

**命题是一个能确定是真的或是假的判断。
(判断都是用陈述句表示)**

- 简单命题(原子命题)：由最简单的陈述句构成的命题
- 复合命题(分子命题)：由若干个原子命题构成的命题

$P \vee Q$ 与 $(P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$ 是一样的

- **命题常量**：即是我们前面所说的命题。例如：“3是素数。”就是命题常量。
- **命题变元**：用大写的英字母如P、Q等表示任何命题。称这些字母为命题变元。
- 对命题变元作**指派**(给命题变元一个解释)：将一个命题常量赋值给命题变元的过程，或者是直接赋给命题变元真值“T”或“F”的过程。

.合式公式 (wff) (well formed formulas)

定义：

- 命题变元是命题公式；
- 设P是命题公式，则 $\neg P$ 也是命题公式；
- 设P、Q是命题公式，则 $(P \wedge Q)$ 、 $(P \vee Q)$ 、 $(P \rightarrow Q)$ 、 $(P \leftrightarrow Q)$ 也是命题公式；
- 有限次地使用1、2、3所得到的也是命题公式。

A \Leftrightarrow B的定义：A、B是含有命题变元P₁, P₂, ..., P_n的命题公式，如不论对P₁, P₂, ..., P_n作任何指派，都使得A和B的真值相同，则称之为A与B等价，记作A \Leftrightarrow B。

$$\neg P \vee Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q$$

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$$

(1) 对合律 $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

(2) 真等律 $P \vee P \Leftrightarrow P \quad P \wedge P \Leftrightarrow P$

(3) 结合律 $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$
 $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

(4) 交换律 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P \quad P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

(5) 分配律 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
 $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(6) 吸收律 $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P \quad P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

(7) 德、摩根定律 $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

(8) 同一律 $P \vee F \Leftrightarrow P \quad P \wedge T \Leftrightarrow P$

(9) 零律 $P \vee T \Leftrightarrow T \quad P \wedge F \Leftrightarrow F$

(10) 互补律 $P \vee \neg P \Leftrightarrow T \quad P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

置换定律: A是一个命题公式，X是A中的一部分且也是合式公式，如果 $X \Leftrightarrow Y$ ，用Y代替A中的X得到公式B，则 $A \Leftrightarrow B$ 。

满足置换定律的变换称为等价变换。

永真(重言)式 (Tautology) 公式中的命题变量无论

怎样指派，公式对应的真值恒为T。

永假(矛盾)式 (Contradiction) 公式中的命题变

量无论怎样代入，公式对应的真值恒为F。

可满足公式 (Satisfaction) 公式中的命题变量无

论怎样代入，公式对应的真值总有一种情况为T。

一般命题公式 (Contingency) 既不是永真公式也不

是永假公式。

1. 定义: 如果公式 $A \rightarrow B$ 是重言式，则称A重言(永真)蕴涵 B，记作 $A \Rightarrow B$ 。

2. 重言(永真)蕴涵式证明方法

方法 1 列真值表。(略)

方法 2 假设前件为真，推出后件也为真。

方法 3 假设后件为假，推出前件也为假。

$$I_1. P \wedge Q \Rightarrow P ,$$

$$I_2. P \wedge Q \Rightarrow Q$$

$$I_3. P \Rightarrow P \vee Q$$

$$I_4. Q \Rightarrow P \vee Q$$

$$I_5. \neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$I_6. Q \Rightarrow P \rightarrow Q$$

$$I_7. \neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$$

$$I_8. \neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$$

$$I_9. P, Q \Rightarrow P \wedge Q$$

$$I_{10}. \neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$$

$$I_{11}. P \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q \quad I_{12}. \neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$$

$$I_{13}. (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$$

$$I_{14}. (P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow R$$

$$I_{15}. A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$$

$$I_{16}. A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$$

蕴含的性质

- $A \Rightarrow B$ 且 A 为重言式，则 B 必为重言式
- 若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow C$ ，则 $A \Rightarrow C$ (传递性)
- 若 $A \Rightarrow B$ 且 $A \Rightarrow C$ ，则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$
- 若 $A \Rightarrow B$ 且 $C \Rightarrow B$ ，则 $(A \vee C) \Rightarrow B$

定义：设 S 是一个联结词集合，如果

- 任意一个命题公式 A 都至少存在一个只包含 S 中联结词的公式与 A 等价，称 S 为**全功能集**。
- 从 S 中任意去掉一个联结词后，得到一个联结词集合 S_1 ，至少有一个公式 B ，不等价于仅包含 S_1 中联结词的任一公式

限定性命题公式：最多仅含有 \neg 、 \wedge 、 \vee 逻辑联结词的命题公式。

命题公式 P 的对偶公式 (Dual) :将 P 中的 \vee 换成 \wedge ， \wedge 换成 \vee ， T 换成 F ， F 换成 T (如果存在的話)，所的公式称为 P 的对偶式，记为 P^*

定理：令 $A(P_1, P_2, \dots, P_n)$ 是一个只含有联结词 \neg 、 \vee 、 \wedge 的命题公式，则

$$\neg A(P_1, P_2, \dots, P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \dots, \neg P_n)$$

设 P 、 Q 是限定性命题公式，如果

$$P \Leftrightarrow Q \quad \text{则} \quad P^* \Leftrightarrow Q^*$$

❖ 公式 A 如果写成如下形式：

$A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$ ($n \geq 1$) 其中每个 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是合取式，称之为 A 的**析取范式**。

❖ 公式 A 如果写成如下形式：

$A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$ ($n \geq 1$) 其中每个 A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是析取式，称之为 A 的**合取范式**。

例如， $P \leftrightarrow Q$ 的析取范式与合取范式：

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \text{----析取范式}$$

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \text{----合取范式}$$

定义：在一个有n个命题变元的合取式中，每个变元必出现且仅出现一次，称这个合取式是个小项。

a). 有n个变元，则有 2^n 个小项。

b). 每一组指派有且只有一个小项为T。

析取范式 $A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n$, 其中每个 A_i ($i=1,2..n$) 都是小项，称之为**主析取范式**。

定义：在有n个命题变元的析取式中，每个变元必出现且仅出现一次，称之为大项。

a). 有n个变元，则有 2^n 个大项。

b). 每一组指派有且只有一个大项为F。

合取范式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n$, 其中每个 A_i ($i=1,2..n$) 都是大项，称之为**主合取范式**。

在推理过程中，还要应用教材43页表1-8.3中的永真蕴涵式 I_1-I_{16} 和表1-8.4中等价公式 E_1-E_{22} (**常用的公式要熟记**)

如果 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge R \Rightarrow S$, 则
 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \Rightarrow R \rightarrow S$

定理：若要证明相容的公式集合 $\{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ 可以推出公式C，只要证明 $H_1 \wedge H_2 \wedge \dots \wedge H_n \wedge \neg C$ 是个矛盾式即可。

定义：能够独立存在的事物，称为客体，也称为个体。它可以是具体的，也可以是抽象的。通常用小写英文字母a、b、c、...表示。

定义：用小写英文字母x、y、z...表示任何客体，则称这些字母为客体变元。

定义：谓词用来描述个体的性质或个体间的关系，用大写字母后加括号表示，括号内为客体变元。如果括号内有n个客体变元，称该谓词为n元谓词。

- **客体函数**是论域到论域的映射，如：
 $g:N \rightarrow N$ ，如果指定的客体 $a \in N$ ，则
 $g(a) \in N$ 。
- **谓词**是从论域到 $\{T, F\}$ 的映射，即谓词
 $E(x)$ 可以看成映射 $E:N \rightarrow \{T, F\}$ ，如果指定
客体 $a \in N$ ，则 $E(a)$ 的真值 $\in \{T, F\}$ 。

由此可见，当论域扩大时，需要添加用来表示客体特性的谓词，称此谓词为**特性谓词**。

定义：给定谓词公式A，E是其论域，如果不论对公式A作任何赋值，都使得A的真值为真，则称公式**A在论域E上是永真式**。如果不论对什么论域E，都使得公式A为永真式，则称**A为永真式**。

定义：给定谓词公式A、B，E是它们的论域，如果不论对公式A、B作任何赋值，都使得A与B的真值相同(或者说 $A \leftrightarrow B$ 是永真式)，则称**公式A与B在论域E上是等价的**。如果不论对什么论域E，都使得公式A与B等价，则称**A与B等价**，记作 $A \Leftrightarrow B$ 。

1. $\forall x A(x) \vee B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B)$
2. $\forall x A(x) \wedge B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge B)$
3. $\exists x A(x) \vee B \Leftrightarrow \exists x (A(x) \vee B)$
4. $\exists x A(x) \wedge B \Leftrightarrow \exists x (A(x) \wedge B)$
5. $B \rightarrow \forall x A(x) \Leftrightarrow \forall x (B \rightarrow A(x))$
6. $B \rightarrow \exists x A(x) \Leftrightarrow \exists x (B \rightarrow A(x))$
7. $\forall x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \exists x (A(x) \rightarrow B)$
8. $\exists x A(x) \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B)$

1. $\exists x (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
2. $\forall x (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
3. $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$
4. $\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$

1. $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$
2. $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$

设A、B、C是任意集合，则

- (1) $A - \Phi = A$
- (2) $\Phi - A = \Phi$
- (3) $A - A = \Phi$
- (4) $A - B \subseteq A$
- (5) $A \subseteq B \Leftrightarrow A - B = \Phi$
- (6) $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$
- (7) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- (8) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
- (9) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

注意： \cup 对 $-$ 是不可分配的，如 $A \cup (A - B) = A$
而 $(A \cup A) - (A \cup B) = \Phi$

1. **定义**： A 是集合，由不属于 A 的元素构成的集合，称之为 A 的绝对补集，记作 $\sim A$ 。
实际上 $\sim A = E - A$ 。

2. 性质

- (1) **交换律** 对任何集合 A 、 B ，有 $A \oplus B = B \oplus A$ 。
- (2) **结合律** 对任何集合 A 、 B 、 C ，有
 $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ 。教材里有证明。
- (3) **同一律** 对任何集合 A ，有 $A \oplus \Phi = A$ 。
- (4) 对任何集合 A ，有 $\underline{A \oplus A = \Phi}$ 。
- (5) **\cap 对 \oplus 可分配** $A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

· 定义：有序 n 元组是一个序偶，其第一个元素本身是个有序 $n-1$ 元组，

集合的笛卡尔积运算不满足交换律。

也不满足结合律。

设 A, B, C 是任意集合，则

$$(1) A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C) ;$$

$$(2) A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C) ;$$

$$(3) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) ;$$

$$(4) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) ;$$

R 是 A 中自反的 $\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow xRx)$

R 是 A 中反自反的 $\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$

R 是 A 上对称的 $\Leftrightarrow \forall x \forall y ((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy) \rightarrow yRx)$

R 是 A 上反对称的

$\Leftrightarrow \forall x \forall y ((x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx) \rightarrow x=y)$

$\Leftrightarrow \forall x \forall y ((x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \wedge xRy) \rightarrow y \neq x)$

R 在 A 上传递

$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z ((x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$

关系复合运算不满足交换律，但是
满足结合律： $R \subseteq A \times B$ $S \subseteq B \times C$ $T \subseteq C \times D$ 则
 $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$

• $R \subseteq A \times B$ $S \subseteq B \times C$ $T \subseteq C \times D$

$$R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$$
$$R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$$

R 是从A到B的关系，则
 $R \circ I_B = I_A \circ R = R$

R 是从A到B的关系，如果将R中的所有序偶的两个元素的位置互换，得到一个从B到A的关系，称之为R的逆关系，记作 R^C ，或 R^{-1} 。

$$R^C = \{<y, x> \mid <x, y> \in R\}$$

$$<y, x> \in R^C \Leftrightarrow <x, y> \in R$$

$$(R^C)^C = R$$

$$(R \cup S)^C = R^C \cup S^C$$

$$(R \cap S)^C = R^C \cap S^C$$

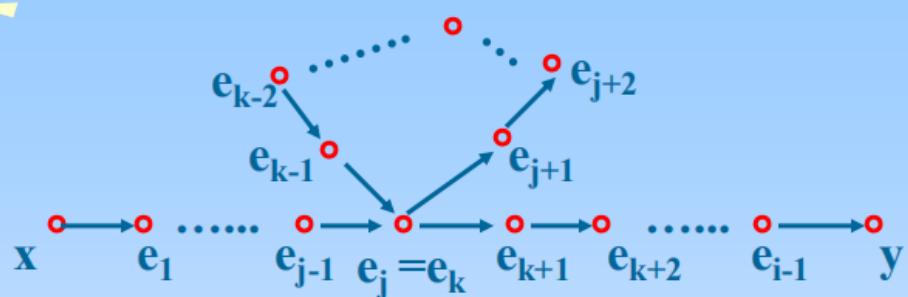
$$(R - S)^C = R^C - S^C$$

R是A上关系，则

(1) R是对称的，当且仅当 $R^C = R$

(2) R是反对称的，当且仅当 $R \cap R^C \subseteq I_A$

任取 $\langle x, y \rangle \in R'$, 由 R' 定义得必存在 **最小的正整数 i** 使得 $\langle x, y \rangle \in R^i$, (下面证明 $i \leq n$) 如果 $i > n$, 根据关系的复合得 A 中必存在 $i-1$ 个元素 e_1, e_2, \dots, e_{i-1} , 使得 $\langle x, e_1 \rangle \in R \wedge \langle e_1, e_2 \rangle \in R \wedge \dots \wedge \langle e_{i-1}, y \rangle \in R$ 。上述元素序列: $x = e_0, e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, y = e_i$ 中共有 $i+1$ 个元素 $i+1 > n$, 而 A 中只有 n 个元素, 所以上述元素中至少有两个相同, 设 $e_j = e_k$ ($j < k$), 于是 R 的关系图中会有下面这些边:



从此图中删去回路中 $k-j$ ($k-j \geq 1$) 条边后得

$\langle x, y \rangle \in R^{i-(k-j)}$, $i-(k-j) < i$, 与 i 是最小的矛盾。

所以 $i \leq n$, 所以 $\langle x, y \rangle \in R^n$, 于是 $R' \subseteq R^n$ 。

最后得 $R' = R^n$, 所以 $t(R) = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n$ 定理证毕。

定理5. R是A上关系，则

- (1) R是自反的，当且仅当 $r(R)=R$.
- (2) R是对称的，当且仅当 $s(R)=R$.
- (3) R是传递的，当且仅当 $t(R)=R$.

定理6. R是A上关系，则

- (1) R是自反的，则 $s(R)$ 和 $t(R)$ 也自反。
- (2) R是对称的，则 $r(R)$ 和 $t(R)$ 也对称。
- (3) R是传递的，则 $r(R)$ 也传递。

证明(3). 证明 $r(R)$ 传递：先用归纳法证明下面结论：

$$(R \cup I_A)^i = I_A \cup R \cup R^2 \cup \dots \cup R^i$$

定理7: 设 R_1 、 R_2 是 A 上关系，如果 $R_1 \subseteq R_2$ ，则

- (1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$
- (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$
- (3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$

定理8: 设 R 是 A 上关系，则

- (1) $sr(R) = rs(R)$
- (2) $tr(R) = rt(R)$
- (3) $st(R) \subseteq ts(R)$

通常将 $t(R)$ 记成 R^+ ， $tr(R)$ 记成 R^* ，即

$$t(R) = R^+ = R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

$$tr(R) = rt(R) = R^* = R^0 \cup R \cup R^2 \cup \dots \cup R^n \cup \dots = \bigcup_{i=0}^{\infty} R^i$$

定义：若 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ 与 $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ 都是集合 X 的划分，则其中所有的 $A_i \cap B_j$ ，组成的集合 C，称为 C 是 A 与 B 两种划分的交叉划分。

定义：R 是 A 上等价关系，由 R 的所有等价类构成的集合称之为 A 关于 R 的商集。记作 A/R 。即

$$A/R = \{[a]_R \mid a \in A\}$$

定理：集合A上的等价关系R，决定了A的一个划分，该划分就是商集A/R。

证明：由等价类性质可得：

1) A/R中任意元素 $[a]_R$ ，有 $[a]_R \subseteq A$ 。

2) 设 $[a]_R, [b]_R$ 是A/R的两个不同元素，有 $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

3) 因为A中每个元素都属于一个等价类，所以所有等价类的并集必等于A。

所以商集A/R是A的一个划分。

定理：设 R_1 和 R_2 是非空集合A上的等价关系，则

$A/R_1 = A/R_2$ 当且仅当 $R_1 = R_2$ 。

(这个定理显然成立。)

定理：集合X的一个划分可以确定X上的一个等价关系。

证明：假设 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 是X的一个划分，如下构造X上的一个等价关系R：

$R = A_1^2 \cup A_2^2 \cup \dots \cup A_n^2$, 其中 $A_i^2 = A_i \times A_i$,

定义：r是X中的相容关系，由r的所有最大相容类为元素构成的集合，称之为X的完全覆盖。记作Cr(X)。

[定义]：R是A上自反、反对称和传递的关系，则称R是A上的偏序关系。并称 $\langle A, R \rangle$ 是偏序集。

A上半序关系R，如果 $\forall a, b \in A$, 都有 $a < b$, 或 $b < a$ ，则称R为A上的全序关系。

五. 证明R的传递性：

方法1 用传递定义证：

任取 $x, y, z \in A$, 设 $\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in R$,
证出 $\langle x, z \rangle \in R$

方法2 用传递闭包证： 证出 $t(R) = R$,

即 $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots = R$.

方法3 用定理证： 证出 $R^2 \subseteq R$

(P119 (2) a)

[定义]： X 与 Y 集合， f 是从 X 到 Y 的关系， 如果任
何 $x \in X$ ， 都存在唯一 $y \in Y$ ， 使得 $\langle x, y \rangle \in f$ ， 则
称 f 是从 X 到 Y 的函数， (变换、 映射)， 记作
 $f: X \rightarrow Y$ ， 或 $X \rightarrow Y$ 。

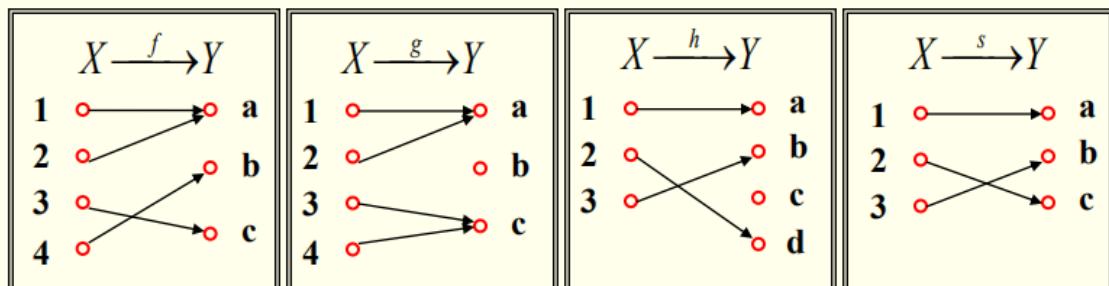
X: 定义域 /domain of f **x:** y 的原像 /pre-image

Y: 陪域 /codomain of f **y:** x 的像 /image

$f(X)$ ： 值域 ($R_f, \text{ran } f$) /range of f

1. 常值函数： 函数 $f: X \rightarrow Y$ ， 如果 $\exists y_0 \in Y$ ， 使得对 $\forall x \in X$ ，
有 $f(x) = y_0$ ， 即 $\text{ran } f = \{y_0\}$ ， 称 f 是常值函数。 如上例的 f_1
和 f_8 。

2. 恒等函数： 恒等关系 I_X 是 X 到 X 函数， 即 $I_X: X \rightarrow X$ ， 称之
为恒等函数。 显然对于 $\forall x \in X$ ， 有 $I_X(x) = x$ 。

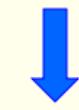


$$R_f = Y$$



满射的

$$R_g \subset Y$$



映内的

$$R_h \subset Y$$

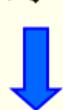
一对—



入射的
单射的
一对—的

$$R_s = Y$$

一对—



双射的
一一对应的
一对—的

- 如果 $f:X \rightarrow X$ 是入射的函数，则必是满射的，所以 f 也是双射的。此命题成立吗？

答案是：不一定。

例如 $f:N \rightarrow N$, $f(n)=2n$, f 是入射的，但不是满射的函数。

只有当 X 是有限集合时，上述命题才成立。

[定义] $f:X \rightarrow Y$, $g:Y \rightarrow Z$ 是函数，则定义

$$g \circ f = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge \exists y (y \in Y \wedge \langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g) \}$$

则称 $g \circ f$ 为 f 与 g 的复合函数(左复合)。

❖ $g \circ f:X \rightarrow Z$, 即 $g \circ f$ 是 X 到 Z 的函数。这样写是为了照顾数学习惯: $g \circ f(x) = g(f(x))$

- (1) 如果 f 和 g 是满射的，则 $g \circ f$ 也是满射的；
- (2) 如果 f 和 g 是入射的，则 $g \circ f$ 也是入射的；
- (3) 如果 f 和 g 是双射的，则 $g \circ f$ 也是双射的。

1. 定理5-2.1 满足可结合性 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ 是函数，则 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

证明满射 对于任意 y 都存在一个 x 使 $y = f(x)$

证明入射 任意 $x_1 \neq x_2$ 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$

- (1) 如果 $g \circ f$ 是满射的，则 g 是满射的；
- (2) 如果 $g \circ f$ 是入射的，则 f 是入射的；
- (3) 如果 $g \circ f$ 是双射的，则 f 是入射的和 g 是满射的。

第三问反证法

(1) $K[A_1] = K[A_2] = \dots = K[A_n] = \aleph$, 则

$$K[A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n] = \aleph$$

(2) $K[A] = K[B] = \aleph$, 则 $K[A \times B] = \aleph$

(3) $K[A] = \aleph$ $K[B] = \aleph_0$, (或 $K[B] = n$), (B 是多可数集) 则 $K[A - B] = \aleph$

定理5-6.2 如果集合 A 到 B 存在入射函数，则 $K[A] \leq K[B]$ 。

定理5-6.3(Zermelo定理) A 和 B 是任何集合，则以下三条之一必有一个成立：

- a) $K[A] < K[B]$.
- b) $K[B] < K[A]$
- c) $K[A] = K[B]$.

定理5-6.6 设A是无限集合，则 $\aleph_0 \leq K[A]$

1. 注意使用ES、US、EG、UG的限制条件。
2. 对于同一个客体变元，同时带 \forall 和 \exists 的前提，去量词时，应先去 \exists 后去 \forall ，这样才能特指同一个客体c。
3. 去量词时，该量词必须是公式最左边的量词，且此量词的前边无任何符号，它的辖域作用到公式末尾。