9 Hard

从1到9的9个整数中有放回地随机取3次，每次取一个数，则取出的3个数之积能被10整除的概率为 ( ).

0.774

0.128

0.214

0.354

设 A_1 表示“取出的3个数中有偶数”； A_2 表示“取出的3个数中有5”，则所求概率为

$$P(A_1A_2)=1-P(\overline{A_1A_2})=1-P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})=1-[P(\overline{A_1})+P(\overline{A_2})-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})]$$

$$=1-\left[\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{8}{9}\right)^3-\left(\frac{4}{9}\right)^3\right]\approx 0.214.$$

#17 Easy

箱中有 6个红球和 2个白球，任意抽取四次，每次取一球，取后不放回，则在第四次抽取时取得红球的概率为 ( ).

$1-(\frac{1}{4})^4$

$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}$

$(\frac{3}{4})^4$

这是个抽签事件，不管第几次抽到红球的概率都是相同的，即 $\frac{6}{6+2}=\frac{3}{4}$.

#7 Hard

某宾馆一楼有3部电梯，今有5人要乘坐电梯，假定各人选哪部电梯是随机的，则每部电梯中至少有一人的概率为 ( ).

0.64

0.61

0.63

0.62

(从对立事件考虑) 设 A_i 表示“第 i 部电梯内无人” $(i=1, 2, 3)$， W 表示“每部电梯中至少有一人”， $\overline{W}$ 表示“至少一部电梯中无人”，于是 $P(A_i)=\left(\frac{2}{3}\right)^5 \quad (i=1, 2, 3)$, $P(A_iA_j)=\left(\frac{1}{3}\right)^5 \quad (i, j=1, 2, 3; i\neq j)$,

$P(A_1A_2A_3)=0$,

$$P(\overline{W})=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+0\approx 0.38,$$

$$P(W)=1-P(\overline{W})=1-0.38=0.62.$$

10个人中有一对夫妇，他们随意坐在一张圆桌周围，则该对夫妇正好坐在一起的概率为( ).

$\frac{5}{9}$

$\frac{1}{9}$

$\frac{4}{9}$

$\frac{2}{9}$

设A为“该对夫妇正好坐在一起”.

方法1：10个人随机坐在一张圆桌周围，共有9！种方法.先考虑该对夫妇男左女右坐在一起：把相邻的两个座位看成一个特号座，考虑捆绑法的思路，9个座位有8！种排法，同理再考虑男右女左的坐法，所以

$P(A)=\frac{2\times 8!}{9!}=\frac{2}{9}$.

方法2：只考虑夫妇俩人．夫妇俩人随机坐有P_{10}^2种坐法．把座位按$1\sim 10$排号，夫妇相邻而坐且于男右侧，则有10种坐法：男坐$1,2,3,\cdots,9,10$；女坐$2,3,\cdots,10,1$；同理再考虑女坐于男左侧，好有10种坐法，共有20种坐法，所以$P(A)=\frac{20}{P_{10}^2}=\frac{2}{9}$.

方法3：假设夫妇中一人坐定，考虑另一人(不妨设是女)．此人随机坐，有9种坐法，若要夫妇相邻，她只能坐在男方的左右两个位置，所以$P(A)=\frac{2}{9}$.

固定其中一个人，则另一个人只能坐他的两边

50只铆钉随机地取来用在10个部件上，其中有3个铆钉强度太弱，每个部件用3只铆钉，若将3只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，则发生一个部件强度太弱的概率是( ).

$\frac{11}{1960}$

$\frac{1}{1960}$

$\frac{1}{196}$

$\frac{11}{150}$

将部件自1至10编号，试验E为各部件上装上3只铆钉，设$A_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$表示事件“第$i$号部件强度太弱”．若3只强度太弱的铆钉同时装在第$i$号部件上去，则$A_i$发生．从50只铆钉中任取3只装在第$i$号部件上，共有$C_{50}^3$种取法，而强度太弱的铆钉只有3只，它们都装在第$i$号部件上只有$C_3^3$种取法，所以

$P(A_i)=\frac{1}{C_{50}^3}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$.

由于A_i间是互斥的，因此，10个部件中有一个强度太弱的概率为

$$p=P(\bigcup_{i=1}^{10}A_i)=\sum_{i=1}^{10}P(A_i)=10\times\frac{1}{C_{50}^3}=\frac{1}{1960}.$$

将15名新生(其中有3名优秀生)随机地分配到三个班级中，其中一班4名，二班5名，三班6名，则每一个班级各分配到一名优秀生的概率为( )；3名优秀生被分配到一个班级的概率为( ).

$0.2637, 0.06473$

$0.2637, 0.07473$

$0.2237, 0.07073$

$0.2156, 0.07473$

#23 Hard

包括 a 和 b 二人在内共 n 个人排队，则 a, b 间恰有 r 个人的概率是 ( ).

$$\frac{2(n-r-1)}{n(n+1)}$$

$$\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{2(n-r)}{n(n-1)}$$

$$\frac{n-r-1}{n(n-1)}$$

首先 $0\le r\le n-2$，n 个人共有 $n!$ 种排法．设所求概率的事件为 A 事件．先考虑 a, b 二人间隔 r 个人的排法，若 a 在前，则有 $n-(r+1)$ 种站法，a 站定位置，b 的位置就自然定了．因为间隔 r 个人，在考虑 b 在前也有 $n-(r+1)$ 种站法，所以 a, b 二人共有 $2[n-(r+1)]$ 种排法，其余 $n-2$ 个人共有 $(n-2)!$ 种排法．所以，其有 $K_A=2[n-(r+1)](n-2)!$ 种排法，从而

$$P(A)=\frac{2[n-(r+1)](n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

有 10 个文曲星，其中有 3 个为型号 A，7 个为型号 B，随机地分给 10 位大学生，每人一个，则最后三位大学生中恰有一位得到型号 A 的文曲星的概率为 ( ).

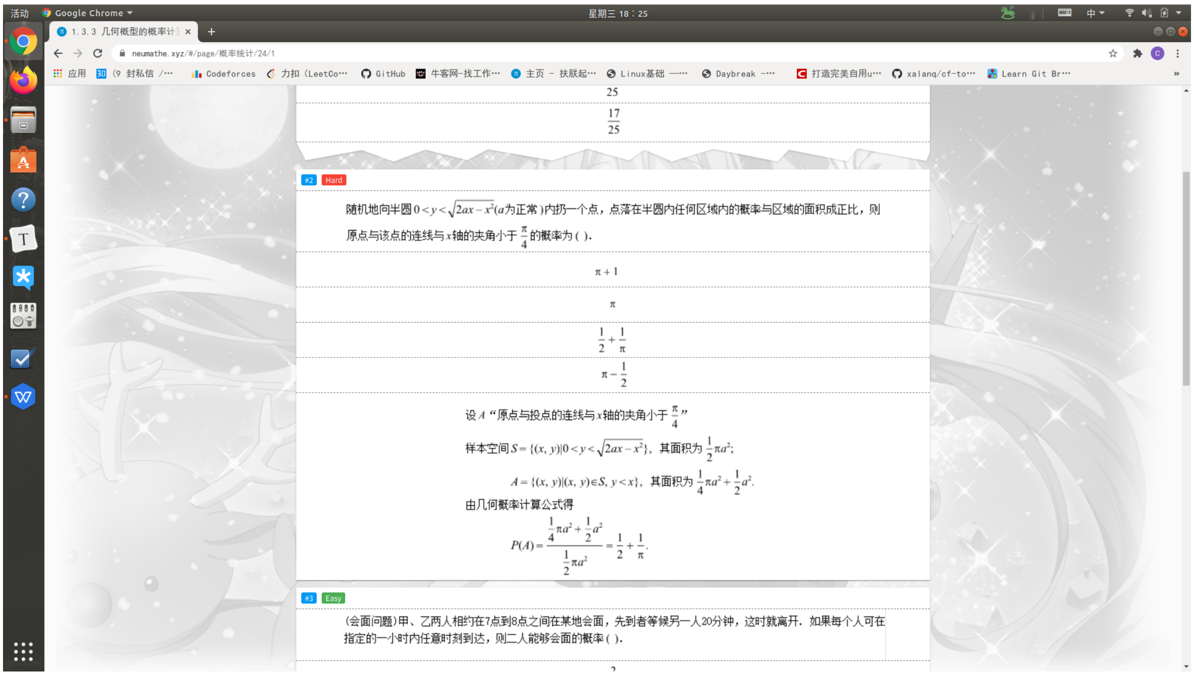
$$\frac{7}{40}$$

$$\frac{7}{120}$$

$$\frac{21}{40}$$

$$\frac{21}{80}$$

10 个文曲星随机的分给 10 位大学生的分法有 P_{10}^{10} 种，而最后三位大学生中恰有一位得到型号 A 的文曲星说明前七位大学生分别得到 2 个型号 A 和 5 个型号 B 文曲星，所以前七位大学生的分法有 $C_7^5C_3^2P_7^7$ 种，后面三位的分法是 $C_3^2P_2^2$，所以最后三位大学生中恰有一位得到型号 A 的文曲星的概率为 $\dfrac{C_7^5C_3^2P_7^7C_3^2P_2^2}{P_{10}^{10}}=\dfrac{21}{40}$．



#9 Easy

设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有 ( ).

$P(\overline{A}B)\neq P(\overline{A})P(B)$

$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$

$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$

$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

由条件概率公式以及条件 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 知 $\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}==\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(AB)}{1-P(\overline{A})}$,

有 $P(\overline{A}B)[1-P(\overline{A})]=P(\overline{A})P(AB)$, 且 $P(\overline{A}B)+P(AB)=P(B)$,

故 $P(\overline{A}B)[1-P(\overline{A})]=P(\overline{A})[P(B)-P(\overline{A}B)]$, 即 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$.

设随机事件 A 与 B 互不相容，已知 $P(A)=P(B)=a(0<a<1)$，$P(A|\overline{B})=P(\overline{A}|\overline{B})$，则 a，$P(A\cup B)$ 的值分别为 ( ).

$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$

(1)由 $P(A|\overline{B})+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，有 $P(A|\overline{B})=P(\overline{A}|\overline{B})=0.5$，再根据 A,B 互不相容，

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)}{1-P(B)}=\frac{a}{1-a}=0.5,$$

解出 $a=\frac{1}{3}$；

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{3}$.

设 A,B 是两个随机事件，$P(A)=0.4$，$P(AB)=0.2$，$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则 $P(A\cup B)=$ ( ).

0.7

0.5

0.2

0.4

由 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=0.4$，$P(AB)=0.2$．因此 $P(A\overline{B})=0.2$，并且 $P(B)>0$，$P(\overline{B})>0$，

对于 $\overline{B}$，有 $P(A|\overline{B})+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，于是 $P(A|\overline{B})=P(A|B)$，因此 A 与 B 相互独立，有 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.5$，

所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$.

某人有两盒火柴，吸烟时从任一盒中取一根火柴，经过若干时间后，发现一盒火柴已用完.如果最初两盒中各有 n 根火柴，则这时另一盒中还有 r 根火柴的概率为 ( ).

$\dfrac{C_{2n}^{n}}{2^{2n-r}}$

$\dfrac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$

$\dfrac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n}}$

$\dfrac{C_{2n-r}^{r}}{2^{2n-r}}$

不妨设甲盒已空而乙盒还有 r 根火柴，因为是随机抽取，可知这时必已取过 $2n-r$ 次，每次取甲，乙盒的概率均为 $\frac{1}{2}$，而在 $2n-r$ 次中必是 n 次取了甲盒的，$n-r$ 次取了乙盒的，最后第 $2n-r+1$ 必定是取甲盒的，否则不知其为空盒，故概率为

$$P_1=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1},$$

同理，最后乙盒空而甲盒剩 r 的概率为：$P_2=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}$，

故所求概率为 ：$P=P_1+P_2=C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}=\dfrac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$.

设 A,B,C 为三个事件，且 A,B 相互独立，则以下结论中不正确的是 ( ).

若 $C\subset B$, 则 A 与 C 也独立

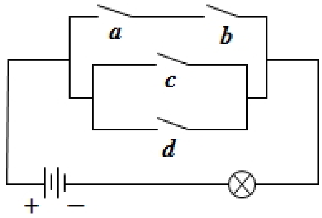
若 $P(C)=0$, 则 $A\cup C$ 与 B 也独立

若 $P(C)=1$, 则 $A\cup C$ 与 B 也独立

.若 $P(C)=1$, 则 AC 与 BC 也独立

若 $P(C)=0$, 由于 $AC\subset C$, $BC\subset C$, $ABC\subset C$, 所以其概率都小于等于 $P(C)$, 则 $P(AC)=P(BC)=P(ABC)=0$.
则有 $P((A\cup C)B)=P(AB\cup BC)=P(AB)+P(BC)-P(ABC)=P(A)P(B)$,
$P(A\cup C)P(B)=(P(A)+P(C)-P(AC))P(B)=P(A)P(B)$,
即若 $P(C)=0$, 则 $A\cup C$ 与 B 也独立.

一个开关电路如图所示，



假设开关 a, b, c, d开或关的概率都是 0.5，且各开关是否关闭相互独立，求如果发现灯亮时，开关 a与 b同时关闭的概率为 ( ).

0.55

0.28

0.31

0.74

设 A表示开关 a关闭，B表示开关 b关闭，C表示开关 c关闭，D表示开关 d关闭，A, B, C, D相互独立，E表示灯亮，则

$$\begin{aligned} P(E) &= P(AB\cup C\cup D) \\ &= P(AB)+P(C)+P(D)-P(ABC)-P(ABD)-P(CD)+P(ABCD) \\ &= P(A)P(B)+P(C)+P(D)-P(A)P(B)P(C)-P(A)P(B)P(D)-P(C)P(D)+P(A)P(B)P(C)P(D) \\ &= 0.8125, \end{aligned}$$

$$P(AB|E)=\frac{P(AB)}{P(E)}=\frac{0.25}{0.8125}\approx 0.31.$$

某种仪器由三个部件组装而成，假设各部件质量互不影响且它们的优质率分别为 0.8, 0.7与 0.9，已知：如果三个部件都是优质品，则组装后的仪器一定合格；如果有一个部件不是优质品，则组装后的仪器不合格率为 0.2；如果两件不是优质品，则仪器的不合格率为 0.6；如果三件都不是优质品，则仪器的不合格率为 0.9．则下列说法中不正确的是 ( ).

若已发现一台仪器不合格，则它有一个部件不是优质品的概率最大

仪器的不合格率为 0.059

若已发现一台仪器不合格，则它有一个部件不是优质品的概率为 $\frac{796}{1402}$

仪器的不合格率为 0.1402

要验收一批(100台)微机，验收方案如下：自该批微机中随机地取出3台进行测试(设三台微机的测试是相互独立的)，3台中只要有一台在测试中被认为是次品，这批微机就会被拒绝．由于测试条件和水平，将次品的微机误认为正品的概率为 0.05，而将正品的微机误判为次品的概率为 0.01．如果已知这100台微机恰有4台次品，则这批微机被接收的概率是( ).

0.6829

0.6289

0.8629

0.8269