確率統計の基礎

amino

2021 年 10 月 26 日

1　離散型確率変数

1.1　確率, 期待値, 分散

定義 1. $p_k = P(X = k)$ とするとき期待値 $E(X)$, 分散 $V(X)$ はそれぞれ

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k$$

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - E(X))^2 p_k$$

定理 1.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

1.2　確率変数と確率分布

1.2.1　二項分布

定義 2.

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

のとき、この分布を $B(n, p)$ で表す.

定理 2.

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$B(n, p)$ は n が十分大きいときポアソン分布 $p(np)$ に近似できる.

1.2.2　ポアソン分布

定義 3.

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

のとき, この分布を $p(\lambda)$ と表す.

定理 3.

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

2　連続型確率変数

2.1　確率, 期待値, 分散

定義 4.

$$P(a \leq X \leq b)=\int_a^b f(x)dx$$

で表されるとき,$f(x)$ を確率密度関数という.

定理 4.

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$$

定義 5.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$V(x)=\int_{-\infty}^{\infty} (x-E(X))^2 f(x)dx$$

定理 5.

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

2.2 確率変数と確率分布

2.2.1 一様分布

定義 6. 確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a \leq x \leq b) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

のとき, この分布を $U(a,b)$ で表す.

定理 6.

$$E(X) = \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2.2.2 正規分布

定義 7. 確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

のとき, この分布を $N(\mu, \sigma^2)$ で表す.

定理 7. $Z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ は $N(0,1)$ に従う.