המכללה האקדמית להנדסה אורט בראודה ORT BRAUDE COLLEGE

משוואות מקסוול

	צורה אינטגרלית	צורה דיפרנציאלית
חוק גאוס	$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{a}=4\pi kQ_{in}$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi k\rho$
חוק גאוס המגנטי	$\oiint \vec{B}\cdot d\vec{a}=0$	$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$
חוק פארדיי	$\oint_{\partial\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\iint_{\Sigma}\vec{B}\cdot d\vec{a}$	$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
חוק אמפר-מקסוול	$\oint_{\partial\Sigma}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\iint_{\Sigma}\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{a}$	$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

1. **קבועים:** $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2},\ \varepsilon_0=1/4\pi k\approx8.85\cdot10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2},\ k\approx9\cdot10^9\,\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}$
2. **צפיפויות מטען:** קווית: $dq=\lambda dl$. משטחית: $dq=\sigma da$. נפחית: $dq=\rho dV$.
3. **חוק קולון:** הכוח על חלקיק q_2 (הנמצא ב $\vec{r}_2$) בהשפעת חלקיק q_1(הנמצא ב $\vec{r}_1$): $\vec{F}_{12}=k\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$
4. **שדה חשמלי:** $\vec{F}=q\vec{E}$. שדה בנקודה $\vec{r}$ הנוצר ע"י אלמנט מטען dq שנמצא ב $\vec{r}\,'$: $d\vec{E}(\vec{r})=\frac{kdq(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$. שדה של תיל אינסופי טעון אחידות בצפיפות λ שנמצא על ציר z: $\frac{2k\lambda}{r}\hat{r}$ (כש $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$). שדה של מישור אינסופי הנמצא ב $z=0$ וטעון אחידות בצפיפות σ: $2\pi k\sigma\frac{z}{|z|}\hat{z}$.
5. **הגדרת השטף:** השטף של השדה $\vec{E}$ דרך המשטח המכוון Σ: $\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{E}\cdot d\vec{a}$
6. **חוק גאוס:** ראה טבלת משוואות מקסוול בתחילת הדף. משפט הקפיצה בשדה: אי רציפות בשדה נובעת מקיומה של צפיפות מטען משטחית כש $\Delta E=4\pi k\sigma$
7. **פוטנציאל חשמלי:** $\varphi(\vec{r})=\varphi(\vec{r}_0)-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,'$ או בצורה הדיפרנציאלית $\vec{E}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\varphi$. לגוף סופי נהוג לבחור $\varphi(\infty)=0$ בבחירה זו הפוטנציאל בנקודה $\vec{r}$ הנוצר ע"י אלמנט מטען dq שנמצא ב $\vec{r}\,'$ הוא: $d\varphi(\vec{r})=\frac{kdq}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$
8. **משוואת פואסון:** $\nabla^2\varphi=-4\pi k\rho$ **ולפלס:** $\nabla^2\varphi=0$.
9. **קבלים:** הגדרת הקיבול $C=\frac{Q}{V}$ כש Q מטען הפריקה של הקבל ו V הפרש הפוטנציאל בין קצותיו. בקבל לוחות $C=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d}$ כש A שטח הלוחות, d המרחק ביניהם ו ε_r המקדם הדיאקטרי היחסי של החומר בין הלוחות. חיבור בטור $C_T^{-1}=\sum C_i^{-1}$ חיבור במקביל $C_T=\sum C_i$.
10. **אנרגיה אלקטרוסטטית:** של אוסף מטענים נקודתיים $U=\frac{1}{2}\sum_i q_i\sum_{j\neq i}\frac{kq_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_i q_i\tilde{\varphi}_i$ כש $\tilde{\varphi}_i$ הוא הפוטנציאל בנקודה $\vec{r}_i$ הנוצר ע"י כל המטענים מלבד q_i. להתפלגות מטען $U=\frac{1}{2}\left(\iiint\varphi\rho dV+\iint\varphi\sigma da\right)$ או $U=\frac{1}{2}\varepsilon_0\iiint E^2dV$. לקבל $U=\frac{1}{2}CV^2$

11. **זרמים:** עצמת הזרם בתיל: $I=\left|\frac{dQ}{dt}\right|$. הזרם דרך משטח מכוון Σ: $I=\iint_{\Sigma}\vec{J}\cdot d\vec{a}$ כש $\vec{J}$ וקטור צפיפות הזרם.

ביטוי ל $\vec{J}$ באמצעות הצפיפות מספרית של נושאי המטען n, המטען שלהם q, ומהירות הסחיפה $\vec{v}_d$:

$\vec{J}=nq\vec{v}_d$

12. **משוואת הרציפות:** $\oiint \vec{J}\cdot d\vec{a}=-\frac{dQ_{in}}{dt}$ בצורה דיפרנציאלית $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{dt}$.

13. **חוק אוהם:** המקומי $\vec{J}=\sigma\vec{E}$ כש σ היא המוליכות הסגולית. צורה גלובאלית $V=IR$ כש R התנגדות הנגד ו V הפרש הפוטנציאלים בין קצותיו. ההתנגדות של תיל באורך L ושטח חתך A היא $R=\rho\frac{L}{A}$ כש $\rho=1/\sigma$ היא ההתנגדות הסגולית.

14. **חוקי קירכהוף:** סכום הזרמים בצומת הוא אפס. כשהזרם קבוע בזמן, סכום המתחים בלולאה סגורה הוא אפס.

15. **הספק:** $P=IV$. הספק ליחידת נפח: $p=\vec{J}\cdot\vec{E}$

16. **כוח לורנץ:** על מטען q הנע במהירות $\vec{V}$ הוא $\vec{F}_L=q(\vec{E}+\vec{V}\times\vec{B})$. על אלמנט תיל בו זורם זרם I: $d\vec{F}_L=Id\vec{l}\times\vec{B}$ הווקטור $d\vec{l}$ מציין את אורך האלמנט ואת כיוון הזרם.

17. **תנועת מטען חופשי בשדה מגנטי אחיד:** היא תנועה הלית ברדיוס $R=\frac{mv_{\perp}}{qB}$ זמן המחזור הוא $T=\frac{2\pi m}{qB}$ כש q מטען החלקיק ו m המסה שלו ו $v_{\perp}$ גודל היטל המהירות על המישור הניצב לשדה $\vec{B}$. באופן כללי הקשר בין זמן מחזור לתדירות זוויתית הוא $T=\frac{2\pi}{\omega}$

18. **אי קיום מטען מגנטי.** ראה חוק גאוס המגנטי בטבלה בראש הדף

19. **חוק ביו-סבר:** השדה המגנטי שנוצר בנקודה P ע"י אלמנט תיל בו זורם זרם I הוא: $d\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$ כש $\vec{r}$ הוא הווקטור מאלמנט הזרם אל הנקודה P.

20. **חוק אמפר:** כאשר צפיפות המטען קבועה בזמן מתקיים $\oint_{\partial\Sigma}\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\iint_{\Sigma}\vec{J}\cdot d\vec{a}$ או בצורה דיפרנציאלית

$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}$

21. **אי-רציפות בשדה מגנטי:** מעידה על צפיפות אורכית של זרם משטחי: $B_{\hat{p}}\left(\vec{r}_0+\delta\hat{n}\right)-B_{\hat{p}}\left(\vec{r}_0-\delta\hat{n}\right)=\mu_0 j_{\hat{n}\times\hat{p}}$ כאשר $\delta\hat{n}$ ווקטור קטן הניצב למשטח.

22. **שדה מגנטי של תיל:** הנמצא על ציר z וזורם בו זרם I: $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\theta}$ (כש $\hat{\theta}=\frac{-y\hat{x}+x\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$)

23. **שדה מגנטי של סליל אינסופי:** בפנים $\mu_0 nI$ בחוץ 0. כש n מספר הכריכות ליחידת האורך ו I הזרם.

24. **חוק פארדיי:** $\varepsilon=-\frac{d\Phi_M}{dt}$. לניסוחים נוספים ראה טבלת משוואות מקסוול.

25. **השראות עצמית:** $\varepsilon=-L\frac{dI}{dt}$

26. **אנרגיה של השדה המגנטי:** $U_B=\frac{1}{2\mu_o}\iiint B^2 dv$ **אנרגיה של משרן:** $U=\frac{1}{2}LI^2$

27. **זרם ההעתקה:** כשהשדה החשמלי תלוי בזמן, נוצר שדה מגנטי גם ע"י זרם ההעתקה. צפיפות זרם ההעתקה היא $\vec{j}_D=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. ראה גם חוק-אמפר מקסוול בטבלא בראש הדף.

נספח – נוסחאות מתמטיות

1. **קשרים גיאומטריים:** היקף מעגל $2\pi r$. אורך קשת הנשענת על זווית α: $r\alpha$. שטח עיגול: πr^2. שטח פני כדור: $4\pi r^2$. שטח פני גליל: $2\pi rh$. נפח כדור: $\frac{4}{3}\pi r^3$. נפח גליל: $\pi r^2 h$.
2. **משפט הקוסינוסים:** במשולש $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ כש γ היא הזווית שמול הצלע c.
3. **רישום אלמנטים**: אלמנט נפח: בקואורדינטות קרטזיות $dv = dxdydz$ ב בקואורדינטות כדוריות $dv = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$ כשיש סימטריה כדורית $dv = 4\pi r^2 dr$. ב בקואורדינטות גליליות $dv = rd\theta drdz$. אלמנט שטח: בקואורדינטות קרטזיות $da = dxdy$ בקור' פולריות $da = rd\theta dr$ כשיש סימטריה מעגלית $da = 2\pi r dr$.
אלמנט אורך לאורך קו עקום $\vec{r}\,'(s)$ $|d\vec{r}\,'| = ds\sqrt{\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}}$
4. **רישום צורות בעזרת פרמטרים:** קו ישר: $\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + \vec{V}s$. מישור: $\vec{r}(s,t) = \vec{r}_0 + \vec{V}s + \vec{U}t$
5. **אופרטורים דיפרנציאליים:**
   א. **גרדיינט** של פונקציה סקלרית ψ:

   בקואורדינטות קרטזיות $$\vec{\nabla}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\hat{z}$$

   בקואורדינטות כדוריות כשיש סימטריה כדורית $$\vec{\nabla}\cdot\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{r}$$ כש $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

   בקואורדינטות גליליות כשיש סימטריה גלילית $$\vec{\nabla}\cdot\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{r}$$ כש $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$

   ב. **דיברגנס** של פונקציה וקטורית $\vec{A}$. הגדרה: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \equiv \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint\!\!\oint_{\partial V}\vec{A}\cdot d\vec{a}$. דרכי חישוב:

   בקואורדינטות קרטזיות $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

   בקואורדינטות כדוריות כשיש סימטריה כדורית (כלומר כש $\vec{A}(\vec{r}) = A(r)\hat{r}$) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2 A)}{dr}$$ כש $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

   בקואורדינטות גליליות כשיש סימטריה גלילית (כלומר כש $\vec{A}(\vec{r}) = A(r)\hat{r}$) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{d(rA)}{dr}$$ כש $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$

   ג. **רוטור** של פונקציה וקטורית $\vec{A}$. הגדרה: $\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\cdot\hat{n} \equiv \lim_{\Sigma\to 0}\frac{1}{\Sigma}\oint_{\partial\Sigma}\vec{A}\cdot d\vec{l}$ כש $\hat{n}$ ניצב לשטח Σ. דרכי חישוב:
   $$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

6. **משפט הדיברגנס:** $$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \iint_{\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{a}$$
7. **משפט סטוקס:** $$\iint_\Sigma \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{a} = \oint_{\partial\Sigma}\vec{F}\cdot d\vec{l}$$
8. **משדי"ף:** א. אם $\dot{y} = ky + p$ אז $y(t) = (y_0 + \frac{p}{k})e^{kt} - \frac{p}{k}$. ב. אם $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ אז $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. ג. אם $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (וכן $\omega_0 > \gamma$) אז $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$ כש $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

9. **טור טיילור:** $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+...+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x-x_0)^n+...$ למשל $(1+x)^p\approx 1+px+\binom{p}{2}x^2+...$

10. **זהויות טריגונומטריות:** א. $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ ב. $-\cos(\pi-\alpha)=\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$,

ג. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$ ד. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ה. $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

ו. $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ ז. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ח. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

11. **זהויות וקטוריות:** א. $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec A)=0$ ב. $\vec A\times(\vec B\times\vec C)=(\vec A\cdot\vec C)\vec B-(\vec A\cdot\vec B)\vec C$

אינטגרלים

$$\int\frac{dx}{\left(x^2\pm a^2\right)^{1/2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| \qquad \int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \int\frac{xdx}{a^2+x^2}=\frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a} \qquad \int\frac{xdx}{(a-x)^2}=\frac{a}{a-x}+\ln(a-x)$$

$$\int\sin^2 xdx=\frac{1}{2}(x-\sin x\cos x) \qquad \int\frac{x^3}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}dx=\frac{2a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \qquad \int\frac{x^3}{\sqrt{a^2+x^2}}dx=\frac{1}{3}(x^2-2a^2)\sqrt{a^2+x^2}$$