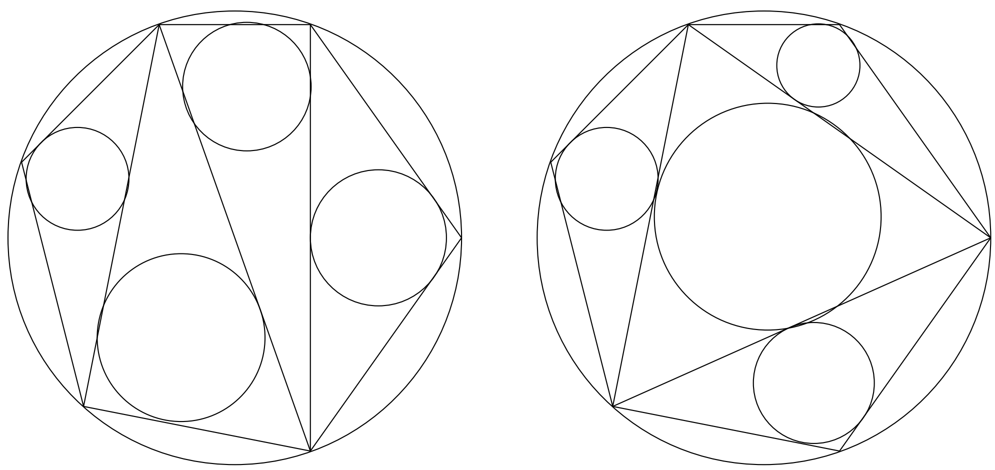
日本の定理の証明

amino

2021 年 9 月 1 日



日本の定理というものがある. それは次のようなものである.

日本の定理

円に内接する多角形を対角線で三角形に区切ったとき, 区切り方に関わらず三角形の内接円の半径の和は一定である

例えば上の図は円に内接する六角形を二通りの区切り方で区切っているが, どちらも区切られた三角形の内接円の半径の和は同じである.
これはとても美しい定理であるが, 私はこれの初等幾何での証明を見つけたので書いてみようと思う.

さて, この定理を証明するには, 多角形が四角形の場合に示せばよいことがわかる. なぜなら, 三角形に区切られた多角形から四角形を抜き出し, そこの対角線の引き方を変える操作を繰り返し行うことで全ての区切り方を再現できるからである. 四角形の場合を示すために, 次の補題を示す.

補題. 円に内接する四角形 $ABCD$ において,$\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ の内心は長方形をなす.

証明. 円に内接する四角形 $ABCD$ において, 対角線の交点を P とする. また, 弧 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ E, F, G, H とし,$\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ の内心をそれぞれ I_B, I_C, I_D, I_A とし,$\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ の内心をそれぞれ J, K, L, M とする. このとき, 次の 4 点は一直線上にあることが容易にわかる.

$$AJI_BF, BJI_AH, BKI_CG, CKI_BE, CLI_DH, DLI_CF, DMI_AE, AMI_DG$$

また,(A,C,E,D,B,G) でパスカルの定理より 3 点 M, P, K も一直線上にあり, 同様に J, P, L も一直線上にある. さらに J, K はそれぞれ $\triangle PAB, \triangle PBC$ の内心であることから,A, P, C が一直線上にあることから $\angle JPK = 90^\circ$ であり,$JL \perp MK$ を得る.
ここで $\overset{\frown}{AH} = \overset{\frown}{DH}$ から $\angle JFH = \angle LFH$ であり, 同様に $\angle BHF = \angle CHF$ なので,J は L を FH で対称移動した点であり, とくに $JL \perp HF$ であり,$\angle JFH = \angle LFH$ と合わせて $FJ = FL$ である. また,I_B は $\triangle ABC$ の内心なので, 内心の性質から $FB = FI_B = FC$ である.I_C についても同様に考えれば,$FI_B = FI_C$ を得るので,$JL \parallel I_BI_C$. 同様にして $MK \parallel I_AI_B$ である. これと $JL \perp HF, JL \perp MK$ から $I_AI_B \perp I_BI_C$. 同様にすれば四角形 $I_AI_BI_CI_D$ が長方形であることが分かる. □

さて, ここから $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ の内接円の半径の和と $\triangle BCD$ と $\triangle DAB$ の内接円の半径の和が等しいことを示す.

証明. 前の四角形 $ABCD$ の外心を O とし, 外接円の半径の長さを R とする. また,,$\triangle ABC, \triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ の内接円の半径をそれぞれ r_B, r_C, r_D, r_A とする. 求めるべきことは $r_A + r_C = r_B + r_D$ である. ここで,$\triangle ABC$ でチャップル・オイラーの定理より,

$$OI_B^2 = R^2 - 2Rr_B \Leftrightarrow r_B = \frac{R^2 - OI_B^2}{2}$$

$\triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB$ に関しても同様にして足し合わせて,

$$r_A + r_C = R^2 - \frac{OI_A^2 + OI_C^2}{2}$$
$$r_B + r_D = R^2 - \frac{OI_B^2 + OI_D^2}{2}$$

ここで, 補題より四角形 $I_AI_BI_CI_D$ が長方形であることから,*British flag theorem* より $OI_A^2 + OI_C^2 = OI_B^2 + OI_D^2$ より,$r_A + r_C = r_B + r_D$. $\square$