第一章　　习题

1．给定文法G=({S,B,C,D,E},{0,1},P,S)，其中P：

S→ABC，AB→0AD，AB→1AE，AB→ε，D0→0D，
D1→1D，E0→0E，E1→1E，C→ε，DC→B0C，
EC→B1C，0B→B0，1B→B1

试写出句子01100110的派生过程。

解：S⇒ABC⇒0ADC⇒0AB0C⇒01AE0C⇒01A0EC
⇒01A0B1C⇒01AB01C⇒011AE01C⇒011A0E1C⇒
011A01EC⇒011A01B1C⇒011A0B11C⇒011AB011C
⇒0110AD011C⇒0110A0D11C⇒0110A01D1C⇒
0110A011DC⇒0110A011B0C⇒0110A01B10C⇒
0110A0B110C⇒0110AB0110C⇒01100110C⇒01100110

2．设计下列各文法G，使得它们分别是：

（1）G是个上下文无关文法，且
$L(G)=\{a^ib^jc^k \mid i,j,k\geq 1\}$。

（2）G是个正规文法，且
$L(G)=\{a^ib^jc^k \mid i,j,k\geq 1\}$。

（3）G是个上下文无关文法，且
$L(G)=\{ ww^R \mid w\in\{0,1\}^+ \}$。其中$w^R$是w的逆转，例如w=001, 则$w^R$=100.

解：设计一个文法G要验证：
凡是符合要求的句子G都能产生出来；
G产生出来的所有句子都是符合要求的。

(1) G=({S,A,B,C},{a,b,c},P,S)
P: S→ABC , A→aA|a, B→bB|b,C→cC|c

(2) $G=(\{S,A,B,C\},\{a,b,c\},P,S)$

$P: S\rightarrow aA,\ A\rightarrow aA \mid bB,\ B\rightarrow bB \mid cC,\ C\rightarrow cC \mid \varepsilon$

(3) $G=(\{S\},\{0,1\},P,S)$

$P: S\rightarrow 0S0 \mid 1S1 \mid 00 \mid 11$

第二章　　习题

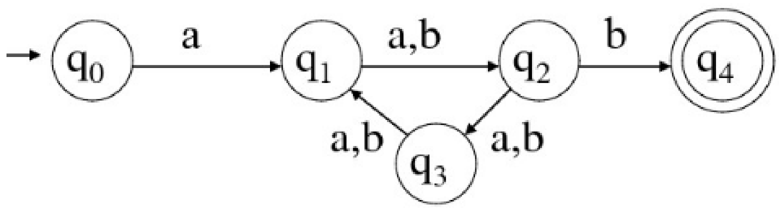
1. 设计一个有限自动机(FA) M，使得T(M)中的每个句子w同时满足下面三个条件：

1) $w\in\{a,b,\}^*$；

2) $|w|$是3的整数倍；

3) w以a开头，以b结尾。

解：

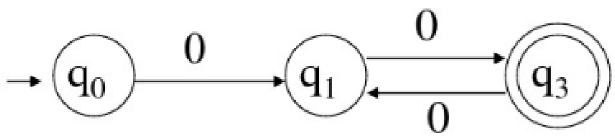


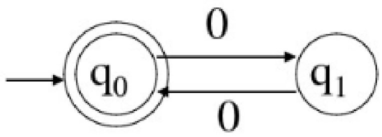
2. 设计二个FA M_1和M_2，分别满足

$T(M_1)=\{0^{2i} \mid i\text{是自然数}\}$

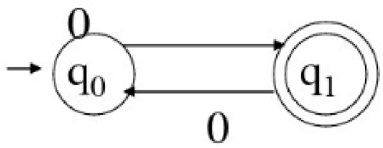
$T(M_2)=\{0^{2i+1} \mid i=0,1,2,3,4,\ldots\}$

解： M_1：





M_2：



3. 给定NFA $M_1=(\{p,q,r,s\},\{0,1\},\delta,p,\{s\})$，如下表所示。构造一个DFA M_2，使得$T(M_1)=T(M_2)$。

δ	0	1
p	{p,q}	{p}
q	{r }	{r}
r	{s}	Φ
s	{s}	{s}

解： 令 $M_2=(K',\sum, \delta', q_0',F')$, 其中

$K'\subseteq 2^K$，K'中的元素是由K的子集$\{q_1,q_2,\ldots,q_i\}$构成，但是要把子集$\{q_1,q_2,\ldots,q_i\}$作为的一个状态看待，因此把此子集写成$[q_1,q_2,\ldots,q_i]$。

$q_0'=[q_0]$，

$F'=\{[q_1,q_2,\ldots,q_i] \mid [q_1,q_2,\ldots,q_i]\in K'$且$\{q_1,q_2,\ldots,q_i\}\cap F\neq\Phi\}$

δ'：$K'\times\sum\rightarrow K'$，对$\forall[q_1,q_2,\ldots,q_i]\in K', \forall a\in\sum$，有

$$\delta'([q_1,q_2,\ldots,q_i],a)=[p_1,p_2,\ldots,p_j]$$

当且仅当

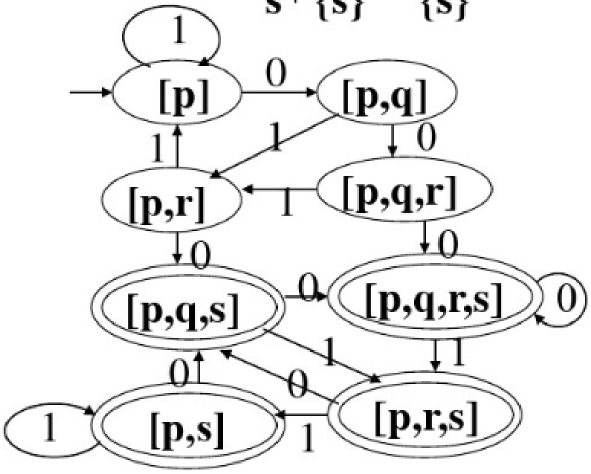
$$\delta(\{q_1,q_2,\ldots,q_i\},a)=\{p_1,p_2,\ldots,p_j\}$$

q_0'=[p] , K'和F'以后确定。

δ'：

	0	1
[p]	[p,q]	[p]
[p,q]	[p,q,r]	[p,r]
[p,r]	[p,q,s]	[p]
[p,q,r]	[p,q,r,s]	[p,r]
[p,q,s]	[p,q,r,s]	[p,r,s]
[p,r,s]	[p,q,s]	[p,s]
[p,s]	[p,q,s]	[p,s]
[p,q,r,s]	[p,q,r,s]	[p,r,s]

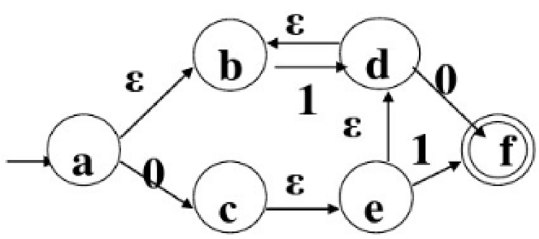
δ	0	1
p	{p,q}	{p}
q	{r }	{r}
r	{s}	Φ
s	{s}	{s}



K'={[p],[p,q],[p,r],[p,s],[p,q,r],[p,q,s],[p,r,s],[p,q,r,s]}

F' ={ [p,s],[p,q,s],[p,r,s],[p,q,r,s]}

4.将下面的ε-NFA M等价变换成NFA M'。



解：M'=(K, ∑, δ',q_0 ,F')，q_0是M的开始状态，其中

$$F' = \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{如果 } \varepsilon\text{—CLOUSURE}(q_0) \cap F \neq \Phi \\ F & \text{否则} \end{cases}$$

δ' ：对任何q∈K,任何a∈∑, δ'(q,a)= $\hat{\delta}$(q,a) 。

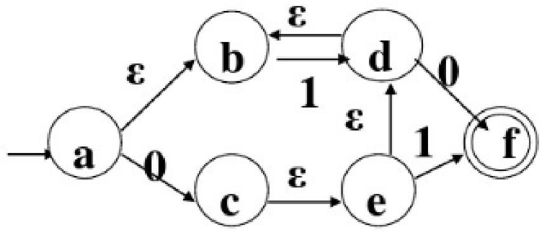
公式(1)：对于∀q∈K,， $\hat{\delta}$ (q,ε)=ε-CLOSURE(q)

公式(2)： 对于∀q∈K, ∀w∈$\sum^*$, ∀a∈∑,

$$\hat{\delta}(q,wa)=\varepsilon\text{-CLOSURE}(\delta(\hat{\delta}(q,w),a))$$

因为f∉CLOSURE(a)={a,b},

所以F'=F={f}



δ'：∀q∈K,任何a∈∑,

δ'(q,a)= $\hat{\delta}$(q,a) 。

在计算 $\hat{\delta}$ (q,a)时，要将a理解成**a路径**！

例如δ'(a,0)= $\hat{\delta}$(a,0)={c,e,d,b} 。

δ':

	0	1
a	{c,e,d,b}	{d,b}
b	Φ	{d,b}
c	{f}	{f,d,b}
d	{f}	{d,b}
e	{f}	{f,d,b}
f	Φ	Φ

5. 化简正规表达式 a(ε+aa)*(ε+a)b+b+φ(ab*+b)*。

解：上式＝a(aa)*(ε+a)b+b

其中(aa)*(ε+a)代表集合：

{ε,aa,aaaa,aaaaaa,…}{ε,a}

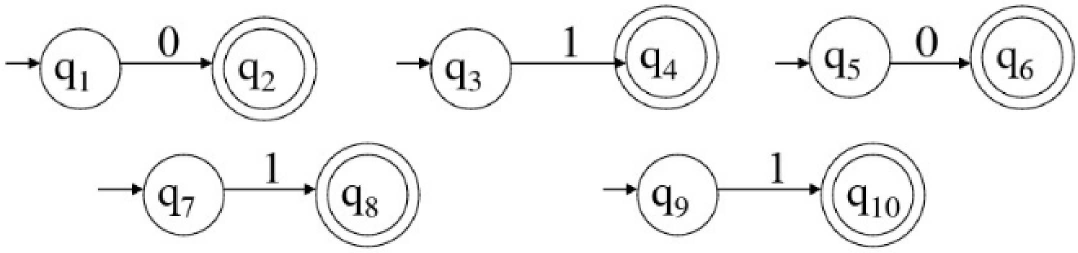
= {ε,aa,aaaa,aaaaaa,…}∪{a,aaa,aaaaa,…}

={ε,a,aa,aaa,aaaa,aaaaa,aaaaaa,…}={a}*

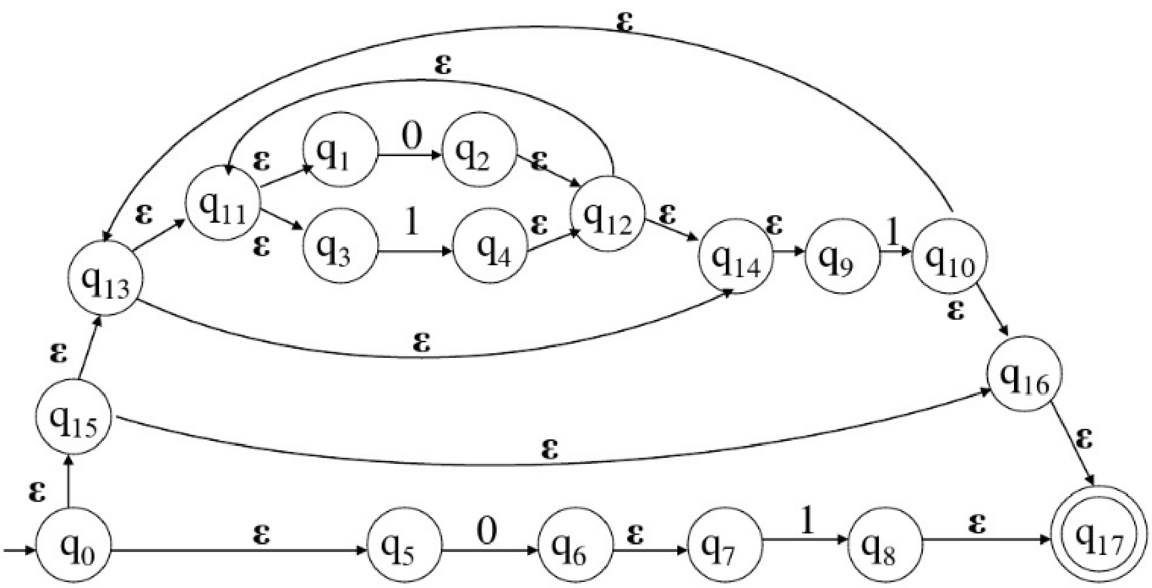
于是上式＝aa*b+b=a^+ b+b= (a^++ε)b= a*b

6. 构造一个FA M，使得T(M)的正规表达式为01+((0+1)*1)*。

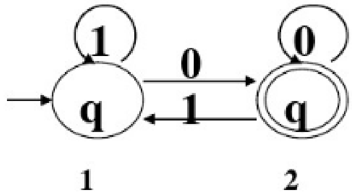
解：1.分解表达式，找出基本单元：0,1,01,1。设计接收这些基本单元的自动机如下：



2.组装：（按照优先权从高到低） 01+((0+1)*1)*



7．给定FA M如下图所示，求它所接收的语言T(M)的正规表达式。



解：

$$r_{ij}^{0}=\begin{cases} a_1+a_2+\dots+a_m & i\neq j \\ a_1+a_2+\dots+a_m+\varepsilon & i=j \end{cases}\quad \delta(q_i,a_k)=q_j \quad (1\le k\le m)$$

$$r_{ij}^{k}=r_{ik}^{k-1}(r_{kk}^{k-1})^{*}r_{kj}^{k-1}+r_{ij}^{k-1}$$

$$r_{11}^{0}=1+\varepsilon \qquad r_{12}^{0}=0 \qquad r_{21}^{0}=1 \qquad r_{22}^{0}=0+\varepsilon$$

因为M接收的语言T(M)的正规表达式r为

$$\mathrm{r}=r_{12}^{2}=r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^{*}r_{22}^{1}+r_{12}^{1}$$

所以只求r_{12}^{1}和r_{22}^{1}即可。

$$r_{11}^{0}=1+\varepsilon \qquad r_{12}^{0}=0 \qquad r_{21}^{0}=1 \qquad r_{22}^{0}=0+\varepsilon$$

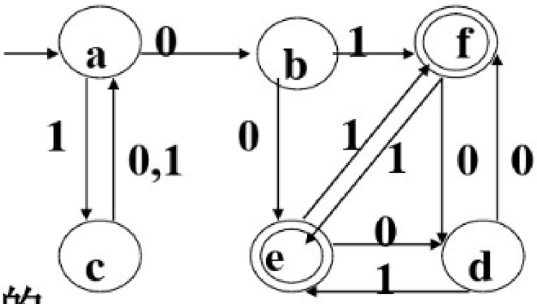
$$r_{12}^{1}=r_{11}^{0}(r_{11}^{0})^{*}r_{12}^{0}+r_{12}^{0}=(r_{11}^{0})^{+}r_{12}^{0}+r_{12}^{0}=((r_{11}^{0})^{+}+\varepsilon)r_{12}^{0}$$
$$=(r_{11}^{0})^{*}r_{12}^{0}=(1+\varepsilon)^{*}0=1^{*}0$$

$$r_{22}^{1}=r_{21}^{0}(r_{11}^{0})^{*}r_{12}^{0}+r_{22}^{0}=1(1+\varepsilon)^{*}0+0+\varepsilon$$
$$=1\,1^{*}0+0+\varepsilon=1^{+}0+0+\varepsilon=(1^{+}+\varepsilon)0+\varepsilon=1^{*}0+\varepsilon$$

$$\mathrm{r}=r_{12}^{2}=r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^{*}r_{22}^{1}+r_{12}^{1}=r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^{+}+r_{12}^{1}=r_{12}^{1}((r_{22}^{1})^{+}+\varepsilon)$$
$$=r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^{*}=1^{*}0(1^{*}0+\varepsilon)^{*}=1^{*}0(1^{*}0)^{*}=(1^{*}0)^{+}$$

8.将下面有限自动机简化(要求有简化过程)。

解：一.定义K上等价关系≡



给定DFA $M=(K,\sum,\delta,q_0,F)$，

$\forall p,q \in K$,

$p\equiv q \Leftrightarrow$ 对$\forall x\in\sum^*$, 有

$\delta(p,x)\in F \leftrightarrow \delta(q,x)\in F$

如果$p\equiv q$ 也称p与q是不可区分的。

二. 商集K/≡

三. ≡的逆关系≢

$p\not\equiv q \Leftrightarrow \exists x(x\in\sum^* \wedge \neg(\delta(p,x)\in F \leftrightarrow \delta(q,x)\in F))$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in\sum^* \wedge$
$((\delta(p,x)\in F \wedge \delta(q,x)\notin F) \vee (\delta(p,x)\notin F \wedge \delta(q,x)\in F)))$

$\Leftrightarrow \exists x(x\in\sum^*$，使得$\delta(p,x)$与$\delta(q,x)$恰有一个在F中)

如果$p\not\equiv q$, 称p与q是可区分的。判断$p\not\equiv q$是比较容易的。

4. 判断可区分状态对的算法

引理2-1 设$M=(K,\sum,\delta,q_0,F)$是DFA，则状态对(p,q)是可区分的(即$p\not\equiv q$)，当且仅当在下面算法中(p,q)格写上×。

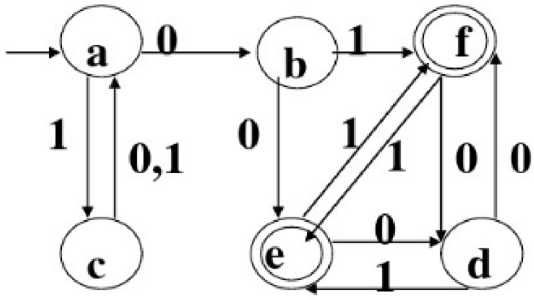
begin

1. for $p\in F, q\in K-F$, do 给(p,q)格写×；
2. for $F\times F$或$(K-F)\times(K-F)$中每个状态对(p,q) ($p\neq q$)，do
3. if $\exists a\in\sum$，使得格$(\delta(p,a),\delta(q,a))$内已经写上×，then
   begin
4. 给(p,q)格写×；
5. 如果刚刚写上×的格内有先前写入的状态对，此状态对的格同时也写入×。反复执行5, 直到写入×的格内没有先前写入的状态对为止;
   end
   else /** 格$(\delta(p,a),\delta(q,a))$内无× **/
6. for 每个$a\in\sum$, do
7. 把(p,q)写入格$(\delta(p,a),\delta(q,a))$内，除非$\delta(p,a)=\delta(q,a)$。

end

执行此算法的结果用一个表表示，实际上，执行此算法的过程就是向这个表内写入“×”的过程。

b	×				
c	×	×			
d	×	?	×		
e	×	×	×	×	
f	×	×	×	×	(b,d)
	a	b	c	d	e



(a,b):

	0	1
a	b	
b	e	

(a,c):

	0	1
a	b	
c	a	

(a,d):

	0	1
a	b	
d	f	

(b,c):

	0	1
b	e	
c	a	

(b,d):

	0	1
b	e	f
d	f	e

(c,d):

	0	1
c	a	
d	f	

(e,f):

	0	1
e	d	f
f	d	e

得：b≡d, e≡f , a≡a ,c≡c

于是 K/≡{{a},{b,d},{c},{e,f}},

五．构造简化的有限自动机

定理2-5.1 给定DFA M＝(K,∑,δ,q_0,F)，可根据引理2-1中的算法构造出除去不可达状态的具有更少状态的DFA M’，使得T(M’)=T(M)。

证明： 先对M用引理2-1中的算法求出K/≡。再构造M’：

M’=(K’,∑,δ’,[q_0], F’)，其中

K’={[q]| [q]∈K/≡且在M中q是从q_0可达的状态}

F’={[q]| q∈F}

δ’：对任何[q]∈K’，任何a∈∑,

δ’([q],a)=[δ(q,a)]

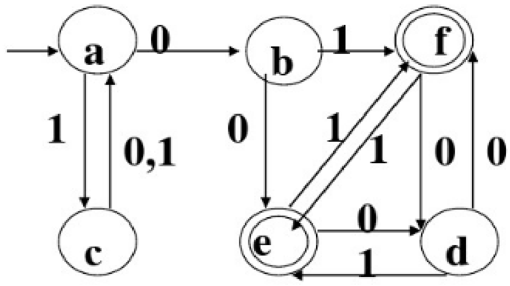
K/≡{{a},{b,d},{c},{e,f}}={[a],[b],[c],[e]}，([b]=[b,d],[e]={e,f})

K'= {[a],[b],[c],[e]}　F'={[e]}

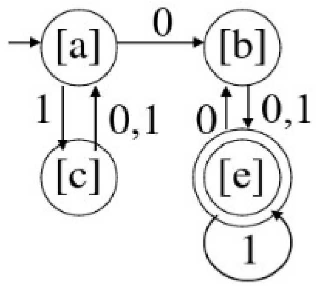
M'=(K',∑,δ',[a], F')

=({[a],[b],[c],[e]},{0,1},δ',[a],{[e]})

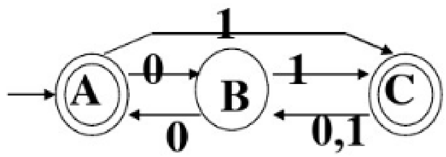
δ'([q],a)=[δ(q,a)]



δ':	0	1
[a]	[b]	[c]
[b]	[e]	[e]
[c]	[a]	[a]
[e]	[b]	[e]



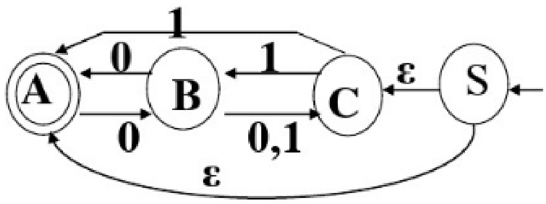
9. 给定DFA M如图所示。求一个左线性文法G，使得L(G)=T(M)。



解：有两种方法。

方法1

1.先将M逆转成M'：



2.根据M'构造右线性文法G'：

P={q→ap|δ(q,a)=p}∪{q→a|δ(q,a)∈F}。

S→A|C| ε A→0B

B→0A|0C|1C|0

C→1A|1B|1

3.将G'逆转成左线性文法G:

S→A|C| ε

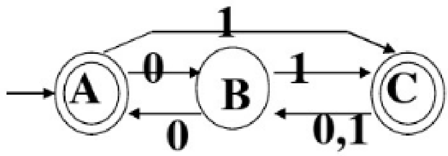
A→B0

B→A0|C0|C1|0

C→A1|B1|1

方法2

1.先根据M构造右线性文法G’：



$A\to 0B|1C|1$ (其中A是开始变元)

$B\to 0A|1C|0|1$

$C\to 0B|1B$

2.再将G’直接变成左线性文法G：根据定理：

(1) $S\to\alpha$, 当且仅当 $S\to\alpha\in P$；

(2) $A_i\to\alpha$, 当且仅当 $S\to\alpha A_i\in P$；

(3) $A_i\to A_j\alpha$, 当且仅当 $A_j\to\alpha A_i\in P$；

(4) $S\to A_j\alpha$, 当且仅当 $A_j\to\alpha\in P$。

(1)由$A\to 1$ 得: $A\to 1$

(2) 由$A\to 0B$ 得: $B\to 0$ 由$A\to 1C$ 得: $C\to 1$

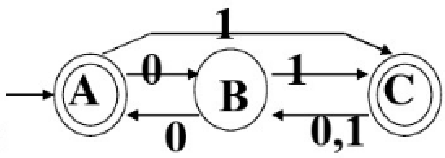
(3)由$B\to 0A$ 得:$A\to B0$ 由$B\to 1C$ 得: $C\to B1$

由$C\to 0B$ 得:$B\to C0$ 由$C\to 1B$ 得: $B\to C1$

(4)由 $B\to 0$ 得: $A\to B0$ 由$B\to 1$ 得: $A\to B1$

方法2

1.先根据M构造右线性文法G’：



$A\to 0B|1C|1|\varepsilon$(其中A是开始变元)

$B\to 0A|1C|0|1$

$C\to 0B|1B$

因开始变元A出现在产生式右侧，故引入新的开始变元S，

$S\to A$ (其中S是开始变元)

$A\to 0B|1C|1|\varepsilon$

$B\to 0A|1C|0|1$

$C\to 0B|1B$

2.再将G'直接变成左线性文法G：根据定理：

(1) $S \to \alpha$,　当且仅当　$S \to \alpha \in P$;

(2) $A_i \to \alpha$,　当且仅当　$S \to \alpha A_i \in P$;

(3) $A_i \to A_j \alpha$,　当且仅当　$A_j \to \alpha A_i \in P$;

(4) $S \to A_j \alpha$,　当且仅当　$A_j \to \alpha \in P$。

(2) $S \to A$ 得: $A \to \varepsilon$

(3) 由$A \to 0B$ 得: $B \to A0$　　由$A \to 1C$ 得: $C \to A1$

由$B \to 0A$ 得: $A \to B0$　　由$B \to 1C$ 得: $C \to B1$

由$C \to 0B$ 得: $B \to C0$　　由$C \to 1B$ 得: $B \to C1$

(4)由$A \to 1$ 得: $S \to A1$　　由$A \to \varepsilon$ 得: $S \to A$

由 $B \to 0$ 得: $S \to B0$　　由$B \to 1$ 得: $S \to B1$

整理得左线性文法G:

$S \to A1|B0|B1|A$

$A \to B0|\varepsilon$

$B \to A0|C0|C1$

$C \to A1|B1$

表面上看与方法1得结果略有些不同

$S \to A|C|\varepsilon$

$A \to B0$

$B \to A0|C0|C1|0$

$C \to A1|B1|1$

10. 首先构造一个右线性文法G，使得

$L(G)=\{a^i b^j|i,j\geq 0\}\cup\{c^k|k\geq 0\}$

再构造一个有限自动机M，使得T(M)=L(G)。

解：令G=({S,A,B,C},{a,b,c},P,S)

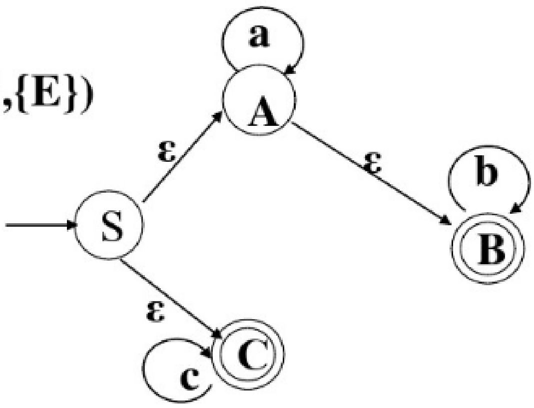
P: $S\to A|C|\varepsilon$

$A\to aA|B|\varepsilon$

$B\to bB|b|\varepsilon$

$C\to cC|c|\varepsilon$

令M＝({S,A,B,C},{a,b,c},δ,S,{E})



11. 给定右线性文法G=({S,B,C,D},{0,1}, P, S)，其中P：

$S\to B \mid C$，　　$B\to 0B \mid 1B \mid 011$，

试求一个FA M，使得 T(M)=L(G)。

$C\to 0D \mid 1C \mid \varepsilon$，　$D\to 0C \mid 1D$

解：此题与第10题类似。

要将G变成简单右线性文法，唯一要处理的产生式是 $B\to 011$，将它变成：

$B\to 0F$，$F\to 1G$，$G\to 1$

12. 证明L＝{a^i|i是个素数}不是正规集。

证明:

(1) 假设L是正规集。

(2)令n是L满足正规集泵作用引理常数。

(3)取z＝a^m，m≥n 且m是个素数。|z|=m≥n, 根据正规集的泵作用引理，可将z写成 z=uvw 形式，其中|uv|≤n, |v|≥1, 且对任何i≥0 有 uv^iw∈L。

(4)令$u=a^{n1}$, $v=a^{n2}$, $w=a^{n3}$, 于是$|uv|=n_1+n_2\le n$, $|v|=n_2\ge 1$,

$n_1+n_2+n_3=m$, $z=uvw=a^{n1+n2+n3} = a^m$,

$uv^iw=a^{n1+in2+n3} =a^{(n1+n2+n3)+(i-1)n2} =a^{m+(i-1)n2}$

取i=m+1,则

$uv^{m+1}w=a^{m+(m+1-1)n2} =a^{m+mn2} =a^{m(1+n2)}$

由于$n_2\ge 1$，所以$1+ n_2 \ge 2$, 而m≥2, 所以$m(1+n_2)$不是素数，故 $uv^{m+1}w\notin L$，产生矛盾。所以L不是正规集。

第三章　习题

1. 给定CFG G=({S,A,B,C},{a,b,c},P,S)，其中，

P：S→A|B, A→Ab|bS|C|b, B→AB|Ba,

C→AS｜b,

去掉G中的无用符号和单一生成式。

解：定义：给定CFG G=(V_N,V_T,P,S)，如果在G中存在派生$S \Rightarrow^* \alpha X\beta \Rightarrow^* w$，其中$w\in V_T^*$，$X\in V_N\cup V_T$，则称符号X是有用的，否则X是无用的。

利用两个引理，去掉无用符号。

注意：一定是先应用引理3-2.1, 后应用引理3-3.2 !!!

引理3-2.1 给定CFG $G=(V_N,V_T,P,S)$，且$L(G)\neq\Phi$，可以找到一个与G等价的CFG $G'=(V_N',V_T,P',S)$，使得

每个$A\in V_N'$，都有$w\in V_T^*$，且在G'中有$A\Rightarrow^* w$。

证明：1）求V_N'的算法：

begin

(1) $OLDV_N:=\Phi$

(2) $NEWV_N:=\{A|A\rightarrow w\in P$ 且$w\in V_T^*\}$

(3) While $OLDV_N\neq NEWV_N$ do

begin

(4) $OLDV_N:=NEWV_N$

(5) $NEWV_N:=OLDV_N\cup\{A|A\rightarrow\alpha\in P$,且$\alpha\in(V_T\cup OLDV_N)^*\}$

end

(6) $V_N':=NEWV_N$,

end

引理3-2.2 给定CFG $G=(V_N,V_T,P,S)$， 可以找到一个与G等价的CFG G'， $G'=(V_N',V_T',P',S)$，使得每个$X\in(V_N'\cup V_T')$，都有$\alpha,\beta\in(V_N'\cup V_T')^*$，且在

G'中有派生$S\Rightarrow^*\alpha X\beta$。

证明：1．执行下面迭代算法求V_N'和V_T'。

1）置初值：$V_N':=\{S\}$，$V_T':=\Phi$;

2）如果$A\in V_N'$，在P中又有产生式$A\rightarrow\alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_m$，则可以将$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中的所有变元加到$V_N'$中，将$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$中的所有终极符加到中$V_T'$中。重复2)。

3）若没有新的符号可加入到V_N'、V_T'中，算法停止。

最后得到V_N'、V_T'。

P：S→A|B, A→Ab|bS|C|b, B→AB|Ba, C→AS｜b,
对G应用引理3-2.1，执行上述算法，得到的结果如下表所示。

循环次数i	初值	1	2	3
OLD V_N	Φ	{A,C}	{A,C,S}	
NEW V_N	{A,C}	{A,C,S}	{A,C,S}	

最后得G′ CFG G'=({S,A,C},{a,b,c},P',S),
其中 P'：S→A, A→Ab|bS|C|b, C→AS|b
实际上，只去掉了不能推出终极符串的变元B。
再对G'应用引理3-2.2：

P'：S→A, A→Ab|bS|C|b, C→AS|b
再对G'用引理3-2.2处理，执行算法的结果如下表所示：

循环次数i	初值	1	2	3
V_N''	{S}	{S,A}	{S,A,C}	
V_T''	Φ	Φ	{ b }	

最后得G''=({S,A,C},{b},P'',S)
P'': S→A, A→Ab|bS|C|b, C→AS|b
实际上只去掉了无用符号a和c。

下面对G''去掉单一产生式:

对任何$A,B \in V_N$，如果有$A \Rightarrow^* B$，且$B \rightarrow \alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_n$是 P''中B的所有非单一产生式，则把所有$A \rightarrow \alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_n$加到P''' 中。

P'': $S \rightarrow A$, $A \rightarrow Ab|bS|C|b$, $C \rightarrow AS|b$

下面去掉单一产生式$S \rightarrow A$, $A \rightarrow C$, 得P''':

$S \rightarrow Ab|bS|C|b$, $A \rightarrow Ab|bS|AS|b$, $C \rightarrow AS|b$

再去掉$S \rightarrow C$, 得

$S \rightarrow Ab|bS|AS|b$, $A \rightarrow Ab|bS|AS|b$, $C \rightarrow AS|b$

但是，可以看出C是无用符号，所以$C \rightarrow AS|b$也被去掉。

最后得：G'''=({S,A},{b},P''',S)

P'''：$S \rightarrow Ab|bS|AS|b$, $A \rightarrow Ab|bS|AS|b$,

2． 给定CFG G=({S,A,B,C},{a,b},P,S)，其中，

P：$S \rightarrow ABC$, $A \rightarrow BB|\varepsilon$, $B \rightarrow CC|a$, $C \rightarrow AA|b$,

去掉G中的ε生成式。

解：首先求出可为零的变元，即可以推出ε的变元。

显然有A、C、B和S。

如果$A \rightarrow X_1X_2\ldots X_n \in P$，则将所有形如$A \rightarrow \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$的产生式都加到P′ 中，其中

(1) 如果X_i不是可为零的，则$\alpha_i = X_i$。

(2) 如果X_i是可为零的，则$\alpha_i = X_i$或者$\alpha_i = \varepsilon$。但是，如果所有$X_i(i=1,2,\ldots n)$都是可为零的，则不可所有$\alpha_i = \varepsilon$。

于是最后得：

$S \rightarrow ABC|BC|AC|AB|C|B|A$,

$A \rightarrow BB|B$,　$B \rightarrow CC|C|a$,

$C \rightarrow AA|A|b$,

3．给定CFG G=({S,A },{0,1}, P, S)，其中，

P：$S \to AA \mid 0$, $A \to SS \mid 1$,

将G写成GNF形式。

解：此时G已经具备CNF形式。($A \to BC$, $D \to a$)

(1)变元重新命名：令A_1=S, A_2=A,

P: $A_1 \to A_2A_2 \mid 0$, $A_2 \to A_1A_1 \mid 1$,

(2)处理$A_2 \to A_1A_1 \mid 1$, 变成： $A_2 \to A_2A_2A_1 \mid 0A_1 \mid 1$,

(3)处理左递归$A_2 \to A_2A_2A_1 \mid 0A_1 \mid 1$, 变成：

$A_2 \to 0A_1 \mid 1 \mid 0A_1Z_2 \mid 1Z_2$, $Z_2 \to A_2A_1 \mid A_2A_1Z_2$,

(4)处理$A_1 \to A_2A_2 \mid 0$ ，得

$A_1 \to 0A_1A_2 \mid 1A_2 \mid 0A_1Z_2A_2 \mid 1Z_2A_2 \mid 0$

(5)处理$Z_2 \to A_2A_1 \mid A_2A_1Z_2$, 分别得：

$Z_2 \to 0A_1A_1 \mid 1A_1 \mid 0A_1Z_2A_1 \mid 1Z_2A_1$

$Z_2 \to 0A_1A_1Z_2 \mid 1A_1Z_2 \mid 0A_1Z_2A_1Z_2 \mid 1Z_2A_1Z_2$

最后得G'=({A_1,A_2,Z_2},{0,1},P',A_1)

P'：$A_1 \to 0A_1A_2 \mid 1A_2 \mid 0A_1Z_2A_2 \mid 1Z_2A_2 \mid 0$

$A_2 \to 0A_1 \mid 1 \mid 0A_1Z_2 \mid 1Z_2$,

$Z_2 \to 0A_1A_1 \mid 1A_1 \mid 0A_1Z_2A_1 \mid 1Z_2A_1$

$Z_2 \to 0A_1A_1Z_2 \mid 1A_1Z_2 \mid 0A_1Z_2A_1Z_2 \mid 1Z_2A_1Z_2$

4．构造一个PDA M，使得

$T(M)=\{w|\ w\in\{a,b\}^* \wedge w$ 中a,b的个数相等}。

解：设计思想：

有两个状态q_1和q_2：q_1是开始状态， q_2是终止状态。

栈内符号：A，B，R (R是开始时栈内符号)。

开始时：读a，向栈压入A；读b，向栈压入B。

之后：当读a时：如果栈顶是A，再向栈压入一个A；

如果栈顶是B，则B退栈。

当读b时：如果栈顶是B，再向栈压入一个B；

如果栈顶是A，则A退栈。

如果w中a,b的个数相等，则M读完w后，栈顶应该是R，此时M进入终止状态q_2。

令$M=(\{q_1,q_2\},\{a,b\},\{A,B,R\},\delta, q_1,R,\{q_2\})$

$\delta(q_1,a,R)=\{(q_1,AR)\}$ $\delta(q_1,b,R)=\{(q_1,BR)\}$

$\delta(q_1,a,A)=\{(q_1,AA)\}$ $\delta(q_1,a,B)=\{(q_1, \varepsilon)\}$

$\delta(q_1,b,A)=\{(q_1, \varepsilon)\}$ $\delta(q_1,b,B)=\{(q_1,BB)\}$

$\delta(q_1, \varepsilon,R)=\{(q_2, \varepsilon)\}$

如w=bbabaa 时，M识别w的过程： ⇒表示ID间的变化。

$(q_1,bbabaa,R)\Rightarrow(q_1,babaa,BR)\Rightarrow(q_1, abaa,BBR)$

$\Rightarrow(q_1, baa,BR) \Rightarrow (q_1,aa,BBR) \Rightarrow (q_1,a,BR) \Rightarrow (q_1,\varepsilon,R)$

$\Rightarrow (q_2,\varepsilon,\varepsilon)$

再如w＝abbab，看看M是如何拒绝接收的。

$(q_1,abbab,R)\Rightarrow(q_1, bbab,AR)\Rightarrow(q_1, baa, R)\Rightarrow(q_1, aa,BR)$

$\Rightarrow (q_1,a,R) \Rightarrow (q_1,\varepsilon,AR)$ 无下一个动作，$w\notin T(M)$

5．给定CFG G=（{S,A,B},{a,b,c},P,S），其中

P为：$S\rightarrow aAB \mid aA \quad A\rightarrow bSa \mid Ab \mid Bc \mid b$，

求一个PDA M，使得T(M)=L(G)。

解:(1)先简化G，因为G中无ε产生式和单一产生式，所以只去掉无用符号：对G应用引理3-2.1，执行上述算法，

得到的结果如下表所示：

循环次数i	初值	1	2	3
OLD V_N	Φ	{A}	{A, S}	
NEW V_N	{A}	{A,S}	{A, S}	

得G'=({S,A},{a,b,c},P',S)

P'：$S\rightarrow aA \quad A\rightarrow bSa \mid Ab \mid b$，

P'：$S\rightarrow aA \quad A\rightarrow bSa \mid Ab \mid b$，

再对G'应用引理3-2.2处理，执行算法的结果如下表所示：

循环次数i	初值	1	2	3
V_N''	{S}	{S,A}	{S,A}	
V_T''	Φ	{a}	{ a,b }	

得G"=({S,A},{a,b},P",S)

P": $S\rightarrow aA \quad A\rightarrow bSa \mid Ab \mid b$，

(2)将G"变成GNF形式

先变成： $S\rightarrow aA$， $A\rightarrow bSD \mid Ab \mid b$， $D\rightarrow a$ ，

处理左递归$A\rightarrow Ab \mid bSD \mid b$ ，

变成：$A\rightarrow bSD \mid b \mid bSDZ \mid bZ$， $Z\rightarrow b \mid bZ$

最后得： $S\rightarrow aA$，$A\rightarrow bSD|b|bSDZ|bZ$， $Z\rightarrow b|bZ$，$D\rightarrow a$

S→aA，A→bSD| b| bSDZ| bZ, Z→b | bz， D →a，

(3)根据上述文法，构造PDAM'使得N(M')=L(G)

M'=({q},{a,b},{S,A,D,Z},δ,q,S,Φ)

δ:由S→aA得： δ(q,a,S)={(q,A)}

由A→bSD| b| bSDZ| bZ得：

δ(q,b,A)={(q,SD),(q,ε),(q,SDZ),(q,Z)}

由Z→b|bz得：δ(q,b,Z)={(q,ε),(q,Z)}

由D →a 得： δ(q,a,D)={(q,ε)}

(4)根据M'变成M,使得T(M)=N(M').

$M=(\{q_0,q,q_1\},\{a,b\},\{S,A,D,Z,E\},\delta',q_0,E,\{q_1\})$

δ': $\delta'(q_0,\varepsilon,E)=\{(q,SE)\}$

$\delta'(q,a,S)=\{(q,A)\}$

$\delta'(q,b,A)=\{(q,SD),(q,\varepsilon),(q,SDZ),(q,Z)\}$

$\delta'(q,b,Z)=\{(q,\varepsilon),(q,Z)\}$

$\delta'(q,a,D)=\{(q,\varepsilon)\}$

$\delta'(q,\varepsilon,E)=\{(q_1,\varepsilon)\}$

6．给定PDA $M=(\{q_0,q_1\},\{0,1\},\{Z_0,X\},\delta,q_0,\Phi)$，其中δ如下：

(1)$\delta(q_0,1,Z_0)=\{(q_0,XZ_0)\}$ (2)$\delta(q_0,1,X)=\{(q_0,XX)\}$

(3)$\delta(q_0,0,X)=\{(q_1,X)\}$ (4)$\delta(q_0,\varepsilon,Z_0)=\{(q_0,\varepsilon)\}$

(5)$\delta(q_1,1,X)=\{(q_1,\varepsilon)\}$ (6)$\delta(q_1,0,Z_0)=\{(q_0,Z_0)\}$

求一个CFG G 使得L(G)=N(M).

解：令$M=(K,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,Z_0,\Phi)$，N(M)=L。

构造一个CFG $G=(V_N,V_T,P,S)$，其中

$V_N=\{[q,A,p]|q,p\in K,A\in\Gamma\}\cup\{S\}$ $V_T=\Sigma=\{0,1\}$

$V_N=\{S,[q_0,Z_0,q_0],[q_0,Z_0,q_1],[q_1,Z_0,q_0],[q_1,Z_0,q_1],$
$[q_0,X,q_0],[q_0,X,q_1],[q_1,X,q_0],[q_1,X,q_1]\}$

P中产生式有三种类型：

1．对任何$q \in K$,有 $S \to [q_0,Z_0,q]$。

1）$S \to [q_0,Z_0,q_0]$

2）$S \to [q_0,Z_0,q_1]$

2．对K中任何$q,q_1,q_2,\ldots,q_m,q_{m+1}=p$，任何$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$,
任何$A,B_1,B_2,\ldots,B_m \in \Gamma$,

只要$\delta(q,a,A)$中含有$(q_1,B_1B_2\ldots B_m)$，则有产生式

$[q,A,p] \to a[q_1,B_1,q_2][q_2,B_2,q_3]\ldots[q_m,B_m,p]$。

由(1) $\delta(q_0,1, Z_0)=\{(q_0, XZ_0)\}$

3）$[q_0,Z_0,q_0] \to 1[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_0]$

4）$[q_0,Z_0,q_0] \to 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_0]$

5）$[q_0,Z_0,q_1] \to 1[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_1]$

6）$[q_0,Z_0,q_1] \to 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_1]$

由(2)$\delta(q_0,1,X)=\{(q_0,XX)\}$得

7）$[q_0,X,q_0] \to 1[q_0,X,q_0][q_0,X,q_0]$

8）$[q_0,X,q_0] \to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_0]$

9）$[q_0,X,q_1] \to 1[q_0,X,q_0][q_0,X,q_1]$

10）$[q_0,X,q_1] \to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_1]$

由(3)$\delta(q_0,0,X)=\{(q_1,X)\}$得

11）$[q_0,X,q_0] \to 0[q_1,X,q_0]$

12）$[q_0,X,q_1] \to 0\ [q_1,X,q_1]$

由(4)$\delta(q_1,0,Z_0)=\{(q_0, Z_0)\}$得

13）$[q_1,Z_0,q_0] \to 0[q_0,Z_0,q_0]$

14）$[q_1,Z_0,q_1] \to 0\ [q_0,Z_0,q_1]$

3. 对任何q,p∈K，任何a∈Σ∪{ε},任何A∈Γ，

如果有δ(q,a,A)中含有(p,ε)，则有产生式 [q,A,p]→a 。

由(5) $\delta(q_0,\varepsilon,Z_0)=\{(q_0,\varepsilon)\}$得

15）$[q_0,Z_0,q_0]\to\varepsilon$

由(6) $\delta(q_1,1,X)=\{(q_1,\varepsilon)\}$得

16）$[q_1,X,q_1]\to 1$

下面对这些产生式进行整理。

1）$S\to[q_0,Z_0,q_0]$

2）$S\to[q_0,Z_0,q_1]$　去掉5)6)后,无产生式

3）$[q_0,Z_0,q_0]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_0]$　无产生式

4）$[q_0,Z_0,q_0]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_0]$

5）$[q_0,Z_0,q_1]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,Z_0,q_1]$　无产生式

6）$[q_0,Z_0,q_1]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_1]$　将14)代入后，死循环

7）$[q_0,X,q_0]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,X,q_0]$　死循环

8）$[q_0,X,q_0]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_0]$　无产生式

9）$[q_0,X,q_1]\to 1[q_0,X,q_0][q_0,X,q_1]$　无产生式

10）$[q_0,X,q_1]\to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_1]$

11）$[q_0,X,q_0]\to 0[q_1,X,q_0]$　无产生式

12）$[q_0,X,q_1]\to 0\,[q_1,X,q_1]$

13）$[q_1,Z_0,q_0]\to 0[q_0,Z_0,q_0]$

14）$[q_1,Z_0,q_1]\to 0\,[q_0,Z_0,q_1]$　去掉6)后,无产生式

15）$[q_0,Z_0,q_0]\to\varepsilon$

16）$[q_1,X,q_1]\to 1$

最后得：

1） $S \to [q_0,Z_0,q_0]$

4） $[q_0,Z_0,q_0] \to 1[q_0,X,q_1][q_1,Z_0,q_0]$

10） $[q_0,X,q_1] \to 1[q_0,X,q_1][q_1,X,q_1]$

12） $[q_0,X,q_1] \to 0\ [q_1,X,q_1]$

13） $[q_1,Z_0,q_0] \to 0[q_0,Z_0,q_0]$

15） $[q_0,Z_0,q_0] \to \varepsilon$

16） $[q_1,X,q_1] \to 1$

7．求证下面语言L不是CFL，

$L=\{a^k \mid k$是个素数$\}$。

证明：(1) 假设L是CFL。

(2)令n是L满足CFL泵作用引理常数。

(3)取$z=a^m$，$m \ge n$ 且m是个素数。$|z|=m \ge n$, 根据CFL的泵作用引理，可将z写成 $z=uvwxy$ 形式，其中$|vwx| \le n$, $|vx| \ge 1$, 且对任何$i \ge 0$ 有 $uv^iwx^iy \in L$。

(4)令$u=a^{n1}$, $v=a^{n2}$, $w=a^{n3}$, $x=a^{n4}$, $y=a^{n5}$,于是$|vx|=n_2+n_4 \ge 1$,

$n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=m$， $z=uvwxy=a^{n1+n2+n3+n4+n5}=a^m$,

$uv^iwx^iy=a^{n1+in2+n3+in4+n5}=a^{m+(i-1)n2+(i-1)n4}=a^{m+(i-1)(n2+n4)}$

取$i=m+1$,则

$uv^{m+1}wx^{m+1}y=a^{m+(m+1-1)(n2+n4)}=a^{m+m(n2+n4)}=a^{m(1+n2+n4)}$

由于$n_2+n_4 \ge 1$，故$1+n_2+n_4 \ge 2$, 而$m \ge 2$, 所以$m(1+n_2+n_4)$不是素数，故 $uv^{m+1}wx^{m+1}y \notin L$，产生矛盾。所以L不是CFL。