東進数学コンクール

$$f(x) \in \mathbb{R}[x]\ s.t.\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x \in \mathbb{Q}$$

を全て決定せよ.

Proof. $f(x) = c$(c は定数) という関数は条件を満たさないので以後 $f(x)$ は定数でないとする.$f(x)$ を n 次多項式とする. このとき,$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0$ とおける. ここで $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$ を $n+1$ 個の異なる有理数とすると, 条件より $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_{n+1})$ は全て有理数となる.$1 \leq i \leq n+1$ について $\beta_i = f(\alpha_i)$ とすると,

$$\begin{cases} a_n\alpha_1^n + a_{n-1}\alpha_1^{n-1} + \cdots + a_1\alpha_1 + a_0 = \beta_1 \\ a_n\alpha_2^n + a_{n-1}\alpha_2^{n-1} + \cdots + a_1\alpha_2 + a_0 = \beta_2 \\ \vdots \\ a_n\alpha_{n+1}^n + a_{n-1}\alpha_{n+1}^{n-1} + \cdots + a_1\alpha_{n+1} + a_0 = \beta_{n+1} \end{cases}$$

一般に x 座標が異なる $n+1$ 点を通る n 次関数は存在しかつ一意に定まるので, これを $n+1$ 個の変数 $a_0, \cdots a_n$ の $n+1$ 元 1 次連立方程式とみたとき解は存在し, それらは有理数 $\alpha_i^d, \beta_j (1 \leq i, j \leq n+1, 0 \leq d \leq n)$ の有理式で表されるから, 有理数が四則演算で閉じていることを考えれば, 解は有理数である. よって $a_i \in \mathbb{Q}(0 \leq i \leq n)$ より $f(x)$ は有理数係数多項式である.$f(x)$ は 0 という関数ではないので, 適当に整数 M を用意し $g(x) = Mf(x)$ とすれば $g(x)$ を最高次係数が正である整数係数多項式とすることができ, このとき任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $f(x)$ と $g(x)$ が有理数であることは同値なので, この問題は次の問題を考えればよい:

最高次係数が正である整数係数多項式 $g(x)$ であって, 任意の実数 x に対し,x が有理数であることと $g(x)$ が有理数であることは同値であるような $g(x)$ を全て求めよ.

ここで次の補題を示す.

補題 1. 任意の整数係数多項式 $h(x)$ について,$h(x) = 0$ の有理数解は

$$\frac{(h(x) \text{ の定数項の約数})}{(h(x) \text{ の最高次係数の約数})}$$

の形で表される.*(約数は負も含む.)*

証明 1. $h(x)$ を n 次多項式とし,$h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$ と表す.$h(x) = 0$ が有理数解をもつときそれを $\frac{p}{q}$ $(\gcd(p, q) = 1)$ と表すと,

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} = -a_0q^n$$

左辺は全ての項が p の倍数なので左辺は p の倍数であり a_0q^n も p の倍数である.p と q は互いに素なので a_0 は p の倍数であり,p は a_0 の約数である. また

$$-a_np^n = a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n$$

から同様にすれば q は a_n の約数であり, 補題は示された. $\square$

この補題から次の系を得る.

系 1. 任意の整数係数多項式 $h(x)$ について,$h(x)=0$ の有理数解は,$k \in \mathbb{Z}$ を用いて

$$\frac{k}{(h(x)\text{ の最高次係数})}$$

の形で表される.

$g(x)$ が 1 次の整数係数多項式とすると,$g(x) = ax + b(a, b \in \mathbb{Z}, a > 0)$ と表せる. このときこれは条件を満たすので以降 $g(x)$ は 2 次以上のときを考える. $g(x)$ の次数を n,i 次係数を a_i とする. 二項定理より $g(x+\frac{1}{a_n})$ の n 次の係数は a_n,$n-1$ 次の係数は $a_n\binom{n}{1}\frac{1}{a_n} + a_{n-1} = n + a_{n-1}$ である.$g(x)$ の n 次の係数は a_n,$n-1$ 次の係数は a_{n-1} より,$g(x+\frac{1}{a_n}) - g(x)$ の n 次の係数は 0,$n-1$ 次の係数は n である.
よって $n, n-1 > 0$ より, $\lim_{x\to\infty}\left(g(x+\dfrac{1}{a_n}) - g(x)\right) \to \infty$ となるから, 十分大きい実数 m をとれば,$x \geq m$ である任意の実数 x に対し $g(x+\frac{1}{a_n}) - g(x) > 1$ とすることができる.m より大きな整数 t_1 をとる.$g(x)$ は整数係数多項式より $g(t_1)$ は整数であるからこれを L とおくと,$g(t_1+\frac{1}{a_n}) - g(t_1) > 1$ より $g(t_1+\frac{1}{a_n}) > L+1$ より $g(t_1) < L+1 < g(t_1+\frac{1}{a_n})$ であり,$a_n > 0$ より $t_1 + \frac{1}{a_n} > t_1$ なので,$g(x)$ の連続性から, 中間値の定理よりある $t_2 \in (t_1, t_1+\frac{1}{a_n})$ が存在し $g(t_2) = L+1$ となる.$t_1 < t_2 < t_1 + \frac{1}{a_n}$ より $t_2 - t_1 < \frac{1}{a_n}$ である.
ここで $g(t_1) = L, g(t_2) = L+1$ より $g(t_1), g(t_2) \in \mathbb{Q}$ であり,$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ より条件から t_1, t_2 は有理数であり, さらに t_1, t_2 はそれぞれ整数係数方程式 $g(x) - L = 0, g(x) - L - 1 = 0$ の有理数解である. よって補題 1 より $m, l \in \mathbb{Z}$ を用いて $t_1 = \frac{m}{a_n}, t_2 = \frac{l}{a_n}$ と表され,$t_2 > t_1$ と $a_n > 0$ から $l > m$, とくに $l - m \geq 1$ なので,$t_2 - t_1 = \frac{l-m}{a_n} \geq \frac{1}{a_n}(\because a_n > 0)$ であるが, これは先程の結果と矛盾する. よって $g(x)$ が二次以上の多項式のとき条件を満たす多項式は存在しない.
以上より,$f(x) = \frac{1}{M}g(x)$ であることを考えれば求める $f(x)$ は $f(x) = ax + b(a, b \in \mathbb{Q})$(ただし $a \neq 0$). $\square$