[중학교 도형]

– 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.

한성은

5A ACADEMY

중학교 교과서의 모든 도형 단원의 학습내용을 정리하였습니다.
교과서에 없더라도 학습하면 좋다 생각되는 내용이 약간 포함되어 있습니다.
(예를 들어 정삼각형의 넓이, 각의 이등분선 정리, 방멱 등입니다.)

연습용 예제 파일이 따로 있습니다. 같이 풀어보세요.

유튜브 [한성은] 인스타 [hansungeun2]

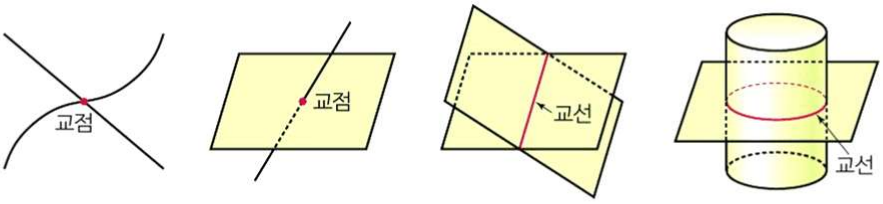
CCL

[중1]

[점, 선, 면]

점 ..
선 무수히 많은 점으로 이루어져 있다.
면 무수히 많은 선으로 이루어져 있다.

교점 선과 선 또는 선과 면이 만나서 생기는 점
교선 면과 면이 만나서 생기는 선



[직선과 선분]

직선 두 점 A, B를 지나는 직선(양쪽 방향으로 한없이 뻗은)을 $\overleftrightarrow{\mathrm{AB}}$로 나타낸다.
반직선 점 A에서 시작하여 점 B의 방향으로 한없이 뻗은 반직선을 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$로 나타낸다.
선분 점 A에서 점 B까지의 부분인 선분을 $\overline{\mathrm{AB}}$로 나타낸다.

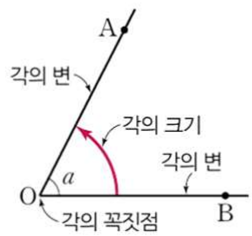
두 점 사이의 거리 두 점 A, B를 잇는 선은 무수히 많으나 그중에서 길이가 가장 짧은 것은 선분 AB이다. 선분 AB의 길이를 두 점 A, B 사이의 거리라 한다.

중점 선분 AB 위의 점 M에 대하여 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{MB}}$일 때, 점 M을 선분 AB의 중점이라고 한다.

※ 수능 시험지에서 $\overline{\mathrm{AB}}$는 선분 AB의 길이를 의미한다.
수능주의자의 올바른 표현 : 선분 AB의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}}$이다.

[각]

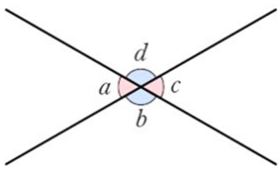
각 두 반직선 OA와 OB로 이루어진 도형을 각 AOB라 하고 기호로 $\angle$AOB와 같이 나타낸다.



- 점 O를 **각의 꼭짓점**, 두 반직선 OA와 OB를 **각의 변**이라 한다.
- **각의 크기** $\angle$AOB에서 꼭짓점 O를 중심으로 변 OB가 변 OA까지 회전한 양을 $\angle$AOB의 크기라고 한다.
- 이때 $\angle$AOB는 각을 나타내기도 하고, 그 각의 크기를 나타내기도 한다.
- $\angle$AOB를 간단히 $\angle$O, $\angle a$와 같이 나타내기도 한다.
- $\angle$AOB는 일반적으로 두 반직선으로 이루어진 2개의 각 중 작은 쪽을 나타낸다.

- 180°를 **평각**, 90°를 **직각**,
  0°보다 크고 90°보다 작은 각을 **예각**,
  90°보다 크고 180°보다 작은 각을 **둔각**이라 한다.

맞꼭지각 그림과 같이 두 직선이 한 점에서 만날 때 생기는
네 각 $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$를 두 직선의 **교각**이라 한다. 이때
$\angle a$와 $\angle c$, $\angle b$와 $\angle d$와 같이 서로 마주보는 각을 맞꼭지각이라 한다.



▷ 맞꼭지각이 서로 같다의 증명 :
$\angle a = 180^\circ - \angle d$이고 $\angle c = 180^\circ - \angle d$이다.

[수선]

직교 두 직선 AB와 CD의 교각이 직각일 때 두 직선은 직교한다고 한다.
기호로 $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$와 같이 나타낸다. 이때 두 직선 AB와 CD는 서로 **수직**이고,
한 직선을 다른 직선의 **수선**이라 한다.

수직이등분선 직선 l이 선분 AB의 중점 M을 지나고 선분 AB에 수직일 때,
직선 l을 선분 AB의 수직이등분선이라 한다.

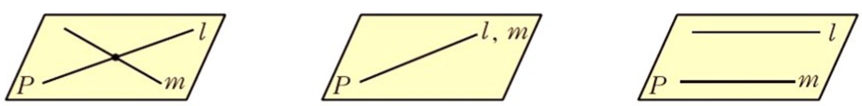
수선의 발 직선 l 위에 있지 않은 점 P에서 직선 l에 수선을 그어 생기는 교점을 H라 할 때,
이 점 H를 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발이라 한다.

점과 직선 사이의 거리 점 H가 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발일 때, 선분 PH는
점 P와 직선 l 위의 점을 잇는 선분 중에서 길이가 가장 짧다. 이 선분 PH의 길이를
점 P와 직선 l 사이의 거리라 한다.

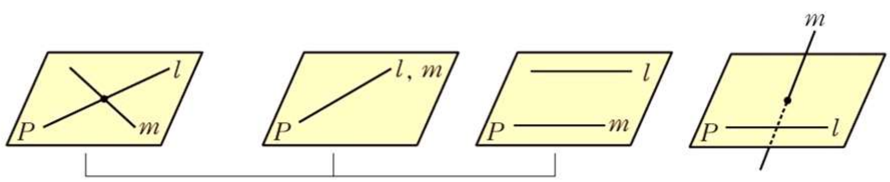
[위치 관계]

두 직선이 서로 평행 한 평면 위에 있는 두 직선 l, m이 만나지 않을 때,
두 직선 l, m은 서로 평행하다고 하고, 기호로 $l /\!/ m$과 같이 나타낸다.

▷ 평면에서 두 직선의 위치 관계는 다음 세 가지 경우가 있다.
① 한 점에서 만난다. ② 일치한다. ③ 평행하다.



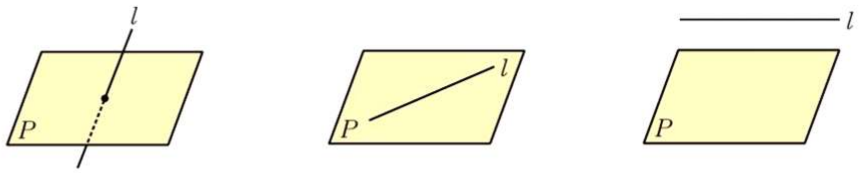
▷ 공간에서 두 직선의 위치 관계는 다음 네 가지 경우가 있다.
① 한 점에서 만난다. ② 일치한다. ③ 평행하다. ④ 꼬인 위치에 있다.



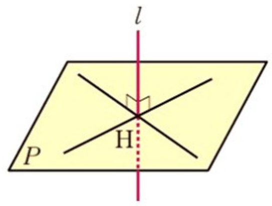
한 평면 위에 있다. 한 평면 위에 있지 않다.

직선과 평면이 서로 평행 공간에서 직선 l과 평면 P가 만나지 않을 때,
직선 l과 평면 P는 서로 평행하다고 하고, 기호로 $l /\!/ P$와 같이 나타낸다.

▷ 공간에서 직선과 평면의 위치 관계는 다음 세 가지 경우가 있다.
① 한 점에서 만난다. ② 포함된다. ③ 평행하다.

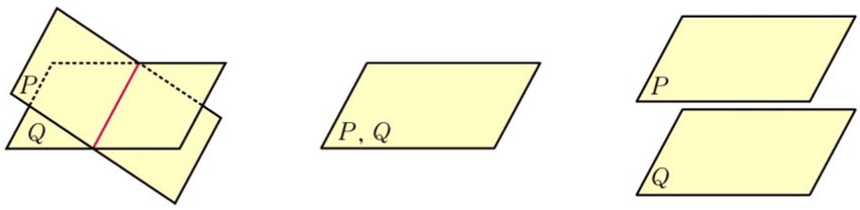


직선과 평면이 서로 수직 직선 l이 평면 P와 한 점 H에서 만나고 점 H를 지나는 평면 P 위의 모든 직선과 수직일 때, 직선 l과 평면 P는 서로 수직이다 또는 **직교**한다고 하고, 이것을 기호로 $l \perp P$와 같이 나타낸다. 이때 직선 l을 평면 P의 **수선**이라 하고, 점 H를 **수선의 발**이라 한다.

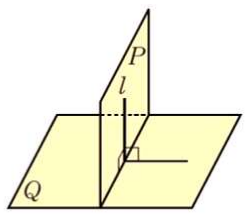


두 평면이 서로 평행 공간에서 두 평면 P, Q가 만나지 않을 때, 두 평면 P, Q는 서로 평행하다고 하고, 이것을 기호로 $P /\!/ Q$와 같이 나타낸다.

▷ 공간에서 두 평면의 위치 관계는 다음 세 가지 경우가 있다.
① 한 직선에서 만난다. ② 일치한다. ③ 평행하다.



두 평면이 서로 수직 평면 P가 평면 Q와 수직인 직선 l을 포함할 때, 평면 P와 평면 Q는 서로 수직이다 또는 직교한다고 하고, 이것을 기호로 $P \perp Q$와 같이 나타낸다.



[동위각과 엇각]

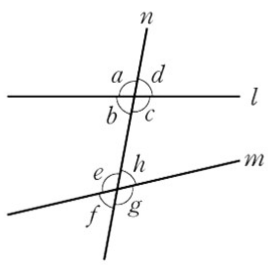
동위각과 엇각 그림과 같이 평면 위에서 두 직선 l, m이 다른 한 직선 n과 만나면 8개의 교각이 생긴다. 이때

$\angle a$와 $\angle e$, $\angle b$와 $\angle f$, $\angle c$와 $\angle g$, $\angle d$와 $\angle h$

와 같이 서로 같은 위치에 있는 각을 동위각이라 한다. 또,

$\angle b$와 $\angle h$, $\angle c$와 $\angle e$

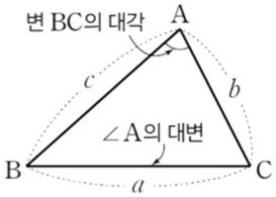
와 같이 서로 엇갈린 위치에 있는 각을 엇각이라 한다.



평행선의 동위각 평행한 두 직선 l, m이 한 직선 n과 만나서 생기는 동위각 $\angle a$와 $\angle b$의 크기는 항상 같다. 즉, $l /\!/ m$이면 $\angle a = \angle b$이다. 역 또한 성립한다. 즉, $\angle a = \angle b$이면 $l /\!/ m$이다.

※ 증명이 쉽지 않다. 유클리드의 제5공준에 해당하며 대충 말하면 [평행이란 무엇인가]가 된다.

[삼각형의 합동]

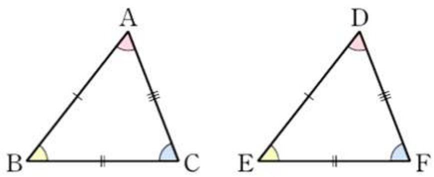


작도 눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하여 도형을 그리는 것

삼각형 삼각형 ABC를 기호로 △ABC와 같이 나타낸다. 이때
△ABC에서 ∠A와 마주 보는 변 BC를 ∠A의 **대변**이라 하고,
∠A를 변 BC의 **대각**이라 한다. 일반적으로 △ABC에서
∠A, ∠B, ∠C의 대변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c로 나타낸다.

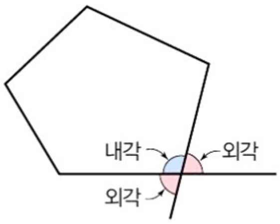
▷ 삼각형에서 한 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작다.

합동 모양과 크기가 같아서 포개었을 때 완전히 겹쳐지는 두 두형을 서로 합동이라 한다.
삼각형 ABC와 삼각형 DEF가 서로 합동일 때 기호로 △ABC ≡ △DEF와 같이 나타낸다.
이때 두 삼각형의 꼭짓점은 대응하는 차례대로 쓴다.



▷ **삼각형의 합동조건** 두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 합동이다.
① 대응하는 세 변의 길이가 각각 같을 때 (SSS 합동)
② 대응하는 두 변의 길이가 각각 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 합동)
③ 대응하는 한 변의 길이가 같고, 그 양 끝 각의 크기가 각각 같을 때 (ASA 합동)

[다각형]

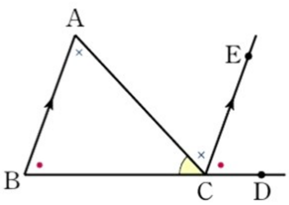


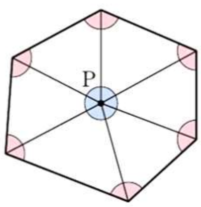
다각형 선분으로만 둘러싸인 평면도형
- **변** 다각형을 이루는 선분
- **꼭짓점** 변과 변이 만나는 점
- **엔각형** 변이 n개인 다각형
- **내각** 이웃하는 두 변으로 이루어진 내부의 각
- **외각** 각 꼭짓점에서 한 변과 그 변에 이웃한 변의 연장선으로 이루어진 각

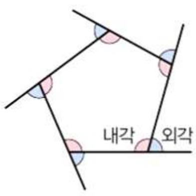
▷ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 180°이다.

▷ n각형의 내각의 크기의 합은 $(n-2)\times 180^\circ$이다.
▷ n각형의 외각의 크기의 합은 360°이다.

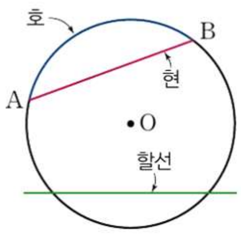
▷ n각형의 대각선의 개수는 $\dfrac{n(n-3)}{2}$이다. (볼록?)







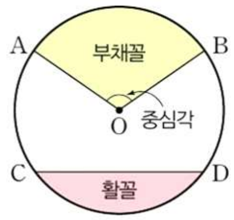
[원과 부채꼴]



원 평면 위의 한 점 O로부터 일정한 거리에 있는 모든 점으로 이루어진 도형

- **호** 원 O 위에 두 점을 잡아 나눈 두 부분.

  양 끝 점이 A, B인 호를 호 AB라 하고 기호로 $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$와 같이 나타낸다.
- **현** 원 위의 두 점을 이은 선분. 양 끝점이 A, B인 현을 현 AB라 한다.
- **할선** 원 위의 두 점을 지나는 직선

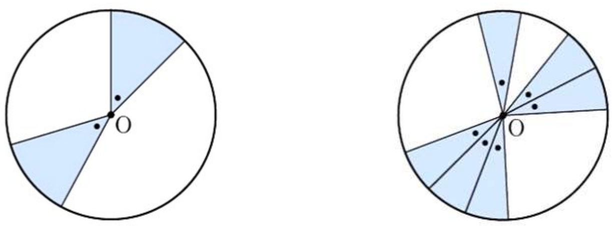


부채꼴 원 O에서 두 반지름 OA, OB와 호 AB로 이루어진 도형을 부채꼴 AOB라 한다. 두 반지름 OA, OB가 이루는 ∠AOB를 부채꼴 AOB의 **중심각** 또는 호 AB에 대한 중심각이라 하고, 호 AB를 ∠AOB에 대한 **호**라 한다.

활꼴 또 원 O에서 현 CD와 호 CD로 이루어진 도형을 활꼴이라 한다.

▷ 한 원에서 중심각의 크기가 같은 두 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 같다.

▷ 한 원에서 부채꼴의 호의 길이와 넓이는 각각 중심각의 크기에 정비례한다.



원주율 원의 지름의 길이에 대한 둘레의 길이의 비율. 즉, $\dfrac{(\text{원의 둘레의 길이})}{(\text{원의 지름의 길이})}$이다.

π로 나타내며 3.141592653⋯ 와 같이 한없이 반복되는 소수이다.

▷ **원의 둘레의 길이와 넓이** 반지름의 길이가 r인 원의

① 둘레의 길이를 l이라 할 때 $l=2\pi r$이다.

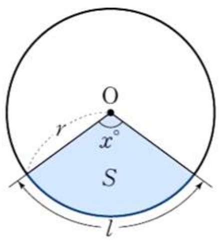
② 넓이를 S라 할 때 $S=\pi r^2$이다.

▷ **부채꼴의 호의 길이와 넓이** 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 $x°$인 부채꼴의

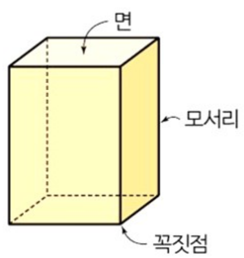
① 호의 길이를 l이라 할 때 $l=2\pi r\times\dfrac{x}{360}$이다.

② 넓이를 S라 할 때 $S=\pi r^2\times\dfrac{x}{360}$이다.

③ 호의 길이를 l, 넓이를 S라 할 때 $S=\dfrac{1}{2}rl$이다.



[다면체]



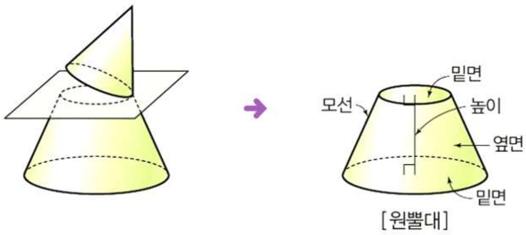
다면체 다각형인 면으로만 둘러싸인 입체도형

- **면** 다면체를 둘러싸고 있는 다각형
- **모서리** 다면체를 둘러싸고 있는 다각형의 변
- **꼭짓점** 다면체를 둘러싸고 있는 다각형의 꼭짓점

각뿔대 각뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 각뿔이 아닌 쪽의 입체도형

원뿔대 원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 원뿔이 아닌 쪽의 입체도형

- **밑면** 원뿔대에서 서로 평행한 두 면
- **옆면** 모선을 회전시켜 생기는 면
- **높이** 두 밑면에 수직인 선분의 길이



정다면체 모든 면이 합동인 정다각형이고, 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같은 다면체

- 정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정이십면체, 정이십면체가 있다.
- 다각형의 내각의 크기가 120°인 정육각형으로는 다면체를 만들 수 없다.

회전체 평면도형을 한 직선을 축으로 하여 1회전 시킬 때 생기는 입체도형

- **회전축** 회전체를 만들 때 축으로 사용한 직선

[입체도형의 부피와 겉넓이]

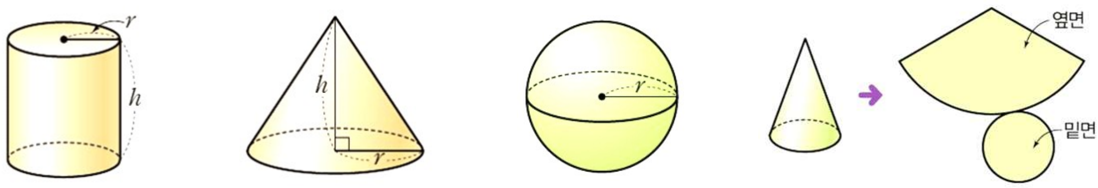
▷ **기둥의 부피** 밑넓이가 S이고 높이가 h인 기둥의 부피 V는 $V=S\times h$이다.

- **원기둥의 부피** 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원기둥의 부피 V는 $V=\pi r^2 h$이다.

▷ **뿔의 부피** 밑넓이가 S이고 높이가 h인 뿔의 부피 V는 $V=\frac{1}{3}Sh$이다.

- **원뿔의 부피** 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피 V는 $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$이다.

▷ 원뿔의 겉넓이를 구할 때는 전개도를 이용한다.



▷ **구의 부피** 반지름의 길이가 r인 구의 부피 V는 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$이다.

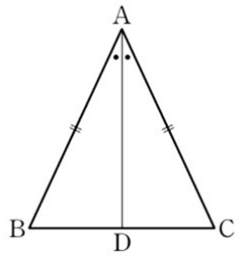
▷ **구의 겉넓이** 반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이 S는 $S=4\pi r^2$이다.

[중2]

[삼각형]

이등변삼각형 두 변의 길이가 같은 삼각형을 이등변삼각형이라 한다.

- 길이가 같은 두 변이 이루는 각을 **꼭지각**, 꼭지각의 대변을 **밑변**, 밑변의 양 끝 각을 **밑각**이라 한다.



▷ **이등변삼각형의 성질**

① 이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 같다.
② 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑면을 수직이등분한다.
③ 두 내각의 크기가 같은 삼각형은 이등변삼각형이다.

※ 이등변삼각형의 정의에서 [삼각형의 합동을 이용하여] 성질들을 증명해보자.

[①의 증명] $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형에서 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 두 삼각형 BAD, CAD는 SAS 합동이므로 $\angle B=\angle C$이다.

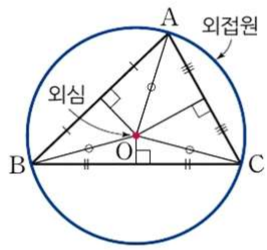
직각삼각형 한 내각의 크기가 직각인 삼각형을 직각삼각형이라 한다.

- 직각의 대변을 **빗변**이라 한다.

▷ **직각삼각형의 합동조건** 두 직각삼각형은 다음의 각 경우에 서로 합동이다.

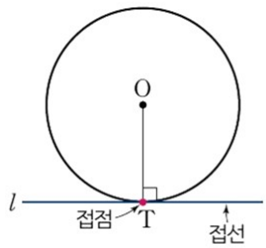
① 빗변의 길이와 대응하는 한 예각의 크기가 같을 때 (RHA 합동)
② 빗변의 길이와 대응하는 다른 한 변의 길이가 같을 때 (RHS 합동)

[삼각형의 내심과 외심]



삼각형의 외심 삼각형 ABC의 세 꼭짓점이 원 O 위에 있을 때, 원 O는 삼각형 ABC에 **외접**한다고 한다. 또 이 원 O를 삼각형 ABC의 **외접원**이라 하며, 외접원의 중심 O를 삼각형 ABC의 외심이라 한다.

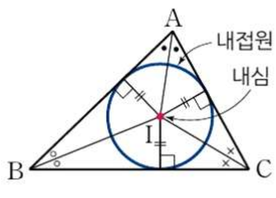
- 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
- 삼각형의 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.



▷ 원 O와 직선 l이 한 점에서 만날 때, 직선 l은 원 O에 **접한다**고 한다. 이때 직선 l을 원 O의 **접선**이라 하고, 원과 접선이 만나는 점 T를 **접점**이라 한다.

▷ 원의 접선은 그 접점을 지나는 반지름과 서로 수직이다.

※ [증명] $OT \perp l$이 아니라 가정하자. 직선 l 위에 $\angle OTP=\angle OPT$인 점 P를 잡을 수 있다. 점 P가 원 O와 직선 l 위의 점이므로 직선 l이 원과 한 점에서 만난다는 가정에 모순이다.



삼각형의 내심 삼각형 ABC의 세 변이 원 I에 접할 때, 원 I는 삼각형 ABC에 **내접**한다고 한다. 또 원 I를 삼각형 ABC의 **내접원**이라 하며, 내접원의 중심 I를 삼각형 ABC의 내심이라고 한다.

- 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이다.
- 삼각형의 내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리는 같다.

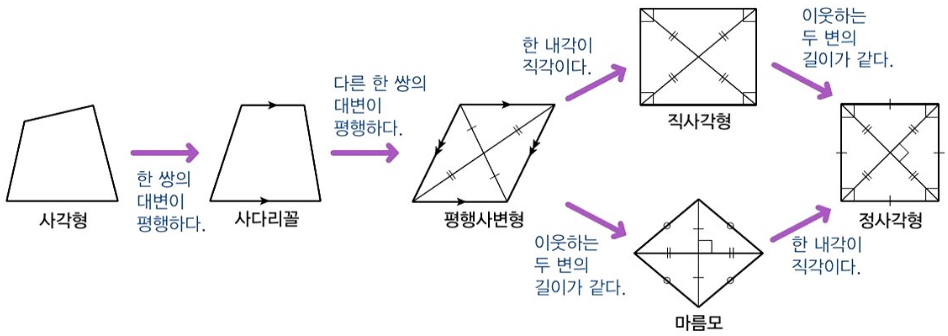
▷ **외심과 내심**에 대한 유형
- 직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.
  예각삼각형의 외심은 삼각형 내부에, 둔각삼각형의 외심은 삼각형 외부에 있다.
- (중3과정) 삼각형 ABC의 외심이 O일 때 $2\times\angle ABC=\angle AOC$이다.
- 빗변의 길이가 b인 직각삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{a+c-b}{2}$이다.
- 내접원의 반지름의 길이가 r인 삼각형의 넓이는 $\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$이다.

[사각형]

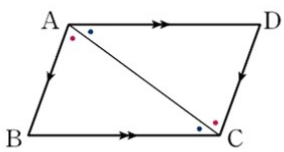
▷ 삼각형 ABC를 기호로 △ABC와 같이 나타낸 것처럼 사각형 ABCD를 기호로 □ABCD와 같이 나타낸다. 사각형에서 마주 보는 변을 **대변**, 마주보는 각을 **대각**이라 한다.

사다리꼴 마주 보는 한 쌍의 변이 서로 평행한 사각형
평행사변형 마주 보는 두 쌍의 변이 서로 평행한 사각형
직사각형 네 각의 크기가 모두 90°인 사각형
마름모 네 변의 길이가 모두 같은 사각형
정사각형 네 변의 길이가 모두 같고 네 내각의 크기도 모두 90°인 사각형

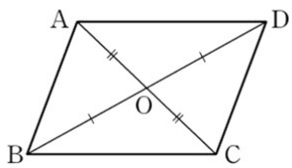
▷ **사각형들의 포함 관계**
- 사다리꼴 중에서 또 다른 한 쌍의 대변이 서로 평행한 것은 평행사변형이다.
- 평행사변형 중에서 한 내각의 크기가 90°인 것은 직사각형이다.
- 평행사변형 중에서 이웃하는 두 변의 길이가 서로 같은 것은 마름모이다.
- 직사각형이면서 마름모인 것은 정사각형이다.



▷ **평행사변형의 성질**
① 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.
② 평행사변형의 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
③ 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분한다.



▷ **평행사변형이 되는 조건**
① 두 쌍의 대변이 각각 평행하다.
② 두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.
③ 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같다.
④ 두 대각선이 서로를 이등분한다.
⑤ 한 쌍의 대변이 평행하고, 그 길이가 같다.



▷ **사각형의 대각선**

① 직사각형의 두 대각선은 길이가 같고, 서로를 이등분한다.

② 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.

③ 정사각형의 두 대각선은 길이가 같고, 서로를 수직이등분한다.

[닮음]

닮음 한 도형을 일정한 비율로 확대하거나 축소한 도형이 다른 도형과 합동일 때, 이 두 도형은 서로 닮음인 관계에 있다고 한다. 또 서로 닮음인 관계에 있는 두 도형을 **닮은 도형**이라고 한다. $\triangle ABC$와 $\triangle DEF$가 서로 닮은 도형일 때, 기호로 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$와 같이 나타낸다.

- 서로 닮은 두 평면도형에서 대응변의 길이의 비는 일정하다.
- 서로 닮은 두 평면도형에서 대응각의 크기는 각각 같다.
- 서로 닮은 두 평면도형에서 대응변의 길이의 비를 닮음비라 한다.

입체도형의 닮음

- 대응하는 모서리의 길이의 비는 일정하다.
- 대응하는 면은 닮은 도형이다.

▷ **삼각형의 닮음 조건** 두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 닮음이다.

① 세 쌍의 대응변의 길이의 비가 같을 때 (SSS 닮음)

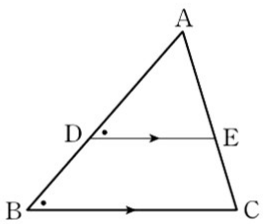
② 두 쌍의 대응변의 길이의 비가 같고, 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 닮음)

③ 두 쌍의 대응각의 크기가 각각 같을 때 (AA 닮음)

▷ 오른쪽 그림과 같이 $\triangle ABC$에서 변 BC에 평행한 직선과 두 변 AB, AC 또는 그 연장선의 교점을 각각 D, E라 할 때,

① $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{BC}:\overline{DE}$

② $\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{AE}:\overline{EC}$



▷ **중점연결 정리** 삼각형 ABC에서 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 할 때,

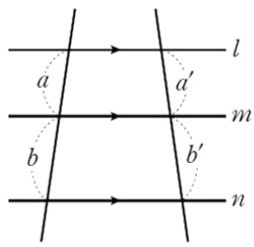
① $BC \mathbin{/\!/} MN$ ② $\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}$

- [증명] 두 삼각형 ABC, AMN은 서로 닮은 도형이다. (SAS 닮음)

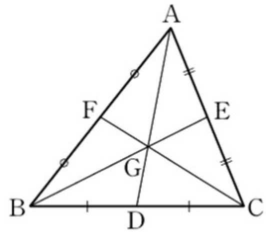
▷ **각의 이등분선 정리** 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선과 선분 BC의 교점을 D라 할 때, $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$이다.

- [증명] 직선 AD와 점 C를 지나고 선분 AB와 평행한 직선의 교점을 E라 할 때, 두 삼각형 ABD, ECD는 서로 닮은 도형이고 삼각형 ACE는 이등변삼각형이다.
- [외각의 이등분선 정리] 삼각형 ABC에서 꼭짓점 A의 외각의 이등분선과 직선 BC의 교점을 D라 할 때, $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$이다. 거의 쓸 일 없다. 할 일 없으면 증명해보도록 하자.

▷ 세 개 이상의 평행선이 다른 두 직선과 만날 때, 평행선 사이에 생기는 선분의 길이의 비는 같다.
즉, 오른쪽 그림에서 $l \mathbin{/\!/} m \mathbin{/\!/} n$이면 $a:b=a':b'$이다.



[삼각형의 무게중심]



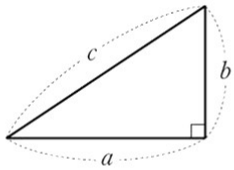
무게중심 삼각형에서 한 꼭짓점과 그 대변의 중점을 이은 선분을 **중선**이라 한다.
삼각형의 세 중선의 교점을 그 삼각형의 무게중심이라 한다.

- 삼각형의 무게중심은 세 중선의 길이를 각 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 나눈다.

▷ **무게중심**에 대한 유형

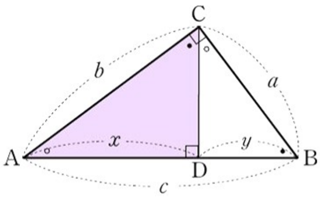
- 삼각형을 세 중선에 의해 6개의 삼각형으로 나누었을 때, 6개의 삼각형의 넓이는 서로 같다.
- (고1과정) 좌표평면 위의 세 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는 $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$이다.

[피타고라스 정리]

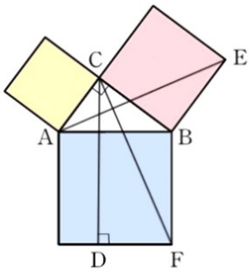


▷ **피타고라스 정리** 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변의 길이의 제곱의 합은 빗변의 길이의 제곱과 같다. 즉, 직각을 낀 두 변의 길이를 각각 a와 b라 하고 빗변의 길이를 c라 하면 $a^2+b^2=c^2$이 성립한다.

- [증명1] 아래의 [그림1]에서 $b^2=cx$, $a^2=cy$이다. $c=x+y$이므로 $a^2+b^2=c^2$이다.
- [증명2] 아래의 [그림2]에서 두 삼각형 ABE와 FBC가 합동이므로 두 삼각형 BCE와 BDF의 넓이가 서로 같다.



[그림1]



[그림2]

▷ **직각삼각형이 되는 조건** 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 삼각형에서 $a^2+b^2=c^2$이 성립하면, 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

- $a^2+b^2>c^2$이 성립하면, $\angle$C는 예각이고, $a^2+b^2<c^2$이 성립하면, $\angle$C는 둔각이다.

▷ **아폴로니우스의 정리** 삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\text{AB}}^2+\overline{\text{AC}}^2=2\left(\overline{\text{AM}}^2+\overline{\text{BM}}^2\right)$이 성립한다.

- 흔히 [파푸스의 중선 정리]라는 이름으로 잘못 알려져 있다.
- [증명] 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 직각삼각형 ABH, ACH, AMH에서 각각 피타고라스를 때려보자.

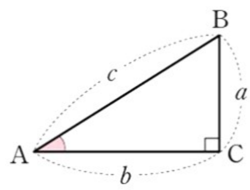
▷ **직각삼각형**에 대한 유형

- $\angle$C가 직각인 직각삼각형 ABC에서 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 삼각형 ABC, ACH, CBH는 모두 서로 닮은 도형이다.
- (고1과정) 좌표평면 위의 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$이다.

[중3]

[삼각비]

삼각비 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$의 크기가 정해지면 두 변의 길이의 비 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$의 값은 항상 일정하다.

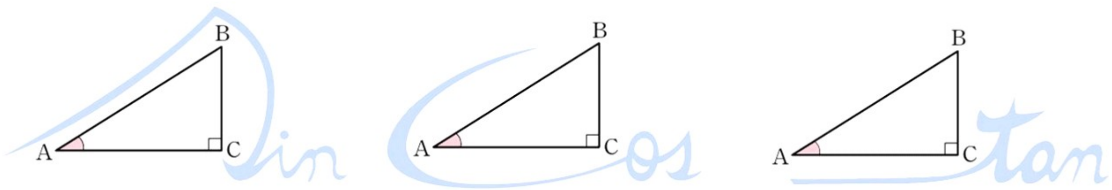


- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$를 $\angle A$의 **사인**이라 하고 $\sin A$와 같이 나타낸다.
- $\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$를 $\angle A$의 **코사인**이라 하고 $\cos A$와 같이 나타낸다.
- $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$를 $\angle A$의 **탄젠트**라 하고 $\tan A$와 같이 나타낸다.

즉, $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 할 때,

① $\sin A=\dfrac{a}{c}$ ② $\cos A=\dfrac{b}{c}$ ③ $\tan A=\dfrac{a}{b}$

이다.



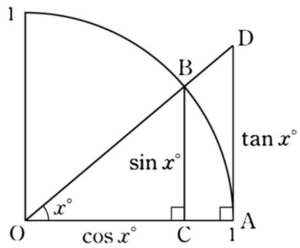
▷ **삼각함수 사이의 관계**

① $\sin(90^\circ-x^\circ)=\cos x^\circ$ ② $\cos(90^\circ-x^\circ)=\sin x^\circ$ ③ $\tan(90^\circ-x^\circ)=\dfrac{1}{\tan x^\circ}$

④ $\tan x^\circ=\dfrac{\sin x^\circ}{\cos x^\circ}$ ⑤ $\sin^2 x^\circ+\cos^2 x^\circ=1$

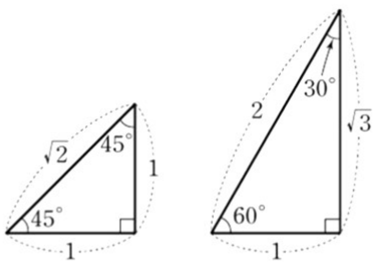
▷ 중심이 O이고 반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 $x^\circ\,(0^\circ<x^\circ<90^\circ)$인 부채꼴 AOB에서 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 C, 직선 OB와 점 A를 지나고 선분 OA와 수직인 직선의 교점 D에 대하여

① $\sin x^\circ=\overline{BC}$ ② $\cos x^\circ=\overline{OC}$ ③ $\tan x^\circ=\overline{AD}$



▷ **특수각의 삼각비**

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	없음



▷ 직각삼각형에서 한 예각의 크기와 한 변의 길이를 알면 나머지 두 변의 길이를 구할 수 있다.
예를 들어, $\angle$C가 직각인 직각삼각형 ABC에서 $\angle$A의 크기와 c의 값을 알 때,

① $\overline{\mathrm{BC}} = c\sin A$ ② $\overline{\mathrm{AC}} = c\cos A$

▷ **정삼각형** 한 변의 길이가 a인 정삼각형 ABC의

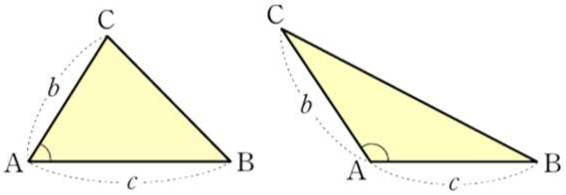
① 점 A에서 선분 BC 사이의 거리 h는 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$이다.

② 넓이 S는 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이다.

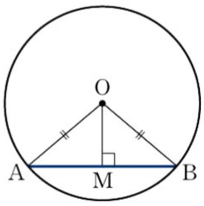
▷ **삼각형의 넓이** 두 변의 길이가 b, c이고 그 끼인각의 크기가 $\angle$A인 삼각형 ABC의 넓이 S는

① $\angle$A가 예각인 경우, $S = \frac{1}{2}bc\sin A$이다.

② $\angle$A가 둔각인 경우, $S = \frac{1}{2}bc\sin(180^\circ - A)$이다.



[원과 직선]



▷ 원의 중심과 현의 수직이등분선 사이의 관계

① 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

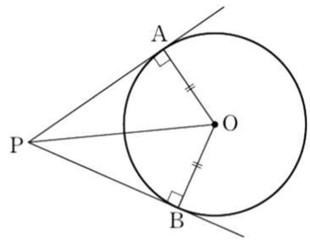
② 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.

▷ 원의 중심에서 현까지의 거리와 현의 길이 사이의 관계

① 한 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.

② 한 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

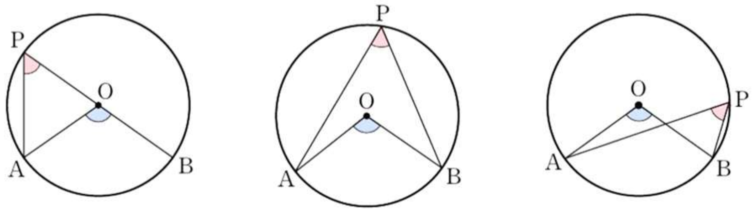
▷ 원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같다.



[원주각]

원주각 원 O에서 $\widehat{\mathrm{AB}}$ 위에 있지 않은 원 위의 점 P에 대하여 $\angle$APB를 $\widehat{\mathrm{AB}}$에 대한 원주각이라 하고 $\widehat{\mathrm{AB}}$를 원주각 $\angle$APB에 대한 호라 한다.

- $\widehat{\mathrm{AB}}$가 정해지면 그 호에 대한 중심각 $\angle$AOB는 하나로 정해지자만 원주각 $\angle$APB는 무수히 많다.
- 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같고, 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.
- [증명] 다음 세 경우 각각을 증명해야 한다. 대충 선분 OP 긋고 이등변삼각형을 찾자.



▷ 한 원에서 길이가 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같다.

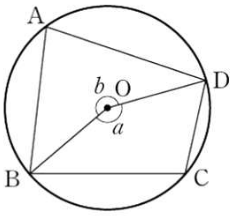
- 한 원에서 크기가 같은 원주각에 대한 호의 길이는 같다.
- 한 원에서 호의 길이는 그 호에 대한 중심각의 크기에 정비례하므로 그 호에 대한 원주각의 크기에도 정비례한다.

▷ 반원의 호에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

- $\angle$C가 직각인 직각삼각형에 대하여 점 C는 선분 AB을 지름으로 하는 원 위의 점이다.

▷ 원에 내접하는 사각형에서 한 쌍의 대각의 크기의 합은 180° 이다.

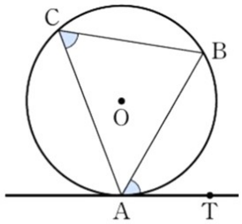
- [증명] 아래 그림에서 $\angle \mathrm{A} = \frac{1}{2}\angle \mathrm{a}$, $\angle \mathrm{C} = \frac{1}{2}\angle b$, $\angle a + \angle b = 360^\circ$ 이다.



[원의 접선과 현이 이루는 각]

▷ 원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

- [증명] 오른쪽 그림에서 직선 OA가 원과 만나는 A가 아닌 점을 D라 하자. $\angle$OAT와 $\angle$ABD가 모두 직각이므로 $\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{BAT}$ 이다.



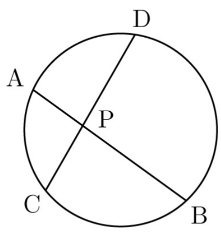
▷ **방멱정리** / **할선정리** / **원과 비례**

① [그림1]에서 $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PC}} \times \overline{\mathrm{PD}}$ 이다.

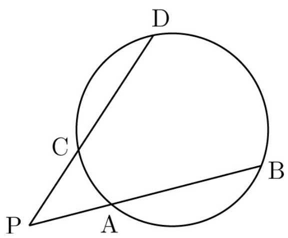
② [그림2]에서 $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PC}} \times \overline{\mathrm{PD}}$ 이다.

③ [그림3]에서 $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{PC}}^2$ 이다.

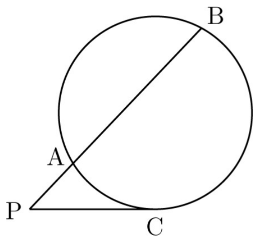
※ 교육과정에서 제외되었지만 그냥 해두자.



[그림1]



[그림2]



[그림3]

- [증명] 예를 들어 [그림1]에서 두 삼각형 PAC와 PDB가 닮음 도형이다. 나머지는 각자.
- 점 P와 원 C에 대하여 점 P를 지나는 직선이 원 C와 두 점 A, B에서 만날 때, $\overline{\mathrm{PA}} \times \overline{\mathrm{PB}}$는 일정하다고 표현할 수 있다. 있어 보이는 말로 방멱정리라 한다.
- [그림3]은 [그림2]직선 CD를 원의 접선이 되도록 미는 것을 생각해도 좋다.