9 Hard

从1到9的9个整数中有放回地随机取3次，每次取一个数，则取出的3个数之积能被10整除的概率为( ).

0.774

0.128

0.214

0.354

设 A_1 表示“取出的3个数中有偶数”； A_2 表示“取出的3个数中有5”，则所求概率为

$$P(A_1A_2)=1-P(\overline{A_1A_2})=1-P(\overline{A_1}\cup\overline{A_2})=1-[P(\overline{A_1})+P(\overline{A_2})-P(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})]$$

$$=1-\left[\left(\frac{5}{9}\right)^3+\left(\frac{8}{9}\right)^3-\left(\frac{4}{9}\right)^3\right]\approx 0.214.$$

#17 Easy

箱中有6个红球和2个白球，任意抽取四次，每次取一球，取后不放回，则在第四次抽取时取得红球的概率为( ).

$1-(\frac{1}{4})^4$

$\frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}$

$(\frac{3}{4})^4$

这是个抽签事件，不管第几次抽到红球的概率都是相同的，即 $\frac{6}{6+2}=\frac{3}{4}$.

#7 Hard

某宾馆一楼有3部电梯，今有5人要乘坐电梯，假定各人选哪部电梯是随机的，则每部电梯中至少有一人的概率为( ).

0.64

0.61

0.63

0.62

(从对立事件考虑)设 A_i 表示“第 i 部电梯内无人” $(i=1, 2, 3)$， W 表示“每部电梯中至少有一人”， $\overline{W}$ 表示“至少一部电梯中无人”，于是 $P(A_i)=\left(\frac{2}{3}\right)^5 \quad (i=1, 2, 3)$， $P(A_iA_j)=\left(\frac{1}{3}\right)^5 \quad (i, j=1, 2, 3; i\neq j)$，

$P(A_1A_2A_3)=0$，

$$P(\overline{W})=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3)$$

$$=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^5-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^5+0\approx 0.38,$$

$$P(W)=1-P(\overline{W})=1-0.38=0.62.$$

10个人中有一对夫妇，他们随意坐在一张圆桌周围，则该对夫妇正好坐在一起的概率为( ).

$\frac{5}{9}$

$\frac{1}{9}$

$\frac{4}{9}$

$\frac{2}{9}$

设 A 为“该对夫妇正好坐在一起”.

方法1： 10个人随机坐在一张圆桌周围，共有9！种方法.先考虑该对夫妇男左女右坐在一起：把相邻的两个座位看成一个特号座，考虑捆绑法的思路，9个座位有8！种排法，同理再考虑男右女左的坐法，所以

$P(A)=\frac{2\times 8!}{9!}=\frac{2}{9}$.

方法2： 只考虑夫妇俩人．夫妇俩人随机坐有 P_{10}^{2} 种坐法．把座位按 $1\sim 10$ 排号，夫妇相邻而坐且于男右侧，则有10种坐法：男坐 $1,2,3,\cdots,9,10$；女坐 $2,3,\cdots,10,1$； 同理再考虑女坐于男左侧，好有10种坐法，共有20种坐法，所以 $P(A)=\frac{20}{P_{10}^{2}}=\frac{2}{9}$.

方法3： 假设夫妇中一人坐定，考虑另一人(不妨设是女)．此人随机坐，有9种坐法，若要夫妇相邻，她只能坐在男方的左右两个位置，所以 $P(A)=\frac{2}{9}$.

固定其中一个人，则另一个人只能坐他的两边

50只铆钉随机地取来用在10个部件上，其中有3个铆钉强度太弱，每个部件用3只铆钉，若将3只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱，则发生一个部件强度太弱的概率是( ).

$\frac{11}{1960}$

$\frac{1}{1960}$

$\frac{1}{196}$

$\frac{11}{150}$

将部件自1至10编号，试验 E 为各部件上装上3只铆钉，设 $A_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$ 表示事件“第 i 号部件强度太弱”．若3只强度太弱的铆钉同时装在第 i 号部件上去，则 A_i 发生．从50只铆钉中任取3只装在第 i 号部件上，共有 C_{50}^{3} 种取法，而强度太弱的铆钉只有3只，它们都装在第 i 号部件上只有 C_3^3 种取法，所以

$P(A_i)=\frac{1}{C_{50}^{3}}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$.

由于 A_i 间是互斥的，因此，10个部件中有一个强度太弱的概率为

$$p=P(\bigcup_{i=1}^{10}A_i)=\sum_{i=1}^{10}P(A_i)=10\times\frac{1}{C_{50}^{3}}=\frac{1}{1960}.$$

将15名新生(其中有3名优秀生)随机地分配到三个班级中，其中一班4名，二班5名，三班6名，则每一个班级各分配到一名优秀生的概率为( )；3名优秀生被分配到一个班级的概率为( ).

$0.2637, 0.06473$

$0.2637, 0.07473$

$0.2237, 0.07073$

$0.2156, 0.07473$

#23 Hard

包括 a 和 b 二人在内共 n 个人排队，则 a, b 间恰有 r 个人的概率是 ( ).

$$\frac{2(n-r-1)}{n(n+1)}$$

$$\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{2(n-r)}{n(n-1)}$$

$$\frac{n-r-1}{n(n-1)}$$

首先 $0 \le r \le n-2$，n 个人共有 $n!$ 种排法．设所求概率的事件为 A 事件．先考虑 a, b 二人间隔 r 个人的排法，若 a 在前，则有 $n-(r+1)$ 种站法，a 站定位置，b 的位置就自然定了．因为间隔 r 个人，在考虑 b 在前也有 $n-(r+1)$ 种站法，所以 a, b 二人共有 $2[n-(r+1)]$ 种排法，其余 $n-2$ 个人共有 $(n-2)!$ 种排法．所以，其有 $K_A = 2[n-(r+1)](n-2)!$ 种排法，从而

$$P(A) = \frac{2[n-(r+1)](n-2)!}{n!} = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

有 10 个文曲星，其中有 3 个为型号 A，7 个为型号 B，随机地分给 10 位大学生，每人一个，则最后三位大学生中恰有一位得到型号 A 的文曲星的概率为 ( ).

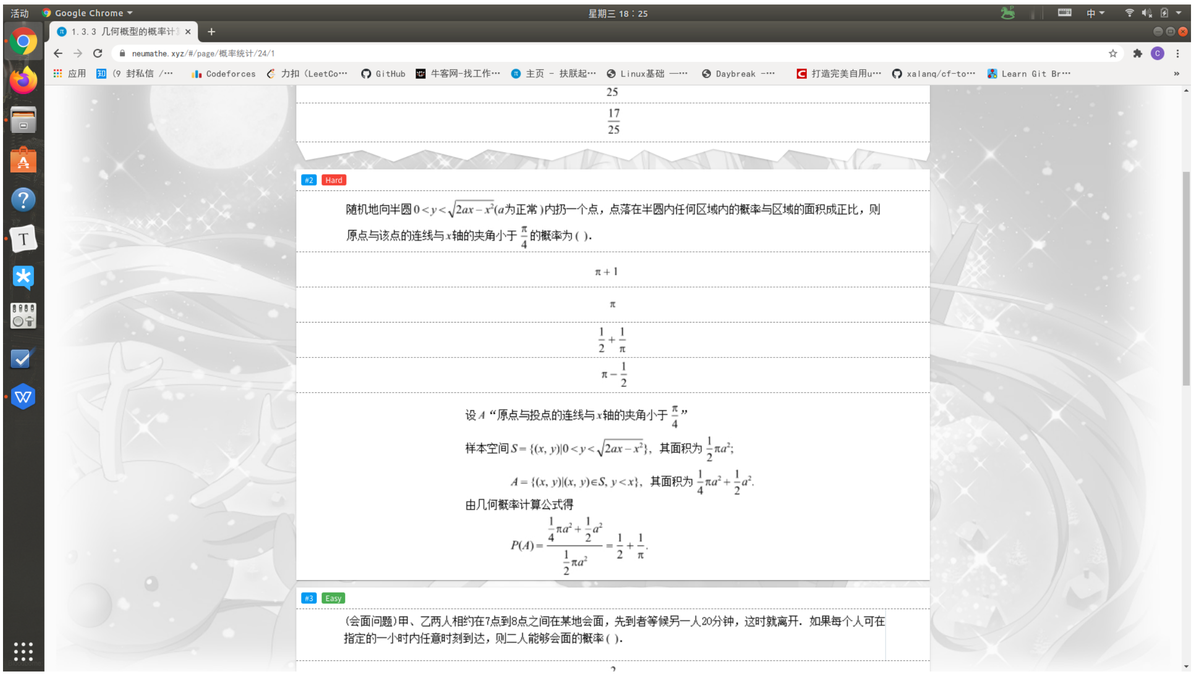
$$\frac{7}{40}$$

$$\frac{7}{120}$$

$$\frac{21}{40}$$

$$\frac{21}{80}$$

10 个文曲星随机的分给 10 位大学生的分法有 P_{10}^{10} 种，而最后三位大学生中恰有一位得到型号 A 的文曲星说明前七位大学生分别得到 2 个型号 A 和 5 个型号 B 文曲星，所以前七位大学生的分法有 $C_7^5 C_3^2 P_7^7$ 种，后面三位的分法是 $C_3^2 P_2^2$，所以最后三位大学生中恰有一位得到型号 A 的文曲星的概率为 $\frac{C_7^5 C_3^2 P_7^7 C_3^2 P_2^2}{P_{10}^{10}} = \frac{21}{40}$.



$$\frac{17}{25}$$

#2 Hard

随机地向半圆 $0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ (a 为正常) 内扔一个点，点落在半圆内任何区域内的概率与区域的面积成正比，则原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为 ( ).

$$\pi + 1$$

$$\pi$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$$

$$\pi - \frac{1}{2}$$

设 A "原点与投点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$"

样本空间 $S = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{2ax - x^2}\}$，其面积为 $\frac{1}{2}\pi a^2$;

$A = \{(x, y) | (x, y) \in S, y < x\}$，其面积为 $\frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}a^2$.

由几何概率计算公式得

$$P(A) = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}.$$

#3 Easy

(会面问题)甲、乙两人相约在7点到8点之间在某地会面，先到者等候另一人20分钟，这时就离开．如果每个人可在指定的一小时内任意时刻到达，则二人能够会面的概率 ( ).

#9 Easy

设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有 ( ).

$P(\overline{A}B)\neq P(\overline{A})P(B)$

$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$

$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$

$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

由条件概率公式以及条件 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$ 知 $\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}==\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(AB)}{1-P(\overline{A})}$,
有 $P(\overline{A}B)[1-P(\overline{A})]=P(\overline{A})P(AB)$, 且 $P(\overline{A}B)+P(AB)=P(B)$,
故 $P(\overline{A}B)[1-P(\overline{A})]=P(\overline{A})[P(B)-P(\overline{A}B)]$, 即 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)$.

设随机事件 A 与 B 互不相容，已知 $P(A)=P(B)=a(0<a<1)$，$P(A|\overline{B})=P(\overline{A}|\overline{B})$，则 a，$P(A\cup B)$ 的值分别为 ( ).

$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$

$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$

(1)由 $P(A|\overline{B})+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，有 $P(A|\overline{B})=P(\overline{A}|\overline{B})=0.5$，再根据 A,B 互不相容，

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)}{1-P(B)}=\frac{a}{1-a}=0.5,$$

解出 $a=\frac{1}{3}$；

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{2}{3}$.

设 A,B 是两个随机事件，$P(A)=0.4$，$P(AB)=0.2$，$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，则 $P(A\cup B)=$ ( ).

0.7

0.5

0.2

0.4

由 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})=0.4$，$P(AB)=0.2$．因此 $P(A\overline{B})=0.2$，并且 $P(B)>0$，$P(\overline{B})>0$，

对于 $\overline{B}$，有 $P(A|\overline{B})+P(\overline{A}|\overline{B})=1$，于是 $P(A|\overline{B})=P(A|B)$，因此 A 与 B 相互独立，有 $P(B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=0.5$，

所以 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$.

某人有两盒火柴，吸烟时从任一盒中取一根火柴，经过若干时间后，发现一盒火柴已用完. 如果最初两盒中各有 n 根火柴，则这时另一盒中还有 r 根火柴的概率为 ( ).

$$\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n-r}}$$

$$\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$$

$$\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n}}$$

$$\frac{C_{2n-r}^{r}}{2^{2n-r}}$$

不妨设甲盒已空而乙盒还有 r 根火柴，因为是随机抽取，可知这时必已取过 $2n-r$ 次，每次取甲，乙盒的概率均为 $\frac{1}{2}$，而在 $2n-r$ 次中必是 n 次取了甲盒的，$n-r$ 次取了乙盒的，最后第 $2n-r+1$ 必定是取甲盒的，否则不知其为空盒，故概率为

$$P_1=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1},$$

同理，最后乙盒空而甲盒剩 r 的概率为：$P_2=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-r}=\frac{1}{2}C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}$，

故所求概率为 ：$P=P_1+P_2=C_{2n-r}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-r}=\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}$.

设 A,B,C 为三个事件，且 A,B 相互独立，则以下结论中不正确的是 ( ).

若 $C\subset B$, 则 A 与 C 也独立

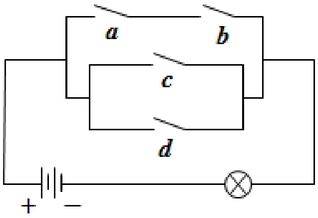
若 $P(C)=0$, 则 $A\cup C$ 与 B 也独立

若 $P(C)=1$, 则 $A\cup C$ 与 B 也独立

.若 $P(C)=1$, 则 AC 与 BC 也独立

若 $P(C)=0$, 由于 $AC\subset C$, $BC\subset C$, $ABC\subset C$, 所以其概率都小于等于 $P(C)$, 则 $P(AC)=P(BC)=P(ABC)=0$.
则有 $P((A\cup C)B)=P(AB\cup BC)=P(AB)+P(BC)-P(ABC)=P(A)P(B)$,
$P(A\cup C)P(B)=(P(A)+P(C)-P(AC))P(B)=P(A)P(B)$,
即若 $P(C)=0$, 则 $A\cup C$ 与 B 也独立.

一个开关电路如图所示，



假设开关 a, b, c, d开或关的概率都是 0.5，且各开关是否关闭相互独立，求如果发现灯亮时，开关 a与b同时关闭的概率为 ( ).

0.55

0.28

0.31

0.74

设 A表示开关 a关闭，B表示开关 b关闭，C表示开关 c关闭，D表示开关 d关闭，A, B, C, D相互独立，E表示灯亮，则

$$\begin{aligned}P(E)&=P(AB\cup C\cup D)\\&=P(AB)+P(C)+P(D)-P(ABC)-P(ABD)-P(CD)+P(ABCD)\\&=P(A)P(B)+P(C)+P(D)-P(A)P(B)P(C)-P(A)P(B)P(D)-P(C)P(D)+P(A)P(B)P(C)P(D)\\&=0.8125,\end{aligned}$$

$$P(AB|E)=\frac{P(AB)}{P(E)}=\frac{0.25}{0.8125}\approx 0.31.$$

某种仪器由三个部件组装而成，假设各部件质量互不影响且它们的优质率分别为 0.8, 0.7与 0.9，已知：如果三个部件都是优质品，则组装后的仪器一定合格；如果有一个部件不是优质品，则组装后的仪器不合格率为 0.2；如果两件不是优质品，则仪器的不合格率为 0.6；如果三件都不是优质品，则仪器的不合格率为 0.9．则下列说法中不正确的是 ( ).

若已发现一台仪器不合格，则它有一个部件不是优质品的概率最大

仪器的不合格率为 0.059

若已发现一台仪器不合格，则它有一个部件不是优质品的概率为 $\frac{796}{1402}$

仪器的不合格率为 0.1402

要验收一批(100台)微机，验收方案如下：自该批微机中随机地取出3台进行测试(设三台微机的测试是相互独立的)，3台中只要有一台在测试中被认为是次品，这批微机就会被拒绝．由于测试条件和水平，将次品的微机误认为正品的概率为 0.05，而将正品的微机误判为次品的概率为 0.01．如果已知这100台微机恰有4台次品，则这批微机被接收的概率是( ).

0.6829

0.6289

0.8629

0.8269

设随机变量 X 只取正整数值 N，且 $P\{X=N\}$ 与 N^2 成反比，则 X 的分布律为 $P\{X=N\}=(\ )$．

$\frac{6}{\pi^2 N^2}$，N 取正整数

$\frac{6}{\pi N}$，N 取正整数

$\frac{6}{\pi N^2}$，N 取正整数

$\frac{6}{\pi^2 N}$，N 取正整数

依题意 $P\{X=N\}=\frac{c}{N^2}$，其中 c 待定．由于 $\sum_{N=1}^{\infty}\frac{c}{N^2}=c\cdot\frac{\pi^2}{6}=1$，所以 $c=\frac{6}{\pi^2}$，即 X 的分布律为

$P\{X=N\}\frac{6}{\pi^2 N^2}$，$N$ 取正整数．

需要用到级数求和来证明这个

设随机变量ξ的分布律为$P(\xi=k)=\dfrac{\lambda^k}{ak!}$ ($\lambda>0$，$k=1,2,3,\cdots$)，则$a=$ ( ).

$e^{-\lambda}$

e^{λ}

$e^{\lambda}-1$

$e^{-\lambda}-1$

由分布律的性质$\sum_i P_i=1$有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{ak!}=1\Rightarrow(e^{\lambda}-1)/a=1\Rightarrow a=e^{\lambda}-1.$$

注意：$e^{\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

泊松从0开始

设随机变量$X\sim B(n,p)$. 当k取值为( )时，$P\{X=k\}$最大.

$[(n+1)p]$或$\{(n+1)p$，$(n+1)p-1\}$

$[(n+1)p]$

$(n+1)p$

$(n+1)p$，$(n+1)p-1$

记$a_i=P\{X=i\}$，$t=\dfrac{a_k}{a_{k-1}}$，若$t\geq1$，说明a_j单调增加，若$t<1$，说明a_j单调减.

当$X\sim B(n,p)$时，有 $t=\dfrac{a_k}{a_{k-1}}=\dfrac{C_n^k p^k(1-p)^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k-1}}=\dfrac{n-k+1}{k}\dfrac{p}{1-p}$，

要使$t\geq1$，$\dfrac{n-k+1}{k}\dfrac{p}{1-p}\geq1\Rightarrow k\leq(n+1)p$，

所以二项分布$X\sim B(n,p)$在$k\leq(n+1)p$时，$P\{X=k\}$单调增加，在$k>(n+1)p$时，$P\{X=k\}$单调减少. 又k为整数，所以

(1)当$(n+1)p$为整数时，$P\{X=(n+1)p\}=P\{X=(n+1)p-1\}$为最大值，

(2)当$(n+1)p$不为整数时，$P\{X=[(n+1)p]\}$为最大值，其中$[\cdot]$为取整函数.

(n+1)p的时候t应该是等于1的，所以和他的前一项是相等的

某种型号的电子管的寿命 X (以小时计)具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{1000}{x^2}, & x>1000 \\ 0, & 其它\end{cases}$. 现有大批这种电子管，从中任取 5 只，则至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率为 ( ).

$\frac{232}{243}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{11}{243}$

解法一：

$P\{X>1500\}=\int_{1500}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=-\frac{1000}{x}\Big|_{1500}^{+\infty}=\frac{2}{3}$.

设 Y 表示从该批电子管中任取 5 只，其中寿命大于 1500 的只数，则

$$P\{Y\geq 2\}=1-P\{Y<2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}$$
$$=1-(\frac{1}{3})^5-5\times\frac{2}{3}\times(\frac{1}{3})^4=1-\frac{1}{3^5}-\frac{10}{3^5}=\frac{232}{243}.$$

解法二：

第一步求电子管寿命超过 1500 小时的概率值，

$$p=P\{X>1500\}=\int_{1500}^{+\infty}f(x)dx=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=\frac{2}{3};$$

第二步，设 Y 为 5 只电子管中有 k 只的使用寿命超过 1500 小时，则 Y 服从的是二项分布，

$$P\{Y=k\}=C_5^k p^k(1-p)^{5-k}=C_5^k(\frac{2}{3})^k(1-\frac{2}{3})^{5-k};$$

第三步 5 只电子管中至少有 2 只电子管的使用寿命超过 1500 小时的概率为

$$\sum_{k=2}^{5}C_5^k(\frac{2}{3})^k(\frac{1}{3})^{5-k}\text{（或者 }1-\sum_{k=0}^{1}C_5^k(\frac{2}{3})^k(\frac{1}{3})^{5-k}\text{）}.$$

最后算得所求概率值为 $\frac{232}{243}$.

大于1500不是只把x等于1500带进去，要从1500到正无穷积分才是大于1500

#21 Hard

某公司生产一种产品300件，根据历史生产记录知废品率为0.01，则现在这300件产品经检验废品数大于5的概率为( ).

0.55

0.08

. 0.12

0.17

把每件产品的检验看作一次伯努利试验，它有两个结果：$A=\{正品\}$，$\overline{A}=\{废品\}$，检验300件产品就是作300次独立的伯努利试验．用X表示检验出的废品数，则 $X\sim b(300,0.01)$,

我们要计算$P\{X>5\}$.

对$n=300$, $p=0.01$, 有$\lambda=np=3$, 于是，得

$$P\{X>5\}=\sum_{k=6}^{300}b(k;300,0.01)=1-\sum_{k=0}^{5}b(k;300,0.01)\approx 1-\sum_{k=0}^{5}\frac{3^k}{k!}e^{-3}.$$

查泊松分布表，得 $P\{X>5\}\approx 1-0.916082=0.08.$

泊松查表题

假设某地在任何长为t(年)的时间间隔内发生地震的次数$N(t)$服从参数为$\lambda=0.1t$的泊松分布，X表示连续两次地震之间间隔的时间(单位：年). 则今后3年内再次发生地震的概率为( )；今后3年到5年内再次发生地震的概率为( ).

0.52, 0.34

0.36, 0.22

0.59, 0.33

0.26, 0.13

当$t\geq 0$时，$P\{X>t\}=P\{N(t)=0\}=e^{-0.1t}$,

$\therefore F(t)=P\{X\leq t\}=1-P\{X>t\}=1-e^{-0.1t}$;

当$t<0$时，$F(t)=0$, $\therefore$ $F(x)=\begin{cases}1-e^{-0.1t}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$,

X服从指数分布$(\lambda=0.1)$; $F(3)=1-e^{-0.1\times 3}\approx 0.26$; $F(5)-F(3)\approx 0.13$.

在长度为 t 的时间间隔内，某急救中心收到紧急呼救的次数 X 服从参数 $\frac{t}{2}$ 的泊松分布，而与时间间隔的起点无关(时间以小时计)，则某一天从中午12至下午3时没有收到紧急呼救的概率为( )；某一天从中午12时至下午5时至少收到1次紧急呼救的概率为( ).

0.118, 0.918

0.118, 0.833

0.223, 0.833

0.223, 0.918

(1) $t=3,\ \lambda=3/2,\quad P\{X=0\}=e^{-3/2}\approx 0.223;$

(2) $t=5,\ \lambda=5/2,\quad P\{X\geq 1\}=1-P\{X=0\}\ =1-e^{-5/2}\approx 0.918.$

设随机变量 ξ 的分布密度为 $\varphi(x)=\dfrac{A}{e^{-x}+e^{x}}$， $-\infty<x<+\infty$，则 $A=$ ( ).

$\frac{4}{\pi}$

$\frac{2}{\pi}$

$\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{4}$

由概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}A\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}dx=1,$$

令 $e^{x}=t$，则有 $dx=\frac{1}{t}dt$，故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}A\frac{1}{e^{-x}+e^{x}}dx=A\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+t^{2}}dt=1,$$

即 $A\times arc\tan t\big|_{0}^{+\infty}=A\times\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow A=\frac{2}{\pi}$.

设 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{x}{c}e^{-x^2/2c}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 是变量 ξ 的概率密度，则常数 $c=$（ ）.

可以是任意非零常数

仅取1

仅取-1

任意正常数

由概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{x}{c}e^{-x^2/2c}dx=1$，即 $-e^{-x^2/2c}\big|_0^{+\infty}=1$.

当 $c>0$ 时，上式成立.

要使函数 $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{Ax}{(1+x)^4}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ 是某个随机变量的概率密度，则 A 的值应是（ ）.

5

6

. 7

4

概率密度的性质 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$ 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{Ax}{(1+x)^4}dx=1\Rightarrow -A\frac{1}{3}x(1+x)^{-3}\big|_0^{+\infty}-A\frac{1}{6}(1+x)^{-2}\big|_0^{+\infty}=1,$$

即 $A\frac{1}{6}=1\Rightarrow A=6$.

使用了 x 小时的电子管，在以后的 Δx 小时内损坏的概率等于 $\lambda\Delta x + o(\Delta x)$，其中 $\lambda > 0$ 是常数，设电子管在损坏前已使用时数 X 的分布函数为 $F(x)$，则电子管在 T 小时内损坏的概率为（ ）.

$$P\{X \le T\} = -e^{-\lambda T}$$

$$P\{X \le T\} = e^{-\lambda T}$$

$$P\{X \le T\} = 1 - e^{-\lambda T}$$

$$P\{X \le T\} = 1 + e^{-\lambda T}$$

因 X 的可能取值充满区间 $(0, +\infty)$，故应分段求 $F(x) = P\{X \le x\}$.

当 $x \le 0$ 时，$F(x) = P\{X \le x\} = P(\varnothing) = 0$;

当 $x > 0$ 时，由题设知 $P\{x < X \le x + \Delta x / X\} = \lambda\Delta x + o(\Delta x)$，而

$$P\{x < X \le x + \Delta x / X\} = \frac{P\{x < X \le x + \Delta x, X > x\}}{P\{X > x\}} = \frac{P\{x < X \le x + \Delta x\}}{1 - P\{X \le x\}} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)},$$

故 $\dfrac{F(X + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} = \lambda\Delta x + o(\Delta x)$，即

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = [1 - F(x)]\left[\lambda + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right],$$

令 $o(\Delta x) \to 0$，得 $F'(x) = \lambda[1 - F(x)]$.

这是关于 $F(x)$ 的变量可分离微分方程，分离变量 $\dfrac{dF(x)}{1 - F(x)} = \lambda dx$，积分之得通解为

$$C[1 - F(x)] = e^{-\lambda x}\ (C\text{为任意常数}).$$

注意到初始条件 $F(0) = 0$，故 $C = 1$.

于是 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0,\ \lambda > 0$，故 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases} (\lambda > 0),$$

从而电子管在 T 小时内损坏的概率为

$$P\{X \le T\} = F(T) = 1 - e^{-\lambda T}.$$

100件产品中，90个一等品，10个二等品，随机取2个安装在一台设备上，若一台设备中有 i 个 $(i=0, 1, 2)$ 二等品，则此设备的使用寿命服从参数为 $\lambda=i+1$ 的指数分布. (1)有关设备寿命超过1的概率( ) ；(2)已知设备寿命超过1，求安装在设备上的两个零件都是一等品的概率( ).

0.33 ; 0.78

0.32 ; 0.78

0.66 ; 0.93

0.32 ; 0.93

(1)设 X 表示设备寿命. A 表示“设备寿命超过1”，B_i 表示“取出 i 个二等品” $(i=0, 1, 2)$，则 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\qquad (\lambda=i+1,\ i=0,\ 1,\ 2),$$

$$P(B_0)=\frac{C_{90}^2}{C_{100}^2},\qquad P(B_1)=\frac{C_{90}^1C_{10}^1}{C_{100}^2},\qquad P(B_2)=\frac{C_{10}^2}{C_{100}^2},$$

$$P(A|B_0)=\int_1^{+\infty}e^{-x}dx=e^{-1},$$

$$P(A|B_1)=\int_1^{+\infty}2e^{-2x}dx=e^{-2},$$

$$P(A|B_2)=\int_1^{+\infty}3e^{-3x}dx=e^{-3},$$

由全概率公式：$P(A)=\sum_{i=0}^{2}P(B_i)P(A|B_i)\approx 0.32.$

(2)由贝叶斯公式： $P(B_0|A)=\dfrac{P(B_0)P(A|B_0)}{P(A)}\approx 0.93.$

记数题

$$P\{X\ge 6\}=\ 3e^{-2}+1$$

$$P\{X\ge 3\}=\ -4e^{-3}$$

$$P\{6<X\le 9\}=\ 3e^{-2}-4e^{-3}$$

$$P\{6<X\le 9\}=\ 4e^{-3}$$

先求 X 的分布函数 $F(x)$. 显然，当 $x<0$ 时，$F(x)=0$，当 $x\ge 0$ 时有

$$F(x)=\int_0^x\frac{1}{9}te^{-\frac{t}{3}}dt=1-\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}$$

故 $F(x)=\begin{cases}1-\left(1+\dfrac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，所以

$$P\{X\ge 6\}=1-P\{X<6\}=1-P(X\le 6\}=1-F(6)=1-\left[1-\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{-\frac{x}{3}}\right]_{x=6}=3e^{-2},$$

$$P\{6<X\le 9\}=F(9)-F(6)=(1-4e^{-3})-(1-3e^{-2})=3e^{-2}-4e^{-3}.$$

设 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 $P(|X|\le 1)=(\ )$.

0.45

0.75

0.5

0.80

由连续随机变量的概率计算 $P\{a<X\le b\}=\int_a^b f(x)dx$ 得

$$P\{|X|\le 1\}=\int_{-1}^{1}\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\arctan x|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}=0.5.$$

已知 $X\sim f(x)=\begin{cases}12x^2-12x+3, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，计算 $P\{X\le 0.2|0.1<X\le 0.5\}\approx(\ )$.

0.323

0.578

0.732

0.359

根据条件概率;有

$$P\{X\le 0.2|0.1<X\le 0.5\}=\frac{P\{X\le 0.2,0.1<X\le 0.5\}}{P\{0.1<X\le 0.5\}}$$

$$=\frac{P\{0.1<X\le 0.2\}}{P\{0.1<X\le 0.5\}}=\frac{\int_{0.1}^{0.2}(12x^2-12x+2)dx}{\int_{0.1}^{0.5}(12x^2-12x+3)dx}$$

$$=\frac{(4x^3-6x^2+3x)|_{0.1}^{0.2}}{(4x^3-6x^2+3x)|_{0.1}^{0.5}}=\frac{0.148}{0.256}=0.578125\approx 0.578.$$

记数题

设ξ是连续型随机变量，则$P\{\xi=3\}=$（ ）.

$2F(a)-1$

0

$1-F(a)$

$F(a)$

连续随机变量X在定点值a的概率为$P\{X=a\}=0$.
因为随机变量X是连续的，所以其分布函数$F(x)$也连续，
即$P\{X=a\}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}P\{a-\Delta x<X\le a\}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}[F(a)-F(a-\Delta x)]=F(a)-F(a)=0$.

设随机变量ξ服从$N(1,0.2^2)$，且已知$\Phi(2.5)=0.9938$，$\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(1.5)=0.9332$，当$x>4$时，$\Phi(x)=1$，则$P\{|\xi|>1.5\}=$（ ）.

0

1

0.9938

0.0062

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，

所以 $U=\dfrac{\xi-1}{0.2}\sim N(0,1)$.

而 $P\{|\xi|>1.5\}=1-P\{|\xi|\le 1.5\}=1-P\{-1.5\le\xi\le 1.5\}$，

又 $P\{-1.5\le\xi\le 1.5\}=P\{\dfrac{-1.5-1}{0.2}\le\dfrac{\xi-1}{0.2}\le\dfrac{1.5-1}{0.2}\}=P\{-12.5\le U\le 2.5\}$，

而$P\{-12.5\le U\le 2.5\}=\Phi(2.5)-\Phi(-12.5)=\Phi(2.5)+\Phi(12.5)-1\approx\Phi(2.5)=0.9938$，

所以 $P\{|\xi|>1.5\}=1-P\{|\xi|\le 1.5\}=1-0.9938=0.0062$.

设$\xi \sim N(0.5, 0.25)$，且有$\Phi(2)=0.9772$，$\Phi(4)=1$，$\Phi(1)=0.8413$，则$P\{\xi<0 或 \xi>1\}=$（ ）.

0.3174

0.0228

0.0456

0.1587

若$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则$\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

所以 $U=\dfrac{\xi-0.5}{0.5} \sim N(0,1)$.

$P\{\xi<0 或 \xi>1\} = 1-P\{0 \le \xi \le 1\}$，

而$P\{0 \le \xi \le 1\}=P\{\dfrac{0-0.5}{0.5} \le \dfrac{\xi-0.5}{0.5} \le \dfrac{1-0.5}{0.5}\}=P\{-1 \le U \le 1\} = 2\Phi(1)-1$.

$P\{\xi<0 或 \xi>1\} = 2[1-\Phi(1)] = 0.3174$.

设测量误差$X \sim N(0, 10^2)$，先进行100次独立测量，则误差的绝对值超过19.6的次数不小于3的概率为( ).

0.59

0.92

0.87

0.66

先求任意误差的绝对值超过19.6的概率p,

$$p=P\{|X|>19.6\}=1-P\{|X| \le 19.6\}$$
$$=1-P\left\{\left|\frac{X}{10}\right| \le 1.96\right\}=1-[\Phi(1.96)-\Phi(-1.96)]$$
$$=1-[2\Phi(1.96)-1]=1-[2\times 0.975-1]=1-0.95=0.05.$$

设Y为100次测量中误差绝对值超过19.6的次数，则$Y \sim b(100, 0.05)$.

因为n很大，p很小，可用泊松分布近似，$np=5=\lambda$，所以

$$P\{Y \ge 3\} \approx 1-\frac{5^0e^{-5}}{0!}-\frac{5^1e^{-5}}{1!}-\frac{5^2e^{-5}}{2!} = 1-\frac{37}{2}2^{-5} \approx 0.87.$$

已知某台机器生产的螺栓长度 X(单位：厘米)服从参数 $\mu=10.05$, $\sigma=0.06$ 的正态分布．规定螺栓长度在10.05 ± 0.12内为合格品，则螺栓为合格品的概率为( ).

0.5587

0.6331

0.9544

0.3662

根据假设 $X\sim N(10.05,\ 0.06^2)$，记 $a=10.05-0.12,\ b=10.05+0.12$，则 $\{a\le X\le b\}$ 表示螺栓为合格品．于是，

$$P\{a\le X\le b\}=P\{a<X\le b\}=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi(2)-[1-\Phi(2)]\quad=2\Phi(2)-1=2\times 0.9772-1=0.9544,$$

即螺栓为合格品的概率等于0.9544.

某地区18岁女青年的血压(收缩压，以 $mm-HG$ 计)服从 $N(110,\ 12^2)$.
在该地区任选一18岁女青年，测量她的血压 X，则关于 $P\{X\le 105\}$,
$P\{100<X\le 120\}$，以及使 $P\{X>x\}\le 0.005$ 成立的最小的整数 x，
则下列说法正确的是( ).

（注：$\Phi(0.42)=0.6628$，$\Phi(0.833)=0.7975$，$\Phi(1.645)=0.95$）

$P\{X\le 105\}=0.3272$

$P\{X\le 105\}=0.3472$

$P\{100<X\le 120\}=0.595$

$x\ge 158.74$

已知血压 $X\sim N(110,\ 12^2)$.

(1) $P\{X\le 105\}=P\left\{\frac{X-110}{12}\le\frac{-5}{12}\right\}\approx 1-\Phi(0.42)\ =0.3372,$

$$P\{100<X\le 120\}=\Phi\left(\frac{120-110}{12}\right)-\Phi\left(\frac{100-110}{12}\right)$$
$$=\Phi(0.833)-\Phi(-0.833)=2\Phi(0.833)-1=0.595.$$

(2)使 $P\{X>x\}\le 0.05$，求 x，即 $1-P\{X\le x\}\le 0.05$，亦即 $\Phi\left(\frac{x-110}{12}\right)\ge 0.95$.

查表即 $\frac{x-100}{12}\ge 1.645$，从而 $x\ge 129.74$.

设随机变量 ξ 的分布函数为 $F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{arctg}x\ (-\infty<x<+\infty)$，则 $P\{0<\xi<1\}=$（ ）.

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}$

先求 $P\{\xi=1\}=F(1)-\lim\limits_{x\to1^-}F(x)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=0$，

故 $P\{0<\xi<1\}=P\{0<\xi\le1\}$.

又分布函数的概率计算 $P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$，可得

$P\{0<\xi<1\}=P\{0<\xi\le1\}=F(1)-F(0)=(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})-(\frac{1}{2}+0)=\frac{1}{4}$.

设随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 为连续函数，则 $Y=F(X)$ 所服从的分布为（ ）.

$U[0,1]$

$U[0,2]$

$N(0,2)$

$N(0,1)$

$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge1\end{cases}$. 即 $Y=F(x)$ 服从均匀分布 $U[0,1]$.

注：$0\le y<1$ 时，$y=F(x)$ 有反函数 $x=F^{-1}(y)$，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{F(X)\le y\}=P\{X\le F^{-1}(y)\}=F(F^{-1}(y))=y.$$

提示：$Y=F(X)$ 服从均匀分布 $U[0,1]$，这是一个重要结论.

设随机变量ζ服从$N(\mu,\sigma^2)$，$(\sigma>0)$分布，则2ζ的概率密度是( ).

$$f_{2\zeta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-2\mu)^2/(8\sigma^2)}$$

$$f_{2\zeta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)}e^{-(x-2\mu)^2/(8\sigma^2)}$$

$$f_{2\zeta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(2\sigma)}e^{-(x-2\mu)^2/(8\sigma^2)}$$

$$f_{2\zeta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma)}e^{-(x-2\mu)^2/(4\sigma^2)}$$

正态随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=aX+b$，则$Y\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$，即$Y=aX+b$的概率密度为

$f_Y(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)}e^{-[y-(a\mu+b)]^2/[2(a\sigma)^2]}$.

所以，2ξ在$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$下的概率密度为

$f_{2\xi}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(2\sigma)}e^{-(x-2\mu)^2/[2(2\sigma)^2]}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}(2\sigma)}e^{-(x-2\mu)^2/(8\sigma^2)}$.

下列四个二元函数能作为二维随机变量(X,Y)的分布函数的是( ).

$$F_4(x,y)=1+2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}$$

$$F_3(x,y)=\begin{cases}1, & x+2y\geq 1\\ 0, & x+2y<1\end{cases}$$

$$F_2(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y, & 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2},0\leq y\leq\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$F_1(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-x})(1-e^{-y}), & 0<x<+\infty,0<y<+\infty\\ 0, & 其它\end{cases}$$

只有满足二维随机变量(X,Y)的分布函数的4个性质的函数才能作为(X,Y)的分布函数．因为函数$F_2(x,y)$有$F_2(+\infty,+\infty)=0$，即$F_2(x,y)$不满足性质．对函数$F_3(x,y)$取4点：$(1,0),(0,1),(1,1),(0,0)$ ，有$F(1,1)-F(1,0)-F(0,1)+F(0,0)=1-1-1+0+-1<0$ ，即 $F_3(x,y)$不满足性质．函数$F_4(x,y)$有$F_4(-\infty,y)\neq 0$，即$F_4(x,y)$不满足性质

一项试验成功的概率为 $p(0<p<1)$，失败的概率为 $1-p$．独立重复该项试验，直至第三次成功为止．以 X 表示第一次成功之前失败的试验次数，Y 表示试验总次数，则 X 与 Y 的联合分布律 $P\{X=i,Y=j\}=(\ )$．

$$C_{j-i-1}^{1}p^{3}(1-p)^{j-3},\ i=1,2,\cdots,\ j=i+2,i+3,\cdots$$

$$C_{j-i-2}^{1}p^{3}(1-p)^{j-3},\ i=0,1,2,\cdots,\ j=i+2,i+3,\cdots$$

$$C_{j-1}^{2}p^{3}(1-p)^{j-3},\ j=2,3,\cdots$$

$$p^{3}(1-p)^{j-3},\ j=2,3,\cdots$$

依题意，根据伯努利定理，有

$$P\{X=i,Y=j\}=\left[(1-p)^{i}p\right]\cdot\left[C_{j-i-2}^{1}p(1-p)^{(j-i-2)-1}\right]p=C_{j-i-2}^{1}p^{3}(1-p)^{j-3},\ i=0,1,2,\cdots,\ j=i+2,i+3,\cdots.$$

x表示第一次成功前的失败次数，不是第一次成功为止的试验次数

设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}c(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2<R^2\\ 0, & x^2+y^2\geq R^2\end{cases},$$

则常数 $c=(\ )$.

$$\frac{3}{\pi R}$$

$$\frac{1}{\pi R^3}$$

$$\frac{3}{\pi R^3}$$

$$\frac{1}{\pi R}$$

因为

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dydx=\iint\limits_{x^2+y^2<R}c(R-\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}c(R-\rho)\rho d\rho d\theta=\frac{c\pi R^3}{3},$$

所以 $c=\dfrac{3}{\pi R^3}$.

设二维随机向量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-2ax}e^{by}, & x>0,y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases},$$

则a,b需要满足的条件是( ).

$$ab=-\frac{1}{2}，\ a>0,b<0$$

$$ab=\frac{1}{2}，\ a<0,b<0$$

$$ab=\frac{1}{2}，\ a>0,b>0$$

$$ab=-\frac{1}{2}，\ a<0,b>0$$

由$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$，有

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-2ax}e^{by}dxdy=(\int_0^{+\infty}e^{-2ax}dx)(\int_0^{+\infty}e^{by}dy)=1.$$

要使上式积分有意义，则必须$a>0,b<0$．此时，有

$$f_X(x)=\begin{cases} 2ae^{-2ax}, & x>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}，\quad f_Y(y)=\begin{cases} -be^{by}, & y>0 \\ 0, & 其它 \end{cases}.$$

所以只要$a>0,b<0$，且$-2ab=1$即$ab=-\frac{1}{2}$时，$f(x,y)$为概率密度．

设 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2\\ 0, & 其它\end{cases}$，则完全正确的选项有( )。

(1) $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & -R\le x\le R\\ 0, & 其它\end{cases}$；

(2) $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & -R\le y\le R\\ 0, & 其它\end{cases}$；

(3) $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}}, & |x|\le\sqrt{R^2-y^2}\\ 0, & 其它\end{cases}$；

(4) $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}}, & |y|\le\sqrt{R^2-x^2}\\ 0, & 其它\end{cases}$。

(5) X 与 Y 不独立。

3个

4个

5个

2个

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}(-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty)$，则条件概率密
$f_{Y|X}(y|x)=(\ )$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2+2xy}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-y^2+2xy}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-x)^2}$$

根据概率密度的性质可得

$$A=\frac{1}{\pi}.$$

而

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

故对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(y-x)^2},\quad -\infty<y<+\infty.$$

设二维随机变量 (ξ,η) 的联合概率密度为 $\varphi(x,y)=kxye^{-(x^2+y^2)}(x\geq 0,y\geq 0)$，则常数 $k=(\ )$.

4

3

6

2

根据联合概率密度的性质有

$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x,y)dxdy=1$，得 $\frac{k}{4}=1$，即 $k=4$.

注意：$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，$\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}$.

设ξ，η分别服从正态分布，那么(ξ,η) ( ).

是二维正态随机变量

是二维随机变量，但不可能是二维正态变量

是二维随机变量，但不一定是二维正态变量

不是二维随机变量

联合分布为正态分布时边缘分布一定为正态，反之则不然．反例为课本的例题，即

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}(1+\sin x\cdot\sin y).$$

设(X, Y)服从单位圆域$x^2+y^2\le 1$上的均匀分布，则X的边缘概率密度为 ( )..

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\boxed{f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 1, & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & -1\le x\le 1\\ 1, & \text{其它}\end{cases}$$

设连续型随机变量 (X, Y) 的两个分量 X 和 Y 相互独立，且服从同一分布，则 $P\{X \le Y\} = (\ )$.

$\frac{1}{2}$

0

1

$\frac{1}{3}$

方法一：因为 X, Y 独立，所以 $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

$$P\{X \le Y\} = \iint\limits_{x \le y} f(x, y) dxdy = \iint\limits_{x \le y} f_X(x) f_Y(y) dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [f_Y(y) \int_{-\infty}^{y} f_X(x) dx] dy = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_Y(y) F_Y(y)] dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_Y(y) dF_Y(y) = \frac{F^2(y)}{2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2},$$

方法二：利用对称性，因为 X, Y 独立同分布，所以有

$$P\{X \le Y\} = P\{Y \le X\},$$

而 $P\{X \le Y\} + P\{X \ge Y\} = 1$，故

$$P\{X \le Y\} = 1/2.$$

两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1), N(1,1)$， 则 ( ).

$$P\{X + Y \le 0\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X - Y \le 0\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X + Y \le 1\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{X - Y \le 1\} = \frac{1}{2}$$

因为 $X \sim N(0,1)$， $Y \sim N(1,1)$，且 X 与 Y 相互独立，所以

$$X + Y \sim N(1,2)，\ X - Y \sim N(-1,2)，$$

由正态分布性质知， $P\{X + Y \le 1) = \frac{1}{2}$ 成立.

若 X 和 Y 相互独立，他们分别服从参数为 λ_1, λ_2 的泊松分布，则 $Z=X+Y$ 服从参数为 ( ) 的泊松分布.

$\lambda_1+\lambda_2$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2$

$\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$

$\sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_2}$

$$P\{X=i\}=\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}\ (i=0,\ 1,\ \cdots)\text{；}\ P\{Y=j\}=\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^j}{j!}\ (j=0,\ 1,\ \cdots)$$

由离散型卷积公式得

$$P\{Z=r\}=\sum_{i=0}^{r}P\{X=i,\ Y=r-i\}=\sum_{i=0}^{r}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^i}{i!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{r-i}}{(r-i)!}$$

$$=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}\sum_{i=0}^{r}\frac{r!}{i!(r-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{r-i}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{r!}(\lambda_1+\lambda_2)^r,\ r=0,\ 1,\ \cdots$$

即 Z 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布.

设 X，Y 是相互独立的随机变量，它们都服从二项分布 $B(n,p)$，则随机变量 $Z=X+Y$ 服从 ( ).

$B(n,p^2)$

$B(n,p)$

$B(2n,p)$

$B(2n,p^2)$

根据伯努利概型，二项分布可以看作多个服从 $0-1$ 分布的独立随机变量之和，又 X,Y 独立，故 $Z=X+Y$ 可以看作

$2n$ 个服从 $0-1$ 分布的独立随机变量之和，

即服从二项分布 $B(2n,p)$.

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0, y>0 \\ 0, & 其它\end{cases},$$

则随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数为 ( ).

$$F_Z(Z)=\begin{cases}0, & z\le 0 \\ 1+e^{-z}-ze^{-z}, & z>0\end{cases}$$

$$F_Z(Z)=\begin{cases}0, & z\le 0 \\ 1+e^{-z}+ze^{-z}, & z>0\end{cases}$$

$$F_Z(Z)=\begin{cases}0, & z\le 0 \\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0\end{cases}$$

$$F_Z(Z)=\begin{cases}0, & z\le 0 \\ 1-e^{-z}+ze^{-z}, & z>0\end{cases}$$

按定义

$$F_Z(Z)=P\{x+2y\le z\},$$

当 $z\le 0$ 时，$F_Z(Z)=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{x+2y\le z} 0dxdy=0.$

当 $z>0$ 时，$F_Z(Z)=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy=\int_0^z dx\int_0^{(z-x)/2}2e^{-(x+2y)}dy$

$$=\int_0^z e^{-x}\cdot(1-e^{x-z})dx=\int_0^z(e^{-x}-e^{-z})dx$$

$$=[-e^{-x}]|_0^z-ze^{-z}=1-e^{-z}-ze^{-z},$$

故分布函数为 $F_Z(Z)=\begin{cases}0, & z\le 0 \\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0\end{cases}.$

设随机变量X与Y相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1,\ 0\le x\le 1\\ 0,\ \text{其它}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}Ae^{-y},\ y>0\\ 0,\quad y\le 0\end{cases},$$

则随机变量$Z=2X+Y$的概率密度函数为( ).

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ (1-e^{-z})/2, & 0\le z<2\\ (e^2-1)e^{-z}/2, & z\ge 2\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ (1-e^{-z})/2, & 0\le z<2\\ (e^2+1)e^{-z}/2, & z\ge 2\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ (1+e^{-z})/2, & 0\le z<2\\ (e^2+1)e^{-z}/2, & z\ge 2\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ (1+e^{-z})/2, & 0\le z<2\\ (e^2-1)e^{-z}/2, & z\ge 2\end{cases}$$

$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}A\cdot e^{-y}dy=A.$

因X与Y相互独立，故(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y},\ 0\le x\le 1,\ y>0\\ 0,\qquad \text{其它}\end{cases}.$$

于是当$z<0$时，有

$$F(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X+Y\le z\}=0;$$

当$0\le z\le 2$时，有

$$F(z)=P\{2X+Y\le z\}=\int_0^{z/2}dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=\int_0^{z/2}(1-e^{2x-z})dx;$$

当$z>2$时，有

$$F(z)=P\{2X+Y\le 2\}=\int_0^1 dx\int_0^{z-2x}e^{-y}dy=\int_0^1(1-e^{2x-z})dx.$$

利用分布函数法求得$Z=2X+Y$的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ (1-e^{-z})/2, & 0\le z<2.\\ (e^2-1)e^{-z}/2, & z\ge 2\end{cases}$$

设 (X, Y)的联合分布密度为

$$f(x, y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, Z=\sqrt{X^2+Y^2},$$

则 Z的分布密度为 ( ).

$$\boxed{f_Z(z)=\begin{cases} ze^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} z^2e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases} 1-e^{-\frac{z^2}{2}}, & z>0 \\ 0, & z\le 0 \end{cases}$$

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且同服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，则 $Z=|X-Y|$ 的密度函数为 ( ).

$$f_Z(z)=\begin{cases}1+2z, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

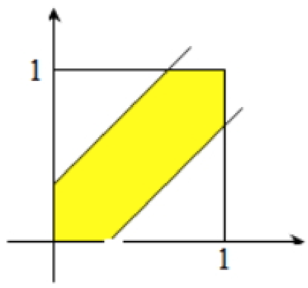
$$f_Z(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-2z, & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Z(z)=\begin{cases}2(1+z), & 0<z<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

先求 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P\{|X-Y|\le z\}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ P\{-z\le X-Y\le z\}, & 0<z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0, & z\le 0\\ 1-(1-z)^2, & 0<z<1\\ 1, & z\ge 1\end{cases},$$



于是 $Z=|X-Y|$ 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2(1-z), & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$.

下列命题中错误的是 ( ).

(X, Y) 服从二维正态分布，则 X, Y 均服从正态分布

(X, Y) 服从二维正态分布，则 $X+Y$ 不一定服从正态分布

X, Y 分别服从正态分布，且 X 与 Y 独立，则 $X+Y$ 均服从正态分布

X, Y 分别服从正态分布，则 $X+Y$ 不一定服从正态分布

n 随机变量的联合分布是正态分布，则这些随机变量的线性组合也是正态分布.

设随机变量X与Y相互独立，$X - U[-\pi,\pi]$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$Z=X+Y$的概率密度为( ).

$$\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right]$$

因为X,Y是相互独立的，故

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & -\pi\le x\le\pi,\ -\infty<y<+\infty\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

而 $$f(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy=\frac{1}{2\pi}\int_{z-\pi}^{z+\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$$

设随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立，若ξ_i是服从正态分布，即其概率密度为$\varphi_i(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_i^2}}\ (\sigma_i>0)$，$i=1,2,\cdots,n$，则$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$联合概率密度表达式是( ).

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right)e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^n}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma^2}}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_i}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

根据正态随机变量的性质，有

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n)=\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right)\right]\left[e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}\right].$$

设 $X_1 \sim N(1,2)$，$X_2 \sim N(0,3)$，$X_3 \sim N(2,1)$，且 X_1，X_2，X_3 独立，则 $P\{0 \le 2X_1 + 3X_2 - X_3 \le 6\} =$

0.3413

0.6826

0.6587

0.8413

由于正态随机变量的线性组合仍为正态随机变量，且

$Y = 2X_1 + 3X_2 - X_3 \sim N(2\mu_1 + 3\mu_2 - \mu_3, 4\sigma_1^2 + 9\sigma_2^2 + \sigma_3^2) = N(0,36)$，

而 $U = \dfrac{Y-0}{6} \sim N(0,1)$，

故 $P\{0 \le 2X_1 + 3X_2 - X_3 \le 6\} = P\{0 \le Y \le 6\}$

$= P\{\dfrac{0-0}{6} \le \dfrac{Y-0}{6} \le \dfrac{6-0}{6}\} = P\{0 \le U \le 1\} = \Phi(1) - \Phi(0)$，

查表得，$\Phi(1) - \Phi(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413$.

设随机变量 X，Y 相互独立，且 X，Y 的分布函数分别为 $F_X(x)$，$F_Y(y)$．令 $\xi = \min(X,Y)$，$\eta = \max\{X,Y\}$，则 (ξ,η) 的分布函数 $F(u,v) = (\ )$．

$(1-F_X(u))(1-F_Y(v))$

$1 - F_X(u)F_Y(v)$

$F_X(u)F_Y(v) + F_X(v)F_Y(u) + F_X(u)F_Y(u)$

$1-(1-F_X(u))(1-F_Y(v))$

$$
\begin{aligned}
F(u,v) &= P\{\min(X,Y) \le u,\ \max\{X,Y\} \le v\} = P\{\min(X,Y) \le u,\ X \le v,\ Y \le v\} \\
&= P\{X \le v,\ Y \le v\} - P\{u \le X \le v,\ u \le Y \le v\} \\
&= P\{X \le v\}P\{Y \le v\} - P\{u \le X \le v\}P\{u \le Y \le v\} \\
&= F_X(v)F_Y(v) - (F_X(v) - F_X(u))(F_Y(v) - F_Y(u)) \\
&= F_X(u)F_Y(v) + F_X(v)F_Y(u) + F_X(u)F_Y(u).
\end{aligned}
$$

设随机变量 X, Y 相互独立，若 X 与 Y 分别服从区间 $(0, 1)$ 与 $(0, 2)$ 上的均匀分布，则 $V=\min\{X, Y\}$ 的概率密度为（ ）.

$$f_V(v)=\begin{cases}\frac{3}{2}-v, & 0<v<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_V(v)=\begin{cases}\frac{3}{2}-v, & 0<v<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_V(v)=\begin{cases}\frac{1}{2}(3-v), & 0<v<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_V(v)=\begin{cases}\frac{1}{2}(3-v), & 0<v<1\\ 0, & 其它\end{cases}$$

由题设知，X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}1/2, & 0<y<2\\ 0, & 其它\end{cases},$$

于是，X 与 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y/2, & 0\le y<2,\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

从而 $V=\min\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_V(v)=1-[1-F_X(v)][1-F_Y)]=F_X(v)+F_Y(v)-F_X(v)F_Y(v)=\begin{cases}0, & v<0\\ \frac{v}{2}(3-v), & 0\le v<1,\\ 1, & v\ge 1\end{cases}$$

故 $V=\min\{X, Y\}$ 的概率密度为

$$f_V(v)=\begin{cases}\frac{3}{2}-v, & 0<v<1\\ 0, & 其它\end{cases}.$$