제 2 장

고유값과 고유벡터

2.1 고유값과 대각화

어떤 행렬 A(정방행렬)를 선형변환으로 간주할 때, 벡터 x에 대한 선형변환 결과를 y라고 하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdot \qquad (2.1a)$$
$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdot$$

이 식을 행렬로 표시하면

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & \\ \cdot & \cdot & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \end{Bmatrix}, \quad (y = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \end{Bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot \\ a_{21} & a_{22} & \\ \cdot & \cdot & \end{bmatrix}, x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \end{Bmatrix}) \qquad (2.1b)$$

$$y = Ax$$

한편 벡터 x에 대한 선형변환 A의 결과가 자기 자신의 상수배, λ,가 되는 0이 아닌 벡터가 존재할 때 이 벡터를 고유벡터(eigenvector)라 하고 이 상수배 값을 고유값(eigenvalue)라 한다. 이 고유벡터와 고유값은 자주 주방향(principal direction) 과 주값(principal value)이라고 불리기도 한다.

예를 들면

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \ x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \ y = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix}, \ z = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

에 대해서 벡터 x, y, z 에 대한 선형변환 A 를 생각해보자.

$$Ax=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\times 1+1\times 1\\ 3\times 1+(-1)\times 1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\ 2\end{Bmatrix}=2\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}=2x$$

$$Ay=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ -3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\times 1+1\times(-3)\\ 3\times 1+(-1)\times(-3)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2\\ 6\end{Bmatrix}=-2\begin{Bmatrix}1\\ -3\end{Bmatrix}=2y$$

$$Az=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ 2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\times 1+1\times 2\\ 3\times 1+(-1)\times 2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}3\\ 1\end{Bmatrix}$$

여기서 $Ax=2x$, $Ay=-2y$ 인 관계를 갖지만 Az 는 특별한 관계를 발견할 수 없다.

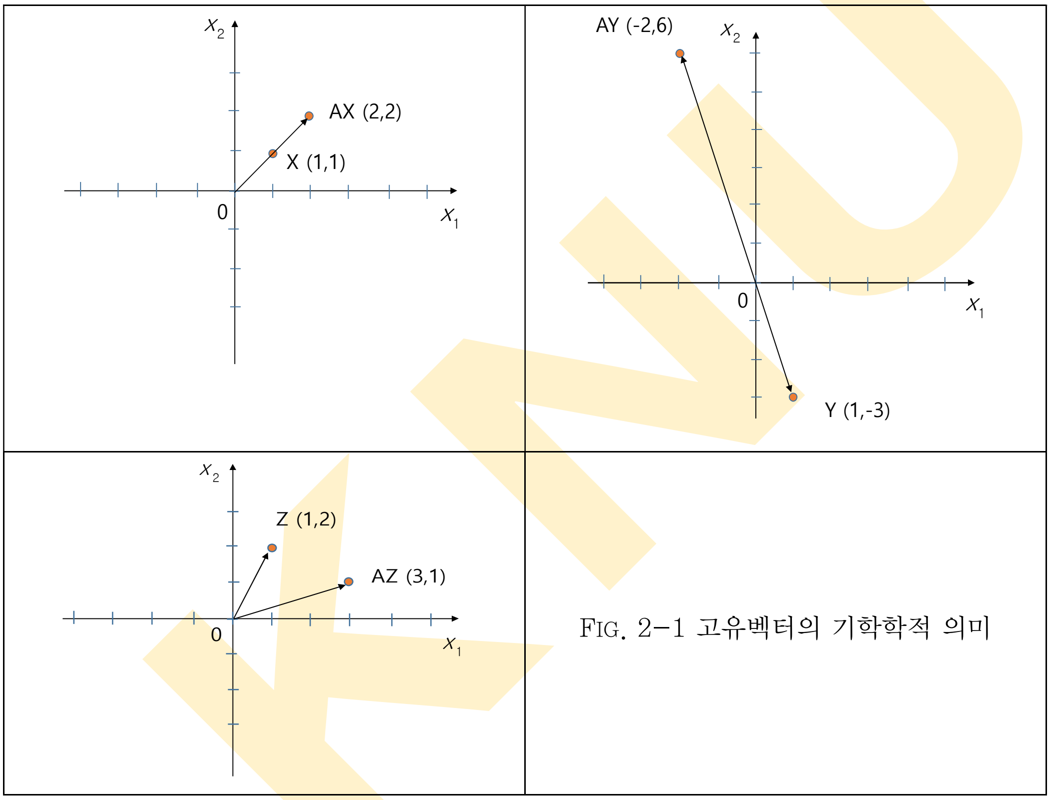


FIG. 2-1 고유벡터의 기하학적 의미

이 변환을 그림 2-1에서 살펴보면 Ax 는 x 벡터를 같은 방향으로 크기를 2배 확대한 것이고, Ay 는 y 벡터를 반대 방향으로 크기를 2배 확대한 것이고, Az 는 z 벡터의 크기와 방향을 모두 변화시킨 것을 알 수 있다. 따라서 벡터 x와 벡터 y는 선형변환이 발생하여도 방향은 보존되고 크기만 변형되는 고유벡터이란 것을 알 수 있다. $Ax=2x$ 에서 2는 A의 고유값, $Ay=-2y$ 에서 −2는 A의 고유값이다.

선형대수학(linear algbra)에서 고유값과 고유벡터를 다루는 고유값 문제는 다음과

같이 나타낼 수 있다.

$$Ax = \lambda x \tag{2.1c}$$

이 식을 행렬로 표시하면

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & \\ a_{21} \cdots & & \\ \cdots\cdot & & \\ a_{n1} \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \\ \cdots\cdot & \lambda_n & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & \\ a_{21} \cdots & & \\ \cdots\cdot & & \\ a_{n1} \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}, \ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot \\ \cdots\cdot & \lambda_n & \end{bmatrix}, \ \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} \tag{2.1d}$$

식 (2.1a)의 우변을 좌변으로 이항시키면

$$[A - \lambda I]\{x\} = \{0\} \tag{2.1e}$$

또는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\lambda I - A]\{x\} = \{0\} \tag{2.1f}$$

여기서 A는 $n \times n$ 정방행렬(square matrix), x는 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 을 성분으로 하는 $n \times 1$ 열행렬(column matrix), λ 는 실수값이기 때문에 행렬의 차원을 맞추기 위해서 단위행렬(unit matrix) I 를 도입하였다.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\cdots \\ 0 & 1 & 0\cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots\cdot & & \cdots 1 \end{bmatrix} \tag{2.1g}$$

행렬 A에 단위행렬을 곱하면 그 자신의 행렬이 되기 때문에, $AI = IA = A$, 단위행렬은 자주 항등행렬(identity matrix)이라고도 한다.

이 고유값과 고유벡터를 나타내는 접두사 “eigen- “은 원래 독일어의 “적정한”, “특성적” 을 의미하는 “eigen “에서 유래하였다. 고유값과 고유벡터는 원래 강체 회전하는 물체의 운동을 기술하기 위해 사용되었지만 현재는 시스템의 진동 분석(vibration analysis), 안정성 분석(stability analysis), 얼굴 인식(facial recognition), 행렬의 대각화(matrix diagonalization), 재료 파손과 관련된 주응력(principal stress) 그리고 연립 미분방정식의 해를 구하는 방법 등에 다양한 분야에서 활용되고 있는 중요한 개념이다. 이하에 고유값과 고유벡터의 개념과 성질에 대해서 설명한다.

고유값 문제의 식 (2.1a)의 성분을 구체적으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots\cdots & \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots\cdots & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & \cdots \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1}\cdots\cdots & & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

한편 우변의 0은 성분이 영인 열행렬(zero matrix, 영벡터)이다. 식 (2.1d)에서 벡터 $\{x\}$는 다음과 같이 구해진다.

$$\{x\} = [A-\lambda I]^{-1}\{0\} = \frac{[C_{ij}]}{|A-\lambda I|}\{0\} \quad (\neq \{0\})$$
$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ji} \tag{2.3a}$$

여기서 $[A-\lambda I]^{-1}$ 는 $n\times n$ 정방행렬 $[A-\lambda I]$ 행렬의 역행렬(inverse matrix)을 나타내고, $|A-\lambda I|$ 는 행렬 $[A-\lambda I]$ 행렬의 행렬식(determinant)이다. 또한 C_{ij} 는 $[A-\lambda I]$ 행렬의 i 행, j 열 원소에 대해서 정의한 여인수(cofactor)이고, M_{ji} 는 소행렬식(minor determinant)이라고 부른다. 소행렬은 행렬 $[A-\lambda I]$ 의 전치행렬 $[A-\lambda I]^T$ 에서 i 행, j 열 원소를 제외한 (n−1) x (n−1) 행렬을 말한다.

여인수 행렬의 전치행렬을 수반 행렬(adjoint matrix)이라고 부르고 adj A 라고 나타낸다. 따라서

$$[A]^{-1} = \frac{1}{\det\ (A)}\text{adj}\ (A) = \frac{\text{adj}\ (A)}{|A|} \tag{2.3b}$$

예를 들면 다음의 3×3 정방행렬 A에 대한 소행렬식 M_{ij} , 여인수행렬 C_{ij} , 수반행렬 $adj\ A$ 과 역행렬 A^{-1} 은 각각 다음과 같이 나타내진다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} = -2a+1,\ M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a-2,\ M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -a-1,\ M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a-2,\ M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1,\qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,\qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -2a+1,\ C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -a+2,\ C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 5$$

$$C_{21} = a+1,\ C_{22} = a-2,\ C_{23} = -3$$

$$C_{31} = 1,\ C_{32} = 0,\ C_{33} = -1$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a+1 & a+1 & 1 \\ -a+2 & a-2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} + (1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -a+2$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{Adj(A)}{-a+2} = \frac{1}{-a+2} \begin{bmatrix} -2a+1 & a+1 & 1 \\ -a+2 & a-2 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

참고로 역행렬과 전치행렬에 대해서 다음 관계가 성립한다.

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1},\quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\quad (ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1} \tag{2.3c}$$

$$(A^T)^T = A,\quad (A+B)^T = A^T + B^T,\quad (AB)^T = B^T A^T$$

한편 정방행렬의 역행렬이 존재하기 위해서는 행렬식이 영이 아니어야 하며, $|A| \neq 0$, 이 경우 A를 가역(invertible) 또는 정칙(regular)이라고 하고, 역행렬이 존재하지 않으면 비가역(non−invertible)이라고 한다.

이 식에서 행렬식 $|A-\lambda I|$ 가 영이 아닌 경우에는 벡터 $\{x\}$ 가 항상 영이 된다. 이것은 무의미한 해가 되기 때문에 벡터 $\{x\}$ 가 영이 아닌 값을 갖기 위해서는 행렬식 $|A-\lambda I|$ 가 영이 되어야 한다. 즉 행렬 $[A-\lambda I]$ 가 특이행렬(singular matrix)이어야 한다. 즉

$$F(\lambda)=|A-\lambda I|=0$$
$$\therefore F(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=0 \tag{2.4a}$$
$$\lambda=\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\lambda_n$$

이 식은 λ에 대한 n차 다항식이 된다. 이 식을 고유방정식(eigenvalue equation, 또는 특성방정식 characteristic equation)이라고 한다.

만일 3×3 의 정방행렬 A에 대해서 이 행렬의 특성방정식이 세 개의 다른 실근 λ_1, λ_2, λ_3 을 가질 때 식 (2.4)를 전개하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$|A-\lambda I|=\lambda^3-I_1\lambda^2+I_2\lambda+I_3=0 \tag{2.4b}$$

여기서 I_1, I_2, I_3는 다음과 같이 표시되는 불변량(invariant)이다.

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 \\ I_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{aligned} \tag{2.4c}$$

여기서 불변량이란 한 좌표계에서 측정한 값이 강체 회전하고 있는 다른 좌표계에서 측정한 값과 같은 물리량을 나타낸다.

식 (2.4a)를 풀어서 고유값 $\lambda_1,\lambda_2,\cdot\cdot,\lambda_n$를 구하고 이 고유값들을 고유방정식에 대입하면 각각의 고유값 $\lambda_1,\lambda_2,\cdot\cdot,\lambda_n$에 대응하는 고유벡터(eigenvector) $v_1,v_2,\cdots,v_n$를 구할 수 있다.

$$[A-\lambda_i I]\{x_i\}=\{0\} \tag{2.5}$$

고유값과 고유벡터 $(\lambda_j,\ v_j)$를 고유쌍(eigenpairs)이라고 부른다.

고유값들을 서로 다른 실수값을 가질 수도 있고, 일부 중근을 가질 수도 있고 또는 허수값을 갖기도 한다. 식 (2.1a)에서 $Ax=\lambda x$ 이므로

$$\begin{aligned} &A^2x=\lambda Ax=\lambda^2x\ ,\ A^3x=\lambda A^2x=\lambda^3x,\cdots, \\ &\therefore\ A^nx=\lambda^nx \end{aligned} \tag{2-6a}$$

따라서 만일 λ가 대칭행렬 A 의 고유값이고 x가 대응하는 고유벡터이면, λ^n은 행렬 A^n 의 고유값이고 x는 대응하는 고유벡터이다. 즉, 행렬 A^n 의 고유값은 행렬 A 의 고유값의 n 제곱과 같다.

식 (2.4b)에 x를 곱하고 식 (2-6a)의 관계를 적용하면

$$\begin{aligned} &\lambda^3x-I_1\lambda^2x+I_2\lambda x+I_3x=A^3x-I_1A^2x+I_2Ax+I_3x=0 \\ &\therefore\ A^3-I_1A^2+I_2A+I_3I=0 \end{aligned} \tag{2-6b}$$

이것은 대칭행렬 A에 대한 고유방정식이 $F(\lambda)=0$ 이면, 대칭행렬 A에 대해서도 $F(A)=0$ 를 만족한다는 것이다. 이 것을 케이레이-해밀톤의 정리(Caylay-Hamilton theorem)라고 부른다.

식 (2-6b)에서 $A^3=I_1A^2-I_2A-I_3I$ 관계가 얻어진다. 이것을 A^n $(n>3)$ 에 대해서 확장하면 A^n 은 A^2, A, I 의 선형결합으로 나타낼 수 있다.

$$A^n=\alpha_1A^2+\alpha_2A+\alpha_3I \tag{2-6c}$$

여기서 계수 α_1, α_2, α_3는 불변량 I_1, I_2, I_3의 함수이다.

정방행렬 [A]가 서로 다른 고유값에 의한 서로 다른 고유벡터(서로 독립임)를 갖는 경우에 고유벡터를 순서대로 (또는 단위벡터화 한 후에) 열 행렬로 하여 만들어지는 $n\times n$ 정방행렬 Q를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$Q=[\{v_1\}\ \{v_2\}\cdots\{v_n\}] \tag{2-7}$$

행렬 A 가 고유벡터를 순서대로 열 행렬로 하여 만들어지는 Q를 이용하여 행렬 A 를 다음과 같이 대각화(diagonalization)할 수 있다. 즉

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \lambda_n\end{bmatrix}(=D) \tag{2-8}$$

이 관계는 양변에 행렬 Q를 곱하면 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}&Q^{-1}AQ=D\rightarrow Q(Q^{-1}AQ)=Q(D)\\&\rightarrow AQ=QD\quad (QQ^{-1}=I)\end{aligned} \tag{2-9}$$

또한

$$(AQ)Q^{-1}=(QD)Q^{-1}\rightarrow A=QDQ^{-1} \tag{2.10}$$

또한 $A^n=QD^nQ^{-1}$ $(n\neq 0)$이 성립한다는 것을 쉽게 증명할 수 있다.

여기서 행렬 D 는 대각행렬을 나타낸다. 식 (2.10)을 부터 행렬 A 는 자신의 고유벡터들을 열벡터로 하는 행렬 Q 와 고유값을 대각행렬로 하는 행렬 D 의 곱으로 나타낼 수가 있다. 이 것을 고유값 분해 (eigen decomposition)라고 한다.

제 1장에서 기술한 것과 같이 만일 정방행렬 Q가 $Q^TQ=I$를 만족하는 경우에는 이

행렬을 직교행렬이라고 부른다. 즉,

$$Q^T Q = I, \quad Q^T = Q^{-1} \quad (\because Q\,Q^{-1} = I)$$
$$|Q| = \pm 1 \tag{2.11a}$$

대표적인 직교행렬은 z축 주위로의 물체의 강체 회전변환(rigid rotation transformation)을 나타내기 위해 사용하는 식 (1-163b)와 같은 행렬이다.

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$
$$Q^{-1} = \frac{1}{\det Q}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = Q^T \quad \left(= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}\right), \tag{2.11b}$$
$$(\because \det Q = |Q| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\ )$$

여기서 좌표축의 회전각 θ는 통상 반시계 방향을 양으로 잡는다. 이 행렬을 동차좌표를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (= Q_z) \tag{2.11c}$$

어떤 행렬 [A]에 대한 고유값과 고유벡터가 주어졌을 때 이 행렬을 대각화할 수 있는지를 판단 하기 위해서는 식 (2-8)의 $Q^{-1}AQ = D$ 가 성립하는지를 검토하면 된다. 이 경우 Q에 대한 역변환 행렬을 구해야 하는데 행렬 크기가 커지면 많은 수고가 요구된다. 따라서 식 (2-8)를 사용하는 대신에 식 (2-9)의 $AQ = QD$ 가 성립하는 것을 보이는 것으로 대체할 수 있다.

대칭행렬 A 를 이와 같이 분해하는 것을 스펙트럼 분해(spectral decomposition, 혹은 고유값 분해, eigenvalue decomposition)라고 한다.

함수 f 가 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 = x^T Ax$ 의 2차 형식(quadratic form) 인 경우를 생각해보자. 이 경우에 행렬 A는 다음과 같이 두 가지로 표시된다.

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$$
$$= \begin{cases} (x_1\ x_2)\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, & A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ (x_1\ x_2)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, & A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

여기서 첫 번째 행렬 A 는 정방행렬이고, 두 번째 행렬 A는 대칭행렬이다.

이 함수에는 x_1, x_2 의 제곱항(square term) 뿐 아니라 x_1, x_2 의 상호곱의 항(cross-product term 또는 교차곱의 항)도 포함하고 있다. 교차곱의 항은 통상 교차항이라고 불린다.

만일 이 $f = x^T Ax$ 함수를 직교행렬 Q 를 매개로 다음과 같이 변수 x를 변수 y로 직교교체(orthogonal change of variable) 하면

$$x = Qy \;\rightarrow\; y = Q^{-1}x = Q^T x \tag{2.12}$$

함수 f 는 식 (2.12)와 식 (2.11)로부터

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x^T Ax = (Qy)^T A(Qy) = y^T Q^T AQy = y^T (Q^T AQ)y \\ &= y^T Dy \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \\ &= f(y_1, y_2) \end{aligned} \tag{2.13}$$

따라서 함수 f 는 y_1, y_2 의 교차항은 포함하지 않고 제곱항 ${y_1}^2, {y_2}^2$ 만을 포함하는 형태로 변형할 수 있다.

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \tag{2.14}$$

이것을 2차 형식의 표준형(normal form)이라고 한다.

본 예제에서 대칭행렬 A 의 고유값 λ 는 0, 5 (〉0)이다. 즉

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 = |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}(1-\lambda)|4-\lambda| + (-1)^{1+2}(-2)|-2| \\ &= (1-\lambda)(4-\lambda) - (-2)(-2) \end{aligned}$$

$$\therefore \lambda(\lambda - 5) = 0, \qquad \lambda = 0(\lambda_1), 5(\lambda_2)$$

여기서 고유값 λ_1, λ_2 를 원래의 식에 대입하여 고유값 λ_1, λ_2 에 대응하는 고유벡터 v_1, v_2 를 구하면

$$\lambda_1 = 0 : \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & -2 \\ -2 & 4-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow v_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ 또는 } v_1 = \begin{Bmatrix} -2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5: \begin{bmatrix} 1\text{-}\lambda_2 & \text{-}2 \\ \text{-}2 & 4\text{-}\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{-}4 & \text{-}2 \\ \text{-}2 & \text{-}1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow v_2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_2} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

여기서 이 두 개의 서로 다른 고유값에 대응하는 두 개의 고유벡터를 벡터 스칼러 곱을 해보면 $\mathrm{v}_1 \cdot \mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_1{}^T \mathrm{v}_2 = (2\ 1)\begin{Bmatrix} 1 \\ \text{-}2 \end{Bmatrix} = 2\text{-}2 = 0$ 임을 알 수 있다. 즉 두 고유벡터는 상호 기하학적으로 직각 관계를 갖고 있어 직교한다는 것을 알 수 있다. 직교관계에 있는 벡터들의 집합을 직교집합(orthogonal sets)라고 하고, 직교 집합을 이루는 기저를 직교 기저(orthogonal basis)라고 한다. 또한 단위 벡터로 구성된 직교 집합(기저)을 정규 직교 집합(orthonormal set)이라고 한다.

한편 이들 고유벡터들로 이루어지는 정방행렬 $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 와 대각행렬 $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ 를 이용하면 다음과 같이 고유값 분해가 가능하다는 것을 알 수 있다.

$$A = QDQ^{-1} \ ; \ \begin{bmatrix} 1 & \text{-}2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & \text{-}1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

위의 고유벡터를 다음과 같이 단위벡터화 하면

$$\lambda_1 = 0: V_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1} = \begin{Bmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 5: V_2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix}$$

이들 단위 고유벡터도 당연히 직교하고 있음을 알 수 있다. 이를 열 행렬로 하여 만들어지는 행렬 Q 를 이용하면 다음과 같이 대칭행렬 A 를 대각화 할 수 있다.

$$Q=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}=\frac{1}{\det Q}\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$(\because \det Q=-1)$

$$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5}} & -\frac{10}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \left(=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}=D\right)$$

여기서는 고유벡터를 단위벡터화 한 후에 순서대로 열 행렬로 하여 구성된 Q 행렬을 이용하였지만 단위벡터화 하지 않아도 동일한 결과가 얻어진다. 즉

$$Q=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}AQ=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \left(=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}=D\right)$$

또한 단위벡터화 한 Q를 이용하고 변수를 교체하여 $y=Q^T x$ 라고 놓으면

$$\begin{cases} y_1=\frac{2}{\sqrt{5}}x_1+\frac{1}{\sqrt{5}}x_2 \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{5}}x_1-\frac{2}{\sqrt{5}}x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$x=Qy \ (=Py)$ 인 관계로 부터 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{\sqrt{5}}y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}y_2 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{5}}y_1-\frac{2}{\sqrt{5}}y_2 \end{cases} \rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}$$

여기서

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} (= Q)$$

이 식을 원래의 식에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \\ &= (\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix})^T \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{5}} & -\frac{10}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = (y_1 \ y_2)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \\ &= 0y_1^2 + 5y_2^2 \end{aligned}$$

따라서 원 함수 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 는 x_1, x_2 의 제곱항 뿐 아니라 x_1, x_2 의 교차항도 포함하고 있지만, 변수의 직교교체를 통해 y_1, y_2 의 제곱항만을 포함한 표준형 식, $f(y_1, y_2) = 0y_1^2 + 5y_2^2$,으로 변환되었다는 것을 알 수 있다.

이렇게 변수의 직교변환 $x = Qy$ 를 통해 2차 형식 함수 $x^T Ax$ 를 제곱항을 포함하고 있지 않는 2차 형식 함수 $y^T Dy$ 로 바꾸는 것을 주축정리(principal axes theorem)라고 한다. 이렇게 얻어진 함수 형태 식 (74b)의 표준형 $y^T Dy$ 를 주축형태(principal axes form) 또는 정규형(canonical form)이라고도 부른다. 또한 이 때 $y = Q^T x$ 인 y 방향을 주축방향(principal direction)이라고 부른다.

예제 2-1 다음 행렬에 대한 고유값을 구하라.

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -22 & -10 & 32 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

[해] 이 행렬에 대한 고유값은 특성방정식 $|A-\lambda I|=0$ 로 구할 수 있으나 여기서는 $|\lambda I-A|=0$ 하여도 동일한 결과를 준다. 따라서

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} \lambda\text{-}3 & -1 & 1 \\ 22 & \lambda+10 & -32 \\ 2 & 1 & \lambda\text{-}3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}(\lambda\text{-}3)\begin{vmatrix} \lambda+10 & -32 \\ 1 & \lambda\text{-}3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1)\begin{vmatrix} 22 & -32 \\ 2 & \lambda\text{-}3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(1)\begin{vmatrix} 22 & \lambda+10 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda\text{-}3)\{(\lambda+10)(\lambda-3)-(-32)(1)\}+1\{(22)(\lambda-3)-(-32)(2)\} \\
&\quad +1\{(22)(1)-(\lambda+10)(2)\} \\
&= \lambda^3+4\lambda^2+\lambda\text{-}6=(\lambda\text{-}1)(\lambda+2)(\lambda+3)
\end{aligned}$$

$$\therefore \lambda = 1(\lambda_1),\ -2(\lambda_2),\ -3(\lambda_3)$$

예제 2-2 주축정리를 이용하여 다음 식을 표준형으로 바꾸고 도형을 y_1y_2 평면에 나타내어라.

$$5x_1^2-4x_1x_2+8x_2^2+\frac{20}{\sqrt{5}}x_1-\frac{80}{\sqrt{5}}x_2+4=0$$

[해] 좌변의 2차 항 $\{5x_1^2-4x_1x_2+8x_2^2\}$ 에 대해서 먼저 주축정리를 적용해보자. 이 항들에 대한 고유값과 고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$5x_1^2-4x_1x_2+8x_2^2=(x_1\ x_2)\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix},\quad |A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-9)=0$$

$$\therefore \lambda_1=4,\ \lambda_2=9$$

$$\lambda_1=4:V_1=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1}=\begin{Bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix},\quad \lambda_2=9:V_2=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{Bmatrix}$$

따라서

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}(=P),\qquad \begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}$$

$x=Qy$ 를 이용하면 좌변의 2차 항 $\{5x_1^2-4x_1x_2+8x_2^2\}$ 은 식 (2.14)로부터 $5x_1^2-4x_1x_2+8x_2^2=4y_1^2+9y_2^2$ 으로 표시된다.

한편 좌변의 나머지 항들에 $x=Qy$ 관계를 적용하면

$$\frac{20}{\sqrt{5}}x_1-\frac{80}{\sqrt{5}}x_2+4$$
$$=(\frac{20}{\sqrt{5}}\ \ \frac{-80}{\sqrt{5}})\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_1\\ y_2\end{Bmatrix}+4=-8y_1-36y_2+4=0$$

따라서 변수를 y_1, y_2 로 바꾼 식을 정리하면 다음과 같이 나타내진다.

$$4y_1^2+9y_2^2-8y_1-36y_2+4=0$$

이 식을 다시 정리하면 타원의 식이 된다는 것을 알 수 있다.

$$4(y_1-1)^2+9(y_2-2)^2=36\ \rightarrow\ \frac{(y_1-1)^2}{3^2}+\frac{(y_2-2)^2}{2^2}=1$$

아래 그림 2-2에 평행이동한 타원의 도형을 y_1y_2 평면에 나타내었다.

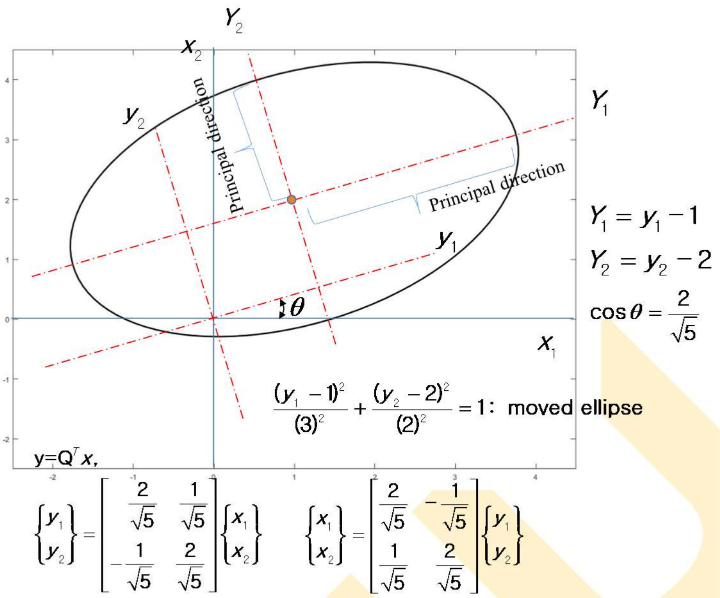


FIG. 2-2 주축정리를 이용한 표준도형

예제 2-3 다음 행렬에 대한 고유값과 고유벡터를 구하고 고유벡터들이 선형 독립인지 종속인지를 판단하라. 또한 고유벡터들이 서로 직교하는지 그리고 이 행렬을 대각화할 수 있는 지 보여라.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

[해] 특성방정식 $|A - \lambda I| = 0$ 에서

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 17\lambda + 21) = (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 7) = 0$$

$$\therefore \lambda = 1, -3, 7$$

$\lambda_1 = 1$ 에 대해서

$$[A - \lambda_1 I]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \quad (L2 : x_1 = -x_3, \rightarrow L1) \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

이 식에서

$$x_1 = C_1,\ x_2 = 2C_1,\ x_3 = -C_1$$

$$v_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{(\lambda_1)} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$\lambda_2 = -3$ 에 대해서

$$[A - \lambda_2 I] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 16x_3 = 0\ (L2 - L3 \times 2) \end{cases}$$

이 식에서

$$x_2 = -C_2,\ x_1 = 2C_2,\ x_3 = -0 \cdot C_2$$

$$v_2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{(\lambda_2)} = C_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\lambda_3 = 7$ 에 대해서

$$[A - \lambda_3 I] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 9x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_2 - 2x_3 = 0 \quad (L2 : x_1 = x_3 - 2x_2 \rightarrow L1) \end{cases}$$

이 식에서

$$x_1 = C_3,\ x_2 = 2C_3,\ x_3 = 5C_3$$

$$v_3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}_{(\lambda_3)} = C_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix}$$

이 세 개의 서로 다른 고유값에 대응하는 고유벡터들이 선형 독립인지를 판단하기 위해서는 앞 장에서 설명한 것과 같이 이들 고유벡터를 선형 결합시켜 영으로 한 다음 식에 대해서 검토해야 한다.

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 = 0$$

$$C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} v_1 + C_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + C_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

이들 고유벡터들이 선형 독립이기 위해서는 항상 $C_1 = C_2 = C_3 = 0$이 만족하여야 한다. 위 식에서 C_1, C_2, C_3를 구하면

$$C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 = 0$$

$$C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Bmatrix} v_1 + C_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix} + C_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

이 식을 풀면 $C_1 = C_2 = C_3 = 0$가 만족하여 고유벡터들이 선형 독립이라는 것을 알 수 있다. 또한 이 세 개의 서로 다른 고유값에 대응하는 고유벡터들은 상호 벡터의 스칼러 곱이 영이기 때문에 ($v_1 \cdot v_2 = 0,\ v_2 \cdot v_3 = 0,\ v_3 \cdot v_1 = 0$) 상호 직교한다는 것을 알 수 있다.

행렬 [A]의 대각화 가능 여부를 판단하기 위해서 $AQ = QD$ 가 성립하는지를 체크해보자. 고유벡터를 열로 나열하여 구성한 행렬 Q는

$$Q = [\{v_1\}\ \{v_2\}\ \{v_3\}\ ] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

따라서 AQ와 QD를 구해보면

$$AQ = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 14 \\ -1 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

$$QD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & 14 \\ -1 & 0 & 35 \end{bmatrix}$$

$AQ = QD$ 가 성립한다. 따라서 행렬 A는 대각화 할 수 있다. 따라서 본 문제의 고유벡터들은 선형 독립이고 상호 직교한다는 것을 알 수 있다.

예제 2-4 다음 행렬에 대한 고유값과 고유벡터를 구하고 고유벡터들이 선형 독립인지 종속인지를 판단하라. 또한 고유벡터들이 서로 직교하는지 그리고 이 행렬을 대각화할 수 있는 지를 보여라.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

[해] 특성방정식 $|A - \lambda I| = 0$ 로부터

$$0 = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$
$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -2 \ \text{(double root)}$$

$\lambda_1 = 1$ 에 대해서

$$[A - \lambda_1 I]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \ x_1 = -x_2, x_2 = -x_3$$

중근인 $\lambda_2 = \lambda_2 = -2$ 에 대해서

$$[A - \lambda_2 I]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \ x_1 = -x_2 - x_3$$

여기서 $x_1 = -1$ 로 하면 $x_2 = 0, x_3 = 1$ 또는 $x_2 = 1, x_3 = 0$ 를 택할 수 있다.

따라서 각 고유값에 대해서 고유벡터를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}_{(\lambda_1)}, \quad v_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(\lambda_2)}, \quad v_3 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}_{(\lambda_3)}$$

중근을 갖는 고유값에 대응하는 이 세 개의 고유벡터들이 선형 독립인지를 판단하기 위해서는 앞 장에서 설명한 것과 같이 이들 고유벡터를 선형 결합시켜 영으로 한 식에 대해서 검토해야 한다. 앞에서와 같은 방법으로 평가하면 $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ 가 만족하여 고유벡터들이 선형 독립이라는 것을 알 수 있다.

그러나 세 개의 고유벡터들은 상호 벡터의 스칼러 곱은 모두 영이 아니기 때문에 고유벡터들은 상호 직교하지 않는다는 것을 알 수 있다. $v_1 \cdot v_2 = -1,\ v_2 \cdot v_3 = 2,\ \ v_3 \cdot v_1 = 0$.

한편 행렬 Q는

$$Q = [\{v_1\}\ \{v_2\}\ \{v_3\}\ ] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

따라서 AQ와 QD를 구해보면

$$AQ = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$QD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$AQ = QD$ 가 성립한다. 따라서 행렬 A는 중근의 고유값을 갖지만 대각화 할 수 있다. 따라서 본 문제의 고유벡터들은 선형 독립이지만 상호 직교하지 않는다는 것을 알 수 있다.

예제 2-5 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $v_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $v_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$일 때 이 v_1, v_2 고유벡터인지를 판별하라. 또한 v_1, v_2 그리고 Av_1, Av_2 를 2차원 평면 상에 도시하라.

[해]

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ -1 \end{Bmatrix} \neq \lambda \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \neq \lambda v_1$$

$$Av_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = 2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \lambda v_2, \quad (\lambda = 2)$$

따라서 v_2 은 고유벡터이나, v_1 은 고유벡터가 아니다. 각각의 v_1, v_2 에 대한 선형변환 결과를 2차원 평면 상에 도시해보자.

그림 2-3으로부터 선형변환 행렬 A는 벡터 v_2 를 같은 방향으로 늘리고 있다(stretch)는 것을 알 수 있다. 즉 벡터 v_2 의 방향 특성은 유지한 채로 크기만 변화(scale change)시키고 있다는 것을 알 수 있다. 참고로 이 행렬 A의 고유값은 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ 이다. 따라서 고유값은 그 고유벡터의 크기 정도를 나타내는 값이라는 것을 알 수 있다.

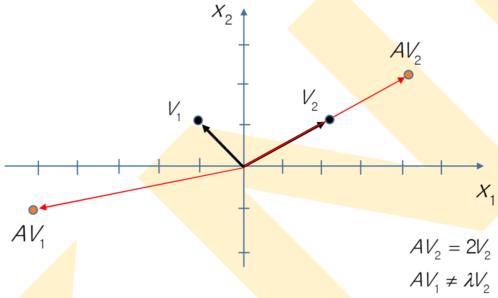


FIG. 2-3 고유값과 고유벡터의 기하학적 의미

예제 2-6 다음 행렬 A의 고유값과 고유벡터를 구하라. 또한 여기서 구한 벡터가 고유벡터인지를 확인하라

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}$$

[해] 특성방정식 $|A - \lambda I| = 0$ 로부터

$$0 = \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & -0.6 \\ 0.75 & 1.1-\lambda \end{vmatrix} = (0.5-\lambda)(1.1-\lambda) - (-0.6 \times 0.75)$$

$$= \lambda^2 - 1.6\lambda + 1$$

$$\therefore \lambda = 0.8 \pm 0.6i \quad \text{(complex number)}$$

따라서 고유벡터는 $\lambda_1 = 0.8 + 0.6\mathrm{i}$ 에 대해서 $[A - \lambda I]\{x\} = \{0\}$ 로 부터

$$\lambda = \lambda_1 : \begin{bmatrix} 0.5 - \lambda_1 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.5 - (0.8 + 0.6i) & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 - (0.8 + 0.6i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} (-0.3 + 0.6i)x_1 - 0.6x_2 = 0 \\ 0.75x_1 + (0.3 + 0.6i)x_2 = 0 \end{cases}$$

두 번째 식에서 $x_1 = (-0.4 - 0.8\mathrm{i})x_2$ 을 얻어 첫 번째 식에 대입하면 $0.6x_2 = 0$ 가 되어 결국 $x_2 = 0,\ x_1 = 0$ 가 되므로 무의미한 해가 얻어진다. 따라서 두 번째 식에서 소숫값을 없애기 위해서 $x_2 = 5$ 로 가정하면 $x_1 = -2 - 4\mathrm{i}$ 가 된다.

고유값 λ_1 에 대응하는 고유벡터 v_1 은 다음과 같이 구해진다.

$$v_1 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1} = \begin{Bmatrix} -2 + 4\mathrm{i} \\ 5 \end{Bmatrix}$$

마찬가지로 고유값 $\lambda_2 = 0.8 - 0.6\mathrm{i}$ 에 대응하는 고유벡터 v_2 은 다음과 같이 구해진다.

$$v_2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}_{\lambda_2} = \begin{Bmatrix} -2 - 4\mathrm{i} \\ 5 \end{Bmatrix}$$

여기서 구한 벡터가 고유벡터이기 위해서는 $Av_1 = \lambda_1 v_1,\ Av_2 = \lambda_2 v_2$ 인 것을 보여야 한다. 즉

$$Av_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -2 + 4\mathrm{i} \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4 + 2\mathrm{i} \\ 4 + 3\mathrm{i} \end{Bmatrix}$$

$$= (0.8 + 0.6\mathrm{i}) \begin{Bmatrix} -2 + 4\mathrm{i} \\ 5 \end{Bmatrix} = \lambda_1 v_1$$

따라서 여기서 구한 벡터는 고유벡터이다.

예제 2-7 판재 재료에 직경 1인 원, $x_1^2 + x_2^2 = 1$, 을 그려 놓은 후에 프레스 가공하였더니 초기에 $P(x_1, x_2)$ 위치에 있던 점이 $Q(y_1, y_2)$ 위치로 변형하였다. 두 점 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad y = Ax$$

이 경우에 주축 방향을 찾고 변형 후 원의 형태를 나타내어라.

[해] 주축 방향을 찾기 위해서 이 문제를 고유값 문제를 취급하면 $y = A\lambda$, 즉 $Ax = \lambda x$ 로부터 다음의 고유방정식을 풀어야 한다.

$$\begin{vmatrix} 5\text{-}\lambda & 3 \\ 3 & 5\text{-}\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$$\lambda_1 = 8, \ \lambda_2 = 2$$

따라서 고유값은 $\lambda_1 = 8, \ \lambda_2 = 2$ 이고, 이 고유값에 대응하는 고유벡터는 각각 아래와 같다.

$$\lambda_1 = 8, \ \begin{bmatrix} 5\text{-}\lambda_1 & 3 \\ 3 & 5\text{-}\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad x_1 = x_2 \ (x_1 = 1, \ x_2 = 1)$$

$$\lambda_2 = 8, \ \begin{bmatrix} 5\text{-}\lambda_2 & 3 \\ 3 & 5\text{-}\lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad x_1 = -x_2 \ (x_1 = 1, \ x_2 = -1)$$

따라서 $\lambda_1 = 8$ 에 대응하는 고유벡터는 $[1 \ 1]^{\mathrm{T}}$ 방향, $\lambda_2 = 2$ 에 대응하는 고유벡터는 $[1 \ -1]^{\mathrm{T}}$ 방향이며 양의 x_1 축에 대해서 각각 45°, -135° 를 이루고 있다. 이들 방향이 각각 주축 방향이 된다.

판재가 프레스 가공된 후에는 $x_1^2 + x_2^2 = 1$ 인 원의 형상으로부터 고유값이 8과 2인 타원, 즉 $\dfrac{y_1^2}{8^2} + \dfrac{y_2^2}{2^2} = 1$ 인 타원으로 연신 변형(stretching)되고 있음을 알 수 있다. (그림 2-4)

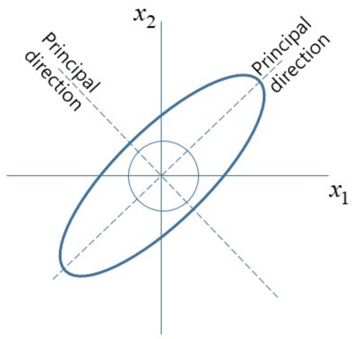


FIG. 2-4 프레스 가공 후 원의 타원으로 변형

예제 2-8 점 P(2,1)을 x 축 주위로 $\pi/3$ 회전시키고, 다음에 y축 주위로 $\pi/4$ 만큼 회전시킨 P' 위치를 구하라

[해] x 축 주위로 $\pi/3$ 회전, y축 주위로 $\pi/4$ 회전에 대한 변환행렬은 각각 다음과 같다.

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3} \\ 0 & -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & 0 & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\frac{\pi}{4} & 0 & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

따라서 P' 는 점 P에 R_x, R_y를 연속적으로 작용시키는 것에 의해 다음과 같이 나타내진다.

$$P' = R_y R_x P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ \frac{1+\sqrt{6}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix}$$

이 식은 또한 다음과 같이 나타내지기도 한다.

$$P' = PR_x R_y = (2\ 1\ 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= (\sqrt{2}\ \ \frac{1+\sqrt{6}}{2}\ \ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2})$$

2.2 제곱법에 의한 고유값 계산

n이 5 이상인 $n \times n$ 정방행렬에 대해서 위에서 기술한 방법으로 고유값과 고유벡터를 계산하려면 상당한 노력이 요구된다. 이하에서는 반복 계산에 의해서 절대값이 최대인 고유값과 고유벡터를 근사적으로 구하는 제곱법(power method 또는 멱방법)을 소개한다. 반복 계산을 통해 고유값을 구하기 위해서 먼저 고유값 문제의 재귀특성에 대해서 검토해 보자. 고유값 문제 $Ax_0 = \lambda x_0$ 에서 $Ax_0 = \lambda x_0 = x_1$ 이라고 하면

$$Ax_1 = A(\lambda x_0) = \lambda A x_0 = \lambda(\lambda x_0) = \lambda^2 x_0 \tag{2.15}$$

또한 $A\,x_1 = \lambda^2 x_0 = x_2$ 라고 하면 $Ax_2 = A(\lambda^2 x_0) = \lambda^3 x_0 = x_3$ 가 된다. 이 과정을 반복하면 다음과 같은 식이 성립한다.

$$Ax_k = \lambda^{k+1} x_0 (\ = x_{k+1}) \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.16}$$

한편 행렬 A가 대각화가 가능하고 n개의 고유값 ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$)과 고유벡터 $(v_1,\ v_1,\ \cdots, v_n)$를 갖는다고 하자. 그러면 임의 벡터 x 는 고유벡터 $(v_1,\ v_1,\ \cdots, v_n)$를 직교

기저로 하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \tag{2.17}$$

이 식은 다시 위의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax \\ &= c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + \cdots + c_n A v_n \quad (Av = \lambda v) \\ &= c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_n \lambda_n v_n \end{aligned} \tag{2.18}$$

또한

$$\begin{aligned} x_2 &= A x_1 = A(Ax) = A(c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_n \lambda_n v_n) \quad (= A^2 x) \\ &= c_1 \lambda_1 A v_1 + c_2 \lambda_2 A v_2 + \cdots + c_n \lambda_n A v_n \\ &= c_1 (\lambda_1)^2 v_1 + c_2 (\lambda_2)^2 v_2 + \cdots + c_n (\lambda_n)^2 v_n \end{aligned} \tag{2.19}$$

이 식을 일반화하면 다음과 같이 나타내진다.

$$x_k = c_1 (\lambda_1)^k v_1 + c_2 (\lambda_2)^k v_2 + \cdots + c_n (\lambda_n)^k v_n \quad (= A^k x), \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.20}$$

위 식들의 전개에 있어서 $x_1 = Ax$ 를 적용하였다. 여기서 $\{x_1\}$ 성분들 중에서 최대값을 1.0으로 하기 위해서 $x_1 = \frac{1}{\lambda_1} Ax$ 으로 하여 다시 전개해보자. 이 경우에 대해서 동일하게 식을 전개해보면

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\lambda_1} Ax = \frac{1}{\lambda_1} A\left(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n\right) \quad (Av = \lambda v) \\ &= c_1 \frac{1}{\lambda_1} A v_1 + c_2 \frac{1}{\lambda_1} A v_2 + \cdots + c_n \frac{1}{\lambda_1} A v_n \\ &= c_1 v_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \cdots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{\lambda_1} A x_1 = \frac{1}{\lambda_1} A \left(c_1 v_1 + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 + \cdots + c_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} v_n \right) \\ &= c_1 v_1 + c_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^2 v_2 + \cdots + c_n (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^2 v_n \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\vdots$$

$$x_k = c_1 v_1 + c_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k v_2 + \cdots + c_n (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k v_n \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.23}$$

그런데 $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge |\lambda_3|$ 이므로 $\lambda_2/\lambda_1, \cdots, \lambda_n/\lambda_1$ 는 1보다 작으므로 $(\lambda_1/\lambda_1)^k, \cdots, (\lambda_n/\lambda_1)^k$ 는 모두 영이 된다. 그러므로 k가 무한대로 커지면 다음 식이 성립한다.

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty}\left(c_1 v_1 + c_2 (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k v_2 + \cdots + c_n (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k v_n\right) \cong c_1 v_1 \tag{2.24}$$

즉, x_k 는 성분의 최대값이 1.0인 $c_1 v_1$ 에 수렴한다. 이때 c_1 이 최대 고유값, v_1 이 이 고유값에 대응하는 고유벡터가 된다.

앞에서 다룬 다음 행렬을 예로 반복 수치 계산에 의해 최대 고유값을 찾는 과정을 이하에 설명한다.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

이 행렬의 고유값을 구하기 위해서는 $Ax = \lambda x \rightarrow |A - \lambda I| = 0$ 의 특성방정식을 풀면 되나 여기서는 반복 수치 계산을 이용한다. 먼저 초기(첫 번째) 고유벡터를 적당한 값으로 다음과 같이 가정한다.

$$x_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

이 값을 첫 번째 고유벡터 x_0 로 가정하였으므로 이 벡터를 고유값 문제에 대입하여 계산한다.

$k = 0$;

$$x_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{Bmatrix} = 9\begin{Bmatrix} 1/9 \\ 5/9 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\mu_0 = 9,\ x_1 = \begin{Bmatrix} 1/9 \\ 5/9 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.111 \\ 0.555 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

이 결과 우변의 벡터성분 (1 5 9) 중에서 최대값 9(절대값이어야 함)를 첫 번째 고유값

μ_0 로 하고 이 값으로 각각의 고유벡터 성분을 나눈 고유벡터를 x_1 이라고 하고 원래의 고유값 문제에 다시 대입하는 과정을 수렴할 때까지 반복한다.

$k=1$;

$$x_1=\begin{Bmatrix}1/9\\5/9\\1\end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\1&2&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1/9\\5/9\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}12/9\\25/9\\57/9\end{Bmatrix}=6.33\begin{Bmatrix}12/57\\25/57\\1\end{Bmatrix},$$

$$\mu_1=6.33,\ x_2=\begin{Bmatrix}12/57\\25/57\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.210\\0.438\\1\end{Bmatrix}$$

$k=2$;

$$x_2=\begin{Bmatrix}12/57\\25/57\\1\end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\1&2&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}12/57\\25/57\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}83/57\\163/57\\404/57\end{Bmatrix}=7.08\begin{Bmatrix}83/404\\163/404\\1\end{Bmatrix},$$

$$\mu_2=7.08,\ x_3=\begin{Bmatrix}83/404\\163/404\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.205\\0.403\\1\end{Bmatrix}$$

$k=3$;

$$x_3=\begin{Bmatrix}83/404\\163/404\\1\end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\1&2&6\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}83/404\\163/404\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}564/404\\1137/404\\2833/404\end{Bmatrix}=7.0123\begin{Bmatrix}564/2833\\1137/2833\\1\end{Bmatrix},$$

$$\mu_3=7.0123,\ x_4=\begin{Bmatrix}564/2833\\1137/2833\\1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.199\\0.401\\1\end{Bmatrix}$$

$k=4$;

$$x_4 = \begin{Bmatrix} 564/2833 \\ 1137/2833 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 564/2833 \\ 1137/2833 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3979/2833 \\ 7931/2833 \\ 19836/2833 \end{Bmatrix} = 7.0017 \begin{Bmatrix} 3979/19836 \\ 7931/19836 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\mu_4 = 7.0017,\ x_5 = \begin{Bmatrix} 3979/19836 \\ 7931/19836 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.200 \\ 0.399 \\ 1 \end{Bmatrix} (\approx \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.995 \\ 5 \end{Bmatrix})$$

여기서 5회 반복 계산으로 고유값 $\mu_4 = 7.0017$ 와 고유벡터 $x_5 = (1\ 1.995\ 5)^T$ 는 해석적으로 구한 최대 고유값 $\lambda = 7$ 과 대응하는 고유벡터 $v = (1\ 2\ 5)^T$ 에 근접하고 있음을 알 수 있다. 이 과정을 수렴할 때까지 반복 계산하면 보다 정교한 해를 얻을 수 있다. 다음 표에 이상의 반복 계산 결과를 요약하였다.

k	k=0	1	2	3	4	5
x_k	$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.111 \\ 0.555 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.210 \\ 0.438 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.205 \\ 0.403 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.199 \\ 0.401 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0.200 \\ 0.399 \\ 1 \end{Bmatrix}$
μ_k	9	6.33	7.08	7.0123	7.0017	

2.3 연립미분방정식의 해

2.3.1 정수 계수 선형 연립미분방정식의 해

고유값 문제를 응용하여 정수 계수 선형 연립미분방정식의 해를 구하는 방법에 대해서 이하에 설명한다. 다음과 같은 예제에 대해서 제 1장에서 다룬 소거법에 의해 선형 연립미분방정식의 해를 구하는 방법을 다시 다루어 보자.

예제 2-9 한 입자가 평면에 작용하는 힘에 의해 평면 내에서 움직이고 있고 그 입자의 위치 x 가 $x' = Ax$ 와 $x(t=0) = x_0$ 로 나타내진다. 이 초기값 문제를 풀고 t≥0에 대해서

입자의 운동궤적을 나타내어라.

$$x' = Ax,$$
$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \quad x_0 = \begin{Bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{Bmatrix}$$

[해] 이 연립미분방정식은 제1장에서와 같이 미분기호를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(D-4)x + 5y = 0 \tag{i}$$

$$(D-1)x + 2y = 0 \tag{ii}$$

식 (i)에서 y를 구하여

$$y = -\frac{1}{5}(D-4)x \tag{iii}$$

식 (ii)에 대입하여 풀면 x에 대한 해가 구해진다.

$$\begin{aligned} &D^2x - 5Dx - 6x = 0, \ (D-6)(D+1)x = 0 \\ &\therefore x = C_1e^{6t} + C_2e^{-t} \end{aligned} \tag{iv}$$

이 식을 식 (iii)에 대입하면

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{5}(D-4)x = -\frac{1}{5}(x' - 4x) \\ &= -\frac{1}{5}(\{6C_1e^{6t} - C_2e^{-t}\} - 4\{C_1e^{6t} + C_2e^{-t}\}) \\ &= -\frac{1}{5}(2C_1e^{6t} - 5C_2e^{-t}) \end{aligned} \tag{v}$$

따라서 식 (iv)와 식 (v)를 정리하면 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} C_1e^{6t} + C_2e^{-t} \\ -\frac{1}{5}(2C_1e^{6t} - 5C_2e^{-t}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ -\frac{2C_1}{5} \end{Bmatrix} e^{6t} + \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} e^{-t} \\ &= C_1 \begin{Bmatrix} -5 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{6t} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-t} \quad (= C_1v_1e^{6t} + C_2v_2e^{-t}) \end{aligned} \tag{vi}$$

$$\left(v_1 = \begin{Bmatrix} -5 \\ 2 \end{Bmatrix}, \ v_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right)$$

이 식에 초기조건 $x(t=0) = x_0$ 을 적용하면

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_{t=0} = C_1 \begin{Bmatrix} -5 \\ 2 \end{Bmatrix} e^0 + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^0 = \begin{Bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{Bmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{Bmatrix} \qquad \text{(vii)}$$

따라서 상수 C_1 =−3/70 , C_2 =188/70 가 얻어진다. 따라서 이 연립미분방정식의 해는 다음으로 나타내진다.

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = -\frac{3}{70} \begin{Bmatrix} -5 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{6t} + \frac{188}{70} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-t} \qquad \text{(viii)}$$

이 식과 같이 시간 t를 매개변수로 하여 x 와 y의 각각의 두 개의 곡선을 나타낼 수 있고, 또한 x와 y를 각각의 축으로 하는 하나의 곡선으로 나타낼 수 있다. 후자를 궤적 (trajectory 또는 orbit, path)라고 부른다. 또한 이 xy 평면을 상평면(phase plane)이라고 부른다. 이 해의 궤적을 다음 그림 2-6에 나타내었다. 그림에서 일부 궤적이 원점에 접근하면 방향을 바꾸어 원점에서 멀어지는 것을 알 수 있다. 이 원점을 뒤에서 언급한 것과 같은 동적 시스템의 안장점(saddle point)이라고 부른다. 동적 시스템에서 안장점이 나타나는 경우는 시스템의 행렬 A의 고유값이 실수이면서 서로 다른 부호 갖는 경우이다.($\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -1$) 그림에서 가장 큰 반발 방향은 양의 고유값에 해당하는 v_1 과 0을 통과하는 선이다. 또한 가장 큰 끌어당김의 방향은 음의 고유값에 해당하는 v_2와 0을 통과하는 선이다.

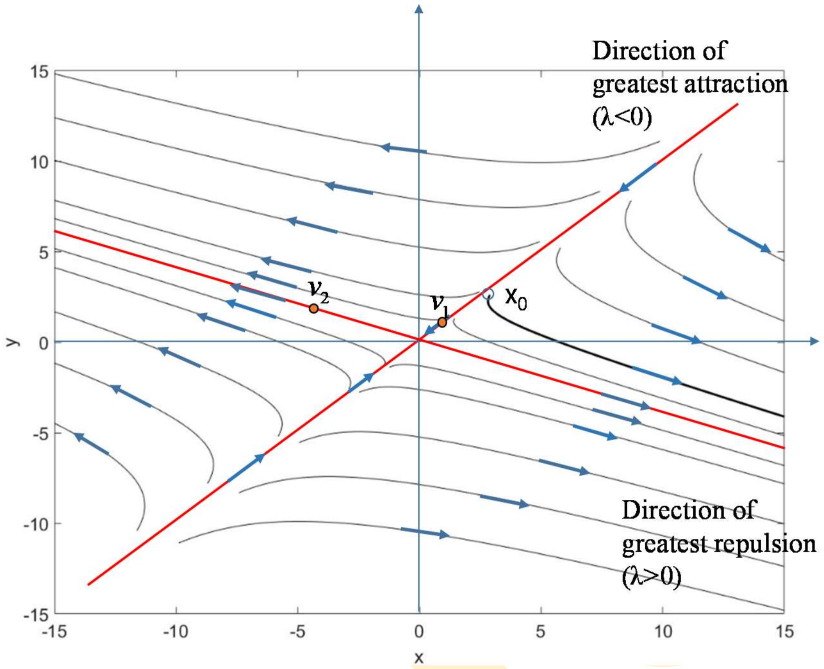


FIG. 2-6 상평면에 나타낸 입자의 운동궤적(안장점)

이 $x'=Ax$ 의 선형 연립미분방정식을 푸는 문제에서 만일 $n\times n$ 정방행렬 A가 서로 독립인 벡터 고유벡터를 갖고 식 (2.12)에서와 같이 변수 x를 변수 y로 직교 교체하는 것, 즉 $y=Q^{-1}x,\quad x=Qy$ 에 의해 식 (2-8), (2.10)에 나타내 것과 같이 대각화된다면 $x'=Ax$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y'=Ay=\lambda y,\quad y'=\lambda y$$

$$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \cdot \\ y_n' \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\cdot\cdot \\ 0 & \lambda_2 & 0\cdot\cdot \\ 0 & 0 & \cdots \\ \cdots\cdot & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{Bmatrix} \tag{2.26}$$

따라서 이 미분방정식은 1계 선형 미분방정식이고

$$y_1'=\lambda_1 y_1,\ y_2'=\lambda_2 y_2,\ \cdots,\ y_n'=\lambda_n y_n \tag{2.27}$$

이 경우에 해는 다음 형태를 갖는다.

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \ y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}, \ \cdots, y_n = C_n e^{\lambda_n t}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \cdot \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 t} + C_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{Bmatrix} e^{\lambda_n t} \qquad (2.28a)$$

따라서 원 연립미분방정식의 해는 식 (2.12) $x = Qy$ 과 식 (2-7)로 부터 다음 식으로 나타내진다.

$$\begin{aligned} x = Qy &= \left[\{v_1\} \ \{v_2\} \ \cdots \ \{v_n\} \right] y \\ &= \left[\{v_1\} \ \{v_2\} \ \cdots \ \{v_n\} \right] \begin{Bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \\ \cdot \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} \\ &= C_1 \{v_1\} e^{\lambda_1 t} + C_2 \{v_2\} e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n \{v_n\} e^{\lambda_n t} \end{aligned} \qquad (2.28b)$$

이 대각화 방법을 이용하여 위의 예제를 풀어보자. 행렬 A에 대한

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

고유값은 $\lambda_1 = 6, \ \lambda_2 = -1$ 이며 각각의 고유값에 대응하는 고유벡터는

$$v_1 = \begin{Bmatrix} -5 \\ 2 \end{Bmatrix}, \ v_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

따라서 변수 y 에 대해서 다음과 같은 해가 얻어지고

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-t}$$

식 (2.29)를 적용하면 다음과 같이 해 x가 구해진다.

$$x = Qy = C_1\{v_1\}e^{\lambda_1 t} + C_2\{v_2\}e^{\lambda_2 t}$$
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = C_1\begin{Bmatrix} -5 \\ 2 \end{Bmatrix}e^{6t} + C_2\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{-t}$$

이 식과 식 (vii)는 같은 형태이고 따라서 초기조건을 적용하여 상수 C_1, C_2 를 구하면 그 결과는 앞의 결과와 동일하다는 것을 알 수 있다. 여기서 $x = x_1$, $y = x_2$ 이다.

예제 2-10 그림 2-7과 같이 저항(resistor), 인덕터(inductor), 커패시터(capacitor)로 구성된 전기회로(electric circuit)에 대한 연립미분방정식을 풀어서 인덕터에 흐르는 전류 i_L 과 커패시터에 걸리는 전압강하 v_C 을 고유값 문제로 구하라.

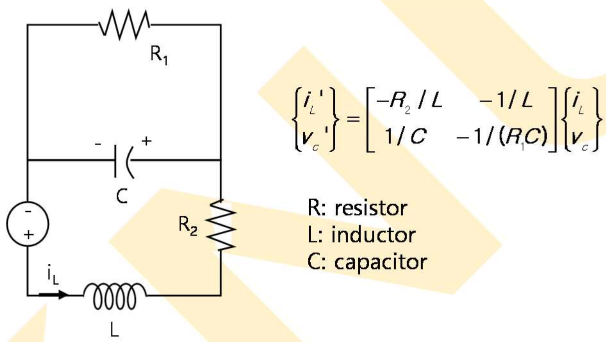


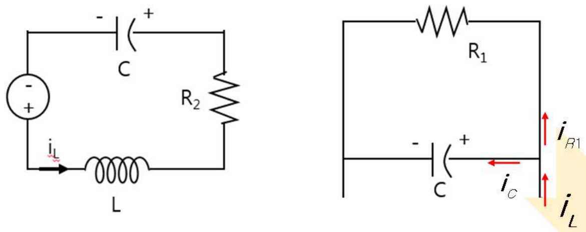
FIG. 2-7 RCL 전기회로의 고유값 문제

단, $R_1 = 5\ ohm, R_2 = 0.8\ ohm$, $L = 0.4\ henry,\ C = 0.1\ farad$ 이다. 초기에 인덕터에 3 amperes가 흐르고 커패시터에는 3 volts가 걸리는 것으로 가정한다. 커패시터는 절연 물질 또는 절연성 물질에 의해 서로 분리된 2개의 전도 물질 플레이트로 구성된 저장 장치이다. 인덕터는 자성 물질의 코어 주위에 와이어와 같은 도체를 감아서 만든다.

[해] 키르호프의 전류 법칙(Kirchoff’s current law)에 따르면 회로의 모든 접점에서 전류의 대수 합은 0이고, 또한 키르호프의 전압 법칙(Kirchoff’s voltage law)에 따르면 회로의 폐쇄 루프 주위에서 전압의 증가와 감소의 대수 합이 0이다.

따라서 그림 2-8에 나타내 것과 같이 $R_1 - L - C$ 회로에 대한 전압과 $R_1 - C$ 회로에 대한 전류를 고려하는 것에 의해 이 전기회로에 대한 연립미분방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{di_L}{dt} \\ \dfrac{dv_c}{dt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i_L' \\ v_c' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2/L & -1/L \\ 1/C & -1/(R_1C) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_L \\ v_c \end{Bmatrix}$$



$$i_L R_2 + L\frac{di_L}{dt} + V_C = 0$$
$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L}R_2 i_L - \frac{1}{L}V_C$$

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{1}{C}(i_L - i_{R1})$$
$$= \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{CR_1}V_C$$

FIG. 2-8 RCL 전기회로에 대한 연립방정식

이 행렬식에 여기에 주어진 조건을 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{Bmatrix} i_L' \\ v_c' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2.5 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_L \\ v_c \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2.5 \\ 10 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

즉, 이 행렬식은 간단히

$$x' = Ax$$
$$x' = \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix}, \quad x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -2.5 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

여기서 편의 상 i_L, v_c를 x_1, x_2로 하였다.

이 문제에 대한 고유값 λ 는 다음 특성방정식을 풀어서 구해진다. 즉

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & -2.5 \\ 10 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0, \quad \therefore \lambda_1 = -2+5i, \qquad \lambda_2 = -2-5i$$

고유값 λ_1과 λ_2에 대한 고유벡터 각각

$$\lambda = \lambda_1 : \begin{bmatrix} -2-(-2+5i) & -2.5 \\ 10 & -2-(-2+5i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda = \lambda_2 : \begin{bmatrix} -2-(-2-5i) & -2.5 \\ 10 & -2-(-2-5i) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

로부터 다음과 같이 구해진다.

$$v_1 = \begin{Bmatrix} i \\ 2 \end{Bmatrix}_{\lambda_1}, \quad v_2 = \begin{Bmatrix} -i \\ 2 \end{Bmatrix}_{\lambda_2}$$

따라서 식 (2.28b)로부터 이 전기회로 문제의 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$x = C_1\{v_1\}e^{\lambda_1 t} + C_2\{v_2\}e^{\lambda_2 t}$$

$$x = C_1\begin{Bmatrix} i \\ 2 \end{Bmatrix}e^{(-2+5i)t} + C_2\begin{Bmatrix} -i \\ 2 \end{Bmatrix}e^{(-2-5i)t}, \quad \{e^{(a+bi)t} = e^{at}(\cos bt + i\sin bt)\}$$

$$= C_1\begin{Bmatrix} i \\ 2 \end{Bmatrix}e^{-2t}(\cos 5t + i\sin 5t) + C_2\begin{Bmatrix} -i \\ 2 \end{Bmatrix}e^{-2t}(\cos 5t - i\sin 5t)$$

$$= D_1\begin{Bmatrix} -\sin 5t \\ 2\cos 5t \end{Bmatrix}e^{-2t} + D_2\begin{Bmatrix} \cos 5t \\ 2\sin 5t \end{Bmatrix}e^{-2t} \quad \{D_1 = C_1 + C_2,\ D_2 = (C_1 - C_2)i\ \}$$

이 식에 초기조건 $x(t=0) = \begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix}$ 을 대입하면 $D_1 = 1.5, D_2 = 3$ 가 얻어진다.

따라서 최종 해는 다음과 같다.

$$x = \begin{Bmatrix} i_L \\ v_C \end{Bmatrix} = 1.5\begin{Bmatrix} \sin 5t \\ 2\cos 5t \end{Bmatrix}e^{-2t} + 3\begin{Bmatrix} \cos 5t \\ 2\sin 5t \end{Bmatrix}e^{-2t}$$

이 경우도 예제 2-9와 같이 시간 t 를 매개변수로 하여 i_L, v_C 각각의 두 개의 곡선을 나타낼 수 있고, 또한 i_L과 v_C를 각각의 축으로 하는 하나의 곡선으로 나타낼 수 있다. (그림 2-9)

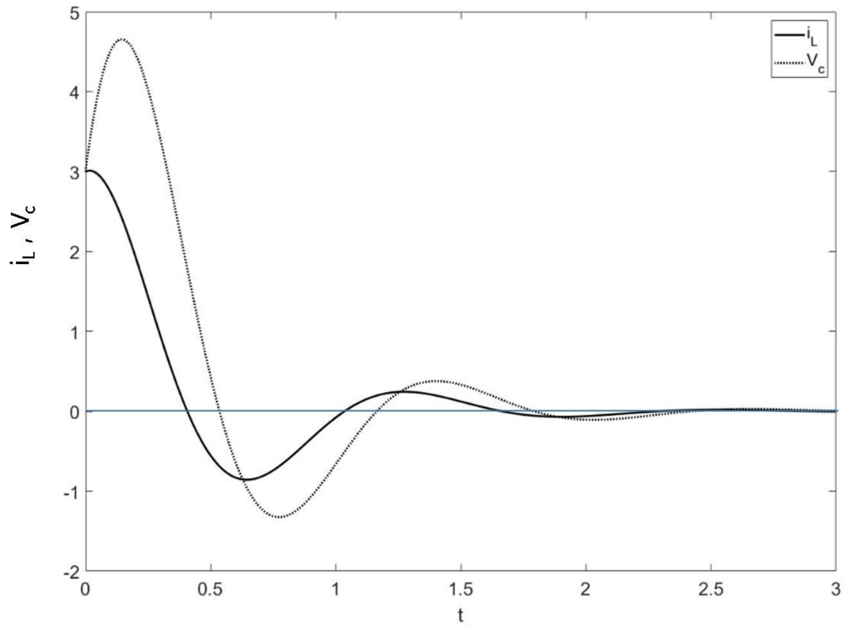


FIG. 2-9 RCL 전기회로에서 i_L, v_C 곡선

다음 그림 2-10은 $t \geq 0$ 에 대해서 i_L 과 v_c 각각의 곡선과 2차원 평면에서 초기조건 $x(t=0)$ 을 $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$ 등으로 바꾸어 가면서 $i_L - v_c$ 의 궤적을 나타내 것이다. 그림에서 회전은 고유값의 실수값이 음이기 때문에 $(\lambda_{1,2} = -2 \pm 5i)$ 발생하는 사인 및 코사인 함수로 인해 야기된 것이다. 시간 t 가 무한대로 커질수록 계수 e^{-2t} 가 0인 경향이 있기 때문에 $i_L - v_c$ 궤적은 원점으로 수렴하는 나선궤적(spiral trajectory)이 된다. 이 때 $x(0,0)$ 인 원점을 나선점(spiral point)이라고 한다. 위의 식에서 시간 t 가 무한대로 커질수록 $i_L - v_c$ 궤적은 원점으로 수렴하고 있음을 알 수 있다.

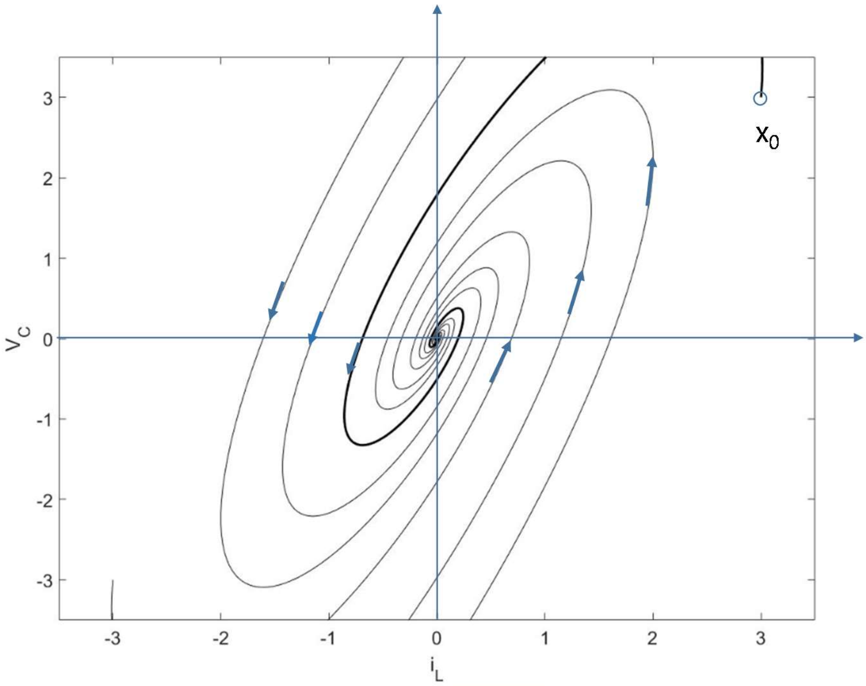


FIG. 2−10 RCL 전기회로에서 $i_L - v_C$ 궤적

만일 고유값의 실수값이 양이라면 궤적은 원점에서 밖으로 향하며 발산하는 나선 궤적을 나타낸다. 또한 만일 고유값의 실수값이 영이어서 허수값 만이 존재한다면 궤적은 원점을 중심으로 타원을 나타낸다.

이 나선점 위치에서는 $i_L' = 0$ 과 $v_c' = 0$ 가 되어 dv_c / di_L 값을 유일하게 결정할 수 없으나 그 외의 위치에서는 dv_c / di_L 값을 유일하게 정의할 수 있다는 것을 알 수 있다. 이와 같이 문제의 상평면에서 변수들의 미분값을 유일하게 결정할 수 없는 점이 존재할 때 그 점을 임계점(critical point) 이라고 한다.

이 예제에서와 같이 시스템의 특성이 $x' = Ax$ 의 선형 연립미분방정식으로 나타내지는 경우에 행렬 A의 고유값은 다음과 일반식으로 나타낼 수 있다.

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}\text{-}\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \frac{p \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$
(2.29)
$$p = a_{11} + a_{22}, \quad q = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad \Delta = p^2 - 4q$$

이 식은 임계점에 대한 판별기준(criteria for critical point)을 나타낸다.

식 $x' = Ax$ 에서 원점 $x(0,0)$ 은 $Ax(0,0)^T = (0,0)^T$ 이기 때문에 평형점(equilibrium point)이다. 이 평형점 근방에서 계의 고유값과 고유벡터를 분석하는 것으로 시스템의 거동(안정성, stability) 을 평가할 수 있다.

통상 시스템의 연립미분방정식에서 얻어지는 해의 궤적들에는 고유값의 형태에 따라서 다음과 같은 6 부류의 임계점이 존재한다. 즉, 고유값이 같은 부호를 가지는 실수이면서 서로 다른 경우에는 마디(node, 고유값이 모두 음이면 sink(stable node), 모두 양이면 source(unstable node)), 고유값이 실수이면서 하나는 양의 부호, 하나는 음의 부호를 갖는 경우에는 안장점(saddle point), 고유값이 중근을 가지면서 서로 다른 고유벡터를 갖는 경우에는 고유마디(proper node 또는 star point)을 갖는다.

또한 고유값이 중근을 가지면서 하나 만의 고유벡터를 갖는 경우에는 비고유마디(improper node 또는 퇴화마디(degenerate node)), 고유값이 복소수인 경우에는 나선점(spiral point, $\lambda_1 < 0$ 이면 spiral sink, $\lambda_1 > 0$ 이면 spiral source), 고유값이 허수값 만인 경우에는 중심(center)을 갖는다.

식 (2.29)의 판별기준에 따라 $p = 0, q > 0$ 일 때는 마디, $q > 0, \Delta \ge 0$, $q < 0$ 일 때는 안장점, $p = 0, q > 0$ 일 때는 중심, $p \ne 0, \Delta < 0$ 일 때는 나선점을 갖는 것을 알 수 있다. 따라서 예를 들면 $y' = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} y$ 는 비고유마디, $y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y$ 은 고유마디, $y' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y$ 은 안장점, $y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} y$ 은 중심점을 갖는다

이들 임계점을 갖는 시스템의 안정성을 요약하면 다음과 같다. node와 spiral의 경우에 고유값에 음의 실수부가 있는 sink는 안정, 적어도 하나에 양의 실수부가 있는 Source는 불안정, 양과 음의 실수부를 모두 갖는 saddle의 경우는 항상 불안정하다. 즉, 고유값에 음의 실수부가 있으면 안정적이고, 적어도 하나에 양의 실수부가 있으면 불안정하다.

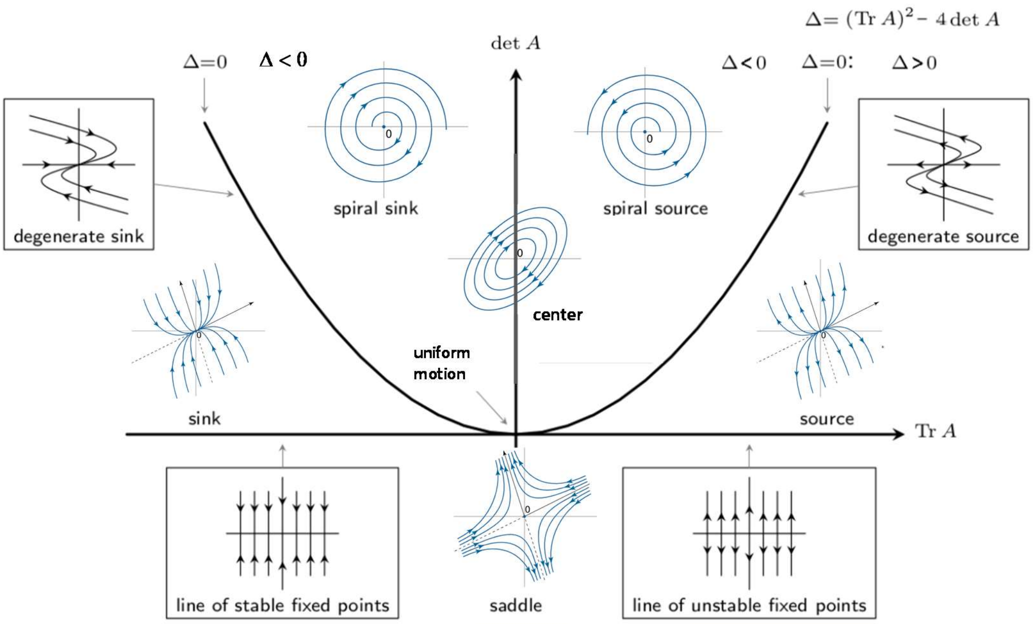


FIG. 2-11 시스템의 안정성 평가

예제 2-11 1장의 1.4.4절에서 다룬 다음 예제를 고유값 문제로 다루어보자.

$$\begin{cases} 2x'+y'-4x-y=0 \\ x'+3x+y=0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

[해] 이 선형 연립미분방정식을 고유값 문제로 다루기 위해서는 이 방정식을 $x'=Ax$ 형식으로 만드는 것이 필요하다. 따라서 양변에 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ 을 곱하면

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

$$x' = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$$

따라서 이 행렬 A에 대한 고유값과 고유벡터를 구하면 $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ 이며 각각의 고유값에 대응하는 고유벡터는

$$v_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3-i \end{Bmatrix}, \quad v_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -3+i \end{Bmatrix}$$

따라서 식 (2.18)을 적용하면 다음과 같이 해가 구해진다.

$$\begin{aligned} x &= C_1 \{v_1\} e^{\lambda_1 t} + C_2 \{v_2\} e^{\lambda_2 t} \\ \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -3-i \end{Bmatrix} e^{it} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -3+i \end{Bmatrix} e^{-it} \\ &= C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -3-i \end{Bmatrix} (\cos t + i \sin t) + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -3+i \end{Bmatrix} (\cos t - i \sin t) \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{cases} x_1 = (C_1 + C_2)\cos t + \mathrm{i}(C_1 - C_2)\sin t = D_1 \cos t + D_2 \sin t \\ x_2 = -(C_1 + C_2)3\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \mathrm{i}(C_2 - C_1)\cos t + i(C_2 - C_1)3\sin t \\ \quad = -(3D_1 + D_2)\cos t + (D_1 - 3D_2)\sin t \end{cases}$$

$$\{D_1 = C_1 + C_2, \ D_2 = \mathrm{i}(C_1 - C_2)\}$$

따라서 x, y에 대한 최종해는 다음과 같이 된다.

$$\begin{cases} x = D_1 \cos t + D_2 \sin t \\ y = (D_1 - 3D_2)\sin t - (3D_1 + D_2)\cos t \end{cases}$$

2.3.2 n계 미분방정식의 선형 연립미분방정식화

여기서는 n계 미분방정식을 앞 장에서 나타내 것과 같이 선형 연립미분방정식으로 변환하여 고유값 문제에 의한 해를 구하는 방법에 대해서 설명한다.

다음의 2계 상미분 방정식을 검토해보자.

$$2y''-5y'+y=0$$

여기서 $y(t)=x_1(t)$, $y'(t)=x_2(t)$ 라고 하면 윗 식을 다음과 같이 선형 연립미분방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x_1'(t)=y'(t)=x_2(t) \\ x_2'(t)=y''(t)=-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}y'=\frac{1}{2}x_1+\frac{5}{2}x_2 \end{cases}$$

즉

$$x'=Ax,$$

$$x'=\begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{Bmatrix},\ x=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

따라서 주어진 2계 상미분방정식은 선형 연립미분방정식으로 변환된다는 것을 알 수 있다. 이 식에 대해서 고유값 문제를 적용하면 고유값은 $\lambda_1=2.28$, $\lambda_2=0.22$ 이고 대응하는 고유벡터는 다음과 같이 구해진다.

$$v_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 2.28 \end{Bmatrix},\ v_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.22 \end{Bmatrix}$$

따라서 이 선형 연립미분방정식의 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$x=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=C_1\begin{Bmatrix} 1 \\ 2.28 \end{Bmatrix}e^{2.28t}+C_2\begin{Bmatrix} 1 \\ 0.22 \end{Bmatrix}e^{0.22t}=\begin{Bmatrix} y \\ y' \end{Bmatrix}$$

그러므로 $y=C_1e^{2.28t}+C_2e^{0.02t}$ 이다.

2.4 고체역학에의 응용

앞에서 다룬 다음 행렬 A의 각 성분을 고체역학(solid mechanics)에서 다루는 응력값(stress value)라고 하고 이 문제를 고유값 문제로 다루어 보자. 여기서는 편의 상 x_1, x_2 를 x, y 라고 한다.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}(\text{MPa})$$

응력의 단위는 MPa로 한다. 행렬의 각 성분값은 4은 x축으로 작용하는 수직응력(normal stress) $\sigma_x = 4(\mathrm{MPa})$, 2는 xy축과 관련된 전단응력(shear stress) $\tau_{yx} = 2(\mathrm{MPa})$, 1는 y축으로 작용하는 수직응력 $\sigma_y = 1(\mathrm{MPa})$ 로 간주한다.

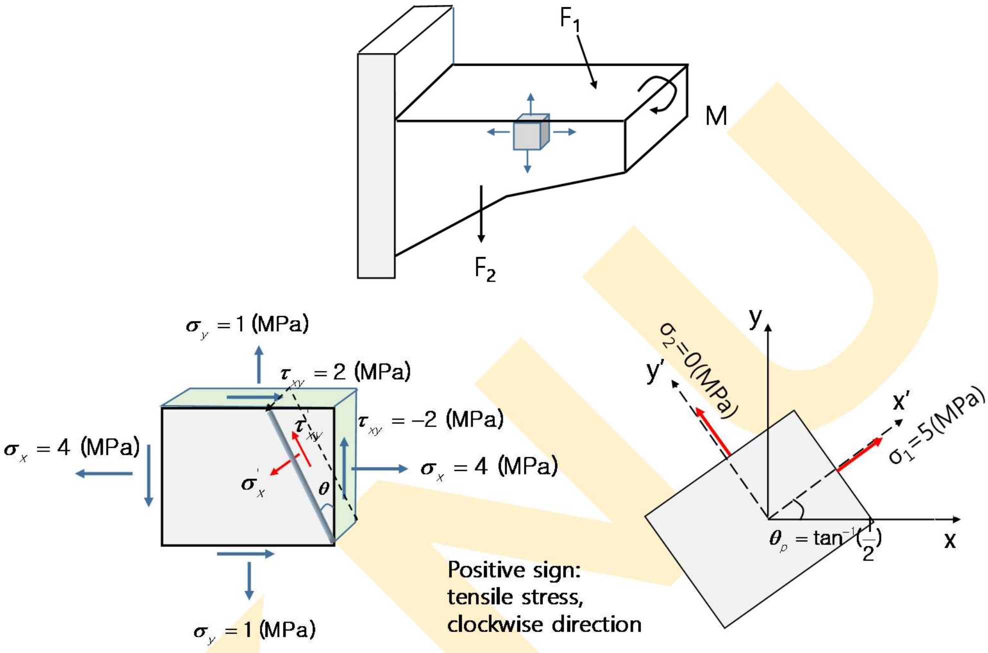


FIG. 2-12 고체역학 문제에서 고유값

이 문제에 대한 고유값은 0(MPa)과 5(MPa)이다. 또한 이들 고유값에 대응하는 고유방향은 각각 $(\frac{2}{\sqrt{5}}\ \frac{1}{\sqrt{5}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{2}{\sqrt{5}})$ 이다. 고체역학에서는 이들 응력의 고유값을 주응력(principal stress)이라고 부르고 $\sigma_1 = 5(\mathrm{MPa}), \sigma_2 = 0(\mathrm{MPa})$ 로 표시한다.

그림에 물체에 외력 F_1, F_2 과 모멘트 M 이 작용하고 있을 때 임의 한 단면에서의 응력 상태를 xy면(물리면, physical plane)에서의 나타내었고 또한 주응력의 방향 x’, y’ 과 주응력값을 나타내었다.

이 2차원 평면 상에 작용하는 응력, $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 에 대한 고유값 문제를 일반화하면

특성방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다. 여기서는 고유값 λ 대신에 σ를 사용하였다

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.30}$$

이 식을 전개하면

$$0 = (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = \sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_y)\sigma + \sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2 \tag{2.31}$$

따라서 응력에 대한 이 다항식을 풀면 두 개의 주응력이 $\sigma\ (= \sigma_1, \sigma_2)$ 다음과 같이 얻어진다.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}\right\} \tag{2.32a}$$

여기서는 주응력 중에서 큰 값을 σ_1 , 작은 값을 σ_2 라고 하였다. σ_1 을 최대 주응력(maximum principal stress), σ_2를 최소 주응력(minimum principal stress)라고 한다.

이 주응력은 2차원 평면 상에 작용하는 응력상태를 나타내는 모아 응력원(Mohr stress circle 또는 Mohr diagram)에 대한 기하학적 해석으로부터 구해지는 값과 같다는 것을 알 수 있다. 모아원은 각 면에 작용하는 수직응력과 전단응력 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 를 수직응력-전단응력 평면 $(\sigma - \tau)$ 상에 원으로 나타낸 것이다. 모아원을 작도할 때에는 인장 수직응력을 양(+), 압축 수직응력을 음(−)으로 하고, 전단응력에 대해서는 시계 방향을 양, 반시계 방향을 음으로 표시한다. 물리면에서 x축에서 반시계 방향으로 θ 만큼 회전한 면에 작용하는 응력 (σ_x', τ_{xy}') 은 모아원에서는 반시계 방향으로 2θ 만큼 회전한 위치에서의 응력으로 표시된다. 모아원에서 주응력 방향(σ_x 면으로부터 회전각) θ_p은 다음과 같이 나타내진다.

$$\theta_p = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}} \tag{2.32b}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma'_x &= \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\
\tau'_{xy} &= -(\sigma_x-\sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&= -\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \\
\sigma'_y &= \sigma_x \sin^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.32c)
$$

이 응력 (σ'_x, τ'_{xy}) 는 식 (1-163e)의 좌표변환 행렬을 이용하면 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$
\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}
$$

$$
\sigma' = Q\sigma Q^T \qquad (i.e. \quad \sigma'_{ij} = Q_{ik}Q_{jl}\sigma_{kl}) \qquad (2.32d)
$$

이 관계식을 응력 변환식(stress transformation)이라고 부른다. 여기서

$$
\sigma' = \begin{bmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_{yy} \end{bmatrix}, \ \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}
$$

$$
Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \ Q^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad (2.32e)
$$

$$
\sigma'_{xx} = \sigma'_x, \ \sigma_{xx} = \sigma_x, \ \sigma'_{yy} = \sigma_y, \cdots.
$$

이 모아원에 대한 기하학적인 관계로부터 주응력 σ_1, σ_2 , 최대 전단응력 $\tau_{\max}$ 그리고 주응력의 방향을 알 수 있다. 즉

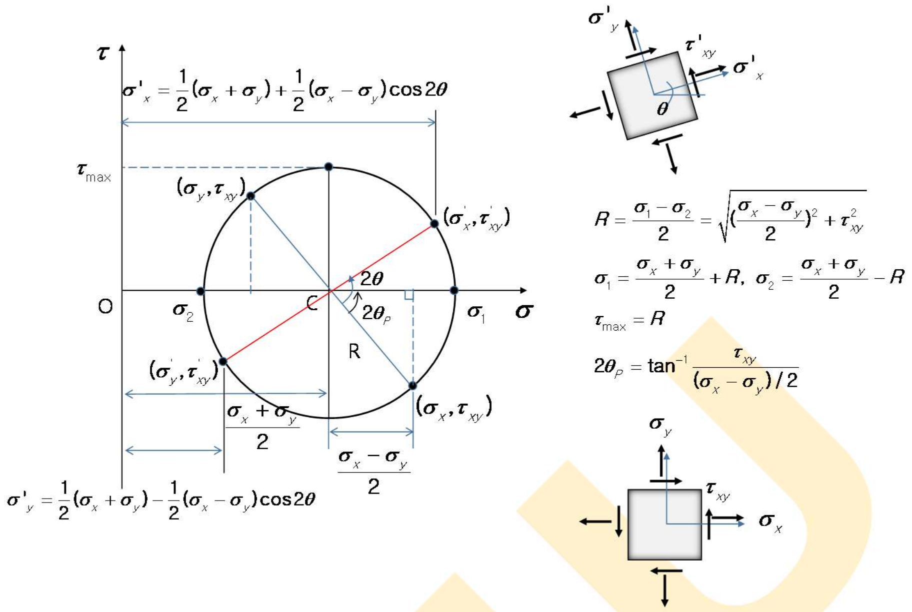


FIG. 2-13 모아원에서 주응력 정의

따라서 모아원에서 위 문제의 주응력은 다음과 같고, 그 결과는 고유값 문제의 결과와 같다.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{4+1}{2} + \sqrt{(\frac{4-1}{2})^2 + (-2)^2} = 5(\text{MPa})$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_{xy}^2} = 0(\text{MPa})$$

물론 응력장에 대한 고유값 문제를 3차원 문제로 확장할 수 있고, 이 경우에 특성방정식은 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x\text{-}\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y\text{-}\sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \tau_{zy} & \sigma_z\text{-}\sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{2.33}$$

이 식을 전개하면 다음과 같이 응력 σ 에 대한 다항식이 얻어진다.

$$\sigma^3 - I_1\sigma^3 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{2.34}$$

여기서

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\
I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

I_1, I_2, I_3 는 응력 상태를 나타내기 위해 잡은 축의 방향과 무관하게 일정한 값을 갖는 응력불변량(stress invariant)이라고 한다. I_1 은 제1 응력불변량, I_2 는 제2 응력불변량, I_3 는 제3 응력불변량이다.

이 다항식을 풀면 세 개의 주응력 $\sigma(=\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$를 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&0 = \sigma^3 - I_1\sigma^3 + I_2\sigma - I_3 = (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) \\
&\therefore \sigma = \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

고체역학에서 응력의 각 수직성분 σ_i 에서 정수응력 $\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ 을 뺀 것을 편차응력(deviatoric stress) $s_i = \sigma_i - \sigma_m$ 이라고 한다. 구체적으로 $s_x = \sigma_x - \sigma_m,\ s_y = \sigma_y - \sigma_m, \cdots, \tau_{xy} = \tau_{xy}, \cdots$ 이 편차응력 성분에 대해서도 동일하게 특성방정식이 성립한다.

$$
\begin{vmatrix}
s_x\text{-}\sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{xy} & s_y\text{-}\sigma & \tau_{yz} \\
\tau_{zy} & \tau_{zy} & s_z\text{-}\sigma
\end{vmatrix} = 0
\tag{2.37}
$$

여기서

$$
\begin{aligned}
&\sigma^3 - J_1\sigma^3 + J_2\sigma - J_3 = 0 \\
&J_1 = s_x + s_y + s_z = (\sigma_x - \sigma_m) + (\sigma_y - \sigma_m) + (\sigma_z - \sigma_m) = 0 \\
&J_2 = s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\
&J_2 = s_x s_y s_y - \cdots
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

이 특성방정식에서 재료의 소성변형(plastic deformation)을 기술하는데 중요한 개념으로 알려진 다음의 미세스 소성항복 조건(Mises' plastic yielding criterion)이 구해진다.

$$
J_2 = C \quad : \text{Mises Yield criterion} \tag{2.39}
$$

이 식은 응력성분으로 구체적으로 다음과 같이 나타내진다.

$$
\frac{1}{6}\left\{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)\right\} = C \tag{2.40}
$$

여기서 상수 C는 단축 인장실험에서 항복응력값을 이용하여 정의된다.

이 식이 하중을 받고 있는 재료가 탄성을 넘어서 소성변형을 시작하는 소성항복조건을 나타내는 기준식이다. 이 소성항복 조건식을 유한요소해석(finite element analysis, FEA)이라고 불리는 수치해석에 적용하면 자동차의 충돌, 프레스 가공, 단조가공, 절삭가공 등 소성변형이 수반된 다양한 문제들을 컴퓨터로 가상해석(virtual simulation) 할 수 있다.

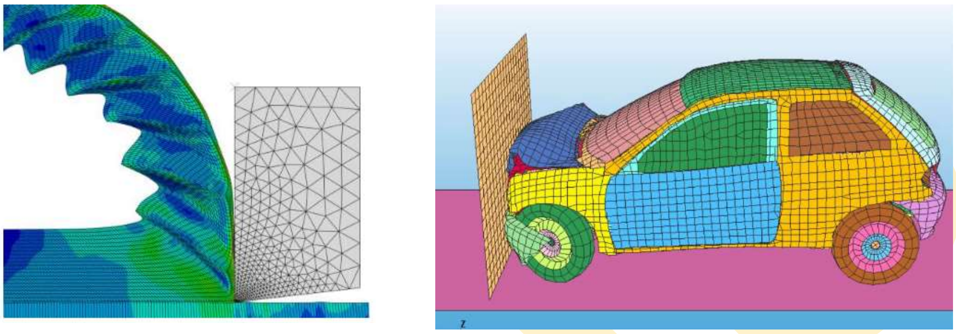


FIG. 2-14 컴퓨터 가상해석 기술(절삭가공, 차량충돌)

2.5 진동문제에의 응용

모드해석(modal analysis) 또는 고유진동수해석(natural frequency analysis), 자유진동해석(free vibration analysis)은 외력이 없는 상태 하에서 구조물이 갖고 있는 고유진동수와 각 고유진동수에서의 변형형상(모드형상, mode shape)을 파악하여 동적 하중 조건 하에서 구조물의 공진여부와 진동에 의한 거동을 예측하는 해석이다. 만약 구조물 자체의 고유진동수와 외부 동적하중의 작동주파수가 일치하게 되면 구조물에 공진(resonance)이 발생한다. 구조물에 공진이 발생하면 진동과 소음이 급격하게 커져서 구조물이 파괴되기도 한다. 그러므로, 진동이나 주기하중이 지속적으로 작용하는 구조물의 경우에는 미리 모드해석을 수행하여 공진의 발생 가능성을 검토하는 것이 필요하다.

통상 모드해석을 통해 구조물의 공진이 예상되면 구조물의 고유진동수를 작동주파수 대비 1/3 이하로 낮추거나 3배 이상 커지도록 설계를 변경할 필요가 있다. 모드해석은

모든 동 해석의 기본이 되는 해석이며, 특히 기계 구조물의 소음진동 특성(NVH: noise, vibration, and harshness)을 파악하는데 대단히 중요하다. 진동수와 주파수 모두 “frequency”를 의미하는 같은 용어이지만, 통상 구조물의 (내부)진동과 관련된 것을 진동수, 외부하중의 작용과 관련된 것을 주파수라고 한다.

이하에서 자동차의 진동과 같이 엔진의 진동, 도로 면에서 타이어를 통해 전달되는 차체의 진동 등과 같이 상호 영향을 미치는 여러 부분의 진동계의 집합에서 나타나는 결합된 진동형상(coupled vibration)을 해석하기 위한 간단한 모델에 고유값 문제를 적용해보자.

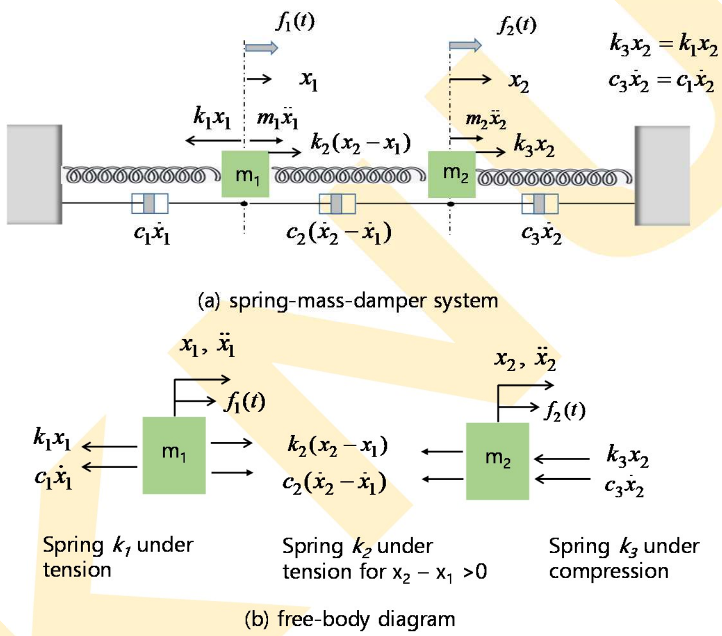


FIG. 2-15 스프링-질량-뎀퍼 시스템

이 그림과 같은 두 개의 질량이 세 개의 스프링과 데쉬 포트를 매개로 연결되어 있고 각각의 질량에 f_1 과 f_2의 가진력(또는 외력, 외란)이 작용하여 병진운동하는 스프링-질량-뎀퍼 시스템의 진동에 대해서 검토해보자. 그림 2의 자유물체도로부터 이 시스템의 각 질량에 대한 운동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} m_1 x_1'' + c_1 x_1' + k_1 x_1 + c_2(x_1' - x_2') + k_2(x_1 - x_2) = f_1 \\ m_2 x_2'' + c_3 x_2' + k_3 x_2 - c_2(x_1' - x_2') - k_2(x_1 - x_2) = f_2 \end{cases} \tag{2.41a}$$

여기서 스프링 1과 스프링 3의 스프링 복원상수와 감쇠계수는 동일하다고 ($k_1=k_3$, $c_1=c_3$) 가정하는 경우에는

$$\begin{cases} m_1 x_1'' + c_1 x_1' + k_1 x_1 + c_2(x_1' - x_2') + k_2(x_1 - x_2) = f_1 \\ m_2 x_2'' + c_1 x_2' + k_1 x_2 - c_2(x_1' - x_2') - k_2(x_1 - x_2) = f_2 \end{cases} \tag{2.41b}$$

이 식은 다시

$$\begin{cases} m_1 x_1'' + (c_1 + c_2) x_1' - c_2 x_2' + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1 \\ m_2 x_2'' + (c_1 + c_2) x_2' - c_2 x_1' - k_2 x_1 + (k_1 + k_2) x_2 = f_2 \end{cases} \tag{2.42a}$$

이 식을 행렬로 표시하면 다음과 같이 표시된다.

$$[M]\{x''\} + [D]\{x'\} + [k]\{x\} = \{F\} \tag{2.42b}$$

여기서 시간 미분 x'', x'을 각각 $\ddot{x}, \dot{x}$으로 나타내면

$$[M]\{\ddot{x}\} + [D]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\} \tag{2.42c}$$

여기서

$$\begin{gathered} [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},\ [D] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix},\ [K] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \\ \{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix},\ \{F\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \end{gathered} \tag{2.42d}$$

M 은 질량행렬(mass matrix), D 는 감쇠행렬(damping matrix), K 는 강성행렬(stiffness matrix), x는 반응행렬(response matrix), F는 외력(exciting force matrix)이다.

이 스프링-질량-뎀퍼 시스템에서 만일 외부에서 가해지는 가진력이 없고 $\{F\}=0$, 감쇠가 없는 $\{D\}=0$ 경우의 자유진동(undamped **free vibration**)을 검토해보자. 이 경우에 상기 방정식은 다음과 같이 나타내진다.

$$[M]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0 \tag{2.43a}$$

문제를 간단히 하기 위해서 두 개의 질량은 같고 ($m_1=m_2=m$), 외부에서 가해지는 가진력과 감쇠가 없는 자유진동을 검토해보자. 이 경우에 상기 방정식은 구체적으로는 다음과 같은 연립미분방정식으로 표현된다.

$$\begin{cases} m\ x_1'' = -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 \\ m\ x_2'' = -k_1x_2 - k_2(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_2)x_2 + k_2x_1 \end{cases} \tag{2.43b}$$

여기서 이 미분방정식에 대한 해를 $x = (x_1, x_2)^T = e^{iwt}$ 로 가정하면 $x' = iwe^{iwt}$ $x'' = (iw)^2 e^{iwt} = -w^2 e^{iwt} = -w^2 x$ 이므로 이 관계를 위 식에 대입하면

$$\begin{cases} w^2 x_1 = \dfrac{k_1 + k_2}{m} x_1 - \dfrac{k_2}{m} x_2 = ax_1 - bx_2 \\ w^2 x_2 = \dfrac{k_1 + k_2}{m} x_2 - \dfrac{k_2}{m} x_1 = ax_2 - bx_1 \end{cases} \tag{2.44}$$

$$(a = \frac{k_1 + k_2}{m},\ \ b = \frac{k_2}{m})$$

이 식을 행렬 방정식으로 표시하면 우변 w^2 이 고유값에 해당하는 것으로 생각할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \text{a} & \text{-b} \\ \text{-b} & \text{a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = w^2 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \qquad (\because Ax = \lambda x,\ \ \lambda = w^2) \tag{2.45}$$

즉

$$\begin{bmatrix} \text{a-w}^2 & \text{-b} \\ \text{-b} & \text{a-w}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.46}$$

식 (2.46)의 행렬을 고유값 문제로 다루고 x_1, x_2 가 영이 아니기 위해서는 행렬식이 영이어야 한다.

$$0 = \begin{vmatrix} \text{a-w}^2 & \text{-b} \\ \text{-b} & \text{a-w}^2 \end{vmatrix} = w^4 - 2aw^2 + (a^2 - b^2) \tag{2.47}$$

이 행렬식을 풀면 고유값 w_1, w_2 가 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} & w^2 = \frac{a \pm b}{2}, \\ & \therefore w_1 = \sqrt{\frac{a+b}{2}} = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{2m}},\ \ w_2^2 = \sqrt{\frac{a-b}{2}} = \sqrt{\frac{k_1}{2m}} \end{aligned} \tag{2.48}$$

이 고유값 w_1, w_2 을 가진력이 없고 감쇠가 없는 시스템의 고유진동수(undamped natural frequency, [rad/sec])라고 부른다.

식 (2.48)의 고유값을 식 (2.46)에 대입하여 대응하는 고유벡터를 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
w = w_1 :& \begin{bmatrix} \mathrm{a\text{-}w_1}^2 & \text{-b} \\ \text{-b} & \mathrm{a\text{-}w_1}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \; x_1 = x_2, \; v_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
w = w_2 :& \begin{bmatrix} \mathrm{a\text{-}w_2}^2 & \text{-b} \\ \text{-b} & \mathrm{a\text{-}w_2}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \; x_1 = -x_2, \; v_2 = \begin{Bmatrix} \text{-}1 \\ 1 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

이 x_1과 x_2는 질량 m_1 과 m_2 에 대한 진동 모드형상 (vibration mode shape), 간단히 진동 모드(vibration mode)가 된다.

따라서 시스템의 진동에 대한 해는 앞에서와 같이 $x = Qy$ 관계를 이용하여 다음과 같이 나타내진다.

$$
\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{i w_1 t} + C_2 \begin{Bmatrix} \text{-}1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-i w_2 t} \\
&= C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\cos w_1 t + i \sin w_1 t) + C_2 \begin{Bmatrix} \text{-}1 \\ 1 \end{Bmatrix} (\cos w_2 t - i \sin w_2 t) \\
&= D_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(w_1 t + \phi) + D_2 \begin{Bmatrix} \text{-}1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos(w_2 t + \phi')
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

따라서 질량 m_1 과 질량 m_2 의 변위는 다음 식으로 나타내진다.

$$
\begin{cases} x_1 = D_1 \cos(w_1 t + \phi) - D_2 \cos(w_2 t + \phi) \\ x_2 = D_1 \cos(w_1 t + \phi) + D_2 \cos(w_2 t + \phi) \end{cases}
\tag{2.51a}
$$

다음 그림 2-16 (a)에 질량이 $m_1 = m_2 = 10$, 스프링 복원상수가 $k_1 = k_2 = 5$ 일 때, (b) $m_1 = m_2 = 5$, 스프링 복원상수가 $k_1 = k_2 = 10$ 일 때 시간 변화에 따른 각 질량의 진동 모드형상을 나타내었다.

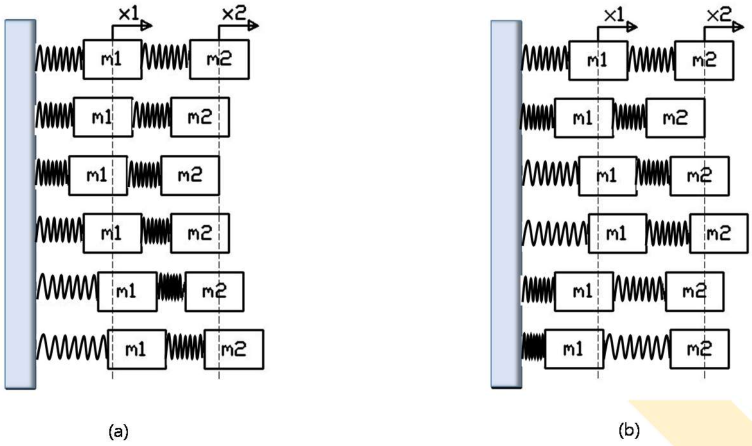


Fig. 2-16 스프링-질량-뎀퍼 시스템에서 각 질량의 진동모드

식 (2.43a)를 보다 일반화 시키면 질량과 스프링을 갖는 병진운동 시스템의 고유값 문제를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\{0\} &= [M]\{\ddot{x}\}+[k]\{x\}\\ &= \left(-w^2[M]+[K]\right)\{x\}\\ &\left(\because \{x\}=\{x\}e^{iwt},\ \{\dot{x}\}=iw\{x\},\ \{\ddot{x}\}=-w^2\{x\}\right)\end{aligned} \tag{2.51b}$$

양변에 $[M]^{-1}$을 작용시키면

$$\begin{aligned}&\left([K]-w^2[M]\right)\{x\}=\{0\}\\ &\left([M]^{-1}[K]-w^2[M]^{-1}[M]\right)\{x\}=\{0\}\\ &([A]-\lambda[I])\{x\}=\{0\}\end{aligned} \tag{2.52}$$

여기서 $[A]=[M]^{-1}[K]$, $\lambda=w^2$, $[I]=[M]^{-1}[M]$ 이다. 이 식은 진동에 대한 고유값 문제의 대표적인 식으로 알려져 있다.

참고로 그림 2-17와 그림 2-18은 범용 유한요소해석 프로그램인 ANSYS(www.ansys.com) 의 모달해석(modal analysis) 기능을 이용하여 외팔보(cantilever beam)와 자동차 브레이크 디스크에 대한 고유 진동수와 진동모드 예를 나타낸 것이다.

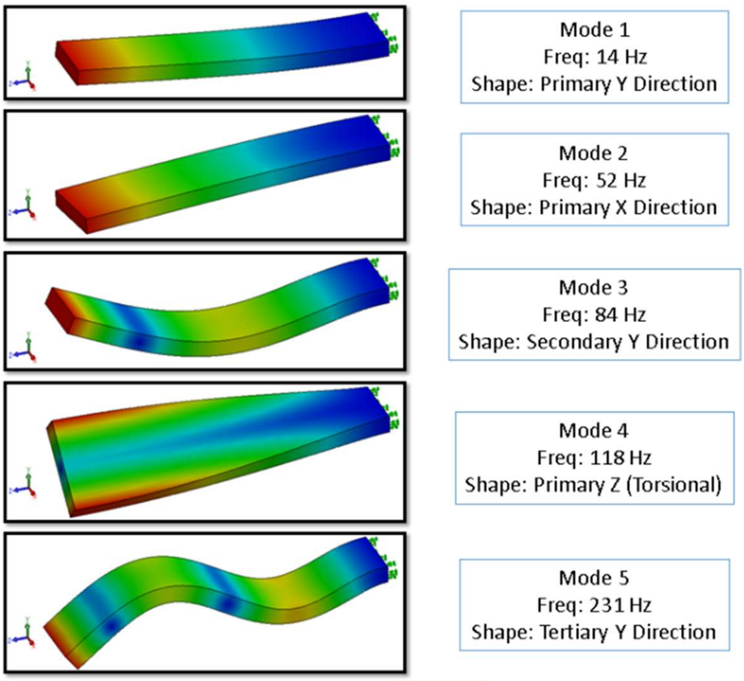


FIG. 2-17 외팔보의 모달 해석 결과(ANSYS)

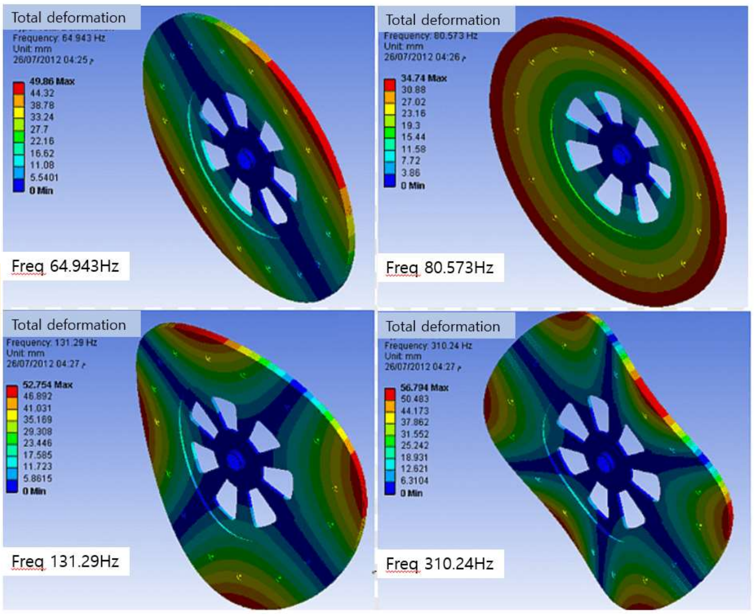
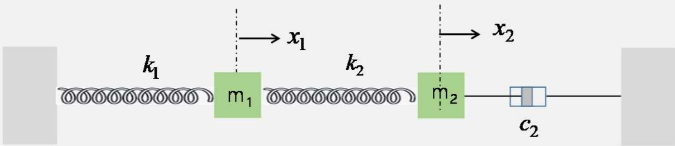
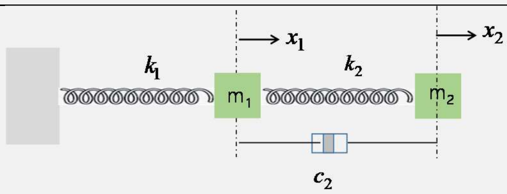


FIG. 2-18 자동차 브레이크 디스크의 모달 해석 결과(ANSYS)

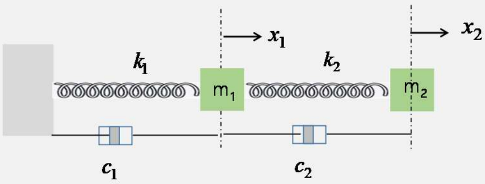
아래에 다양한 진동 시스템에 대한 운동방정식을 행렬로 표시하였다.



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

FIG. 2-19 스프링-질량-뎀퍼 시스템에 대한 운동방정식

제 1장의 예제 1-45에서 다룬 것과 같이 자동차가 돌기들이 있는 도로(bumpy road) 위를 달리는 경우에 차량의 진동에 대해서 검토해보자. 자동차 현가장치(suspension system)에 걸리는 부하는 스프링을 기준으로 스프링이 지지하는 스프링 위 질량(Sprung mass)와 스프링을 떠받치는 스프링 아래 질량(Unsprung mass)로 구분할 수 있는데, 차체를 비롯한 구동계통 및 사람을 포함한 질량은 Sprung mass에 속하고 현가장치의 Damper, Arm , Knuckle, Hub, Caliper, Disk , Tie Rod 등은 Unsprung mass에 속한다.

위 질량은 탄성계수 k_s 의 스프링과 감쇠계수 c_s 의 댐퍼로 지지되어 있으며, 아래 질량은 탄성계수 k_t 의 타이어 위에 지지되어 있는 상태이다. 이 때 시간에 따른 수직변위 변화량에 대한 각 변수들의 응답이 주파수 영역에서 어떻게 표현되는지 알아보자. 오직 수직 변위만을 고려하고 마찰은 없다고 가정한다.

이 시스템에서 Sprung mass에 대한 운동방정식은

$$m_s y_s'' + c_s(y_s' - y_{us}') + k_s(y_s - y_{us}) = 0 \tag{2.53a}$$

또한 Unsprung mass에 대한 운동방정식은 다음 식으로 나타내진다.

$$m_{us} y_{us}'' + c_s(y_{us}' - y_s') + k_s(y_{us} - y_s) + k_t(y_{us} - y_t) = 0 \tag{2.53b}$$

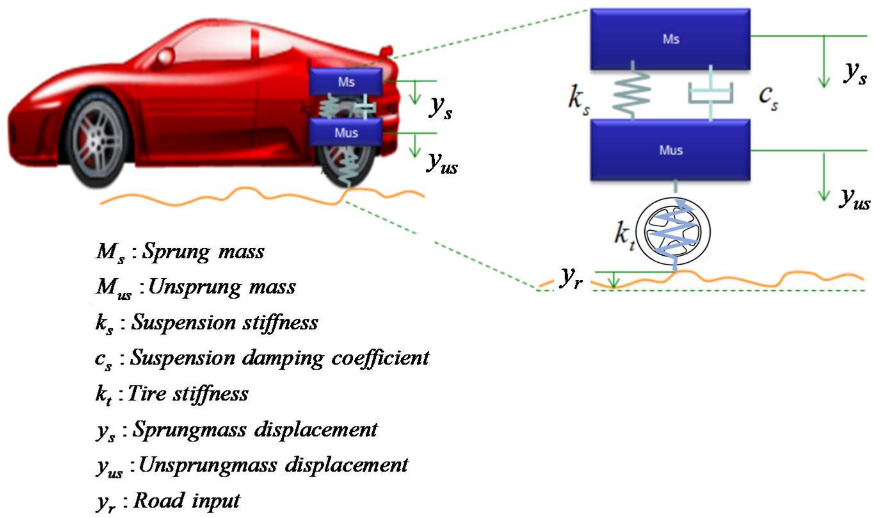


FIG. 2-20 자동차 현가장치의 운동방정식

이 두 식을 식 (2.42)와 같이 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_{us} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{d^2 y_s}{dt^2} \\ \dfrac{d^2 y_{us}}{dt^2} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{dy_s}{dt} \\ \dfrac{dy_{us}}{dt} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_S & -k_s \\ -k_s & k_s + k_t \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_s \\ y_{us} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_t y_r \end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

식 (2.53a), (2.53b)를 주파수 영역에서 해석하기 위하여 라플라스 변환하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} & s^2 m_s Y_s + sc_s(Y_s - Y_{us}) + k_s(Y_s - Y_{us}) = 0 \\ & s^2 m_{us} Y_{us} + sc_s(Y_{us} - Y_s) + k_s(Y_{us} - Y_s) + k_t(Y_{us} - Y_r) = 0 \end{aligned} \tag{2.55}$$

두 식으로부터 다음과 같은 행렬식이 얻어진다.

$$\begin{bmatrix} m_s s^2 + c_s s + k_s & -(c_s s + k_s) \\ -(c_s s + k_s) & m_{us} s^2 + c_s s + (k_s + k_t) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_s \\ Y_{us} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k_t \end{Bmatrix} Y_r \tag{2.56}$$

여기에 크래머의 법칙을 적용하면 Y_s 와 Y_{us} 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Y_s = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -(c_s s + k_s) \\ k_t Y_r & m_{us} s^2 + c_s s + (k_s + k_t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_s s^2 + c_s s + k_s & -(c_s s + k_s) \\ -(c_s s + k_s) & m_{us} s^2 + c_s s + (k_s + k_t) \end{vmatrix}} = \frac{(c_s s + k_s) k_t}{\begin{vmatrix} m_s s^2 + c_s s + k_s & -(c_s s + k_s) \\ -(c_s s + k_s) & m_{us} s^2 + c_s s + (k_s + k_t) \end{vmatrix}} Y_r$$

$$Y_{us} = \frac{\begin{vmatrix} m_s s^2 + c_s s + k_s & 0 \\ -(c_s s + k_s) & k_t Y_r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_s s^2 + c_s s + k_s & -(c_s s + k_s) \\ -(c_s s + k_s) & m_{us} s^2 + c_s s + (k_s + k_t) \end{vmatrix}} = \frac{(m_s s^2 + c_s s + k_s) k_t}{\begin{vmatrix} m_s s^2 + c_s s + k_s & -(c_s s + k_s) \\ -(c_s s + k_s) & m_{us} s^2 + c_s s + (k_s + k_t) \end{vmatrix}} Y_r$$

(2.57)

이 식에서 분모의 행렬식을 $\Delta(s)$ 로 나타내면

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= \begin{vmatrix} m_s s^2 + c_s s + k_s & -(c_s s + k_s) \\ -(c_s s + k_s) & m_{us} s^2 + c_s s + (k_s + k_t) \end{vmatrix} \\ &= m_s m_{us} s^4 + (m_s + m_{us}) c_s s^3 + [(m_s + m_{us}) k_s + m_s k_t] s^2 + c_s k_t s + k_s k_t \end{aligned} \tag{2.58}$$

(1) 지면의 수직 속도에 대한 위 질량의 수직가속도 전달함수(vertical velocity–

acceleration gain)는

$$T_a(s) = \frac{Y_s''}{Y_r'} \doteq \frac{s^2 Y_s}{sY_r} = \frac{sY_s}{Y_r} = \frac{(c_s s + k_s)k_t}{\Delta(s)} s \qquad (2.59a)$$

(2) 지면의 수직 속도에 대한 현가장치 변형 전달함수(vertical velocity−suspension deflection gain)는

$$T_s(s) = \frac{Y_s - Y_{us}}{Y_r'} \doteq \frac{Y_s - Y_{us}}{sY_r} = -\frac{m_s k_t}{\Delta(s)} s \qquad (2.59b)$$

(3) 지면의 수직 속도에 대한 타이어의 변형 전달함수(vertical velocity−tire deflection gain)는

$$T_t(s) = \frac{Y_{us} - Y_r}{Y_r'} \doteq -\frac{m_s m_{us} s^3 + (m_s + m_{us}) c_s s^2 + (m_s + m_{us}) k_s s}{\Delta(s)} \qquad (2.59c)$$

으로 나타내진다.

예를 들어 차량의 파라미터가 다음과 같이 주어진 경우에 각각의 주파수 응답곡선을 구해보자. 즉, 도로로부터 주기적인 변위(또는 변위하중), $y_r(t) = Y\cos wt,\ Y_r(s) = Y\frac{s}{s^2 + w^2}$, 가 가해질 때 가진 변위의 각 주파수에 따른 정상상태에서 차량의 응답들은 다음 그림 2-21 ~ 그림 2-23 와 같이 나타내진다.

Sprung mass (m_s) : 320kg, Unsprung mass (m_{us}) : 45kg, Damping coefficient (c_s): 1500Ns/m, Suspension stiffness (k_s): 22000N/m, Tire stiffness (k_t): 200000N/m, Damping ratio of sprung mass (ζ_s): 0.3, Damping ratio of unsprung mass (ζ_{us}): 0.25, 1st natural frequency (w_{n1}): 1.25Hz, , 2nd natural frequency (w_{n2}): 11Hz

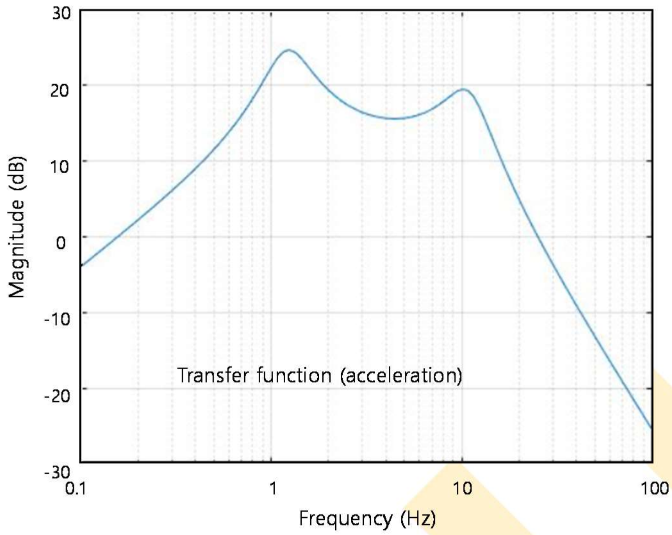


FIG. 2-21 자동차 현가장치의 가속도 응답특성

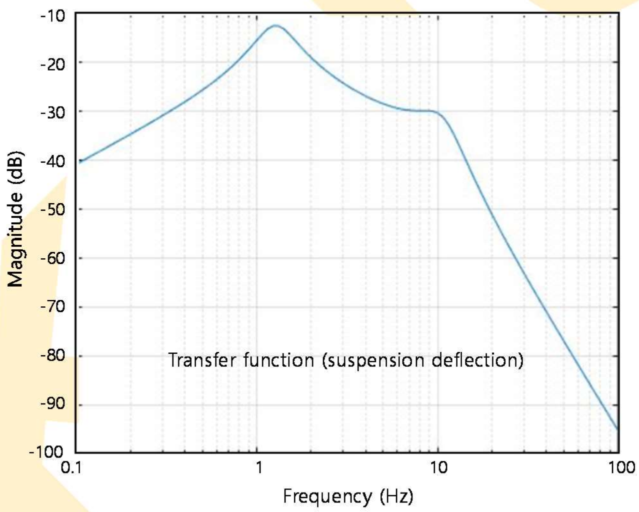


FIG. 2-22 자동차 현가장치의 처짐 응답특성

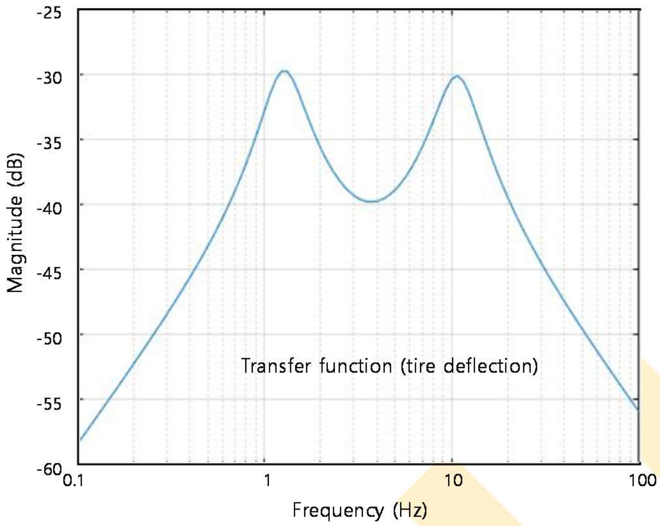


FIG. 2-23 자동차 현가장치의 타이어 처짐 응답특성

[참고]

행렬의 미분(matrix differentiation)을 최적화 문제에서 자주에 접하기 때문에 이하에 몇 개의 관계식을 정의해둔다.

(i) $y = Ax$ 일 때 $\dfrac{\partial y}{\partial x} = A$

(ii) $\phi = y^T Ax$ 일 때

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^T A \quad (\because w^T = y^T A,\ \phi = w^T x,\ \frac{\partial \phi}{\partial x} = w^T)$$

(iii) $\phi = y^T Ax$ 일 때

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x^T A^T \quad (\because \phi(scalar) = \phi^T = x^T A^T y,\quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = x^T A^T)$$

(iv) $\phi = x^T Ax$ 일 때 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = x^T A^T + x^T A^T = x^T (A + A^T)$

(v) $\phi = x^T Ax$ 일 때 $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = 2x^T A \quad (A : symmetric)$

(vi) $\phi = y^T x$ 일 때 $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z} + \dfrac{\partial \phi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial z} = x^T \dfrac{\partial y}{\partial z} + y^T \dfrac{\partial x}{\partial z}$

(vii) $\phi = x^T x$ 일 때 $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 2x^T \dfrac{\partial x}{\partial z}$

(viii) $\phi = y^T Ax$ 일 때 $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = x^T A^T \dfrac{\partial y}{\partial z} + y^T A \dfrac{\partial x}{\partial z}$

(ix) $\phi = x^T Ax$ 일 때 $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = x^T (A^T + A) \dfrac{\partial x}{\partial z}$

(x) $\phi = x^T Ax$ 일 때 $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = 2x^T A \dfrac{\partial x}{\partial z}$ $(A : symmetric)$

(xi) $\dfrac{\partial A^{-1}}{\partial \phi} = -A^{-1} \dfrac{\partial A}{\partial \phi} A^{-1}$ $\left(\because\ A^{-1}A = I,\ \ A^{-1}\dfrac{\partial A}{\partial \phi} + \dfrac{\partial A^{-1}}{\partial \phi} A = 0\right)$

2장 연습문제

[문제 1] Find the condition for the inverse of the matrix A to exist.

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & x+1 \end{bmatrix}$$

[답] $x \neq -3,\ \ x \neq 2$

[문제 2] The stress at a point is given with respect to the axes $Ox_1x_2x_3$ by the value Determine (a) the eigenvalues (principal values) (b) the eigenvectors (principal vectors)

(a) $[A] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $[A] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

[답] (a) $\lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_3 = -15$,

$$v_1(\lambda_1 = 10) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{Bmatrix},\ v_2(\lambda_2 = 5) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix},\ v_3(\lambda_3 = -10) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{Bmatrix}$$

(b) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$,

$$v_1(\lambda_1 = 1) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix},\ v_2(\lambda_2 = 2) = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix},\ v_3(\lambda_3 = 3) = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

[문제 3] Find the eigenvalues and the matrix Q obtained from eigenvectors for the matrix A.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

[답] (a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ (double root), $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$(double root), $\lambda_3 = 2$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

[문제 4] Find the eigenvalues and eigenvectors for the following problem.

$$\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_1+x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

[답] $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$, $v_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix},\ v_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$

[문제 5] For $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ express $A^2,\ A^3,\ A^{-1}$ in terms of $A,\ I$ using Caylay–Hamilton theorem

[답] $A^2 = 4A - 3I,\quad A^3 = 13A - 12I,\quad A^{-1} = -\frac{1}{3}A + \frac{4}{3}I$

[문제 6] For $x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$ find the value of $x^T Ax$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

[문제 7] Express the following quadratic form as a vector and a symmetric matrix.

$$f = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2(Dx_2x_3 + Ex_1x_3 + Fx_1x_2)$$

[답] $f = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$

[문제 8] Express the following quadratic forms as a vector and a symmetric matrix, and make it as a standard form.

(a) $f = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_2x_3 + 2x_3x_1 - 2x_1x_2$

(b) $f = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$

[답] (a) $f = (x_1, x_2, x_3)\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$

$$f = 6(y_1)^2 + 3(y_2)^2 + 3(y_3)^2$$

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{3}} - \frac{x_2}{\sqrt{3}} + \frac{x_3}{\sqrt{3}}, \quad y_2 = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

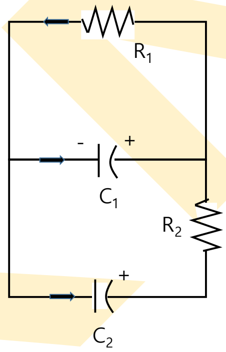
$$y_3 = -\frac{x_1}{\sqrt{6}} + \frac{x_2}{\sqrt{6}} + \frac{2x_3}{\sqrt{6}}$$

(b) $f = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$

$$f = 3(y_1)^2 - 7(y_2)^2$$

$$y_1 = \frac{2x_1}{\sqrt{5}} - \frac{x_2}{\sqrt{5}}, \quad y_2 = \frac{x_1}{\sqrt{5}} + \frac{2x_2}{\sqrt{5}}$$

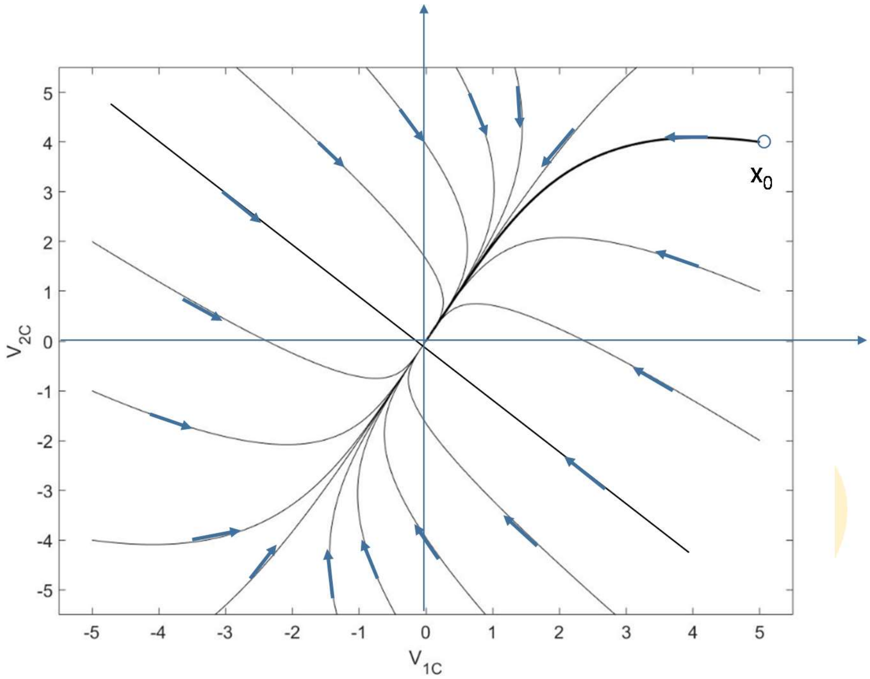
[문제 9] Write a system of differential equations for an electric circuit consisting of two resistors and two resistors and capacitors as shown in the figure. Also, find the voltage drop V_{1c}, V_{2c} across each capacitor as an eigenvalue problem, and plot the trajectory of x(t), where $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = 2$ ohm, $C_1 = 1$ farad, $C_2 = 0.5$ farad. Assume that it takes 5 volts for capacitor 1 and 4 volts for capacitor 2 initially.



[답]

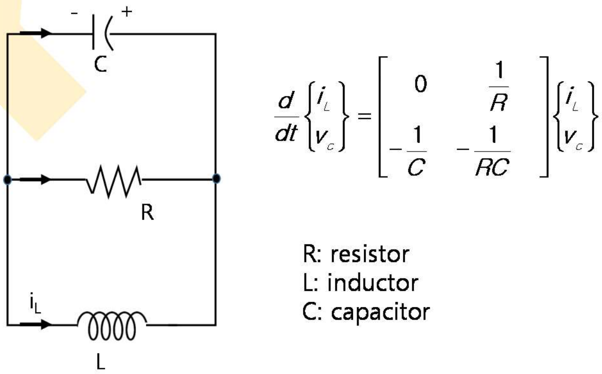
$$\begin{Bmatrix} v'_{1c}(t) \\ v'_{2c}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1/R_1 + 1/R_2)/C_1 & 1/(R_2C_1) \\ 1/(R_2C_2) & -1/(R_2C_2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_{1c}(t) \\ v_{2c}(t) \end{Bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{Bmatrix} v_{1c}(t) \\ v_{2c}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3e^{-0.5t} + 2e^{-2t} \\ 6e^{-0.5t} - 2e^{-2t} \end{Bmatrix}$$



[문제 10] The electric circuit in the following figure is described by the system of differential equations

$$\frac{d}{dt}\begin{Bmatrix} i_L \\ v_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_L \\ v_c \end{Bmatrix}$$



Where I_L is the current through the inductor and V_C is the voltage drop across the capacitor.

(a) Show that the eigenvalues of the coefficient matrix are real and different if L〉$4R^2C$; show that they are complex conjugates if L〈$4R^2C$.

(b) Suppose that R=1Ω, C=0.5F, and L=1 H. Find the general solution of the system.

(c) Find $I_L(t)$ and $V_C(t)$ if $I_L(0)$=2A and $V_C(0)$=1V.

(d) For the circuit of part (b) determine the limiting values of $I_L(t)$ and $V_C(t)$ as t→∞. Do these limiting values depend on the initial conditions ?

[답]

(b) $\begin{Bmatrix} I_L(t) \\ v_c(t) \end{Bmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{Bmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{Bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{Bmatrix} \sin t \\ -\sin t + \cos t \end{Bmatrix}$

(c) Use $c_1 = 2,\ c_2 = 3$ in answer to part (b)

(d) $\lim_{t\to\infty} I_L(t) = \lim_{t\to\infty} V_C(t) = 0$, No

[문제 11] The following quadratic equation is drawn to form an ellipse. Make it as a standard form by manipulating the variable, $y = Q^T x$, that erases $x_1 x_2$ terms, and plot it on a two-dimensional plane.

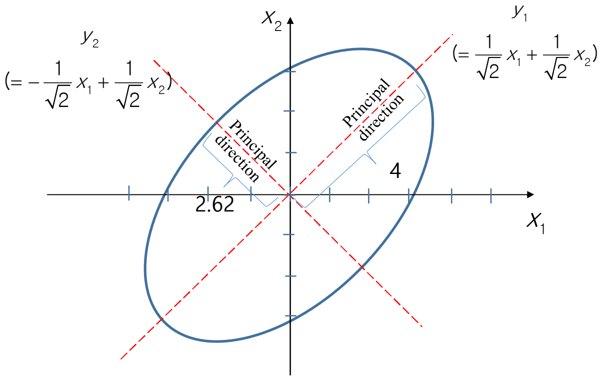
(a) $5{x_1}^2 - 4x_1x_2 - 5{x_2}^2 = 48$ (b) $5{x_1}^2 - 4x_1x_2 + 8{x_2}^2 = 36$

[답] (a)

$f = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix},\quad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 7$

$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$y^T D y = 3y_1^2 + 7y_2^2 = 48,\ \dfrac{y_1^2}{4^2} + \dfrac{y_2^2}{2.61^2} = 1$ (ellipse)



$5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 = 48$

$3y_1^2 + 7y_2^2 = 48$: canonical form

$\frac{y_1^2}{(\sqrt{48/3})^2} + \frac{y_2^2}{(\sqrt{48/7})^2} = 1$: ellipse

y=$Q^T x$,

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

(b)

$$f = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad \lambda_1 = 4, \; \lambda_2 = 9$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{2} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\frac{y_1^2}{3^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1 \quad \text{(ellipse)}$$

[문제 12] Erase the x_1x_2 term in the following function to fix it as a standard form and plot it on a two-dimensional plane.

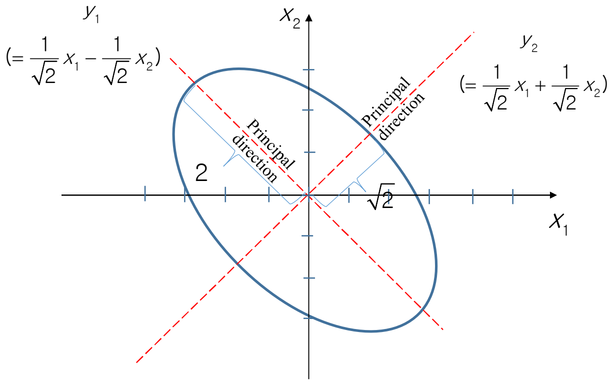
$$34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2 - 40x - 30y - 25 = 0$$

[답] $25(y_1 - 1)^2 + 50y_2^2 = 50, \; \frac{(y_1-1)^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{y_2^2}{(1)^2} = 1$

[문제 13] Erase the x_1x_2 term in the following function to fix it as a standard form and plot it on a two-dimensional plane.

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 8 = 0$$

[답]



$3x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2-8=0$

$2y_1^2+4y_2^2=8$: canonical form

$\frac{y_1^2}{(2)^2}+\frac{y_2^2}{(\sqrt{2})^2}=1$: ellipse

$y=Q^T x$,

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

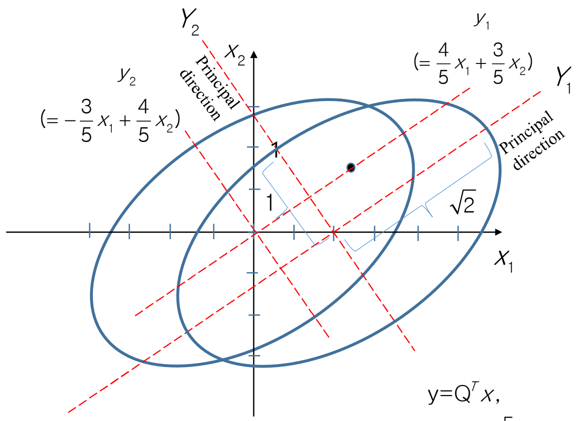
[문제 14] Erase the x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 term in the following function to fix it as a standard form and show $x=Py$ relation.

$$2x_1{}^2+18x_2{}^2+8x_3^2-12x_1x_2+8x_1x_3-27x_2x_3$$

[답]

$$y_1^2+y_2^2-y_3^2,\ x_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}y_1-\frac{5}{3}\sqrt{3}y_2+\frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$$

$$x_2=-\frac{1}{3}\sqrt{3}y_2+\frac{1}{3}\sqrt{3}y_3,\ x_3=\frac{1}{3}\sqrt{3}y_2+\frac{1}{3}\sqrt{3}y_3$$



$25(y_1-1)^2+50y_2^2=50$: canonical form

$\frac{(y_1-1)^2}{(\sqrt{2})^2}+\frac{y_2^2}{(1)^2}=1$: moved ellipse

$y=Q^T x$,

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

[문제 15] Show that the following relationship holds for symmetric matrix A, orthogonal matrix Q, and diagonal matrix D.

$$D^m=Q^T A^m Q$$

[답] Use the relationship of $D^2=DD=(Q^T A^m Q)(Q^T A^m Q)$.

[문제 16] Find the equation of the figure in which the straight line

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{6}=\frac{z}{3}$ is rotated by the $\pi/6$ angle around the y−axis.

[답]

$$\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}+\sqrt{3}}=\frac{y+1}{6}=\frac{z+\frac{1}{2}}{-1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

(Hint: You can express the direction of the above equation and a point on the straight line as a straight line after geometric transformation)

[문제 17] When using the following initial eigenvectors for matrix A, find the maximum eigenvalues and eigenvectors by the iterative method.

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\quad x_0=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

[답] $\lambda_1 = 7, \quad x = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{Bmatrix}$

[문제 18] When using the following initial eigenvectors for matrix A, find the maximum eigenvalues and eigenvectors by the iterative method and show that the results are the same.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

(a) $x_0 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ (b) $x_0 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$

[문제 19] Find the maximum eigenvalues and eigenvectors of the matrix A by the iterative method.

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -90 & 30 & 30 & 30 \\ 8 & -49 & 15 & 15 & 15 \\ 16 & -52 & 12 & 0 & 20 \\ 0 & -30 & 10 & 22 & 10 \\ 8 & -41 & 15 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

[답] $\lambda = 12, \; v^T = (0\ 0\ -1\ 1\ 0), (2\ 1\ 2\ 0\ 1)$

[문제 20] Solve the solution of the linear system of differential equations as an eigenvalue problem

(a) $\begin{cases} y' = y + 2z \\ z' = 4y + 3z \end{cases}$ (b) $x' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x, \quad x(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4 \end{Bmatrix}$

[답] (a) $\lambda_1 = 5, \; \lambda_2 = -1, \; \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{5x} + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-x}$

(b) $\lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 4, \; \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = -\frac{5}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-t} - \frac{4}{5} \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix} e^{4t}$

[문제 21] Solve the solution of the linear system of differential equations as an eigenvalue problem

(a) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 + 4y_2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_3 \\ y_2' = 2y_2 + 6y_3 \\ y_3' = y_2 + 3y_3 \end{cases}$

[답] (a) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3$, $\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} e^{3t}$

(b) $\lambda_1 = 3+2i,\ \lambda_2 = 3-2i$, $\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} -e^{3t}\sin 2t \\ e^{3t}\cos 2t \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} e^{3t}\cos 2t \\ e^{3t}\sin 2t \end{Bmatrix}$

(c) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5,\ \lambda_2 = 1$, $\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{Bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{t}$

[문제 22] Solve the solution to the system of differential equations in the form of matrix as an eigenvalue problem and find the trajectory of the solution.

$$x' = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

[답]

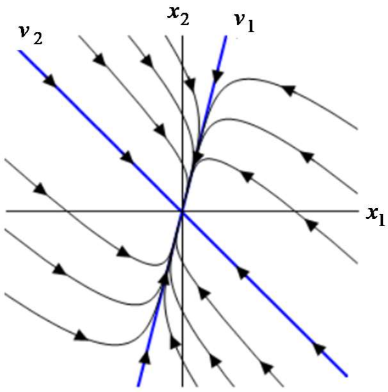
$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1-i \\ 1 \end{Bmatrix} e^{(-2+\mathrm{i})t} + C_2 \begin{Bmatrix} 1+i \\ 1 \end{Bmatrix} e^{(-2-\mathrm{i})t}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = D_1 \begin{Bmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t \end{Bmatrix} e^{-2t} + D_2 \begin{Bmatrix} \sin t - \cos t \\ \sin t \end{Bmatrix} e^{-2t}$$

[문제 23] Solve the solution to the system of differential equations in the form of matrix as an eigenvalue problem and find the trajectory of the solution.

(a) $x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x$ (b) $x' = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} x$

[답] (a) $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2i \end{Bmatrix} e^{2it} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2i \end{Bmatrix} e^{-2it}$ (b) $\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} e^{-6t}$



Trajectory of the problem (b). Here the equilibrium solution (0,0) is a node and it is asymptotically stable. Equilibrium solutions are asymptotically stable if all the trajectories move in towards it as t increases.

[문제 24] Solve the solution to the system of differential equations in the form of matrix as an eigenvalue problem and find the trajectory of the solution.

$$x' = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x$$

[답]

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = C_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ i \end{Bmatrix} e^{(-1+i)t} + C_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \end{Bmatrix} e^{(-1-i)t}$$

[문제 25] Solve the solution of the linear system of differential equations as an eigenvalue problem.

$$\begin{cases} y' = y - 5z \\ z' = 2y - z \end{cases}$$

[답] $\lambda_1 = 3i,\ \lambda_2 = -3i$

$$y = 5C_1 \cos 3x + 5C_2 \sin 3x$$
$$z = C_1(\cos 3x + 3\sin 3x) + C_2(\sin 3x - 3\cos 3x)$$

[문제 26] Solve the solution of the linear system of differential equations as an eigenvalue problem.

$$\begin{cases} x'+2x+y'+6y=0 \\ 2x'+3x+3y'+8y=0 \end{cases}$$

[답] $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = C_1\begin{Bmatrix} -5 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{-t}+C_2\begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{2t}$$

[문제 27] Convert the following differential equation into a system, solve the system and use this solution to get the solution to the original differential equation.

$2y''+5y'-3y=0, \quad y(0)=-4,\ y'(0)=9$

[답] $\lambda_1=-3,\ \lambda_2=\frac{1}{2}$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y \\ y' \end{Bmatrix} = -\frac{22}{7}\begin{Bmatrix} 1 \\ -3 \end{Bmatrix}e^{-3t}-\frac{3}{7}\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}e^{-\frac{t}{2}},\quad \therefore y=-\frac{22}{7}e^{-3t}-\frac{6}{7}e^{-\frac{t}{2}}$$

[문제 28] The equation of motion for the free motion of the mass hanging on the spring is expressed as follows..

$my''+cy'+ky=0$

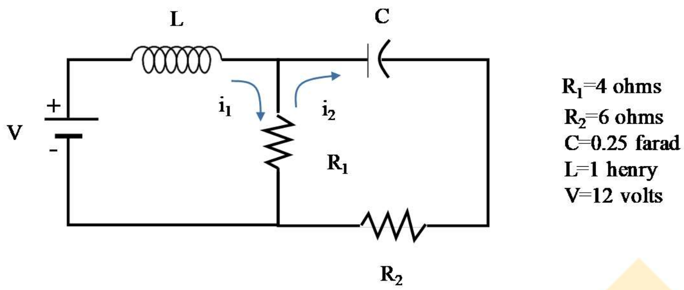
Here, m is mass, k 〉 0) is a spring constant, and c 〉 0) is a damping constant. Solve the solution representing mass motion as an eigenvalue problem by assuming m = 1, c = 2, and k = 0.75.

[답] $x=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=C_1\begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}e^{-0.5t}+C_2\begin{Bmatrix} 1 \\ -1.5 \end{Bmatrix}e^{-1.5t}=\begin{Bmatrix} y_1 \\ y' \end{Bmatrix}$

[문제 29] Find the solution of free vibration when mass matrix is M, damping matrix is D, and stiffness matrix is K.

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix} 0.02 & -0.02 \\ -0.01 & 0.02 \end{bmatrix},\quad K=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

[문제 30] Find the current $i_1(t)$ and $i_2(t)$ in the network shown below. Also plot the phase plane and trajectory. Assume all currents and charges to be zero at t=0 the instant when the switch is closed.



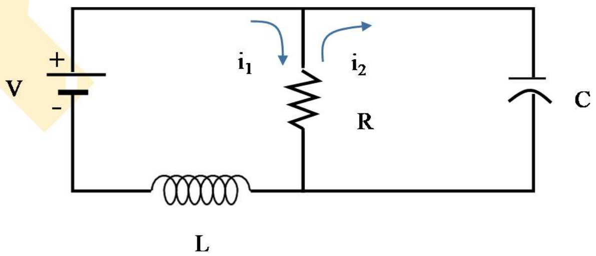
[답] $i_1' + 4(i_1 - i_2) = 12, \quad i_2' - 0.4 i_1' + 0.4 i_2 = 0$

$i_1(t) = -8e^{-2t} + 5e^{-0.8t} + 3, \quad i_2(t) = -4e^{-2t} + 4e^{-0.8t}$

[Hint] Kirchhoff voltage law(2nd law) states that the sum of voltage over a closed loop is zero. This means the voltage of the battery is equal to the sum of the voltage drop over the inductor and the voltage drop over the resistor in the left loop. Also the sum of the voltage drop over the conductor and the voltage drop over the resistor in the right loop is zero.

Kirchhoff current law (1st law) states the current flowing into a node (or junction) must be equal to current flowing out of it.

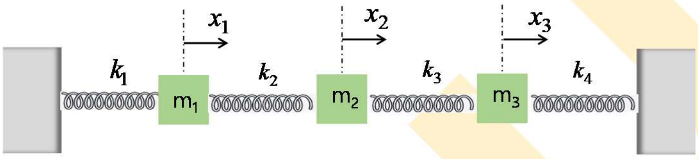
[문제 31] Find the currents $i_1(t)$ and $i_2(t)$ in the network shown below when $R = 2.5\Omega, L = 1\ H,\ C = 0.04\ F,\ e(t) = 169 \sin 2t\ V,\ i_1(0) = i_2(0) = 0$.



[답] $i_1' + 2.5(i_1 - i_2) = 169 \sin 2t, \quad 2.5(i_2' - i_1') + 25 i_2 = 0$

$$i_1(t) = (31.8 + 58.3t)e^{-5t} - 31.8\cos 2t + 50.2\sin 2t$$
$$i_2(t) = (-8.44 - 58.3t)e^{-5t} + 8.04\sin 2t + 8.44\cos 2t$$

[문제 32] Three masses are connected by a series of springs between two fixed points as shown in the figure. Assume that the springs all have the same spring constant, and let $i_2(t)$ and $i_2(t)$ represent the displacement of the respective asses at time t.



$$k_i = 1,\ m_1 = m_3 = \frac{1}{3},\ m_2 = \frac{1}{4}$$
$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$$
$$x_1'(0) = x_2'(0) = x_3'(0) = 0$$

Solve the system if

$$k_i = 1,\ m_1 = m_3 = \frac{1}{3},\ m_2 = \frac{1}{4}$$
$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1$$
$$x_1'(0) = x_2'(0) = x_3'(0) = 0$$

[답]

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.1\cos(2\sqrt{3}t) + 0.9\cos(\sqrt{2}t) \\ -0.2\cos(2\sqrt{3}t) + 1.2\cos(\sqrt{2}t) \\ 0.1\cos(2\sqrt{3}t) + 0.9\cos(\sqrt{2}t) \end{Bmatrix}$$

Pierre-Simon, marquis de Laplace(1749~1827, 프랑스)　　　위대한 수학자 3

"프랑스의 뉴턴"이라고도 불리는 라플라스는 수학적 천문학과 확률 분야에 많은 중요한 공헌을 한 수학자이자 천문학자이었다. 라플라스의 천체역학(Mécanique Céleste, Celestial Mechanics)는 Isaac Newton 이후 수학적 천문학에서 가장 중요한 작업으로 알려져 있다. 그의 Théorie Analytique des Probabilités (확률 분석 이론)은 19 세기 대부분의 통계적 확률에 대한 연구에 지대한 영향을 미쳤다.

라플라스는 Beaumont-en-Auge (노르망디)에서 태어났다. 라플라스는 원래 신부가 될 운명이었지만 d' Alembert 가 그의 수학적 재능을 발견하고 지원을 하여 1771 년 파리 군사학교(École Militaire)에서 교수직을 취득했다. 1773 년에 그는 파리과학아카데미(Académie des Sciences de Paris)에 입학하여 1780 년대의 주요 회원 중 한 명이 되었다. 프랑스 혁명 이후, 라플라스는 미터법 도입을 목표로 하는 가중치 및 측정위원회에서 결정적인 역할을 했으며, 1795 년경 새로 설립된 기술학교(Ecole Polytechnique) 및 사범학교(Ecole Normale)의 조직과 교육에 관여하였다.

1796 년 라플라스는 그의 유명한 성운가설(Nebula hypothesis)을 발표했다. 이 이론은 우주 기원론 분야에서 태양계의 형성과 진화를 설명하는 데 있어 가장 널리 인정받는 가설이다. 이 가설에 따르면 태양계가 냉각되면서 고리가 바깥 쪽 가장자리에서 떨어져 나가는 회전 가스 덩어리에서 진화했고, 이 고리는 더 냉각되고 응축되어 행성을 형성한다고 하였다. 태양은 원래 가스의 나머지 중심 핵심으로 간주하였다.

라플라스는 그의 저서 “천체 역학” (프랑스어: Mécanique céleste, 총 5권)에서는 고전역학에서 뉴턴이 택했던 방식인, 기하학적 접근방식에 대한 번역을 실어, 당시 물리학을 집대성하고 확장한 것으로 평가받는다. 이 기념비적인 작업에서 라플라스는 태양계의 모든 물체에 대한 중력의 영향을 설명했다.
더불어 “확률론의 해석이론” 등의 명저를 남겼으며, 수학적 확률에 대한 라플라스의 공헌에는 최소 제곱 법칙의 공식적인 증명, 역 확률의 방법 및 중심 한계 정리의 첫 번째

진술이 포함되어 있다. 수학과 물리학 교과서에 자주 나오는 라플라스 변환, 라플라스 방정식 등에 그의 이름이 남아 있다.

라플라스는 1799 년 나폴레옹 정부 하에서 내무부 장관으로 단 6 주 동안 근무한 후 1803 년 상원 의원이 되었으며, 루이 13 세도 라플라스에게 가장 높은 존경을 표하였다.