

1.6 미분방정식의 응용

1.6.1 자유진동 문제

일반적으로 실제의 역학계는 어떠한 형태로든 감쇠효과(damping effect)를 지니게 된다. 예를 들면 과속 방지턱을 지나는 자동차와 같이 구조물에 외부로부터 진동이 가해지는 경우(가진이라고도 불림)에 시간 경과에 따라 구조물의 진동이 감소되는데 이런 현상을 통칭하여 감쇠(damping)라 한다. 이 감쇠는 감쇠효과를 일으키는 요인의 종류에 따라 쿨롱감쇠, 점성감쇠 그리고 구조감쇠 등으로 나뉘어지는데 통상 점성 마찰을 통해 움직임에 저항하는 기계 장치인 대시포트로 감쇠를 표현하는 것이 일반적이다.

외력이 가해지는 구조물을 다음 그림과 같이 스프링(spring)과 댐퍼 역할을 하는 대시포트(dashpot) 그리고 질량(mass)이 부착된 모델로 생각해 보자. 이런 시스템을 스프링-대시포트-질량 시스템이라고 부른다.

여기서 질량 m , 대시포트의 감쇠계수(damping coefficient) c , 스프링의 복원계수(spring constant) k 는 모두 일정하다고 하고, 질량에 가해지는 구동력(driving force 또는 가진력 (exciting force))은 크기(amplitude) F 및 각진동수(angular frequency) w 를 갖는 것으로 한다. 또한 각진동수 w 는 진동수(frequency) f 및 주기(period) T 와 각각 $w = 2\pi f = 2\pi / T$, $f = w / 2\pi$ 관계를 갖는다. 스프링의 변위 $x(t)$ 는 시간 t 에서의 질량의 위치를 나타낸다. 스프링의 복원력의 크기는 스프링이 늘어난 거리에 비례하며, 대시포트의 감쇠력은 대시포트의 반응 속도에 비례한다.

이와 같은 모델은 지진을 받고 있는 고층 빌딩, 바람에 흔들리고 있는 다리 및 회전하고 있는 모터에 의해 작동되고 있는 기계 장치의 진동 등 복잡한 시스템의 진동 현상의 파악과 그 시스템의 안정성 해석을 통해 안정적인 시스템 설계를 위한 기본 모델로 알려져 있다.

이하에서는 m 과 k 가 양수라고 가정한다. c 는 댐핑을 나타내므로 $c = 0$ 이면 시스템의 진동이 시간에 따라 감쇠되지 않는 것을 나타내며, c 가 0보다 큰 경우는 진동이 감쇠되는 것을 의미한다. 또한 F 는 강제 함수의 진폭이므로 $F = 0$ 이면 시스템이 자유라고 하며

그렇지 않으면 시스템에 강제로 구동력이 가해지는 경우를 의미한다. 즉, c 와 F 의 크기에 따라 다음과 같이 4개의 진동으로 구분할 수 있다.

그림 29에서와 같이 평면 상에 스프링과 대시포트에 의해 연결된 질량의 운동시스템을 고려할 때 이 계의 진동문제에 대한 운동방정식으로 미분방정식은 다음과 같이 제차 미분방정식으로 나타내진다.

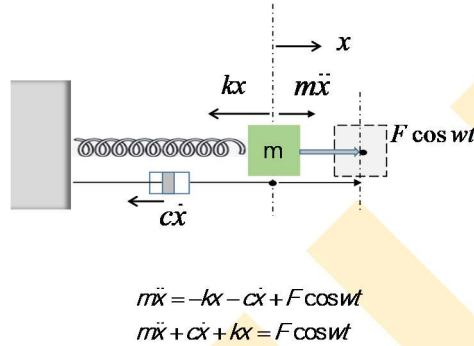


FIG. 1-29 스프링과 대시포트에 연결된 질량의 진동 문제

- $c = 0, F = 0$. 비감쇠(감쇠없는) 자유 진동 (Free, undamped vibrations)
- $c > 0, F = 0$. 자유 감쇠 진동 (Free, damped vibrations)
- $c = 0, F > 0$. 비감쇠 강제진동 (Forced, undamped vibrations)
- $c > 0, F > 0$. 강제 감쇠 진동 (Forced, damped vibrations)

$$m\ddot{x}(t) = -F_s(t) - F_d(t) = -kx(t) - c\dot{x}(t) \quad (i.e : m\ddot{x} = -kx - c\dot{x})$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1.148a)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

여기서 $F_s (= -kx)$ 와 $F_d (= -c\dot{x})$ 는 각각 변위 x 크기에 반비례하는 스프링 력(spring force)과 대시포트의 감소력(damping force)이다. $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 는 시스템에 감쇠가 없을 때의 자유진동에서의 진동수이며 고유진동수(natural frequency, [rad/sec]), 또는 비감쇠 고유진동수(undamped natural frequency)라고 불린다. 이 고유진동수는 시스템의 강성 k 에 비례하고 질량 m 에 반비례한다.

식 (1.148a)에서 시간 미분에 대해서 프라임 기호를 사용하였지만 편의상 많은 경우에 시간 미분은 도트 기호를 사용한다.

이 식과 식 (1-68)을 비교하면 $P = \frac{c}{m}$, $Q = w_0^2$ 이다. 따라서 이 진동문제에 대한 제차 미분방정식의 해는 식 (1-76), (1-77), (1-78a)로부터 다음과 같이 나타내진다.

$(\frac{c}{m})^2 > 4w_0^2$	$x = C_1 e^{\{-\frac{c}{2m} + \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - w_0^2}\}t} + C_2 e^{\{-\frac{c}{2m} - \sqrt{(\frac{c}{2m})^2 - w_0^2}\}t}$ (1.148b)
$(\frac{c}{m})^2 = 4w_0^2$	$x = e^{-\frac{c}{2m}t} (C_1 + C_2 t)$ (1.148c)
$(\frac{c}{m})^2 < 4w_0^2$	$x = e^{-\frac{c}{2m}t} [D_1 \cos\{\sqrt{w_0^2 - (\frac{c}{2m})^2}t + D_2 \sin\{\sqrt{w_0^2 - (\frac{c}{2m})^2}t]$ (1.148d)

이들 해를 시간 미분한 후에 초기조건으로 $x(t=0) = x_0$, $x'(t=0) = 0$ 을 적용하면 식 (1.148b)의 경우에는 C_1 , C_2 는 다음과 같이 구해진다. 이하에서 $b = \frac{c}{2m}$ 이라고 한다

$$b^2 > w_0^2 : x = C_1 e^{\{-b + \sqrt{b^2 - w_0^2}\}t} + C_2 e^{\{-b - \sqrt{b^2 - w_0^2}\}t}, \quad (b = \frac{c}{2m})$$

$$x' = C_1 \{-b + \sqrt{b^2 - w_0^2}\} e^{\{-b + \sqrt{b^2 - w_0^2}\}t} + C_2 \{-b - \sqrt{b^2 - w_0^2}\} e^{\{-b - \sqrt{b^2 - w_0^2}\}t} \quad (1.148e)$$

$$\begin{cases} X(t=0) = C_1 + C_2 = x_0 \\ X'(t=0) = C_1 \{-b + \sqrt{b^2 - w_0^2}\} + C_2 \{-b - \sqrt{b^2 - w_0^2}\} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore C_1 = \frac{\sqrt{b^2 - w_0^2} + b}{2\sqrt{b^2 - w_0^2}} x_0, \quad C_2 = \frac{\sqrt{b^2 - w_0^2} - b}{2\sqrt{b^2 - w_0^2}} x_0 \quad (1.148f)$$

따라서 식 (1.148b)는 다음과 같이 나타내진다

$$x = C_1 e^{\{-b + \sqrt{b^2 - w_0^2}\}t} + C_2 e^{\{-b - \sqrt{b^2 - w_0^2}\}t}$$

$$= x_0 \left[\frac{\sqrt{b^2 - w_0^2} + b}{2\sqrt{b^2 - w_0^2}} e^{\{-b + \sqrt{b^2 - w_0^2}\}t} + \frac{\sqrt{b^2 - w_0^2} - b}{2\sqrt{b^2 - w_0^2}} e^{\{-b - \sqrt{b^2 - w_0^2}\}t} \right] \quad (1.148g)$$

또한 식 (1.148c)의 경우에는 C_1 , C_2 는 다음과 같이 구해진다.

$$b^2 = w_0^2 : x = e^{-bt}(C_1 + C_2t), \quad (b = \frac{c}{2m})$$

$$x' = e^{-bt}(C_2 - bC_1 - bC_2t) \quad (1.148h)$$

$$\begin{cases} x(t=0) = C_1 = x_0 \\ x'(t=0) = C_2 - bC_1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore C_1 = x_0, \quad C_2 = bx_0 \quad 1-148i)$$

따라서 식 (1.148c)는 다음과 같이 나타내진다

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2t) = x_0e^{-bt}(1 + bt) \quad (1.148j)$$

또한 식 (1.148d)의 경우에는 C_1, C_2 는 다음과 같이 구해진다.

$$b^2 < w_0^2 : x = e^{-bt}[D_1 \cos\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t + D_2 \sin\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t], \quad (b = \frac{c}{2m}) \quad (1.148k)$$

이 식의 시간미분에

$$x' = -be^{-bt}[D_1 \cos\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t + D_2 \sin\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t] \\ + e^{-bt}[-D_1\sqrt{w_0^2 - b^2} \sin\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t + D_2\sqrt{w_0^2 - b^2} \cos\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t] \quad (1.148l)$$

초기조건을 적용하면

$$\begin{cases} x(t=0) = D_1 = x_0 \\ x'(t=0) = -bD_1 + D_2\sqrt{w_0^2 - b^2} = 0 \end{cases}$$

따라서

$$\therefore D_1 = x_0, \quad D_2 = \frac{bx_0}{\sqrt{w_0^2 - b^2}}$$

최종적으로 식 (1.148d)는 다음과 같이 나타내진다

$$x = e^{-bt} \left[D_1 \cos\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t + D_2 \sin\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t \right] \\ = x_0 e^{-bt} \left[\cos\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t + \frac{b}{\sqrt{w_0^2 - b^2}} \sin\{\sqrt{w_0^2 - b^2}\}t \right] \quad (1.148m)$$

이 식은 다시 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$x = x_0 e^{-bt} \sqrt{\frac{1}{1 - (\frac{b}{w_0})^2}} \cos\{\sqrt{w_0^2 - b^2} - \phi\}t, \quad \tan \phi = \left\{ \left(\frac{w_0}{b} \right)^2 - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (1.148n)$$

만일 $c=0$ 인 경우, 즉 비감쇠 자유진동의 경우를 생각하면 $b=c/2m=0$ 이므로 식 (1.148n)은 다음과 같이 나타내진다.

$$x = x_0 \cos\{\sqrt{w_0^2 - \phi}t\}, \quad \tan \phi = 0, \quad \phi = 0 \quad (1.148o)$$

그림 1-30 에 (a) $w_0 = 30, \frac{c}{2m} = 5$, (b) $w_0 = 30, \frac{c}{2m} = 30$, (c) $w_0 = 30, \frac{c}{2m} = 60$ 인 경우에 대해서 시간에 따른 진동 양상을 나타내었다.

(a)의 경우와 같이 시스템이 주기적으로 진동을 하면서 감쇠가 느리게 안정되어 가는 경우를 과소감쇠(underdamped, 저감쇠)라고 하고, (b)와 같이 감쇠가 빠르게 일어나서 진동이 안정되어가는 경우를 임계감쇠(critical damped)라고 하고, (c)와 같이 진동없이 감쇠가 서서히 일어나는 경우를 과도감쇠(overdamped, 과감쇠)이라고 부른다. 임계감쇠는 과소감쇠와 과도감쇠의 경계로 1.0 의 감쇠비를 가지며, 시스템이 진동 시작 직전의 상태로 복구되는 이상적인 감쇠이다.

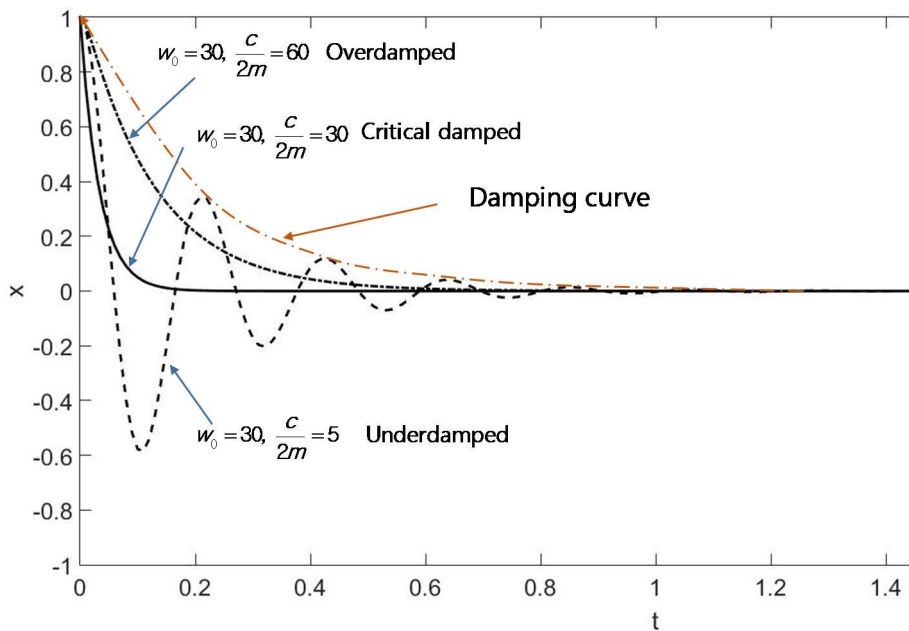


FIG. 1-30 감쇠계수 크기에 따른 진동양상

시스템의 감쇠비(damping ratio)는 임계 감쇠계수(c_{crit})에 대한 시스템의 감쇠계수(c)의 비율을 나타내는 값으로 $\zeta = \frac{c}{2w_0m}$ ($= \frac{c}{2\sqrt{km}}$) (제타라고 부름)으로 정의된다. 이 감쇠비를 이용하면 식 (1.148a)는 다음과 같이 나타내진다.

$$x'' + 2\zeta w_0 x' + w_0^2 x = 0 \quad (1.148p)$$

초기조건 $x(t=0) = x_0$, $x'(t=0) = 0$ 에 대한 이 식의 해는 식 (1.148b), (1.148c), (1.148d)으로부터 다음과 같이 나타내진다.

$$\zeta > 1 : x = C_1 e^{\{-\zeta w_0 + \sqrt{\zeta^2 - 1}\}t} + C_2 e^{\{-\zeta w_0 - \sqrt{\zeta^2 - 1}\}t} \quad (1.148q)$$

$$\zeta = 1 : x = e^{-\zeta w_0 t} (C_1 + C_2 t) \quad (1.148r)$$

$$0 < \zeta < 1 : x = e^{-\zeta w_0 t} \{D_1 \cos w_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t + D_2 \sin w_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t\} \quad (1.148s)$$

여기서

$$w_D = w_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (1.148t)$$

w_D 를 감쇠 고유진동수(damped natural frequency)라고 한다.

대부분의 기계 구조물은 과소감쇠이며, 일반적으로 아래 표와 같이 0.1 이하의 감쇠비를 갖는다.

시스템	감쇠비
금속	$\ll 0.01$
알루미늄	~ 0.0004
조인트를 갖는 금속 구조물	0.03~0.07
속업서버 (shock absorber)	~ 0.3
고무	~ 0.05
철근콘크리트	0.04~0.07

1.6.2 강제진동 문제

그림에서와 같이 스프링과 대시포트에 의해 연결된 시스템에 주기적인 외력(구동력)이 $F \cos \omega t$ 의 조화진동(harmonic motion) 형태로 가해질 때의 계의 진동문제에 대한 미분방정식은 비제차 미분방정식으로 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} mx'' + cx' + kx &= F \cos \omega t \\ x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x &= \frac{F}{m} \cos \omega t = f \cos \omega t \quad (f = \frac{F}{m}) \end{aligned} \quad (1.149a)$$

이 비제차 미분방정식에 대한 일반해는 제차 미분방정식 (1.148a)에 대한 해 $x_h(t)$ 와 특수해 $x_p(t)$ 의 합으로 나타내진다. 즉,

$$x = x_h(t) + x_p(t) \quad (1.149b)$$

$x_h(t)$ 는 자유 감쇠 진동에 대한 해로 식 (1.148b), (1.148c), (1.148d) 중의 하나의 형태로 주어진다.

한편 위의 그림에서 알 수 있듯이 대시포트의 감쇠계수 c 가 무시할 정도로 작지 않은 경우에 시간이 무한으로 가면 위에서 나타난 제차 미분방정식의 해 $x_h(t)$ 가 영으로 접근하고 있음을 알 수 있다. 실용적으로는 비제차 미분방정식의 해인 과도상태 해(transient-state solution)는 시간이 무한으로 커지면 정상상태 해(steady-state solution)로 접근한다. 과도상태의 해는 과도 응답(transient response), 정상상태의 해는 정상상태 응답(steady-state response)이라고도 한다.

따라서 일반적으로 진동문제에서 구하려는 해는 강제진동 하에서 어느 정도의 시간이 경과한 후에는 안정한 정상상태의 진동이되므로 비제차 미분방정식의 특수해 $x_p(t)$ 의 특성을 주로 검토한다.

식 (1.149a)에 대한 특수해의 형태를 다음과 같이 가정하고

$$\left. \begin{aligned} x_p &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\ x_p' &= -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \\ x_p'' &= -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (1.149c)$$

이 식을 식 (1.149a)에 대입하여 미정계수법을 사용하여 A , B 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 F \cos \omega t &= m x_p'' + c x_p' + k x_p \\
 &= m[-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t] + c[-A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t] \\
 &\quad + k[A \cos \omega t + B \sin \omega t] \\
 &= [(k - m\omega^2)A + \omega c B] \cos \omega t + [-\omega c A + (k - m\omega^2)B] \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{1.149d}$$

따라서 좌변과 우변을 일치시키면

$$\begin{cases} (k - m\omega^2)A + \omega c B = F \\ -\omega c A + (k - m\omega^2)B = 0 \end{cases} \tag{1.149e}$$

이 식을 풀면 A, B가 구해진다.

$$A = F \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}, \quad B = F \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + c^2 \omega^2}$$

여기서 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} (> 0)$ 으로 놓으면 $k = m\omega_0^2$ 에서 위 식은 다음과 같이 표현된다.

$$A = F \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2}, \quad B = F \frac{c\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2} \tag{1.149f}$$

따라서 식 (1.149c)의 $x_p(t)$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned}
 x_p &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\
 &= F \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2} \cos \omega t + F \frac{c\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + c^2 \omega^2} \sin \omega t
 \end{aligned} \tag{1.149g}$$

여기서 $c \neq 0$, $\omega_0 \neq \omega$ 를 가정한다.

한편 식 (1.149c)의 특수해 $x_p(t)$ 는 다시 다음과 같이 나타낼 수 있고

$$\begin{aligned}
 x_p &= A \cos \omega t + B \sin \omega t = D \cos(\omega t - \phi) \\
 D &= \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \phi = \frac{B}{A}, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)
 \end{aligned} \tag{1.149h}$$

여기서 D 는 $x_p(t)$ 의 진폭(magnitude), ϕ 는 위상각(phase angle), ω 는 각진동수(angular frequency)라고 부른다. 진동반응은 항상 가해진 구동력보다 늦게 측정되기 때문에 ϕ 는 자주 위상지연(phase lag)라고도 불린다.

따라서 식 (1.149g)를 식 (1.149h)에 대입하면

$$\left. \begin{aligned}
 D(w) &= \frac{F}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{F}{\sqrt{m^2(w_0^2 - w^2)^2 + c^2 w^2}} \quad (or = \frac{F}{\sqrt{(k - mw^2)^2 + c^2 w^2}}) \\
 \tan \phi &= \frac{B}{A} = \frac{cw}{m(w_0^2 - w^2)} \\
 or \\
 D(w) &= \frac{F/(w_0 m)}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right\}^2 + \left\{2\zeta\left(\frac{w}{w_0}\right)\right\}^2}} \quad (\because \zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}, w = \sqrt{\frac{k}{m}})
 \end{aligned} \right\} \quad (1.149i)$$

만일 $D(w)$ 가 최대값을 갖는다고 하면 그 위치 w_{\max} 와 크기 $D(w_{\max})$ 는 다음과 같이 구할 수 있다. 즉,

$$\frac{dD(w)}{dw} = 0 \rightarrow F \left(-\frac{1}{2} R^{-3/2} \right) [2m^2(w_0^2 - w^2)(-2w) + 2c^2 w] = 0 \quad (1.149j)$$

여기서 $R = m^2(w_0^2 - w^2)^2 + c^2 w^2$ 이다. 따라서 대괄호 안의 값이 영이어야 하므로 $[2m^2(w_0^2 - w^2)(-2w) + 2c^2 w] = 0$ 로 부터

$$\begin{aligned}
 c^2 &= 2m^2(w_0^2 - w^2), \quad (w_0^2 = \frac{k}{m}) \\
 2m^2 w^2 &= 2m^2 w_0^2 - c^2 = 2mk - c^2
 \end{aligned} \quad (1.149k)$$

이 식에서 $c^2 > 2mk$ 인 경우는 w 는 실근을 갖지 않는다. 이 경우에 $D(w)$ 는 w 가 증가할수록 단조롭게 감소한다.

한편 감쇠계수 c 가 작아서 $c^2 < 2mk$ 인 경우는 w 는 실근 $w = w_{\max}$ 을 갖는다. 즉

$$w_{\max}^2 = w_0^2 - \frac{c^2}{2m^2} \quad (1.149l)$$

이 식으로부터 w_{\max} 은 c 가 작아질수록 커지며, c 가 영으로 접근하면 w_0 에 접근한다. 따라서 $D(w_{\max})$ 의 크기는 식 (1.149i)에서 $w^2 = w_{\max}^2$ 로 하면 구해진다. 식 (1.149l)을 적용하면 최종적으로 다음 값이 얻어진다.

$$D(w_{\max}) = \frac{2mF}{c\sqrt{4m^2 w_0^2 - c^2}} \quad (1.149m)$$

이 식으로부터 분모는 감쇠계수 c 가 영으로 갈 때 단조적으로 감소하여 영으로 접근하므로 최대 진폭은 무한대로 커지게 된다.

다음 그림 1-31 에 식 (1.149i)를 이용하여 $m=1$, $k=1$ ($w_0=1$) 인 경우에 감쇠계수 c 의 변화에 따른 구동진동수(가진주파수) w 와 응답증폭 (response amplification) $\frac{D(w)}{F}$ (=입력과 출력의 진폭의 비) 의 선도를 나타내었다. 식 (1.148t)의 감쇠 고유진동수는 감쇠비의 크기에 별로 영향을 받지 않지만 식 (1.149i)의 응답진폭은 감쇠비에 크게 의존하고 있음을 알 수 있다.

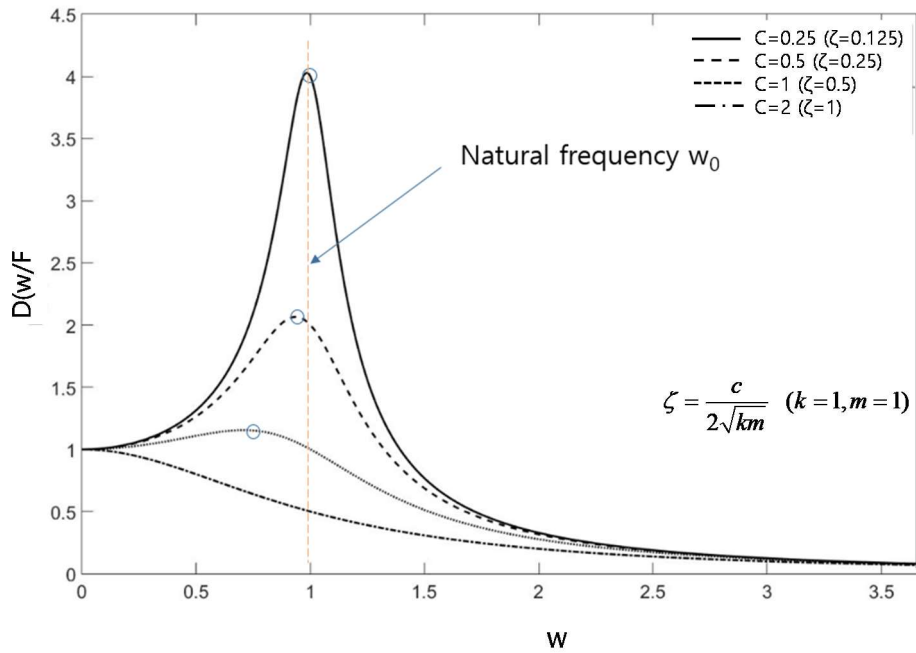


FIG. 1-31 감쇠계수 크기에 따른 구동진동수와 응답진폭의 선도

또한 아래 그림 1-32 에 $k=3.0, 7.5, 15.0, 30.0, 60.0$ 에 대해서 구동진동수 w 에 대한 고유진동수 w_0 ($=k/m$)의 관계를 나타내었다.

그림으로부터 시스템의 고유진동수와 구동진동수가 일치할 경우에 공진이 발생하고 있음을 알 수 있고, 진동은 시스템의 감쇠계수의 크기에 크게 의존하며 감쇠계수가 커질수록 응답증폭이 작아진다는 것을 알 수 있다. 또한 감쇠계수가 작을 때라도 구동진동수가 매우 크면 응답증폭이 작아진다는 것을 알 수 있다.

주파수 응답(frequency response)이란 시스템에 주기적인 외력(입력, 가진하중)이 조화진동 형태로 가해질 때 정상상태에서의 시스템의 주파수 응답(동특성)을 말하고, 이 정상상태에서의 출력 진폭과 위상을 파악하여 시스템에 가장 큰 영향을 미치는 주파수를 찾고 시스템의 안정성을 분석하는 것을 목적으로 한다. 즉, 위에서 기술한 것과 같이 입력 각 주파수에 따른 입출력 진폭비 ($\frac{D(w)}{F}$) 및 위상 ϕ 의 변화를 조사하는 것을 주파수 응답 해석(frequency response analysis 또는 harmonic analysis)이라고 부른다. 주파수 응답 해석을 수행할 때는 x,y,z 3 개의 직교 방향으로 나누어 해석을 수행하여 각각의 방향별 결과를 분석한다.

[참고: <https://www.youtube.com/watch?v=spckXtLaCz0>, www.midasit.com
기술자료 및 EN/IEC 60068-2-6 시험방법]

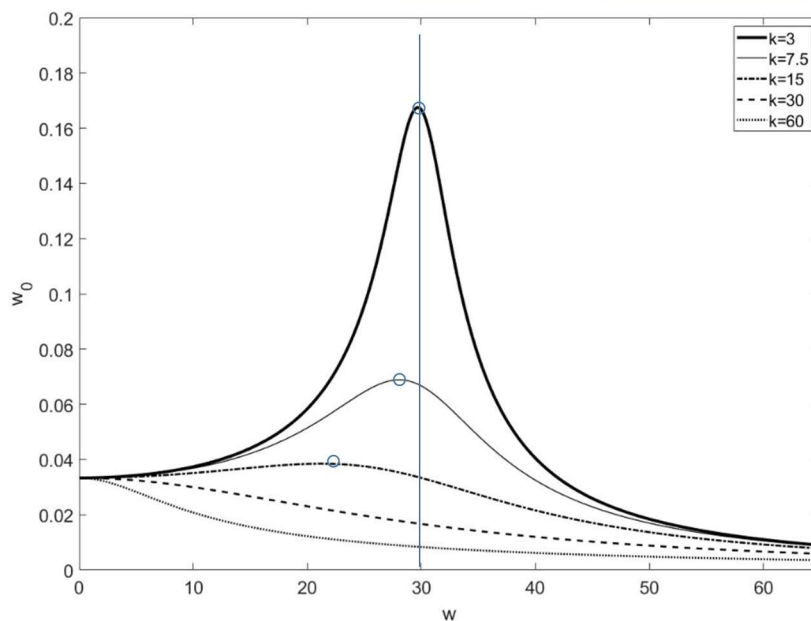


FIG. 1-32 스프링 강성 크기에 따른 구동진동수와 고유진동수의 관계

한편 시스템의 고유진동수와 진동반응을 설명하기 위해 시스템의 동적거동을 파악하는 것을 모달해석(modal analysis 또는 natural frequency analysis)라고 부른다.

또한 시간에 따라 변하는 외력에 대한 시스템의 반응을 조사하는 것을 과도응답해석(transient response analysis 또는 time history analysis)라고 부른다.

x 축에 각 주파수의 대수값(logarithmic scale), $\log_{10} w$, 을 나타내고, 오른쪽 y 축에 진폭비의 대수값의 데시벨 값, $10\log_{10} \frac{D(w)}{F}$ [dB], 왼쪽 y 축에는 위상값, $\phi [^\circ]$, 을 나타낸 선도를 주파수 응답선도(frequency response diagram)라고 한다. 한편 오른쪽 y 의 진폭비의 대수값을 취하고 20 배를 하여($20\log_{10} \frac{D(w)}{F}$ [dB]) 나타낸 선도를 보드 선도(Bode diagram) 이라고 한다.(그림 1-33) 이 보드 선도는 시스템의 주파수 응답 특성을 그리는 표준형식 중의 하나이다.

식 (1.149a)의 우변은 코사인 함수 이지만 복소지수 형태로 나타내는 것이 대수적으로 편리하다. 즉 우변을 Fe^{iwt} 로 두면 다음 식으로 나타내진다.

$$mx'' + cx' + kx = Fe^{iwt} \{= F(\cos wt + i\sin wt)\} \quad (1.149n)$$

위에서 다룬 스프링, 대시포트 그리고 질량으로 이루어진 모델에서 대시포트의 감쇠계수 c 가 매우 작아서 그 영향을 무시할 수 있는 경우에는 $c=0$ 로 볼 수 있다.

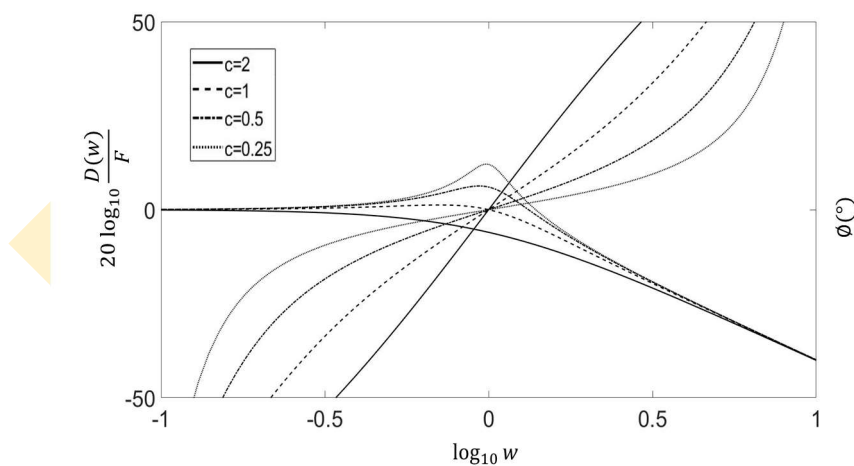


FIG. 1-33 보드선도

이 경우를 감쇠없는 강제진동이라고 하고 식 (1.149g)와 (1.149h)로부터 우변 두 번째 항은 영이 되므로 특수해 x_p 는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned}
 x_p &= A \cos \omega t + B \sin \omega t \\
 &= \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t = \frac{F}{k[1 - (\omega/\omega_0)^2]} \cos \omega t, \quad (\omega_0^2 = \frac{k}{m})
 \end{aligned} \quad (1.149o)$$

일반적인 구조물 또는 구동하고 기계시스템에서 $\omega^2 \neq \omega_0^2$ 이다. 즉 외부 구동력의 진동수 ω 는 시스템의 고유진동수 $\omega_0 (= \sqrt{\frac{k}{m}})$ 와 다르다.

따라서 이 비감쇠 경우($b = \frac{c}{2m} = 0$)의 $m\ddot{x} + kx = F \cos \omega t$ 에 대한 일반해는 자유진동에 대한 해 식 (1.148k)의 x_h 과 강제진동에 대한 특수해 식 (1.149o)의 x_p 로 부터 다음 식으로 나타내진다.

$$\begin{aligned}
 x &= x_h + x_p = D_1 \cos \omega_0 t + D_2 \sin \omega_0 t + \frac{F}{k[1 - (\omega/\omega_0)^2]} \cos \omega t \\
 &= D \cos(\omega_0 t - \phi) + \frac{F}{k[1 - (\omega/\omega_0)^2]} \cos \omega t
 \end{aligned} \quad (1.149p)$$

이 식은 두 개의 조화진동의 중첩(superposition)을 나타낸다는 것을 알 수 있다. 식 (1.149o)에서 x_p 의 최대 크기는 $\cos \omega t = 1$ 인 경우이다. 따라서

$$x_p = \frac{F}{k[1 - (\omega/\omega_0)^2]} = \frac{F}{k} \rho, \quad \rho = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2} \quad (1.149q)$$

이 값은 ω 와 ω_0 에 의존하고 $\omega = \omega_0$ 일 때 x_p 와 ρ 는 무한대가 된다. 이렇게 주기적으로 부가되는 외부 진동수와 시스템의 고유 진동수가 같아지면 시스템에 매우 큰 진동과 소음이 야기되어 시스템이 불안정해지고 궁극적으로는 시스템이 파괴되는데 이것을 공진(resonance 또는 공명)이라고 부른다. 이 때의 진동수를 공진 진동수(resonance frequency 또는 공진값)라고 한다. ρ 는 공진인자(resonance factor)라고 부른다.

따라서 일반적으로 시스템의 공진현상을 피하기 위하여 시스템의 고유진동수와 외부 진동수가 일치하지 않도록 설계해야 한다. 이렇게 시스템의 공진을 제어하기 위해서는 (i) 시스템의 질량 또는 강성을 변화시켜 고유진동수를 변경하는 방법(고유진동수를 통상 외부진동수 대비 1/3 이하로 낮게 하거나 혹은 3 배 이상 크게 함), 또는 (ii) 댐퍼나 속업서버와 같은 감쇠가 큰 것을 부가하여 고유진동수는 변화시키지 않으면서 최대

진폭을 감소시키는 방법 그리고 (iii) 부가적인 질량-탄성계(부진동계)를 부가하는 방법 등이 널리 사용된다.

예로 노면의 물기에 의한 자동차 슬립방지를 위해 만들어진 타이어의 트레이드(tread, 돌기패턴)은 트레이드와 도로가 접촉 시에 발생하는 진동수가 자동차 부품의 고유진동수와 일치하는 하지 않도록 불규칙한 패턴으로 되어 있다.

통상 주기적인 현상이 단위시간 동안 몇 번 일어났는지를 나타내는 진동수와 주파수는 거의 같은 의미로 사용되지만 주파수는 주로 전자기학에서 사용한다. 물리학에서는 진동수 대신에 각진동수(angular frequency), 전자기학에서는 주파수 대신에 각주파수를 사용하는 경우도 있다. 진동수의 단위로는 헤르츠 (Hz)를 사용하며 rpm 과 rad/s 를 사용하는 경우도 있다. 1 Hz 는 1 초에 1 번 주기적인 현상이 일어나는 것을 말한다.

이 공진현상이 발생할 때의 미분방정식은 다음 식으로 나타내진다.

$$x'' + w_0^2 x = F \cos w_0 t \quad (1.149r)$$

공진에 대한 이 미분방정식의 특수해는 $x_p = t(a \cos w_0 t + b \sin w_0 t)$ 형태를 가질 수 있고

이를 원 미분방정식에 대입하면 $a=0$, $b = \frac{F_0}{2mw_0}$ 가 된다. 따라서 x_p 는 최종적으로 다음 식으로 나타내진다.

$$x_p = \frac{F_0}{2mw_0} t \sin w_0 t \quad (1.149s)$$

이 식으로 알 수 있듯이 시스템의 변위가 시간이 증가할수록 점점 커진다는 것을 알 수 있다. 실용적으로 시스템의 감쇄가 매우 적으면 시스템이 큰 진동을 받아 궁극적으로는 파괴될 수 있다는 것을 의미한다.

그림 1-34 는 1940 년에 세계에서 3 번째로 길었던 미국 워싱턴 주의 타코마 현수교(길이 1100ft+2800ft+1100ft, 폭 60ft)의 고유진동수가 강풍의 회전(vortex) 진동수와 같아서 다리가 심하게 흔들려 공진현상으로 인한 재앙적인 파괴 사례를 나타낸 것이다. 소프라노가 고음을 내면 소프라노의 발성을 통한 진동이 유리잔의 고유 진동수 영역에 도달해 진동이 커지면서 유리잔이 깨져버리는 것 역시 공진파괴 현상이다.

이 공진현상을 실 생활에 응용한 예로는 라디오, TV 주파수를 맞추는 것이나 MRI 촬영 시에 인체의 대부분을 차지하는 물을 공진시켜 우리 몸 내부의 질병 여부를 파악하는 경우 등이 있다.

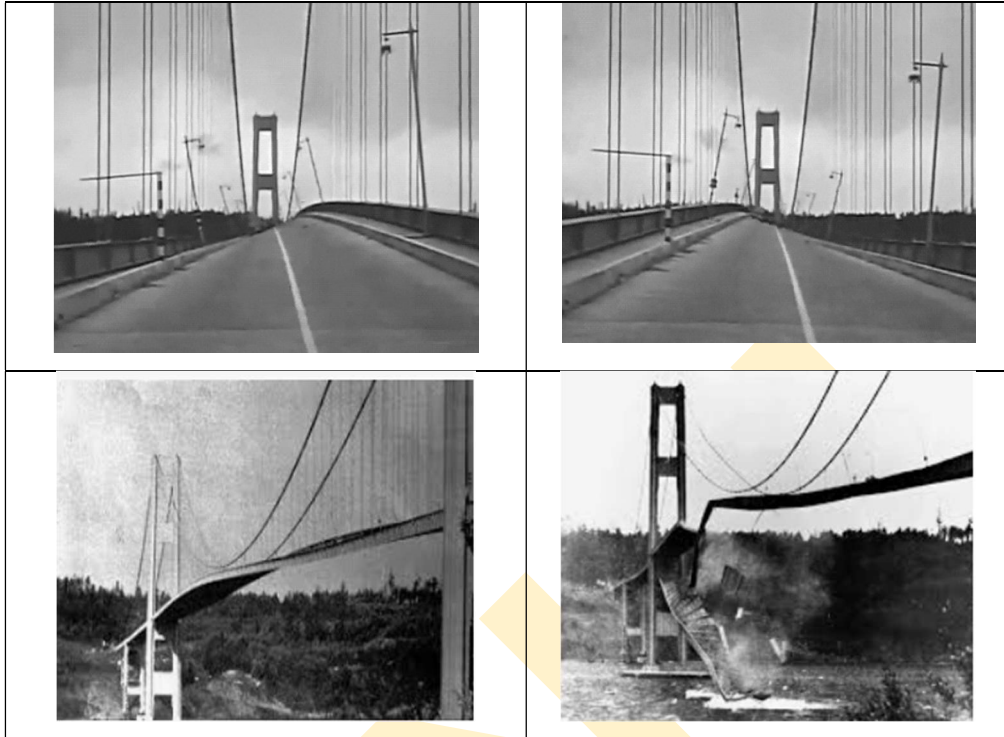


FIG. 1-34 미국 워싱턴 주의 타코마 다리의 공진 파괴 예

한편 식 (1.149p)의 진동을 시간에 대한 함수로 도식해 보면 외부 진동수가 시스템의 고유진동수에 매우 근접할 때는 고유진동수 근처에서 진폭이 커졌다 작아졌다 하는 맥놀이 현상 (beating)이 발생한다.(그림 1-35) 이렇게 두 개의 비슷한 주기의 진동이 합성되어 발생하는 맥놀이 현상으로 소리의 크기가 주기적으로 변하는 현상을 울림 현상이라고 한다. 경주에 있는 통일신라 시대의 성덕대왕 신종을 타종한 후 9 초 주기로 [에밀레~ 에밀레~] 라고 소리가 커지고 다시 작아지는 현상이나 풍력발전기 주위의 [부웅~ 부웅~] 하는 소리가 대표적인 예이다. 참고로 선덕대왕 신종 소리의 주성분의 기본 진동수는 64Hz 이나 64.06Hz 와 64.38Hz 에서 맥놀이 현상이 발생한다.

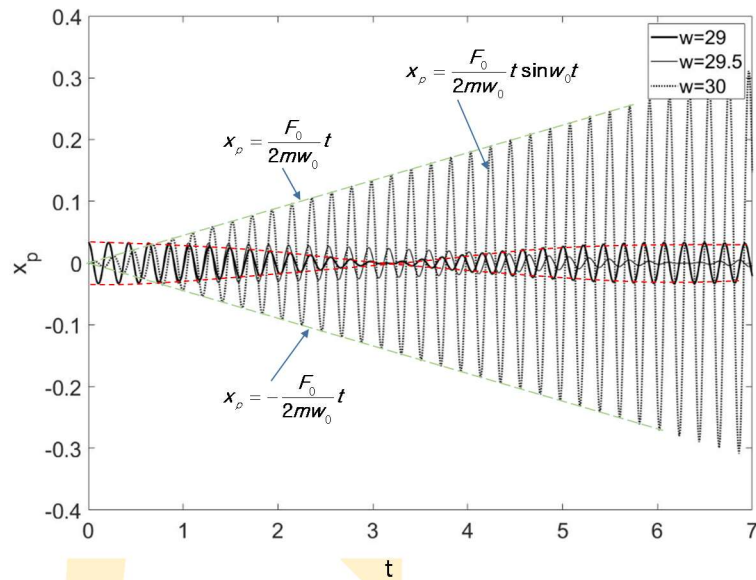
예제 1-35 다음 미분방정식의 일반해를 구하라.

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

[해] 특성방정식은 $m^2 - 5m + 6 = 0$ 이고, $m_1 = 2$, $m_2 = 3$ (두 개의 실근)이므로 일반해는 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ 이다.

예제 1-36 초기조건, $y(x=0) = 4$, $y'(x=0) = -2$, 을 만족하는 다음의 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'' + 2y' + y = 0$$



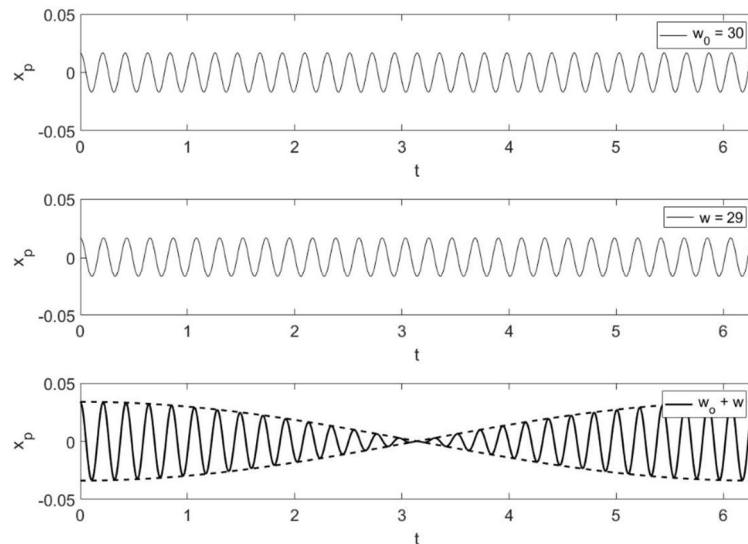


FIG. 1-35 비슷한 주기의 두 진동의 합성에 의한 맥놀이 현상

[해] 특성방정식은 $m^2 + 2m + 1 = 0$ 이고, $m_1 = -1 = m_2$ (중근)이므로 일반해는 $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$ 이다. 여기에 초기조건을 적용해보면

$$y = e^x(C_1 + C_2 \cdot x);$$

$$y(x=0) = 4 = e^0(C_1 + C_2 \cdot 0) \quad \therefore C_1 = 4$$

$$y'(x=0) = -2 = e^0 C_2 \quad \therefore C_2 = -2$$

따라서 이 미분방정식의 해는 $y = e^{-x}(4 - 2x)$ 이다.

예제 1-37 다음 미분방정식의 일반해를 구하라.

$$y'' - 4y' + 7y = 0$$

[해] 특성방정식은 $m^2 - 4m + 7 = 0$ 이고, $m_1 = 2 + \sqrt{3}i$, $m_2 = 2 - \sqrt{3}i$, (두 개의 허근)이므로 일반해는 $y = e^{2x}(D_1 \cos \sqrt{3}x + D_2 \sin \sqrt{3}x)$ 이다.

위에서 논한 2 계 상수 계수 선형 미분방정식의 해를 구하는 방법은 n 계 상수 계수 선형 미분방정식에도 그대로 적용할 수 있다.

예제 1-38 다음 미분방정식의 일반해를 구하라.

$$y^{(5)} - 2y^{(4)} + y^{(3)} - 2y^{(2)} = 0, \quad y^{(2)} = y'', \dots$$

[해] 특성방정식은 $m^5 - 2m^4 + m^3 - 2m^2 = 0$, $m^2(m^2 + 1)(m - 2) = 0$ 이다. 이 특성방정식은 $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = i$, $m_4 = -i$, $m_5 = 2$ 의 근을 갖는다. 따라서 이 미분방정식의 해는 다음과 같다.

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x + C_5 e^{2x}$$

예제 1-39 10lb 의 질량에 의해 스프링이 2in(=1/6 ft) 만큼 밑으로 신장되었다. 질량을 2in 만큼 더 신장시켰다가 놓았을 때 질량이 초기 속도 1ft/s 로 상승 운동을 한다. 임의 시간 후에 질량의 위치를 나타내고 주기와 진폭 그리고 위상을 구하라. 단 스프링 상수는 $k=60\text{lb/ft}$, 질량은 $m=0.3125 \text{ lb}\cdot\text{s}^2/\text{ft}$ 이다.

[해]

$$y'' + \frac{k}{m} y = y'' + \frac{60}{0.3125} y = y'' + 192 y = 0$$

$$y = e^{mt}$$

$$(m^2 + 192)e^{mt} = (m + \sqrt{192}i)(m - \sqrt{192}i)e^{mt} = (m + 8\sqrt{3}i)(m - 8\sqrt{3}i)e^{mt} = 0 \quad : Eq.(1-78)$$

$$m_1 = 8\sqrt{3}i, \quad m_2 = -8\sqrt{3}i$$

$$\begin{cases} y = D_1 \cos(8\sqrt{3}t) + D_2 \sin(8\sqrt{3}t) \\ y' = -8\sqrt{3}D_1 \sin(8\sqrt{3}t) + 8\sqrt{3}D_2 \cos(8\sqrt{3}t) \end{cases}$$

$$\text{Initial condition: } \begin{cases} y(t=0) = \frac{1}{6} = D_1 \\ y'(t=0) = -1 = 8\sqrt{3}D_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{6} \cos(8\sqrt{3}t) - \frac{1}{8\sqrt{3}} \sin(8\sqrt{3}t) \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{8\sqrt{3}}\right)^2} \left[\frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{8\sqrt{3}}\right)^2}} \cos(8\sqrt{3}t) - \frac{\frac{1}{8\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{8\sqrt{3}}\right)^2}} \sin(8\sqrt{3}t) \right] \\
 &= 0.1816 [\cos \phi \cos(8\sqrt{3}t) - \sin \phi \sin(8\sqrt{3}t)] \\
 &= 0.1816 \cos(8\sqrt{3}t + 0.4084), \quad (\because \phi = \tan^{-1}(\frac{1}{8\sqrt{3}}) / (\frac{1}{6}) = 23.41^\circ = 0.4084 \text{ rad}) : Eq.(1-80) \\
 \\
 w_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{192} \cong 13.856 \text{ rad/s}, \quad T = \frac{2\pi}{w_0} \cong 0.45345 \text{ s}
 \end{aligned}$$

그림 1-36 에 이 스프링의 진동 모드를 나타내었다.

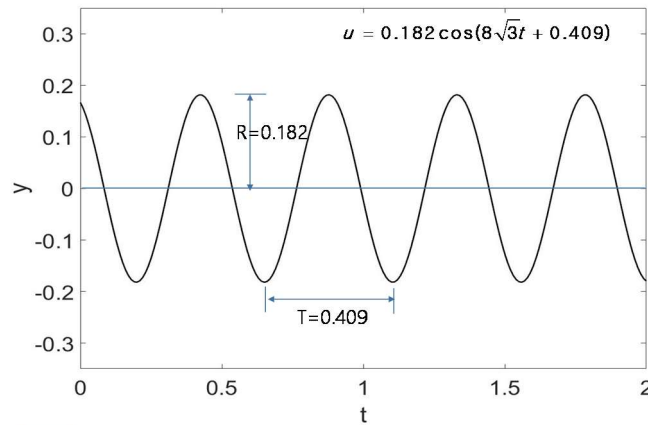


FIG. 1-36 스프링의 진동

예제 1-40 그림 1-37 에 나타낸 스프링-질량 시스템의 운동방정식을 구하고 다음 각 경우에 대해서 물체의 운동을 나타내어라. (a) 물체는 초기에 $x_0 (= 0)$ 위치에서 정지상태에 있고 초기 속도를 v_0 라고 한다. (b) 물체는 초기에 $x_0 (= 0.05)$ 위치에서 정지상태에 있고 초기 속도를 $v_0 (= 0)$ 라고 한다.

[해] 스프링에 연결된 물체의 운동방정식은 다음과 같다.

$$x'' + w_0^2 x = F \sin wt \quad (= 10 \sin 10t)$$

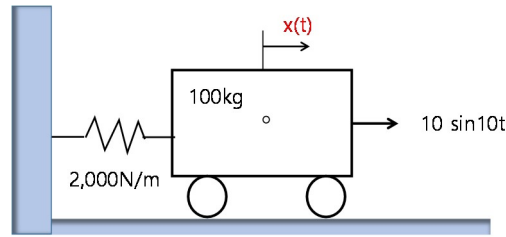


Fig. 1-37 스프링-질량 시스템

이 미분방정식에 대한 일반해는 식 (1.149p)로 부터

$$x = x_h + x_p = D_1 \cos w_0 t + D_2 \sin w_0 t + \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \sin wt \quad (1.149t)$$

여기서는 외력이 \sin 함수로 주어졌기 때문에 특수해가 \sin 함수로 나타난다.

(a) 식 (1.149t)에 초기 조건을 적용하면, $x(t=0) = x_0 (=0)$ 로부터 $D_1 = 0$,

$$x'(t=0) = v_0 \text{ 로부터 } D_2 = \frac{v_0}{w_0} - \frac{w}{w_0} \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \text{ 가 얻어진다.}$$

따라서 위 식은 다음과 같이 된다.

$$x(t) = \left\{ \frac{v_0}{w_0} - \frac{w}{w_0} \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \right\} \sin w_0 t + \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \sin wt \quad (1.149u)$$

여기에 $k=2000\text{N/m}$, $m=100\text{kg}$, $w=10\text{rad/s}$, $v_0=0$, $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2000}{100}} = \sqrt{20}\text{rad/s}$ 를 대입하면

$$\begin{aligned} x(t) &= \left\{ 0 - \frac{10}{\sqrt{20}} \frac{10}{100(\sqrt{20}^2 - 10^2)} \right\} \sin \sqrt{20}t + \frac{10}{100(\sqrt{20}^2 - 10^2)} \sin \sqrt{20}t \\ &= 0.002795 \sin 4.472t - 0.00125 \sin 10t \end{aligned}$$

(b) 식 (1.149t)에 초기 조건을 적용하면, $x(t=0) = x_0 (=0.05)$ 로부터 $D_1 = x_0 = 0.05$,

$x'(t=0) = 0$ 로부터 다음과 같이 된다.

$$x(t) = \left\{ \frac{v_0}{w_0} - \frac{w}{w_0} \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \right\} \sin w_0 t + x_0 \cos w_0 t + \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \sin wt \quad (1.149v)$$

따라서

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \left\{ 0 - \frac{10}{\sqrt{20}} \frac{10}{100(\sqrt{20}^2 - 10^2)} \right\} \sin \sqrt{20}t + 0.05 \cos \sqrt{20}t + \frac{10}{100(\sqrt{20}^2 - 10^2)} \sin \sqrt{20}t \\
 &= 0.002795 \sin 4.472t + 0.05 \cos 4.472t - 0.00125 \sin 10t
 \end{aligned}$$

예제 1-41 $m = 10\text{kg}$, $k = 1000\text{N/m}$ 인 스프링-질량 시스템에 $F \cos wt$ ($F = 1000\text{N}$, $w = 8.162\text{rad/s}$) 인 구동력이 작용할 때 이 시스템에 대한 운동방정식을 나타내고 물체의 운동을 나타내어라. 단, 물체 운동의 초기 조건은 $x_0 = 0.01\text{m}$, $v_0 = 0.01\text{m/s}$ 이다.

[해] 식 (1.149t)에 초기 조건을 적용하면 $x(t=0) = x_0$ 로부터 $D_1 = x_0 - \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)}$,
 $x'(t=0) = v_0$ 로부터 $D_2 = \frac{v_0}{w_0}$ 가 얻어진다. 따라서 식 (1.149t)는 다음과 같이 나타내진다.

$$x = \left(x_0 - \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \right) \cos w_0 t + \frac{v_0}{w_0} \sin w_0 t + \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \sin wt \quad (1.149w)$$

여기서 $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10}} = 10\text{rad/s}$ 이다. 식 (1.149w)는 구체적으로

$$x = \left(0.01 - \frac{100}{10(10^2 - 8.162^2)} \right) \cos 10t + \frac{0.01}{10} \sin 10t + \frac{0.01}{10} \sin 8.162t$$

이 식에 의한 물체의 운동을 그림 1-38 에 나타내었다.

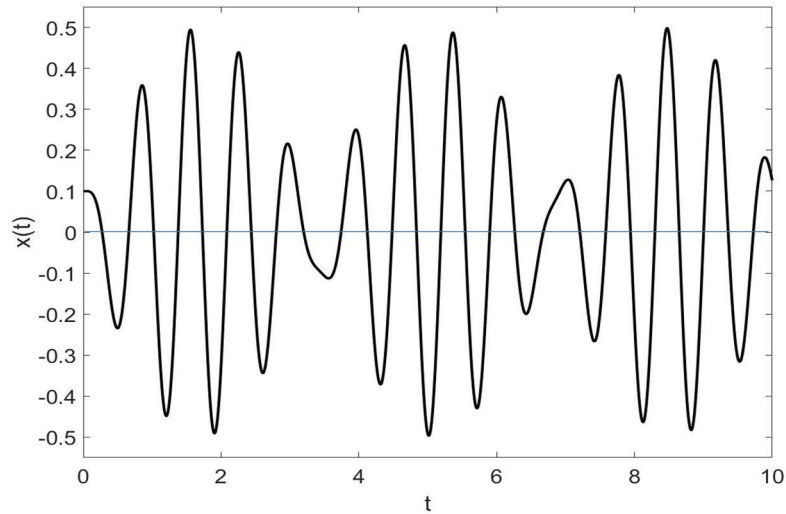


Fig. 1-38 스프링-질량 시스템의 운동

1.6.3 로봇 매니퓰레이터 운동학

로봇(robot)은 사람을 대신하여 다양한 산업현장에서 사용되고 있다. 예를 들면 자동차 조립공장에서 용접(welding)이나 반도체 산업현장에서 실리콘 웨이퍼(silicon wafer)를 빠르게 이송하는 일 등에 다양한 로봇들이 효율적으로 사용되고 있다. 산업용 로봇의 주요 부품 중에서 로봇 팔(robot arm)은 인간의 팔과 같이 유사한 동작을 구현할 수 있도록 설계되어 있어 매니퓰레이터(manipulator, 또는 탐색기(rover)) 라고 불리며, 대부분 3 개의 관절(joint)과 링크(link) 구조를 가지고 있다. 이와 같은 로봇을 3-관절 로봇이라고 부른다.

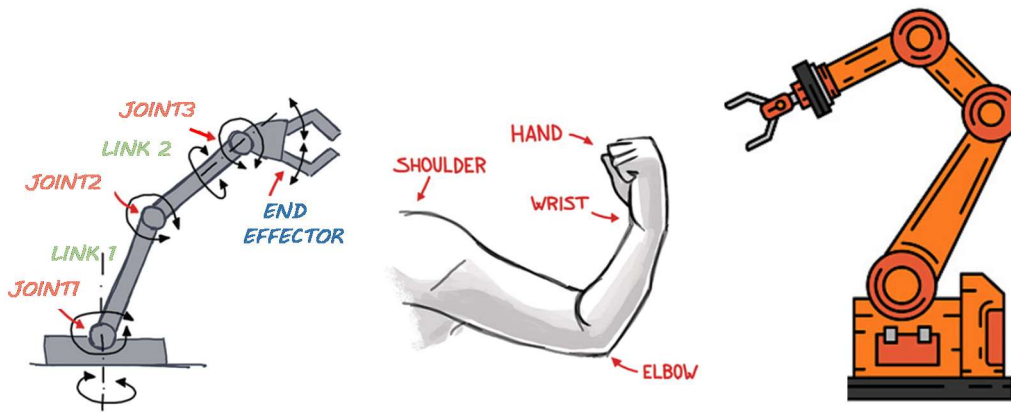


Fig. 1-40(a) 3-관절 로봇 팔의 구성과 각부 명칭 3 관절 로봇 팔의 운동

여기서는 미분방정식을 이용하여 로봇 팔의 끝에 달려있는 말단장치(end effector 라고 부름, 로봇의 손에 해당)의 운동(궤적)을 어떻게 설정할 수 있는지를 설명한다. 문제를 간단히 하기 위하여 그림 1-40(a)와 같이 3-관절 로봇 팔이 x, y 평면 내에서만 운동하는 것을 한다. 즉, 평면 매니퓰레이터를 고려한다.

여기서 매니퓰레이터의 손의 위치 (x, y) 및 자세각 α 그리고 관절각도 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 의 기하학적인 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.(그림 1-40(b))

$$x = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (1.150a)$$

$$y = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \quad (1.150b)$$

$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \quad (1.150c)$$

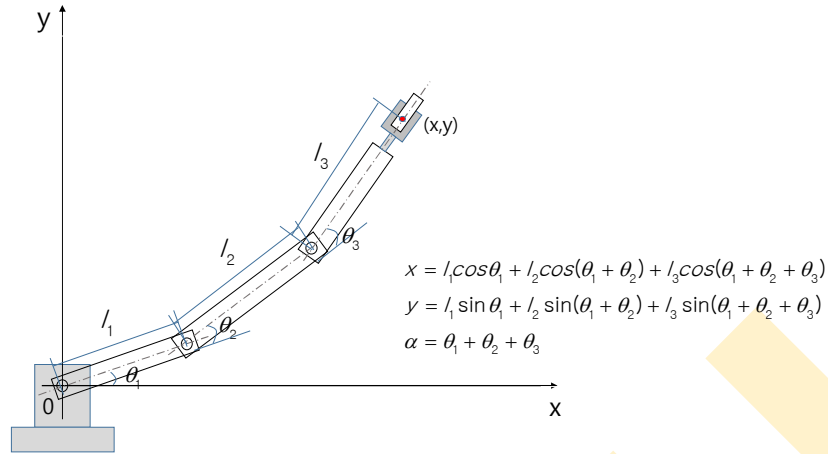


Fig. 1-40(b) 3 관절 로봇 팔의 운동

로봇의 운동을 다루는 로봇 운동학(robot dynamics)에서는 매니퓰레이터의 관절각도 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 을 관절좌표(Joint coordinate)라고 표현하기도 한다. 이렇게 시시각각 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 가 주어졌을 때 손끝 위치좌표 (x, y) 를 구해가는 것을 정방향 운동학(forward kinematics 또는 정 운동학) 라고 한다. 손끝의 위치좌표 (x, y) 의 집합을 Cartesian space, 관절의 관절좌표 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 를 Joint space 라고 부른다.

이 3 절점 평면 매니퓰레이터에서 관절각도의 속도와 손끝 직교좌표(Cartesian coordinate)의 미분관계를 구하면

$$\begin{cases} \dot{x} = -l_1\dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) - l_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \dot{y} = l_1\dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_3(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ \dot{\alpha} = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \end{cases} \quad (1.151)$$

이 식을 행렬로 표시하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_3 S_{123} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_3 C_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{Bmatrix} \\ &= J(\theta) \{\dot{\theta}\} \end{aligned} \quad (1.152a)$$

여기서

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -l_1 S_1 - l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_2 S_{12} - l_3 S_{123} & -l_3 S_{123} \\ l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_2 C_{12} + l_3 C_{123} & l_3 C_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.152b)$$

J 는 야코비안 행렬(Jacobian matrix)로서 서로 다른 변수 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 와 $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)$ 를 연결시켜 주는 관계이다. 또한

$$\begin{aligned} S_1 &= \sin \theta_1, \quad S_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad S_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ C_1 &= \cos \theta_1, \quad C_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2), \quad C_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned} \quad (1.153)$$

한편 야코비안 행렬의 역행렬이 존재한다면 로봇 팔의 각 링크들의 관절각도를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{\dot{P}\} = J(\theta)\{\dot{\theta}\} \rightarrow \{\dot{\theta}\} = J(\theta)^{-1}\{\dot{P}\} \quad (1.154)$$

이 관계로부터 만일 평면 상에서 로봇 팔의 손끝 위치좌표가 A 위치에서 B 위치까지 어떤 경로(path)를 따라 움직이기 위해서 각 관절들이 시시각각 어떤 대응하는 각도값을 가져야 하는 지를 알 수 있다. 이렇게 손끝 위치좌표 (x, y) 가 주어졌을 때 관절좌표 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 를 구하는 것을 역방향 운동학(backward kinematics, 또는 역 운동학) 라고 한다.(그림 1-41(a))

실제 로봇 팔의 각 관절의 움직임(각도)은 서보 모터에 장착된 증분 엔코더(incremental encoder)의 작동에 의해 제어된다.(그림 1-41(b))

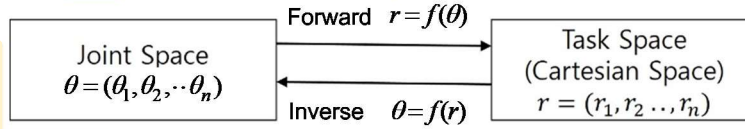


Fig. 1-41(b) 로봇 팔의 정 운동학과 역 운동학의 개념

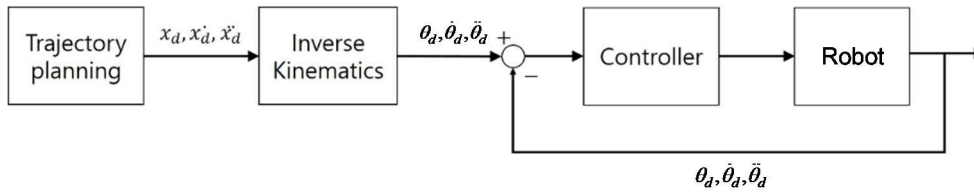


Fig. 1-41(b) 로봇 팔의 경로계획(trajecory planning)과 운동제어

그런데 일반적으로 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{\alpha})$ 와 $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3)$ 의 관계 식 (1.154)는 비선형이므로 최적화 알고리즘을 도입한 수치해석법에 의해 풀어야 한다. 실제 계산에서는 로봇 팔의 손끝 위치좌표가 움직이는 연속적인 궤적 경로를 미소 선분으로 분해하고 $\Delta t (= t_{n+1} - t_n)$ 시간에 로봇 팔의 손끝 위치좌표의 미소 위치 변화량에 대해서 관절각도의 변화를 구해서 로봇 팔 각각의 링크 위치를 결정해주는 과정을 반복한다. 로봇 팔 손끝의 이동 거리를 매우 작게 설정해주지 않으면 식 (1.154)에서 정밀한 해가 얻어지지 않기 때문에 주의하여야 한다.

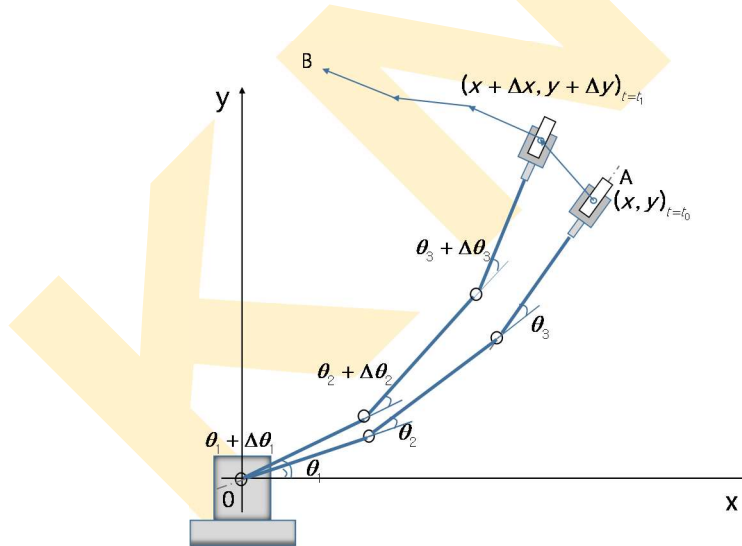


Fig. 1-42 로봇 팔과 끝점의 이동 궤적

이와 같은 과정을 로봇의 분해운동속도제어(resolved motion rate control, RMRC)라고 부르고 이 과정을 통해 2 차원 카테산 공간(Cartesian space)에서 로봇 팔의

궤적(trajjectory)을 분석할 수 있다. 이 과정을 경로계획(trajjectory planning)이라고 한다.

그림 1-43 에 로봇 팔의 손끝이 수평(AB), 경사(BC), 수직(CD) 경로를 따라서 운동하는 경우에 각 관절각도의 변화에 따른 각 링크의 움직임을 나타낸 것이다. 그림에서는 대표적인 위치에서의 관절의 위치변화를 나타내었다.

위에서는 직교 좌표상에서 관절의 기하학적인 위치를 바로 계산하였지만 이 방법으로는 3 차원 공간 상에서 운동하는 로봇 팔의 끝점 위치를 추적하는 것은 쉽지 않다. 따라서 로봇 팔의 회전과 평행이동을 다음 그림에서와 같이 순차적으로 벡터로 표현하는 벡터 해석 방법이 일반적으로 사용된다. 즉, 그림 1-44 에 나타난 것 같이 링크 l_3 가 θ_3 만큼 회전한 후에 링크 거리 l_2 만큼 x-축 방향으로 평행이동하고 이 두 링크가 함께 θ_2 만큼 회전한 후에 다시 링크 거리 l_1 만큼 평행이동하고 이 세 링크가 함께 θ_1 만큼 회전하면 원래의 로봇 팔의 끝점 위치가 얻어진다.

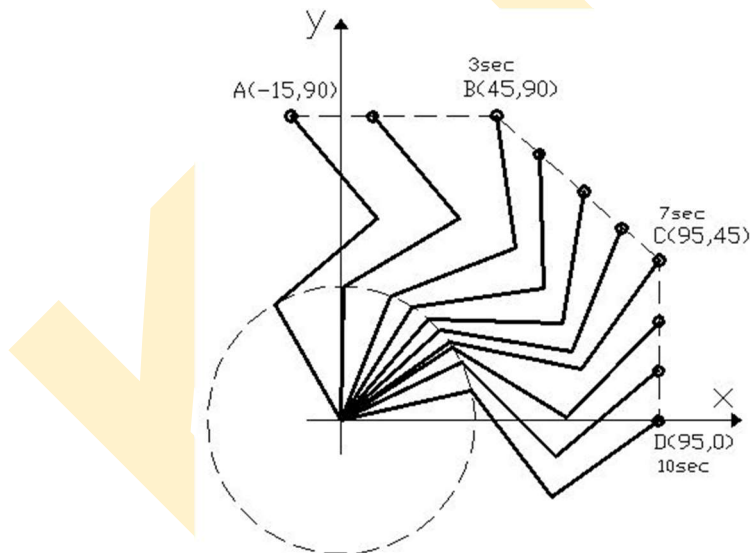


Fig. 1-43 로봇 팔의 손끝의 이동에 따른 각 관절의 위치변화

이 과정을 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 P &= Rot(\theta_1)[l_1 + Rot(\theta_2)\{l_2 + Rot(\theta_3)l_3\}] \\
 &= Rot(\theta_1)l_1 + Rot(\theta_1)Rot(\theta_2)l_2 + Rot(\theta_1)Rot(\theta_2)Rot(\theta_3)l_3 \\
 &= Rot(\theta_1)l_1 + Rot(\theta_1 + \theta_2)l_2 + Rot(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)l_3
 \end{aligned} \tag{1.155}$$

이 식은 다음과 같이 행렬로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 - S_1 \\ S_1 \quad C_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} - S_{12} \\ S_{12} \quad C_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{123} - S_{123} \\ S_{123} \quad C_{123} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} l_1 C_1 + l_2 C_{12} + l_3 C_{123} \\ l_1 S_1 + l_2 S_{12} + l_3 S_{123} \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.156}$$

이 식을 성분 별로 나타내면 식 (1.150a), 식 (1.150b)와 같다는 것을 알 수 있다.

식 (1.155)에서는 로봇 팔의 끝점 위치를 추적하는데 벡터 해석 방법을 사용하였다. 이 경우에 로봇 팔의 평행이동과 회전을 행렬의 더하기와 곱을 이용하여 표현하였다.

참고로 컴퓨터 그래픽에서는 3 차원 공간 좌표 상에서 물체의 회전, 평행이동, 투영, 축소확대 등의 일련의 기하변환(geometric transformation) 과정을 행렬의 연속적인 곱만으로 통일적으로 나타내기 위하여 동차 좌표(homogeneous coordinate)를 사용한다.

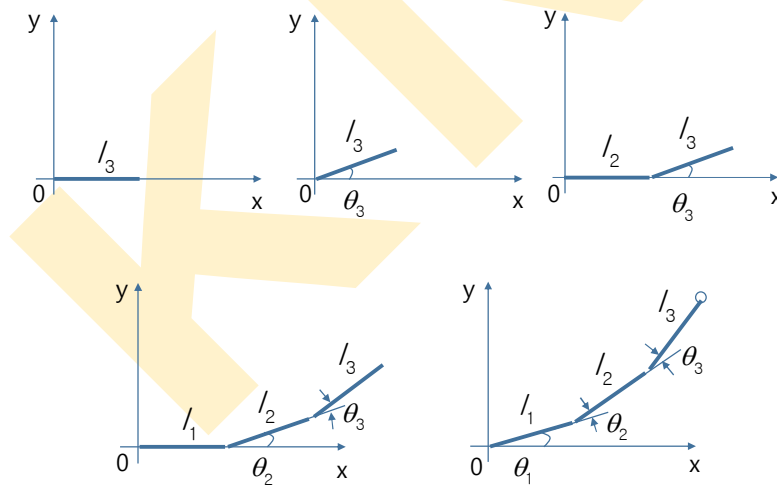


Fig. 1-44 3 차원 공간에서 물체의 기하변환 과정

동차 좌표란 기존의 데카르트 좌표에 또 하나의 좌표를 사용하여 나타내는 것을 말한다. 예를 들면 데카르트 좌표에서 2 차원 좌표 (x, y) 는 동차 좌표 (wx, yw, w) 로 나타내는 것이다. 또한 3 차원 좌표 (x, y, z) 는 동차 좌표 (wx, wy, wz, w) 로 나타낸다. 여기서 $w > 0$ 인 임의 값을 사용하는데 편의 상 $w=1$ 을 사용한다.

물체를 위치 $P(x, y)$ 에서 $(\Delta x, \Delta y)$ 만큼 평행이동시켜 위치 $P'(x', y')$ 로 하였을 때 동차 좌표를 사용한 변환 행렬(transformation matrix) T 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.157)$$

또한 2 차원 데카르트 좌표계에서 위치 $P(x, y)$ 에 있는 물체를 원점을 기준으로 반시계 방향으로 θ_1 만큼 회전시켜 위치 $P'(x', y')$ 로 하였을 때 동차 좌표를 사용한 변환 행렬 R 은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.158a)$$

$$R = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (= R_z)$$

물체를 위치 $P(x, y)$ 에서 원점을 기준으로 반시계 방향으로 θ_1 만큼 회전시켜 위치 $P'(x', y')$ 로 하고 이것을 다시 $(\Delta x, \Delta y)$ 만큼 평행이동시켜 위치 $P''(x'', y'')$ 로 하였을 때 동차 좌표를 사용한 변환 행렬은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.158b)$$

따라서 최종 위치는 물체의 위치 $P(x, y)$ 에 회전 변환 행렬 R 과 평행이동 변환 행렬 T 를 순서대로 곱하면 구해진다. 즉,

$$\begin{Bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{Bmatrix} = R T \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & \Delta x \\ S_1 & C_1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.158c)$$

이 동차 좌표를 로봇 팔의 끝점 위치를 추적하는데 적용해보자. 문제를 간단히 하기 위해서 식 (1.155)의 우변 마지막 항 $\{l_2 + Rot(\theta_3)l_3\}$ 만을 다루는 것으로 한다. 이 항을 데카르트 좌표로 표시하면

$$l_2 + Rot(\theta_3)l_3 = \begin{Bmatrix} l_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 \\ S_3 & C_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_2 + C_3 l_3 \\ 0 + S_3 l_3 \end{Bmatrix} \quad (1.159)$$

이 식을 동차 좌표로 표시하면 앞에서 설명한 것과 같이 회전변환 행렬 R_3 과 평행이동 행렬 T_2 을 순차적으로 곱하여 나타내진다.

$$T_2 R_3 \begin{Bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 \\ S_3 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_3 l_3 \\ S_3 l_3 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_3 l_3 + l_2 \\ S_3 l_3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.160)$$

데카르트 좌표에서 구한 행렬 (1.159)의 성분과 동차 좌표에서 구한 행렬 (1.160)의 성분이 같다는 것을 확인 할 수 있다.

마찬가지로 동차 좌표를 사용하여 전체 변환 행렬을 나타내면 다음과 같다.

$$P = Rot(\theta_1)[l_1 + Rot(\theta_2)\{l_2 + Rot(\theta_3)l_3\}]$$

$$P = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix} = R_1 T_1 R_2 T_2 R_3 \begin{Bmatrix} l_3 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (1.161)$$

식 (1.158a)는 z 축을 중심으로 반시계 방향으로 θ_1 만큼 회전시킨 동차 좌표 변환 행렬을 나타낸다.

x 축, y 축을 중심으로 한 회전변환 행렬은 다음과 같이 나타내진다.

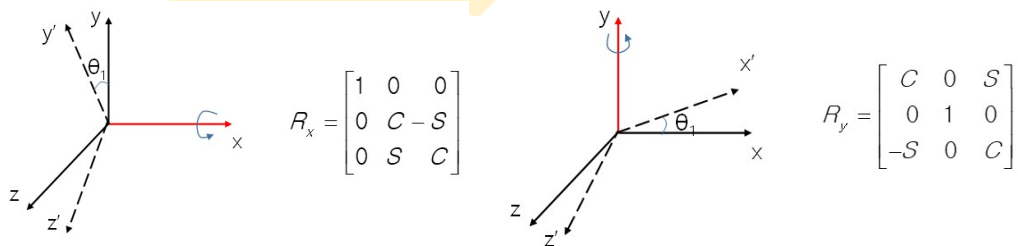


Fig. 1-45 x 축, y 축으로 회전 변환행렬

식 (1.158) ~ 식 (1.161)에서는 위치 P 를 열 행렬(column matrix)로 나타내었다. 그런데 위치 P 를 행 행렬(row matrix)로 나타내면 변환 행렬의 정의가 다음과 같이 전치 형태로 나타내진다는 것에 주의하여야 한다. 즉 $A = BC$, $A^T = C^T B^T$ 관계로부터

$$(x' \ y' \ 1) = (x \ y \ 1) \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (x \ y \ 1) \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.162)$$

$$R = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (= R_z)$$

이렇게 동차 좌표를 사용하면 본 예제에서 다룬 2 차원 평면 상에서의 로봇 팔의 궤적뿐 아니라 3 차원 궤적도 다루기 쉽게 된다. 이 동차 좌표 변환은 또한 컴퓨터 그래픽스 및 CAD 에서 3 차원 도형의 기하변환(geometric transformation) 그리고 금속 재료의 이방성 특성을 결정하는 결정학적 집합조직(crystal texture)를 표현하는데 핵심 기술로 사용되고 있다.

한편 x_1, y_1 -좌표축(구 좌표계)이 z -좌표축을 기준으로 반시계 방향으로 θ 각도 만큼 강체 회전하여 얻어지는 좌표계(신 좌표계)를 x_2, y_2 라고 하면 두 좌표계에서 벡터 P 의 성분은 다음과 같이 회전변환 행렬(rotation transformation matrix) Q 를 이용하여 나타낼 수 있다.(그림 1-46)

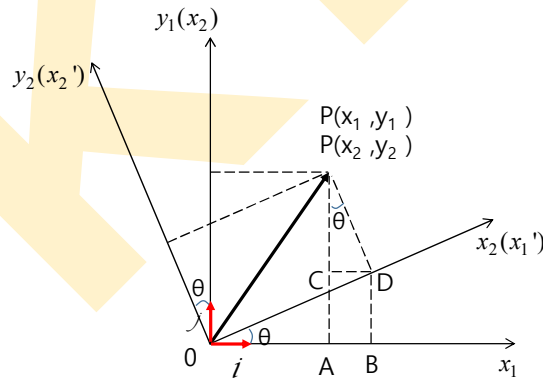


Fig. 1-46 좌표의 강체 회전변환

$$\begin{aligned} P &= x_1 i + y_1 j = [OB - AB]i + [DB + CP]j \\ &= [\cos \theta x_2 - \sin \theta y_2]i + [\sin \theta x_2 + \cos \theta y_2]j \end{aligned} \quad (1.163a)$$

여기서 i, j 는 구 좌표계 x_1, y_1 -방향에서의 단위벡터이다. 따라서

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (1.163b)$$

이 식을 역변환 하면

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.163c)$$

이 회전변환 행렬 Q 와 식 (1.158a)의 변환 행렬 R 의 관계가 다른 것에 주의하여야 한다. 회전변환 행렬 Q 는 신 좌표계와 구 좌표계에서 관계를 나타내는 것에 반해서, 변환 행렬 R 은 하나의 좌표계, 구 좌표계에서 각도 변화에 따른 관계를 나타낸다.

회전변환 행렬 Q 는

$$Q^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}{|Q|} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = Q^T \quad (1.163d)$$

($\because |Q| = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$)

인 관계를 갖는다.

또한

$$\begin{aligned} Q Q^T &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned} \quad (1.163e)$$

즉, $Q Q^T = I$ (또는 $Q^T Q = I$)인 관계를 갖는다. 이 정방행렬 Q 를 직교행렬(orthogonal matrix)이라고 부른다.

식 (1.163b)의 회전변환 행렬 Q 의 각 성분은 방향여현(direction cosine)이라고 불리며 새로운 좌표계와 구 좌표계 사이의 사이각에 대한 코사인값이다. 편의상 구 좌표계를 x_1, x_2 -좌표계라고 하고 신 좌표계를 x_1', x_2' -좌표계라고 하면

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_1', x_1) & \cos(x_1', x_2) \\ \cos(x_2', x_1) & \cos(x_2', x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\pi/2 - \theta) \\ \cos(\pi/2 + \theta) & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.163f)$$

따라서

$$\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (1.163g)$$

$$x' = Qx$$

과 같이 나타낼 수 있다.

1.7 라플라스 변환을 이용한 미분방정식의 해

앞에서 배운 미분방정식을 다음의 라플라스 변환(Laplace transform)을 통해 대수방정식(algebraic equation)으로 바꾸어 푸는 방법이 시스템을 제어하는 제어문제에 널리 사용되고 있다. $t \geq 0$ 에서 정의되는 시간함수 $f(t)$ 에 대한 라플라스 변환은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = L\{f(t)\} \\ L\{f(t)\} &= \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s) \end{aligned} \quad (1.164)$$

여기서 s 는 복소수 $s = \sigma + iw$ 이다. 따라서 $f(t)$ 를 알고 식 (1.164)가 적분 가능하면 함수 $F(s)$ 를 구할 수 있다. 이 정의를 함수 $f(t)$ 에 대한 라플라스 변환이라고 부른다.

즉, 라플라스 변환은 시간함수를 복소수면 상에 변환하는 수학적인 조작이다. 한편 함수 $F(s)$ 에서 $f(t)$ 를 구하는 라플라스 역변환은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} L^{-1}\{F(s)\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds = f(t) \quad \{= f(t)u(t)\} \\ \begin{cases} u(t) = 1 & t > 0 \\ u(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.165)$$

여기서 $u(t)$ 는 식 (1.175)에서 정의하는 단위 계단 함수이다.

이 라플라스 변환을 몇몇 기본 함수에 대해 적용해보자.

$$f(t) = 1; F(s) = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s}, \quad s > 0 \quad (1.166)$$

$$\begin{aligned}
 L\{f(at)\} &= \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-st} f(at) dt \quad (u = at, du = a dt, dt = \frac{du}{a}) \quad a > 0 \\
 &= \int_{u=0}^{u=\infty} e^{-s \frac{u}{a}} f(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{a} u} f(u) du = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)
 \end{aligned} \quad (1.167)$$

$$\begin{cases} f(t) = t ; F(s) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} t\right]_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \\ f(t) = t^2 ; F(s) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-st} dt = \frac{2}{s^3} \\ f(t) = t^n ; F(s) = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{n!}{s^{n+1}} \end{cases} \quad s > 0 \quad (1.168)$$

$$f(t) = e^{at} ; F(s) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a \quad (1.169)$$

$$f(t) = \sin wt ;$$

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin wt dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \sin wt\right]_0^{\infty} + \frac{w}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos wt dt \\
 &= \frac{w}{s} L(\cos wt), \quad s > 0
 \end{aligned} \quad (1.170a)$$

$$f(t) = \cos wt ;$$

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cos wt dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos wt\right]_0^{\infty} - \frac{w}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin wt dt \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{w}{s} L(\sin wt), \quad s > 0
 \end{aligned} \quad (1.170b)$$

식 (1.170a), (1.170b)로부터 다음 관계가 얻어진다.

$$L(\sin wt) = \frac{w}{s^2 + w^2}, \quad L(\cos wt) = \frac{s}{s^2 + w^2} \quad (1.170c)$$

$$g(t) = e^{at} f(t);$$

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a) \quad (1.171)$$

(a) 미적분에 대한 라플라스 변환

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = [f(t) e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = -f(0) + sF(s) \quad (1.172)$$

$$L\{f''(t)\} = L\{f'(t)\}' = sL\{f'(t)\} - f'(0) = -f'(0) - sf(0) + s^2 F(s) \quad (1.173)$$

$$\begin{aligned}
 L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} &= \frac{1}{s}F(s) \\
 [\because g(t) &= \int_0^t f(t)dt, \quad g'(t) = f(t), g(0) = 0 \\
 F(s) &= L\{g'(t)\} = sG(s) - g(0) = sG(s)]
 \end{aligned} \tag{1.174}$$

(b) 단위 계단 함수(Unit step function 또는 Heaviside function)에 대한 라플라스 변환(그림 1-47);

$$U(t-a) = \begin{cases} 0, & (t \leq a) \\ 1, & (t > a) \end{cases} \quad \text{또는} \quad U_a(t) = \begin{cases} 0, & (t \leq a) \\ 1, & (t > a) \end{cases} \tag{1.175}$$

$$L\{U(t-a)\} = \int_0^\infty U(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty 1 \cdot e^{-st}dt = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0 \tag{1.176}$$

$$\begin{aligned}
 L\{U(t-a)f(t-a)\} &= \int_0^\infty U(t-a)f(t-a)e^{-st}dt = \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\
 &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt = e^{-as} \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\
 &\quad (\tau = t-a, \quad t = \tau+a, \quad dt = d\tau) \\
 &= e^{-as}F(s)
 \end{aligned} \tag{1.177}$$

단위 계단 함수 $u(t-a)$ 는 히비사이드 함수 $H(t-a)$ 로 나타내지기도 한다.

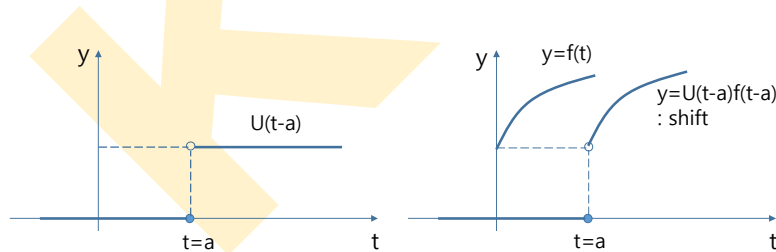


FIG. 1-47 단위 계단 함수의 정의

(c) 충격 함수(impulse function)에 대한 라플라스 변환;

충격 함수 또는 임펄스 함수는 매우 짧은 시간에 단위 면적의 강도(면적이 1 인 강도)를 갖는 함수를 의미한다. 그림 1-48 에서와 같이 임의의 양의 수 ε 에 대해서 충격 함수는 다음과 같이 정의한다.

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [H(t-a) - H(t-a-\varepsilon)] \quad (= \delta_{\varepsilon}(t-a)) \quad (1.178a)$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty & (t=a) \\ 0 & (t \neq a) \end{cases} \quad (1.178b)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) dt = 1 \quad (1.178c)$$

충격 함수는 디랙 델타 함수(Dirac's delta function) 또는 간단히 델타 함수라고도 부른다. 이 충격 함수에 대한 라플라스 변환은 다음과 같다.

$$L\{\delta(t-a)\} = \int_0^{\infty} \delta(t-a) e^{-st} dt = [e^{-st}]_{t=a} = e^{-as} \quad (1.179a)$$

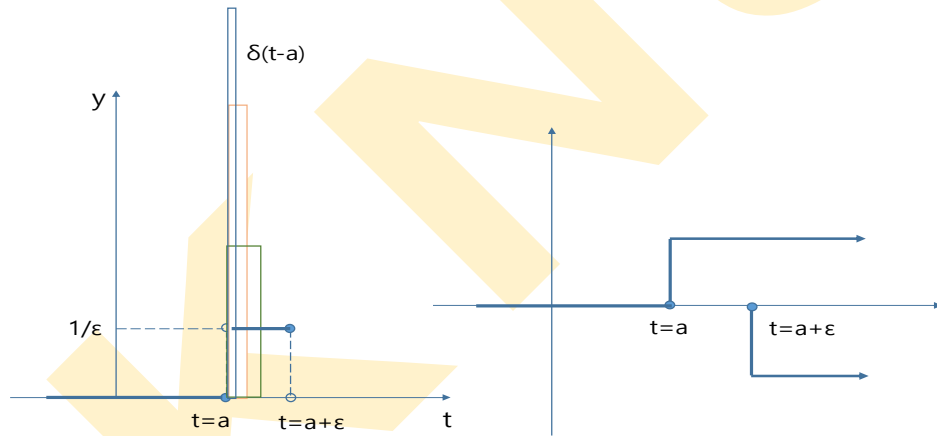


FIG. 1-48 충격함수의 정의

만일 $a=0$ 이라면 $L\{\delta(t)\}=1$ 이 된다. 충격 함수에 대해서 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt &= f(a), \quad \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t-a) dt = e^{-as} \\ \int_0^{\infty} f(\tau) \delta(\tau-t) dt &= f(t), \quad f(t) * \delta(t) = f(t) \end{aligned} \quad (1.179b)$$

참고로 램프 함수(ramp function)은 일정한 기울기를 갖는 함수를 말한다.

(d) 합성(convolution 또는 합성곱이라고도 함)에 대한 라플라스 변환:

$\int_a^b f(t)dt$ 와 $\int_a^b g(t)dt$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 존재한다고 할 때

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^\infty f(\tau) f(t-\tau) d\tau \quad (1.180)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= L\{f(t)\} = L\{f_1 * f_2\} = \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right\} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f_1(\tau) \left\{ \int_\tau^\infty f_2(t-\tau) e^{-s(t-\tau)} dt \right\} d\tau \\ &\quad (t-\tau = a, \quad dt = da) \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f_1(\tau) d\tau \left\{ \int_0^\infty f_2(a) e^{-sa} da \right\} \\ &= L\{f_1\} L\{f_2\} = F_1(s) F_2(s) \end{aligned} \quad (1.181)$$

공식 (1.170)은 다음 오일러 공식을 이용하여 증명할 수도 있다.

$$e^{\pm iwt} = \cos wt \pm i \sin wt, \quad \begin{cases} \sin wt = \frac{1}{2i} (e^{iwt} - e^{-iwt}) \\ \cos wt = \frac{1}{2} (e^{iwt} + e^{-iwt}) \end{cases} \quad (1.182a)$$

즉,

$$\begin{aligned} L\{\sin wt\} &= \int_0^\infty \left[\frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i} \right] e^{-st} dt = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{-(s-iw)t}}{-(s-iw)} \right]_0^\infty - \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{-(s+iw)t}}{-(s+iw)} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-iw} - \frac{1}{s+iw} \right] = \frac{w}{s^2 + w^2} \end{aligned} \quad (1.182b)$$

이하에 자주 활용되는 라플라스 변환을 나타내었다.

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (1.183)$$

$$L\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}, \quad L\{t^2 f(t)\} = \frac{d^2 F(s)}{ds^2} \quad (1.184)$$

$$L\{e^{at} \sin wt\} = \frac{w}{(s-a)^2 + w^2}, \quad s > a \quad (1.185)$$

$$L\{e^{at} \cos wt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}, \quad s > a \quad (1.186)$$

$$L\{e^{at} \sin(wt + \phi)\} = \frac{w \cos \phi + (s-a) \sin \phi}{(s-a)^2 + w^2} \quad (1.187)$$

$$L\{e^{at} \cos(wt + \phi)\} = \frac{(s-a) \cos \phi - w \sin \phi}{(s-a)^2 + w^2} \quad (1.188)$$

$$L\{U(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) \quad (1.189)$$

$$L\{\cosh wt\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad L\{\sinh wt\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > |a| \quad (1.190a)$$

$$L\{t \sin wt\} = \frac{2sw}{(s^2 + w^2)^2} \quad (1.190b)$$

물론 위에서 유도한 라플라스 변환의 역변환을 취하면 원래의 함수가 얻어진다. 예를 들면 식 (1.177)에서

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = U(t-a)f(t-a) \quad (1.191a)$$

또는

$$L^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = H(t-a)f(t-a) \quad (1.191b)$$

식 (1.171)에서

$$L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t) \quad (1.191c)$$

과 같이 된다.

참고로 식 (1.171)을 라플라스 변환의 제 1 이동특성(first shifting), 식 (1.177)을 제 2 이동특성(second shifting property)이라고 부른다.

예제 1-42 다음 함수 $y = f(t)$ 의 형태를 나타내어라.

$$f(t) = U(t - \pi) - U(t - 2\pi), \quad t \geq 0$$

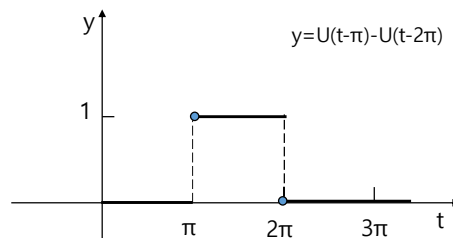


FIG. 1-49 단위계단함수의 응용

[해]

$$f(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \leq t \leq \pi \\ 1 - 0 = 1, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \leq t \leq \infty \end{cases}$$

예제 1-43 다음 초기값 문제의 해를 구하라.

$$y'' + 4y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 5 \\ (t-5)/5, & 5 \leq t \leq 10 \\ 1, & t \geq 10 \end{cases}$$

[해] 여기서 $g(t)$ 는 다음과 같이 단위 계단 함수로 나타낼 수 있다.

$$g(t) = \frac{1}{5}[U(t-5)(t-5) - U(t-10)(t-10)]$$

이 미분방정식을 라플라스 변환하면 식 (1.172), (1.173), (1.177)으로 부터

$$(s^2 + 4)Y(s) = (e^{-5s} - e^{-10s}) / 5s^2$$

$$Y(s) = \frac{1}{5} \frac{e^{-5s} - e^{-10s}}{s^2(s^2 + 4)} = \left[\frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2 + 4} \right] \left(\frac{e^{-5s}}{5} - \frac{2e^{-10s}}{10} \right)$$

이 식을 라플라스 역변환 하면 해가 구해진다.

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = [U(t-5)h(t-5) - U(t-10)h(t-10)] / 5$$

여기서

$$h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t$$

다음 그림 1-50 에 해 $y(t)$ 를 도시하였다.

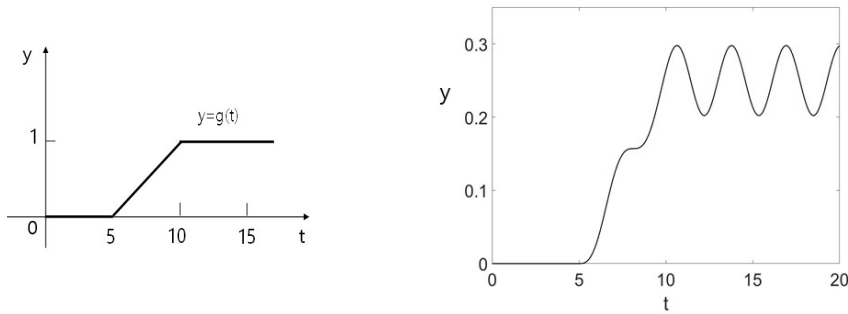


FIG. 1-50 단위계단함수의 응용

예제 1-44 다음 함수에 대한 라플라스 변환을 구하라.

$$(a) f(t) = e^{-t} \sin 2t \quad (b) f(t) = \sin t u(t-2\pi)$$

[해]

$$(a) \text{ 식 (1.171), (1.170)을 이용하여 } L\{e^{-t} \sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4} \Big|_{s=s+1} = \frac{2}{(s+1)^2 + 4}$$

(b) $\sin t = \sin(t-2\pi)$ 이므로 식 (1.177)을 이용하면 라플라스 변환이 구해진다.

$$L\{\sin t u(t-2\pi)\} = L\{\sin(t-2\pi) u(t-2\pi)\} = e^{-2\pi s} L\{\sin(t-2\pi)\} = \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

예제 1-45 다음 함수에 대한 라플라스 역변환을 구하라.

$$(a) F(s) = \frac{e^{-3s}}{(s-1)^3} \quad (b) F(s) = \frac{2}{s(s^2+1)}$$

[해] (a) 식 (1.168), (1.169)를 이용하여

지수항 e^{-3s} 을 제외한 나머지 함수에 대해서 라플라스 역변환을 취하면

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} = \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^3}\right\} = \frac{1}{2} t^2 e^t$$

따라서 식 (1.189)를 이용하면 라플라스 역변환이 구해진다.

$$L^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s-1)^3}\right\} = \frac{1}{2}(t-3)^2 e^{t-3} u(t-3)$$

(b) 식 (1.174), (1.170)을 이용하면 라플라스 역변환이 구해진다.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t 2\sin\tau d\tau = -2\cos\tau \Big|_0^t = -2\cos t + 2$$

예제 1-46 충격 함수를 포함한 경계값 문제를 라플라스 변환을 이용하여 풀어라

$$y'' + 2y' + 2y = \delta(t-3) \quad (B.C. y(0) = y'(0) = 0)$$

[해] 양변에 라플라스 변환을 취하고 공식 (1.172), (1.173), (1.179a)을 적용하면

$$\begin{aligned} L\{y'' + 2y' + 2y = \delta(t-3)\} \\ s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2\{sY(s) - y(0)\} + 2Y(s) = e^{-3s} \\ Y(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 2s + 2} = \frac{e^{-3s}}{(s+1)^2 + 1} \end{aligned}$$

따라서 이 $Y(s)$ 를 라플라스 역변환 하면 $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right\} = e^{-t} \sin t$ 이므로 해가 다음과 같이 구해진다.

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = H(t-3)e^{-(t-3)} \sin(t-3)$$

예제 1-47 다음 미분방정식을 라플라스 변환을 이용하여 풀어라.

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t} \quad (I.C: y(0) = 0, y'(0) = 0) \quad (1.191d)$$

[해] 양변에 라플라스 변환을 취하고 공식 (1.172), (1.173)을 이용하면

$$\begin{aligned} L\{y'' - 3y' + 2y = e^{2t}\} \\ s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3\{sY(s) - y(0)\} + 2Y(s) = \frac{1}{s-2} \\ \{s^2 - 3s + 2\}Y(s) = \frac{1}{s-2} \end{aligned}$$

여기에 초기조건을 대입하고 다항식 $Y(s)$ 를 부분분수로 분해된 (partial fraction decomposition) 형식으로 나타내면

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{1}{(s-1)(s-2)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-2)^2} + \frac{C}{(s-2)} \\
 &= \frac{A(s-2)^2 + B(s-1) + C(s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)^2}
 \end{aligned}$$

이 식의 분자는 1 이어야 하므로

$$\begin{aligned}
 A(s-2)^2 + B(s-1) + C(s-1)(s-2) &= 1 \\
 \begin{cases} A+C=0 \\ -4+B-3C=0 \\ 4A-B+2C=1 \end{cases} \\
 \therefore A=1, B=1, C=-1
 \end{aligned}$$

따라서

$$Y(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)}$$

따라서 이 $Y(s)$ 를 라플라스 역변환 하면 해가 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= L^{-1}\{Y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)}\right\} \\
 &= e^t + te^{2t} - e^{-2t}
 \end{aligned}$$

이 문제는 예를 들면 스프링과 대시포트 그리고 질량으로 구성된 시스템(또는 제어계)에 외부에서 지수함수의 외력이 가해지는 모델로 생각할 수 있다. 즉 (식 (1.191d)와 식 (1.149n)을 비교해보면

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = f(t) & (\text{I.C.: } y(0) = 0, y'(0) = 0) \\ my'' + cy' + ky = f(t) \end{cases}$$

$m=1, c=-3, k=2$ 로 간주할 수 있다. 이 경우에 라플라스 변환을 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k} = \frac{F(s)}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{F(s)}{s^2 + \frac{c}{m}s + w_0^2} \\
 &= \frac{F(s)}{s^2 + 2\zeta w_0 s + w_0^2} \\
 (w_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}}, \zeta = \frac{c}{2mw_0})
 \end{aligned} \tag{1.191e}$$

여기서 감쇠비 $\zeta (= \frac{c}{2mw_n})$ 를 도입하면 식 (1.191e)의 분모를 영으로 하고 해 s (복소수)를 구해보면 다음과 같다.

$$s^2 + 2\zeta w_0 s + w_0^2 = 0 \quad (1.191f)$$

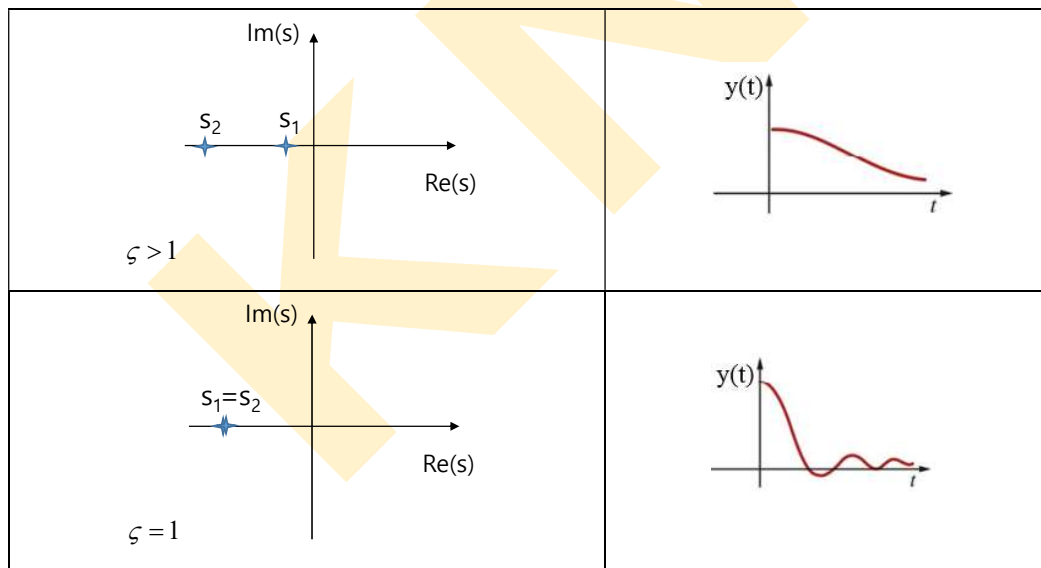
이 식은 s 에 관한 특성방정식이다. 이 특성방정식의 근 s_1, s_2 은 다음과 같이 구해진다.

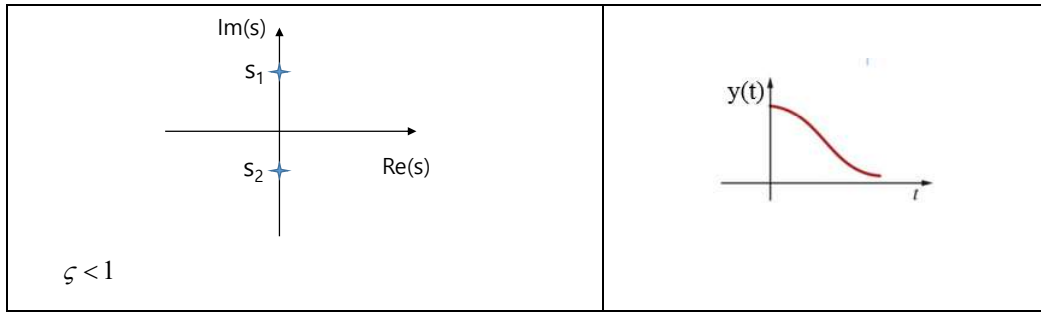
$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta w_0 \pm \sqrt{(2\zeta w_0)^2 - 4w_0^2}}{2} \quad (1.191g)$$

$$s_{1,2} = -\zeta w_0 \pm w_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

이 식으로부터 감쇠비 ζ 값에 따라 해 s 가 다양한 값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

만일 다음 그림 1-51 에서와 같이 $\zeta > 1$ 인 경우는 해 s 는 실수 좌표상에 2 개의 근을 가지며(over damping), $\zeta = 1$ 인 경우는 해 s 는 실수 좌표상에 중근(critical damping)을 갖는다는 것을 알 수 있다. 한편 $\zeta < 1$ 인 경우는 해 s 는 허수 좌표상에 2 개의 근(under damping)을 갖는다.



FIG. 1-51 감쇠비 ζ 값에 따른 진동특성

앞에서 설명한 예제에서 (a) $w_0 = 30$, $\frac{c}{2m} = 30$ 인 경우는 감쇠비에 대한 정의로부터 $\zeta = 1$,

(b) $w_0 = 30$, $\frac{c}{2m} = 5$ 인 경우는 $0 < \zeta < 1$, (c) $w_0 = 30$, $\frac{c}{2m} = 60$ 인 경우는 $\zeta > 1$ 에

해당한다는 것을 알 수 있다. 한편 $w_0 = 30$, $\frac{c}{2m} = 0$ 인 경우는 $\zeta = 0$ 에 해당한다.

즉, 이 감쇠비의 크기에 따라 계의 진동이 과도감쇠 ($\zeta > 1$), 과소감쇠 ($0 < \zeta < 1$), 임계감쇠 ($\zeta = 1$) 그리고 비감쇠($\zeta = 0$)로 구분된다는 것을 알 수 있다.

예제 1-48 합성을 이용하여 다음 함수의 라플라스 역변환을 구하라.

$$\frac{1}{(s^2 + 1)(s + 1)}$$

[해] 식 (1.180), (1.181)의 합성곱에 대한 라플라스 역변환은

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2 + 1)(s + 1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{1}{s + 1} \right\} = \sin t * e^{-t} = \int_0^t \sin \tau e^{-(t-\tau)} d\tau$$

이 식을 두 번 부분적분하면

$$\int_0^t \sin \tau e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau$$

$$\int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau = e^{\tau} \sin \tau \Big|_0^t - \int_0^t e^{\tau} \cos \tau d\tau = e^{\tau} \sin \tau \Big|_0^t - \left\{ e^{\tau} \cos \tau \Big|_0^t - \int_0^t e^{\tau} (-\sin \tau) d\tau \right\}$$

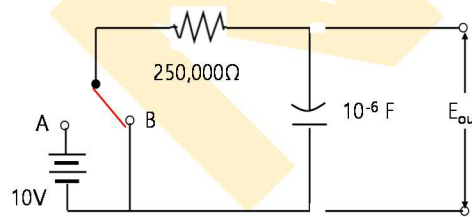
따라서 다음 결과가 얻어진다.

$$2 \int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau = e^t \sin t - e^t \cos t + 1$$

$$\therefore L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^2+1)(s+1)} \right\} = e^{-t} \int_0^t e^{\tau} \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} (\sin t - \cos t + e^{-t})$$

예제 1-49 다음 그림 1-52 에 나타내 것과 같이 저항(resistor)과 커패시터(capacitor)가 직렬로 구성된 R-C 전기회로(RC electric circuit)에서 커패시터가 초기에 0 으로 충전되고 초기 전류가 없다고 가정한다. 시간 $t = 2$ 초에서, 전원 스위치는 위치 B 에서 A 로 이동하고, 1 초 동안 유지된 다음 다시 B 위치로 이동한다. 커패시터의 출력 전압(output voltage) E_{out} 을 구하라.

회로도에서, 입력 전압(input voltage)은 $t = 2$ 까지 0 이고, $t = 3$ 까지 10 볼트 값을 가지며, 이후는 다시 0 이 된다. 따라서 E 는 펄스 함수로 간주하면 된다. 여기서 커패시터란 절연 물질 또는 절연성 물질에 의해 서로 분리된 2 개의 전도 물질 플레이트로 구성된 저장 장치이다.



Kirchoff's voltage law :

$$E(t) = Ri(t) + \frac{1}{C} q(t) \quad (i = \frac{dq(t)}{dt})$$

FIG. 1-52 R-C 전기회로의 구성

[해] 여기서 펄스 함수 E 는 히비사이드 함수 $H(t-a)$ 에 의해서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$E(t) = 10[H(t-2) - H(t-3)] \quad (1.192a)$$

키르호프의 전압 법칙(Kirchoff's voltage law, KVL)에 따르면 전기회로의 폐쇄 루프 주위에서 전압의 증가와 감소의 대수적인 합이 0 이므로 위 전기회로에 대해서 다음 식이 성립한다.

$$E(t) - Ri(t) - \frac{1}{C}q(t) = 0, \quad (i = \frac{dq}{dt}) \quad (1.192b)$$

여기서 저항 $R=250,000\Omega$, $C=10^{-6}$ Farad 를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$250,000q'(t) + 10^6 q(t) = E(t) \quad (1.192c)$$

이 식의 양변에 라플라스 변환을 적용하면

$$250,000[sQ(s) - q(0)] + 10^6 Q(s) = L\{E(t)\} = E(s) \quad (1.192d)$$

한편 식 (1.192a)에 대한 라플라스 변환은

$$\begin{aligned} L\{E(t)\} &= L\{10[H(t-2) - H(t-3)]\} \\ E(s) &= 10\left\{\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}\right\} \end{aligned} \quad (1.192e)$$

식 (1.192e)를 식 (1.192d)에 대입하면 $q(0) = 0$ 인 경우에

$$\begin{aligned} 250,000[sQ(s) - q(0)] + 10^6 Q(s) &= 10\left\{\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s}\right\} \\ \therefore Q(s) &= 4(10^{-5}) \frac{1}{s(s+4)} e^{-2s} - 4(10^{-5}) \frac{1}{s(s+4)} e^{-3s} \end{aligned} \quad (1.192f)$$

이 식을 부분분수로 분해된 형식으로 나타내면

$$Q(s) = 10^{-5} \left[\frac{1}{s} e^{-2s} - \frac{1}{s+4} e^{-2s} \right] - 10^{-5} \left[\frac{1}{s} e^{-3s} - \frac{1}{s+4} e^{-3s} \right] \quad (1.192g)$$

이 식에 라플라스 역변환을 취하고 식 (1.169)와 제 1 이동특성 식 (1.191b)와 제 2 이동특성 식 (1.192c)를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} q(t) &= 10^{-5} [H(t-2) - H(t-2)e^{-4(t-2)}] - 10^{-5} [H(t-3) - H(t-3)e^{-4(t-3)}] \\ &= 10^{-5} H(t-2)[1 - e^{-4(t-2)}] - 10^{-5} H(t-3)[1 - e^{-4(t-3)}] \end{aligned}$$

전기회로에서 출력 전압 E_{out} 은 $E_{out} = 10^6 q(t)$ 이므로

$$E_{out} = 10H(t-2)[1 - e^{-4(t-2)}] - 10H(t-3)[1 - e^{-4(t-3)}]$$

다음 그림 1-53 에 입력 전압과 출력 전압을 나타내었다.

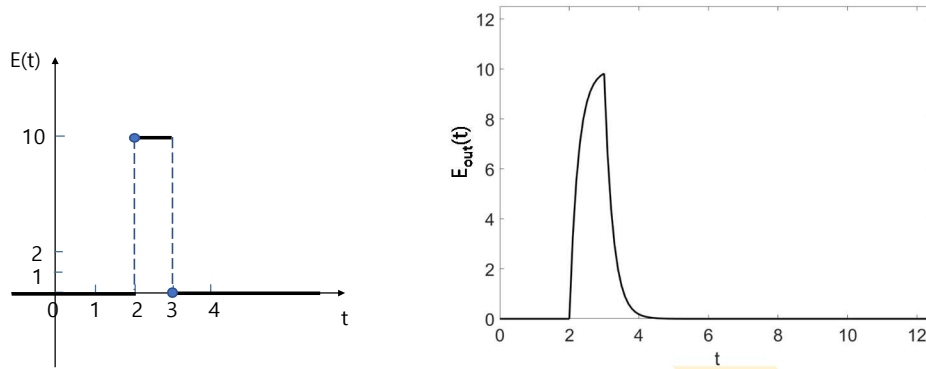


FIG. 1-53 R-C 전기회로의 입력전압과 출력전압

예제 1-50 다음 그림 1-54 에 나타내 것과 같이 저항(resistor)과 인덕터(Inductor)로 구성된 R-L 전기회로(RL electric circuit)에서 전압이 계단함수로 가해지는 경우에 각각의 회로에 걸리는 가지 전류(branch current) $i_1(t)$, $i_2(t)$ 를 구하라.

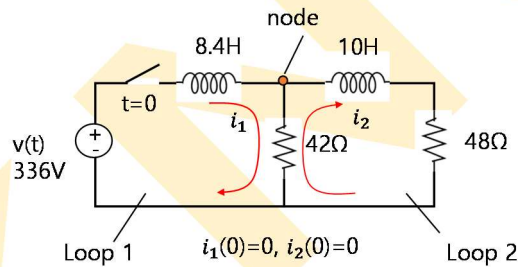


FIG. 1-54 R-L 전기회로의 구성

[해] 회로 1 과 회로 2 의 폐회로에 키르호프의 전압 법칙을 각각 적용하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} v(t) = 8.4 \frac{di_1(t)}{dt} + 42\{i_1(t) - i_2(t)\}, & v(t) = 336U(t): \text{ loop 1} \\ 0 = 42\{i_2(t) - i_1(t)\} + 10 \frac{di_2(t)}{dt} + 48i_2(t): & \text{ loop 2} \end{cases}$$

여기서 마디(nodal)에서 나가는 전류를 양, 마디로 들어오는 전류를 음으로 하였다. 이 식을 각각 라플라스 변환하면

$$\begin{cases} \frac{336}{s} = 8.4sI_1(s) + 42\{I_1(s) - I_2(s)\} \\ 0 = 42\{I_2(s) - I_1(s)\} + (10s + 48)I_2(s) \end{cases}$$

이 식으로부터 Cramer 공식이나 다른 방법을 이용하여 $I_1(s)$, $I_2(s)$ 를 구하면

$$\begin{bmatrix} 42 + 8.4s & -42 \\ -42 & 90 + 10s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{336}{s} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

따라서

$$\begin{Bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 + 8.4s & -42 \\ -42 & 90 + 10s \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{336}{s} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{s} - \frac{14}{s+2} - \frac{1}{s+12} \\ \frac{7}{s} - \frac{8.4}{s+2} - \frac{1.4}{s+12} \end{bmatrix}$$

이 식의 라플라스 역변환을 구하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} i_1(t) = (15 - 14e^{-2t} - e^{-12t}) U(t) \\ i_2(t) = (7 - 8.4e^{-2t} + 1.4e^{-12t}) U(t) \end{cases}$$

아래 그림 1-55에 가지전류의 시간 변화를 나타내었다.

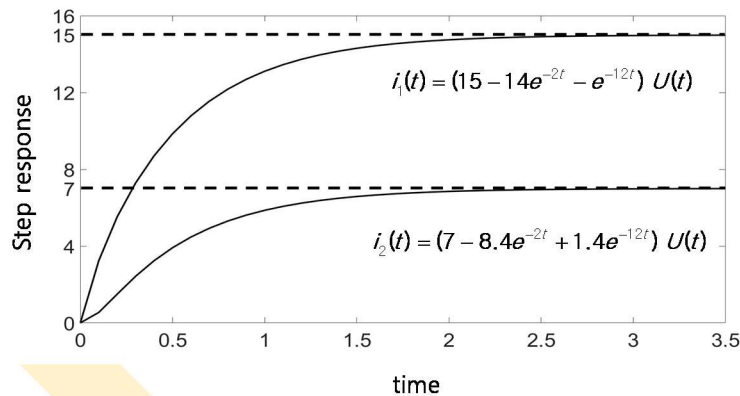


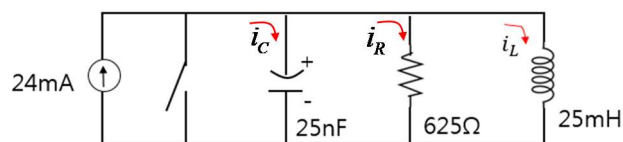
FIG. 1-55 R-L 전기회로에서 계단전압에 대한 가지전류

한편 기계식 스프링과 LC 회로에서 물리적 특성들은 다음과 같이 유사성을 갖는다.

Mechanical spring		LC circuit	
Position	x	Charge	q

Velocity	$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$	Current	$I = \dot{q} = \frac{dq}{dt}$
Kinetic energy	$\frac{1}{2}mv^2$	Inductor energy	$\frac{1}{2}LI^2$
Potential energy	$\frac{1}{2}kx^2$	Capacitor energy	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{C}\right)q^2$
Equation of motion	$m\dot{v} + kx = 0$	Kirchhoff's law	$L\frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0$
Frequency	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$	frequency	$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{LC}}$

예제 1-51 다음 그림 1-56 에 나타내 것과 같이 저항, 커패시터, 인덕터가 병렬로 구성된 RCL 전기회로에서 전류가 계단함수로 가해지는 경우에 인덕터에 흐르는 가지전류(branch current) $i_L(t)$ 를 구하라.



$$v_C(0)=0, i_L(0)=0$$

$$i = i_C + i_R + i_L$$

FIG. 1-56 R-C-L 전기회로에서 계단전압에 대한 가지전류

[해] 키르호프의 전류법칙(Kirchhoff current law, KCL)에 따르면 전기 회로의 임의의 절점에서 들어오고 나가는 전류의 대수적인 합은 영이므로 위 전기회로에서 다음 식이 성립한다.

$$i - i_C - i_R - i_L = 0$$

$$i(t)U(t) = C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int v(t) dt$$

$$24U(t) = 25 \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v}{625} + \int \frac{v(t)}{25} dt$$

여기서 $v(t) = L \frac{di_L}{dt}$, $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v dt$ 이다.

이 적분-미분 방정식을 각각 라플라스 변환하면

$$\frac{24}{s} = 25sV(s) + \frac{V(s)}{625} + \frac{V(s)}{25s}$$

따라서

$$V(s) = \frac{\frac{24}{25}}{(s^2 + \frac{1}{625 \times 25}s + \frac{1}{25 \times 25})}$$

인덕터에 걸리는 전류는 $i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v dt$ 로 나타내지므로 이 식을 라플라스 변환하면

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V(s)}{sL} = \frac{V(s)}{s \times 25} \\ &= \frac{\frac{24}{25 \times 25}}{s(s^2 + \frac{1}{625 \times 25}s + \frac{1}{25 \times 25})} = \frac{3.84 \times 10^{-2}}{s(s^2 + 6.4 \times 10^{-5}s + 1.6 \times 10^{-3})} \end{aligned}$$

이 식의 라플라스 역변환을 구하면 다음과 같이 된다.

$$i_L(t) = \{24 - e^{-32000t} \cos(24 \cos 24000t - 32 \sin 24000t)\} U(t) \text{ (mA)}$$

만일 전류가 사인 함수, $i(t) = I_m \cos wt U(t)$, 로 가해진다고 하면 위 식은 다음과 같이 나타내진다.

$$\frac{sI_m}{s^2 + w^2} = 25sV(s) + \frac{V(s)}{625} + \frac{V(s)}{25s}$$

1.8 라플라스 변환을 이용한 제어

1.8.1 전달함수의 개념

위의 예제에서 시스템에 가해지는 외력에 의해 시스템의 반응(또는 응답)으로 질량의 변위가 나타난다고 생각하자. 이때 외력을 입력신호 $f(t)$, 변위를 출력신호 $y(t)$ 라고 하면 입력신호 크기에 대한 출력신호 크기의 비를 전달함수(transfer function)라고 부른다. 이 전달함수는 보통 라플라스 변환에 의해 정의된다. 즉, 입력신호와 출력신호의 모든

초기값을 0 이라고 할 때 입력신호에 대한 라플라스 변환을 $F(s)$, 라플라스 변환을 $Y(s)$ 라고 하면

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\text{출력신호 } y(t) \text{의 라플라스 변환}}{\text{입력신호 } f(t) \text{의 라플라스 변환}} \quad (1.193a)$$

$$Y(s) = G(s)F(s)$$

로 정의하고, 이 $G(s)$ 를 시스템의 전달함수라고 한다. 이 전달함수는 자주 플랜트의 전달함수라고 하여 $G_p(s)$ 로 나타내기도 한다. 식 (1.191c)의 경우에 전달함수 $G(s)$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{\frac{F(s)}{ms^2 + cs + k}}{F(s)} \\ &= \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (1.193b) \\ &= \frac{N(s)}{D(s)}, \quad D(s) = ms^2 + cs + k \end{aligned}$$

이 전달함수의 개념은 기계공학이나 전기공학 등 다양한 산업분야에서 작동되고 있는 시스템을 안정적으로 제어(system control)하고자 할 때 사용되는 매우 중요한 개념이다. 따라서 이 전달함수 $G(s)$ 를 조사하는 것에 의해 전달요소의 특성을 이해할 수 있다.

한편 제어 시스템에서 시스템의 응답특성은 전달함수의 분모식 $D(s)$ 의 형태에 따라서 크게 좌우되는데 이를 특성방정식(characteristics equation)이라고 부른다. 식 (1.193a)에서 $D(s)=0$ 일 때의 근을 극점(pole), $N(s)=0$ 일 때의 근을 영점(zero)라고 부른다. 예를 들면 시스템의 전달함수가 $G(s) = \frac{s+2}{s+5}$ 인 경우에 이 시스템은 $s=-5$ 인 극점과 $s=-2$ 인 영점을 갖는다.

[주석]

- (i) 시 스 제어(sequential control) - 교차로 신호등, 네온사인, 전용공작기계, 자동조립기계 등과 같이 결정된 순서나 조건에 의해 실행되는 제어
- (ii) 피드백 제어(feedback control, 역먹임 제어) - 가정의 냉난방과 같이 제어계의 출력값이 항상 목표값과 일치하는지를 비교하여 만일

일치하지 않으면 그 차이값을 고려한 동작신호가 제어계에 다시 보내져 오차를 수정하는 귀환경로(feedback loop)를 갖고 있는 제어. 조절부의 동작방식에 따라 비례제어(propotional control, P-제어), 비례적분제어(proportional integral control, PI-제어), 비례적분미분제어(proportional integral differential control, PID-제어)로 구분됨.

- (iii) 피드포워드 제어(feedforward control) - 미리 예측가능한 외란(noise)를 가정하여 목표값을 정하여 제어하는 방식
- (iv) 프로세스 제어(process control) - 화학공장에서의 같이 결과에 영향을 주는 것으로 생각되는 유량, 온도, 압력, 농도 등을 제어량으로 한 피드백 제어를 부분적으로 하여 공장 전체의 자동운전이 가능하도록 한 제어방식. 로봇팔과 같이 위치와 각도를 제어량으로 하는 프로세스 제어를 서보 제어(servo control)라고 함.
- (v) 컴퓨터 제어(computer control) - 마이크로 프로세서 유닛(micro processor unit, MPU)을 사용하여 전류, 전압, 변위등 아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하여(A/D 변환) 디지털 제어를 통해 아날로그 물리량의 정밀하고 복잡한 제어를 가능하게 한 제어방식
- (vi) 퍼지 제어(fussy control) - 전자동 세탁기와 같이 “0” 과 “1” 에 기본적인 디지털적 사고가 아닌 모호한 상태를 고려하는 퍼지이론에 기초한 제어방식
- (vii) 로버스트 제어(robust control, 강건제어) -서스펜션 기구와 같이 자동차의 외란에 상관없이 제어계에 항상 강건한 특성이 얻어지도록 한 제어방식

예를 들면 전달함수 $G(s)$ 의 s 를 iw 로 치환하여 $G(iw)$ 로 하면 주파수 전달함수를 구할 수 있다. 여기서 i 는 허수단위, w 는 각 주파수(각속도), f 를 주파수라고 하면 $w = 2\pi f$ 관계가 있다.

이 전달함수의 개념은 다음과 같은 열린 회로(open loop)의 블록선도(block diagram)로 나타낼 수 있다. 블록선도는 물리 시스템을 구성하는 주요 부품 및 기능

등을 블록으로 나타내고 블록들을 화살표로 연결하여 블록 간의 신호흐름 관계를 나타내는데 사용되는 선도이다. 다음 그림 1-57은 블록선도의 개념을 나타낸 것이다. 즉 입력 신호가 시스템으로 표시된 물리계에 들어오면 출력 신호가 나오는 것을 블록선도 개념으로 표시한 것이다.

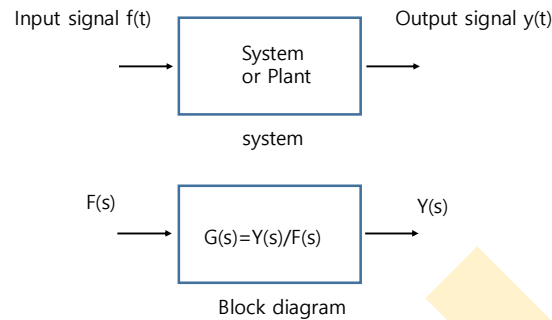
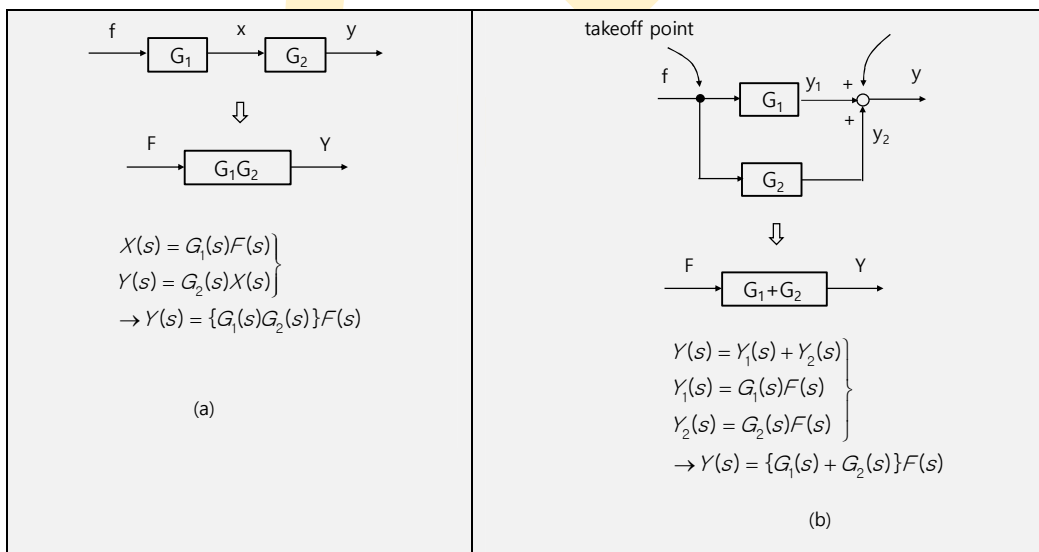


FIG. 1-57 블록선도의 개념

블록선도가 직렬로 연결된 경우(series connection 또는 cascade connection), 병렬로 연결된 경우(parallel connection) 그리고 피드백 연결된 경우(feedback connection, 되먹임 연결 또는 귀환 연결)에 전달함수를 아래에 나타내었다. 블록선도에는 합산점(summing point)과 분리점(takeoff point)을 갖는 경우가 있다.



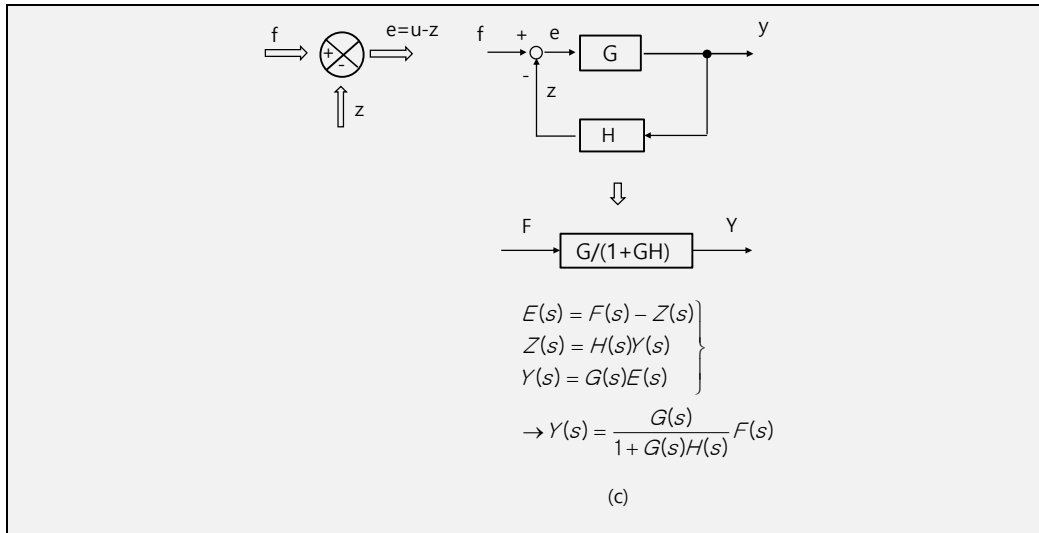


FIG. 1-58 직렬, 병렬, 피드백 연결에 대한 블록선도의 개념

다음에 표에 다양한 전기회로(electric circuit)에 대한 라플라스 변환을 나타내었다.

	Electric circuit	t-domain (t-공간)	s-domain (s-공간)
Resistor (저항)		$v(t) = Ri(t)$	$V(s) = RI(s)$
Inductor (인덕터)		$v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$	$V(s) = L\{sI(s) - i(0)\}$ $I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s}$
Capacitor (축전기)		$i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$	$I(s) = C\{sV(s) - v(0)\}$ $V(s) = \frac{I(s)}{cS} + \frac{v(0)}{cS}$

다음에 RC 가 직렬로 연결된 전기회로에 대한 전달함수를 구해보자.

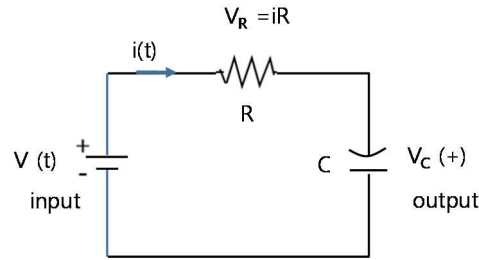


FIG. 1-59 RC 직렬회로의 전달함수

키르호프의 전압법칙(Kirchhoff voltage law)에 따라 폐 전기회로에 작용하는 전압들의 대수적인 합은 영이기 때문에, 외부전압은 저항(resistor)에서 전압손실과 커패시터 (capacitor)에서의 전압손실(전압축적)은 다음 관계로 나타내진다.

$$\begin{aligned} V(t) &= V_R(t) + V_C(+) \\ &= i(t)R + V_C(+) \quad \{i = C \frac{dV_C(+)}{dt}\} = RC \frac{dV_C(+)}{dt} + V_C(+) \end{aligned} \quad (1.193c)$$

이 식의 양변에 라플라스 변환을 적용하면

$$V(s) = RCsV_C(s) + V_C(s) = V_C(s)(RCs + 1) \quad (1.193d)$$

따라서 이 RC 전기회로의 전달함수 $G(s)$ 는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1}{RCs + 1} \quad (1.193e)$$

즉 $V_C(s) = G(s)V(s) = \frac{1}{RCs + 1}V(s)$ 에 커패시터에 축적되는 전압은 전달함수에 입력함수를 곱한 것으로 나타난다.

여기서 만일 입력 전압이 $v(t) = v_A \cos wt$ 로 주어진다면

$$V_C(s) = \frac{1}{RCs + 1} \left(\frac{sV_A(s)}{s^2 + w^2} \right) \quad (1.193f)$$

으로 나타내진다.

이 문제에서 만일 출력을 전류로 하면 전달함수 $G(s)$ 는 $G(s) = \frac{I(s)}{V(s)}$ 로 표시된다. 즉

$$V(t) = V_R(t) + V_C(+) = i(t)R + \frac{1}{C} \int i \, dt \quad (1.194a)$$

이 식의 양변에 라플라스 변환을 적용하면

$$V(s) = I(s)R + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} = I(s) \left(R + \frac{1}{Cs} \right) \quad (1.194b)$$

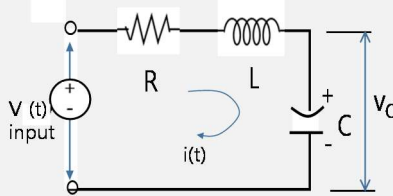
따라서 이 경우에 전달함수 $G(s)$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{Cs}{RCs + 1} \quad (1.195)$$

따라서 $I(s) = G(s)V(s) = \frac{RCs + 1}{Cs} V(s)$ 로 주어진다. 물론 전류 $i(t)$ 는 이 식에 대한

라플라스 역변환, $i(t) = L^{-1}\{I(s)\}$, 으로 구해진다.

다음에 표에 직렬 및 병렬로 연결된 R-L-C 전기회로에 대한 라플라스 변환과 전달함수를 나타내었다.



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_C, \quad v_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (1.196a)$$

$$\frac{dv}{dt} = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$$

초기조건 $i(0) = 0$ 를 가정하고 이 식에 라플라스 변환을 취하면

$$(s^2 L + sR + \frac{1}{C})I(s) = sV(s) \quad (1.196b)$$

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{s}{s^2 L + sR + \frac{1}{C}}$$

만일 전하 $q(t)$ $\{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}\}$, $q(t) = Cv_C(t)$ 정의를 이용하면 식 (1.196a)은

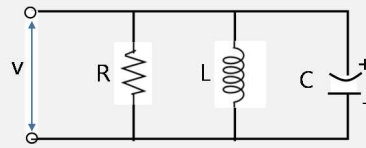
$$v(t) = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} \quad (1.196c)$$

$$v(t) = LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \quad (1.196d)$$

식 (1.196d)를 라플라스 변환을 취하면 다음과 같이 된다.

$$(LCs^2 + RCs + 1)V_C(s) = V(s)$$

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad (1.196e)$$



$$i(t) = \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int v(t) dt + C \frac{dv(t)}{dt}, \quad \phi = \int v dt : \text{magnetic flux} \quad (1.196f)$$

$$C \frac{d^2 \phi}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt} + \frac{\phi}{L} = i$$

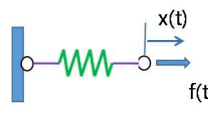
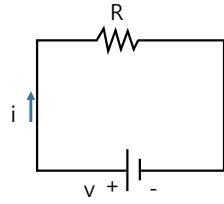
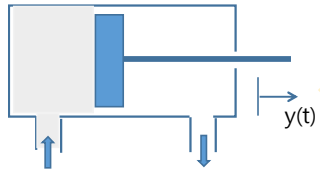
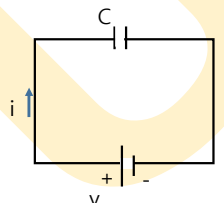
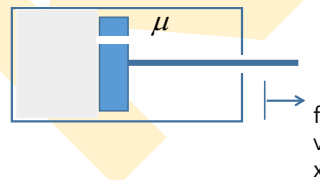
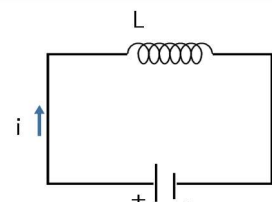
여기서 ϕ 는 인덕터에 작용하는 자기선속(magnetic flux, 자속)이다. 이 식에 라플라스 변환을 취하면

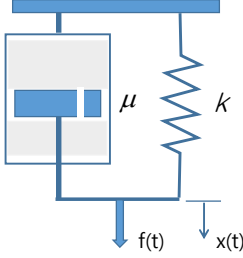
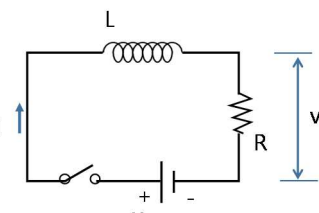
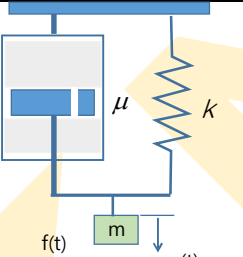
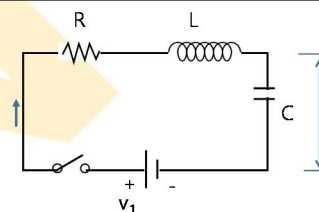
$$(s^2 C + s \frac{1}{R} + \frac{1}{L})\phi(s) = I(s)$$

$$\frac{\phi(s)}{I(s)} = \frac{1}{s^2 C + s \frac{1}{R} + \frac{1}{L}} \quad (1.196g)$$

아래 표에 질량, 데쉬포트와 스프링으로 구성된 기계 시스템과 저항, 커패시터와 인덕터로 구성된 전기 시스템의 전달함수를 나타내었다.

	기계 시스템	전기 시스템
--	--------	--------

비례 요소	 $f(t) = kx(t)$	 $v(t) = Ri(t)$
	$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{k} = K_p$ <p>K_p : 비례게인정수 (proportional gain constant)</p>	$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R} = K_p$
적분 요소	 $y(t) = \frac{1}{A} \int_0^t x(t) dt$	 $v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$
	$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{As} = \frac{K_i}{s}$ <p>K_i : 적분게인정수(integral gain constant)</p>	$G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs} = \frac{K_i}{s}$
미분 요소	 $f(t) = \mu v(t) = \mu \frac{dx(t)}{dt}$	 $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$
	$G(s) = \frac{F(s)}{X(s)} = \mu s = K_d s$ <p>K_d : 미분게인정수(differential gain constant)</p>	$G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = Ls = K_d s$

1 차 지연 요소	 $\mu \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$	 $v_1(t) = L \frac{di(t)}{dt} + v_2(t), \quad v_2(t) = Ri(t)$
	$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{\mu s + k} = \frac{K}{Ts + 1}$ $\tau = \frac{\mu}{k} : \text{시정수}$ $K = \frac{1}{k} : \text{게인정수}$ <p>(또는 컴프라이언스)</p>	$G(s) = \frac{E_2(s)}{E_1(s)} = \frac{1}{\frac{L}{R}s + 1} = \frac{1}{Ts + 1}$ $\tau = \frac{L}{R}$
2 차 지연 요소	 $m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \mu \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t)$	 $v_1(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_2(t)$ $v_2(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt, \quad i(t) = C \frac{dv_2(t)}{dt}$
	$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + \mu s + k}$ $= \frac{Kw_0^2}{s^2 + 2\zeta w_0 s + w_0^2}$ $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} : \text{고유주파수}$ $\zeta = \frac{\mu}{2\sqrt{mk}} : \text{감쇠계수}$ $K = \frac{1}{k} : \text{게인정수}$	$v_1(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_2(t)$ $= RC \frac{dv_2(t)}{dt} + LC \frac{d^2v_2(t)}{dt^2} + v_2(t)$ $G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$ $= \frac{Kw_0^2}{s^2 + 2\zeta w_0 s + w_0^2}$ $w_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$

여기서 게인(gain)은 이득값이라고도 부른다. 한편 시정수(time constant 또는 시간 상수)는 외부 변화에 대한 물체의 응답이 나타나는데 걸리는 시간을 말한다. 물리적으로 시정수는 시스템에 계단 함수 입력이 가해질 때 응답이 최종값의 약 63.2 % 에 도달하는데 걸리는 시간이다. 또한 지연요소란 입력에 대해서 출력의 반응이 시간적으로 지연(time delay)되어 나타난다는 의미이며, 1 차 지연요소는 전달함수가 s 에 대한 1 차 함수, 2 차 지연요소는 전달함수가 s 에 대한 2 차 함수를 의미한다.

아래에 RC, RL 전기회로의 자연응답(natural response)을 나타내었다. 자연응답이란 전압 또는 전류를 어느 시점에 갑자기 제거한 상태에서의 방전응답(discharging response)이다. 이 경우 회로에 저장된 에너지는 시간이 경과됨에 따라서 저항에서 점점 소모되며 시간이 많이 흐르면 회로에 남아있는 에너지는 0 에 가까워 진다. 반대로 강제응답(계단응답으로 다룸)은 전압 또는 전류를 어느 시점에 갑자기 인가한 상태에서의 충전응답(charging response)이다. 이 경우 시간이 많이 지나면 인덕터는 단락(short), 캐패시터는 개방(open) 상태로 된다. 위에서 기계 시스템과 전기 시스템은 상사관계가 있음을 알 수 있다.

키르호프의 전압법칙을 적용하여 전기회로(또는 루프) 내의 전압을 합하여 회로의 전달함수를 구하는 해석법을 루프 해석법(loop analysis) 또는 메쉬 해석법(mesh analysis)이라고 하며, 키르호프의 전류법칙을 적용하여 전기회로 내의 전류를 합하여 회로의 전달함수를 구하는 해석법을 마디 해석법(nodal analysis)이라고 한다.

(*) RL, RC 전기회로의 자연응답(natural response)

RL 회로와 RC 회로는 1 계 미분방정식으로 나타낼 수 있기 때문에 1 계회로(first-order circuit)라고도 불린다.

RL 전기회로에 초기 조건으로 전류 $i(0^-) = i(0^+) = I_0$ 가 가해질 때 회로에 흐르는 전류는 키르호프의 전압법칙에 대한 식으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
 L \frac{di}{dt} + Ri &= 0 \rightarrow L di + R i dt = 0 \\
 \frac{di}{i} &= -\frac{R}{L} dt \rightarrow \int \frac{di}{i} = -\int \frac{R}{L} dt \\
 \ln i(t) \Big|_{i(0)}^{i(t)} &= -\frac{R}{L} t \Big|_0^t \\
 \ln i(t) - \ln i(0) &= \ln \frac{i(t)}{i(0)} = \ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R}{L} t \\
 \therefore i(t) &= I_0 e^{-(t/\tau)}, \quad \tau = \frac{L}{R} : \text{time constant}
 \end{aligned} \tag{1.197a}$$

이 식으로부터 회로 전류는 시간 τ 에서 초기값 I_0 의 $e^{-1}(=0.37)$ 까지 떨어지며, 5τ 이후에는 $0.01I_0$ 까지 떨어진다는 것을 알 수 있다.

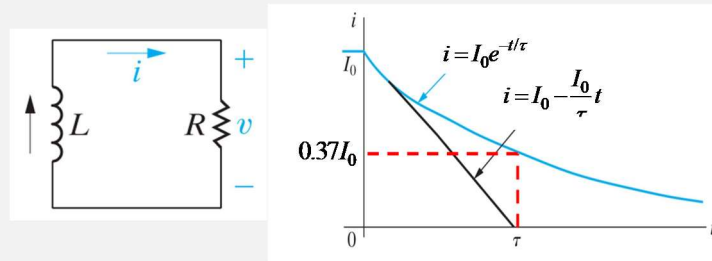


FIG. 1-59 RL 전기회로의 자연응답

한편 저항(또는 인덕터)에서 압력강하는

$$v(t) = Ri(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq 0^-) \\ RI_0 e^{-(t/\tau)} & (t \geq 0^+) \end{cases} \tag{1.197b}$$

저항에서 순간적으로 소모되는 전력(power)는 다음과 같다.

$$p(t) = i^2(t)R = I_0^2 R e^{-(2t/\tau)}, \quad (t \geq 0^+) \tag{1.197c}$$

또한 저항에서 소산되는 에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^t p(t) dt = I_0^2 R \int_0^t e^{-(2t/\tau)} dt, \quad (t \geq 0^+) \\
 &= W_0 [1 - e^{-(2t/\tau)}], \quad W_0 = \frac{LI_0^2}{2} \quad (t \geq 0^+)
 \end{aligned} \tag{1.197d}$$

RC 전기회로에 초기조건으로 전압 $v(0^-) = v(0^+) = V_0$ 가 가해질 때 회로에 흐르는 전압은 키르호프의 전류법칙에 대한 식으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \quad (1.197e)$$

$$v = V_0 e^{-(t/\tau)}, \quad \tau = RC$$

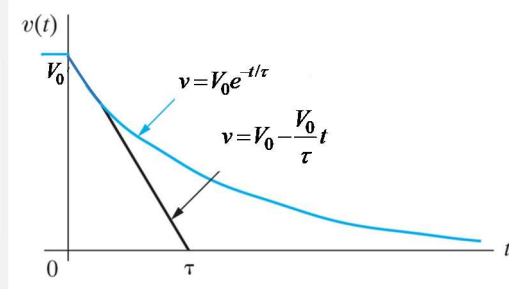
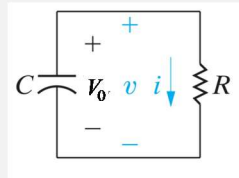


FIG. 1-60 RC 전기회로의 자연응답

한편 회로 전류는

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \begin{cases} 0 & (t \leq 0^-) \\ \frac{V_0}{R} e^{-(t/\tau)} & (t \geq 0^+) \end{cases} \quad (1.197f)$$

소모되는 전력은

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{V_0^2}{R} e^{-(2t/\tau)}, \quad (t \geq 0^+) \quad (1-917g)$$

또한 저항에서 소산되는 에너지는 다음과 같다.

$$W = \int_0^t p(t) dt = W_0 [1 - e^{-(2t/\tau)}], \quad W_0 = \frac{CV_0^2}{2} \quad (t \geq 0^+) \quad (1.197h)$$

RC 전기회로에 초기 조건으로 전압 $v(0^-) = v(0^+) = V_0$ 가 가해질 때 회로에 걸리는 전압은 키르호프의 전류법칙에 대한 식으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\tau}(v - V_f) \rightarrow \frac{dv}{v - V_f} = -\frac{1}{\tau}dt \quad (\tau = RC, \quad V_f = I_s R) \\ \int_{V_0}^v \frac{dv}{v - I_s R} &= -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt \\ \therefore v &= V_f + (V_0 - V_f)e^{-t/\tau}\end{aligned}\tag{1.197i}$$

한편 저항과 코일에 흐르는 가지전류는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned}i_C &= C \frac{dv}{dt} = (I_s - \frac{V_0}{R})e^{-t/\tau} \quad (t \geq 0^+) \\ i_R &= \frac{v}{R} \quad (t \geq 0^+)\end{aligned}\tag{1-917j}$$

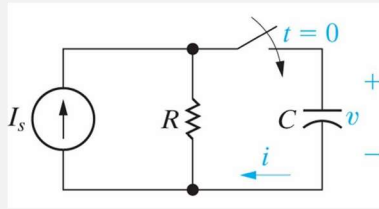


FIG. 1-61 RC 전기회로의 가지전류

RL 전기회로에 초기 조건으로 전류 $i(0^-) = i(0^+) = I_0$ 가 가해질 때 회로에 걸리는 전압은 키르호프의 전압법칙에 대한 식으로부터 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}V &= Ri + L \frac{di}{dt} \\ i &= I_f + (I_0 - I_f)e^{-t/\tau} \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad I_f = \frac{V_s}{R}\end{aligned}\tag{1.197k}$$

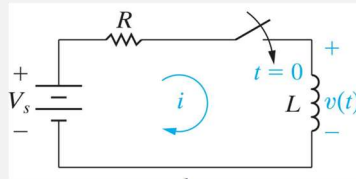


FIG. 1-62 RL 전기회로의 가지전류

1.8.2 닫힌 회로 제어

수도물을 눈금이 새겨져 있는 비이커에 1 리터 만큼 담으려 한다. 이 경우에 수도꼭지를 많이 열어서 (수도꼭지의 회전각을 크게 하여 초 당 물의 방출량을 많게 함) 비이커에 물을 담기 시작하고 눈으로 수도물이 비이커에 채워지는 것을 관찰하면서 물이 비이커의 1 리터 눈금 근처에 오면 수도꼭지를 서서히 잠궈서(수도꼭지의 회전각을 영으로 가져감) 물을 1 리터로 맞추어 1 리터가 넘지 않도록 한다.

이 문제를 다음과 같이 닫힌 회로(closed loop, 또는 폐회로)의 블록선도로 나타낼 수 있다.

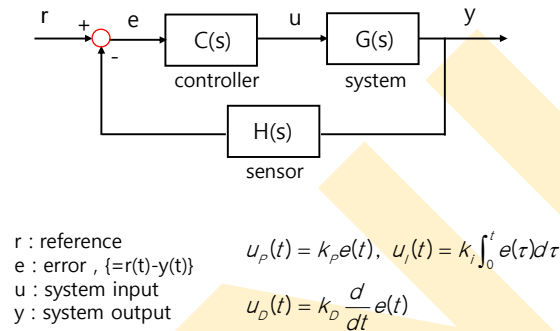


FIG. 1-63 닫힌 회로의 블록선도

위의 블록선도에서 r 은 목표로 하는 1 리터의 수도물, u 는 수도꼭지의 회전각, y 은 결과로서 비이커에 담긴 수도물 높이, e 는 비이커 1 리터 눈금과 비이커에 담긴 수도물 높이의 차이(error, 에러)이다. 여기서 시스템은 수도꼭지, 컨트롤러(controller, 제어기)는 수도꼭지의 회전각, 센서는 사람의 눈에 해당한다고 생각하면 된다.

센서 역할을 하는 눈이时时각각 비이커에 담기는 수도물의 높이를 1 리터 눈금과 비교한다. 물이 비이커의 1 리터 눈금 근처에 가까워 질수록 수도꼭지의 회전각을 점점 줄여서 물의 양을 줄여가면서 물을 1 리터로 맞춘다. 이 과정을 피드백(feedback, 귀환)이라고 한다.

이 닫힌 회로의 블록선도를 앞의 열린 회로의 블록선도와 비교하면 시스템 앞에 에러를 보상하기 위한 컨트롤러가 추가되어 있는 것을 알 수 있다.

이와 같이 목표값과 그 결과값의 차이(제어 문제에서는 통상 에러라고 부른다)를 비교하여 피드백하면서 출력을 제어하는 과정을 반복하는 것을 폐회로 제어라고 부른다. 수도 꼭지의 회전각을 점점 줄여가면서 목표값에 도달하게 하도록 물의 양을 조절하는 방법, 즉 제어하는 방법으로 다음과 같이 대표적인 비례제어, 적분제어와 미분제어 세가지 방법을 생각할 수 있다.

(a) 비례 제어(proportional control) 는 목표값과 결과값의 에러(또는 오차) $r(t)-y(t)$ 에 비례하여 제어 입력값 u 을 생성해 주는 모델이며, (b) 적분 제어(integral control)는 초기부터 나타난 에러를 적분하여 제어 입력값 u 를 생성하여 정상상태(steady-state) 오차를 없애는 모델이며, (c) 미분 제어(derivative control) 는 각 시점에서의 에러를 미분하여 제어 입력값 u 를 생성하여 출력값의 급격한 변화에 제동을 걸어 오버슈트(overshoot)을 줄이고 안정성(stability)을 향상시키는 모델이다.

간단한 경우로 비례 제어하는 경우에 시스템의 전달함수가 어떻게 나타나는 지에 대해서 검토해보자. 이 경우에 출력 $y(t)$ 의 라플라스 변환 $Y(s)$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$Y(s) = G(s)C(s)E(s), \quad (Y(s) = L\{y(t)\}, E(s) = L\{e(t)\}) \quad (1.198a)$$

여기서 에러값 $E(s)$ 는

$$E(s) = k_p[R(s) - Y(s)], \quad (R(s) = L\{r(t)\}) \quad (1.198b)$$

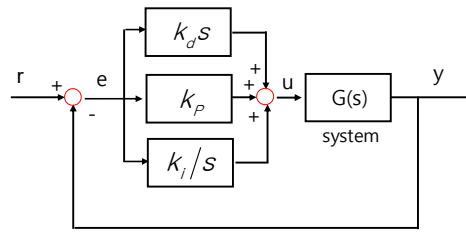
이므로 식 (1.197)에서 $Y(s)$ 는

$$Y(s) = R(s) \frac{k_p G(s)C(s)}{1 + k_p G(s)C(s)} \quad (1.199)$$

따라서 전체 시스템의 전달함수를 $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ 라고 하면 다음과 같이 나타내진다.

$$T(s) = \frac{k_p G(s)C(s)}{1 + k_p G(s)C(s)} \quad (1.200)$$

이들 모델이 개별적으로 작동하는 경우도 있지만 통상은 복합적으로 작용한다. 대표적인 모델이 다음과 같이 비례 제어, 적분 제어, 미분 제어를 병행하여 사용하는 PID 제어이다. 다음 그림은 PID 제어에서 비례 게인 K_p , 적분 게인 K_I , 미분 게인 K_d 의 크기가 시스템의 응답에 미치는 영향을 나타낸 예이다.



$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{d}{dt} e(t)$$

FIG. 1-64 PID 제어의 블록선도

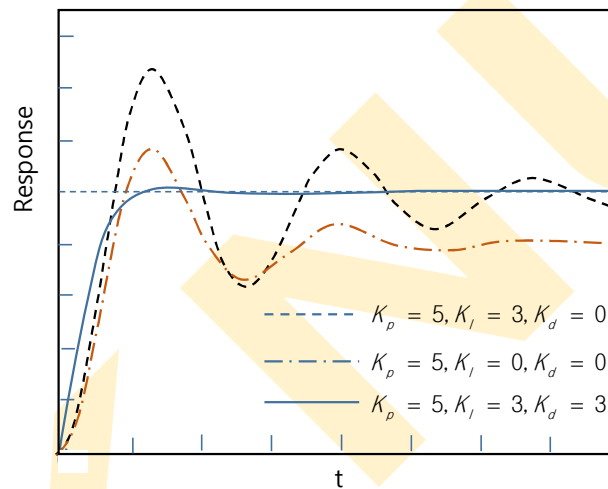


FIG. 1-64 PID 제어에서 비례게인, 적분게인, 미분게인의 영향

예를 들면 자동차의 자동순항(auto cruise) 운행은 대표적인 폐회로 제어이다. 자동차 엔진의 회전 속도계(tachometer)는 구동축의 회전 속도에 비례하여 전압을 생성한다. 입력 전압(원하는 속도)에서 이 전압을 빼서 에러 전압을 계산하고 에러 전압을 증폭 후 스로틀 밸브(throttle valve, 내연기관 자동차에서 연소를 위해 필요한 공기의 양을 조절하는 밸브)의 열림 각도를 조절하여 원하는 속도를 유지하도록 제어한다.

다음 그림 1-65 는 비례 제어를 이용한 자동차의 자동순항 운행개념도이다. 차량 속도는 스로틀 밸브의 열림각 θ_e 에 비례한다고 가정한다.

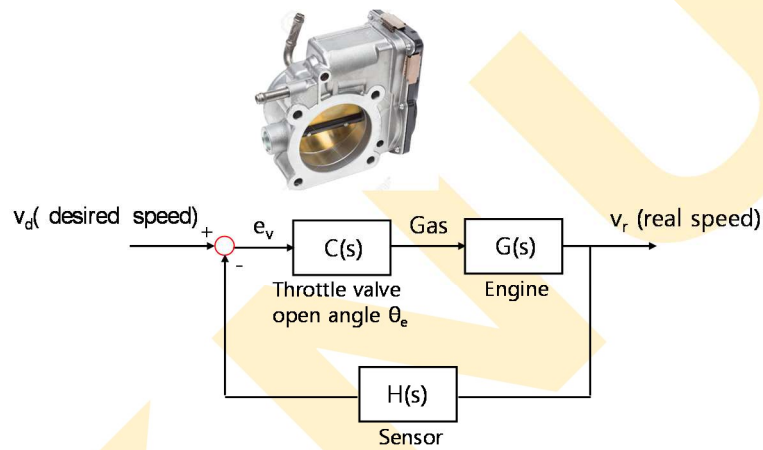
$$v_r = 10 \cdot \theta_e \quad (1.201)$$

운전자가 설정한 자동운행 속도 v_d 와 실제 현재 차량 속도 $v_r (< v_d)$ 의 차이에 일정한 비례계수를 곱하여 스로틀 벨브의 열림각을 조절하여 차량 속도가 자동운행 속도에 근접하도록 제어한다. 즉,

$$\theta_e = -k_p e_v = -k_p (v_r - v_d) \quad (1.202)$$

두 식으로부터

$$v_r = \frac{10 \cdot k_p}{1 + 10 \cdot k_p} v_d \quad (1.203a)$$



$$e_v : \text{error in velocity, } \{=v_r - v_d\} \quad v_r = 10 \cdot \theta_e$$

$$\theta_e = -k_p e_v = -k_p (v_r - v_d)$$

FIG. 1-65 자동차의 자동순항 제어를 위한 블록선도

$k_p = 10$ 으로 하면

$$v_r = \frac{10 \cdot k_p}{1 + 10 \cdot k_p} v_d = \frac{100}{101} v_d = 0.99 v_d$$

실제 차량 속도는 설정된 자동순항 속도의 99%에 근접한 것을 알 수 있다.

이 닫힌 회로에 대한 전달함수는 식 (1.203a)의 양변을 라플라스 변환하는 것에 의해 다음 식으로 나타내진다.

$$T(s) = \frac{V_r(s)}{V_d(s)} = \frac{10 \cdot k_p}{1 + 10 \cdot k_p} \quad (= \frac{Y(s)}{R(s)}) \quad (1.203b)$$

이 식을 식 (1.200)과 같은 형식이라는 것을 알 수 있다.

예제 1-52 외부에서 충격이 가해졌을 때 자동차 차체의 운동에 서스펜션이 미치는 영향을 평가하기 위한 모델을 다음 그림에 나타내었다. 이 문제의 전달함수를 나타내어라.

[해] 여기서 차체는 고체 질량(solid mass) M 으로 나타내었고, 자동차 바퀴(wheel)와 타이어(tire)의 영향은 무시한 것으로 하였다. 정차되어 있던 차량에 운전자가 타는 경우를 상정하면 입력은 운전자의 몸무게 $f(t)$ 이고, 출력 $y(t)$ 는 차량의 수직방향 변위 로 생각할 수 있다.

차체 시스템 운동 방정식은 식 (1.148a)에서와 같이 다음과 같이 나타내진다.

$$M \ddot{y}(t) = F_s(t) + F_d(t) + f(t) = -ky(t) - c\dot{y}(t) + f(t) \quad (1.204)$$

따라서 양변에 라플라스 변환을 취하면

$$s^2 Y(s) = -\frac{k}{M} Y(s) - \frac{c}{M} s Y(s) + \frac{1}{M} F(s) \quad (1.205)$$

이 식으로부터

$$Y(s) = \frac{1}{Ms^2 + cs + k} F(s) \quad (1.206)$$

따라서 외부 충격에 대한 차량의 수직방향 변위의 전달함수 $G(s)$ 는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + cs + k} \quad (= \frac{Y(s)}{R(s)}) \quad (1.207)$$

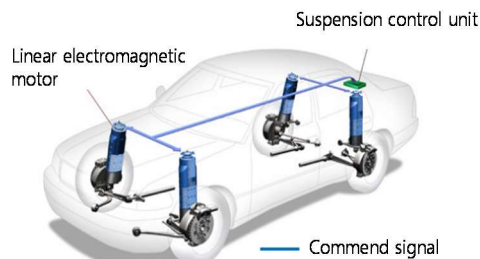
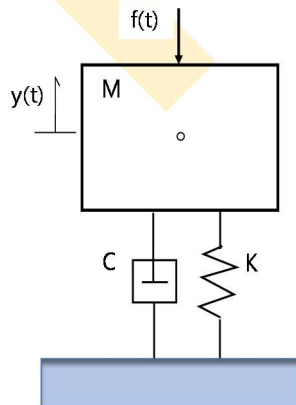


FIG. 1-66 자동차 차체 진동이 서스펜션에 미치는 영향 평가 모델

예제 1-53 위의 문제에서 자동차 바퀴의 영향도 함께 고려한 운동방정식을 구하고 전달함수를 나타내어라. 이 경우의 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

[해] 차체와 바퀴에 작용하는 힘 성분들을 표시한 자유물체도(free-body diagram)를 참고로 차체와 바퀴의 운동방정식을 구하면 다음과 같다.

(i) 차체의 운동방정식:

$$M_1 \ddot{y}_1(t) = -k_1 \{y_1(t) - y_2(t)\} - c \{\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\} \quad (1.208a)$$

(ii) 바퀴의 운동방정식:

$$M_2 \ddot{y}_2(t) = k_1 \{y_1(t) - y_2(t)\} - k_2 \{y_2(t) - u(t)\} + c \{\dot{y}_1(t) - \dot{y}_2(t)\} \quad (1.208b)$$

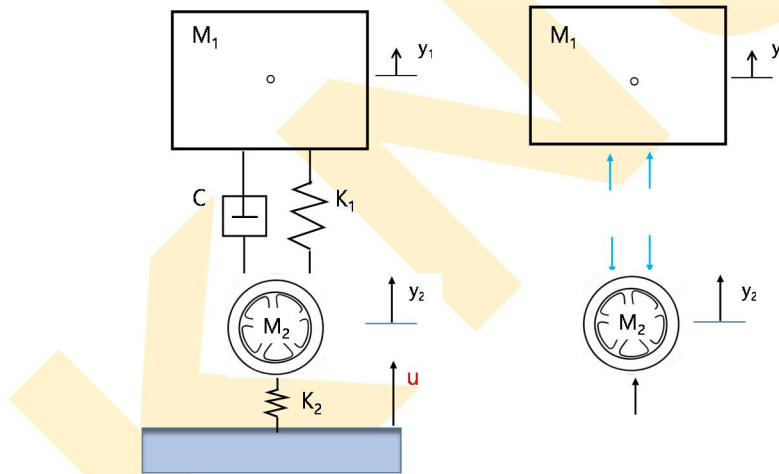


FIG. 1-67 자동차 차체와 바퀴의 진동이 서스펜션에 미치는 영향 평가 모델

식 (1.208a)에 라플라스 변환을 취하면

$$\begin{aligned} M_1 s^2 Y_1(s) &= -k_1 \{Y_1(s) - Y_2(s)\} - c \{s Y_1(s) - s Y_2(s)\} \\ &\rightarrow \{M_1 s^2 + k_1 + cs\} Y_1(s) = \{k_1 + cs\} Y_2(s) \end{aligned} \quad (1.209a)$$

식 (1.208b)에 라플라스 변환을 취하면

$$\begin{aligned}
 M_2 s^2 Y_2(s) &= k_1 \{Y_1(s) - Y_2(s)\} - k_2 \{Y_2(s) - U(s)\} + c \{s Y_1(s) - s Y_2(s)\} \\
 &\rightarrow \{M_2 s^2 + k_1 + k_2 + cs\} Y_2(s) = \{k_1 + cs\} Y_1(s) + k_2 U(s)
 \end{aligned} \quad (1.209b)$$

이 문제 경우에 입력은 차량이 방지턱을 지날 때의 변위 $u(t)$ 이고, 출력은 차량과 바퀴의 수직방향 변위 $y_1(t)$ 과 $y_2(t)$ 로 생각할 수 있다.

식 (1.209a)에서 $Y_2(s)$ 를 식 (1.209b)에 대입하면

$$\left[\left(\frac{M_1 s^2 + k_1 + cs}{k_1 + cs} \right) (M_2 s^2 + k_1 + k_2 + cs) - (k_1 + cs) \right] Y_1(s) = k_2 U(s) \quad (1.210)$$

따라서 방지턱의 변위에 대한 차량의 수직방향 변위의 전달함수 $G(s)$ 는 다음과 같다.

$$G(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{k_2}{\left(\frac{M_1 s^2 + k_1 + cs}{k_1 + cs} \right) (M_2 s^2 + k_1 + k_2 + cs) - (k_1 + cs)} \quad (1.211)$$

예제 1-54 가능한 모든 시스템 변수 중에서 시스템 특성을 나타내는데 필요한 최소의 변수들을 상태 변수(state variable)라고 하고, 상태 변수에 대한 1 계 선형 연립방정식을 상태 방정식(state equation)이라고 한다. 또한 시간 영역에서 시스템을 해석하고 설계하는 기법을 상태 공간 기법이라고 한다. 위 문제에서 식 (1.208b), 식 (1.208b)의 2 계 미분방정식의 계수를 낮추어 1 계 선형 연립방정식 형태로 만들고 상태 공간 모델(State space model)을 구성하라.

[해] 1.7.5 절에 논한 것과 같이 2 계 미분방정식의 계수를 낮추어 1 계 선형 연립미분방정식의 형태로 만들면 해를 구할 수 있다. 즉 식 (1.208a), 식 (1.208b)에 다음과 같은 새로운 변수 z_i 를 도입한다.

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = \dot{x}_1, \quad z_3 = x_2, \quad z_4 = \dot{x}_2 \quad (1.212)$$

그러면 미분방정식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -\frac{k_1}{M_1}(z_1(t) - z_3(t)) - \frac{c}{M_1}(z_2(t) - z_4(t)) \\ \dot{z}_3(t) = z_4(t) \\ \dot{z}_4(t) = \frac{k_1}{M_2}(z_1(t) - z_3(t)) - \frac{k_2}{M_2}(z_3(t) - u(t)) + \frac{c}{M_2}(z_2(t) - z_4(t)) \end{cases} \quad (1.213)$$

이 식을 다시 정리하면

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_2(t) \\ \dot{z}_2(t) = -\frac{k_1}{M_1}z_1(t) - \frac{c}{M_1}z_2(t) + \frac{k_1}{M_1}z_3(t) + \frac{c}{M_1}z_4(t) \\ \dot{z}_3(t) = z_4(t) \\ \dot{z}_4(t) = \frac{k_1}{M_2}z_1(t) + \frac{c}{M_2}z_2(t) - \left(\frac{k_1}{M_2} + \frac{k_2}{M_2}\right)z_3(t) - \frac{c}{M_2}z_4(t) - \frac{k_2}{M_2}u(t) \end{cases} \quad (1.214)$$

이 식을 행렬형식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{M_1} & -\frac{c}{M_1} & \frac{k_1}{M_1} & \frac{c}{M_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{M_2} & \frac{c}{M_2} & -(\frac{k_1}{M_2} + \frac{k_2}{M_2}) & -\frac{c}{M_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{k_2}{M_2} \end{Bmatrix} u(t) \quad (1.215)$$

이와 같은 행렬형식의 1 계 선형 미분방정식을 상태 공간 모델이라고 부른다. 상태공간 모델이란 물리적 계를 입력, 출력, 상태 변수의 1 계 미분방정식으로 표현된 수학적 모델을 행렬 형태로 나타낸 것이다.

1.8.3 단위 계단 함수와 충격 함수에 대한 응답

다음의 초기 조건을 만족하는 미분 방정식에 대한 해를 $y(t)$ 라고 하면

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad (1.216)$$

$$t=0; \quad y=y_0, \quad y'=v_0 : \text{초기조건} \quad (1.217)$$

라플라스 변환을 통해 다음 식이 얻어진다.

$$Y(s) = \frac{(as+b)y_0 + av_0}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c}, \quad F(s) = L\{f(t)\} \quad (1.218)$$

여기서

$$Z(s) = as^2 + bs + c \quad (1.219)$$

라고 두면 식 (1.218)은 다시 다음 식으로 나타내진다.

$$Y(s) = \frac{A(s)}{Z(s)} + \frac{F(s)}{Z(s)}, \quad A(s) = (as+b)y_0 + av_0 \quad (1.220)$$

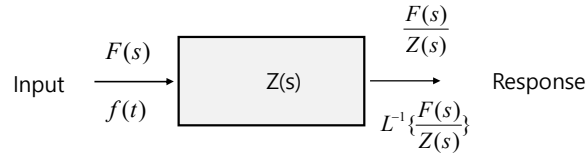


FIG. 1-68 시스템의 전달함수와 임피던스 응답

이 때 함수 $Z(s)$ 는 주어진 정수 계수 선형 미분방정식 (1.216)의 좌변에 있는 미분연산자에 의해 결정되는 것으로, 임피던스(impedance, 온저항 On-resistance)라고 부른다. 임피던스는 전기 회로에서 전압이 가해졌을 때 전류의 흐름을 방해하는 값이다. 임피던스의 값은 교류 회로의 전압과 전류의 비로 나타낼 수 있다. 임피던스의 역수를 어드미턴스(admittance) 라고 부르며 교류회로에서 전류가 얼마나 잘 흐르는 가를 나타낸다.

식 (1.220)의 해 $y(t)$ 는 다음 두 해의 합으로 나타낼 수 있다.

$$y_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{A(s)}{Z(s)}\right\}, \quad y_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{Z(s)}\right\} \quad (=x(t)) \quad (1.221)$$

여기서 $y_1(t) = L^{-1}\left\{\frac{A(s)}{Z(s)}\right\}$ 는 주어진 미분방정식의 우변에 무관계하며 초기조건 (1.217)을 만족하는 동차방정식 $ay''+by'+cy=0$ 의 해가 된다. 또한 $y_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{Z(s)}\right\}$ 는 미분방정식의 초기조건 ($t=0, y=0, y'=0$)을 만족하는 해이다. 이 해 $y_2(t)$ 를 미분방정식 (1.216)의 초기 정지해라고 한다. 또한 이 $y_2(t) = L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{Z(s)}\right\}$ 를 입력함수 $f(t)$ 에 대응하는 임피던스 응답(impedance response)라고 부른다. 특히 입력함수 $f(t)$ 가 단위 계단 함수 $U(t)$ 일 때, 즉 $f(t)=U(t)$ 에 대한 $Z(s)$ 의 응답을 단위 계단 응답(unit step response)이라고 한다.

이 단위 계단 응답을 $g(t)$ 라고 하면 식 (1.176)에서 $F(s) = L\{f(t)\} = L\{U(t)\} = \frac{1}{s}$ 이므로

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{sZ(s)}\right\} \quad (= y_2(t)) \quad (1.222)$$

가 되어, 임피던스 $Z(s)$ 에 의해서 완전히 결정된다는 것을 알 수 있다.

한편 입력 함수 $f(t)$ 가 충격 함수 $\delta(t)$ 일 때는 $f(t) = \delta(t)$ 에 대응하는 $Z(s)$ 의 응답을 충격 응답이라고 한다. 충격 응답을 $h(t)$ 라고 하면 식 (1.179a)에서 $L\{f(t)\} = L\{\delta(t)\} = 1$ 이므로

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{Z(s)}\right\} \quad (1.223)$$

가 되어, 역시 임피던스 $Z(s)$ 에 의해서 완전히 결정된다는 것을 알 수 있다.

식 (1.222)와 식 (1.223)로부터 단위 계단 응답과 충격 응답 사이에는 다음 관계가 있음을 알 수 있다.

$$h(t) = g'(t) \quad (1.224)$$

한편 임피던스 $Z(s)$ 의 입력 함수 $f(t)$ 에 대한 응답을 $x(t)$ 라고 하였으므로

$$x(t) = L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{Z(s)}\right\}, \quad L\{x(t)\} = \frac{F(s)}{Z(s)} \quad (1.225)$$

이 식을 변형하면 다음과 같은 관계를 나타낼 수 있다.

$$L\{x(t)\} = \{F(s)\} \left\{\frac{1}{Z(s)}\right\} = \{sF(s)\} \left\{\frac{1}{sZ(s)}\right\} = s\{F(s)\} \left\{\frac{1}{sZ(s)}\right\} \quad (1.226)$$

여기서 식 (1.172)와 식 (1.222) 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} L\{x(t)\} &= \{sF(s)\} \left\{\frac{1}{sZ(s)}\right\} = [L\{f'(t)\} + f(0)][L\{g(t)\}] \\ &= [L\{f'(t)\}][L\{g(t)\}] + f(0)[L\{g(t)\}] \end{aligned} \quad (1.227)$$

따라서 라플라스 역변환을 수행하고 식 (1.181)의 합성곱의 관계를 이용하면

$$x(t) = f(0)g(t) + f'(t) * g(t) \quad (1.228)$$

만일 입력 함수 $f(t)$ 가 연속이라면 다음 식이 성립한다.

$$x(t) = f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (1.229)$$

통상 시스템에 계단 함수로 입력이 주어지는 경우에 시스템의 응답 특성을 계단 응답(step response)이라고 하며, 단위 계단 함수 $u(t)$ 로 입력이 주어졌을 때 시스템의 단위 계단 응답은 인디셜 응답(indicial response)이라고도 한다.

예제 1-55 다음의 임피던스 $Z(s)$ 에 대해서 단위 계단 응답 $g(t)$ 과 충격 응답 $h(t)$ 을 구하라.

$$(a) \quad Z(s) = 2s + 3 \quad (b) \quad Z(s) = s^2 - 3s + 2$$

[해] (a)

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{sZ(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(2s+3)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{3}\frac{1}{s} - \frac{2}{3}\frac{1}{2s+3}\right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{Z(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{2s+3}\right\} = \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}$$

(b)

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{sZ(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2-3s+2)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-2)(s-1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \frac{1}{2} - e^t + \frac{1}{2}e^{2t}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{Z(s)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3s+2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)(s-1)}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^{2t} - e^t$$

예제 1-56 다음의 입력함수 $f(t)$ 에 관한 임피던스 $Z(s) = s-1$ 의 응답 $x(t)$ 를 구하라.

$$f(t) = \begin{cases} 2t+1 & (0 \leq t \leq 1) \\ 3 & (t > 1) \end{cases}$$

[해] 입력 함수 $f(t)$ 가 연속이므로 식 (1.229)를 이용한다. 먼저 $Z(s)$ 의 단위 계단 응답 $g(t)$ 를 구하면

$$g(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}\right\} = e^t - 1$$

또한

$$f'(t) = \begin{cases} 2 & (0 \leq t \leq 1) \\ 0 & (t > 1) \end{cases}$$

이므로 식 (1.229)로부터 $0 \leq t \leq 1$ 인 범위에서 응답 $x(t)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} x(t) &= f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= e^t - 1 + \int_0^t 2(e^{t-\tau} - 1)d\tau = 3e^t - 2t - 3 \end{aligned}$$

$t > 1$ 인 범위에서 응답 $x(t)$ 는 다음과 같이 구해진다.

$$x(t) = e^t - 1 + \int_0^t 2(e^{t-\tau} - 1)d\tau = 3e^t - 2e^{t-1} - 3$$

예제 1-57 다음 그림과 같이 저항과 축전기로 이루어진 R-C 직렬 전기회로에 식 (1.175)의 단위 계단 함수 $u(t)$ 로 입력이 주어졌을 때 시스템의 전달함수와 응답을 구하라. 또한 이 시스템에 대한 블록선도를 나타내어라.

[해] 키르호프의 전압 법칙에 의해 회로의 입력전압 $v_i(t)$, 출력전압 $v_o(t)$, 전류 $i(t)$ 에 대해서 다음의 관계가 성립한다.

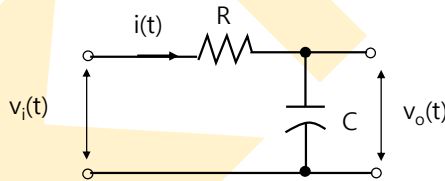


FIG. 1-69 R-C 전기회로

$$\left. \begin{aligned} v_i(t) &= Ri(t) + v_o(t) \\ i(t) &= C \frac{dv_o(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.230)$$

각각의 식에 라플라스 변환을 적용하면

$$\left. \begin{aligned} V_i(s) &= RI(s) + V_o(s) \\ I(s) &= CsV_o(s) \end{aligned} \right\} \quad (1.231)$$

따라서 전달함수는 다음과 같이 구해진다.

$$G(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1+RCs} \quad \left(= \frac{1}{1+\tau s}, \quad \tau = RC \right) \quad (1.232)$$

이 전달함수의 우변의 분모는 s 에 대한 1 차식이며, 이 시스템은 1 차 지연시스템이다. 다음에 입력 전압 $v_i(t)$ 가 단위 계단함수로 주어진 경우에 응답 $v_o(t)$ 을 구하면 $V_o(s) = G(s)V_i(s) = G(s)U(s)$ 이므로 라플라스 역변환으로부터

$$\begin{aligned} v_o(t) &= L^{-1}\{V_o(s)\} = L^{-1}\{G(s)U(s)\} \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1}{1+RCs} \cdot \frac{1}{s}\right\} \quad (Eq.(1-176), L\{u(t)\} = \frac{1}{s}) \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{RC}{1+RCs}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right\} \\ &= 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \quad (= 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned} \quad (1.233)$$

이 문제의 입력 전압과 응답 전압을 아래에 나타내었다.

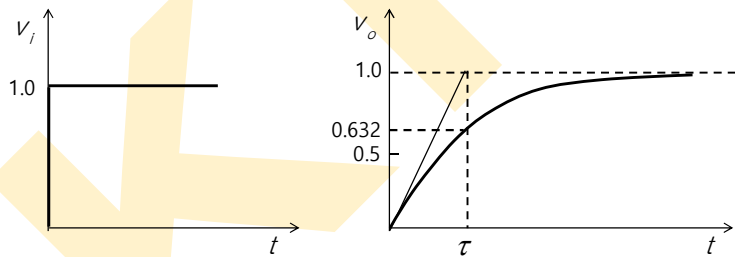


FIG. 1-70 R-C 전기회로에서 입력전압과 응답전압

즉, 저항과 축전기로 이루어진 R-C 직렬 전기회로는 1 차지연요소로 1 차 지연 시정수는 목표값의 0.632 에 달할 때 까지의 시간이라 것을 알 수 있다. R-C 직렬 회로에서 직류 전원을 투입했을 때, 축전기의 충전 전압이 전원 전압의 63.2% 까지 충전되는 시간을 말하고, 어떤 전압으로 충전되어 있었던 축전기 C 를 어떤 저항을 통해서 방전시켰을 때,

축전기의 전압이 최초 전압의 36.8% 가 되는 시간을 말한다. R-C 직렬 전기회로에서는 시정수가 작을수록 목표값에 빨리 도달한다.

이 문제에서 만일 저항이 $100k\Omega$ 이고 축전기 용량이 $10\mu F$ 이면 시정수 τ 는 $\tau = RC = (100 \times 10^3 \Omega) \times (10 \times 10^{-6} F) = 1s$ 이다.

참고로 R-L 직렬 전기회로에서 시정수는 직류 전원을 투입했을 때, 흐르는 전류가 V/R [A] 의 63.2% 가 되는 시간을 말하고, 어떤 값의 직류전류가 흐르고 있었을 때, 전원을 제거하고 단락시켰을 때 흐르는 전류가 원래 전류의 36.8% 가 되는 시간을 말한다.

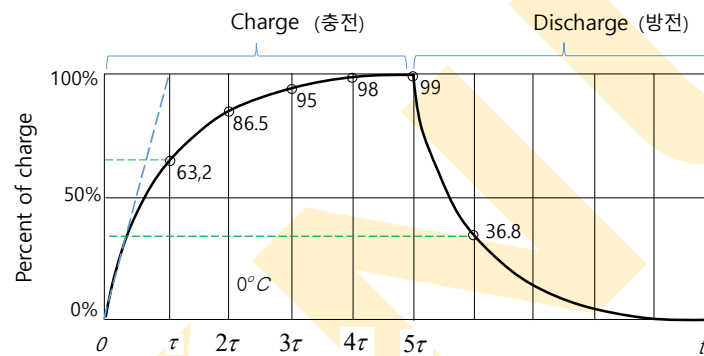


FIG. 1-71 R-C 전기회로에서 축전기의 충, 방전거동과 시정수

이 전기회로에 대한 블록선도는 다음 그림 1-72 과 같이 나타낼 수 있다.

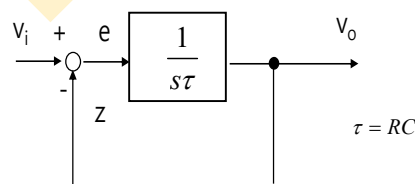


FIG. 1-72 R-L 전기회로의 블록선도

이 R-C 전기회로는 다양한 입력 주파수가 들어올 때 고주파 신호를 차단하고 주로 저주파 신호만을 통과시키는 저주파 필터(Low-pass filter, LPF)의 기능을 갖는 것으로 알려져 있다. 참고로 고주파 필터(High-pass filter, HPF)는 주로 고주파 신호를 통과시키는 필터이고, 밴드 패스 필터(band pass filter)는 특정 주파수 이상과 이하의 주파수를 제거하고 출력하는 필터이다.

예제 1-58 임의의 각 주파수 ω 에서 주파수 전달함수 $G(j\omega)$ 가 다음으로 주어질 때 게인 [dB]와 위상을 구하라.

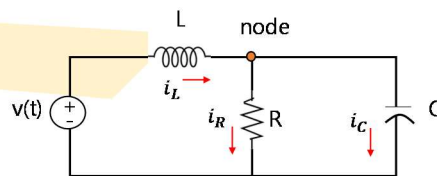
[해]

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{5}{1+2j} \quad (s = j\omega = j2, \omega = 2) \\ &= \frac{5}{1+2j} \times \frac{1-2j}{1-2j} = \frac{5(1-2j)}{5} = 1-2j \end{aligned}$$

따라서 $g = 6.99[\text{dB}]$, $\phi = -63.5^\circ$ 이다.

예제 1-59 다음과 같이 여러 개의 루프로 구성된 전기 회로에서 저항에 흐르는 전류를 출력으로 할 때 이 회로를 상태 공간에서 나타내어라.

[해]



$$i_L = i_R + i_C$$

$$v_L = v_R + v_C$$

FIG. 1-73 RCL 전기회로

인덕터에 흐르는 전류와 콘덴서에 축적되는 전압은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C, \quad L \frac{di_L}{dt} = v_L \quad (1.234)$$

이 식에서 미분항에 포함된 v_C 와 i_L 을 상태 변수로 선정한다. 우변의 v_L 와 i_C 을 상태 변수인 v_C 와 i_L 으로 표시하면

$$\begin{aligned} v_L &= v(t) - v_C \\ i_C &= i_L - i_R = i_L - \frac{1}{R}v_C \end{aligned} \quad (1.235)$$

따라서 식 (1.134)로부터 다음과 같은 상태 방정식이 얻어진다.

$$\begin{cases} C \frac{dv_C}{dt} = i_L - \frac{1}{R}v_C \\ L \frac{di_L}{dt} = v(t) - v_C \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{RC}v_C \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v(t) - \frac{1}{L}v_C \end{cases} \quad (1.236)$$

또한 출력은 $i_R(t)$ 이므로 출력 방정식은 다음과 같다.

$$i_R(t) = \frac{1}{R}v_C \quad (1.237)$$

이들 식은 다음과 같이 행렬 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{v}_C \\ \dot{i}_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} v(t) \quad (1.238)$$

$$i_R = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_C \\ i_L \end{Bmatrix} \quad (1.239)$$

이 행렬 방정식은 $\dot{x} = Ax + Bu$ 과 같이 표현된다.

예제 1-60 다음 병진 운동을 하는 기계 시스템에 대한 상태 방정식을 나타내어라.

[해]

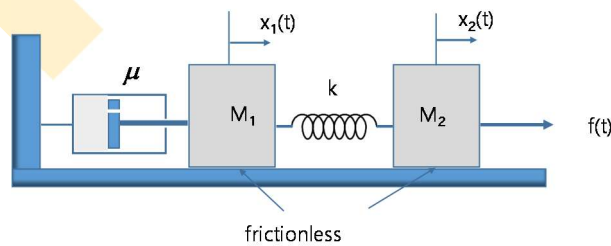


FIG. 1-74 스프링-질량-댐퍼 진동 시스템

$$M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \mu \frac{dx_1}{dt} + kx_1 - kx_2 = 0 \quad (1.240a)$$

$$-kx_2 + M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + kx_2 = f(t) \quad (1.240b)$$

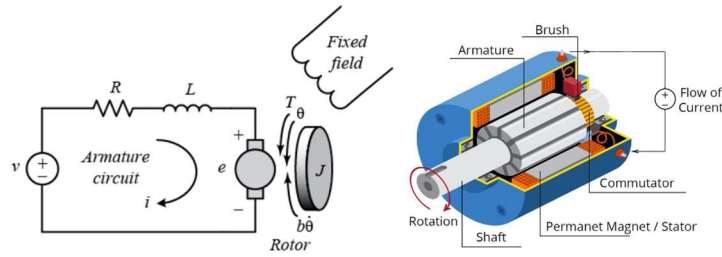
여기서 $v_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $v_2 = \frac{dx_2}{dt}$, $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{dv_1}{dt}$, $\frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{dv_2}{dt}$ 이므로 x_1, v_1, x_2, v_2 를 상태변수로 정한다. 식 (1.240a)에서 $\frac{dv_1}{dt}$ 을 구하고 식 (1.240b)에서 $\frac{dv_2}{dt}$ 를 구하면, 다음과 같이 두 개의 상태방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= v_1 \\ \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{k}{M_1} x_1 - \frac{\mu}{M_1} v_1 + \frac{k}{M_1} x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{k}{M_2} x_1 - \frac{k}{M_2} x_2 + \frac{1}{M_2} f(t) \end{aligned} \quad (1.241)$$

이 식을 행렬형식으로 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M_1} & -\frac{\mu}{M_1} & \frac{k}{M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M_2} & 0 & -\frac{k}{M_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M_2} \end{Bmatrix} f(t) \quad (1.242)$$

예제 1-61 DC 모터는 제어 시스템의 일반적인 액추에이터로 널리 사용되고 있다. 이 DC 모터는 회전 운동을 직접 제공하고 바퀴 또는 드럼 및 케이블과 결합하여 병진 운동을 제공할 수 있다. 전기자(armature)의 전기 등가 회로와 로터의 자유 물체 다이어그램(free-body diagram)을 다음 그림 1-75에 나타내었다. DC 모터로 구동되는 회전 기계 시스템에 대한 상태 방정식을 나타내어라.



$$v = Ri + L \frac{di}{dt} + e = Ri + L \frac{di}{dt} + K\omega \quad (\omega = \dot{\theta})$$

$$T (= Ki) = J \frac{d\omega}{dt} + b\omega$$

J : moment of inertia

b : viscous friction coefficient

K : motor torque constant and back emf constant

FIG. 1-75 DC 모터로 구동되는 기계시스템

[해] 여기서 시스템의 입력이 모터의 전기자에 적용된 전압 소스 v 이고 출력은 샤프트의 회전 속도 θ 라고 가정한다. 로터와 샤프트는 단단하다고 가정하고, 마찰 토크가 샤프트의 각속도 $\omega (= \dot{\theta})$ 에 비례하는 점성 마찰 모델(viscous friction model)을 가정한다.

일반적으로 DC 모터에 의해 생성되는 토크는 전기자 전류와 자기장의 강도에 비례한다. 여기서 자기장이 일정하다고 가정하면 모터 토크는 아래 방정식과 같이 일정한 계수 K 만큼 전기자 전류 i 에만 비례하며 또한 역기전력(back electromotive force(emf)) e 는 일정한 계수 K 에 의해 샤프트의 각속도에 비례한다. 이를 전기자 제어 모터(armature-controlled motor)라고 한다.

위의 그림에서 다음과 같이 키르호프의 전압법칙과 기계적 운동에 대한 지배 방정식을 유도 할 수 있다.

$$\begin{aligned} v &= Ri + L \frac{di}{dt} + K\omega \quad \left(\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \right) \\ T_e (= Ki) &= J \frac{d\omega}{dt} + b\omega \end{aligned} \quad (1.243a)$$

이 식에 라플라스 변환을 적용하면 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} V(s) &= (R + Ls)I(s) + Ks\Phi(s) \\ KI(s) &= s(Js + b)\Phi(s) \end{aligned} \quad (1.243b)$$

전기자의 전압을 입력으로 하고 모터의 회전속도를 출력으로 하고 위 식에서 $I(s)$ 를 제거하면 전기자 제어 DC 모터의 전달함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\Phi(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1.244)$$

$$H(s) = K, \quad G(s) = K \left(\frac{1}{Js + b} \right) \left(\frac{1}{Ls + R} \right)$$

식 (1.243)의 지배 방정식은 회전 속도와 전류를 상태 변수로 선택하여 다음과 같이 상태 공간 형식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \omega \\ i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & \frac{k}{J} \\ -\frac{k}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega \\ i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} v \quad (1.245)$$

이 DC 모터로 구동되는 제어 시스템에 대한 블록선도는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

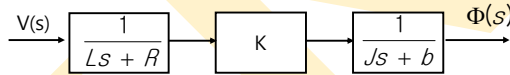


FIG. 1-76 DC 모터로 구동되는 기계시스템의 블록선도

(㉞) 식 (1.20v) 유도

Fick' s 의 확산 제 2 법칙은 반도체 공정에서 불순물 원자 (impurity 또는 dopant)를 첨가하는 도핑과정(doping), 철강 부품에 탄소 또는 질소를 주입하는 침탄(carburizing), 질화(Nitrizing) 과정 등과 같이 물질 내 원자의 이동에 의한 확산 현상해석에 널리 이용된다. Fick' s 의 확산 제 2 법칙은 다음과 같이 나타내진다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.246a)$$

여기서 가우스 오차함수를 활용하여

$$y = f(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \quad (1.246b)$$

라고 두고 이 식을 x 와 t 에대해서 각각 편미분하면

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{Dt}}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{x}{4\sqrt{Dt^3}} \quad (1.246c)$$

식 (a)에서

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{dC}{dy} \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{x}{4\sqrt{Dt^3}} \frac{dC}{dy}, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{dC}{dy} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] = \frac{1}{4Dt} \frac{d^2 C}{dy^2} \quad (1.246d)$$

식 (c) 와 식 (d)를 식 (a) 에 대입하면

$$\frac{dC}{dy} = -\frac{\sqrt{Dt}}{x} \frac{d^2 C}{dy^2} \quad (1.246e)$$

식 (e)와 식 (b)으로부터

$$\frac{dC}{dy} = -\frac{1}{2y} \frac{d^2 C}{dy^2} \quad (1.246f)$$

$z = \frac{dC}{dy}$ 이라고 하면 식 (f)는 다음과 같이 나타내진다.

$$z = -\frac{1}{2y} \frac{dz}{dy} \quad (1.246g)$$

이 식을 적분하면

$$-2 \int y dy = \int \frac{dz}{z} \rightarrow -y^2 = \ln z - \ln B \quad (1.246h)$$

B 는 적분상수이다. 이를 정리하면 다음 식이 얻어진다.

$$z = B \exp(-y^2) \quad (1.246i)$$

z 의 정의, $z = \frac{dC}{dy}$, 를 이용하면

$$\int dC = B \int \exp(-y^2) dy \quad (1.246j)$$

여기서 $\exp(-y^2)$ 는 종모양의 함수 곡선(bell-shaped curve)으로 통상 통계에서는 이 함수를 정규 함수 또는 가우시안 함수라고 부른다.

식 (j)를 풀기 위해서는 경계조건과 C 그리고 파라미터 y 가 필요하다.

(1) 첫 번째 경계조건:

$$C = \begin{cases} C_x = C_0 & \text{for } y=0 \text{ at } t>0 \text{ and } x=0 \\ C_x = C_b & \text{for } y=\infty \text{ at } t=0 \text{ and } 0 < x < \infty \end{cases} \quad (1.246k)$$

이 경계조건을 적용하여 식 (j)를 적분하면

$$\int_{C_0}^{C_b} dC = B \int_0^\infty \exp(-y^2) dy,$$

$$\text{error function : } \int_0^\infty \exp(-y^2) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{-\infty}^\infty \exp(-y^2) dy = \sqrt{\pi}$$

$$\text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-y^2) dy, \quad \text{erf}(0) = 0, \quad \text{erf}(\infty) = 1 \quad (1.246l)$$

$$\text{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^\infty \exp(-y^2) dy, \quad \text{erf}(y) + \text{erfc}(y) = 1$$

$$C_b - C_0 = B \frac{\sqrt{\pi}}{2} \rightarrow B = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (C_b - C_0)$$

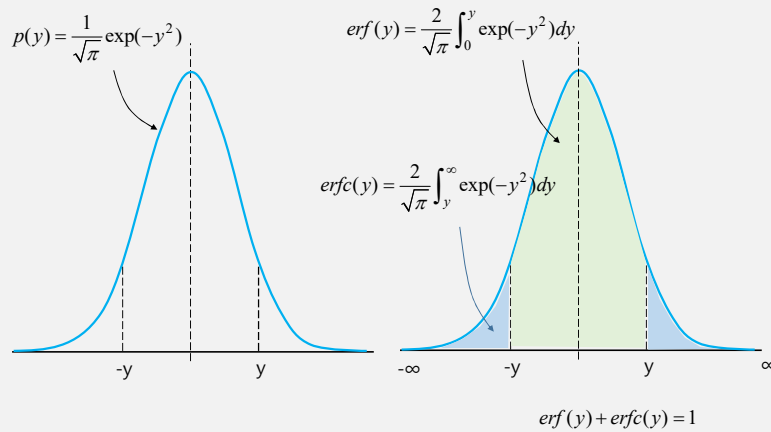


FIG. 1-77 에러 함수

여기서 $\text{erf}(y)$ 는 오차함수(error function), $\text{erfc}(y)$ 는 상보오차함수(complementary error function)이다.

$$\begin{aligned} \operatorname{erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-z^2) dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{10} - \frac{z^7}{42} + \cdots \right) \end{aligned} \quad (1.246m)$$

(2) 두 번째 경계조건:

$$C = \begin{cases} C_x = C_x & \text{for } 0 < y < \infty \\ C_x = C_b & \text{for } y = \infty \end{cases} \quad (1.246n)$$

이 경계조건을 적용하여 식 (j)를 적분하면

$$\begin{aligned} \int_{C_b}^{C_x} dC &= B \int_{\infty}^y \exp(-y^2) dy = -B \int_y^{\infty} \exp(-y^2) dy \\ C_x - C_b &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} (C_b - C_0) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}(y) = -(C_b - C_0) \operatorname{erfc}(y) \\ \therefore \frac{C_x - C_b}{C_0 - C_b} &= \operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y) \end{aligned} \quad (1.246o)$$

식 (b)의 y 를 이용하면 최종적으로 식 (1.20u)가 유도된다.

$$\therefore \frac{C_x - C_b}{C_0 - C_b} = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

또는

$$C_x = C_0 - (C_0 - C_b) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (1.246p)$$

한편 매우 얇은 박막층에서의 확산(thin film tracer diffusion)은 다음 경계조건을 적용하는 것으로부터

$$C = \begin{cases} M & \text{for } y=0, t=0 \\ 0 & \text{for } y=\pm\infty, t=0 \end{cases} \quad (1.246q)$$

최종적으로 물질 내 일의 거리 y 에서 원자의 농도는 다음 식으로 나타내진다.

$$C(y, t) = \frac{M}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{y^2}{4Dt}\right) \quad \text{또는} \quad C(y, t) = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{y^2}{4Dt}\right) \quad (1.246r)$$

여기서 M 은 박막층의 확산원자의 총량(mass)이며, \sqrt{Dt} 는 확산거리이다.

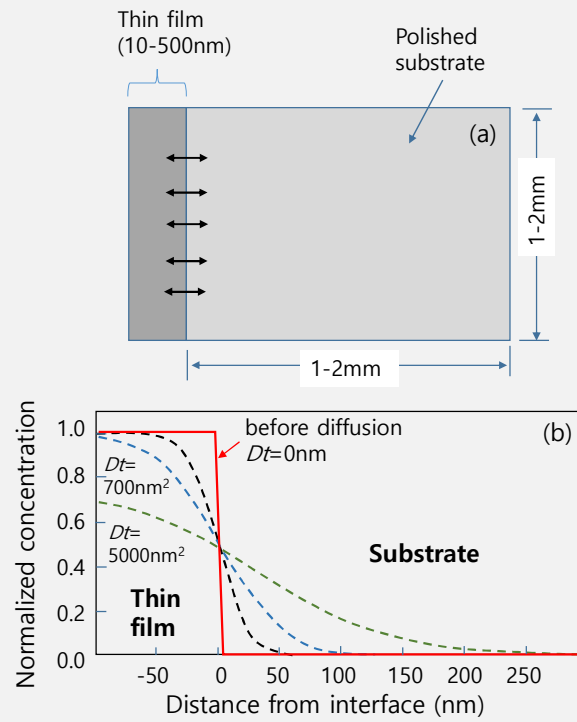


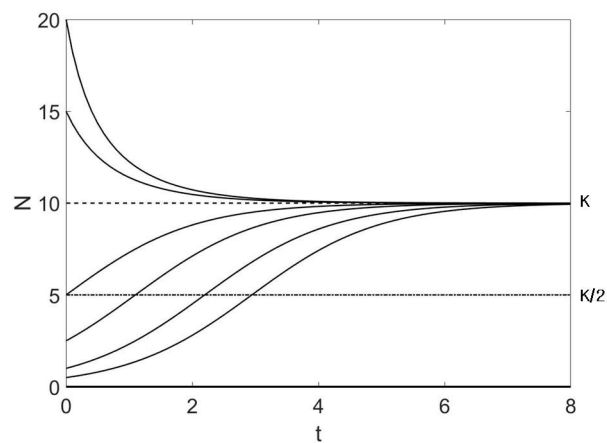
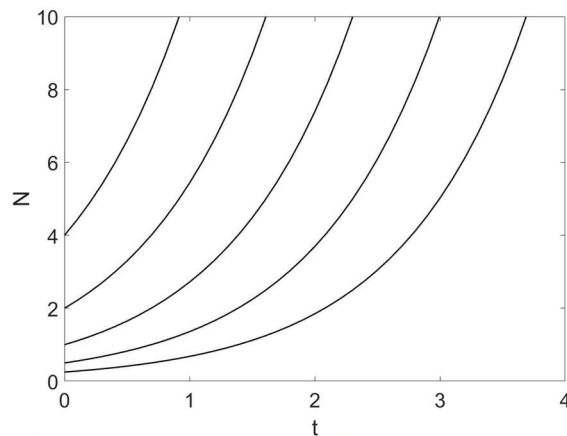
FIG. 1-78 얇은 박막층의 물질 내 원자 확산

[출처]<https://www.researchgate.net/publication/233944981>

1장 연습문제

[문제 1] First order differential equation in which the independent variables does not appear explicitly is called autonomous such as exponential model of Eq.(1.2a) and logistics model of (1.2b). Solve Eq. (1.2a) and Eq. (1.2b) with the initial condition $N(0)=N_0>0$ and discuss the results with a plot of N versus t , respectively.

[답] (1.2a) $N = N_0 e^{rt}$, (1.2b) $N = \frac{N_0 k}{N_0 + (k - N_0)e^{-rt}}$



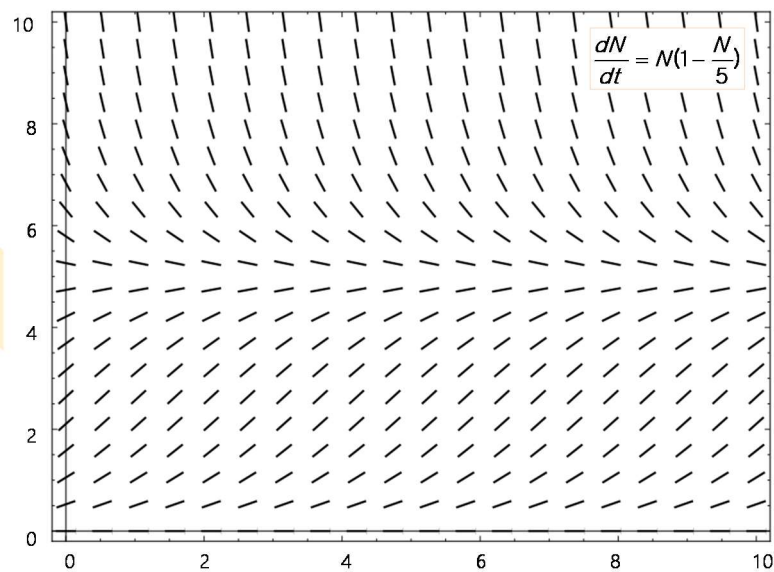
[문제 2] The logistics model of Eq.(1.2b) has been applied to natural growth of the halibut population in certain areas of the Pacific Ocean. Let N , measured in Kilograms, be the total mass, or biomass, of the halibut population at time t . The parameters in the logistic equation (1.2b) are estimated to have the values $r=0.71/\text{year}$ and $k=80.5 \times 10^6$ kg. If the initial biomass is $N(0)=0.25k$, find the biomass 2 years later. Also find the time τ for which $N(\tau)=0.75k$.

[답] $N(2) \cong 46.7 \times 10^6$ kg, $\tau \cong 3.095$ years

[문제 3] Consider the logistics growth model of Eq.(1.2b). Plot the direction field and identify the critical point.

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{k}\right)N, \quad (r=1, k=5)$$

[답]



$N=0$; unstable critical point, $N=5$; stable critical point

[문제 4] Consider a case in which harmful substances A are distributed in a uniform concentration C_0 in the soil. The diffusion of harmful substances into the soil over time is represented by the following equation $\frac{dC}{dt} = -kC$. The time τ_s when the harmful concentration becomes $C_0/2$ of the initial concentration is regarded as an index for the change in the concentration of the harmful substance A due to diffusion. Find time τ_s .

[답] $\tau_s = \frac{k}{\ln 2}$

[문제 5] Calculate the terminal speed of the raindrop when the raindrop falls while receiving an air resistance proportional to the square of the velocity, as in the second formula of equation (1.11).

[답]

$$v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{mg}{k}} t\right), \quad v(t = \infty) = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (\because t \rightarrow \infty, \tanh \rightarrow 1),$$

(Hint; Use the following relation.)

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh u, \quad \cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$$

[문제 6] Find the differential equation satisfying the following solution

(a) $ax^2 + by^2 = 1$ (b) $(x-a)(y-b) = 4$ (c) $xy = \ln y + C$

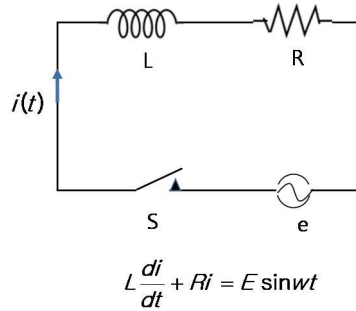
(d) $y = e^{xy} - 2x$ (e) $y = \frac{2x - x^2 + C}{2x}$

[답] (a) $yy' + xy'y' + xyy''$ (b) $(y'')^2 + (y')^3 = 0$ (c) $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$ (d) $y' = \frac{ye^{xy} - 2}{1 - xe^{xy}}$

(e) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x - y}{x + y}$

[문제 7] There is an AC power supply $e = E \sin \omega t$ in the RL electrical circuit in which the following resistors R and inductors L are connected in series. Switch S was connected at time $t = 0$. If the current is $i = i(t)$ after the time t seconds, the

following differential equation holds. Find the current $i(t)$ and consider its meaning.



[답] $i(t) = \frac{E}{R^2 + \omega^2 L^2} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t) + \frac{E \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t}$.

The first term on the right-hand side of this equation is an alternating current that flows normally, and the second term is an excessively flowing current and converges to zero when $t \rightarrow \infty$.

[문제 8] Show the solution of the differential equations for the various DC electrical circuits shown in the following table.

RC 회로	$E = V_R + V_C$ $R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q - E = 0$ $q(t) = \int i(t) dt, \quad i(t) = \frac{dq}{dt}$	$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$
RL 회로	$E = V_R + V_L$ $Ri + L \frac{di}{dt} - E = 0$	$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$
LC 회로	$E = V_L + V_C$ $L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} q(t) - E = 0$	$i(t) = E \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$
RCL 회로	$E = V_R + V_L + V_C$ $R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C} q - E = 0$	$i(t) = \frac{E}{\sqrt{D}} \left(e^{\frac{\sqrt{D}-R}{2L}t} - e^{\frac{\sqrt{D}+R}{2L}t} \right)$ $D = R^2 - \frac{4L}{C} \quad (D > 0)$

[문제 9] Solve the following differential equations.

- (a) $y' = (x+y)^2$, (Hint) $u = x+y$ (b) $y' = \frac{y}{x+y}$, (Hint) $u = \frac{y}{x}$
 (c) $y' + 5\frac{y}{x} = \frac{1}{x^5}e^x$ (d) $y' = \frac{y(y-2)}{x(y-1)}$, (Hint) $\frac{y-1}{y(y-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{y} + \frac{1}{2}\frac{1}{y-2}$
 (e) $y'' + 9y = 0$ (f) $y''' - y = 0$

[답] (a) $y = \tan(x + C_2) - x$ (b) $x = y \ln Cy$ (c) $y = \frac{e^x + C}{x^5}$

(d) $\ln \left| \frac{y(y-2)}{x^2} \right| = 2C$, $y = 1 \pm \sqrt{1 + 4x^2}$ (e) $y = C_1 e^{i3x} + C_2 e^{-i3x}$

(f) $y = C_1 x + e^{-x/2} \left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$

[문제 10] Solve the following differential equations with initial-value condition or boundary-value problem.

- (a) $y' = 5y + e^{-2x}y^{-2}$, IV: $y(0) = 2$
 (b) $(1-x)y'' - xy' = 2$, IV: $y(x=0) = 0$, $y'(x=0) = 0$
 (c) $y''' + y' = 0$, IV: $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$, $y''(0) = -4$
 (d) $y'' + y' = 0$, BV: $y(0) = 2$, $y(\pi) = 1$
 (e) $y'' + y' = 0$, BV: $y(0) = 2$, $y(\pi/2) = 3$

[답] (a) $y = \left(\frac{139e^{15x} - 3e^{-2x}}{17} \right)^{1/3}$

(b) $y = \int \frac{2 \arcsin x + C_1}{\sqrt{1-x^2}} dx = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2 \rightarrow y = (\arcsin x)^2$

(c) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 \rightarrow y = 4 \cos x + 5 \sin x - 1$ (d) no solution

(e) $y = 2 \cos x + 3 \sin x$

[문제 11] Find the integrating factor of the following differential equation and its solution.

(a) $(e^{x+y} + ye^y)dx + (xe^y - 1)dy = 0$ (b) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$ (c) $\frac{dx(t)}{dt} - \cos t \, x(t) = \cos t$

(d) $(1-y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay$ (e) $xy^2dx + (x^2y^2 + 1)dy = 0$ (f) $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x - 1$

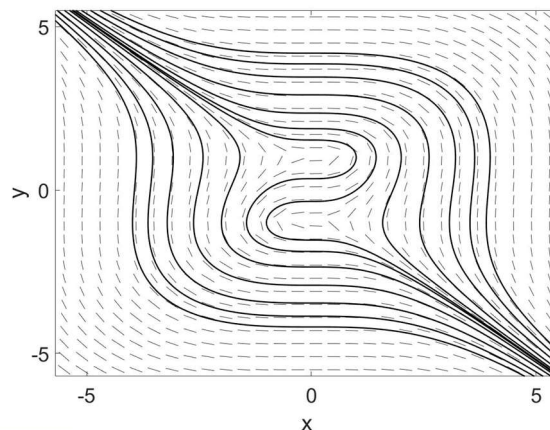
[답] (a) $\mu(y) = e^{-y}$, $f(x, y) = e^x + xy + e^{-y} + C$ (b) $\mu(t) = e^{t/2}$, $y = \frac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2}$

(c) $\mu(t) = e^{-\sin t}$ (d) $\mu(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ (e) $\mu(y) = \frac{1}{y}$ (f) $\mu(x) = x^2$

[문제 12] Solve the following differential equation, and draw direction field and integral curve.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$$

[답] $-x^3 + 3y - y^3 = c$



[문제 13] Solve the following differential equation and draw the envelope curve.

$$y = xy' + \sqrt{(y')^2 + 1}$$

[답] $y = Cx + \sqrt{C^2 + 1}$, 포락선 $x^2 + y^2 = 1$

[문제 14] The differential equation in the example above can also be seen as the y -deficient differential equation. In this case, a solution may be obtained by using

a relationship of $y' = w(x)$ and $y'' = w'(x)$. Solve the above example by considering the y -deficiency differential equation and show that the result is the same as the above example.

[문제 15] Orthogonally project the vector y to the vector vectors u_1 and u_2 using the following vectors u_1 and u_2 . Find the vector perpendicular to this orthogonal projection.

$$u_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{Bmatrix}, u_2 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, y = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$[\text{답}] \quad \hat{y} = \begin{Bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{Bmatrix}, z = \begin{Bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{Bmatrix}$$

[문제 16] Show whether the next three vectors are linearly independent or linearly dependent

$$(a) \quad y_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{Bmatrix}, y_2 = \begin{Bmatrix} -4 \\ 1 \\ 7 \end{Bmatrix}, y_3 = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{Bmatrix} \quad (b) \quad y_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix}, y_2 = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{Bmatrix}, y_3 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

[답] (a) 선형 독립 (b) 선형 종속

[문제 17] Determine whether each column of the next matrix is linearly independent or linearly dependent from each other.

$$(a) \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \quad (b) \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -4 & -5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad (c) \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

[답] (a) 선형 독립 (b) 선형 종속 (c) 선형 종속

[문제 18] Show whether the next two vectors are linearly independent or linearly dependent

$$v_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, v_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

If the two vectors are independent, express the vector $u = \begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix}$ based on these vectors.

[답] 선형 독립. $\begin{Bmatrix} 4 \\ 5 \end{Bmatrix} = 3 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

[문제 19] Solve the following differential equation when one solution is $y_1 = x^2$.

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

[답] $y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$

[문제 20] Find the particular solution of the following differential equation.

$$y'' - 4y = 4e^{-x}$$

[답] $y_p = -\frac{4}{3}e^{-x}$

[문제 21] Find the solution of the following differential equation.

$$y'' - y' + y = 2\sin 3x, \quad \text{IC : } y(x=0) = \frac{6}{73}, \quad y'(x=0) = \frac{25}{73}$$

[답] $y = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{16}{73}\sin 3x + \frac{6}{73}\cos 3x$

[문제 22] Solve the following differential equation with the undetermined coefficient method.

$$y'' - y = e^x$$

[답] $y = y_h + y_p = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{xe^x}{2}$

[문제 23] Solve the following differential equation with variation of parameter.

$$y'' - y = e^x$$

[답] $y = y_h + y_p = Ce^x + Ce^{-x} + \frac{xe^x}{2} - \frac{e^x}{4}$

[문제 24] Find the particular solution for the following differential equation with variation of parameter.

$$y'' + 2y = 2xe^{-2x}$$

$$[\text{답}] \quad y_p = \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right)e^{-2x}$$

[문제 25] Find the particular solution for the following differential equation with undetermined coefficient method.

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x} + 3x + 2$$

$$[\text{답}] \quad y_p = x^2e^{-x} + 3x - 4$$

[문제 26] Find the particular solution for the following differential equation with undetermined coefficient method.

$$y'' + y = x \cos x$$

[답] Assume $y_p = (C_1x^2 + C_2x)\cos x + (C_3x^2 + C_4x)\sin x$ as a particular solution.

$$y_p = \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x$$

[문제 27] Solve the next system of differential equations.

$$\begin{cases} (D^2 - 2)x - 3y = e^{2t} \\ (D^2 + 2)y + x = 0 \end{cases}$$

[답]

$$x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t + \frac{6}{15}e^{2t}$$

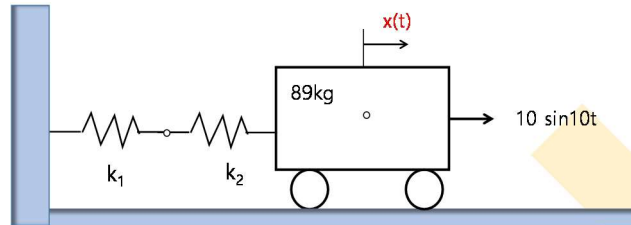
$$y = -\frac{C_1}{3}e^t - \frac{C_2}{3}e^{-t} - C_3\cos t - C_4\sin t - \frac{1}{15}e^{2t}$$

[문제 28] The first-order linear system of differential equations is as follows. Express this differential equation as a second-order differential equation and find the solution

$$\begin{cases} y' = y + z \\ z' = y + z + x \end{cases}$$

$$[\text{답}] \quad y = C_1 + C_2e^{2x} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}, \quad z = -C_1 + C_2e^{2x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$$

[문제 29] Consider the spring-mass system shown below, write the equation of motion and calculate the response assuming that the system is initially at rest for the values $k_1 = 100N/m$, $k_2 = 500N/m$ and $m=89kg$.



$$[답] \quad x(t) = \left\{ \frac{v_0}{w_0} - \frac{w}{w_0} \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \right\} \sin w_0 t + x_0 \cos w_0 t + \frac{F}{m(w_0^2 - w^2)} \sin wt,$$

$$x(t) = 0.0117 \sin 0.968t - 0.00113 \sin 10t \text{ (I.C. : } x(t)=0, v(t=0)=0)$$

[문제 30] In the example of 1-23, estimate the time it takes for the concentration of salt water (= amount of salt / amount of salt) to reach 0.1 kg / liter.

[답]

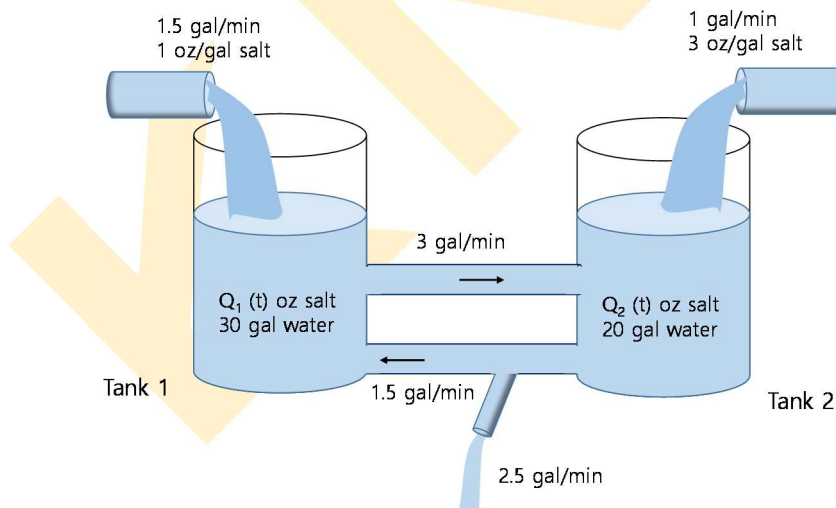
[문제 31] At a time $t=0$ a tank contains Q_0 lb of salt dissolved in 100 gal of water. Assume that water containing $1/4$ lb of salt/gal is entering the tank at a rate of r gal/min and that the well-stirred mixture is draining from the tank at the same rate. Set up the initial value problem that describes this flow process. Find the amount of salt $Q(t)$ in the tank at any time, and also find the limiting amount Q_L that is present after a very long time. If $r=3$ and $Q_0 = 2Q_L$, find the time T after which the salt level is within 2% of Q_L . Also find the flow rate that is required if the value of T is not exceed 45 min.

$$[답] \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}, \quad Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-rt/100}, \quad T = 130.4 \text{ min}, \quad r \approx 8.69 \text{ gal/min}$$

[문제 32] Consider the two interconnect tanks shown below. Tank 1 initially contains 30 gal of water and 25 oz of salt, and Tank2 initially contains 20 gal of water and 15 oz of salt. Water containing 1 Oz/gal of salt flows into Tank 1 at a rate of 1.5 gal/min. Water containing 3 Oz/gal of salt also flows into Tank 2 at a

rate of 1 gal/min from the outside. The mixture drains from Tank 2 at a rate of 4 gal/min, of which some flow back into Tank 1 at a rate of 1.5 gal/min, which the remainder leaves the system. Answer the following questions.

- (a) Let $Q_1(t)$ and $Q_2(t)$, respectively, be the amount of salt in each tank at time t . Write down differential equations and initial conditions that model the flow process. Observe that the system of differential equations is nonhomogeneous.
- (b) Find the values of $Q_1(t)$ and $Q_2(t)$ for which the system is in equilibrium, that is, does not change with time. Let Q_1^E and Q_2^E be equilibrium values. Can you predict which tank will approach its equilibrium state more rapidly?
- (c) Let $x_1 = Q_1(t) - Q_1^E$ and $x_2 = Q_2(t) - Q_2^E$. Determine an initial value problem for x_1 and x_2 . Observe that the system of equation for x_1 and x_2 be homogeneous.



[답]

$$(a) \begin{cases} Q_1' = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}Q_1 + \frac{3}{40}Q_2, & Q_1(0) = 25 \\ Q_2' = 3 + \frac{1}{10}Q_1 - \frac{1}{5}Q_2, & Q_2(0) = 15 \end{cases}$$

$$(b) Q_1^E = 42, Q_2^E = 36$$

$$(c) \begin{cases} x_1' = -\frac{1}{10}x_1 + \frac{3}{40}x_2, & x_1(0) = -17 \\ x_2' = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{5}x_2, & x_2(0) = -21 \end{cases}$$

[문제 33] Find the solution of the next differential equation using the power series solution.

$$x^2 y'' - 3xy' + 4(x+1)y = 0$$

$$[\text{답}] \quad y(x) = C_1 x^2 (1 - 4x + 4x^2 - \frac{16}{9}x^3 + \dots)$$

[문제 34] Find the solution of the next differential equations using the power series solution.

$$(a) x^2 y'' + x(x+0.5)y' + xy = 0 \quad (b) \quad xy'' + 2y' - p^2 xy = 0$$

$$[\text{답}] \quad (a) \quad y(x) = C_0 (1 - 2x + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{15}x^3 + \dots) + C_1 (1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots)$$

$$(b) \quad y_1(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{p^{2m}}{(2m+1)!} x^{2m} = a_0 \frac{\sinh(px)}{px}, \quad y_2(x) = v(x)y_1(x) \rightarrow y_2(x) = \frac{\cosh(px)}{p^2 x}$$

$$y = c_1 \left(\frac{\sinh(px)}{px} \right) + c_2 \left(\frac{\cosh(px)}{p^2 x} \right)$$

[문제 35] Find the solution of the next differential equation using the power series solution.

$$x^2 y'' + xy' + (4x^2 - 9)y = 0$$

$$[\text{답}] \quad y(x) = C_1 J_3(2x) + C_2 Y_3(2x)$$

[문제 36] Find the solution of the next differential equation using the power series solution.

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + 9)y = 0$$

$$[\text{답}] \quad y(x) = C_1 J_3(-ix) + C_2 Y_3(-ix)$$

[문제 37] Using Eq. (1.134f) and Eq. (1.134g), find the following integral.

$$I = \int_1^3 x^{-3} J_4(x) dx$$

$$[\text{답}] \quad 0.003445$$

[문제 38] In the Bessel differential equation, show that if α is an integer, the solution is as follows

$$y = C_1 J_\alpha(x) + C_2 Y_\alpha(x) \quad (1.247)$$

[문제 39] Show that the following relationship holds for the solution of the Bessel differential equation:

$$J_0'(x) = -J_1(x) \quad (1.248)$$

[문제 40] Find the inverse transformation of the Jacobian matrix in the case of a planar manipulator with 2 joints and 2 links.

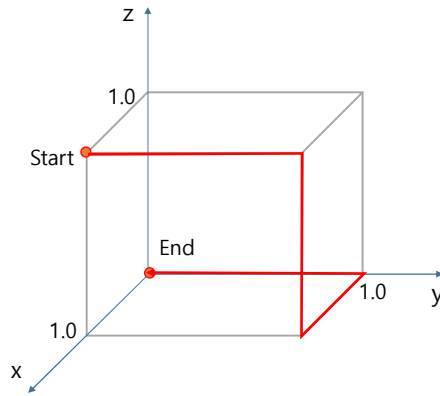
$$[\text{답}] J(\theta)^{-1} = \frac{1}{l_1 l_2 \sin \theta_2} \begin{bmatrix} l_2 C_{12} & l_2 S_{12} \\ -l_1 C_1 - l_2 C_{12} & -l_1 S_1 - l_2 S_{12} \end{bmatrix}$$

[문제 41] The angles between the old and new axes in two coordinate systems are given in the table below. Construct the corresponding transformation matrix [Q] and verify that it is orthogonal.

	x_1	x_2	x_3
x_1'	135°	135°	135°
x_2'	90°	45°	45°
x_3'	45°	60°	120°

$$[\text{답}] \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

[문제 42] Using a three-joint robot, we are going to do laser-welding along the edges of the product as shown in the figure below. Design the trajectory of the robot arm. Use the homogeneous coordinates.



[문제 43] Prove Eq.(1.190b) using $f(t) = t \sin wt$ and $f'(t)$, $f''(t)$

[문제 44] Solve the following differential equation using Laplace transform.

$$y'' + 4y = \sin t \quad (I.C : y(0) = 0, \quad y'(0) = 1)$$

[답] $y = \frac{3}{5} \sinh 2t - \frac{1}{5} \sin t$

[문제 45] Find the Laplace inverse transform

$$(a) \quad L^{-1} \left\{ \frac{2s+1}{(s^2+4)(s-3)} \right\} \quad (b) \quad L^{-1} \left\{ \frac{s^2+2s-4}{s^3-5s^2+2s+8} \right\}$$

[답] (a) $-\frac{1}{13} \left(7 \cos 2t - \frac{5}{2} \sin 2t \right) + \frac{7}{13} e^{3t}$ (b) $-\frac{1}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{2t} + 2e^{4t}$

[문제 46] Find the Laplace inverse transform

$$L^{-1} \left\{ \ln \left(\frac{s^2+1}{s^2+4} \right) \right\}$$

[답] $-\frac{2 \cos t - 2 \cos 2t}{t}$ (Hint: use the relation of $\frac{d}{ds} \{ \ln F(s) \} = \frac{F'(s)}{F(s)}$)

[문제 47] Find the solution of the system of linear differential equation using Laplace transform

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} + x - y = 0, & x(0) = 0, \quad x'(0) = -2 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + y - x = 0, & y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

[답] $x(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}\sin\sqrt{2}t$, $y(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}\sin\sqrt{2}t$

[문제 48] Find solution of the following differential equation using Laplace transform

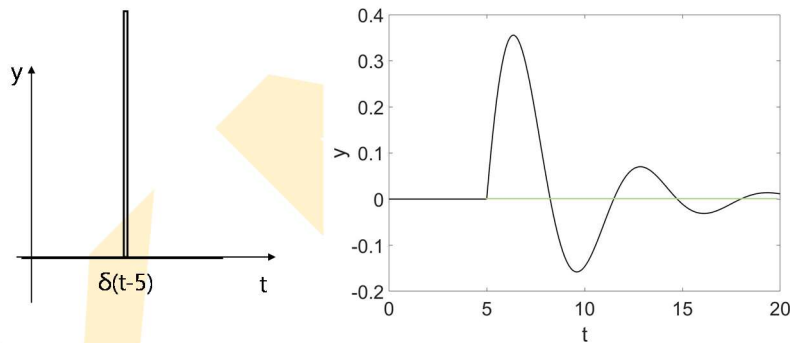
$$y'' + 2y' + y = \delta(t-4), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

[답] $y(t) = te^{-t} + (t-4)e^{-(t-4)}u(t-4)$

[문제 49] Find solution of the following differential equation using Laplace transform and plot the results.

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t-5), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

[답] $y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}}U(t-5)e^{-(t-5)/4}\sin\frac{\sqrt{15}}{4}(t-5)$



[문제 50] Find solution of the following differential equations using Laplace transform.

(a) $y'' + 4y = \delta(t-4\pi)$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$

(b) $y'' + 4y = \delta(t-2\pi)\cos t$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

[답] (a) $y(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}U(t-4\pi)\sin 2(t-4\pi)$ (b) $y(t) = \sin t + U(t-2\pi)\sin(t-2\pi)$

[문제 51] Consider the initial value problem

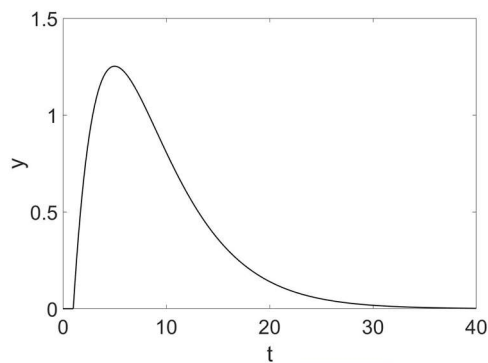
$$y'' + \gamma y' + y = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Where γ is the damping coefficient (or resistance).

(a) Let $\gamma = \frac{1}{2}$. Find the solution of the initial value problem and plot its graph.

(b) Find the time t_1 at which the solution attains its maximum value. Also find the maximum value y_1 of the solution.

[답] (a) $y(t) = \frac{4}{\sqrt{15}} U(t-1) e^{-(t-1)/4} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} (t-1)$ (b) $t_1 \cong 2.3613$, $y_1 \cong 0.71153$



[문제 52] Find solution of the following differential equation using Laplace transform and plot the results.

$$2y'' + y' + 2y = g(t),$$

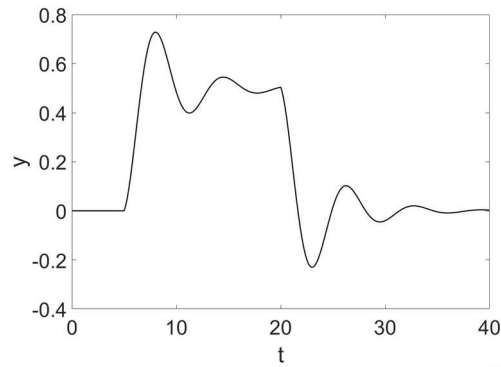
$$g(t) = U(t-5) - U(t-20) = \begin{cases} 1, & (5 \leq t < 20) \\ 0, & (0 \leq t < 5, t \geq 20) \end{cases}$$

subjected to $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

[답]

$$y(t) = U(t-5)h(t-5) - U(t-20)h(t-20)$$

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[e^{-t/4} \cos\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) + \left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right) e^{-t/4} \sin\left(\frac{\sqrt{15}t}{4}\right) \right]$$



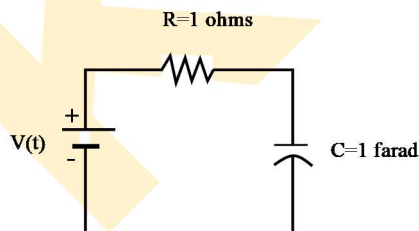
[문제 53] Using the convolution of Laplace transform find the inverse Laplace transform

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\frac{1}{s^2+b^2}\right\}$$

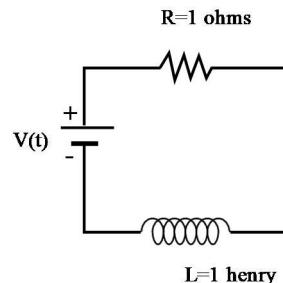
[Hint] $\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

[답] $\left[\frac{\sin at + \sin bt}{2(a+b)ab} - \frac{\sin at - \sin bt}{2(a-b)ab}\right] H(t)$

[문제 54] In the following RC circuit, when voltage $v(t) = u(t-1) - u(t-2)$ is applied, find the current flowing through the circuit using Laplace transform. However, all initial conditions are zero.



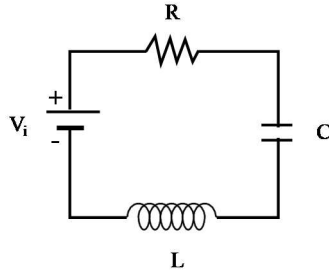
(a)



(b)

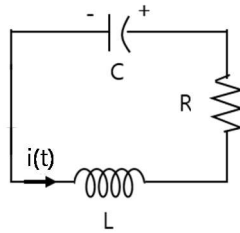
[답] (a) $i(t) = e^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-2)}u(t-2)$ (b) $i(t) = (1 - e^{-(t-1)})u(t-1) - (1 - e^{-(t-2)})u(t-2)$

[문제 55] Find the Laplace expression (frequency domain) for v_c in the RLC electric circuit below. The input is a step function, $v_i(t) = v_A u(t)$



$$[\text{답}] \quad V_C(s) = \left(\frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC} + sL} \right) \left(\frac{v_A}{s} \right)$$

[문제 56] Find the transfer function for the following electric circuit.



$$[\text{답}] \quad G(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{(R + Ls) \frac{1}{Cs}}{R + Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{Ls + R}{LCs^2 + RCs + 1}$$

[문제 57] Find the unit response $g(t)$ of impedance $Z(s) = s^2 + 1$.

$$[\text{답}] \quad g(t) = 1 - \cos t$$

[문제 58] Find the impulse response $h(t)$ of impedance $Z(s) = s^2 - 3s + 2$.

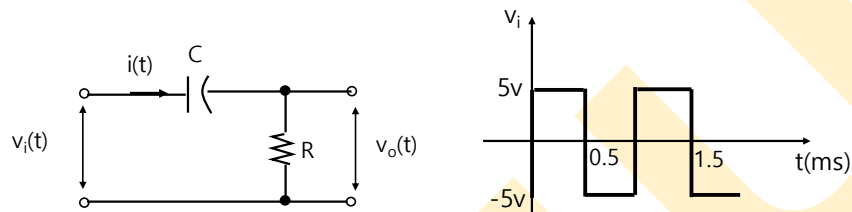
$$[\text{답}] \quad h(t) = e^{2t} - e^t$$

[문제 59] Find the response of impedance $Z(s) = \frac{s^2}{2} + 2$ for the following input function $f(t)$.

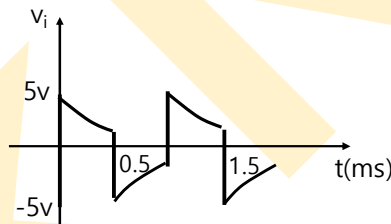
$$f(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq \pi) \\ 0 & (t > \pi) \end{cases}$$

$$[\text{답}] \quad x(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t & (0 \leq t \leq \pi) \\ \frac{\pi}{2} \cos 2t & (t > \pi) \end{cases}$$

[문제 60] For the following R-C circuit, find and plot the response $v_o(t)$ when the input voltage $v_i(t)$ is given as a repeated step function as shown below. Also show that this circuit is mainly a high-pass filter (HPF) that passes high frequency signals.

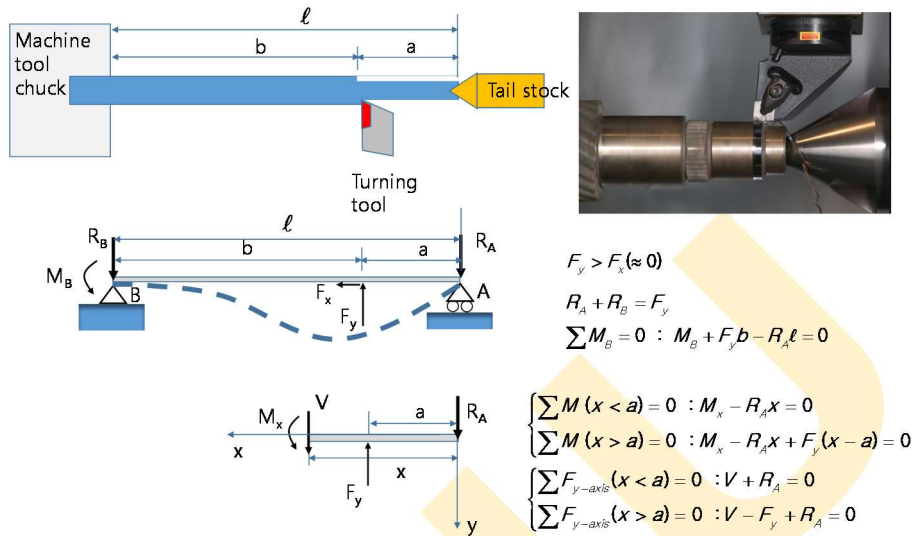


$$[\text{답}] \quad v_o(t) = v_i e^{-\frac{t}{RC}}$$



[문제 61] For the shaft parts with an aspect ratio greater than 20, they are collected referred to as slender shafts. Due to their poor rigidity, slender shaft parts are prone to bending deformation during turning process due to large cutting component force F_y , and it is difficult to obtain the ideal machining size, which is considered to be turning. The following figure show the work piece under turning process. The work piece is clamped using the traditional chuck-top clamping method, which can be simplified to solve a statically indeterminate beam problem. (부정정보 문제)

According the coordinates set in the figure, the approximate differential equation for the deflected beam $y(x)$ is



$$EIy(x)'' = M_x \quad (1.249)$$

The general solution of this second order differential equation are

$$\begin{aligned} EIy(x)' &= \int M_x dx + C_1 \\ EIy(x) &= \iint M_x dx dx + C_1 x + C_2 \end{aligned} \quad (1.250)$$

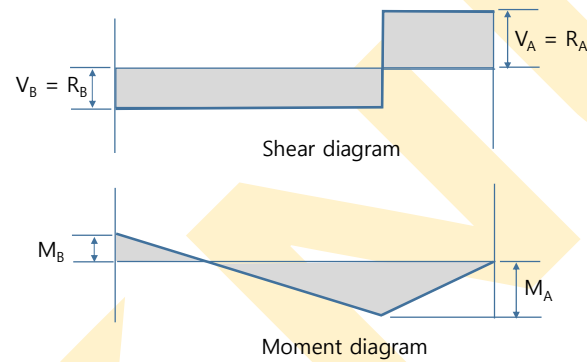
Here the shear force and bending moment at the x -position are expressed by

$$\begin{cases} \sum M (x < a) = 0 : M_x - R_A x = 0 \\ \sum M (x > a) = 0 : M_x - R_A x + F_y (x - a) = 0 \\ \sum F_{y-axis} (x < a) = 0 : V + R_A = 0 \\ \sum F_{y-axis} (x > a) = 0 : V - F_y + R_A = 0 \end{cases} \quad (1.251)$$

Here E is an elastic Young's modulus, I is a geometrical moment of inertia (simply moment of inertia or second moment of area), $I_x = \int_R y^2 dA$.. M_x is a bending moment at x -position, and R_A and R_B are reaction forces at each end of the beam. Also V is a shear force at x -position.

Substitution of Eq.(1.136) into Eq.(1.135) and introduction of the essential boundary condition at both ends such as $y(x = \ell) = 0$, $y'(x = \ell) = 0$ and $y(x = 0) = 0$ yields the reaction at each end and deflection of the beam. Derive the following relationships and show shear diagram and moment diagram.

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{F_y b^2}{2\ell^3}(a + 2\ell), \quad R_B = \frac{F_y a}{2\ell^3}(3\ell^2 - a^2) \\ y(x < a) &= \frac{F_y b^2 x}{12EI\ell^3}(3a\ell^2 - 2\ell x^2 - ax^2), \\ y(x > a) &= \frac{F_y a}{12EI\ell^3}(\ell - x)^2(3\ell^2 x - a^2 x - 2a^2\ell) \end{aligned} \quad (1.252)$$



[Ref.] Beam design formulas with shear and moment diagrams, ANSI/AF&PA NDS 2005 (2007)

Leonhard Euler (1707~1783, 스위스)

위대한 수학자 1



오일러는 18 세기 최고의 수학자였으며 (그의 유일한 경쟁자는 Joseph-Louis Lagrange 이었다) 역대 가장 많은 업적을 남긴 학자 중 하나였다. 오일러는 886 개의 논문과 책을 출판하였는데 이 기록보다 많은 학자는 Paul Erdős 뿐이다. 오일러의 전집은 약 90 권인데 놀랍게도 이 산출물의 대부분은 그가 완전히 눈이 멀었을 때 그의 생애의 마지막 20 년에서 이루어졌다.

오일러가 수학과 공학분야에 기여한 공헌은 너무도 많다. 수학에서의 "오일러의 공식", "오일러의 정리", 역학에서의 오일러 각도 (강체의 회전방향을 지정하는 각도), 오일러 정리 (모든 회전에 축이 있음), 유체 운동에 대한 오일러 방정식 및 오일러-라그랑지 방정식 (변분법에서 중요한 공식) 등등이 있다. 미적분학을 배우는 학생들에게 익숙한 "오일러의 공식"은 삼각 함수의 관점에서 허수의 지수를 정의한다. 쾨니히스 베르크 다리에 대한 오일러의 연구는 최적설계의 개념인 토폴로지 최적화 연구의 시작으로 볼 수 있으며 오일러의 등식(Euler identity)으로 알려진 식 $e^{\pi i} + 1 = 0$ 는 세상에서 가장 아름다운 공식으로 알려져 있다.

스위스 바젤에서 태어난 오일러는 1720 년 불과 13 세에 바젤 대학교에 입학했다. 대학에서 그는 Bernoulli 와 함께 공부했다. 1723 년 오일러는 철학 석사 학위를 마치고 부모가 원했던 대로 신학을 공부하기 시작했으나 오일러는 수학만큼 신학에 대해 흥미를 갖지 못했다.

1727 년에 오일러는 선박에 돛대를 최적으로 배치하는 것과 관련하여 파리 과학 아카데미의 대상을 위한 응모에서 배를 본적이 없는 오일러가 2 위를 차지했다. (1 등 은 선박 수학 전문가였다) 오일러는 1727 년에 러시아 상트 페테르부르크에 있는 과학 아카데미에서 수학-물리학 부서에 교수로 임명되어 1741 년까지 머물렀다. 1741 년에는 프레드릭 대왕의 초청으로 베를린으로 갔지만 오일러는 프레드릭 대왕과 잘 지내지 못했고 1766 년 상트 페테르부르크로 돌아와 죽을 때까지 머물렀다.

Johann Bernoulli(1667~1748, 스위스)

위대한 수학자 2



스위스의 베르누이 가문은 17 세기~18 세기에 걸쳐 여러 명의 수학자와 과학자를 배출하였는데, 그 중에서 요한 베르누이는 “베르누이 정리”, “로피탈의 정리”, “사이클로이드 곡선”, “미적분학의 기본정리” 등 많은 업적을 남겼다.

요한 베르누이는 스위스 바젤에서 태어나 바젤대학에서 의학을 공부하였지만 의학을 좋아하지 않았다. 그의 아버지는 가족의 향신료 무역을 인수하기 위해 베르누이가 사업을 공부하기를 원했지만 베르누이는 아버지의 반대를 무릅쓰고 형인 Jacob Bernoulli 와 함께 수학공부를 많이 하였다. 요한 베르누이는 당대 최고의 수학자였던 Gottfried Wilberm Leibniz 와 서신을 교환하면서 수학자로서 인정을 받았다.

바젤대학을 졸업한 이후 요한 베르누이는 프랑스로 건너가 기욤 드 로피탈(Guillaume de L' Hopital) 의 재정적 지원을 받으며 그에게 미적분학을 가르쳤고 그 과정에서 자신의 발견한 수학적 내용과 저작을 로피탈하고만 공유하겠다고 계약을 맺었다. L' Hopital 은 요한 베르누이가 떠난 후에 쓴 미적분학에 관한 최초의 교과서인 “곡선을 이해하기 위한 무한소 해석(Analyze des Infiniment Petits pour l' Intelligence des Lignes Courbes) “에서 1694 년 요한 베르누이가 발견한 정리를 실었는데 이것이 $0/0$ 혹은 ∞/∞ 꼴의 극한을 계산할 수 있는 로피탈의 정리 , $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, 라고 알려진 것이다.

베르누이는 Leibniz 의 미적분학을 공부한 후 1713 년 Leibniz-Newton 의 미적분학 발견에 대한 논쟁에서 Leibniz 를 변호했다. Bernoulli 는 또한 Newton 의 중력 이론(theory of gravitation)에 대한 René Descartes 의 소용돌이 이론(vortex theory)을 홍보하였으며 이것은 궁극적으로 뉴턴 이론이 유럽 대륙에서 수용되는 것을 지연시켰다.

요한 베르누이는 훗날 바젤대학에서 수학을 가르쳤는데 그의 제자 중에는 Leonhard Euler 도 있다.

KNU