VE BİRLEŞİM İŞLEMİ



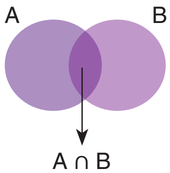
### Kümelerde Kesişim İşlemi

A ve B gibi iki kümenin tüm ortak elemanlarından oluşan kümeye A ve B kümelerinin **kesişim kümesi** adı verilir. Kesişim işlemi " $\cap$ " sembolü ile gösterilir.

- A ve B kümelerinin kesişim kümesi, ortak özellik yöntemi ile

  $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \in B \}$ şeklinde ifade edilir.

- A ve B kümelerinin kesişim kümesi, Venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir.




### Kümelerde Kesişim İşleminin Özellikleri

1. $A \cap A = A$ olur. Bir kümenin kendisi ile kesişimi yine kendisidir. Bu özelliğe **kesişim işleminin tek kuvvet özelliği** denir.
2. $A \cap B = B \cap A$ olur. Bu özelliğe **kesişim işleminin değişme özelliği** denir.
3. $A \cap \emptyset = \emptyset$ olur. Boş kümede eleman bulunmadığı için herhangi bir A kümesinin boş küme ile kesişimi yine boş kümedir.
4. $A \subset B$ ise $A \cap B = A$ olur. A kümesindeki her eleman aynı zamanda B kümesinde de vardır. Dolayısıyla kesişimleri A kümesidir.
5. $A \cap ( B \cap C ) = ( A \cap B ) \cap C$ olur. Bu özelliğe **kesişim işleminin birleşme özelliği** denir.

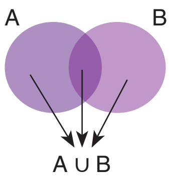
### Kümelerde Birleşim İşlemi

A ve B gibi iki kümenin bütün elemanlarından oluşan kümeye, A ve B kümelerinin **birleşim kümesi** adı verilir. Birleşim işlemi " $\cup$ " sembolü ile gösterilir.

A ve B kümelerinin birleşim kümesi, ortak özellik yöntemi ile

$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ veya } x \in B \}$ şeklinde ifade edilir.

A ve B kümelerinin birleşim kümesi, Venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterilir.




$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$

### Kümelerde Birleşim İşleminin Özellikleri

1. $A \cup A = A$ olur. Bir kümenin kendisi ile birleşimi yine kendisidir. Bu özelliğe **birleşim işleminin tek kuvvet özelliği** denir.
2. $A \cup B = B \cup A$ olur. Bu özelliğe **birleşim işleminin değişme özelliği** denir.
3. $A \cup \emptyset = A$ olur. Boş kümede eleman bulunmadığı için herhangi bir A kümesinin boş küme ile birleşimi yine A kümesidir.
4. $A \subset B$ ise $A \cup B = B$ olur. A kümesindeki her eleman aynı zamanda B kümesinde de vardır. Dolayısıyla birleşimleri B kümesidir.
5. $A \cup ( B \cup C ) = ( A \cup B ) \cup C$ olur. Bu özelliğe **birleşim işleminin birleşme özelliği** denir.
6. $A \cap ( B \cup C ) = ( A \cap B ) \cup ( A \cap C )$ özelliğine **kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine soldan dağılma özelliği** denir.
7. $A \cup ( B \cap C ) = ( A \cup B ) \cap ( A \cup C )$ özelliğine **birleşim işleminin kesişim işlemi üzerine soldan dağılma özelliği** denir.

**Kümelerde Fark İşlemi**

A ve B herhangi iki küme olmak üzere A kümesinde olup B kümesinde olmayan tüm elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin B kümesinden farkı** adı verilir.

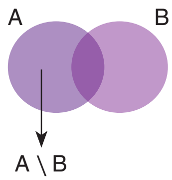
**A – B** veya **A \ B** ile gösterilir.

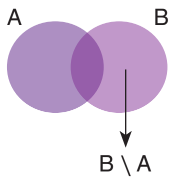
- A ve B kümelerinin fark kümesi, ortak özellik yöntemi ile

  $A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \notin B \}$

  $B \setminus A = \{ x \mid x \in B \text{ ve } x \notin A \}$ şeklinde ifade edilir.

- A \ B ve B \ A fark kümelerinin Venn şeması ile gösterimi aşağıdaki gibidir.




**Kümelerde Fark İşleminin Özellikleri**

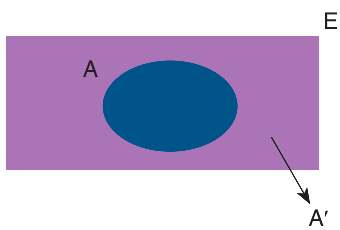
E evrensel kümesine ait A ve B kümeleri için

1. $A \neq B$ iken $A \setminus B \neq B \setminus A$ olur. Fark işleminin değişme özelliği yoktur.
2. $A \setminus A = \emptyset$ olur. Bir kümenin kendisinden farkı alınırsa elde edilen kümenin elemanı kalmaz. Dolayısıyla sonuç boş kümedir.
3. $A \setminus E = \emptyset$ olur. Evrensel kümenin elemanları içinde A kümesinin elemanları da olduğundan A'nın E'den farkı alınırsa elde edilen kümenin elemanı kalmaz. Dolayısıyla sonuç boş kümedir.
4. $A \setminus \emptyset = A$ olur. Boş kümenin elemanı olmadığından A kümesinin boş kümeden farkı yine A kümesidir.
5. A ve B eşit iki küme ise $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$ olur.
6. $A \cap B = \emptyset$ ise A ve B kümelerine **ayrık kümeler** denir.
   A ve B ayrık kümeler ise $A \setminus B = A$ ve $B \setminus A = B$ olur.

**Kümelerde Tümleme İşlemi**

E evrensel kümesine ait bir A kümesi için A kümesinde bulunmayıp E kümesinde bulunan tüm elemanların oluşturduğu kümeye **A kümesinin tümleyeni** adı verilir ve **A′** ile gösterilir.

- Ortak özellik yöntemiyle $A' = \{ x \mid x \notin A \text{ ve } x \in E \}$ olarak ifade edilir.
- Venn şeması ile gösterimi yandaki gibidir.




Kümelerde Fark İşleminin Özellikleri

1. $(A')' = A$
2. $A \cap A' = \emptyset$
3. $A \cup A' = E$
4. $A - A' = A$
5. $E' = \emptyset$ ve $\emptyset' = E$
6. $E - A = A'$ ve $A - E = \emptyset$
7. $s(A \cup A') = s(E)$

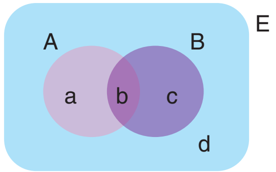
Kümelerde birleşim, kesişim, fark ve tümleme işlemleri ve bu işlemlerin özellikleri, gerçek hayat durumlarının modellemesini içeren problemlerin çözümünde kullanılabilir.

A kümesi A sporunu yapanların kümesi,

B kümesi B sporunu yapanların kümesi,

gruptaki tüm kişilerin oluşturduğu küme E,

a, b, c, d bulundukları bölgedeki eleman sayılarını temsil ediyor olsun.




| | |
|---|---|
| A sporunu yapanların sayısı | a + b |
| B sporunu yapanların sayısı | b + c |
| Sadece A sporunu yapanların sayısı | a |
| Sadece B sporunu yapanların sayısı | c |
| Her iki sporu yapanların sayısı | b |
| Bu iki sporu yapmayanların sayısı | d |
| Bu sporlardan en çok birini yapanların sayısı | a + c + d |
| Bu sporlardan en az birini yapanların sayısı | a + b + c |
| A sporunu yapmayanların sayısı | c + d |
| B sporunu yapmayanların sayısı | a + d |
| Bu sporlardan sadece birini yapanların sayısı | a + c |
| Gruptaki tüm kişilerin sayısı | a + b + c + d |

**DİKKAT**

Küme problemlerinde, kesişimi boş küme olan kümeler verildiğinde problem tablo yapılarak çözülür.

**Örnek:**

Gözlüklü ve gözlüksüz öğrencilerin bulunduğu bir sınıfla ilgili aşağıdaki bilgiler verilmektedir.

I. Gözlüklü kız öğrenci sayısı gözlüksüz erkek öğrenci sayısının 2 katıdır.

II. Gözlüklü erkek öğrenci sayısı gözlüksüz erkek öğrenci sayısından 3 eksiktir.

III. Gözlüksüz kız öğrenci sayısı gözlüklü kız öğrencilerin sayısının yarısından 3 fazladır.

IV. Gözlüksüz veya erkek öğrenci sayısı 21’dir.

**Bu bilgilere göre sınıf mevcudunu hesaplayınız.**

**Çözüm**

Gözlüksüz erkek öğrenci sayısına x denilirse gözlüklü kız öğrenci sayısı 2x, gözlüklü erkek öğrenci sayısı (x – 3) ve gözlüksüz kız öğrenci sayısı (x + 3) olur.

Bu bilgiler tablo yardımı ile aşağıdaki gibi gösterilir.

| | GÖZLÜKLÜ | GÖZLÜKSÜZ |
|---|---|---|
| KIZ | 2x | x + 3 |
| ERKEK | x – 3 | x |

Gözlüksüz veya erkek öğrenci sayısı 21 olarak verildiğine göre

$x + 3 + x + x - 3 = 21$

$3x = 21$

$x = 7$ olur.

Sınıf mevcudu ise $2x + x + 3 + x - 3 + x = 5x = 35$ olur.

## SIRALI İKİLİLER

Her ikisi de boş kümeden farklı A ve B kümeleri için A kümesinden bir a elemanı, B kümesinden bir b elemanı alınarak elde edilen ve (a, b) şeklinde gösterilen ifadeye sıralı ikili adı verilir. Bu gösterimde a'ya **birinci bileşen**, b'ye ise **ikinci bileşen** adı verilir.

a ve b birbirinden farklı ise (a, b) ve (b, a) sıralı ikilileri de birbirinden farklıdır. Sıralı ikililer yazılırken bileşenlerin yazılış sırası önemlidir.

- (a, b) ve (c, d) sıralı ikilileri birbirine eşit ise bu durum (a, b) = (c, d) şeklinde gösterilir.

Bu eşitlikte a = c ve b = d dir.

## KARTEZYEN ÇARPIM

Birinci bileşeni bir A kümesinden, ikinci bileşeni ise bir B kümesinden alınarak oluşturulan tüm sıralı ikililerin kümesine **A kartezyen çarpım B kümesi** denir ve **AxB** ile gösterilir.

AxB kümesinin ortak özellik yöntemi ile gösterimi

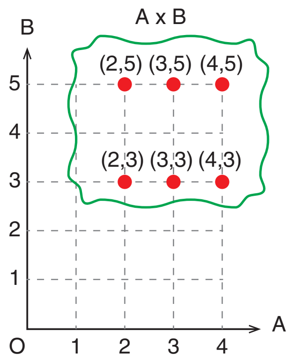
AxB = {(a, b) | a ∈ A ve b ∈ B} dir.

### Kartezyen Çarpımın Özellikleri

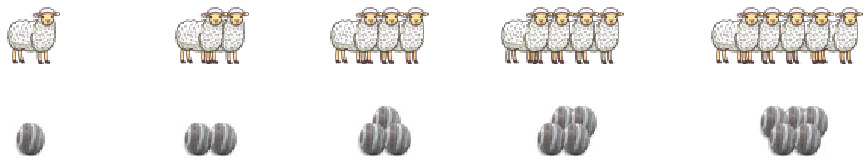
1. A ve B birbirinden farklı iki küme ise AxB ≠ BxA olur. Kümeler yer değiştirdiğinde farklı sıralı ikililer oluşacağı için kartezyen çarpımları da birbirinden farklı kümeler oluştururlar.
2. Ax∅ = ∅xA = ∅ olur. Boş kümenin herhangi bir elemanı olmadığı için kartezyen çarpımının sonucu da yine boş küme bulunur.
3. A ve B herhangi iki küme olmak üzere s(A) = a ve s(B) = b ise s(AxB) = a · b olur.

Kartezyen çarpım grafiğinin dik koordinat sisteminde gösterimi için AxB kümesini oluşturan sıralı ikililerin birinci bileşenleri x ekseni üzerinde, ikinci bileşenleri ise y ekseni üzerinde bulunur. x eksenindeki bileşenlere düşey ve kesikli, y eksenindeki bileşenlere yatay ve kesikli doğrular çizilip kesiştiği noktalar işaretlenir. Bu şekilde elde edilen noktaların oluşturduğu grafik AxB 'nin grafiğidir.

A = {2, 3, 4} ve B = {3, 5} kümeleri veriliyor.



Bir kümenin elemanlarını, pozitif tam sayılar kümesinin elemanları ile sıralı olarak bire bir eşleyerek bulma işlemine **bire bir eşleme yoluyla sayma** denir.



### TOPLAMA YOLUYLA SAYMA

Sonlu ve ayrık kümelerin birleşiminin eleman sayısını bulmak için bu kümelerin eleman sayıları toplanır. Bu yöntemle saymaya **toplama yoluyla sayma** denir.

A ile B sonlu ve ayrık iki küme olmak üzere $s(A \cup B) = s(A) + s(B)$ olur.

### ÇARPMA YOLUYLA SAYMA

AxB kümesinin elemanları olan (x, y) sıralı ikililerinin sayısı $s(A) = m$ ve $s(B) = n$ olmak üzere $m \cdot n$ adet olur. Sıralı ikililerin sayısını bu şekilde bulma işlemine **çarpma yoluyla sayma** denir.

### SAYMANIN TEMEL İLKESİ

k tane olayın gerçekleştiği bir olaylar dizisinde birinci olay $n_1$ farklı biçimde, ikinci olay $n_2$ farklı biçimde ve bu şekilde devam edildiğinde k'ninci olay $n_k$ farklı biçimde gerçekleşiyorsa bu olayların tamamı $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ çarpımı kadar farklı biçimde gerçekleşir.

**Örnek:**

a) **4 mektup, 3 posta kutusuna kaç farklı şekilde atılıp postalanabilir?**

b) **3 mektup, 4 posta kutusuna bir posta kutusunda en çok bir mektup olması koşuluyla kaç farklı şekilde atılıp postalanabilir?**

### ÇÖZÜM

a) Birinci mektubun atılabileceği posta kutusu 3 farklı şekilde, ikinci mektubun atılabileceği posta kutusu 3 farklı şekilde, ..., dördüncü mektubun atılabileceği posta kutusu 3 farklı şekilde seçilebilir.

Bu durumda 4 mektup, 3 posta kutusuna $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ farklı şekilde atılarak postalanabilir.

b) Birinci mektup 4 posta kutusundan birine, ikinci mektup geriye kalan 3 posta kutusundan birine, üçüncü mektup ise geriye kalan 2 posta kutusundan birine atılarak postalanabilir.

Buradan saymanın çarpma kuralı gereği $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ bulunur.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere 1'den n'ye kadar olan ardışık tam sayıların çarpımına **n faktöriyel** (çarpansal) denir ve **n!** ile gösterilir.

Buna göre

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ olur.
- $0! = 1$ ve $1! = 1$ olarak kabul edilir.

Birbirinden farklı n tane nesne yan yana $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ farklı şekilde sıralanabilir.

| Faktöriyel | Değeri |
|---|---|
| 0! | 1 |
| 1! | 1 |
| 2! | $1 \cdot 2 = 2$ |
| 3! | $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ |
| 4! | $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ |
| 5! | $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ |
| ⋮ | ⋮ |
| n! | $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n$ |

Çift sayılar

**Dikkat:**

- $n! = n \cdot (n-1)!$
- Faktöriyel olarak verilen sayılarda toplama ve çıkarma işlemleri yapılırken sayı değeri küçük olan faktöriyele göre düzenlenip ortak paranteze alınarak işlemler yapılır.

**Örnek:**

$\dfrac{9!+10!}{9!-8!}$ işleminin sonucunu bulunuz.

**Çözüm:**

$$\frac{9!+10 \cdot 9!}{9 \cdot 8!-8!} = \frac{9!(1+10)}{8!(9-1)} = \frac{9! \cdot 11}{8! \cdot 8}$$

$$= \frac{9 \cdot 8! \cdot 11}{8! \cdot 8} = \frac{9 \cdot 11}{8} = \frac{99}{8}$$

- $n! = a^k \cdot t$ ifadesinde a asal sayısının en fazla kaç tane olduğunu bulmak için n sayısı kalanı a dan küçük olana kadar, a sayısına bölünür. Bölümler toplamı k'nın alabileceği en büyük değeri verir.

**Örnek:**

k ve A doğal sayı olmak üzere

$29! = A \cdot 3^k$ ifadesinde k sayısının en fazla kaç olabileceğini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\begin{array}{l|l} 29 & 3 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{l|l} 9 & 3 \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{l|l} 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$
$$1$$

$9 + 3 + 1 = 13$ olur.

n ve r birer doğal sayı ve $r \leq n$ olmak üzere n elemanlı bir kümenin birbirinden farklı r tane elemanından oluşan dizilişlerin her birine **n'nin r'li bir permütasyonu** denir.

- Permütasyon sayısı ile farklı dizilişlerin sayısı kastedilir.

A = {a, b, c} kümesinin elemanlarını ikişerli seçerek yapılabilecek tüm sıralı ikililer;
(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (b, c), (c, b) şeklindedir. Üç elemanlı bir kümenin ikili permütasyonlarının sayısı 6'dır.
n elemanlı bir kümenin r'li permütasyonlarının sayısı **P(n, r)** ile gösterilir ve

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- $P(n, 0) = \frac{n!}{(n-0)!} = 1$
- $P(n, 1) = \frac{n!}{(n-1)!} = n$
- $P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

**Örnek:**

$5 \cdot P(8, 3) = 8 \cdot P(n, 2)$ **denklemini sağlayan n pozitif tam sayısını bulunuz.**

**Çözüm:**

$$5 \cdot P(8, 3) = 8 \cdot P(n, 2)$$

$$5 \cdot \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$5 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 8 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}$$

$$5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 = 8 \cdot n \cdot (n-1)$$

$$15 \cdot 14 = n \cdot (n-1)$$

$$n = 15 \text{ olur.}$$

**Örnek:**

Elemanları iki basamaklı, birbirinden farklı, en küçük 6 tane asal sayıdan oluşan bir A kümesinin

**a) Üçlü permütasyonlarından kaçında 11 sayısının olmadığını,**

**b) Üçlü permütasyonlarından kaçında 11 sayısının olduğunu bulunuz.**

**Çözüm:**

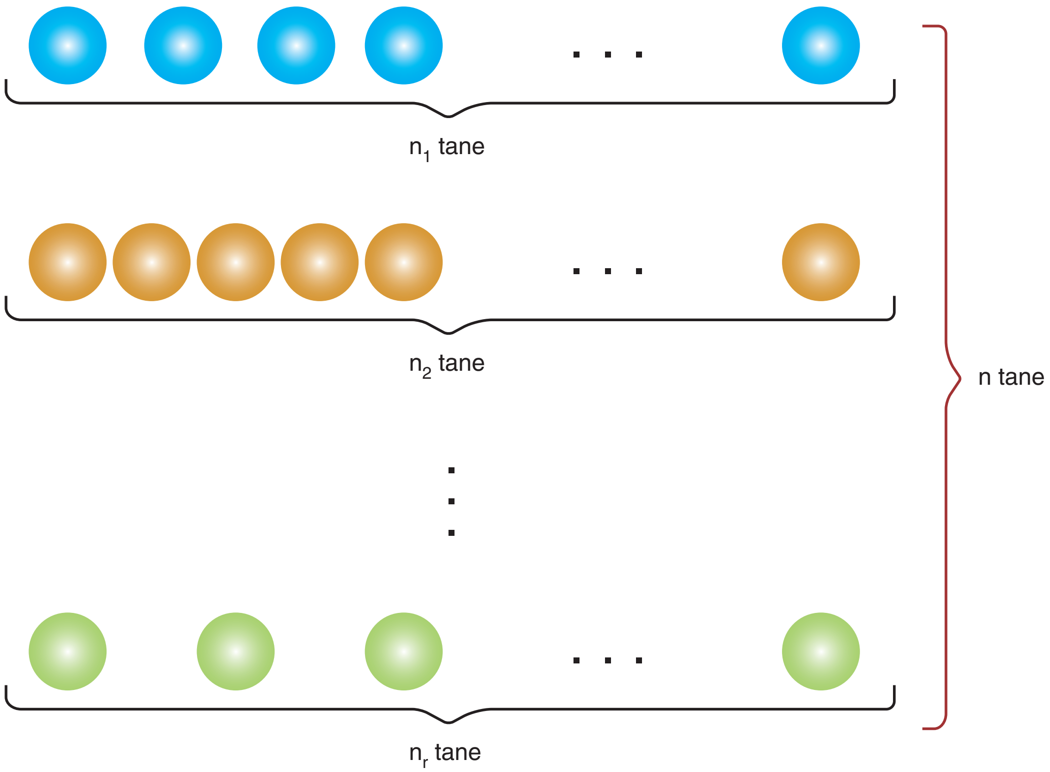
a) Koşula uygun asal sayılar 11, 13, 17, 19, 23 ve 29 dur. Bu durumda A kümesi

A = {11, 13, 17, 19, 23, 29} olarak yazılır. 11 sayısı üçlü permütasyonların içinde olamayacağından geriye 5 eleman kalır. Böylece çözüm, $P(5, 3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ olur.

b) 11 sayısının bulunduğu üçlü permütasyonlarının sayısını hesaplamak için A kümesinin tüm üçlü permütasyonlarının sayısından 11 sayısının bulunmadığı üçlü permütasyonların sayısı çıkarılır.

Böylece çözüm, $P(6, 3) - P(5, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 3 = 120 - 60 = 60$ olur.

$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$ olmak üzere n tane nesnenin $n_1$ tanesi özdeş (aynı büyüklük ve özellikte), $n_2$ tanesi özdeş, ..., $n_r$ tanesi özdeş ise bu n tane nesnenin farklı permütasyonlarının sayısı $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_r!}$ ile bulunur.




**Örnek:**

ELEK kelimesinin harflerinden herhangi 3'ünün kaç farklı şekilde sıralanabileceğini bulunuz.

**Çözüm:**

ELEK kelimesinden elde edilebilecek 3 harfli sıralanışların sayısı üç farklı durumda incelenir.

- E harflerinden biri kullanılmazsa kalan L, E, K harfleriyle $3! = 6$,
- L harfi kullanılmazsa kalan E, E, K harfleriyle $\dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = \dfrac{6}{2} = 3$,
- K harfi kullanılmazsa kalan E, L, E harfleriyle $\dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = \dfrac{6}{2} = 3$

farklı sıralanış elde edilir.

Buradan yazılabilecek tüm sıralanışların sayısı, $6 + 3 + 3 = 12$ olur.

**Kombinasyon Kavramı**

A kümesinin r elemanlı alt kümelerinin her birine **A kümesinin r'li kombinasyonu** denir.

$n, r \in \mathbb{N}$ , $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı (kısaca r'li)

kombinasyonlarının sayısı **C(n, r)** ya da $\binom{n}{r}$ ile gösterilir.

$C(n,r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ olur.

**Kombinasyonun Özellikleri**

- $n, r \in \mathbb{N}$ , $n \geq r$ olmak üzere n elemanlı bir A kümesinin r elemanlı permütasyonlarının sayısı ile r elemanlı kombinasyonlarının sayısı arasında $P(n, r) = C(n, r) \cdot r!$ eşitliği vardır.
- n elemanlı bir kümenin 0 elemanlı alt küme sayısı $\binom{n}{0} = 1$'dir.
- n elemanlı bir kümenin 1 elemanlı alt küme sayısı $\binom{n}{1} = n$'dir.
- n elemanlı bir kümenin n elemanlı alt küme sayısı $\binom{n}{n} = 1$'dir.
- $n, r \in \mathbb{N}$ , $n \geq r$ olmak üzere $C(n, r) = C(n, n - r)$ eşitliği vardır.
- $n, r \in \mathbb{N}$ , $n \geq r + 1$ olmak üzere $C(n, r) + C(n, r + 1) = C(n + 1, r + 1)$ eşitliği vardır.
- n, bir kümenin eleman sayısı olmak üzere $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ olur.

**Örnek:**

$A = \{a, b, c, d, 1, x, y\}$ kümesi veriliyor.

a) **A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında x elemanı bulunur?**

b) **A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında y elemanı bulunmaz?**

c) **A kümesinin 3 elemanlı alt kümelerinin kaçında x elemanı bulunup y elemanı bulunmaz?**

**Çözüm:**

a) Oluşturulabilecek 3 elemanlı alt kümelerinin elemanlarından biri x olacağından diğer 2'si $\binom{6}{2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ farklı şekilde seçilebildiğinden A kümesinin x elemanını içeren 3 elemanlı alt kümelerin sayısı15 olur.

b) Oluşturulabilecek 3 elemanlı alt kümelerinin elemanları arasında y bulunmayacağından 3'ü, $\binom{6}{3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ farklı şekilde seçilebildiğinden A kümesinin y elemanını içermeyen 3 elemanlı alt kümelerin sayısı 20 olur.

c) Oluşturulabilecek 3 elemanlı alt kümelerin elemanları arasında x bulunup y bulunmayacağından $\binom{5}{2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ farklı şekilde seçilebildiğinden A kümesinin x elemanını içeren ve y elemanını içermeyen 3 elemanlı alt kümelerinin sayısı 10 olur.

A kümesinin r elemanlı alt kümelerinin her birine **A kümesinin r'li kombinasyonu** denir.

$n, r \in \mathbb{N}$ , $n \geq r$ olmak üzere $C(n, r) = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$ ile hesaplanır.

Problemlerde;

- Kombinasyon sayısı ile farklı gruplamaların sayısı kastedilir.
- Kombinasyon sayısının hesaplanmasında kümenin elemanlarının sıralama sayısı değil

bu elemanların seçilebilme sayısı önemlidir.

**Örnek:**

6 matematik, 4 fizik öğretmeni arasından en fazla 2 fizik öğretmeninin bulunduğu 4 kişilik bir komisyonun kaç farklı şekilde seçilebileceğini bulunuz.

**Çözüm:**

4 kişilik komisyonda en fazla 2 fizik öğretmeni bulunması; bu komisyonda 2 fizik öğretmeninin bulunması, 1 fizik öğretmeninin bulunması ya da hiçbir fizik öğretmeninin bulunmaması durumunda olabilir. Bu üç durum aşağıdaki gibi incelenir.

• 2'si fizik öğretmeni ise diğer 2'si matematik öğretmeni olmalıdır.

Bu seçim,

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2 \cdot 1 \cdot 2!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} = 6 \cdot 15 = 90 \text{ farklı şekildedir.}$$

• 1'i fizik öğretmeni ise diğer 3'ü matematik öğretmeni olmalıdır.

Bu seçim,

$$\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3!}{1 \cdot 3!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 4 \cdot 20 = 80 \text{ farklı şekildedir.}$$

• Fizik öğretmeni yoksa 4'ü de matematik öğretmeni olmalıdır.

Bu seçim,

$$\binom{4}{0} \cdot \binom{6}{4} = \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 1 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} = 1 \cdot 15 = 15 \text{ farklı şekildedir.}$$

Buradan 6 matematik, 4 fizik öğretmeninin olduğu bir okulda en fazla 2 fizik öğretmeninin olduğu 4 kişilik bir komisyon 90 + 80 + 15 = 185 farklı şekilde seçilebilir.

- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ olmak üzere herhangi üçü doğrusal olmayan n tane farklı noktanın herhangi iki tanesinden farklı bir doğru geçer, bu noktalardan geçen toplam doğru sayısı **C(n, 2)** olur.
- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ olmak üzere herhangi üçü doğrusal olmayan n tane farklı nokta içinden seçilecek herhangi üç nokta farklı bir üçgen oluşturur, bu noktalardan oluşturulabilecek toplam üçgen sayısı **C(n, 3)** olur.
- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ olmak üzere herhangi üçü doğrusal olmayan n tane farklı nokta içinden seçilecek herhangi dört nokta farklı bir dörtgen oluşturur, bu noktalardan oluşturulabilecek toplam dörtgen sayısı **C(n, 4)** olur.
- $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r$ olmak üzere herhangi üçü doğrusal olmayan n tane farklı nokta içinden seçilecek herhangi r nokta farklı bir r-gen oluşturur, bu noktalardan oluşturulabilecek toplam r-gen sayısı **C(n, r)** olur.

**Düzlemde iki doğru;**

- Paralel ise hiçbir noktada kesişmez.
- Çakışık ise sonsuz noktada kesişir.
- Paralel ya da çakışık olmayan iki doğru tek bir noktada kesişir.

- Aynı düzlemde bulunan ve farklı (çakışık olmayan) n tane doğru en çok **C(n, 2)** noktada kesişir.

**Düzlemde iki üçgen;**

- Hiçbir noktada kesişmeyebilir.
- Çakışık ise sonsuz noktada kesişir.
- Hiç kesişmeyen ya da çakışık olmayan iki üçgen en az bir en çok altı noktada kesişir.

- Aynı düzlemde bulunan ve farklı (çakışık olmayan) n tane üçgen en çok **6 · C(n, 2)** noktada kesişir.

**Düzlemde iki çokgen;**

- Hiçbir noktada kesişmeyebilir.
- Çakışık ise sonsuz noktada kesişir.
- Hiç kesişmeyen ya da çakışık olmayan iki çokgen en az bir en çok çokgenin kenar sayısının iki katı kadar noktada kesişir.

- Aynı düzlemde bulunan ve farklı (çakışık olmayan) r kenarlı n tane çokgen en çok **2 · r · C(n, 2)** noktada kesişir.

**Düzlemde iki çember;**

- Hiçbir noktada kesişmeyebilir.
- Çakışık ise sonsuz noktada kesişir.
- Hiç kesişmeyen ya da çakışık olmayan iki çember en az bir en çok iki noktada kesişir.

- Aynı düzlemde bulunan ve farklı (çakışık olmayan) n tane çember en çok **2 · C(n, 2)** noktada kesişir.

## Pascal Üçgeni

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

- Paskal üçgeninin tepesi bir elemanlıdır ve tepesinde 1 sayısı bulunur.
- Her satırdaki eleman sayısı bir önceki satırdaki eleman sayısından 1 fazladır.
- Her satır 1 ile başlayıp 1 ile biter. Diğer sayılar ise üst satırdaki kendine komşu olan iki sayının toplamıdır.
- Pascal üçgeninde her satır bu örüntüye bağlı olarak devam eder.

## Binom Açılımı

$x + y \neq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x + y)^n$ ifadesinin

$$(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{y} x^{n-o} y^{o}}_{\text{1. terim}} + \underbrace{\binom{n}{1} x^{n-1} \cdot y^{1}}_{\text{2. terim}} + \underbrace{\binom{n}{2} x^{n-2} \cdot y^{2}}_{\text{3. terim}} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n} x^{n-n} \cdot y^{n}}_{\text{(n+1). terim}}$$

şeklindeki açılımına **binom açılımı** denir.

- Baştan $(r + 1)$. terim aynı zamanda sondan $(n - r + 1)$. terimdir ($r \leq n$ ve $r \in N$).
- $(x + y)^n$ ifadesi x'in azalan kuvvetlerine göre açıldığında baştan $(r + 1)$. terim $\binom{n}{r} x^{n-r} \cdot y^{r}$ olur.

  $(x + y)^n$ açılımında katsayıları olan $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ ifadelerinin Pascal üçgenindeki karşılığı aşağıdaki gibidir.

| | Paskal Üçgeni | Binom Açılımının Katsayıları |
|---|---|---|
| $(x + y)^0 \longrightarrow$ | $1 \cdot 1$ | $\binom{0}{0}$ |
| $(x + y)^1 \longrightarrow$ | $1 \cdot x + 1 \cdot y$ | $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$ |
| $(x + y)^2 \longrightarrow$ | $1 \cdot x^2 + 2 \cdot xy + 1 \cdot y^2$ | $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$ |
| $(x + y)^3 \longrightarrow$ | $1 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2y + 3 \cdot xy^2 + 1 \cdot y^3$ | $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$ |
| $(x + y)^4 \longrightarrow$ | $1 \cdot x^4 + 4 \cdot x^3y + 6 \cdot x^2\ y^2 + 4 \cdot x\ y^3 + 1 \cdot y^4$ | $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$ |

$x + y \neq 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x + y)^n$ ifadesinin açılımında

- $(n + 1)$ terim vardır.
- Her bir terimdeki x ve y değişkenlerinin üsleri toplamı n'dir.
- Katsayılar toplamını bulmak için değişkenler yerine 1 sayısı yazılır.
- Sabit terimini bulmak için değişkenler yerine 0 sayısı yazılır.

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(x + y)^n$ ifadesinin x'in azalan kuvvetlerine göre açılımındaki

- Baştan $(r + 1)$'inci terim $\binom{n}{r}x^{n-r} \cdot y^r$ dir.
- Sondan $(r + 1)$'inci terim $\binom{n}{r}x^r \cdot y^{n-r}$ dir.
- n çift sayı ise $(x + y)^n$ açılımında ortadaki terim bulunurken $r = \frac{n}{2}$ alın**ır.**

  n tek sayı ise (n+1) çift sayı olacağından ortadaki terim olmayacaktır.

**Örnek:**

$(x - 2y)^4$ **ifadesinin açılımını bulunuz.**

**Çözüm:**

$(x - 2y)^4$ ifadesinin açılımı

$$\begin{aligned}(x-2y)^4 &= \binom{4}{0}\cdot x^4\cdot(2y)^0 - \binom{4}{1}\cdot x^3\cdot(2y)^1 + \binom{4}{2}\cdot x^2\cdot(2y)^2 - \binom{4}{3}\cdot x^1\cdot(2y)^3 + \binom{4}{4}\cdot x^0\cdot(2y)^4 \\ &= 1\cdot x^4 - 4\cdot x^3\cdot 2y + 6\cdot x^2\cdot 4y^2 - 4\cdot x\cdot 8y^3 + 1\cdot 16y^4 \\ &= x^4 - 8x^3y + 24x^2y^2 - 32xy^3 + 16y^4\end{aligned}$$

biçimindedir.

**Örnek:**

$(2x - 3y + 4)^7$ **ifadesinin açılımındaki katsayılar toplamını ve sabit terimi bulunuz.**

**Çözüm:**

Kat sayılar toplamı: $x = y = 1$ alınarak $(2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 4)^7 = 3^7$ olarak bulunur.

Sabit terim: $x = y = 0$ alınarak $(2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 4)^7 = 4^7$ olarak bulunur.

**DENEY :** Tekrarlanabilen, farklı tekrarında farklı sonuçlar elde edilebilen süreçlere birer **deney** denir.

Örneğin, havaya bir madenî para atma bir deneydir.

**ÇIKTI :** Bir deneyde elde edilen sonuçların her birine o deneye ait **çıktı** denir.

Örneğin, havaya atılan bir madenî para yere düştüğünde, üst yüzündeki "yazı" ya da "tura" sonuçları bu deneye ait çıktılardır.

**ÖRNEK UZAY :** Bir deneyin bütün çıktılarının kümesine o deneyin **örnek uzayı** denir.

Örnek uzay, genellikle **E** ile gösterilir. Örnek uzayın her bir alt kümesine **olay** denir.

**ÖRNEK :** Bir madenî paranın havaya atılması olayının örnek uzayı,

E = { Y , T }  ve s(E) = 2 olur.

**ÖRNEK :** İki madenî paranın havaya atılması olayının örnek uzayı,

E = { YY , YT , TY , TT } ve s(E) = 4 olur.

**ÖRNEK :** Üç madenî paranın havaya atılması olayının örnek uzayı,

E = { YYY , YYT , YTY , TYY , YTT , TYT , TTY , TTT } ve s(E) = 8 olur.

- n tane madenî paranın birlikte atılması deneyi ile bir madenî paranın n defa atılması deneyinin örnek uzayı aynıdır ve $2^n$ elemanlıdır.
- n tane zarın birlikte havaya atılması deneyi ile bir zarın n defa havaya atılması deneyinin örnek uzayı aynıdır ve $6^n$ elemanlıdır.

**AYRIK OLAYLAR :** Ortak elemanları olmayan kümeler ile temsil edilen olaylara **ayrık olaylar** denir.

- A ve B ayrık iki olay ise $A \cap B = \emptyset$ olur.

**AYRIK OLMAYAN OLAYLAR :** İki olayın ortak elemanı varsa bu olaylara **ayrık olmayan olaylar** denir.

- A ve B ayrık olmayan iki olay ise $A \cap B \neq \emptyset$ olur.

**BİR OLAYIN TÜMLEYENİ :** Bir A olayının çıktılarının dışında örnek uzayın bütün çıktılarını içeren olaya **A olayının tümleyeni** denir ve **A′** ile gösterilir.

**İMKÂNSIZ OLAY :** Gerçekleşmesi mümkün olmayan olaylara **imkânsız olay** denir.

**KESİN OLAY :** Gerçekleşmesi kesin olan olaylara **kesin olay** denir.

**Olasılık Kavramı**

Her bir çıktısının gelme şansı eşit olan örnek uzay E ve bu örnek uzayın bir olayı A olmak üzere A olayının gerçekleşme olasılığı **P(A)** ile gösterilir.

$$P(A) = \frac{\text{A olayının eleman sayısı}}{\text{Örnek uzayın eleman sayısı}} = \frac{s(A)}{s(E)}$$

- Bu durum eş olası olmayan olaylar için geçerli değildir.
- Bir A olayının olma olasılığı en az 0, en çok 1 olur.
  $0 \leq P(A) \leq 1$
- Olasılığı 0 olan olaylara **imkânsız olay**, 1 olan olaylara **kesin olay** denir.
- A ve B ayrık iki olay ise A veya B olaylarının olma olasılığı bu olayların olasılıkları toplamıdır.
  $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- A ve B ayrık olmayan iki olay ise $P(A \text{ veya } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ olur.
- Örnek uzayın herhangi bir A olayının tümleyeni A' olmak üzere $P(A) + P(A') = 1$ olur.

**Örnek:**

Bir torbadaki kırmızı, mavi ve sarı bilyelerle ilgili aşağıdaki bilgiler verilmiştir.

I. Torbadan çekilen bir bilyenin mavi olması olasılığı $\frac{2}{5}$'tir.
II. Kımızı bilye sayısı, mavi ve sarı bilyelerin sayıları toplamına eşittir.
III. Torbadaki sarı bilye sayısı 1 ile 5 arasındadır.

**Buna göre torbada en az kaç mavi bilye olduğunu bulunuz.**

**Çözüm:**

Kırmızı bilye sayısına k, mavi bilye sayısına m ve sarı bilye sayısına s denilirse toplam bilye sayısı k + m + s olur. Kırmızı bilye sayısı, mavi ve sarı bilyelerin sayıları toplamına eşit olduğundan k = m + s olur.

Mavi bilye çekme olasılığı, $\frac{2}{5}$ olduğundan

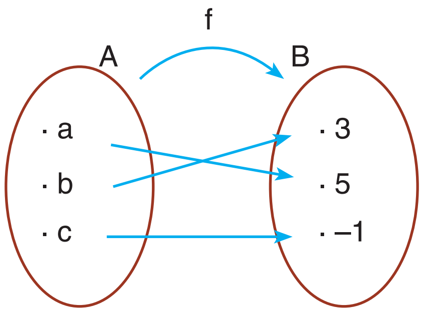
$$\frac{m}{k+m+s} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{m}{k+\underbrace{(m+s)}_{k}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{m}{2k} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5m = 4k \quad \text{olur.}$$

Buradan

m = 4 için k = 5 ve s = 1 olur. Fakat 1 < s < 5 olduğundan m = 4 olamaz.

m = 8 için k = 10 ve s = 2 olur. 1 < 2 < 5 olduğundan mavi bilye sayısı en az 8'dir.

- A ve B boş kümeden farklı iki küme olmak üzere A kümesinin her bir elemanını B kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen ilişkiye **A dan B ye tanımlı fonksiyon** denir.



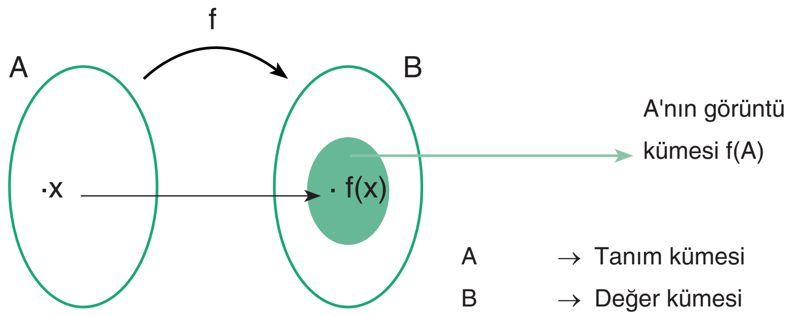

- A dan B ye tanımlanan f fonksiyonu f: $A \rightarrow B$ şeklinde gösterilir.

  $(x, y) \in f \Rightarrow y = f(x)$

  şeklinde yazılır. Bu gösterimde x **bağımsız değişken**, y **bağımlı değişken** olarak adlandırılır.

- Fonksiyonlar genellikle f, g, h gibi küçük harflerle gösterilir.

- f: $A \rightarrow B$ gösteriminde A kümesine **tanım kümesi**, B kümesine **değer kümesi** adı verilir. A kümesindeki elemanların B kümesinde eşleştiği elemanların oluşturduğu f(A) kümesine ise **görüntü kümesi** adı verilir.

- 


  A → Tanım kümesi
  B → Değer kümesi
  f(A) → Görüntü kümesi

- Görüntü kümesi her zaman değer kümesinin bir alt kümesidir. $f(A) \subseteq B$ şeklinde gösterilir.

**DİKKAT!**

- A ve B boş kümeden farklı birer küme ve s(A) = m ve s(B) = n olmak üzere A kümesinden B kümesine tanımlanabilecek fonksiyonların sayısı $n^m$ ifadesi ile hesaplanır.

# FONKSİYON SORULARI ÇÖZÜLÜRKEN DİKKAT EDİLMESİ GEREKENLER

f, A kümesinin elemanlarını B kümesinin elemanlarına götüren özel bir işlemdir. A kümesindeki her bir x elemanı B kümesinin bir ve yalnız bir y elemanına eşleniyorsa f işlemine bir fonksiyon deriz. f(x) = y gösteriminde x tanım kümesinin elemanı yani bağımsız değişken, y ise x'in aldığı değerlere göre değişen bağımlı değişkendir.

## DİKKAT

**Fonksiyon sorularında dikkat edilecekler;**

- A = (a,b] kümesi tanım kümesi olduğunda a elemanı kümeye dahil olmadığı için bir görüntüsü bulunmaz. Dolayısıyla f(a) = c ve f(b) = d olmak üzere görüntü kümesi B = (c, d] şeklinde oluşturulur.

- Tanım veya görüntü kümelerinden biri verildiğinde fonksiyon kuralı kullanılarak diğeri bulunabilir. Bunun için kümelerin sınırlarını oluşturan elemanların görüntülerini bulmak yeterlidir.

- Eğer fonksiyon örten değilse, çift dereceli terim içeriyorsa veya parçalı verilmişse kritik noktaların görüntüleri incelenmelidir.

- Bir fonksiyonun başka bir değişken cinsinden yazılması isteniyorsa fonksiyon kuralında x yerine istenen cebirsel ifade veya çokluk yazılarak sonuç bulunabilir.

- Fonksiyon kuralının katsayılarından biri verilmemişse varsa grafikten veya fonksiyona ait (x, f(x)) ikililerinden yararlanılarak katsayı elde edilebilir.

- Fonksiyon kuralı x yerine bir cebirsel ifadeye bağlı verildiyse (örneğin f(3x – 2), vb.) fonksiyonun istenilen a değeri için parantez içindeki cebirsel ifadeyi a sayısına eşitleyen sayı kullanılarak işlem yapılır. (Örneğin f(7) için x yerine 3 yazılarak devam edilir.)

- Fonksiyon kuralı x yerine bir cebirsel ifadeye bağlı verildiyse (örneğin f(3x – 2), vb.) fonksiyonun istenilen değeri için parantez içindeki cebirsel ifade eşitliğin diğer tarafında çarpanlara ayırma kullanılarak oluşturulmaya uygunsa f(x) kuralına ulaşılabilir. (Örneğin $f(3x - 2) = 9x^2 - 12x + 13 = (3x - 2)^2 + 9$ olduğundan $f(x) = x^2 + 9$ olarak bulunur.)

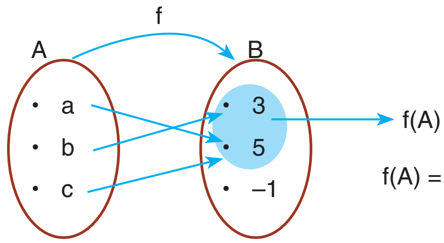
- Periyodik olarak değişen iki fonksiyonun birbirine bağlı verildiği sorularda (Örneğin f(x – a) – x · f(x) = 0)) parantez içindeki ifadelerin durumuna göre x = 1, x = a gibi değerler için denklem sistemleri oluşturulur ve yok etme metodu, yerine koyma metodu vb. kullanılarak çözüm elde edilir.

# İÇİNE, ÖRTEN, BİREBİR VE EŞİT FONKSİYONLAR



## 1. İÇİNE FONKSİYON

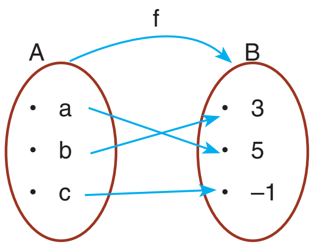
A ve B boş kümeden farklı kümeler olmak üzere; $f : A \longrightarrow B$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) \neq B$ olduğunda (değer kümesinde eşleşmemiş eleman kalıyorsa) f fonksiyonuna **içine fonksiyon** denir.




f(A) = {3, 5} ≠ {3, 5, –1} olup f içine fonsiyondur.

## 2. ÖRTEN FONKSİYON

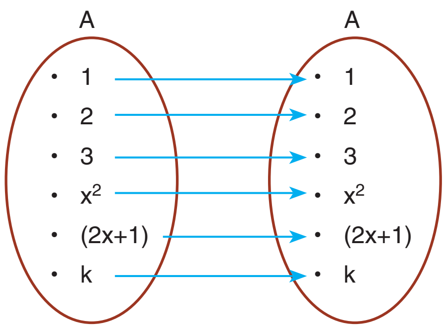
A ve B boş kümeden farklı birer küme olmak üzere; $f : A \longrightarrow B$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için $f(A) = B$ olduğunda (değer kümesindeki her elemana karşılık tanım kümesinde en az bir eleman varsa) f fonksiyonuna **örten fonksiyon** denir.




f(A) = {3, 5, –1} = B olup f örten fonksiyondur.

## 3. BİRE BİR FONKSİYON

Bir fonksiyonun tanım kümesindeki her bir elemanın görüntüsü tanım kümesindeki diğer elemanların görüntülerinden farklı ise bu fonksiyona **bire bir fonksiyon** denir.




## 4. EŞİT FONKSİYONLAR

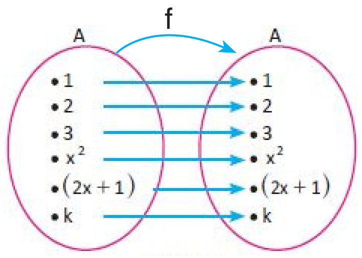
$f: A \rightarrow B$ ve $g: A \rightarrow B$ iki fonksiyon olmak üzere $\forall x \in A$ için $f(x) = g(x)$ oluyorsa f ve g fonksiyonlarına **eşit fonksiyonlar** denir ve $f = g$ biçiminde gösterilir.

**Birim Fonksiyon**

A boş kümeden farklı bir küme ve f: A → A olarak tanımlı bir fonksiyon olmak üzere;

$\forall x \in A$ için $f(x) = x$

oluyorsa f fonksiyonuna **birim (özdeşlik) fonksiyon** denir. Birim fonksiyon **I** sembolüyle gösterilir.



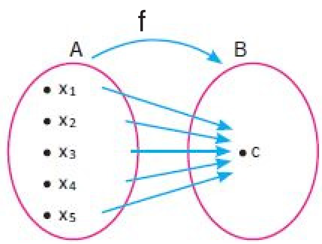

**NOT**

- Birim fonksiyonda tanım kümesine ait her eleman görüntü kümesinde yine kendisi ile eşlenir.
- Birim fonksiyonun grafiğinde I(x) = x olduğundan tüm elemanlar (x, x) biçimindedir.

**Sabit Fonksiyon**

f: A → B bir fonksiyon olmak üzere tanım kümesindeki bütün elemanlar değer kümesinde bulunan yalnız bir eleman ile eşleniyorsa f fonksiyonuna **sabit fonksiyon** denir.

- Sabit fonksiyon $c \in B$ olmak üzere $f(x) = c$ şeklinde gösterilir.




**NOT**

- Sabit fonksiyonun kuralında değişken (x) bulunmaz.
- Tanımlı olduğu aralıkta;

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

fonksiyonu için

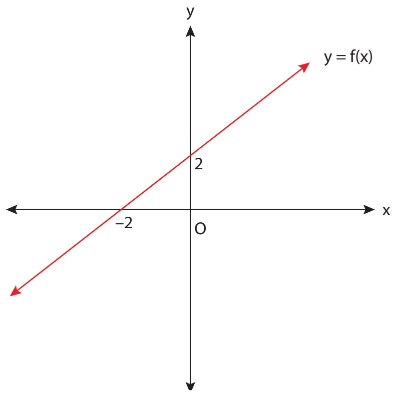
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

eşitliği sağlanıyorsa, f bir sabit fonksiyondur.

## DOĞRUSAL FONKSİYON

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $m, n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = mx + n$ şeklindeki fonksiyonlara **doğrusal fonksiyon** denir.

Örneğin, aşağıdaki dik koordinat düzleminde $f(x) = x + 2$ doğrusal fonksiyonunun grafiği verilmiştir.




### NOT

- $f(x) = mx + n$ doğrusal fonksiyon ifadesinde x'in katsayısı (m) doğrunun eğimini, sabit sayı (n) ise doğrunun y eksenini kestiği noktayı gösterir.
- Sabit fonksiyonun grafiği bir doğru belirtir.

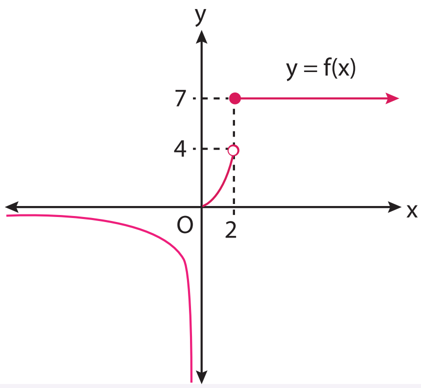
## PARÇALI FONKSİYON

Tanım kümesinin alt aralıklarında farklı kurallarla tanımlanan fonksiyonlara **parçalı tanımlı fonksiyon** denir.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 7, & 2 \leq x \end{cases}$$

kuralı ile verilen parçalı fonksiyonun grafiği yandaki dik koordinat düzleminde verilmiştir.




### NOT

Parçalı fonksiyonlar $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $c \in A$ olmak üzere

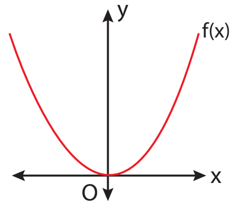
$$f(x) = \begin{cases} g(x), & a \leq x < c \\ h(x), & c \leq x \leq b \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir. a, b, c noktaları tanım aralıklarının uç noktaları olduğundan bu noktalara **kritik noktalar** denir.

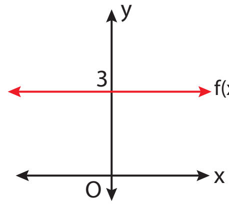
## 1) ÇİFT FONKSİYON

f : ℝ→ ℝ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere ∀ x ∈ ℝ için **f(– x) = f(x)** ise f fonksiyonuna **çift fonksiyon** denir.

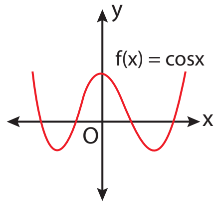
a) $f(x) = x^2$




b) f(x) = 3




c) f(x) = cosx



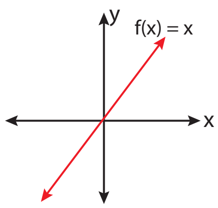

### NOT

- Çift fonksiyonların grafikleri **y eksenine** göre simetriktir.
- Çift fonksiyonların eşleştirme kurallarında değişkenin sadece **çift dereceli** terimleri bulunur.

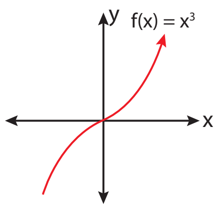
## 2) TEK FONKSİYON

f : ℝ→ ℝ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere ∀ x ∈ ℝ için **f(– x) = – f(x)** ise f fonksiyonuna **tek fonksiyon** denir.

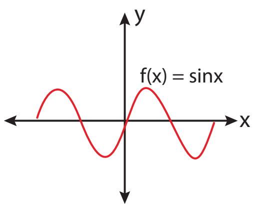
a) f(x) = x




b) $f(x) = x^3$




c) f(x) = sinx




### NOT

- Tek fonksiyonların grafikleri **orijine** göre simetriktir.
- Tek fonksiyonların eşleştirme kurallarında değişkenin sadece **tek dereceli** terimleri bulunur.

## 1. FONKSİYONLARDA TOPLAMA ve ÇIKARMA İŞLEMİ

$f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $A \cap B \neq \emptyset$ olsun.

$$f + g : A \cap B \to \mathbb{R}, \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$f - g : A \cap B \to \mathbb{R}, \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

biçiminde tanımlanmış $f + g$ fonksiyonu f ve g fonksiyonlarının toplamı, $f - g$ fonksiyonu ise f ve g fonksiyonlarının farkıdır.

**NOT**

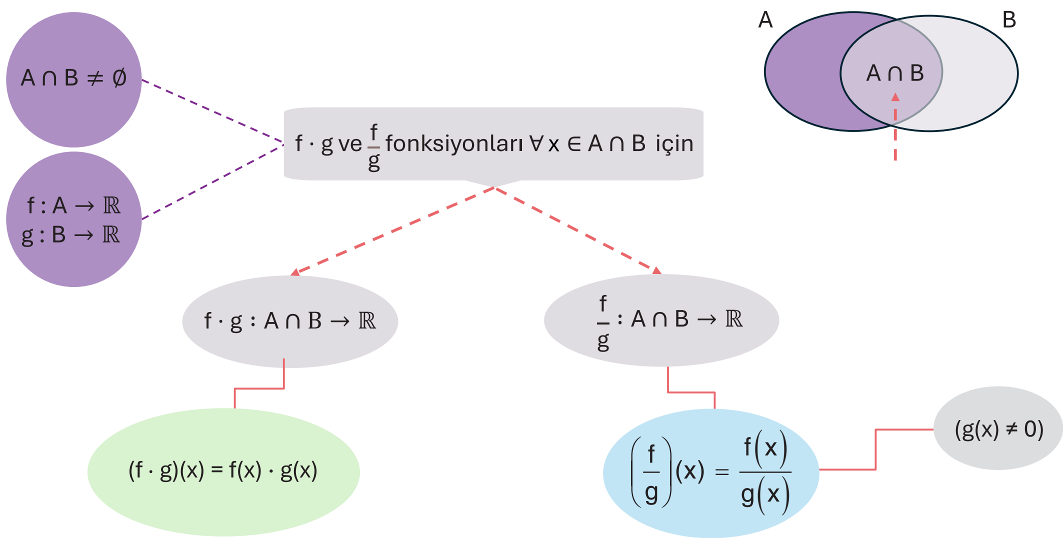
Fonksiyonlar arasında toplama ve çıkarma işlemi yalnızca tanım kümelerinin ortak elemanları arasında yapılabilir.

## 2. FONKSİYONLARDA ÇARPMA ve BÖLME İŞLEMİ

$f \cdot g$ çarpım fonksiyonu ve $\dfrac{f}{g}$ bölüm fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$f \cdot g : A \cap B \to \mathbb{R}, \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
$$\frac{f}{g} : A \cap B \to \mathbb{R}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \ (g(x) \neq 0)$$

$c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall x \in A$ için $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ $(c \in \mathbb{R})$ fonksiyonu bir fonksiyonun sabit sayı ile çarpımı olarak tanımlanıyor.



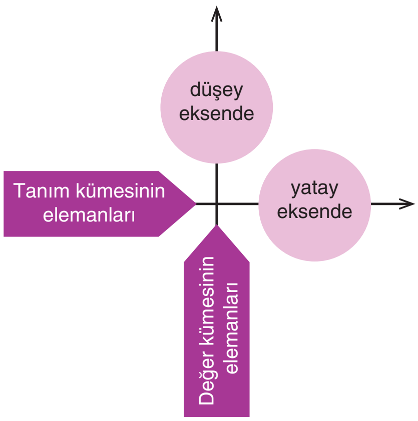

**DİKKAT**

- Fonksiyonlar arasında çarpma ve bölme işlemi yalnızca tanım kümelerinin ortak elemanları arasında yapılabilir.
- Bölme işleminde bölen fonksiyonu sıfır yapan değer tanım kümesinde bulunmamalıdır.

### 1. FONKSİYONLARDA GRAFİK ÇİZİMİ

$f : A \longrightarrow B$, $y = f(x)$ fonksiyonuna ait bütün noktaların dik koordinat düzleminde gösterilmesiyle oluşan noktalar kümesine **f fonksiyonunun grafiği** denir.

Grafik çizilirken tanım kümesinin elemanları yatay eksen (x ekseni) üzerinde, görüntü kümesinin elamanları ise düşey eksen (y ekseni) üzerinde gösterilir.



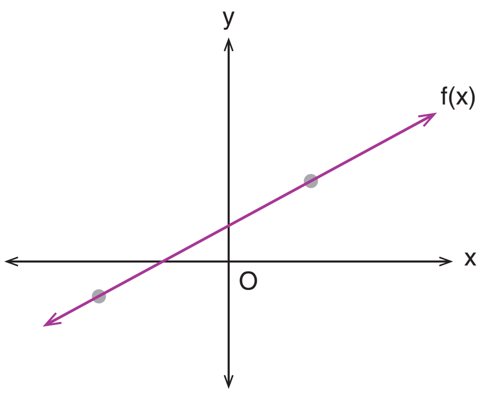

#### NOT

- Grafiği verilen bir fonksiyonun **tanım kümesi**, bu fonksiyonun grafiği üzerindeki noktaların birinci bileşenlerinin (**apsis**) oluşturduğu kümedir.
- Grafiği verilen bir fonksiyonun **görüntü kümesi**, bu fonksiyonun grafiği üzerindeki noktaların ikinci bileşenlerinin (**ordinat**) oluşturduğu kümedir.

#### DİKKAT

- Çizilen fonksiyon grafiği y eksenine göre simetrik ise **çift fonksiyon**, orijine göre simetrik ise **tek fonksiyondur.**

**Doğrusal Fonksiyon Grafikleri**



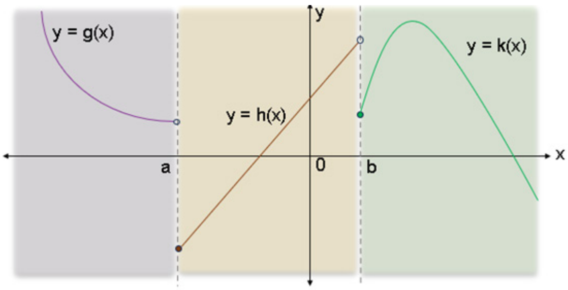

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$ biçimindeki doğrusal fonksiyonların grafikleri çizilirken tanım kümesinin en az iki x değeri için (x, f(x)) noktaları bulunur. Bulunan (x, f(x)) noktaları, dik koordinat düzleminde işaretlenir. Bu noktaların birleştirilmesiyle oluşan doğru f fonksiyonunun grafiğidir.

## NOT

- Düzlemde iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçebileceği için sadece iki nokta belirlemek doğrusal grafiği çizmek için yeterlidir.
- Pratik bir çizim yapmak için eksenleri kesen noktalar seçilebilir. (x, 0 = f(x)) noktası x eksenini, (0, y = f(0)) noktası y eksenini kesen noktalardır.

## DİKKAT

Kritik nokta tanım kümesine dahil değilse, o noktaya ait görüntü noktası görüntü kümesine de dahil olamayacağı için fonksiyon grafiğinde içi boş bir yuvarlak sembol ile gösterilmelidir.




**Parçalı Fonksiyonların Grafikleri**

Parçalı fonksiyonların grafiklerinde önce düzlemde kritik noktalar ve tanım kümesi aralıkları belirlenir. Ardından her aralık için fonksiyon türüne göre çizim yapılır.

### 2. FONKSİYON GRAFİKLERİNİ YORUMLAMA

Fonksiyonun grafiği üzerindeki her noktadan y eksenine çizilen paralel doğruların x ekseninde kestiği noktalar fonksiyonun tanım kümesini, x eksenine çizilen paralel doğruların y ekseninde kestiği noktalar ise fonksiyonun görüntü kümesini verir.

## DİKKAT

Tanım kümesinin bir alt aralığının görüntüsü x ekseninin üzerinde kalıyorsa bu aralık f(x) > 0 eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

## DİKKAT

Tanım kümesinin bir alt aralığının görüntüsü x ekseninin altında kalıyorsa bu aralık f(x) < 0 eşitsizliğinin çözüm kümesidir.

### 3. DÜŞEY / DİKEY DOĞRU TESTİ

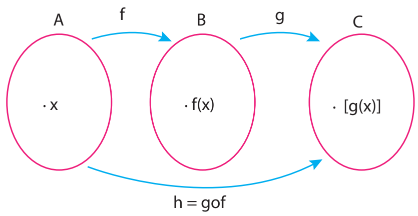
Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını belirlemek için tanım aralığının her noktasından y eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen bu doğrular, grafiği yalnız bir noktada kesiyorsa bu bağıntı bir fonksiyondur. Diğer durumlarda bu bağıntı fonksiyon değildir. Grafiği verilen bir bağıntının fonksiyon olup olmadığını tespit etmek için uygulanan bu teste **düşey (dikey) doğru testi** denir.

### 4. YATAY DOĞRU TESTİ

Grafiği verilen bir f(x) fonksiyonunun bire bir veya örten olup olmadığını belirlemek için değer aralığının her noktasından x eksenine paralel doğrular çizilir. Çizilen paralel doğrular, fonksiyonun grafiğini en az bir noktada kesiyorsa bu fonksiyon örtendir. Çizilen paralel doğrular, fonksiyonun grafiğini yalnız bir noktada kesiyorsa bu fonksiyon bire birdir. Verilen grafiğe yatay çizgiler çekerek fonksiyonun bire bir olup olmadığını tespit etmek için uygulanan bu teste **yatay doğru testi** denir.

- A, B, C boş kümeden farklı birer küme olmak üzere f: A ⟶ B ve g : B ⟶ C fonksiyonları verilsin.

  A kümesinin elemanlarını, f ve g fonksiyonlarıyla C kümesinin elemanları ile eşleyen fonksiyona **bileşke fonksiyon** denir.
- Başka bir ifadeyle f: A ⟶ B ve g: B ⟶ C fonksiyonları verilsin. $\forall x \in A$ için $h(x) = g[f(x)]$ şeklinde tanımlanan h: A ⟶ C fonksiyonuna f ve g fonksiyonlarının **bileşke fonksiyonu** denir.
- gof : A → C, (gof)(x) = g[f(x)] şeklinde gösterilir ve “**g bileşke f**” olarak okunur.




### NOT

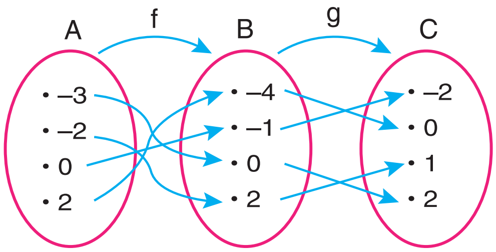
- Bileşke fonksiyonlarda işlemler sağdan sola doğru yapılır.

### NOT

- f: A → B ve g: B → C fonksiyonları bire bir ise gof : A → C fonksiyonu da bire birdir.
- f: A → B ve g: B → C fonksiyonları örten ise gof : A → C fonksiyonu da örtendir.

**Örnek:**

Aşağıdaki Venn şemasında f, g ve gof fonksiyonları gösterilmiştir.




gof = {(–3, 5), (–2, 1), (0, –2), (2, 0)}

**Özellikler**

- Fonksiyonlarda bileşke işleminin değişme özelliği yoktur,

  $fog \neq gof$
- Bir f fonksiyonunun birim fonksiyon ( I(x) = x ) ile bileşkesi kendisine eşittir.

  $foI = Iof = f$
- Fonksiyonlarda bileşke işleminin birleşme özelliği vardır.

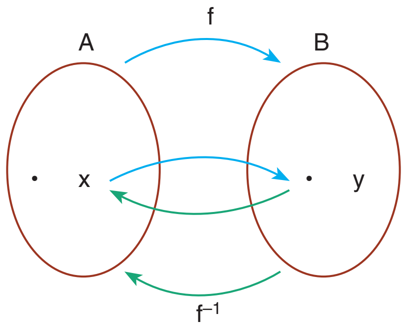
  $fogoh = (fog)oh = fo(goh)$

$f : A \to B$, $y = f(x)$ bire bir ve örten fonksiyonu verilsin. $\forall x \in A$ ve $\forall y \in B$ için

$(gof)(x) = x$ ve $(fog)(y) = y$

eşitliklerini sağlayan $g : B \to A$ fonksiyonuna f'nin **ters fonksiyonu** denir ve $g(x) = f^{-1}(x)$ şeklinde gösterilir.

f: $A \to B$ ve $f^{-1} : B \to A$ yani $y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olur. $(x, y) \in f$ ise $(y, x) \in f^{-1}$ olur.




### NOT

- Bir fonksiyonun tersinin var olabilmesi için bire bir ve örten olması gerekir. $f : A \to B$ olmak üzere $y = f(x)$ bire bir ve örten ise f(x) fonksiyonunun tersi de bir fonksiyondur.
- Bire bir ve örten bir f(x) fonksiyonunun tersi bulunurken x, y cinsinden yazılır. $y = f(x)$ ise $x = f^{-1}(y)$ olduğundan $f^{-1}(y)$ elde edilir. Değişken olarak y yerine x yazıldığında $f^{-1}(x)$ bulunmuş olur.

**Özellikler**

- Bir fonksiyonun tersi ile bileşkesi alınırsa sonuç birim fonksiyon olur.

  $fof^{-1} = I$ veya $f^{-1}of = I$

- Bileşkesi alınmış iki fonksiyonun tersi alındığında fonksiyonların tek tek tersleri yer değiştirip bileşke işlemine tabi tutulur.

  $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

- Fonksiyonun tersinin tersi kendisine eşittir.

  $(f^{-1})^{-1} = f$

$f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

kuralı ile verilen fonksiyonun tersi;

$$f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}$$

olur.

### DİKKAT

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği ile $y = f^{-1}(x)$ fonksiyonunun grafiği analitik düzlemde $y = x$ doğrusuna göre simetriktir.

Fonksiyon grafiklerinde değer bulma, bileşke ve ters fonksiyonlar ile ilgili verilen sorularda;

- Aranan değerin ait olduğu kümeye bağlı olarak x veya y eksenlerinden hangisinde olduğuna dikkat edilmelidir.

- Eğer verilmemişse doğrusal fonksiyonların kuralı grafik üzerinde verilen değerlerden elde edilebilir. Doğrusal fonksiyon $f(x) = mx + n$ olduğundan seçilen iki noktanın koordinatları f(x) ifadesinde yerine yazıldığında iki bilinmeyenli doğrusal denklem sistemi oluşur.

- Eğim hesaplanarak da değişim hızını bulmak mümkündür. Grafik üzerinde iki nokta $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olmak üzere $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ bağıntısı ile hesaplanabilir.

- Fonksiyon grafiklerinde x ekseninin üzerinde olan bölge pozitif, altında kalan bölge ise negatif olduğu için;

  – $f(x) > 0$ değerleri grafiğin x ekseni üzerindeki

  – $f(x) < 0$ değerleri ise grafiğin x ekseni altındaki aralıklarında aranmalıdır.

## DOĞRUSAL FONKSİYON HİKAYELERİ

Bir fonksiyonun tanım kümesindeki elemanlarının arasındaki değişim sabitken görüntü kümesinin elemanları arasındaki değişim de sabitse bu fonksiyonlar **doğrusal fonksiyonlardır**.

Doğru orantılı çokluklar olarak da öğrendiğimiz bu tarz hikayelerde bağımsız ve bağımlı değişkenler, başlangıç değer ve artış miktarı belirlenir.

Sorunun türüne göre grafik çizerek, tablo veya fonksiyon kuralını oluşturarak çözüm elde edilir.

Günlük hayatta birbirini direk etkileyen pek çok durum doğrusal fonksiyon grafikleri ile ilişkilendirilebilir.
Örneğin;

| Bağımsız Değişken | Bağımlı Değişken |
|---|---|
| Yol | Zaman |
| Harcanan Yakıt | Yol |
| Bir Bitkinin Boyu | Zaman |
| Çalışma Süresi | Çözülen Soru Sayısı |
| Yanan Mum Boyu | Yanma Süresi |
| Deniz Seviyesinden Yükseklik | Hava Sıcaklığı |
| Ürün Sayısı | Ödenecek Ücret |

*Unutulmamalıdır ki bağımsız değişkenin artma / azalma hızı hep sabittir.

# POLİNOM KAVRAMI

## POLİNOM KAVRAMI

x bir değişken, $n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ birer gerçek sayı olmak üzere

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

biçimindeki ifadeye gerçek katsayılı ve bir değişkenli **polinom (çok terimli)** adı verilir. x değişkenine bağlı polinomlar P(x), Q(x), R(X), ... gibi ifadelerle gösterilir.

- $\mathbf{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n}$ gerçek sayılarına polinomun **katsayıları** denir.
- x değişkeninin aldığı en büyük üsse polinomun **derecesi** denir ve **der[P(x)]** ile gösterilir.
- Bir polinomun en büyük dereceli teriminin katsayısına polinomun **baş katsayısı** denir.
- $\mathbf{a_0}$ ifadesine polinomun **sabit terimi** denir.

## KRİTİK BİLGİ

- Bir polinomun katsayılar toplamı, polinom değişkeninin yerine **1** yazılarak bulunur.
- Bir polinomun sabit terimi, polinom değişkeninin yerine **0** yazılarak bulunur.
- P(x) polinomunun çift dereceli terimlerin katsayılar toplamı $\dfrac{P(1)+P(-1)}{2}$ dir.
- P(x) polinomunun tek dereceli terimlerin katsayılar toplamı $\dfrac{P(1)-P(-1)}{2}$ dir.

## SABİT POLİNOM

- $a_0$ sıfırdan farklı bir gerçek sayı olmak üzere $P(x) = a_0$ ise P(x) polinomuna **sabit polinom** denir ve **derecesi sıfırdır**.

## SIFIR POLİNOM

- P(x) = 0 polinomuna **sıfır polinomu** denir ve derecesi **belirsizdir**.

## EŞİT POLİNOMLAR

- Dereceleri aynı ve aynı dereceli terimlerinin katsayıları karşılıklı olarak eşit olan polinomlara **eşit polinomlar** denir.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0 x^0$$

$$P(x) = Q(x) \text{ ise } a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$$

## TOPLAMA VE ÇIKARMA İŞLEMLERİ

Polinomlarda toplama ve çıkarma işlemleri yapılırken dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları toplanır ya da çıkarılır.

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$

$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0 x^0$

$P(x) \pm Q(x) = (a_n \pm b_n)x^n + (a_{n-1} \pm b_{n-1})x^{n-1} + ... + (a_2 \pm b_2)x^2 + (a_1 \pm b_1)x^1 + (a_0 \pm b_0)x^0$

### KRİTİK BİLGİ

$der[P(x)] = n, der[Q(x)] = m$ ve $n > m$ olmak üzere

$der[P(x) \pm Q(x)] = n$ dir.

**Örnek:**

$P(x) \neq 0,\ Q(x) \neq 0$ ve $der[P(x)] \neq der[Q(x)]$ olmak üzere P(x) polinomunun derecesi m, Q(x) polinomunun derecesi n olduğuna göre $P(x) + Q(x)$ ve $P(x) - Q(x)$ polinomlarının derecesini büyüklük ve küçüklük bakımından kıyaslayarak m ve n cinsinden bulunuz.

**Çözüm:**

$m > n \Rightarrow der\,[P(x) + Q(x)] = m$ ve $der\,[P(x) - Q(x)] = m$ olur.

$m < n \Rightarrow der\,[P(x) + Q(x)] = m$ ve $der\,[P(x) - Q(x)] = n$ olur.

## ÇARPMA İŞLEMİ

P(x) ve Q(x) birer polinom olmak üzere;

- $P(x) \cdot Q(x)$ işlemi yapılırken P(x) polinomunun her terimi Q(x) polinomunun her terimiyle çarpılır ve elde edilen ifadelerin cebirsel toplamı x değişkeninin azalan ya da artan kuvvetlerine göre sıralanarak yazılır.
- $k \cdot P(x)$ işlemi yapılırken P(x) polinomunun her terimi k sayısı ile çarpılır.
  - $der[P(x)] = n, der[Q(x)] = m$ ve $n > m$ olmak üzere
  - $der[P(x) \cdot Q(x)] = n + m$ dir.
  - $der[k \cdot P(x)] = n$
  - $der[P(x^k)] = n \cdot k$
  - $der[P^k(x)] = n \cdot k$
  - $der[P(Q(x)] = m \cdot n$

**Örnek:**

$P(x) = 6x^3 - 4x^2 + 5$ ve $Q(x) = -2x^2 + 5x$ olarak veriliyor. $R(x) = P(x) \cdot Q(x)$ olduğuna göre R(x) polinomunu ve derecesini bulunuz.

**Çözüm:**

$R(x) = (6x^3 - 4x^2 + 5) \cdot (-2x^2 + 5x)$

$= -12x^5 + 30x^4 + 8x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 25x$

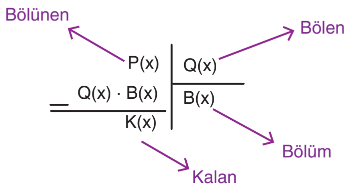
$= -12x^5 + 38x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 25x$ olur. R(x) polinomunun derecesi ise $der\,[R(x)] = 5$ olur.

## POLİNOMLARDA BÖLME İŞLEMİ

### POLİNOMLARDA BÖLME İŞLEMİ

P(x) ve Q(x) polinomları için der[P(x)] $\geq$ der[Q(x)] olmak üzere

P(x) polinomunun Q(x) polinomuna bölünmesi;




P(x) = Bölünen Polinom
Q(x) = Bölen Polinom
B(x) = Bölüm Polinomu
K(x) = Kalan Polinom

- $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ eşitliğine **bölme eşitliği** denir.
- der[K(x)] < der[Q(x)]
- der[B(x)] = der[P(x)] – der[Q(x)]
- K(x) = 0 ise P(x) polinomu Q(x) polinomuna **tam (kalansız) bölünüyor** denir.

**DİKKAT**

Polinomlarda bölme işlemi aşağıda verilen sıralamaya uygun yapılır.

- Bölünen ve bölen polinom bu polinomların değişkeninin azalan kuvvetlerine göre yazılır.
- Bölünen polinomun en büyük dereceli terimi bölen polinomun en büyük dereceli terimine bölünür ve elde edilen sonuç bölüm polinomunun ilk terimi olarak yazılır.
- Bölüm polinomuna ait bulunan ilk terim, bölen polinomla çarpılır ve elde edilen ifade bölünen polinomdan çıkarılır.

Yukarıdaki işlemler, çıkarma işlemi sonucunda elde edilen her polinoma kalanın derecesi bölenin derecesinden küçük oluncaya kadar uygulanır.

**Örnek:**

P(0) = $5x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ polinomunu Q(x) = $x^2 + 5x - 5$ polinomuna bölümünde bölüm ve kalanı bulalım.

$$
\begin{array}{r|l}
5x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1 & x^2 + 5x - 5 \\ \cline{2-2}
-\quad 5x^4 + 25x^3 - 25x^2 & 5x^2 - 28x + 163 \\ \cline{1-1}
-28x^3 + 23x^2 + 4x - 1 & \\
-\quad -28x^3 - 140x^2 + 140x & \\ \cline{1-1}
163x^2 - 136x - 1 & \\
-\quad 163x^2 + 815x - 815 & \\ \cline{1-1}
-951x + 814 &
\end{array}
$$

Bölme sonucunda elde edilen bölüm polinomu

B(x) = $5x^2 - 260x + 163$

ve

kalan polinomu

K(x) = $-951x + 814$ olur.

## POLİNOMLARDA BÖLME İŞLEMİ YAPMADAN KALAN BULMA

### KRİTİK BİLGİ

- Bir P(x) polinomunun (x – a) ile polinomuna bölümünden kalan P(a) dır.
- $P(a) = 0 \Leftrightarrow (x - a)$, polinomu P(x) polinomunun bir çarpanıdır.
- x = a için P(a) = 0 ise x = a sayısına, P(x) polinomunun sıfırı (bir kökü) denir.

**Örnek:**

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$ **polinomunun bir çarpanının** (x–1) **olduğunu gösteriniz ve** P(x) **polinomunun** (x–1) **ile bölümünden kalanı bulunuz.**

**Çözüm:**

$P(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$ polinomunun bir çarpanının (x–1) olduğu aşağıdaki gibi gösterilebilir.

“$P(1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)$, P(x) polinomunun bir çarpanıdır.” bileşik önermesinin denk olduğu önerme,

“P(1) = 0 ise (x–1), P(x) polinomunun bir çarpanıdır ve (x–1), P(x) polinomunun bir çarpanı ise P(1) = 0 dır.”

x – 1 = 0 ise x = 1 olur.

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 - 5 \\ P(1) = 1 - 2 + 6 - 5 \\ P(1) = 0 \text{ bulunur.} \end{array}\right\} \text{...... (I)}$$

Bu durum bölme işlemi kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{array}{rl|l} & \overbrace{x^3 - 2x^2 + 6x - 5}^{P(x)} & x - 1 \\ \cline{3-3} - & x^3 - x^2 & x^2 - x + 5 \\ \cline{1-2} & -x^2 + 6x - 5 & \\ - & -x^2 + x & \\ \cline{1-2} & 5x - 5 & \\ - & 5x - 5 & \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

Buradan $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - x + 5)$ olur. ......... (II)

(I) ve (II) numaralı denklemlerden P(1) = 0 ise (x–1), P(x) polinomunun bir çarpanı olup (x–1), P(x) polinomunu tam böler.
Buradan P(1) = 0 olur.

**Ortak Çarpan Parantezine Alma**

Bir polinomun her teriminde bulunan ortak çarpanın paranteze alınması işlemine ortak çarpan parantezine alma yoluyla çarpanlara ayırma yöntemi denir.

**Örnekler :**

1. $a \cdot x + b \cdot x = x \cdot (a+b)$
2. $a \cdot x - b \cdot x + c \cdot x = x \cdot (a - b + c)$
3. $a \cdot x^4 + b \cdot x^4 = x^4 \cdot (a + b)$
4. $8 \cdot x^4 - 3 \cdot x^4 = x^4 \cdot (8 - 3) = 5x^4$
5. $a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x = x \cdot (a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c)$
6. $7 \cdot x^6 + 5 \cdot x^4 - x^2 = x^2 \cdot (7 \cdot x^4 + 5 \cdot x^2 - 1)$
7. $a \cdot (x - y) + b \cdot (x - y) = (a + b) \cdot (x - y)$
8. $7 \cdot (x - 5) - n \cdot (x - 5) = (7 - n) \cdot (x - 5)$
9. $a \cdot (x - y)^4 + b \cdot (x - y)^4 = (x - y)^4 \cdot (a + b)$
10. $8 \cdot (2 - a)^4 + 7 \cdot (a - 2)^3 = 8 \cdot (a - 2)^4 + 7 \cdot (a - 2)^3$

    $= [8 \cdot (a - 2) + 7] \cdot (a - 2)^3$

    $= (8 \cdot a - 9) \cdot (a - 2)^3$

**Gruplandırma Yöntemi İle Çarpanlara Ayırma**

Verilen polinomun her teriminde; ortak bir sayı, ortak bir değişken veya ortak bir terim bulunmuyor ise ortak çarpanı olan terimler bir araya getirilerek gruplandırılır.

**Örnekler :**

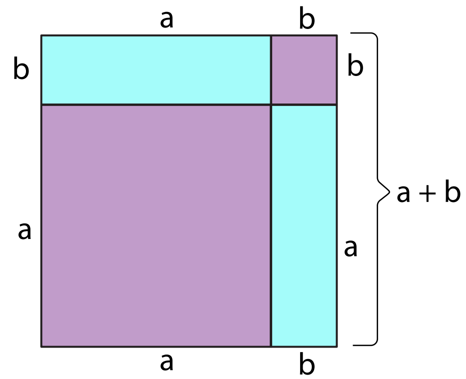
1. $a \cdot x + b \cdot x + a \cdot y + b \cdot y = x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b) = (x + y) \cdot (a + b)$
2. $x^4 - x^3 + x^2 - x = x^3 \cdot (x - 1) + x \cdot (x - 1) = (x^3 + x) \cdot (x - 1)$
3. $x^3 + 5 \cdot x^2 - x - 5 = x^2 \cdot (x + 5) - (x + 5) = (x^2 - 1) \cdot (x + 5)$
4. $ax^2 - ax + bx - b = ax \cdot (x - 1) + b \cdot (x - 1) = (ax + b) \cdot (x - 1)$
5. $x^2 - 3x - 4 = x^2 - 4x + x - 4 = x \cdot (x - 4) + (x - 4) = (x + 1) \cdot (x - 4)$

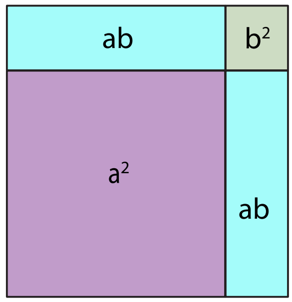
**Çarpanlara Ayırma**

Bir polinomun iki ya da daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılması işlemine **çarpanlara ayırma** denir.

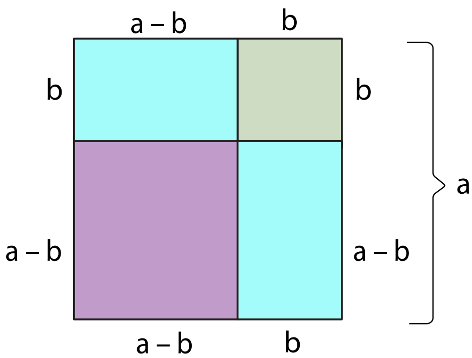
P(x), Q(x) ve R(x) birer polinom olmak üzere R(x) = P(x).Q(x) şeklinde ifade edilen eşitlikte P(x) ve Q(x) polinomlarına **R(x) polinomunun çarpanları** denir.

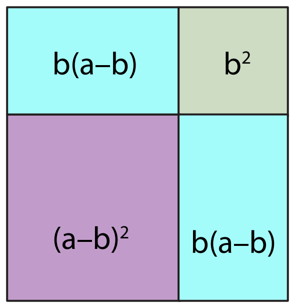
**Tam Kare İfadeler**




$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



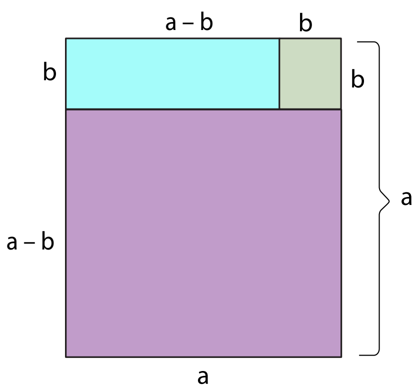



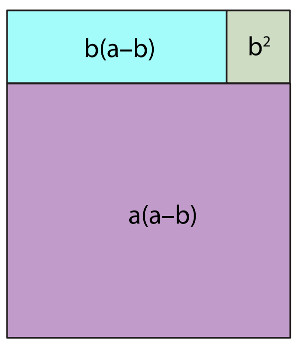

$(a-b)^2 = a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

**İki Kare Farkı Durumundaki İfadeler**




$a^2 - b^2 = a(a-b) + b(a-b)$

$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

Bir polinomun iki ya da daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılması işlemine **çarpanlara ayırma** denir.

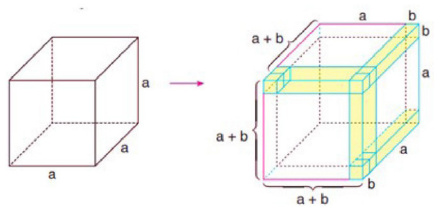
$P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ birer polinom olmak üzere $R(x) = P(x) \cdot Q(x)$ şeklinde ifade edilen eşitlikte $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarına **R(x) polinomunun çarpanları** denir.

### İki Terimin Toplamının ve Farkının Küpü Özdeşliği

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

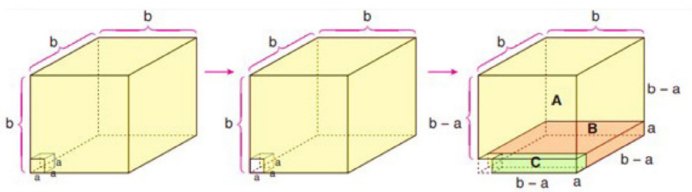
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

### İki Terimin Küplerinin Toplamı Özdeşliği




$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

### İki Terimin Küplerinin Farkı Özdeşliği




$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

**Örnekler:**

$(3x + 4)^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot 4 + 3 \cdot 3x \cdot 4^2 + 4^3 = 27x^3 + 108x^2 + 144x + 64$

$(5x - 1)^3 = (5x)^3 - 3 \cdot (5x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 5x \cdot 1^2 - 1^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$

$64x^3 + 27 = (4x)^3 + 3^3 = (4x+3) \cdot [(4x)^2 - 4x \cdot 3 + 3^2] = (4x + 3) \cdot (16x^2 - 12x + 9)$

$x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 4)$

# ÜÇ TERİMLİ İFADELERİN ÇARPANLARA AYRILMASI



Bir polinomun iki ya da daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılması işlemine **çarpanlara ayırma** denir.

P(x), Q(x) ve R(x) birer polinom olmak üzere R(x) = P(x) · Q(x) şeklinde ifade edilen eşitlikte P(x) ve Q(x) polinomlarına **R(x) polinomunun çarpanları** denir.

$ax^2 + bx + c$ **Şeklindeki İfadelerin Çarpanlara Ayrılması:**

$ax^2 + bx + c$ şeklindeki üç terimli ifadeleri çarpanlara ayırırken birinci ve üçüncü terimin $ax^2 = px \cdot tx$ ve $c = m \cdot n$ şeklindeki çarpanları seçilir.

**$ax^2 + bx + c$**

$px \quad m$

$tx \quad n$

Bu çarpanlar çapraz olarak çarpılıp toplandığında ortanca terim bulunabiliyorsa çarpanlar doğru seçilmiştir. Bu seçilen çarpanlar yan yana yazıldığında

$ax^2 + bx + c = (tx + n)(px + m)$ şeklinde çarpanlarına ayrılmış olur.

**Örnek:**

$x^2 + 3x + 2$

$x \quad +2$

$x \quad +1$

$x + 2x = 3x$ ortadaki terime eşit olduğu için $x^2 + 3x + 2 = (x+1) \cdot (x+2)$ eşitliği bulunur.

**Örnek:**

$2x^2 - 7x + 6$

$2x \quad -3$

$x \quad -2$

$-4x - 3x = -7x$ ortadaki terime eşit olduğu için $2x^2 - 7x + 6 = (2x - 3) \cdot (x - 2)$ eşitliği bulunur.

**Değişken Değiştirme Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma**

Bir polinomda benzer terimlerin yeni bir değişkenle adlandırılıp daha sade bir hâle getirildikten sonra çarpanlara ayrılması işlemine **değişken değiştirme yöntemi ile çarpanlara ayırma yöntemi** denir.

**Örnek:**

$16x^4 - 16x^2 + 3$ ifadesini çarpanlarına ayıralım.

$a = 4x^2$ olsun → $16x^4 - 16x^2 + 3$ ifadesi buradan $a^2 - 4a + 3$ şeklinde yazılır. Böylelikle Değişken Değiştirme Yöntemini uyguladık. Şimdi de bu ifadeyi çarpanlarına ayıralım.

$a^2 - 4a + 3$

$a \quad -3$

$a \quad -1$

$-a - 3a = -4a$ ortadaki terime eşit olduğu için $a^2 - 4a + 3 = (a - 3) \cdot (a - 1)$ şeklinde yazabiliriz.

$a = 4x^2$ eşitliğini tekrar kullanalım, $(4x^2 - 3) \cdot (4x^2 - 1)$ şeklinde tekrar yazalım.

Böylelikle $16x^4 - 16x^2 + 3$ ifadesini $(4x^2 - 3) \cdot (4x^2 - 1)$ olarak çarpanlarına ayırmış oluruz.

**Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi:**

P(x) ve Q(x) birer polinom ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki ifadelere **rasyonel ifadeler** denir.

**Rasyonel İfadelerde Toplama ve Çıkarma İşlemi**

Rasyonel ifadelerde toplama ve çıkarma işlemleri yapılırken paydalar eşitlenir.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{T(x)}=\frac{P(x)\cdot T(x)+R(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot T(x)}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{R(x)}{T(x)}=\frac{P(x)\cdot T(x)-R(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\cdot T(x)}$$

Örnekler:

$$\frac{x+2}{x-1}+\frac{x+4}{2x+3}=\frac{(x+2)\cdot(2x+3)+(x+4)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(2x+3)}=\frac{2x^2+7x+6+x^2+3x-4}{2x^2+x-3}=\frac{3x^2+10+2}{2x^2+x-3}$$

$$\frac{x-2}{x+3}-\frac{x+5}{x-4}=\frac{(x-2)\cdot(x-4)-(x+5)\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-4)}=\frac{x^2-6x+8-x^2-8x-15}{x^2-x-12}=\frac{-14x-7}{x^2-x-12}$$

**Rasyonel İfadelerde Çarpma İşlemi**

Rasyonel ifadelerde çarpma işlemi yapılırken paylar kendi içinde çarpılıp paya, paydalar kendi içinde çarpılıp paydaya yazılır.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{R(x)}{T(x)}=\frac{P(x)\cdot R(x)}{Q(x)\cdot T(x)}$$

Örnekler:

$$\frac{3x+2}{4x-1}\cdot\frac{x+4}{2x+5}=\frac{(3x+2)\cdot(x+4)}{(4x-1)\cdot(2x+5)}=\frac{3x^2+14x+8}{8x^2+18x-5}$$

$$\frac{2x+1}{x-1}\cdot\frac{3x+4}{5-x}=\frac{(2x+1)\cdot(3x+4)}{(x-1)\cdot(5-x)}=\frac{6x^2+11x+4}{-x^2+6x-5}$$

**Rasyonel İfadelerde Bölme İşlemi**

Rasyonel ifadelerde bölme işlemi yapılırken bölenin pay ve paydası yer değiştirir ve çarpma işlemi yapılır.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}:\frac{R(x)}{T(x)}=\frac{P(x)}{Q(x)}\cdot\frac{T(x)}{R(x)}=\frac{P(x)\cdot T(x)}{Q(x)\cdot R(x)}$$

Örnekler:

$$\frac{x-2}{2x+1}:\frac{3x}{2x+3}=\frac{x-2}{2x+1}\cdot\frac{2x+3}{3x}=\frac{(x-2)(2x+3)}{(2x+1)\cdot 3x}=\frac{2x^2-x-6}{6x^2+3x}$$

Rasyonel ifadelerde önce pay ve paydadaki ifadeler çarpanlarına ayrılır, varsa ortak olan çarpanlar sadeleştirilerek işlem yapılır.

$$\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{2x-1}{10x-5}\cdot\frac{4x-4}{2x+4}=\frac{\cancel{x+2}}{\cancel{x-1}}\cdot\frac{\cancel{2x-1}}{5(\cancel{2x-1})}\cdot\frac{4(\cancel{x-1})}{2(\cancel{x+2})}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

Bu örnekte rasyonel ifadelerin paylarında ve paydalarında bulunan ifadeler sadeleştirilmiştir. Sadeleştirilen ifadeler aynı renkle gösterilmiştir.

# İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLER

## İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEM KAVRAMI

$a \neq 0, a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem;**

- a, b, c gerçek sayılarına ise bu **denklemin katsayıları,**
- denklemi sağlayan x sayılarına **denklemin kökleri,**
- köklerin oluşturduğu kümeye ise **denklemin çözüm kümesi** denir.

**DİKKAT**

İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin en fazla iki kökü vardır.

**Örnek:**

**Aşağıda verilen denklemlerden hangisi ya da hangilerinin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirttiğini bulunuz.**

a) $3x^4 + 8x^2 - 2x + 5 = 0$

b) $5\frac{1}{x^2} - 2x^2 + 6x + 5 = 0$

c) $x^2 - 2x + 5 = 0$

d) $2x - 3 = 0$

**Çözüm:**

a) $3x^4 + 8x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminde $3x^4$ terimi olduğu için ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtmez. Dördüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.

b) $5\frac{1}{x^2} - 2x^2 + 6x + 5 = 0$ denkleminde $5\frac{1}{x^2}$ terimi olduğu için ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtmez.

c) $x^2 - 2x + 5 = 0$ denkleminde en büyük dereceli terim $x^2$ olduğundan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.

d) $2x - 3 = 0$ denkleminde en büyük dereceli terim 2x olduğundan birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.

**Örnek:**

$(a - 5)x^3 + 3x^{2a - b} + x - 2 = 0$ **denklemi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirttiğine göre a ve b değerlerini bulunuz.**

**Çözüm:**

$(a - 5)x^3 + 3x^{2a - b} + x - 2 = 0$ denklemi ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğundan $x^3$lü terimin katsayısının sıfıra eşit, ve $x^{2a - b}$ li terimin üssünün 2 olması gerekir.

Buna göre $a - 5 = 0$ olduğundan $a = 5$ olur.

$2a - b = 2$ ve $a = 5$ olduğundan $2 \cdot 5 - b = 2$ ve $b = 8$ olur.

## İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler çözülürken farklı yöntemler kullanılır. Bu yöntemler çarpanlara ayırma (tam kareye tamamlama, iki kare farkı, değişken değiştirme) ve diskriminant yöntemi olarak özetlenebilir.

## $ax^2 + bx + c$ DENKLEMİNİN ÇARPANLARINA AYIRMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin sol tarafı çarpanlarına ayrılabilen türden ise her bir çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenerek denklemin kökleri bulunur.

$a \neq 0$ ve $a, b, c, p, q \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $ax^2 + bx + c$ üç terimlisi çarpanlarına ayrılıyorsa çözüm kümesi aşağıdaki gibi bulunur.

$ax^2 + bx + c = 0$ ifadesinde $px \cdot qx = ax^2$ , $m \cdot n = c$ ve $p \cdot n \cdot x + q \cdot m \cdot x = bx$

$$\begin{array}{cc} px & m \\ qx & n \end{array}$$

$ax^2 + bx + c = (px + m) \cdot (qx + n) = 0$ olur.

$px + m = 0$ veya $qx + n = 0$

$px = -m$     $qx = -n$

$x = -\frac{m}{p}$     $x = -\frac{n}{q}$

Bulunan x değerlerine $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri denir.

Bu kökler $x_1$ ve $x_2$ ile gösterilir. ( $x_1 = -\frac{m}{p}$ ve $x_2 = -\frac{n}{q}$ )

Denklemin çözüm kümesi $ÇK = \left\{-\frac{m}{p}, -\frac{n}{q}\right\}$ şeklinde gösterilir.

**Örnek:**

$3x^2 + 7x + 4 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulalım.

$3x^2 + 7x + 4 = 0$

$$\begin{array}{cc} 3x & +4 \\ x & +1 \end{array}$$

$3x + 4x = 7x$ ise $(3x + 4) \cdot (x + 1) = 0$ olur.

Buradan $3x + 4 = 0$ için $x_1 = -\frac{4}{3}$ veya $x + 1 = 0$ için $x_2 = -1$ olur.

Dolayısıyla $ÇK = \left\{-\frac{4}{3}, -1\right\}$ olarak yazılır.

## DİSKRİMİNANT KAVRAMI

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin köklerini veren bağıntıda $b^2 - 4ac$ ifadesine denklemin **diskriminantı** denir ve $\Delta$ (delta) ile gösterilir.

### KRİTİK BİLGİ

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olur.

## DİSKRİMİNANTIN KULLANILMASI

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde,

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise denklemin iki farklı gerçek kökü vardır. Denklemin çözüm kümesi iki elemanlıdır.
- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise denklemin kökleri birbirine eşittir (çakışık iki kök). Denklem tam kare ifadedir. Denklemin çözüm kümesi bir elemanlıdır.
- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise bu denklemin gerçek kökleri yoktur. Denklemin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesi boş kümedir. $ÇK = \varnothing$ olur.

**Örnek:**

$x^2 + 5x - 6 = 0$ **denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.**

**Çözüm:**

$x^2 + 5x - 6 = 0$ denkleminin katsayıları; $a = 1$, $b = 5$ ve $c = -6$ dır. Önce diskriminant ($\Delta$) hesaplanarak köklerin varlığı araştırılır.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)\\ &= 25 + 24\\ &= 49 \text{ olur.}\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ olduğundan $x^2 + 5x - 6 = 0$ denkleminin birbirinden farklı iki gerçek kökü vardır ve bu kökler;

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-5+7}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-5-7}{2} = -6 \quad \text{olarak bulunur.}$$

Buradan $ÇK = \{-6, 1\}$ olur.

**Örnek:**

$9x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

$9x^2 - 6x + 1 = 0$ denkleminin katsayıları; $a = 9$, $b = -6$ ve $c = 1$ olur.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = 36 - 36 = 0$ olduğundan $x_1 = x_2$ olur (Kökler çakışıktır.).

Buradan $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 9} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$ olup denklemin $ÇK = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ olarak bulunur.

## BİR KARMAŞIK SAYININ a + bi (a, b ∈ ℝ) BİÇİMİNDE İFADE EDİLMESİ

$a \neq 0$, a, b, c ∈ ℝ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise bu denklemin ℝ de (gerçek sayılarda) çözüm kümesi yoktur.

Bu durumda verilen denklemlerde $\Delta < 0$ ise bu denklemin çözüm kümesini bulabilmek için gerçek sayılar kümesini de kapsayan yeni bir sayı kümesine ihtiyaç vardır. Bu yeni sayı kümesine **karmaşık sayılar kümesi** denir ve karmaşık sayılar kümesi ℂ ile gösterilir. Her gerçek sayı aynı zamanda bir karmaşık sayıdır, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ olur.

a, b ∈ ℝ ve i sanal sayı birimi ($i^2 = -1$) olmak üzere z = a + bi şeklindeki sayılara **karmaşık sayılar** denir.

$\mathbb{C} = \{z: z = a + bi \text{ ve } a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$ şeklindedir.

z = a + bi

İmajiner kısım (İm(z))

Gerçek (Reel) kısım (Re(z))

### KRİTİK BİLGİ

$\sqrt{-1} = i$ sayısına **sanal sayı birimi** denir. i sanal sayı birimi kuvvetleri; n ve k tam sayı olmak üzere

$$i^0 = 1 \qquad i^1 = i \qquad i^2 = -1 \qquad i^3 = -i \qquad i^4 = 1$$

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4k \\ i, & n = 4k+1 \\ -1, & n = 4k+2 \\ -i, & n = 4k+3 \end{cases}$$

## KARMAŞIK SAYILARIN EŞLENİĞİ

a, b ∈ ℝ olmak üzere z = a + bi karmaşık sayısının sanal kısmının işareti değiştirilerek oluşturulan a – bi karmaşık sayısına a + bi **karmaşık sayısının eşleniği** denir ve $\overline{z} = a - bi$ ile gösterilir.

## KARMAŞIK SAYILARDA İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

$a \neq 0$, a, b, c ∈ ℝ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise bu denklemin karmaşık sayılar kümesinde çözümü vardır.

Denklemin kökleri; $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ olur.

### KRİTİK BİLGİ

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin bir kökü

m + ni ise diğer kök m – ni yani kökler birbirinin eşleniğidir.

### İKİNCİ DERECEDEN BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEMLERİN KÖKLERİ İLE KATSAYILARI ARASINDAKİ İLİŞKİLER

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri $x_1$ ve $x_2$ ise

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ ve } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ olur.}$$

**İSPAT**

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ olduğundan}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} + (-b - \cancel{\sqrt{\Delta}})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \text{ bulunur.}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b + \sqrt{\Delta}) \cdot (-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \quad (\Delta = b^2 - 4ac) \text{ olduğundan}$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a.a} = \frac{c}{a} \text{ bulunur.}$$

### KÖKLERİ VERİLEN İKİNCİ DERECEDEN DENKLEMİ ELDE ETME

Kökleri $x_1$ ve $x_2$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem

$x_1 + x_2 = T$ ve $x_1 \cdot x_2 = Ç$ olmak üzere

$x^2 - Tx + Ç = 0$ şeklinde yazılır.

**İSPAT**

$a \neq 0$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde eşitliğin her iki tarafı a ile

bölündüğünde $\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$ olur.

$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$ ve $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$ değerleri bu denklemde yerine yazılırsa

$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$ bulunur. Buradan

kökleri $x_1$ ve $x_2$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem $x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 + x_2 = 0$ biçiminde oluşturulur.

Bir başka ifadeyle kökleri $x_1$ ve $x_2$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem yazılırken

- $T = x_1 + x_2$ değeri bulunur.
- $Ç = x_1 \cdot x_2$ değeri bulunur.
- Bulunan T ve Ç değerleri $x^2 - Tx + Ç = 0$ denkleminde yerine yazılır.

Bir sonuç çıkarmak ya da çözüme ulaşabilmek için gözlem, deney, araştırma gibi yöntemlerle elde edilen her bilgiye **veri** adı verilir.

Belirli bir aralıktaki her gerçek sayı değerini alamayan verilere **kesikli veri** denir.

Belirli bir aralıktaki her gerçek sayı değerini alabilen verilere **sürekli veri** denir.

**Merkezi Eğilim Ölçüleri:**

- Aritmetik ortalama, bir veri grubundaki tüm verilerin toplanarak veri sayısına bölünmesiyle elde edilir. $\overline{X}$ ile gösterilir.

  $x_1$, $x_2$,..... $x_n$ gibi bir veri grubunun aritmetik ortalaması aşağıdaki gibidir.

$$\text{Aritmetik ortalama} = \frac{\text{Verilerin toplamı}}{\text{Veri sayısı}} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \overline{X}$$

- Bir veri grubunda en çok tekrar eden veriye o veri grubunun **tepe değeri (mod)** denir.

- Bir veri grubunda yer alan verilerin büyükten küçüğe ya da küçükten büyüğe doğru sıralanmasından sonra oluşan veri grubunun tam ortasındaki değere **ortanca (medyan)** denir.

- Veri sayısı n olan bir veri grubunda ortanca değer,

  n tek ise $\left(\frac{n+1}{2}\right)$·terimdir.

  n çift ise $\left(\frac{n}{2}\right)$ · **terim** ile $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ · **terimin** ortalamasıdır.

- Bir veri grubunda bulunan en küçük sayıya **en küçük değe**r. En büyük sayıya **en büyük değer** denir.

**DİKKAT**

- Bir dağılımın birden fazla tepe değeri olabilir.
- Her bir veri grubu için yalnız bir ortanca vardır.
- Aritmetik ortalama veri grubunun genel durumu hakkında bilgi verir.
- Tepe değer ve ortanca, veri grubundaki uç değerlerden aritmetik ortalamaya göre daha az etkilenir.

- Bir veri grubundaki en büyük değer ile en küçük değer arasındaki farka **açıklık** denir.
- **Standart sapma**, ölçme sonuçlarına ilişkin veri grubunu niteleyen ve veri grubundaki ölçme sonuçlarının yayılımı hakkında bilgi veren bir ölçü olup S ile gösterilir. Standart sapma aynı zamanda verilerin aritmetik ortalamadan uzaklıklarının bir ölçüsüdür.

Standart sapma hesaplanırken aşağıdaki işlem sırası izlenir:

I. Veri grubuna ait verilerin aritmetik ortalaması hesaplanır.

II. Her ölçümün aritmetik ortalamadan farkı alınır.

III. Bulunan farkların kareleri alınıp toplanır.

IV. Bulunan değer toplam gözlem sayısının 1 eksiğine bölünerek karekökü alınır.

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{X})^2 + (x_2 - \overline{X})^2 + (x_3 - \overline{X})^2 + \ldots + (x_n - \overline{X})^2}{n - 1}}$$

**Sadece açıklık değerine bağlı yapılacak yorumlar yüzeysel olmakla birlikte;**

a) Bir veri grubundaki açıklık değerinin büyük çıkması genel olarak veri grubunun heterojen olduğunu yani uç değerler arasındaki farkın yüksek olduğunu,

b) Bir veri grubundaki açıklık değerinin küçük çıkması ise veri grubunun homojen olduğunu yani uç değerler arasındaki farkın az olduğunu ve verilerin birbirine yakın olduğunu gösterir.

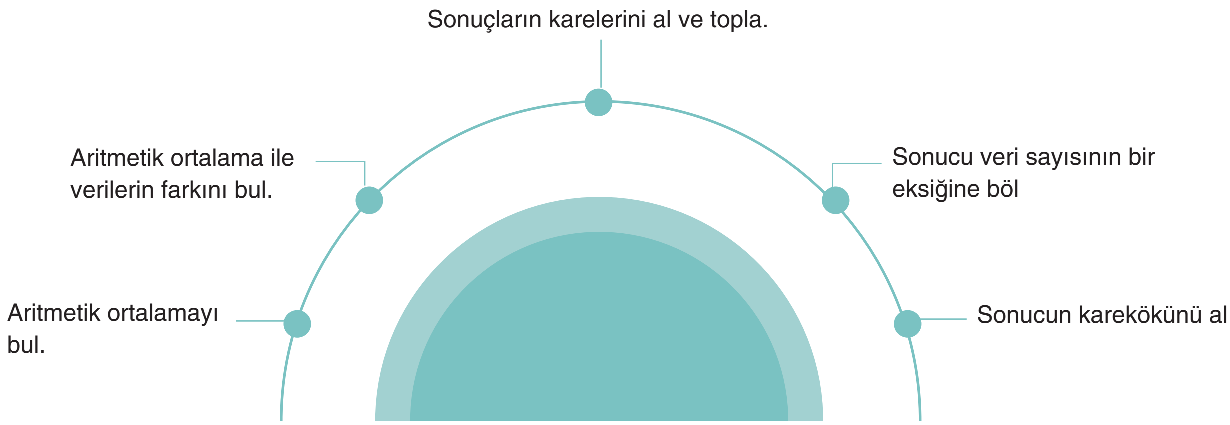
İki veri grubunu karşılaştırmada standart **sapma değerlerine** bakılarak aşağıdaki yorumlar yapılabilir:

a) Standart sapma ne kadar küçükse grubun puanları düzenli, tutarlı, güvenli, istikrarlıdır, veri grubu homojenlik gösterir, puanlar birbirlerine ve ortalamaya yakındır.

b) Standart sapma ne kadar büyükse grubun puanları düzensiz, tutarsız ve istikrarsızdır, veri grubu heterojenlik gösterir, puanlar birbirlerine ve ortalamaya uzaktır.

**STANDART SAPMA**

Bir veri grubundaki sayıların birbirine yakınlığını ve uyumluluğunu ölçen bir yöntemdir.



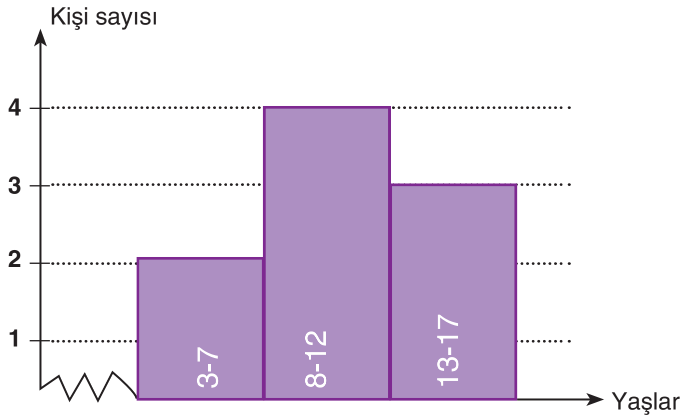
Gruplandırılmış bir veri grubunda verilerin tekrar etme sayılarının bitişik dikdörtgen şeklinde sütunlar halinde gösterimine **histogram** denir.

Histogram oluşturmak için aşağıdaki adımlar takip edilir:

1. Veriler küçükten büyüğe doğru sıralanır.
2. En büyük ve en küçük değerlerin farkı hesaplanarak veri açıklığı bulunur.
3. Grup sayısı seçilir.
4. Grup genişliği hesaplanır (Grup genişliği veri açıklığının grup sayısına bölümünden çıkan sonuçtan büyük olan en küçük doğal sayıdır.).
5. Veriler en küçük veriden başlanarak grup genişliğine göre gruplara ayrılıp tablo hâline getirilir.
6. Tabloya bakılarak histogram çizilir.

**Örnek:**

- Bir grupta bulunan üyelerin yaşları küçükten büyüğe sıralanmış olarak aşağıda verilmiştir.
  3, 4, 8, 8, 10, 12, 13, 16, 17
- Veri grubuna ait histogramın çizimi için izlenecek adımlar ve histogram aşağıda verilmiştir.
  Veri grubunun açıklığı 17 – 3 = 14'tür.
- Üç grup oluşturmak istediğimiz için 14'ün 3 ile bölümünde bölümden büyük en küçük tam sayı grup genişliğini vereceğinden grup genişliği 5'tir.
- 1.grup: 3-7 , 2.grup: 8-12 , 3.grup: 13-17 olacak şekilde gruplar oluşturulur.



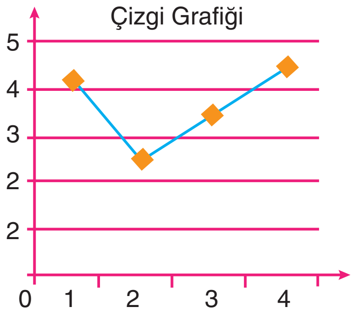

Grafik incelendiğinde 3-7 yaş grubunda 2 kişi, 8-12 yaş grubunda 4 kişi, 13-17 yaş grubunda 3 kişi olduğu görülmektedir.

**DİKKAT**

- Gruplar yatay, diğer veriler dikey eksene yazılmalıdır.
- Ölçeklendirme doğru yapılmalıdır.
- Veri olmayan (baştan ilk veriye kadar olan) bölge zikzaklı çizilir.

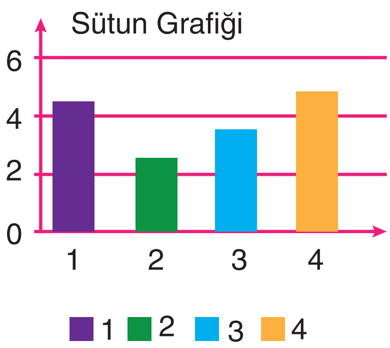
### Çizgi Grafiği

Sürekli verilerin yatay ve düşey eksendeki değerleri işaretlenerek, bulunan noktaların düz çizgilerle birleştirilmesi sonucunda elde edilen grafik türüdür. Verilerin zamana bağlı değişimi incelenmek isteniyorsa kullanılabilir.



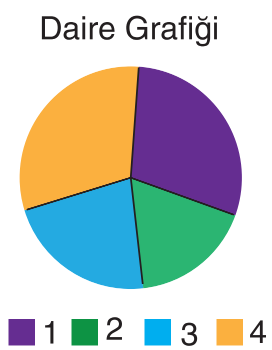

### Sütun Grafiği

Veri gruplarını karşılaştırmak için dik koordinat düzleminde yatay ya da düşey olacak şekilde sütun ya da çubuk kullanılarak çizilen grafik türüdür. Sütun grafiği kesikli veriler için kullanılır.



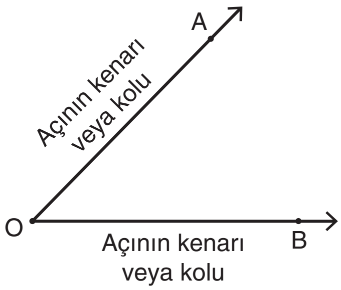

### Daire Grafiği

Verilerin bütüne olan oranını daire dilimleri şeklinde gösteren grafik türüdür. Verilerin veri grubu içindeki oranı karşılaştırılmak isteniyorsa kullanılır. Veriler daire grafiğine merkez açıyla orantılı olarak yerleştirilir.



## AÇI KAVRAMI

- Düzlemde başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşiminin oluşturduğu açıklığa **açı** denir.

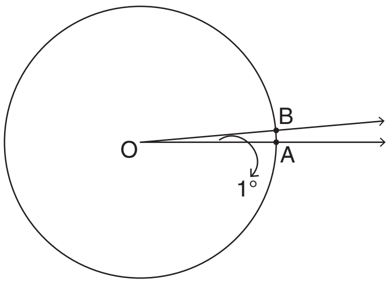



[OA ve [OB ışınlarına açının kolları, O noktasına açının **köşesi** denir.

- Açılar adlandırılırken açının köşe ve kolları üzerindeki noktalar kullanılır. Örneğin şekildeki açı $\widehat{AOB}, \widehat{BOA}$ veya $\widehat{O}$ şeklinde adlandırılır.

## AÇININ ÖLÇÜSÜ

- Tam çember yayının (çevresinin) 360 eş parçasından birini gören merkez açının ölçüsüne **1 derecelik açı** denir ve 1° ile gösterilir.



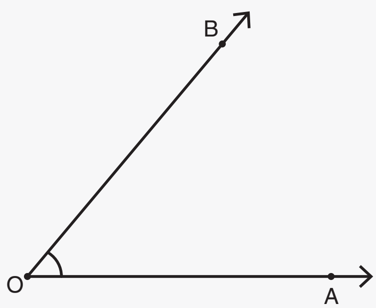

AB yayı, çemberin çevresinin 360'ta biri ise $m(\widehat{AOB}) = 1^\circ$ olur.

## AÇI ÇEŞİTLERİ

### KRİTİK BİLGİ

**DAR AÇI**

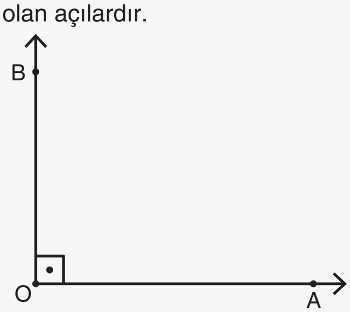
Ölçüsü $0 < m(\widehat{AOB}) < 90^\circ$ olan açılardır.




### KRİTİK BİLGİ

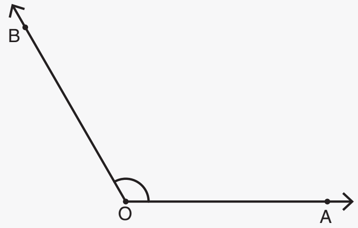
**DİK AÇI**

Ölçüsü 90° olan açılardır.



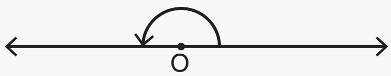
### GENİŞ AÇI

Ölçüsü $90^\circ < m(\widehat{AOB}) < 180^\circ$ olan açılardır.



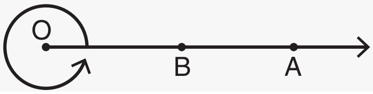

### DOĞRU AÇI

Ölçüsü 180° olan açılardır.



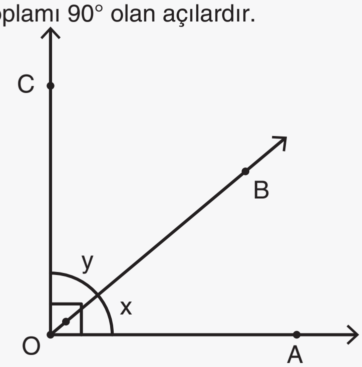

### TAM AÇI

Ölçüsü 360° olan açılardır.



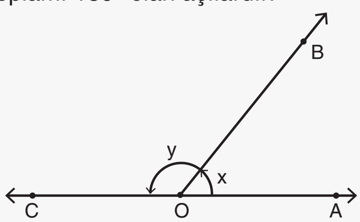

### TÜMLER AÇILAR

Ölçüleri toplamı 90° olan açılardır.



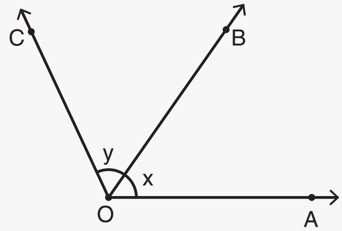

### BÜTÜNLER AÇILAR

Ölçüleri toplamı 180° olan açılardır.




### KOMŞU AÇILAR

Birer ışını ortak olan açılara denir.



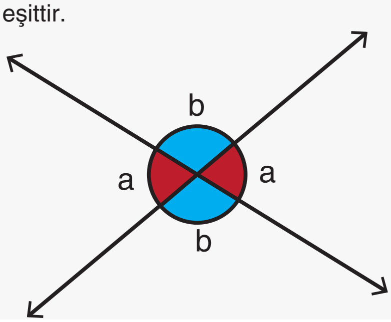

### NOT

Hem komşu hem de tümler olan açılara **komşu tümler açılar** denir.

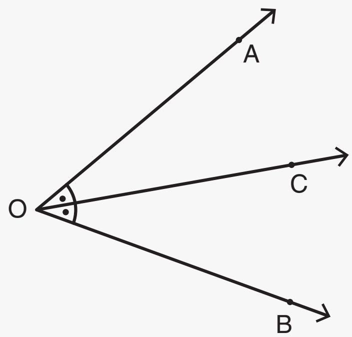
Hem komşu hem de bütünler olan açılara **komşu bütünler açılar** denir.

### TERS AÇILAR

Birbirini kesen iki doğrunun oluşturduğu açılardan komşu olmayan açılara **ters açılar** denir. Ters açıların ölçüleri birbirine eşittir.




### AÇIORTAY




$m(\widehat{AOC}) = m(\widehat{COB})$ olduğundan [OC, $(\widehat{AOB})$ 'nın açıortayıdır.

## Yöndeş Açılar

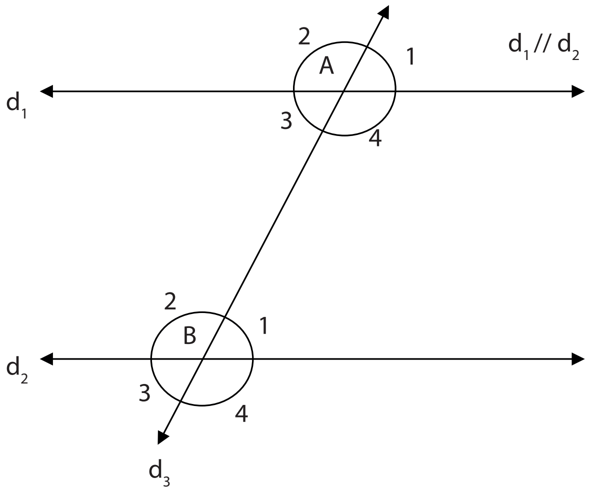
Aynı yönlü açılara **yöndeş açılar** denir.

## İç Ters Açılar

Birer ışınları paralel zıt yönlü, diğer ışınları ortak olan zıt yönlü açılara **iç ters açıla**r denir.

## Dış Ters Açılar

Birer ışınları aynı doğru üzerinde zıt yönlü, diğer ışınları farklı doğru üzerinde paralel olan zıt yönlü açılara **dış ters açılar denir.**




Yöndeş Açılar

- $A_1 = B_1$
- $A_2 = B_2$
- $A_3 = B_3$
- $A_4 = B_4$

İç Ters Açılar

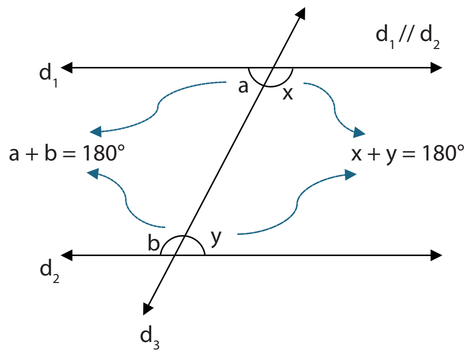
- $A_3 = B_1$
- $A_4 = B_2$

Dış Ters Açılar

- $A_1 = B_3$
- $A_2 = B_4$

## Karşı Durumlu Açılar

Karşı durumlu açıların ölçüleri toplamı 180° dir.



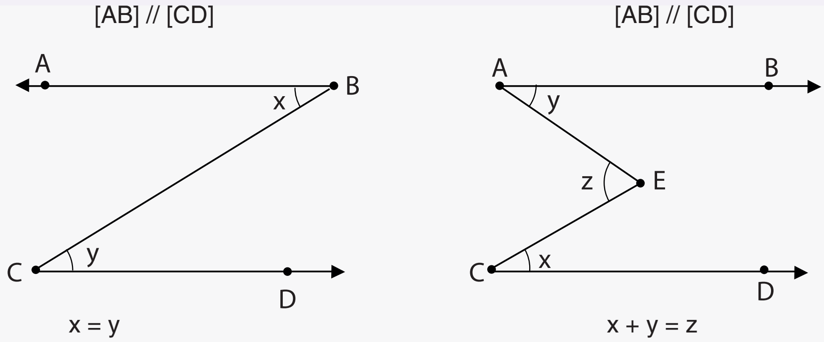

Karşı Durumlu Açılar

- a ile b
- x ile y

karşı durumlu açılardır.

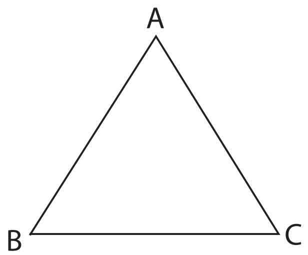
- a + b = 180°
- x + y = 180°

### NOT



## Üçgen Nedir?

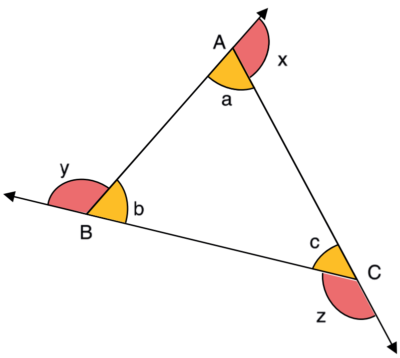
Aynı düzlemde bulunan ve doğrusal olmayan üç noktayı birleştiren doğru parçalarının birleşimine **üçgen** denir.




$[AB] \cup [BC] \cup [CA] = \widehat{ABC}$

- A, B ve C noktaları üçgenin köşeleridir.
- [AB], [BC], [CA] üçgenin kenarlarıdır.

## Üçgende Açı Özellikleri




1. Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180° dir.

   $a + b + c = 180°$

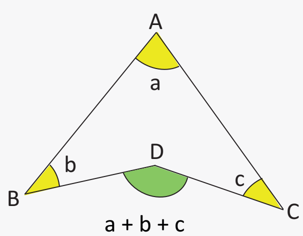
2. Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360° dir.

   $x + y + z = 360°$

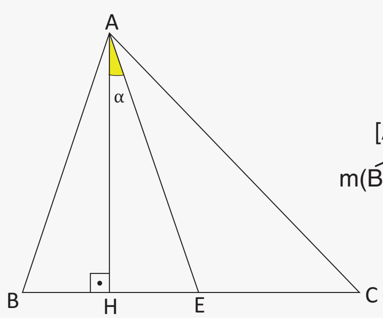
3. Üçgenlerde bir dış açının ölçüsü, kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.

   $a + b = z \qquad a + c = y \qquad b + c = x$

### KRİTİK BİLGİ




$m(\widehat{BDC}) = a + b + c$




$[AH] \perp [BC]$

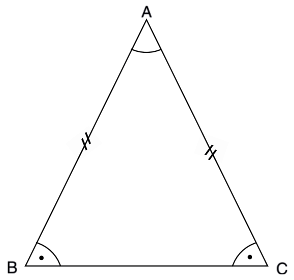
$m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{EAC})$

Bir üçgende aynı köşeden çizilen, yükseklik ve açıortay arasındaki açının ölçüsü, diğer köşelerdeki açıların farklarının yarısına eşittir.

$$m(\widehat{HAE}) = \alpha = \frac{|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})|}{2}$$

## İkizkenar Üçgen

İki kenar uzunluğu eşit olan üçgenlere **ikizkenar üçgen** denir.

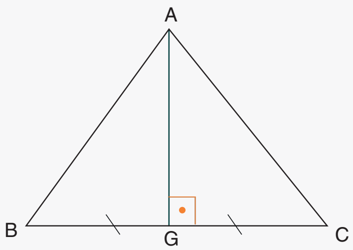



ABC ikizkenar üçgen
$|AB| = |AC|$ olmak üzere
$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$
[BC] taban
[AB] ve [AC] yan kenarlar
$\widehat{B}$ ve $\widehat{C}$ taban açıları
$\widehat{A}$ tepe açısıdır.

- Bir açısı bilinen ikizkenar üçgenlerin tüm açılarının ölçüleri bulunabilir.
- İkizkenar üçgende taban açıları aynı harfle harflendirilerek çözüme başlanılabilir.

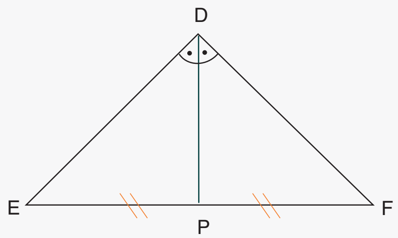
### KRİTİK BİLGİ

Bir ikizkenar üçgenin tepe noktasından çizilen yükseklik, hem açıortay hem de kenarortaydır.



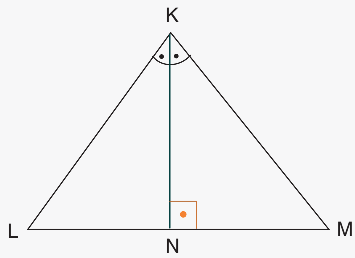

ABC üçgeni ikizkenar üçgen olup

$|AB| = |AC|$




DEF üçgeni ikizkenar üçgen olup

$|DE| = |DF|$

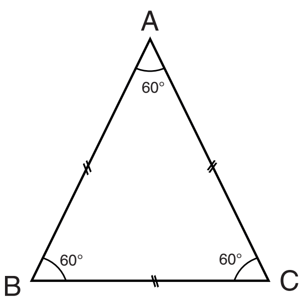



KLM üçgeni ikizkenar üçgen olup

$|KL| = |KM|$

## Eşkenar Üçgen

Kenarlarının uzunlukları birbirine eşit olan üçgene **eşkenar üçgen** denir.



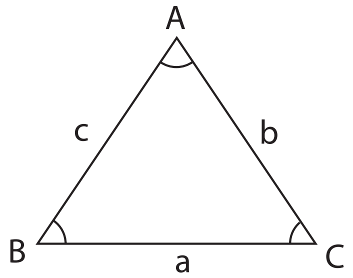

ABC eşkenar üçgeninde
$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 60°$
$|AB| = |AC| = |BC|$
olur.

- Eşkenar üçgende kenar eşitlikleri soru üzerinde belirtilerek çözüme başlanılabilir.
- Eşkenar üçgende açılar eşit olduğundan tüm açıların ölçülerinin 60° olduğu kullanılabilir.

Kenarlarının uzunlukları birbirinden farklı olan üçgene **çeşitkenar üçgen** denir.

**Üçgende Açı – Kenar Bağıntıları**

Bir üçgende büyük açının karşısındaki kenarın uzunluğu, küçük açının karşısındaki kenarın uzunluğundan büyüktür.




ABC üçgeninde

$m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C}) \Rightarrow a > b > c$

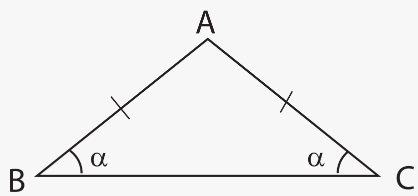
$a > b > c \Rightarrow m(\widehat{A}) > m(\widehat{B}) > m(\widehat{C})$

- Bir üçgende eşit açılar karşısındaki kenarların uzunlukları eşittir.
- Aynı açılara sahip iki farklı üçgende eşit açıların karşısındaki kenar uzunlukları eşit olmayabilir.

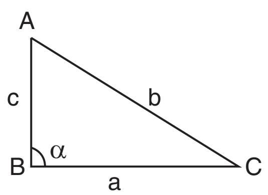
**DİKKAT**

Herhangi bir ikizkenar üçgenin taban açıları daima dar açıdır.

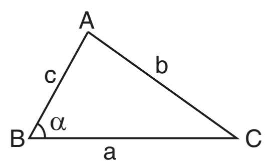
Şekilde ABC ikizkenar üçgen olduğundan $\alpha < 90°$ olur.



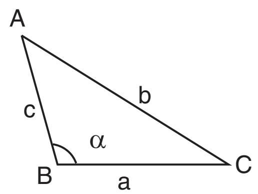

**Dar ve Geniş Açılı Üçgenlerde Açı – Kenar Bağıntıları**




ABC üçgeninde $\alpha = 90°$ → $b^2 = a^2 + c^2$

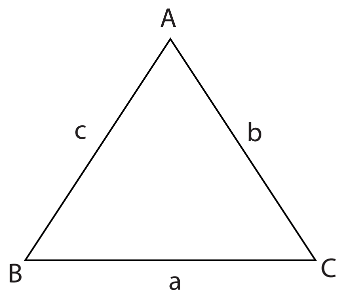



ABC üçgeninde $\alpha < 90°$ → $b^2 < a^2 + c^2$




ABC üçgeninde $\alpha > 90°$ → $b^2 > a^2 + c^2$

Bir üçgende herhangi iki kenar uzunluğunun toplamı, üçüncü kenarın uzunluğundan büyüktür.




- $c < a + b$
- $b < a + c$
- $a < c + b$

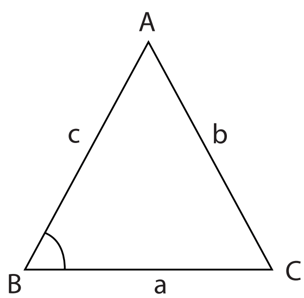
ABC üçgeninde herhangi bir kenar uzunluğu, diğer iki kenar uzunluğu toplamından küçük; farklarının mutlak değerinden büyüktür. Bu bağıntıya **üçgen eşitsizliği** denir.

- $|a - b| < c < a + b$
- $|a - c| < b < a + c$
- $|b - c| < a < b + c$

**DİKKAT**

Üç doğru parçasının uzunlukları üçgen eşitsizliklerinden birini sağlıyorsa bu doğruları kenar kabul eden üçgen çizilebilir.

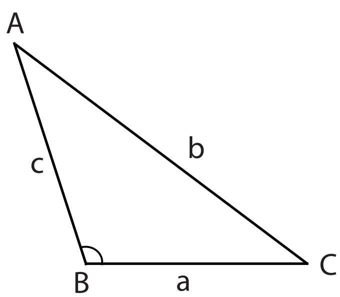
**Dar açılı ve geniş açılı üçgenlerde açı ve kenarlar arasındaki ilişkiler:**




ABC dar açılı üçgen ise

$m(\widehat{B}) < 90°$ olduğundan

$|a - c| < b < \sqrt{a^2 + c^2}$ olur.




ABC geniş açılı üçgen

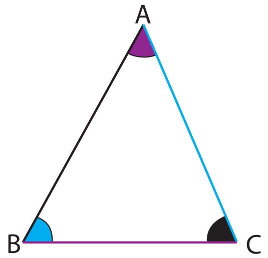
ve $m(\widehat{B}) > 90°$ ise

$a + c > b > \sqrt{a^2 + c^2}$ olur.

**Üçgenlerde Eşlik**

Karşılıklı kenar uzunlukları ve bu kenarların karşılarındaki açılarının ölçüleri eşit olan üçgenler eştir.

ABC ile DEF üçgenlerinin karşılıklı açı ölçüleri ve karşılıklı kenar uzunlukları eşit ise bu üçgenlere **eş üçgenler** denir. $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ ile gösterilir.




$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ ise

kenarları arasında

$|AB| = |DE|$

$|BC| = |EF|$

$|AC| = |DF|$

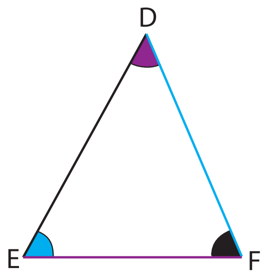
açıları arasında

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$

eşitlikleri vardır.




- İki üçgenin eş olması için karşılıklı bütün açılarının ölçüleri ve karşılıklı bütün kenarlarının uzunlukları eşit olmalıdır.
- Verilen üçgenlerde en az biri kenar olmak üzere üçer elemanının eş olması üçgenlerin eşliği için yeterlidir.

İki üçgen verildiğinde üçgenlerin eş olup olmadığını belirlemek için

Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) Eşlik Kuralı

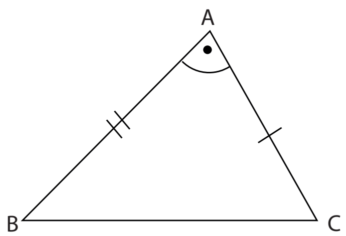
Açı-Kenar-Açı (A.K.A.) Eşlik Kuralı

Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Eşlik Kuralı

kurallarından birine uyup uymadığına bakılır.

**Kenar - Açı - Kenar (K.A.K.) Eşlik Teoremi**

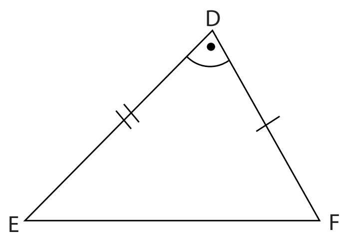
Karşılıklıiki kenarı ve bu iki kenarın oluşturduğu açılarının ölçüleri eşit olan üçgenler eştir. Bu durum **Kenar - Açı - Kenar (K.A.K.) eşliği** olarak isimlendirilir.




$|AB| = |DE|$

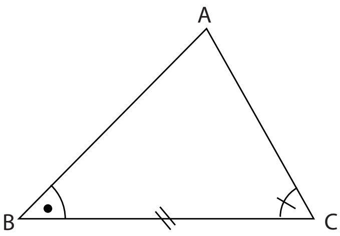
$|AC| = |DF|$

$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDF})$



**Açı - Kenar - Açı (A.K.A.) Eşlik Teoremi**

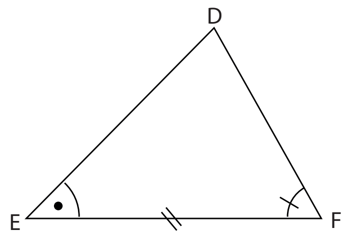
Karşılıklı olarak ikişer açısının ölçüsü eşit ve eşit açılar arasındaki kenar uzunlukları da aynı olan üçgenler eştir. Bu durum **Açı - Kenar-Açı (A.K.A.) eşliği** olarak isimlendirilir.




$|BC| = |EF|$

$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEF})$

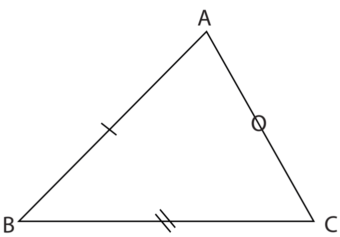
$m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{DFE})$




**Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K.)**

Kenarları arasındaki bire bir eşleme ile karşılıklı kenarları eş olan üçgenlere eş üçgenler denir.

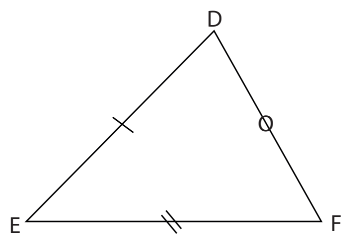
Bu eşlik **Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K.) eşliği** olarak isimlendirilir.




$|AB| = |DE|$

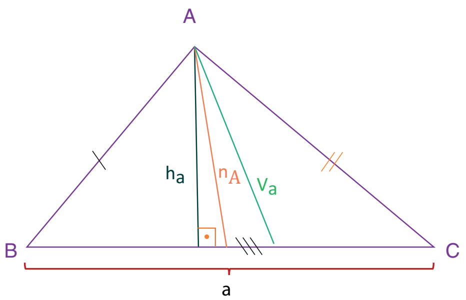
$|AC| = |DF|$

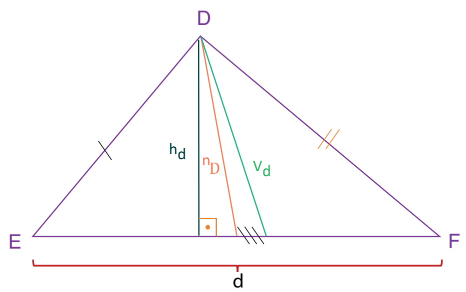
$|BC| = |EF|$




**Eş iki üçgenin**

- Karşılıklı açıortay uzunlukları
- Karşılıklı kenarortay uzunlukları
- Karşılıklı yükseklikleri eştir.

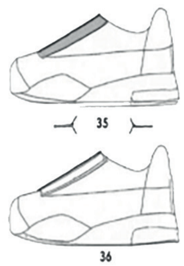



$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ → $h_a = h_d$ → $n_A = n_D$ → $V_a = V_d$

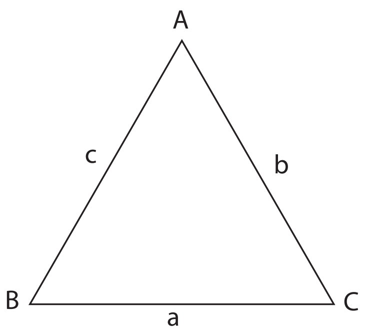
## Benzerlik

Geometri, matematiğin somut ve görsel bir yönüdür ve günlük hayatta da sıklıkla karşımıza çıkar. Geometrik benzerlik kavramı, objelerin birbirine benzemesini ve birbirlerine benzer özelliklere sahip olmalarını ifade eder. Bu kavram, günlük hayatta da pek çok yerde kullanılır ve birçok alanda bize rehberlik eder. Örneğin;

| | | |
|---|---|---|
| Satranç taşı olan at figürü kullanılarak aynı iki model ve farklı boyutta olan taşlar benzerdir. | Aldığınız ayakkabılarda aynı modellerin farklı numaraları benzerdir. | Bir görselin üçgen şeklinde iki farklı boyutta resmi çekildiğinde bu üçgenler benzerdir. |
|  |  |  |

## Üçgenlerde Benzerlik

Karşılıklı köşeleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ve karşılıklı açıların ölçüleri eşit olan üçgenlere **benzer üçgenler** denir. Benzer üçgenlerde benzerlik "~" sembolü ile gösterilir.



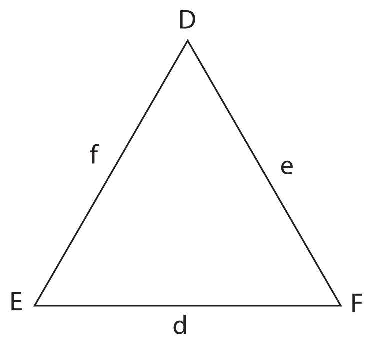

$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ise

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$

$m(\widehat{C}) = m(\widehat{F})$

ve $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$ olur.




İki üçgen verildiğinde üçgenlerin benzer olup olmadığını belirlemek için

Kenar-Açı-Kenar (K.A.K.) Benzerlik kuralı

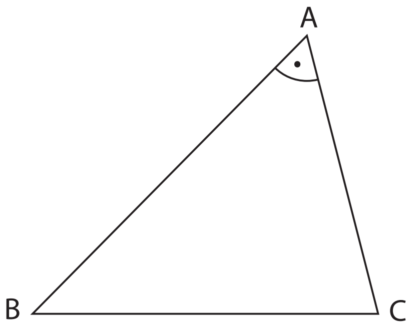
Açı-Açı (A.A.) Benzerlik kuralı

Kenar-Kenar-Kenar (K.K.K.) Benzerlik Kuralı

kurallarından birine uyup uymadığına bakılır.

### Kenar - Açı - Kenar (K.A.K.) Benzerlik Teoremi

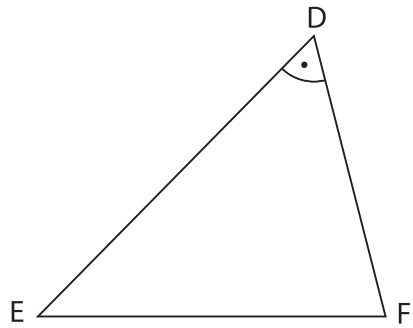
Karşılıklı iki kenar uzunluğu orantılı ve bu kenarların oluşturduğu açıların ölçüleri eşit olan üçgenler benzer olur. Bu benzerliğe **Kenar - Açı - Kenar (K. A. K.) benzerlik kuralı** denir.




$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$$

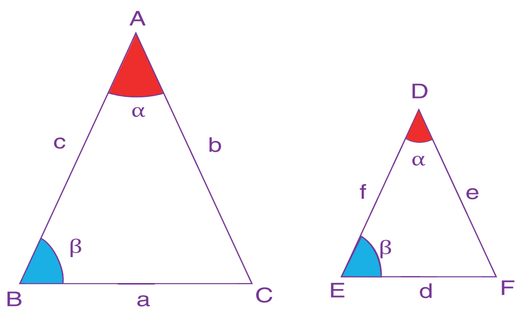
$$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$$

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$$




### Açı - Açı (A.A) Benzerlik Kuralı

İki üçgen arasındaki bire bir eşlemede karşılıklı ikişer açının ölçüleri eşit ise bu üçgenlere benzerdir denir. Bu benzerliğe **Açı - Açı (A. A.) benzerlik kuralı** denir.



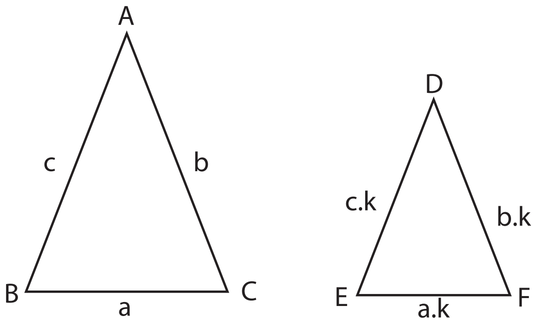

$$m(\widehat{A}) = m(\widehat{D})$$

$$m(\widehat{B}) = m(\widehat{E})$$

$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$$

### Kenar - Kenar - Kenar (K.K.K.) Benzerlik Kuralı

Köşeleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı kenar uzunlukları orantılı olan üçgenler benzer olur. Bu benzerliğe **Kenar - Kenar - Kenar (K. K. K.) benzerlik kuralı** denir.




$$\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$$

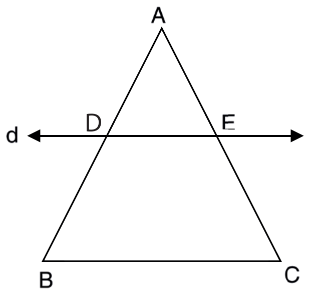
**Benzer üçgenlerin;**

- Karşılıklı yüksekliklerinin uzunlukarının oranı
- Karşılıklı açıortaylarının uzunluklarının oranı
- Karşılıklı kenarortaylarının uzunluklarının oranı
- Çevre uzunluklarının oranı

aynı benzerlik oranına sahiptir.

## Temel Orantı Teoremi

Bir üçgenin bir kenarına paralel olan ve diğer iki kenarı farklı noktalarda kesen doğru, kestiği kenarlar üzerinde orantılı parçalar oluşturur.



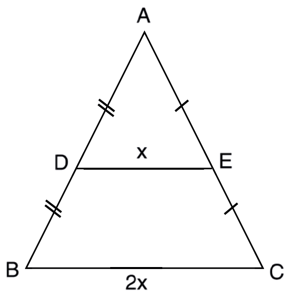

d // [BC]

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$$

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|BC|}$$ olur.

## Orta Taban

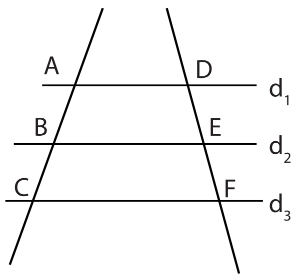
Bir üçgenin iki kenarının orta noktalarını birleştiren doğru parçası üçgenin diğer kenarına paralel olur. Bu doğru parçasına üçgenin **orta tabanı** denir.




$[DE] // [BC] \Rightarrow \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{1}{2}$

## Thales Teoremi

Birbirine paralel en az üç doğru farklı iki kesen üzerinde orantılı doğru parçaları oluşturur.



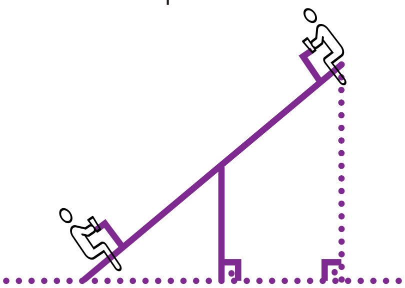

$d_1 // d_2 // d_3$ ise

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$$ olur.

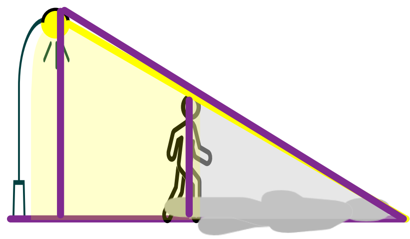
## Benzerlik Uygulamaları

Aşağıda benzerlik ile ilgili bazı uygulama örnekleri verilmiştir.

Aşağıdaki şekilde bir tahterevalli kullanılarak benzerlik modellemesi yapılmıştır. Bu modellemede bilinmeyen uzunluklar temel orantı teoremi kullanılarak hesaplanabilir.

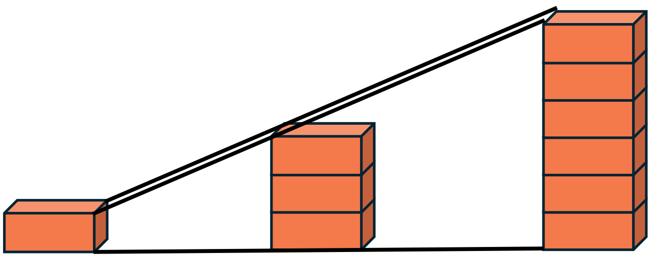


Aşağıdaki şekilde ışık kaynağı ve oluşan gölge boyu kullanılarak benzerlik modellemesi yapılmıştır. Bu modellemede bilinmeyen uzunluklar temel orantı teoremi kullanılarak hesaplanabilir.



**Örnek**

Düz bir zemine dikdörtgenler prizması şeklindeki on adet özdeş tuğla ve üstteki tuğlaların birer ayrıtına değecek biçimde bir merdiven aşağıdaki gibi yerleştirilmiştir.



**Bir tuğla ile üç tuğla arasında bulunan uzaklık 40 santimetre olduğuna göre üç tuğla ile altı tuğla arasındaki uzaklık kaç santimetredir?**

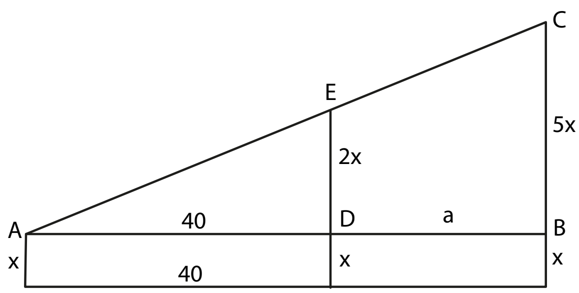
**Çözüm:**

Şekil aşağıdaki gibi çizilip her bir tuğlanın kısa kenar uzunluğuna x cm denilirse |ED|= 2x ve |BC| = 5x olur. |DB| = a olmak üzere ; ABC üçgeninde temel orantı teoremi yazılırsa ,

$$\frac{40}{(40+a)} = \frac{2}{5}$$

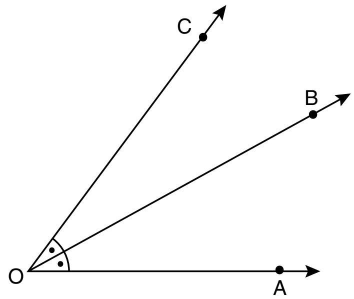
$200 = 80 + 2a$

$a = 60$ cm olarak bulunur.



## Açıortay ve Özellikleri

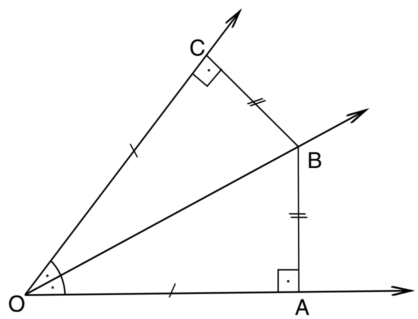
Bir açıyı iki eş açıya ayıran ışına **açıortay** denir.




$m(\widehat{AOB}) = m(\widehat{BOC})$

$[OB$, $\widehat{AOC}$ nın açıortayıdır.

Açıortay üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına indirilen dikmelerin uzunlukları eşittir.



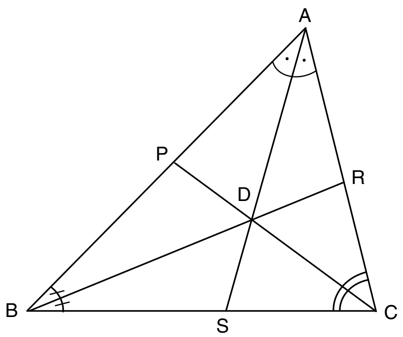

$[OB$ açıortay, $[AB] \perp [OA$ ve $[BC] \perp [OC$ ise

$|AB| = |BC|$

$|OA| = |OC|$

## Üçgende İç Açıortay

- Bir üçgenin bir iç açısını iki eş parçaya ayıran ışına o üçgenin **iç açıortayı** denir. [AS], [BR] ve [CP] ABC üçgeninin iç açıortaylarıdır.
- Üçgende iç açıortaylar bir noktada kesişir ve bu noktaya **iç teğet çemberin merkezi** denir.
- Üçgenin herhangi iki köşesine ait iç açıortayların kesiştiği nokta D ise diğer köşeden gelen açıortay da D noktasından geçer.



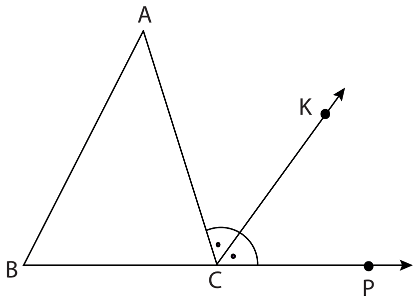

$|AS| = n_A$

$|BR| = n_B$

$|CP| = n_C$

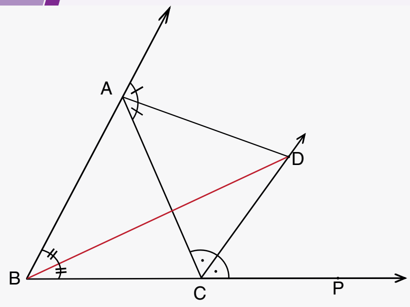
## Üçgende Dış Açıortay

Bir üçgenin bir dış açısını iki eş parçaya ayıran ışına o üçgenin **dış açıortayı** denir.

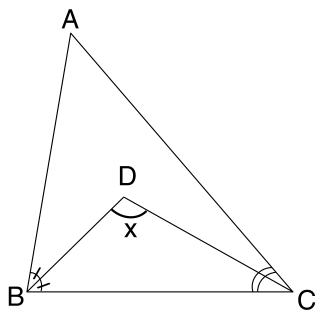



[CK, ABC üçgeninin dış açıortayıdır.

**DİKKAT**

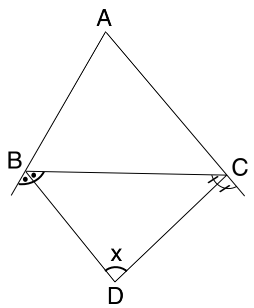



Üçgende herhangi iki köşeye ait dış açıortayların kesiştiği nokta D ise diğer köşeye ait iç açıortay da D noktasından geçer. Bu durumda “Herhangi iki açıortayın kesiştiği noktaya diğer köşeden çizilen doğru parçası da açıortaydır.” sonucu elde edilir.



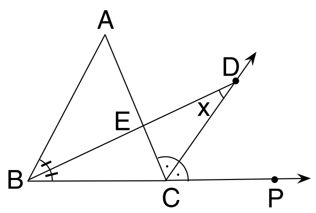

ABC üçgeninde [BD] ve [CD] iç açıortay ise

$m(\widehat{BDC}) = x = 90^0 + \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ olur.




ABC üçgeninde [BD] ve [CD] dış açıortay ise

$m(\widehat{BDC}) = x = 90^0 - \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ olur.

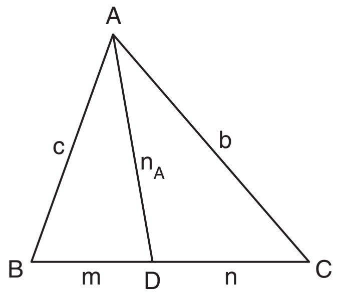



ABC üçgeninde [BE] iç açıortay ve [CD] dış açıortay ise

$m(\widehat{BDC}) = x = \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$ olur.

### Üçgende İç Açıortay Teoremi

ABC üçgeninin A köşesine ait iç açıortayı [AD] ise




$$\frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b} = \frac{m}{n}$$

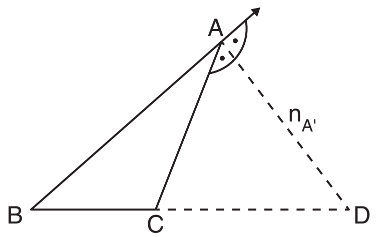
$|AD| = n_A$ ile gösterilir.

**KRİTİK BİLGİ**

İkizkenar üçgende tepe açısından tabana çizilen açıortay aynı zamanda yükseklik ve kenarortaydır.

### Üçgende Dış Açıortay Teoremi

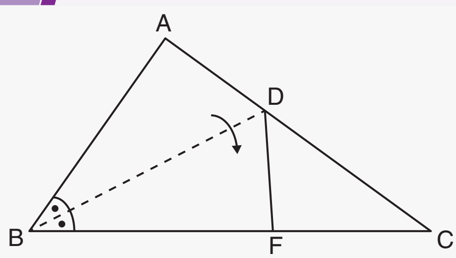
Bir ABC üçgeninde A köşesindeki açının dış açıortayı [BC]'nın uzantısını D noktasında kesiyorsa;




$$\frac{|DC|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|BA|}$$

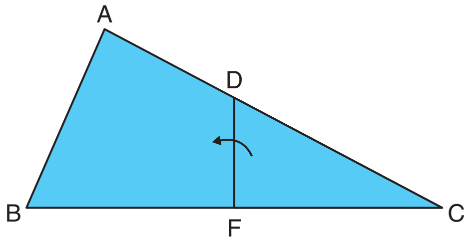
$|AD| = n_{A'}$ ile gösterilir.

**KRİTİK BİLGİ**

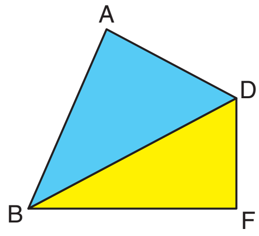



Üçgen şeklinde bir kağıt parçası hazırlanarak köşelerine A, B, C denilir. Daha sonra [AB], [BC]'nın üzerine gelecek şekilde katlanır. [AC]'nın katlandığı noktaya D denirse kâğıt geri açıldığında görülen katlama çizgisi [BD], B köşesine ait iç açıortaydır.

Aşağıda Şekil I'de ön yüzü mavi arka yüzü sarı olan ABC üçgeni şeklinde kâğıt [DF] boyunca katlandığında C noktası ile B noktası çakışıp Şekil II elde ediliyor.




Şekil I

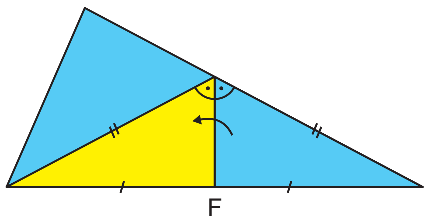



Şekil II

Bu şekilde çözüm metodu geliştirilirse;

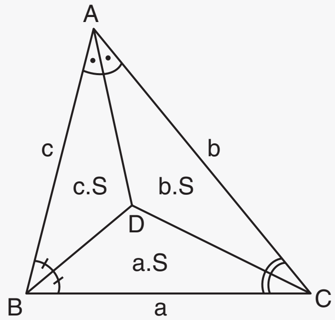
Öncelikle katlanmış kısım açılarak, Şekil 3 ve aşağıdaki bilgiler elde edilir.

- [FD] açıortaydır.
- [DF] $\perp$ [BC]
- BDC üçgeni ikizkenar üçgen
- $|BD| = |DC|$
- $|FB| = |FC|$




Şekil III

## KRİTİK BİLGİ

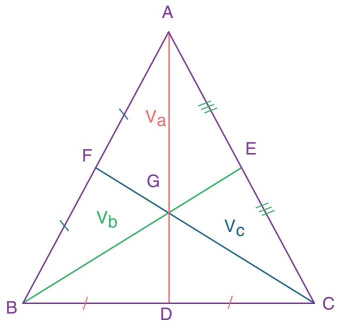



ABC üçgeninde D noktası iç açıortayların kesiştiği noktadır.

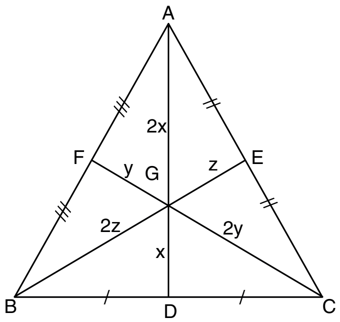
İç açıortayların birleştirilmesiyle oluşan üçgenlerin alanları taban kenarlarıyla orantılıdır.

## Üçgende Kenarortay

Üçgenin bir köşesinden karşı kenarın orta noktasına çizilen ve bu kenarı iki eşit uzunluğa bölen doğru parçasına **kenarortay** denir.

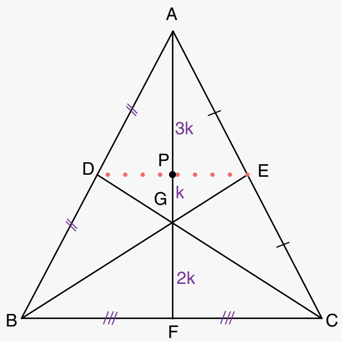



- Kenarortaylar üçgenin içinde bir noktada kesişir.
- Bu noktaya üçgenin **ağırlık merkezi** denir.
- G noktası, ABC üçgeninin ağırlık merkezidir.




- Ağırlık merkezinin köşeye uzaklığı kenarın orta noktasına uzaklığının iki katıdır.

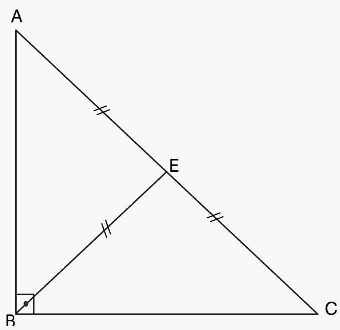
### KRİTİK BİLGİ




Orta taban ve ağırlık merkezi verildiğinde köşeden tabana 3,1,2 oranı olduğunu unutmayınız.

$|AP| = 3k$, $|PG| = k$ ve $|GF| = 2k$

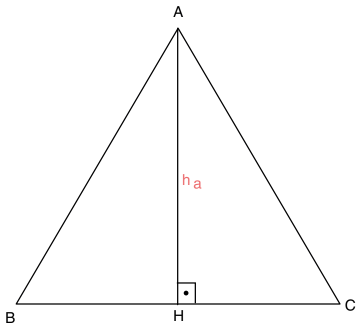
### KRİTİK BİLGİ




Bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortayın uzunluğu, hipotenüsün uzunluğunun yarısına eşittir.

$m(\widehat{B}) = 90°$ ve $|AE| = |EC|$ ise $|BE| = |AE| = |EC|$ olur.

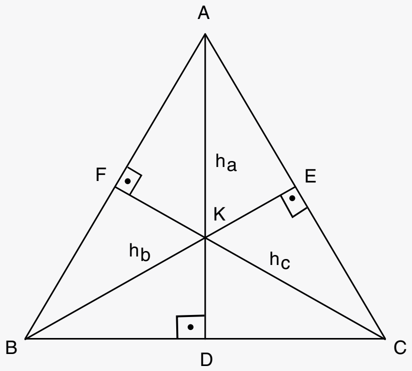
Bir üçgende herhangi bir köşeden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına dik olarak indirilen doğru parçasına o kenara ait **yükseklik** denir.




- Şekilde [AH], [BC]' nın yüksekliğidir.
- H noktasına **dikme ayağı** denir.
- |AH|= $h_a$ ile gösterilir.

## KRİTİK BİLGİ

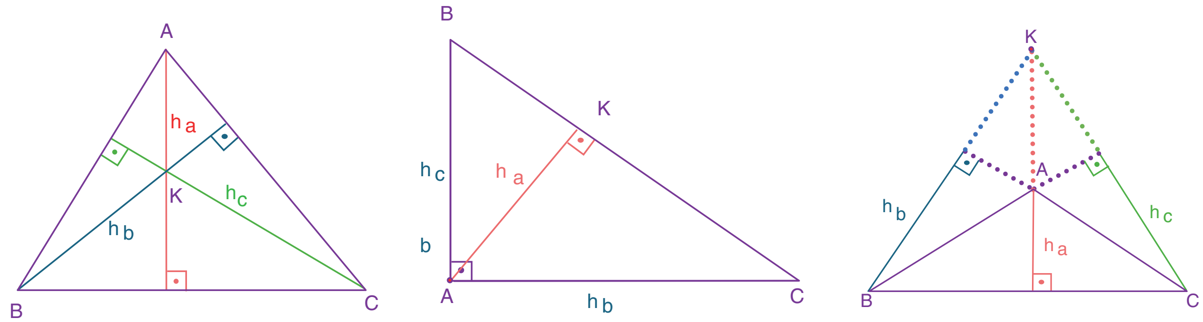
Üçgenin yükseklikleri bir noktada kesişir. Bu noktaya **diklik merkezi** denir.



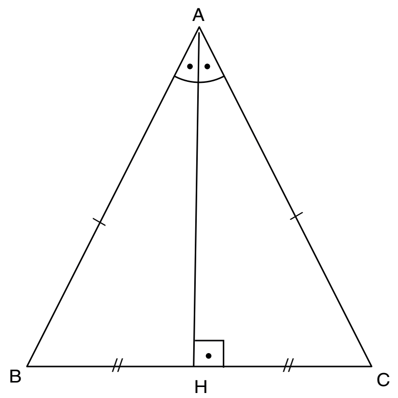

K noktası ABC üçgeninin diklik merkezidir.

### Üçgenin Çeşidine Göre Yüksekliklerin Kesiştiği Noktanın Konumu

| Dar açılı üçgen | Dik açılı üçgen | Geniş açılı |
|---|---|---|

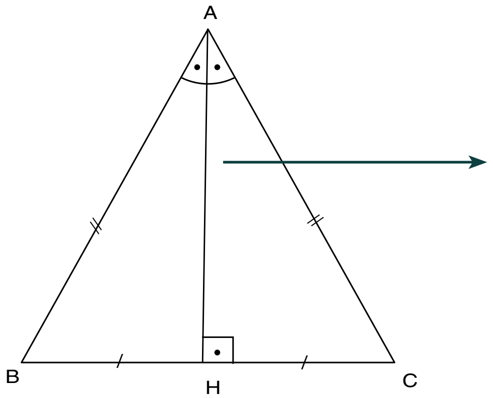


## İkizkenar Üçgende Yükseklik



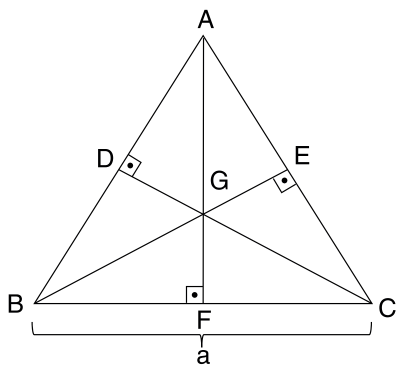

$[AH] \perp [BC]$ ve $|AB| = |AC|$

- $|BH| = |HC|$
- $m(B\widehat{A}H) = m(H\widehat{A}C)$




ABC ikizkenar üçgen ve
$|AB| = |AC|$ ise [AH] ; kenarortay, açıortay ve yüksekliktir.

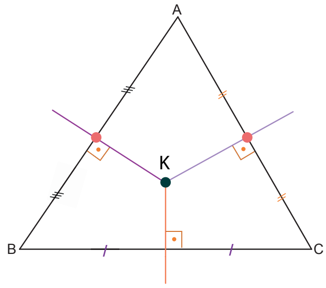
## Eşkenar Üçgende Yükseklik




- Eşkenar üçgenin köşelerinden çizilen yükseklikler eşittir.
- Eşkenar üçgende yükseklikler hem açıortay hem de kenarortaydır.
- Bir kenarı a olan ABC eşkenar üçgeninde

  $|AF| = |BE| = |CD| = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ olur.

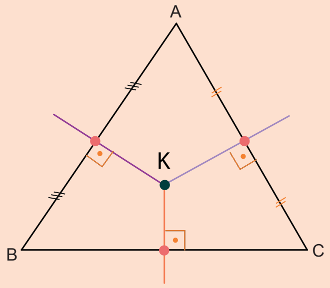
Üçgenin herhangi bir kenarının orta noktasından geçen ve bu kenara dik olan doğru parçasına **kenar orta dikme** denir.




- Üçgenin kenar orta dikmeleri bir noktada kesişir.
- K noktası kenar orta dikmelerin kesiştiği noktadır.

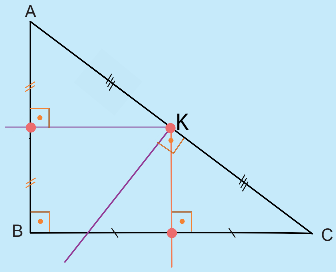
### Üçgenin Çeşidine Göre Kenar Orta Dikmelerin Kesiştiği Noktanın Konumu

**Dar Açılı Üçgen**



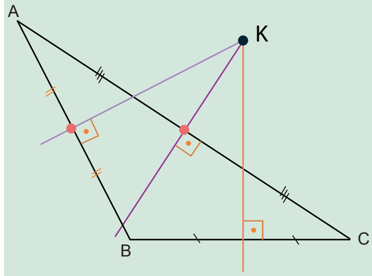

Dar açılı bir üçgende kenar orta dikmeler üçgenin iç bölgesinde bir noktada kesişir. K noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktasıdır.

**Dik Üçgen**



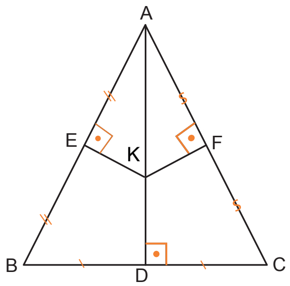

Dik açılı bir üçgende kenar orta dikmeler hipotenüs üzerinde bir noktada kesişir. K noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktasıdır.

**Geniş Açılı Üçgen**



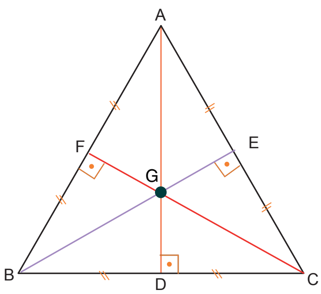

Geniş açılı bir üçgende kenar orta dikmeler üçgenin dışında bir noktada kesişir. K noktası kenar orta dikmelerin kesişim noktasıdır.

### İkizkenar Üçgende Kenar Orta Dikme




K noktası kenar orta dikmelerin kesiştiği noktadır

### Eşkenar Üçgende Kenar Orta Dikme

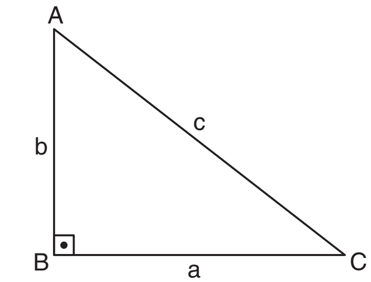



ABC eşkenar üçgeninde G noktası

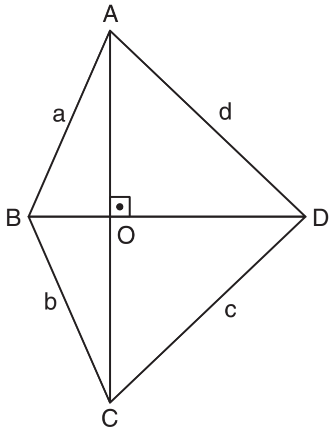
- Ağırlık merkezi
- Kenar orta dikmelerin kesişim noktası
- Açıortayların kesişim noktası
- Yüksekliklerin kesişim noktasıdır.

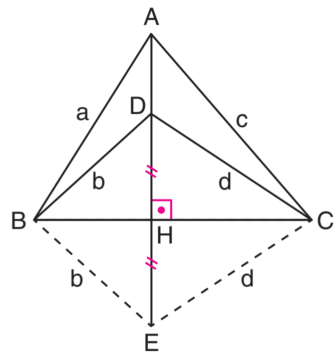
**Pisagor Teoremi**

Bir dik üçgende dik kenar uzunluklarının kareleri toplamı hipotenüs uzunluğunun karesine eşittir.




$a^2 + b^2 = c^2$

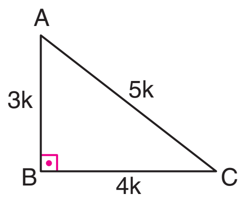


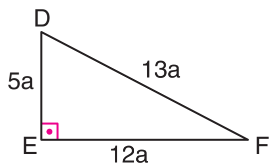



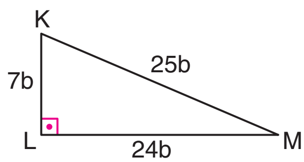

$[AC] \perp [BD] \Rightarrow a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

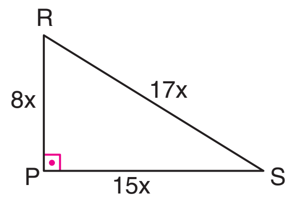
$[AH] \perp [BC] \Rightarrow a^2 + d^2 = b^2 + c^2$

**Kenar Uzunlukları Tam sayı Olan Özel Dik Üçgenler**

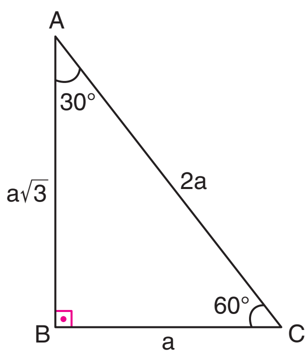


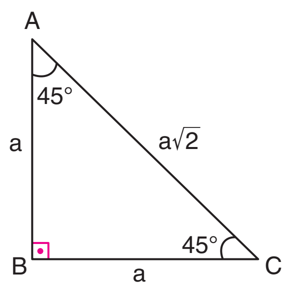



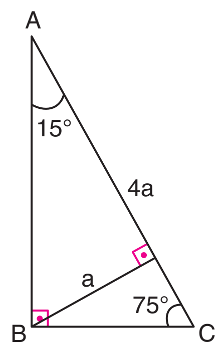

**İç Açı Ölçülerine Göre Özel Dik Üçgenler**




30° - 60° - 90° Üçgeni




45° - 45° - 90° Üçgeni



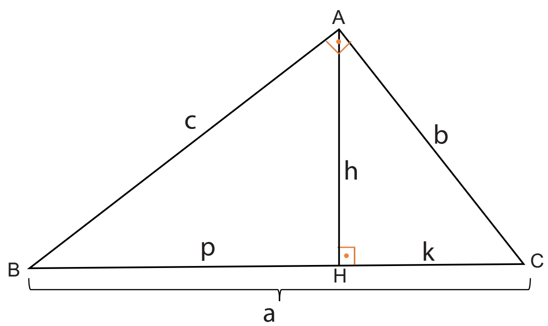

15° - 75° - 90° Üçgeni

Öklid geometri dünyasındaki seçkin yerini kendisinin büyük bir matematikçi olmasından çok geometrinin başlangıcından kendi zamanına kadar bilinenleri "Ögeler" adını verdiği kitabında toplaması nedeni ile elde etmiştir. Ögeler; dilden dile çevrilmiş, yüzlerce kez kopya edilmiş, matbaanın icadından sonra da binlerce kez gözden geçirilerek yeniden basılmıştır. Öklid, derlemesinin tutarlı bir bütün olmasını sağlamak için kanıt gerektirmeyen apaçık gerçekler olarak 5 aksiyom ortaya koymuş, diğer bütün önermeleri bu aksiyomlardan elde etmiştir. Bu aksiyomlar şunlardır:

- İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
- Bir doğru parçası iki yöne de sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
- Merkezi ve üzerinde bir noktası verilen bir çember çizilebilir.
- Bütün dik açılar eşittir.
- Bir doğruya bu doğrunun dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel doğru çizilir.

### Üçgende Öklid Teoremi

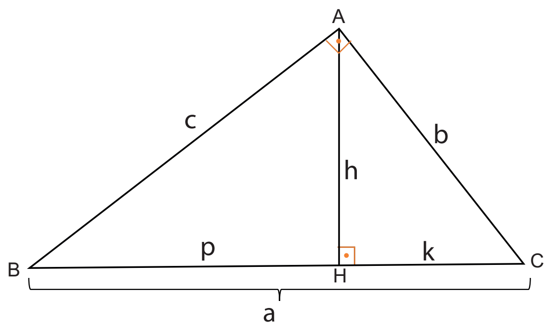
Bir dik üçgende dik açının olduğu köşeden karşı kenara indirilen dikme için




$[AB] \perp [AC]$ ve $[AH] \perp [BC]$

- $h^2 = p \cdot k$
- $c^2 = p \cdot a$
- $b^2 = k \cdot a$

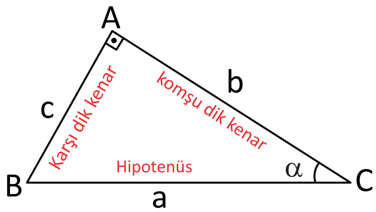
eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklere **Öklid teoremi** denir.




ABC dik üçgeninde Öklid teoremine ek olarak,

Pisagor teoreminden $b^2 + c^2 = a^2$ yazılarak |BC| bulunur ve

ABC üçgeninin iki farklı alan bağıntısı eşitliğinden $A(\widehat{ABC}) = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{a \cdot h}{2}$ yazılarak $h = \frac{b \cdot c}{a}$ olarak bulunur.




Şekildeki ABC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 90°$ ve $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ olsun.

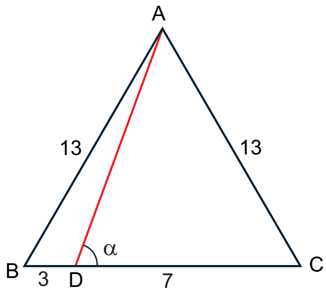
$\sin\alpha = \frac{c}{a}$ $\cos\alpha = \frac{b}{a}$

$\tan\alpha = \frac{c}{b}$ $\cot\alpha = \frac{b}{c}$ olur.

**Örnek:**

Şekildeki ABC üçgeninde B,D ve C noktaları doğrusal;

|AB| = |AC| = 13 cm, |BD| = 3 cm , |DC| = 7 cm'dir.




$m(\widehat{ADC}) = \alpha$ **olduğuna göre** $\tan\alpha$ **değerini bulunuz.**

**Çözüm:**

ABC üçgeni ikizkenar üçgendir.İkizkenar üçgenin tepe açısından indirilen dikme, aynı zamanda kenarortay olduğundan |BH| = |HC| = 5 cm olur.

Bu durumda |DH| = 2 cm ve |HC| = 5 cm olur.

AHC dik üçgeninde 5-12-13 dik üçgeninden |AH| = 12 cm olur.

O halde $\tan\alpha = \frac{12}{2} = 6$ olur.

## KRİTİK BİLGİ

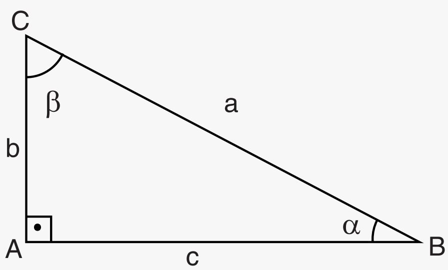
Şekildeki ABC dik üçgeninde α + β = 90° ( tümler açı)

sin α = cos β

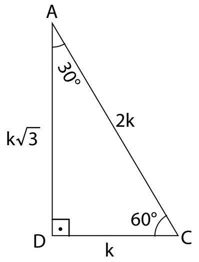
sin β = cos α

tan α = cot β

tan β = cot α olur.



**30°, 45°, 60° Trigonometrik Oranları**




Şekildeki ADC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 30°$ ve $m(\widehat{C}) = 60°$

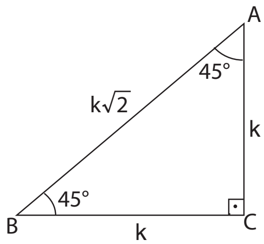
$\sin 30° = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$

$\sin 60° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30° = \cot 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan 60° = \cot 30° = \sqrt{3}$ dür.

**45°– 45°– 90° Trigonometrik oranları**



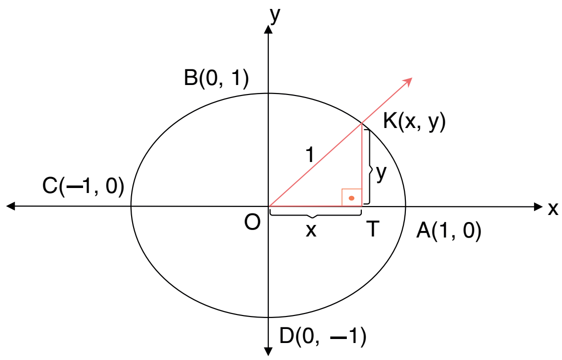

Şekildeki ABC dik üçgeninde $m(\widehat{A}) = 45°$ ve $m(\widehat{B}) = 45°$

$\sin 45° = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

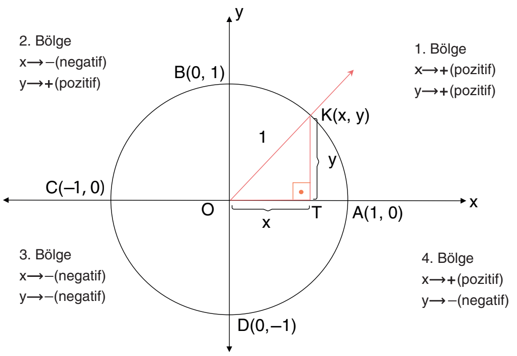
$\tan 45° = \cot 45° = 1$ dir.

| AÇI | SİNÜS | KOSİNÜS | TANJANT | KOTANJANT |
|---|---|---|---|---|
| **30°** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| **45°** | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| **60°** | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

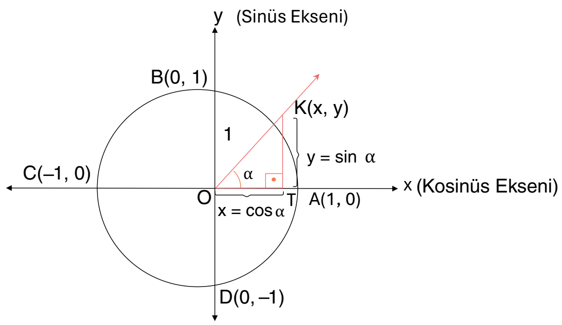
Merkezi orijin ve yarıçap uzunluğu 1 birim olan çembere **birim çember** denir.



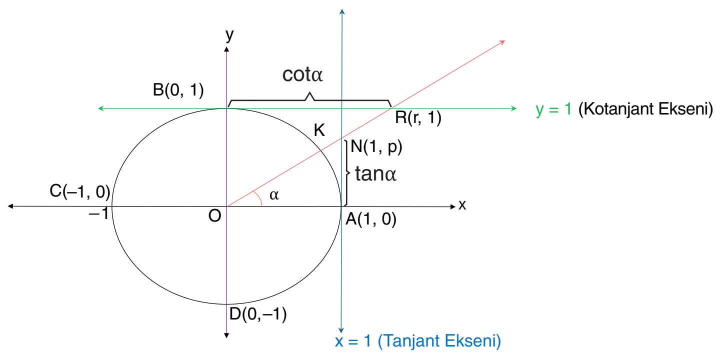

Birim çember üzerinde K(x,y) noktası için $\widehat{KOT}$ dik üçgeninde pisagor teoremiyle $x^2 + y^2 = 1$ olur.



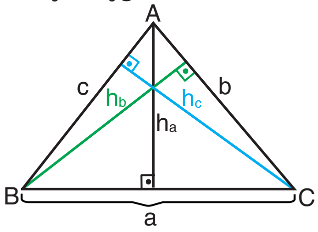

### Trigonometrik Oranları Birim Çemberin Üzerindeki Noktalarla İlişkilendirme




$\widehat{KOT}$ dik üçgeninde $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ elde edilir.



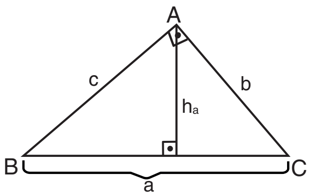
**1. Dar Açılı Üçgenin Alanı**




ABC üçgeninin alanı

$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ dir.}$$

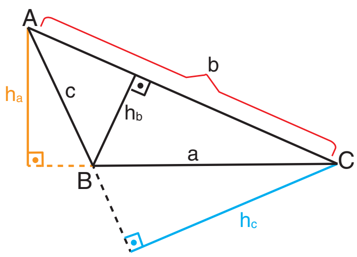
**2. Dik Açılı Üçgenin Alanı**




[AB] ⊥ [AC] olan ABC üçgeninin alanı

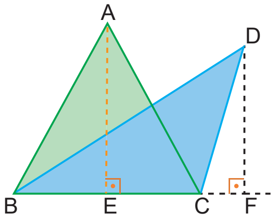
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \text{ olur.}$$

**3. Geniş Açılı Üçgenin Alanı**

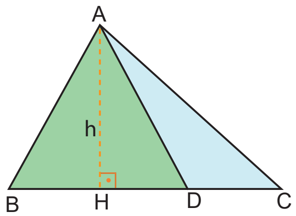



ABC üçgeninin alanı

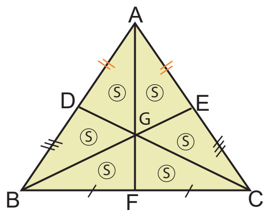
$$A(\widehat{ABC}) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ dir.}$$



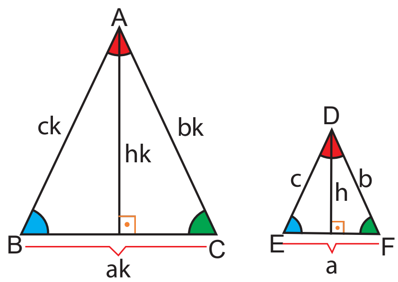

- $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DBC})} = \dfrac{|AE|}{|DF|}$ dir.




- $\dfrac{A(\widehat{ABD})}{A(\widehat{ADC})} = \dfrac{|BD|}{|DC|}$ dir.

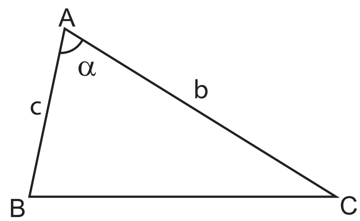



- "G" noktası ABC üçgeninin ağırlık merkezi olmak üzere kenarortaylar ABC üçgenini altı eşit alana ayırırlar.




- $\widehat{ABC} \sim \widehat{DEF}$ ve benzerlik oranı k olduğundan

  $\dfrac{A(\widehat{ABC})}{A(\widehat{DEF})} = k^2$ olur.

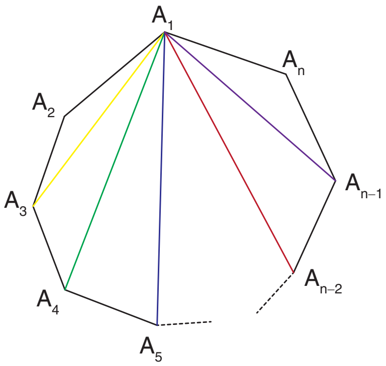


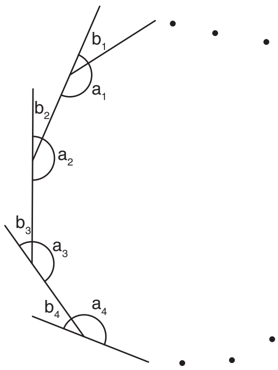

- $A(\widehat{ABC}) = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$ dir.

### ÇOKGEN VE ÇOKGEN AÇI KAVRAMI

$n \geq 3$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ noktalarından geçen $[A_1A_2], [A_2A_3], \ldots, [A_{n-1}A_n], [A_nA_1]$ nın birleşimine **çokgen** denir.

- Bu doğru parçalarına çokgenin kenarları; $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ noktalarına **çokgenin köşeleri** denir.
- Çokgenin komşu olmayan herhangi iki köşesini birleştiren doğru parçasına **köşegen** denir.
- Bir çokgenin köşe sayısı ile kenar sayısı birbirine eşittir.
- Çokgenler köşe sayılarına veya kenar sayılarına göre adlandırılır (üçgen, dörtgen, beşgen, altıgen gibi).



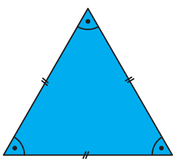

### KRİTİK BİLGİ

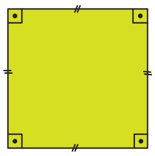
- n kenarlı bir çokgenin bir köşesinden çizilen köşegen sayısı $(n - 3)$ tür.
- n kenarlı bir çokgenin köşegen sayısı $\dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$ dir.
- n kenarlı bir çokgenin iç açılarının ölçüleri toplamı $(n-2) \cdot 180^\circ$ dir.
- n kenarlı bir çokgenin dış açılarının ölçüleri toplamı $360^\circ$ dir.

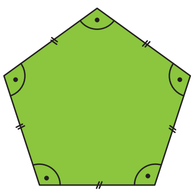
### DÜZGÜN ÇOKGENLER

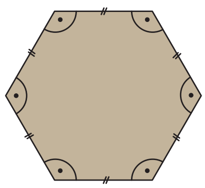
Bütün kenar uzunlukları eşit ve iç veya dış açılarının ölçüleri eşit olan çokgenlere **düzgün çokgen** denir.

Eşkenar üçgen ve kare dışındaki düzgün çokgenler adlandırılırken başına "düzgün" kelimesi getirilir.


Düzgün Üçgen (Eşkenar Üçgen)


Düzgün Dörtgen (Kare)


Düzgün Beşgen

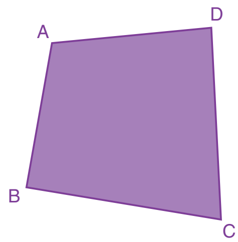

Düzgün Altıgen

### KRİTİK BİLGİ

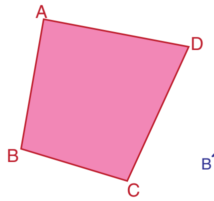
- n kenarlı bir düzgün çokgenin bir iç açısının ölçüsü $\dfrac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$ dir.
- n kenarlı bir düzgün çokgenin bir dış açısının ölçüsü $\dfrac{360^\circ}{n}$ dir.
- Düzgün beşgenin bir iç açısının ölçüsü $108^\circ$ ve bir dış açısının ölçüsü $72^\circ$ dir.
- Düzgün altıgenin bir iç açısının ölçüsü $120^\circ$ ve bir dış açısının ölçüsü $60^\circ$ dir.

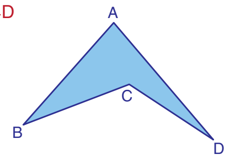
## DÖRTGENLER VE ÖZELLİKLERİ

Herhangi üçü doğrusal olmayan dört noktayı ardışık olarak birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı düzlemsel şekillere **dörtgen** denir.




Her bir iç açısının ölçüsü 180° den küçük olan dörtgene **dışbükey dörtgen**, herhangi bir iç açısının ölçüsü 180° den büyük olan dörtgene **içbükey dörtgen** denir.



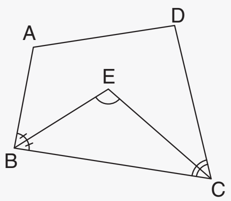




## DÖRTGENLERİN ÖZELLİKLERİ

- Dörtgenlerin iç açıları toplamı 360° dir.

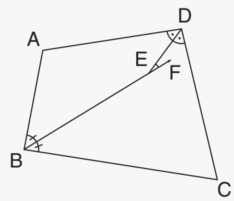
- Dörtgenlerin dış açıları toplamı 360° dir.

- Şekildeki ABCD dörtgeninde [BE], ABC açısının ve [CE], DCB açısının açıortaylarıdır.



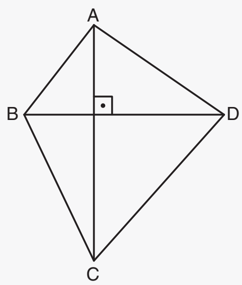

$$m(\widehat{BEC}) = \frac{m(\widehat{A}) + m(\widehat{D})}{2} \text{ dir.}$$

- Şekildeki ABCD dörtgeninde B, E, F noktaları doğrusal olup [BF], ABC açısının ve [DE], ADC açısının açıortaylarıdır.




$$m(\widehat{DEF}) = \frac{|m(\widehat{A}) - m(\widehat{C})|}{2} \text{ dir.}$$

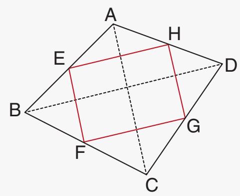
- Köşegenleri dik kesişen bir ABCD dörtgeninde karşılıklı kenar uzunluklarının kareleri toplamları birbirine eşittir.




$[AC] \perp [BD]$ olduğundan

$|AB|^2 + |DC|^2 = |BC|^2 + |AD|^2$

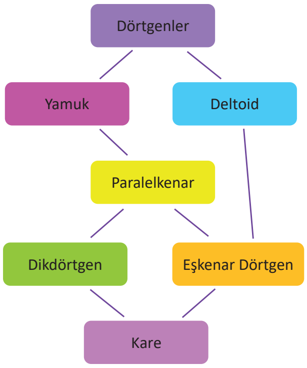
- ABCD dörtgeninde [AC] ve [BD] dörtgenin köşegenleridir.




E, F, G ve H bulundukları kenarların orta noktaları ise ;

Ç(EFGH) = $|AC| + |BD|$ olur.

Dörtgenlerin genelden özele doğru hiyararşik ilişkisi aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

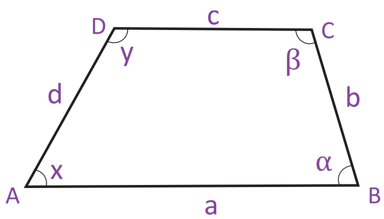



- Paralelkenar aynı zamanda yamuktur.
- Dikdörtgen aynı zamanda paralelkenardır.
- Eşkenar dörtgen aynı zamanda paralelkenar ve deltoittir
- Kare aynı zamanda eşkenar dörtgen ve dikdörtgendir.

## Yamuk ve Özellikleri

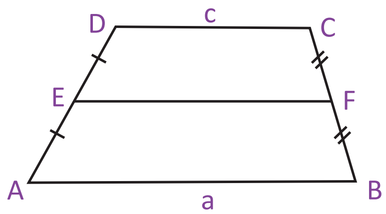
### Yamuk

En az iki kenarı paralel olan dörtgene **yamuk** denir.




ABCD yamuğunda

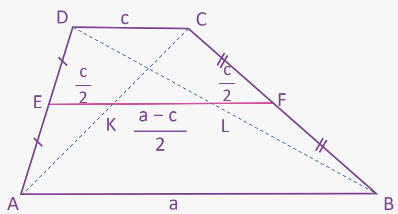
- [AB] // [DC]
- [AB] **alt taban** ve [DC] **üst taban**
- x + y = 180°




ABCD yamuğunda [AB] // [DC] olmak üzere, [AD] ile [BC] nin orta noktaları olan E ile F noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir.

$|EF| = \dfrac{|AB| + |DC|}{2} = \dfrac{a + c}{2}$ olur.

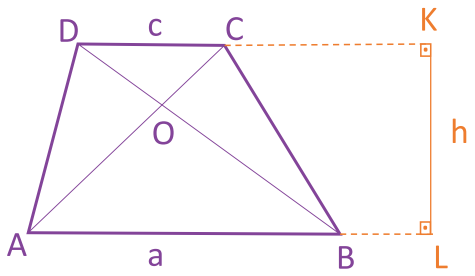
**DİKKAT**



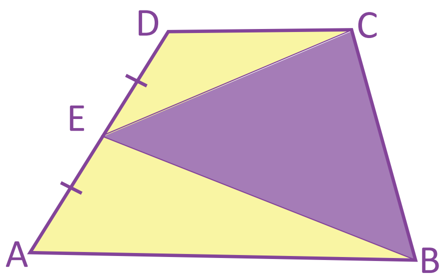

ABCD yamuğunda [AB] // [DC] olmak üzere [BD] ile [AC] na **yamuğun köşegenleri** denir.

Köşegenlerin orta taban üzerinde ayırdığı doğru parçaları için;

$|EK| = |LF| = \dfrac{c}{2}$ ve $|KL| = \dfrac{a - c}{2}$

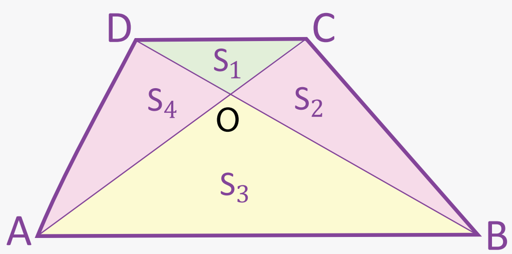



[AB] // [DC] olan ABCD yamuğunda
[KL] ⊥ [AL] ve |KL| = h olmak üzere
$A(ABCD) = \frac{a+c}{2} \cdot h$ olur.




[AB] // [DC] olan ABCD yamuğunda
E noktası [DA] nın orta noktası ise
$A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{EBC})$ olur.

## DİKKAT



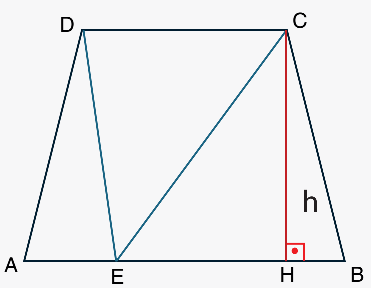

[AC] ve [DB] köşegenler ve [AB] // [DC] dir.

$A(\widehat{DOC}) = S_1$, $A(\widehat{COB}) = S_2$,
$A(\widehat{BOA}) = S_3$, $A(\widehat{AOD}) = S_4$ olsun.

- $S_2 = S_4$
- $S_2 \cdot S_4 = S_1 \cdot S_3$ eşitlikleri geçerlidir.

## KRİTİK BİLGİ

ABCD yamuğunda [DC] // [AB], [CH] ⊥ [AB] ve |CH| = h iken

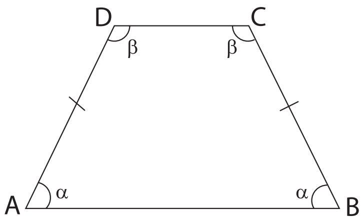



$A(\widehat{AED}) = \frac{|AE| \cdot h}{2}$

$A(\widehat{EBC}) = \frac{|EB| \cdot h}{2}$

$A(\widehat{DEC}) = \frac{|DC| \cdot h}{2}$ olur.

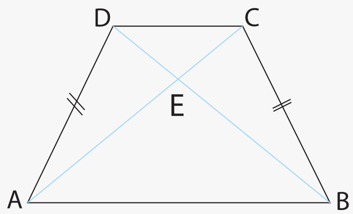
### İkizkenar Yamuk




ABCD yamuğunda [AB] // [DC] ve |AD| = |BC| ise bu yamuğa **ikizkenar yamuk** denir.

$m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = \alpha$ ve $m(\widehat{D}) = m(\widehat{C}) = \beta$ olur.

**DİKKAT**

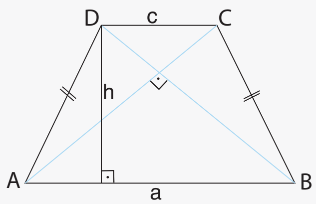



ABCD ikizkenar yamuğunda [AB] // [DC] ve [AC] ile [BD] köşegenlerdir.

|AC| = |BD| olur. (Köşegen uzunlukları eşittir.)

|ED| = |EC| ve |EA| = |EB| olur.

**DİKKAT**

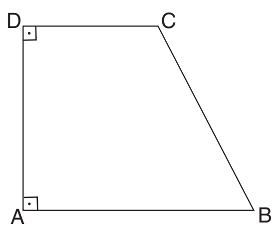



ABCD ikizkenar yamuğunda [AB] // [DC] ve [AC] ile [BD] köşegenleri dik kesişiyor olsun.

|AB| = a birim,|DC| = c birim, yamuğun yüksekliği h olmak üzere,

$h = \frac{a+c}{2}$ ve $A(ABCD) = h^2$ birimkare olur.

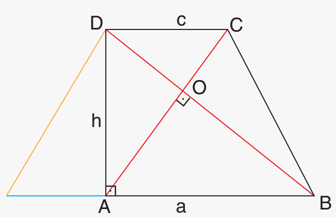
### Dik Yamuk




Herhangi bir köşesindeki açının ölçüsü 90° olan yamuğa **dik yamuk** denir.

Yandaki ABCD yamuğunda [AD] aynı zamanda yamuğun yüksekliğidir.

**DİKKAT**




ABCD dik yamuğunda [AB] // [DC], $[AD] \perp [AB]$

|AD| = h ve köşegenler birbirine dik ise

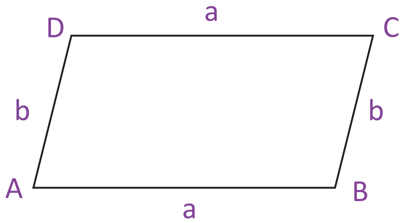
$h^2 = a \cdot c$ olur.

## PARALELKENARDA AÇI VE UZUNLUK



**Paralelkenar**

Karşılıklı kenarları paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir.



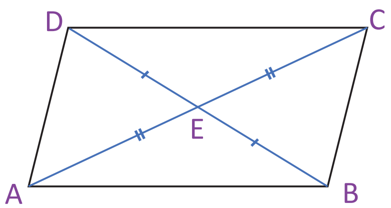

ABCD paralelkenarında

[AB] // [DC] ve |AB| = |DC| = a olur.

[AD] // [BC] ve |AD| = |BC| = b olur.


ABCD paralelkenar olmak üzere ardışık köşelerdeki iç açılar birbiriyle bütünler açı olup toplamları 180° dir.

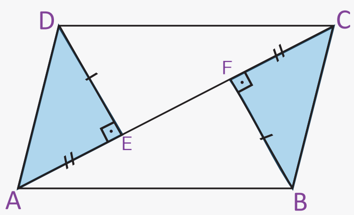
$m(\widehat{A}) = m(\widehat{C})$ ve $m(\widehat{B}) = m(\widehat{D})$ olur.




Paralelkenarın köşegenleri birbirini ortalar.

ABCD paralelkenarında |DE| = |EB| ve |AE| = |EC| olur.

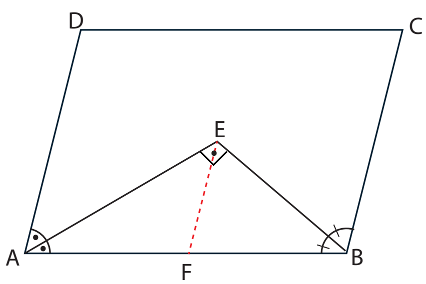
**DİKKAT**




|DE| = |BF| ve |AE| = |FC|

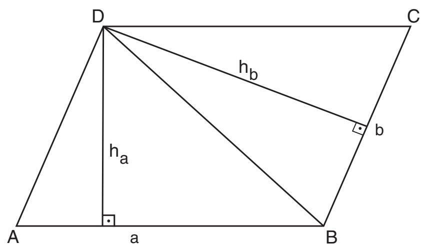
AED üçgeni ile CFB üçgeni eş üçgenlerdir.

Bir paralelkenarda komşu açıların açıortayları birbirine diktir.



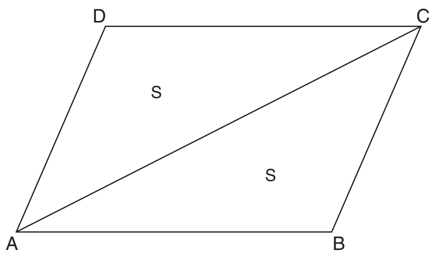

[EF] // [AD] olmak üzere |EF| = |AF| = |FB| olur.

## Paralelkenarda Alan




ABCD paralelkenarının alanı

$A(ABCD) = a \cdot h_a = b \cdot h_b$ olur.

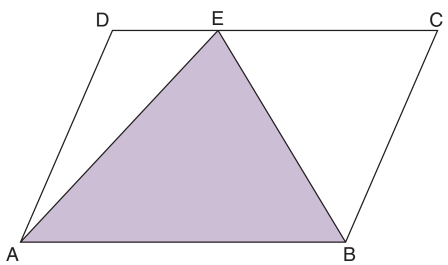



ABCD paralelkenarında [AC] köşegen olmak üzere

$A(\widehat{ABC}) = A(\widehat{ADC})$ olur.

## Paralelkenarda Alan Özellikleri

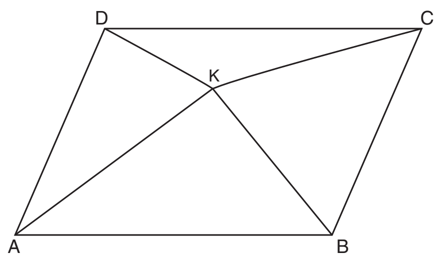
**1)**




ABCD paralelkenarında $E \in [DC]$ ise

$A(\widehat{AEB}) = A(\widehat{ADE}) + A(\widehat{BEC}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ olur.

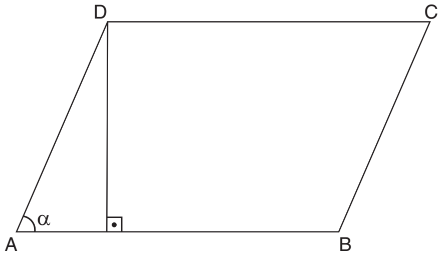
**2)**




K noktası ABCD paralelkenarının iç bölgesinde bir nokta olmak üzere;

$A(\widehat{ADK}) + A(\widehat{BCK}) = A(\widehat{AKB}) + A(\widehat{DKC}) = \dfrac{A(ABCD)}{2}$ dir.

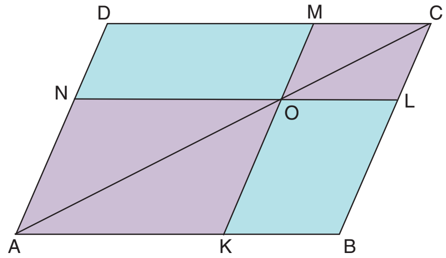
**3)**




ABCD paralelkenar ve m $(\widehat{DAB}) = \alpha$ ise

A(ABCD) = |AB| · |AD| · sin $\alpha$ olur.

**4)**

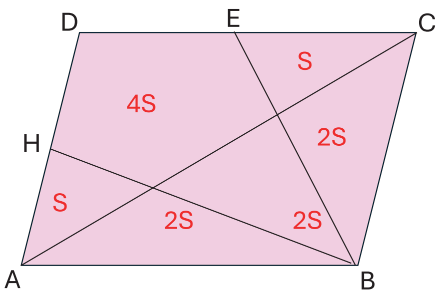


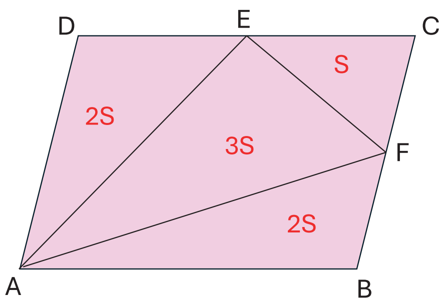

ABCD paralelkenarında [AC] köşegen ve [NL] $\cap$ [MK] = {O} olmak üzere;

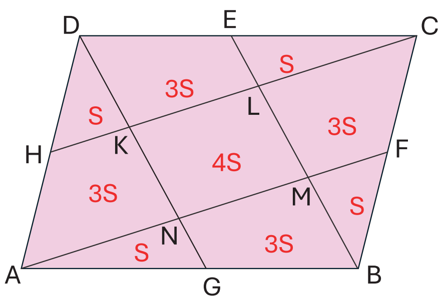
[NL] // [DC] ve [MK] // [DA] ise

A(DNOM) = A(KBLO) olur.

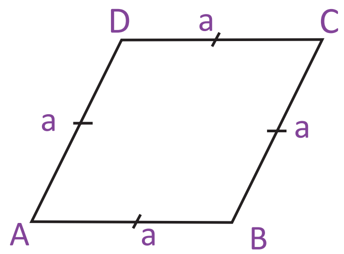
**5)** ABCD paralelkenarında E, F, G, H orta noktalardır.



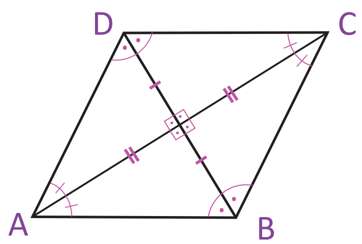



Kenar uzunlukları eşit olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir. Eşkenar dörtgen aynı zamanda paralelkenardır ve paralelkenarın özelliklerini taşır.



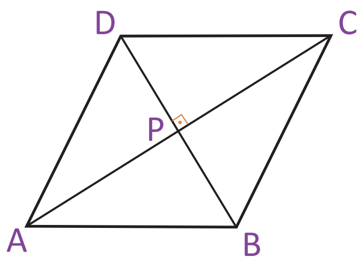

ABCD eşkenar dörtgeninde

|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a olur.



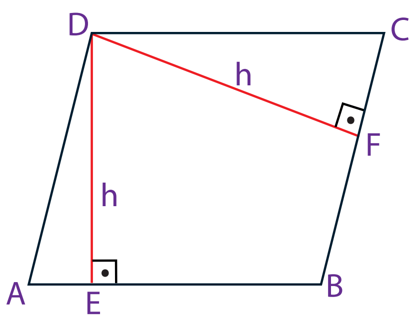

ABCD eşkenar dörtgeninde

- [AC] ve [BD] köşegenleri birbirini dik keser.
- [AC] ve [BD] köşegenleri birbirini ortalar.
- [AC] ve [BD] köşegenleri aynı zamanda açıortaydır.




ABCD eşkenar dörtgeninde [AC] ve [BD] köşegen olmak üzere

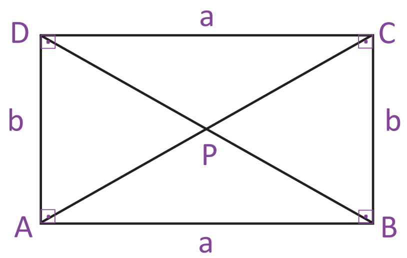
$$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2} \quad \text{olur.}$$




Eşkenar dörtgenin yüksekliği;

|DF| = |DE| = h dir.

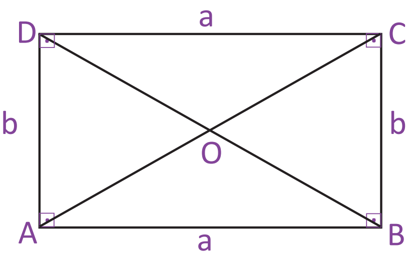
Açılarından birinin ölçüsü 90° olan paralelkenara **dikdörtgen** denir.




ABCD dikdörtgeninde

$|AB| = |DC| = a$ ve $|AD| = |BC| = b$

$Ç(ABCD) = 2 \cdot (a + b)$ olur.



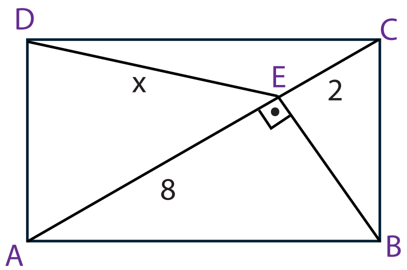

ABCD dikdörtgeninde köşegen uzunlukları eşittir.

$|AC| = |BD|$

$|AO| = |OC| = |DO| = |OB|$ olur.

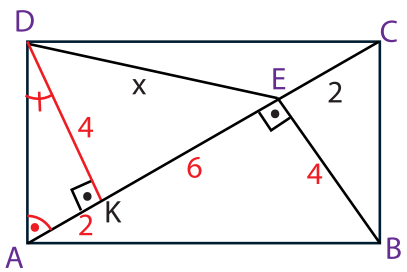
**Örnek:**

Aşağıdaki şekilde verilen ABCD dikdörtgeninde [AC] köşegen $[BE] \perp [AC]$, $|AE| = 8$ cm ve $|EC| = 2$ cm'dir.




**Verilenlere göre** $|DE|=x$ **kaç santimetredir?**

**Çözüm:**




$[DK] \perp [AC]$ olacak şekilde [DK] çizilir.

EBC üçgeni ile KDA üçgeni eş üçgen olduğundan $|DK| = |EB|$ olur.

ADC üçgeninde öklid teoremi ile

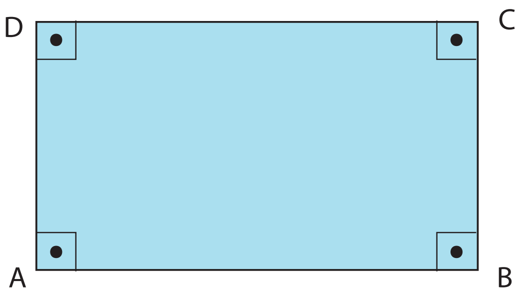
$|DK|^2 = |AK| \cdot |KC| \Rightarrow |DK|^2 = 2 \cdot 8 = 16$

$|DK| = 4$ cm olur.

O halde DKE dik üçgeninde pisagor teoremi yardımıyla

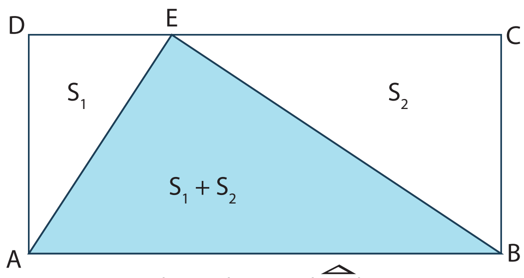
$|DE|^2 = 4^2 + 6^2 = 52$

$|DE| = 2\sqrt{13}$ cm olur.

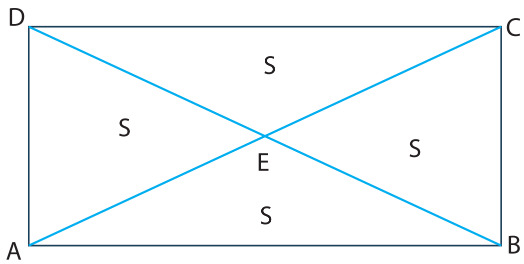



ABCD dikdörtgeninin alanı

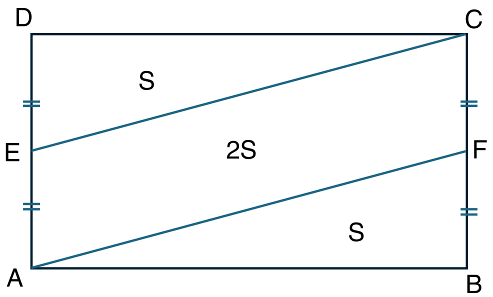
A(ABCD) = |AB| · |BC| olur.




$A(ABCD) = 2 \cdot A(\widehat{AEB})$

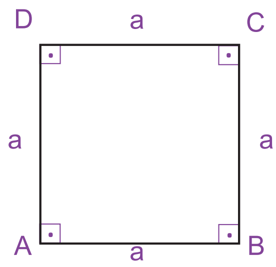



$A(\widehat{AEB}) = A(\widehat{BEC}) = A(\widehat{CED}) = A(\widehat{DEA}) = S$



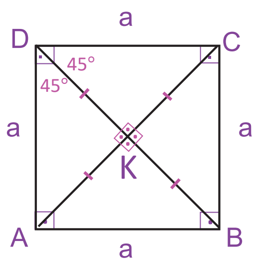

$A(AFEC) = 2 \cdot A(\widehat{ABF}) = 2 \cdot A(\widehat{EDC})$ olur

Dört kenar uzunluğu eşit olan dikdörtgene **kare** denir. Kare aynı zamanda paralelkenar, dikdörtgen ve eşkenar dörtgendir.



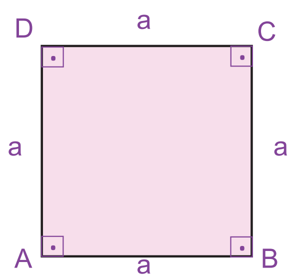

ABCD karesinde,

- $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = a$ cm
- $m(\widehat{A}) = m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = m(\widehat{D}) = 90°$dir.



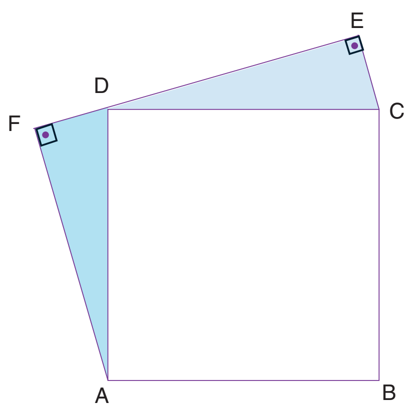

ABCD karesinde,

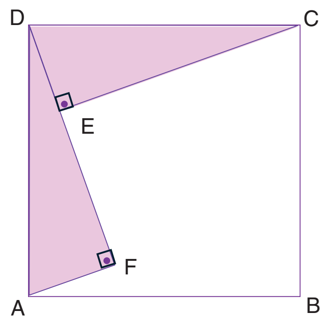
- Köşegenler aynı zamanda açıortaylardır.
- Köşegen uzunlukları eşit olup birbirlerini dik ortalar.




Bir kenar uzunluğu a birim olan ABCD karesinin alanı

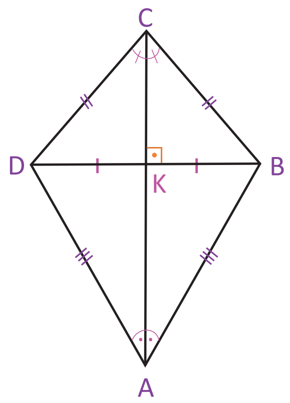
$A(ABCD) = a^2$ birimkaredir.




$\widehat{AFD} \cong \widehat{DEC}$

Bir ABCD dörtgeninde |DC| = |BC| ve |AD| = |AB| ise bu dörtgene **deltoid** denir.

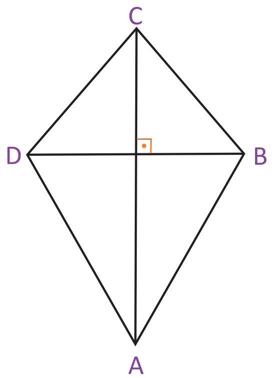



ABCD dörtgeni deltoid olmak üzere

- $[AC] \perp [BD]$
- |DK| = |KB|

[AC] köşegeni aynı zamanda açıortaydır.

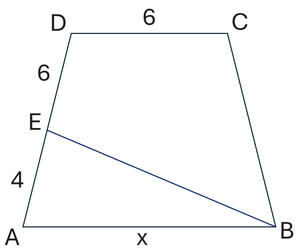
- $m(\widehat{CDA}) = m(\widehat{CBA})$




[AC] ve [BD] ABCD deltoidinin köşegenleri olmak üzere

$$A(ABCD) = \frac{|AC| \cdot |BD|}{2}$$ dir.

**Örnek:**




Şekilde ABCD yamuk, DEBC bir deltoiddir.

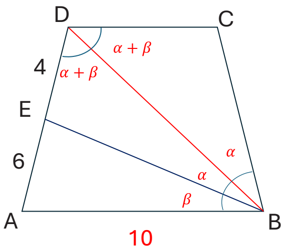
[AB] // [CD]

|DC| = |DE| = 6 cm

|AE| = 4 cm

**Verilenlere göre |AB| kaç santimetredir?**

**Çözüm:**




BD köşegeni EBCD deltoidinde açıortay olduğundan

$m(\widehat{EBD}) = m(\widehat{DBC}) = \alpha$ olur.

[DC] // [AB] olduğundan

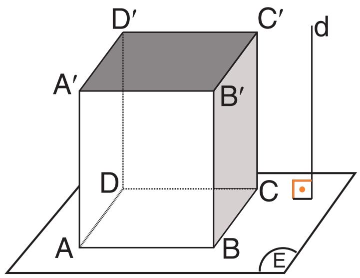
$m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC}) = \alpha + \beta$ olur.

Bu durumda DAB üçgeni ikizkenar üçgen olur.

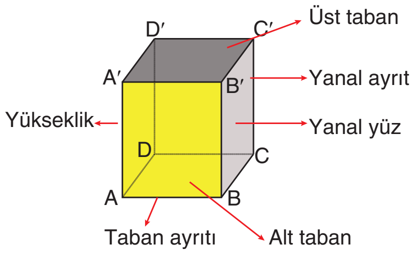
$|AD| = |AB| \Rightarrow |AB| = 10$ santimetredir.

### Dik Prizma

ABCD çokgeni, şekildeki E düzlemi üzerinde ve d doğrusu E düzlemine dik bir doğru olarak verilsin. Bu ABCD çokgeni üzerindeki noktalardan geçen ve d doğrusuna paralel olan doğruların oluşturduğu ve iki paralel düzlem ile sınırlanan kapalı bölgeye **dik prizma** denir.

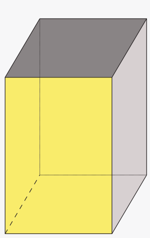



Yandaki dik prizmanın altını ve üstünü oluşturan ABCD ve A' B' C' D' çokgensel bölgelerine dik prizmanın sırasıyla **alt tabanı** ve **üst tabanı** denir. Prizmanın taban kenarlarına **taban ayrıtları**, tabanların karşılıklı köşe noktalarını birleştiren doğru parçalarına **yanal ayrıtlar,** iki yanal ayrıt arasında kalan bölgelere **yanal yüzler**, iki taban arasındaki uzaklığa **yükseklik** denir.

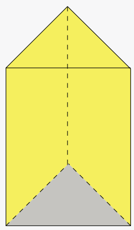



### DİKKAT

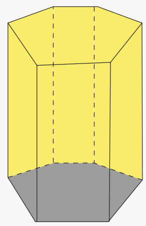
Dik prizmalar tabanını oluşturan çokgene göre isimlendirilir.



Tabanı dörtgen ise
dörtgen dik prizmadır.



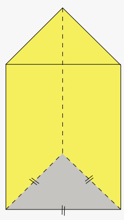
Tabanı üçgen ise
üçgen dik prizmadır.



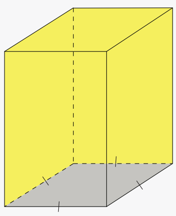
Tabanı altıgen ise
altıgen dik prizmadır.

### DİKKAT

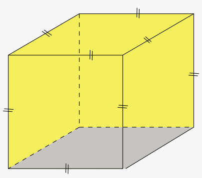
Dik prizmanın yanal ayrıtları aynı zamanda dik prizmanın yüksekliğidir. Dik prizmanın yanal yüzleri dikdörtgensel bölgedir. Tabanları düzgün çokgen olan prizmaya **düzgün prizma** denir



Eşkenar üçgen dik prizma
(Düzgün prizma)

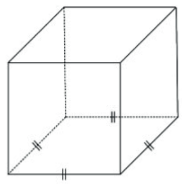
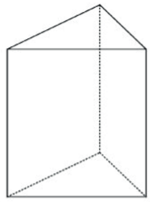
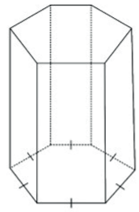


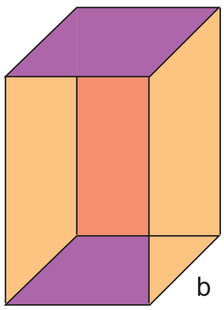
Kare dik prizma
(Düzgün prizma)

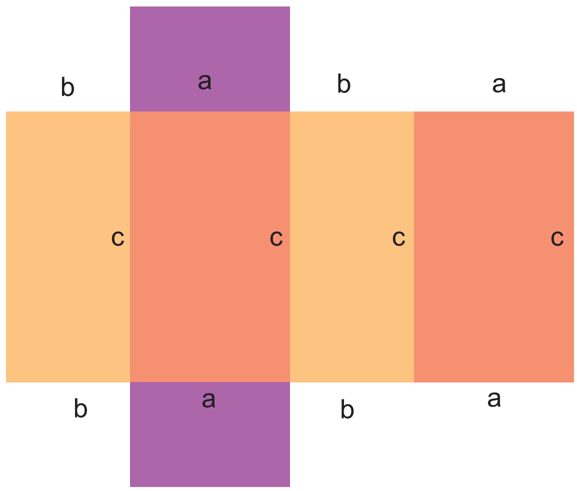


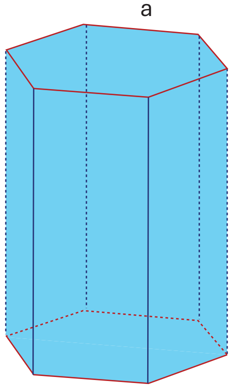
Tüm ayrıtları eşit olan
kare prizma (Küp)
(Düzgün prizma)

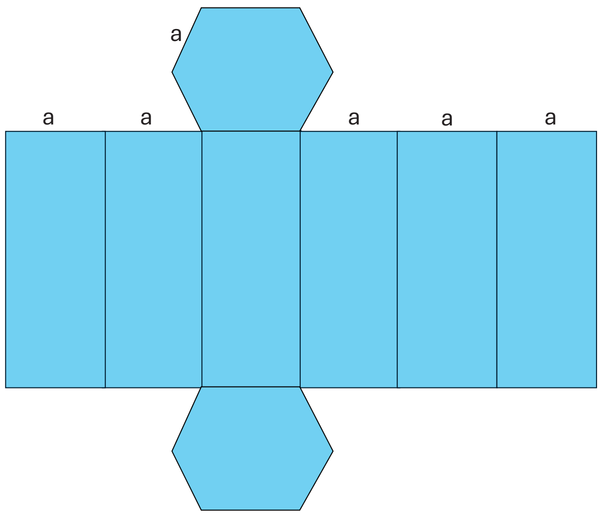
## DİK PRİZMADA AYRIT VE YÜZEY SAYILARI

| Şekiller / Özellikler | a)  | b)  | c)  |
|---|---|---|---|
| **Prizmanın adı** | Kare dik prizma | Üçgen dik prizma | Düzgün altıgen dik prizma |
| **Düzgün prizma olup olmadığı** | Düzgün prizma | Düzgün prizma değil | Düzgün prizma |
| **Ayrıt sayısı** | 12 | 9 | 18 |
| **Yüzey sayısı** | 6 | 5 | 8 |



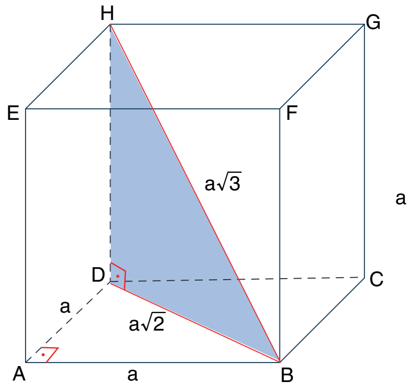



# KÜP

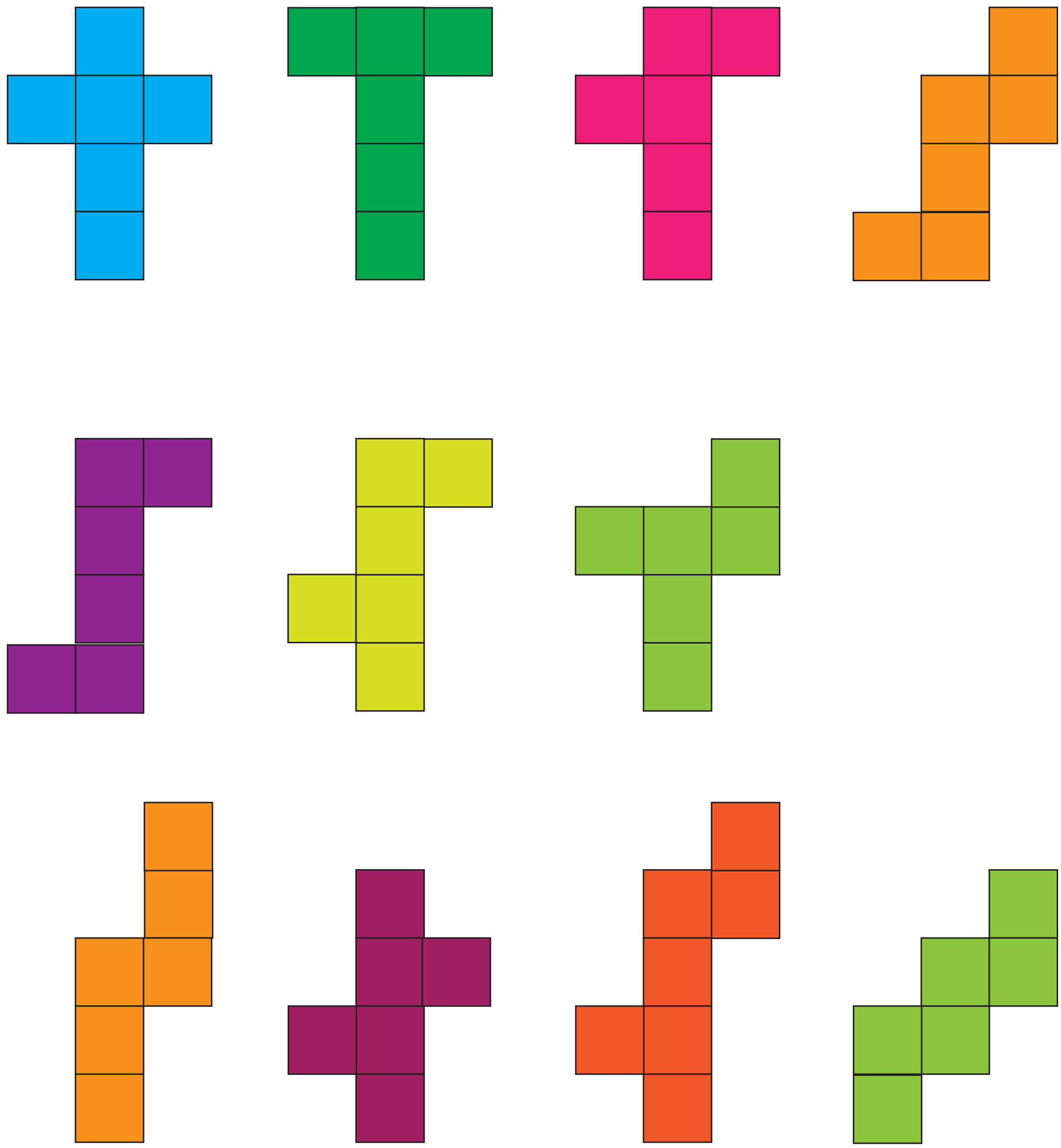
Bütün ayrıtlarının uzunlukları eşit olan dikdörtgenler prizmasına **küp** denir.



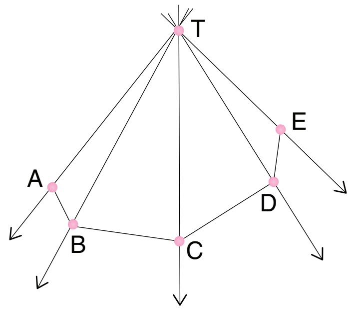

Küpün bir kenar uzunluğu a cm ise,

- Yüzey alanı = $6 \cdot a^2$ $cm^2$ olur.
- Küpün hacmi = $a^3$ $cm^3$ olur.
- Yüzey köşegen uzunluğu = $a\sqrt{2}$ cm olur.
- Cisim köşegen uzunluğu = $a\sqrt{3}$ cm olur.

**Küpün Açınımları**



Bir çokgen ile bu çokgenin düzlemi dışında bir T noktası alınsın. Çokgene ait noktalarla T noktasından geçen doğruların kümesine **piramidal yüzey** denir.



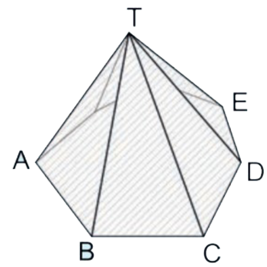

Şekilde ABCDE... çokgeni ile T noktasının belirttiği piramidal yüzeyin T noktasına tepe noktası denir. Bir piramidal yüzeyin yanal yüzeyini ve bütün ayrıtlarını kesen bir düzlemle sınırlanan katı cisme **piramit** denir.

Şekildeki piramit (T, ABCDE ...) ile gösterilir.

Tepe noktası ile çokgene ait herhangi bir kenarın tüm noktalarını birleştiren doğru parçaları üçgensel bölge oluşturur ve bu üçgensel bölgelerin tümüne **yanal yüzey** denir.

Şekilde TAB, TBC, TCD, TDE, ... üçgenleri piramidin yanal yüzleridir.

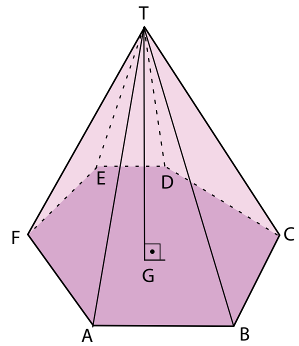
Piramitler tabanındaki çokgenin kenar sayısına göre isimlendirilir: üçgen piramit, dörtgen piramit, beşgen piramit, altıgen piramit ... [TA], [TB], [TC], [TD], [TE] ,... piramidin yanal ayrıtları; [AB], [BC], [CD], [DE], ... taban ayrıtları olarak adlandırılır.




Tepe noktası ile piramidin tabanı olan çokgenin ağırlık merkezini birleştiren doğru parçası çokgenin düzlemine dik ise bu piramitlere **dik piramit** ve bu doğru parçasının uzunluğuna ise **dik piramidin yüksekliği** denir.

Şekildeki altıgen dik piramitte G noktası altıgenin ağırlık merkezidir. Bu durumda [TG] piramidin yüksekliği; ABCDEF altıgeni piramidin tabanı olur.

Bu piramit (T, ABCDEF) ile gösterilir.

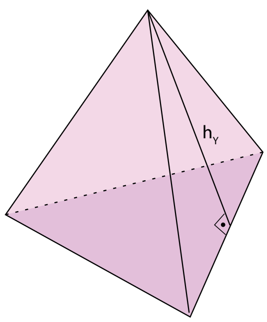


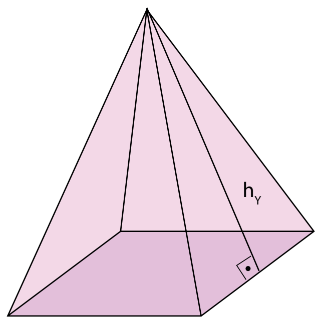

Tabanı düzgün çokgen ve yan yüzleri eş ikizkenar üçgen olan dik piramitlere **düzgün dik piramit** denir. Düzgün piramitte yanal ayrıtlar eştir.

Bir düzgün piramidin yan yüzleri olan eş üçgenlerin alanları toplamına **piramidin yanal alanı** denir. Bir piramidin taban alanı ile yanal

alanı toplamına **piramidin yüzey alanı** denir. Toplam alan A , taban alanı $A_T$, yanal alan $A_Y$, taban çevresi $Ç_T$ , yan yüz yüksekliği $h_Y$ olmak üzere

$A_Y = \dfrac{Ç_T \cdot h_Y}{2}$ ve $A = A_T + A_Y$ olur.



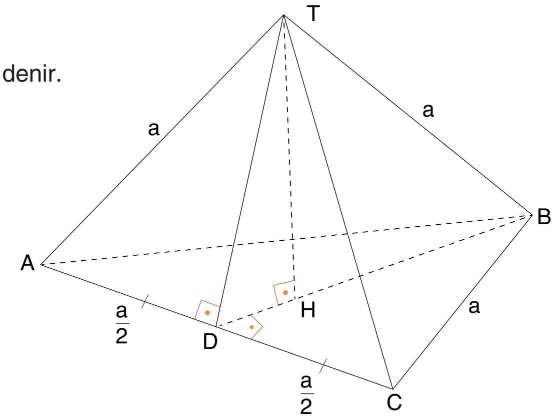



**Düzgün Dörtyüzlü**

Tüm yüzleri eşkenar üçgen olan üçgen piramide **düzgün dört yüzlü** denir.

Bir ayrıtının uzunluğu a birim olan düzgün dört yüzlünün

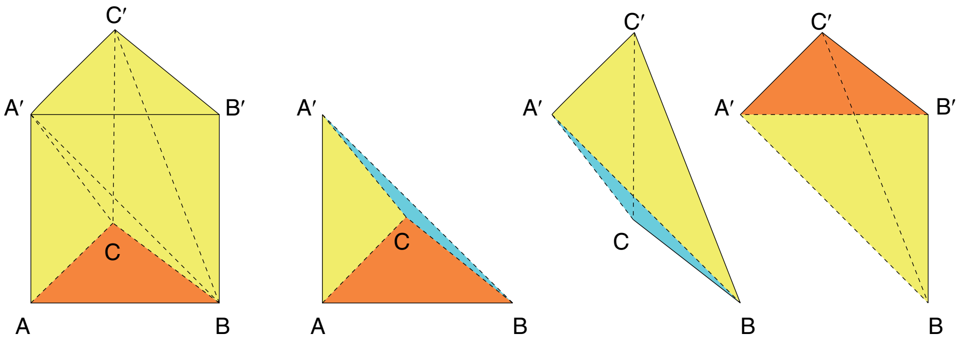
- Yan yüz yüksekliği $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ birimdir.
- Yüksekliği $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ birimdir.
- Yüzey alanı $a^2\sqrt{3}$ birimkaredir.




**Hacim**

Herhangi bir piramidin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte biridir. NEDEN Mİ?

Şekildeki üçgen dik prizma aşağıdaki gibi kesilerek üç tane eş üçgen piramide ayrılsın.




Prizmanın tabanları birbirine eş olan ABC üçgeni ile A′ B′ C′ üçgeninden oluşmaktadır.

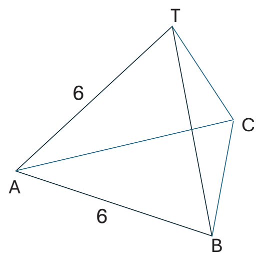
Bu durumda (A′, $\widehat{CAB}$) ile (B, $\widehat{C'A'B'}$) piramitlerinin taban alanları ve yükseklikleri eşittir.

Buradan hacimlerinin de eşit olduğu görülür. Yine $\widehat{A'AC}$ ile $\widehat{CC'A'}$ eş olduğundan (B, $\widehat{A'AC}$) ile (B, $\widehat{C'A'C}$) piramitlerinin taban alanları ve yükseklikleri eşit dolayısıyla hacimleri de birbirine eşittir.

Sonuç olarak üçgen dik prizma aynı hacimli olan 3 tane üçgen piramide ayrılmış oldu. Bu durumda her bir piramidin hacmi üçgen prizmanın hacminin $\frac{1}{3}$ 'idir.

**Örnek:**

**Yandaki şekilde verilen** (T,$\widehat{ABC}$) **düzgün piramidinde** |AB| = |AT| = 6 cm **olduğuna göre dik piramidin hacmi kaç santimetreküptür?**



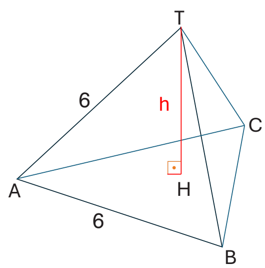

**Çözüm:**

Bir ayrıtının uzunluğu a cm olan düzgün dört yüzlünün

yüksekliği $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ cm olduğundan $|TH| = h = \frac{6\cdot\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{3}$ cm olur.

Taban Alanı = $\frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ cm²dir.

Hacim = $\frac{\text{Taban Alanı} \cdot \text{Yükseklik}}{3} = \frac{9\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}}{3}$ =18 santimetreküp olur.



MEBİ

mebi.eba.gov.tr