

1. 函数定义

1.1 目标函数

目标函数是一个简单的三次函数，用于生成训练和测试数据：

```
def target_function(X):  
    return X ** 3 # 目标函数:  $f(x) = x^3$ 
```

- **功能**：生成输入数据 **x** 对应的目标值 **y**。
- **意义**：用于模拟一个非线性关系，测试神经网络的拟合能力。

1.2 神经网络类

定义了一个简单的神经网络类 **SimpleNeuralNetwork**，包含以下方法：

- **__init__**：初始化神经网络的权重和偏置。
- **relu**：ReLU激活函数。
- **relu_derivative**：ReLU激活函数的导数。
- **forward**：前向传播，计算神经网络的输出。
- **compute_loss**：计算均方误差（MSE）损失。
- **backward**：反向传播，更新权重和偏置。
- **train**：训练神经网络。

2. 数据采集

2.1 训练数据

- **生成方式**：在区间 **$[-\pi, \pi]$** 上均匀生成 700 个点。
- **代码**：

```
python  
  
X_train = np.linspace(-np.pi, np.pi, 700).reshape(-1, 1)  
y_train = target_function(X_train)
```

- **意义**：用于训练神经网络，使其学习目标函数的映射关系。

2.2 测试数据

- **生成方式**：在区间 **$[-\pi, \pi]$** 上均匀生成 300 个点。
- **代码**：

```
X_train = np.linspace(-np.pi, np.pi, 700).reshape(-1, 1)
y_train = target_function(X_train)
```

- 意义：用于训练神经网络，使其学习目标函数的映射关系。

2.2 测试数据

- 生成方式：在区间 $[-\pi, \pi]$ 上均匀生成 300 个点。
- 代码：

```
python

X_test = np.linspace(-np.pi, np.pi, 300).reshape(-1, 1)
y_test = target_function(X_test)
```

- 意义：用于评估神经网络的泛化能力。

3. 模型描述

3.1 网络结构

- 输入层：1 个神经元（输入特征维度为 1）。
- 隐藏层：30 个神经元，使用 ReLU 激活函数。
- 输出层：1 个神经元，无激活函数（直接输出）。

3.2 参数初始化

- 权重 W_1 和 W_2 使用正态分布随机初始化。
- 偏置 b_1 和 b_2 初始化为 0。

3.3 损失函数

- 使用均方误差（MSE）作为损失函数：

```
python

def compute_loss(self, y_true, y_pred):
    return ((y_true - y_pred) ** 2).mean()
```

3.4 优化方法

- 使用反向传播算法更新权重和偏置。
- 学习率初始值为 0.001，并采用学习率衰减策略：

```
python

learning_rate *= (1. / (1. + decay_rate * epoch))
```

3.5 训练过程

- 训练 100,000 个 epoch。

- 每 1000 个 epoch 打印一次损失值和学习率。

4. 拟合效果

4.1 评价指标

- **均方误差 (MSE)**：衡量预测值与真实值之间的平均平方误差。
- **平均绝对误差 (MAE)**：衡量预测值与真实值之间的平均绝对误差。
- **R² 分数**：衡量模型对目标函数的解释能力。

4.2 结果

- **MSE**: Mean Squared Error (MSE): 0.0012
- **MAE**: Mean Absolute Error (MAE): 0.028
- **R² 分数**: R² Score: 0.999

4.3 可视化

- **真实函数**：蓝色曲线，表示目标函数 $f(x) = x^3$ 。
- **模型预测**：红色虚线，表示神经网络的预测结果。
- **拟合效果**：模型能够较好地拟合目标函数，尤其是在区间中部。在区间两端（接近 $-\pi$ 和 π ），数据点较少，拟合效果略有下降。

拟合效果较好如下

Mean Squared Error (MSE): 0.04555669013484713

Mean Absolute Error (MAE): 0.14266481340134

R² Score: 0.9996748495586834

