제 3 장

벡터해석

3.1 벡터 대수 연산

질량, 온도, 압력, 에너지, 시간, 길이 등은 크기를 하나의 값으로 표현한다. 이런 물리량들을 스칼러(scalar)라고 한다. 반면 속도, 가속도, 전자기력 등은 크기뿐 아니라 그 방향도 함께 지정해주어야 이들 물리량이 정의된다. 이와 같은 양을 벡터(vector)라고 부른다.

3.1.1 벡터의 내적

스칼러 량은 통상 스칼러 함수(scalar function) $f(x,y,z)$ 또는 $\phi(x,y,z)$ 등으로 나타내며, 벡터는 x, y, z 방향의 직교하는 단위 벡터 i, j, k ($|i|=|j|=|k|=1,\quad i\cdot j=j\cdot k=k\cdot i=0$) 를 이용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{A}(x,y,z)=A_x(x,y,z)i+A_y(x,y,z)j+A_z(x,y,z)k \tag{3.1}$$

이때 A_x, A_y, A_z 는 벡터 $\mathbf{A}$ 의 x, y, z 방향 성분(component)을 나타낸다. 즉, A_x, A_y, A_z 는 벡터 $\mathbf{A}$ 에 x, y, z 방향의 단위 벡터 i, j, k 를 각각 곱하는 것으로 나타내진다.

$$A_x(x,y,z)=\mathbf{A}\cdot i,\quad A_y(x,y,z)=\mathbf{A}\cdot j,\quad A_z(x,y,z)=\mathbf{A}\cdot k \tag{3.2}$$

따라서 식 (3.1)의 벡터 $\mathbf{A}$ 는 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{A}(x,y,z)=(\mathbf{A}\cdot i)i+(\mathbf{A}\cdot j)j+(\mathbf{A}\cdot k)k \tag{3.3a}$$

여기서는 단위 벡터를 i, j, k 로 표현하였지만 자주 e_x, e_y, e_z 으로 나타내기도 한다.

$$\mathbf{A}(x,y,z)=(\mathbf{A}\cdot e_x)e_x+(\mathbf{A}\cdot e_y)e_y+(\mathbf{A}\cdot e_z)e_z \tag{3.3b}$$

통상 벡터는 A와 같이 굵은 글씨체 또는 $\vec{A}$ 와 같이 화살표를 첨부하여 나타낸다. 이

교재에서는 벡터를 표시할 때 편의 상 굵은 글씨체를 사용하지 않고 그냥 일반 글씨체로 사용하였다. 따라서 학생들은 영어로 표시된 글씨체를 벡터로 간주하고, 아래 첨자가 붙어있는 글씨체는 벡터의 성분이라고 생각하길 바란다.

위에서 $A_x(x,y,z) = \mathbf{A} \cdot i,\ A_y = A \cdot j,\ \cdot$ 로 정의하였는데 이와 같이 벡터와 벡터의 곱이 스칼러 량이 되는 경우에 벡터의 곱을 벡터의 내적 (inner product)이라고 부른다. 두 벡터의 내적은 dot (·)를 이용하여 나타낸다. 두 벡터의 내적은 그 결과가 스칼러 값이 되기 때문에 자주 스칼러 곱(scalar product)이라고도 한다.

벡터 내적 문제를 다루는 대표적인 경우가 그림에서와 같이 물체에 힘 벡터가 작용하여 물체를 일정한 거리만큼 이동시켰을 때 물체에 가해진 일 량(work)을 계산하는 경우이다. 즉

$$w = F \cdot u = |F||u|\cos\theta = |F_x||u| \tag{3.4}$$

여기서 θ는 물체에 작용하는 힘의 방향과 물체가 움직이는 방향과의 각도이다.
이것은 물체에 가해진 힘 벡터 중에서 성분 $F_x = |F|\cos\theta$ 가 물체의 이동방향 벡터 u 에 평행하고($\theta = 0$) 이 힘 성분만이 물체를 이동시키는 일을 한다는 것을 의미한다. 따라서 $F_y = |F|\sin\theta$ 는 물체의 이동방향과 직각을 이루고 있어서 F_y 는 물체에 어떠한 일도 하지 않는다.

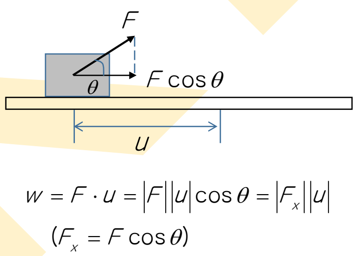


Fig. 3-1 힘 벡터 성분의 일 기여량

이 벡터의 내적 관계를 임의 벡터 a와 b에 대해서 일반화하고, 널리 사용되는 유익한 관계식들을 아래에 나타내었다.

$$
\begin{aligned}
& a \cdot b = |a||b|\cos\theta \\
& a \cdot b = (a_x i + a_y j + a_z k)\cdot(b_x i + b_y j + b_z k) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\
& \cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \\
& a \cdot b = b \cdot a \qquad (3.5) \\
& a \cdot a = |a|^2 \\
& i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad (\theta = \frac{\pi}{2},\ \cos\theta = 1) \\
& i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0 \quad (\theta = 0,\ \cos\theta = 0)
\end{aligned}
$$

한편 벡터 F가 x, y, z 축과 이루는 각도의 여현을 방향여현(direction cosine)이라고 하고 $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$ 으로 표시한다. 즉

$$
\begin{aligned}
& l = \frac{F_x}{|F|} = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \cos\alpha, \quad m = \frac{F_y}{|F|} = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \cos\beta \\
& n = \frac{F_z}{|F|} = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}} = \cos\gamma
\end{aligned} \qquad (3.6)
$$

이 방향여현은 $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ 관계를 만족한다.

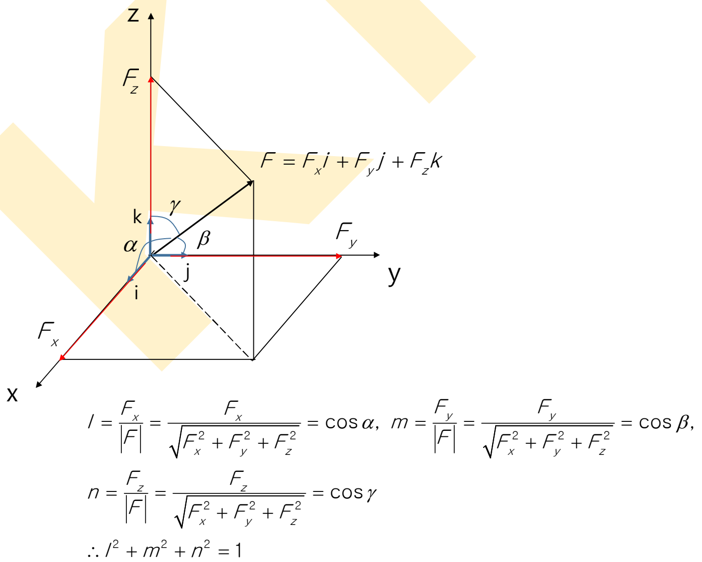


Fig. 3-2 힘 벡터의 방향여현

3.1.2 벡터의 외적

한편 두 벡터 a와 b를 성분으로 하여 다음의 행렬식을 구해보자. 소행렬식의 정의를 이용하면

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=i(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}+j(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}+k(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)i-(a_xb_z-a_zb_x)j+(a_xb_y-a_yb_x)k \tag{3.7}$$

이와 같이 정의되는 것을 벡터 a와 b의 외적(outer product)이라고 한다.

두 벡터의 외적은 cross (×)를 이용하여 나타낸다. 두 벡터의 외적은 그 결과가 항상 벡터 값이 되기 때문에 벡터 곱(vector product)이라고 불리기도 한다.

이 벡터 외적의 정의를 이용하면

$$a\cdot(a\times b)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0,\quad b\cdot(a\times b)=\begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=0 \tag{3.8}$$

따라서 두 벡터의 외적 $a\times b$에 의한 벡터는 벡터 a 및 벡터 b에 수직이라는 것을 알 수 있다.

벡터 a와 b의 외적을 제곱해보자.

$$\begin{aligned}|a\times b|^2&=\left|\sqrt{(a_yb_z-a_zb_y)^2+(a_xb_z-a_zb_x)^2+(a_xb_y-a_yb_x)^2}\right|^2\\&=(a_x^2+a_y^2+a_z^2)(b_x^2+b_y^2+b_z^2)-(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)^2\\&=|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2\end{aligned} \tag{3.9}$$

그런데 벡터 a와 b의 내적은 $a\cdot b=|a||b|\cos\theta$ 이므로 이 식을 위 식에 대입하면

$$\begin{aligned}|a\times b|^2&=|a|^2|b|^2-(a\cdot b)^2=|a|^2|b|^2-(|a||b|\cos\theta)^2\\&=|a|^2|b|^2(1-\cos^2\theta)=\{|a||b|\sin\theta\}^2\end{aligned} \tag{3.10}$$

따라서

$$|a\times b|=|a||b|\sin\theta,\quad (\sin\theta\geq 0) \tag{3.11}$$

그림으로부터 벡터 a와 b의 외적의 절대값 $|a\times b|$은 이들을 두 변으로 하는 평형사변형

면적(area of parallelogram) S와 같다는 것을 알 수 있다.

이 벡터의 외적 $a \times b$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
a \times b &= (|a||b|\sin\theta)n = |a \times b|n \\
n &= \frac{a \times b}{|a \times b|}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

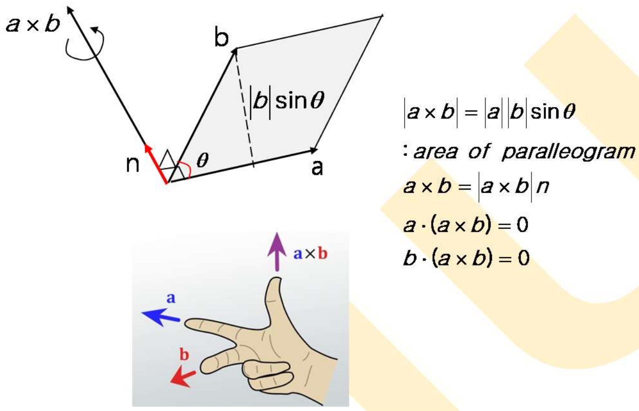


Fig. 3-3 두 벡터의 외적(cross product)

여기서 n 은 벡터 a 와 벡터 b 를 포함하는 면에 수직인 단위 법선벡터이다. 따라서 n 은 벡터 a 와 벡터 b 각각에 대해서 수직인 단위 법선벡터이다. 그림에서와 같이 오른손의 세 개의 손가락을 펼쳤을 때 벡터 a 를 검지, 벡터 b 를 중지로 놓으면 이 때 엄지가 향하는 방향이 벡터 외적 $a \times b$ 의 방향이 된다. 위 식에서 벡터 a 와 벡터 b 가 평행이면 백터 외적은 영 벡터가 된다.(스칼러 영이 아님)

이 벡터의 외적에 대해서 널리 사용되는 유익한 관계식들을 아래에 나타내었다.

$$
\begin{aligned}
& a \times b = -b \times a \\
& a \times a = 0 \\
& c \times (a \times b) = c \times a + c \times b \\
& i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j \\
& j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j \\
& i \times i = 0, \quad j \times j = 0, \quad k \times k = 0
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

예제 3-1 $a = 2i - 3j + k,\ b = -3i + 2j - 4k$ 일 때 다음 값을 구하라.

(a) 벡터 a 의 벡터 b 방향 성분 (b) 벡터 a 의 성분 중에서 벡터 b 방향에 수직인 벡터

(c) $a \times b$ (d) 벡터 a 와 벡터 b 를 포함하는 면에 수직인 단위 법선벡터

[해] (a) 벡터의 내적에 대한 정의 식 (3.2)로부터 벡터 a의 벡터 b 방향(b에 평행한 방향) 성분은 $Comp_{b//}\ a$ 라고 표시하며 벡터 a에 벡터 b의 단위 벡터 e_b $(e_b \cdot e_b = 1)$ 를 내적하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&Comp_{b//}\ a = (a \cdot e_b) e_b \\
&= \left\{ (2i - 3j + k) \cdot \frac{-3i + 2j - 4k}{\sqrt{(-3i + 2j - 4k) \cdot (-3i + 2j - 4k)}} \right\} \frac{-3i + 2j - 4k}{\sqrt{(-3i + 2j - 4k) \cdot (-3i + 2j - 4k)}} \\
&= 1.65516i - 1.10344j + 2.20688k
\end{aligned}
$$

여기서

$$
\begin{aligned}
&b = |b| e_b, \quad e_b = \frac{b}{|b|} = \frac{b}{\sqrt{b \cdot b}}, \\
&Comp_{b//}\ a = (a \cdot e_b) e_b = \left(\frac{a \cdot b}{\sqrt{b \cdot b}}\right) \frac{b}{\sqrt{b \cdot b}} = \left(\frac{a \cdot b}{b \cdot b}\right) b = \frac{(a \cdot b)}{\|b\|^2} b
\end{aligned}
\qquad (3.14a)
$$

(b) 벡터 a는 벡터 a의 벡터 b에 평행한 성분 $Comp_{b//}\ a$ 과 벡터 a의 벡터 b에 수직인 성분 $Comp_{b\perp}\ a$ 으로 분해할 수 있다.

$$a = Comp_{b//}\ a + Comp_{b\perp}\ a$$

따라서 벡터 a 의 성분 중에서 벡터 b 방향에 수직인 벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.(그림 3-4)

$$
\begin{aligned}
Comp_{b\perp}\ a &= a - Comp_{b//}\ a = a - (a \cdot e_b) e_b \\
&= (2i - 3j + k) - (1.65516i - 1.10344j + 2.20688k) \\
&= 0.34484i - 1.89656j - 1.20688k
\end{aligned}
$$

여기서

$$Comp_{b\perp}\ a = a - (a \cdot e_b) e_b = a - \left(\frac{a \cdot b}{\sqrt{b \cdot b}}\right) \frac{b}{\sqrt{b \cdot b}} = a - \left(\frac{a \cdot b}{b \cdot b}\right) b = a - \frac{(a \cdot b)}{\|b\|^2} b \qquad (3.14b)$$

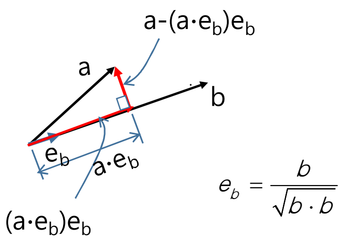


Fig. 3-4(a) 벡터 a의 벡터 b 방향의 평행성분 $(a \cdot e_b)e_b$과 수직성분 $a-(a \cdot e_b)e_b$

(c) 벡터의 외적에 대한 정의 식 (3.7)로부터

$$
\begin{aligned}
a \times b &= (2i-3j+k)\times(-3i+2j-4k) \\
&= (2)(-3)i\times i+(-3)(-3)j\times i+(1)(-3)k\times i+(2)(2)i\times j+(-3)(2)j\times j \\
&\quad +(1)(2)k\times j+(2)(-4)i\times k+(-3)(-4)j\times k+(1)(-4)k\times k \\
&= (-3)(-3)(-k)+(1)(-3)(j)+(2)(2)(k)+(1)(2)(-i) \\
&\quad +(2)(-4)(-j)+(-3)(-4)(i) \\
&= (-2+12)i+(-3+8)j+(-9+4)k = 10i+5j-5k
\end{aligned}
$$

(d) 식 (3.12)의 $a\times b = |a\times b| n$ 의 정의로부터

$$n = \frac{a\times b}{|a\times b|} = \frac{10i+5j-5k}{\sqrt{10^2+5^2+(-5)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2i+j-k)$$

이 예제에서 벡터 $a-(a\cdot e_b)e_b$ 와 벡터 b 방향의 단위 벡터 e_b 의 내적은 영이 된다는 것을 알 수 있다. 즉,

$$\{a-(a\cdot e_b)e_b\}\cdot e_b = a\cdot e_b-(a\cdot e_b)e_b\cdot e_b = a\cdot e_b-(a\cdot e_b)=0 \quad (\because e_b\cdot e_b=1) \qquad (3.14c)$$

또한 여기서 벡터 $a-(a\cdot e_b)e_b$ 와 벡터 b 의 내적도 당연히 영이 된다. 즉

$$\{a-(a\cdot e_b)e_b\}\cdot b = a\cdot e_b|b|-(a\cdot e_b)e_b\cdot|b|e_b = a\cdot e_b|b|-(a\cdot e_b)|b|=0 \quad (\because b=|b|e_b) \quad (3.14d)$$

따라서 벡터 $a-(a\cdot e_b)e_b$ 와 벡터 b 또는 벡터 $a-(a\cdot e_b)e_b$ 와 단위 벡터 e_b 는 직교한다는 것을 알 수 있다.

[참고] Gram-Schmidt Process

위 예제의 (a)와 (b)에서 논한 것은 그램-슈미트 과정(Gram-Schmidt process)의 기본 아이디어이다. 그램-슈미트 과정은 임의의 n 차원의 내적공간 V에 대한 임의의 기저 { $u_1, u_2, \cdots, u_n$ }가 주어질 때 V에 대한 직교 기저(orthogonal basis)의 부분공간(subspace) { $v_1, v_2, \cdots, v_n$ }을 구성하는 과정에 대한 것이다. 즉, 위 예제에서 설명한 것과 같이

Step 1 : $v_1 = u_1$ 이라고 두고

Step 2: $$v_2 = u_2 - \frac{(u_2 \cdot v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 \tag{3.14d}$$

Step 3: $$v_3 = u_3 - \frac{(u_3 \cdot v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{(u_3 \cdot v_2)}{\|v_2\|^2} v_2 \tag{3.14e}$$

.

.

이 과정을 v_n 까지 반복하면 직교 기저 { $v_1, v_2, \cdots, v_n$ }는 내적공간 V에서 선형 독립벡터이다.

따라서 내적공간 V내의 임의 벡터 w는 다음과 같이 직교 기저의 선형 조합으로 나타낼 수 있다.

$$w = \frac{(w \cdot v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{(w \cdot v_2)}{\|v_2\|^2} v_2 + \cdots + \frac{(w \cdot v_n)}{\|v_n\|^2} v_n \tag{3.14f}$$

이 식은 제1장의 식 (1.42j)에서 기술한 것과 같은 식이다.

간단한 경우로

$$V = \{u_1,\ u_2\}$$

$$u_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix},\ u_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

에 대해서 그램-슈미트 과정으로 직교 기저를 찾아보자.

Step 1 : $v_1 = u_1$ 이라고 두고

Step 2: $v_2 = u_2 - \frac{(u_2 \cdot v_1)}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{(3\times1+6\times2+0\times2)}{(3^2+6^2+0)} \begin{Bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{Bmatrix}$

따라서 v_1과 v_2는 직교 기저를 만든다. (그림 3-4(b))

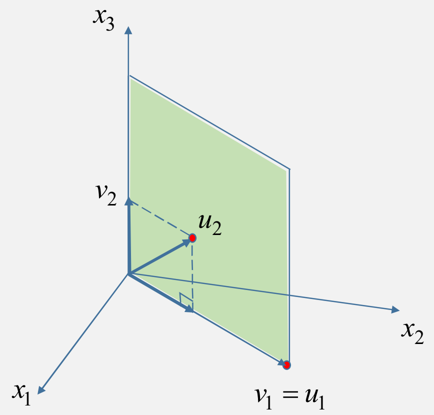


Fig. 3-4(b) 직교 기저의 구성

3.1.3 벡터의 3중 적

벡터 a,b 와 c 의 다음 계산을 생각해보자.

$$(a \times b) \cdot c \tag{3.15a}$$

이 식을 벡터의 3중 적(triple product)이라고 부른다. 이 식은 벡터 a 와 벡터 b 의 외적 백터에 벡터 c 를 내적한 것과 같다. 따라서 이 결과는 스칼러 양이기 때문에 벡터의 3중 적은 자주 스칼러 3중 적(scalar triple product)이라고도 불린다. 이 계산에 대한 결과는 다음 그림 3-5와 같이 평행육면체의 체적(volume of parallelepiped)을 나타낸다.

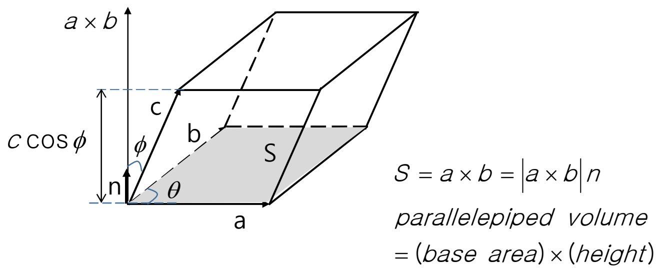


Fig. 3-5 벡터의 3중 적(triple product)

이 벡터의 3중 적에 대해서 널리 사용되는 유익한 관계식들을 아래에 나타내었다.

$$
\begin{aligned}
& a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b) \\
& a \cdot (b \times c) = (a \times b) \cdot c \\
& a \cdot (a \times b) = a \cdot (b \times a) = 0 \\
& a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\
& a \times (b \times c) = (a \cdot c) b - (b \cdot c) a
\end{aligned}
\tag{3.15b}
$$

3.2 벡터 미분

매개 변수 t의 변화와 함께 변화하는 벡터 A를 벡터 함수(vector function)라고 하고 일반적으로 다음과 같이 나타내진다.

$$A(t) = A_x(t)i + A_y(t)j + A_z(t)k \tag{3.16}$$

변수 t 의 증분 Δt 에 대해서 벡터함수 A(t)의 증분 $\Delta A(t)$ 는 $\Delta A(t) = A(t + \Delta t) - A(t)$ 이므로 극한을 취하면 A의 도함수(derivative) 또는 미분(differential)이 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{dA}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t} \quad (=A'=\dot{A})$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[A(t)+dA(t)]-A(t)}{\Delta t}, \quad \{\ dA(t)=dA_x(t)i+dA_y(t)j+dA_z(t)k\ \} \tag{3.17}$$

$$=\frac{dA_x}{dt}i+\frac{dA_y}{dt}j+\frac{dA_z}{dt}k$$

만일 벡터 A 대신에 위치 벡터 r(t)을 택하면

$$r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k \tag{3.18}$$

이 식으로부터 속도벡터 v 가 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{gathered} v(t)=\frac{dr(t)}{dt}=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}k=v_xi+v_yj+v_zk \\ (\ v_x=\frac{dx}{dt},\ v_y=\frac{dy}{dt},\ v_z=\frac{dz}{dt}\ ) \end{gathered} \tag{3.19}$$

가속도 벡터 a는 속도 벡터를 시간 미분한 것으로 정의된다.

$$\begin{gathered} a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{dv_x}{dt}i+\frac{dv_y}{dt}j+\frac{dv_z}{dt}k=a_xi+a_yj+a_zk \\ (\ a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2},\ a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2},\ a_z=\frac{dv_z}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}\ ) \end{gathered} \tag{3.20}$$

이 벡터의 미분에 대해서 널리 사용되는 유익한 관계식들을 아래에 나타내었다.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(mA)=\frac{dm}{dt}A+m\frac{dA}{dt} \\ &\frac{d}{dt}(A\cdot B)=\frac{dA}{dt}\cdot B+A\cdot\frac{dB}{dt} \\ &\frac{d}{dt}(A\times B)=\frac{dA}{dt}\times B+A\times\frac{dB}{dt} \\ &\frac{d}{dt}(A\cdot A)=2A\cdot\frac{dA}{dt} \\ &\frac{d}{dt}(A\times\frac{dA}{dt})=A\times\frac{d^2A}{dt^2} \end{aligned} \tag{3.21}$$

다음의 위치 벡터 r(t)을 생각해 보자.

$$r(t)=x(t)i+y(t)j+z(t)k \tag{3.22}$$

매개변수 t를 시간이라고 하면 시간 t 가 a에서 b로 증가함에 따라서 위치 벡터 r(t)가 공간 내에서 그리는 곡선을 공간 곡선(space curve)이라고 한다. 이 곡선 ab의 길이,

호장(arc−length)이라고 부름, 을 구해보자.

호의 전체의 길이를 구하기 위해서 호를 n 개의 작은 호로 분할 한 후에 이 작은 호의 길이를 더해서 전체 호의 길이를 구한다. i 번째의 호에 대응하는 시간 t의 구간을 $[t_{i-1},\ t_i]$라고 하면 이 작은 호의 길이 Δs_i는 다음과 같이 나타내진다.

$$\Delta s_i \approx \sqrt{\{x(t_i)-x(t_{i-1})\}^2+\{y(t_i)-y(t_{i-1})\}^2+\{z(t_i)-z(t_{i-1})\}^2} \tag{3.23}$$

따라서 전체 호의 길이는 다음과 같다.

$$\Delta s_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2+(\Delta z_i)^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_i = x(t_i)-x(t_{i-1}),\quad \Delta y_i = y(t_i)-y(t_{i-1}),\quad \Delta z_i = z(t_i)-z(t_{i-1}) \\ \dfrac{dx_i}{dt} = \lim\limits_{\Delta t_i \to 0} \dfrac{\Delta x_i}{\Delta t_i}\ (= x_i{}'),\quad \dfrac{dy_i}{dt} = \lim\limits_{\Delta t_i \to 0} \dfrac{\Delta y_i}{\Delta t_i}\ (= y_i{}'),\quad \dfrac{dz_i}{dt} = \lim\limits_{\Delta t_i \to 0} \dfrac{\Delta z_i}{\Delta t_i}\ (= z_i{}') \end{array} \right\} \tag{3.24}$$

$$\therefore s = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta s_i = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx_i}{dt})^2+(\frac{dy_i}{dt})^2+(\frac{dz_i}{dt})^2}\ dt = \int_a^b \left|\frac{dr}{dt}\right| dt$$

또는

$$s = \int_a^b \sqrt{(x_i{}')^2+(y_i{}')^2+(z_i{}')^2}\ dt \tag{3.25}$$

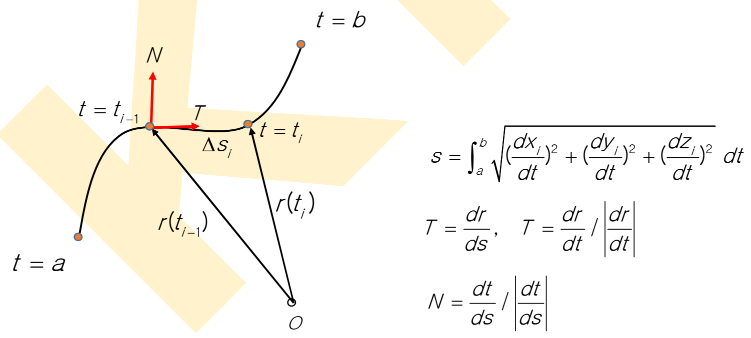


Fig. 3−6 곡선의 접선 벡터와 법선 벡터

여기서 위치 벡터 r의 매개 변수를 시간 t 가 아닌 거리 s라고 하면 r=r(s)라고 놓을 수 있다. 이 경우 r을 s로 미분해보면

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{ds} \tag{3.26}$$

또한 $s = \int_a^b \left|\frac{dr}{dt}\right| dt$ 인 관계로부터 $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dr}{dt}\right| (>0)$ 이기 때문에 다음 식이 성립한다.

$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = \left|\frac{dr}{dt}\right|\left|\frac{dt}{ds}\right| = \frac{ds}{dt}\frac{dt}{ds} = 1 \tag{3.27}$$

따라서 $\frac{dr}{ds}$ 은 곡선의 각 점에서 곡선에 접한 단위벡터(단위 접선벡터, unit tangent vector) T이다.

$$T = \frac{dr}{ds}, \quad T = \frac{dr}{dt} / \left|\frac{dr}{dt}\right| \tag{3.28}$$

한편 $T \cdot T = 1$ 이므로 이 식을 거리 s로 미분하면

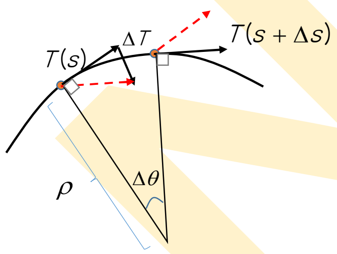


Fig. 3-7 곡선의 접선 벡터의 변화

$$\frac{d}{ds}(T \cdot T) = \frac{dT}{ds} \cdot T + = T \cdot \frac{dT}{ds} = 2T \cdot \frac{dT}{ds} = 0 \tag{3.29}$$

따라서 $\frac{dT}{ds}$ 는 접선 벡터 T와 수직을 이룬다는 것을 알 수 있다.

$$N = \frac{dT}{ds} / \left|\frac{dT}{ds}\right| \tag{3.30}$$

이 것을 크기가 1인 단위 법선벡터(unit normal vector)라고 부른다.

그림 3-7과 같이 곡선이 굽어져서 곡선의 접선 벡터 T 도 변화하는 경우를 생각해보자. 이 경우 곡선상의 두 점 사이에서 곡선이 얼마나 굽어져 있는지에 대한 지표로 $\frac{dT}{ds}$ 의

크기 $\left|\dfrac{dT}{ds}\right|$를 사용한다. 즉 접선 벡터의 변화 ΔT는 T의 회전률 $\Delta\theta$ 와 거의 같다.

$$\begin{aligned}\Delta T &= T(s+\Delta s)-T(s)\\ |\Delta T| &\approx |T|\Delta\theta = \Delta\theta\end{aligned} \tag{3.31}$$

따라서 곡선의 굽힘 정도를 나타내는 지표로 다음의 곡률(curvature)을 사용한다.

$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta T}{\Delta s}\right| = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \left|\frac{d^2 r}{ds^2}\right| \quad (\because T = \frac{dr}{ds}) \tag{3.32}$$

이 곡률의 역수를 곡률반경(radius of curvature)이라고 부르고 ρ라고 표시한다.

$$\rho = \frac{1}{k} \tag{3.33a}$$

직선의 경우에는 $\rho=\infty$ 이므로 $k=0$ 이다. 이 곡률의 정의를 이용하면 단위 법선벡터 N은 다음과 같이 나타내진다.

$$N = \frac{1}{k}\frac{dT}{ds} = \frac{1}{k}\frac{d^2 r}{ds^2} \tag{3.33b}$$

예제 3-2 다음과 같이 매개변수 t로 정의되는 곡선에 대해서 답하라.

$$r = a\cos t\ i + a\sin t\ j + bt\ k \tag{3.34a}$$

(a) 점 t=0에서 t=t 까지의 호장 s

(b) 단위 접선벡터 T

(c) 곡률

(d) 단위 법선벡터

(e) 이 곡선의 형태를 작도하라.

[해] 이 곡선의 위치 벡터 r은 $r = a\cos t\ i + a\sin t\ j + bt\ k$ 으로 나타내지므로 호장은

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t \left|\frac{dr}{dt}\right| dt = \int_0^t \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\ dt \\ &= \int_0^t \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + (b)^2}\,dt = \int_0^t \sqrt{a^2+b^2}\,dt \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\ t \end{aligned} \tag{3.34b}$$

한편 단위 접선벡터는

$$\frac{dr}{dt} = -a\sin t\ i + a\cos t\ j + b\ k$$
$$\left|\frac{dr}{dt}\right| = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2} = \sqrt{a^2+b^2} \quad (=\frac{ds}{dt}) \tag{3.34c}$$
$$\therefore T = \frac{dr}{dt} / \left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} i + \frac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} j + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} k$$

여기서 $\dfrac{dT}{ds}$ 는

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} / \frac{ds}{dt} = \left(\frac{-a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}} i + \frac{-a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}} j\right) / \sqrt{a^2+b^2}$$
$$= -\frac{a\cos t}{a^2+b^2} i - \frac{a\sin t}{a^2+b^2} j \tag{3.34d}$$

또한 곡률은

$$k = \left|\frac{dT}{ds}\right| = \sqrt{(-\frac{a\cos t}{a^2+b^2})^2 + (-\frac{a\sin t}{a^2+b^2})^2} = \frac{a}{a^2+b^2} \tag{3.34e}$$

따라서 단위 법선벡터는 다음과 같이 된다.

$$N = \frac{dT}{ds} / \left|\frac{dT}{ds}\right| = \left(-\frac{a\cos t}{a^2+b^2} i - \frac{a\sin t}{a^2+b^2} j\right) / \frac{a}{a^2+b^2}$$
$$= -\cos t\ i - \sin t\ j \tag{3.34f}$$

이 결과로부터 $T \cdot N = 0$ 를 확인 할 수 있다.

식 (3.34b)로부터 $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이므로 식 (3.34a)는 s의 함수로 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$r = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ i + a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ j + b\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\ k \tag{3.34g}$$

식 (3.34a)에서 a=1, b=1로 하고 t를 0부터 8π 까지 변화시킨 곡선의 형태는 그림 3-8과 같이 나선 곡선 (helix curve)을 나타낸다.

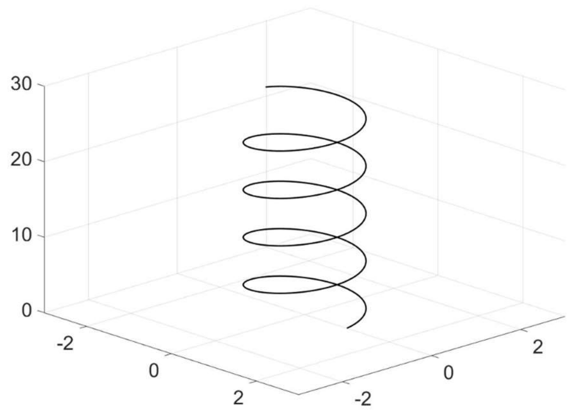


Fig. 3-8 나선곡선(helix curve)

3.3 구배, 발산, 회전

앞에서 기술한 것과 같이 온도 와 압력 등은 스칼러 양이다. 이런 스칼러 양이 공간 내에 분포하고 있는 상태를 스칼러 장(scalar field)이라고 하고, (x, y, z) 위치에서의 값을 $\phi(x, y, z)$ 또는 $f(x, y, z)$ 으로 나타낸다. 한편 공간 내에 속도, 힘 등 벡터 량이 분포하고 있는 상태를 벡터 장(vector field)이라고 하고, (x, y, z) 위치에서의 값을 $A(x, y, z)$ 등으로 나타낸다.

3.3.1 스칼러 장의 구배

아래 그림 3-9에서와 같이 3차원 공간 내에서 점 P와 인접한 점 Q를 가정하고 두 점의 좌표를 $P(x, y, z)$ 와 $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ 라고 하자. 직선 PQ의 크기를 Δs, 방향 벡터 u가 방향여현 (l,m,n)을 갖는다고 하면 다음 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} &u = l\ i + m\ j + n\ k \\ &\Delta x = l\Delta s,\ \ \Delta y = m\Delta s,\ \ \Delta z = n\Delta s \end{aligned} \tag{3.35}$$

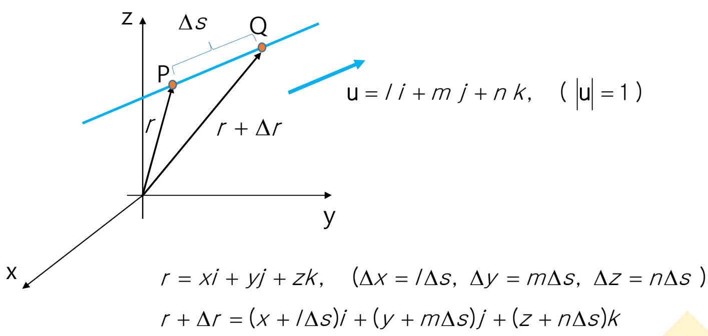


Fig. 3-9 방향여현 (l, m, n)을 갖는 두 점을 연결하는 직선의 식

스칼러 함수 f의 단위벡터 u 방향의 변화률(미분) $\frac{df}{ds}$ 를 구해보자.

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{ds} &= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta s} \\
&= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{f(x+l\Delta s, y+m\Delta s, z+n\Delta s) - f(x,y,z)}{\Delta s} \\
&\approx \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\left\{ f(x,y,z) + \frac{\partial f}{\partial x} l\Delta s + \frac{\partial f}{\partial y} m\Delta s + \frac{\partial f}{\partial z} n\Delta s \right\} - f(x,y,z)}{\Delta s} \qquad (3.36a) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} l + \frac{\partial f}{\partial y} m + \frac{\partial f}{\partial z} n
\end{aligned}
$$

이 관계를 함수 f의 방향도함수(directional derivative, 또는 방향미분)이라고 한다. 이 관계는 다시 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{ds} &= (\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k) \cdot (l\ i + m\ j + n\ k) \\
&= (\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k) \cdot u
\end{aligned} \qquad (3.36b)
$$

이 식의 우변 괄호 내의 벡터를 스칼러 장 f의 구배(gradient, 또는 기울기, 경사)라고 부르고 grad f 또는 ∇f 로 표시한다. 기호 ∇ 는 델(del)이라고 읽는다.

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k \qquad (= \nabla f)$$
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \tag{3.37}$$

식 (3.37)은 ∇f 에 대한 벡터 표시이지만 성분 만을 표시하는 경우에는 다음 표현을 사용한다.

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}) \tag{3.38}$$

따라서 함수 f의 방향 도함수는 다시 다음과 같이 나타내진다.

$$\frac{df}{ds} = \nabla f \cdot u \qquad (= D_u(f))$$
$$\frac{df}{ds} = |\nabla f||u|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta \qquad (\ |u| = 1\ ) \tag{3.39}$$

이 방향 도함수는 자주 $D_u(f)$ 로 나타내진다. 함수 f의 전미분에 대한 정의와

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \tag{3.40}$$

직선 PQ에 대한 미소벡터 dr을 이용하면 다음 관계가 얻어진다.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k) \cdot (dxi + dyj + dzk) = \nabla f \cdot dr \tag{3.41}$$

한편 스칼러 장 f에 대해서 다음 식은 등 포텐셜 곡면(equipotential surface, 또는 등위면)을 나타낸다

$$f(x, y, z) = c \qquad (c = \text{cosnstant}) \tag{3.42}$$

$f(x, y, z) = c$ 인 경우에 다른 c값을 취하면 등위면들이 얻어진다. 이것을 등위면군(equipotential group 또는 level surface)이라고 하고 이 등위면군에 대해서 $df = \nabla f \cdot dr = 0$ 가 성립하므로 ∇f 는 등위면군에 수직이 된다.

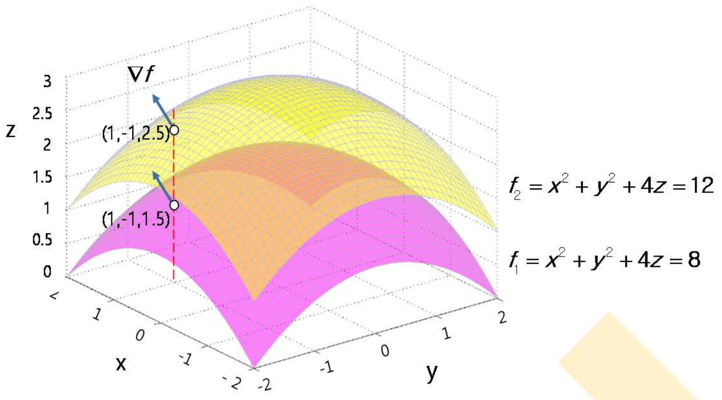
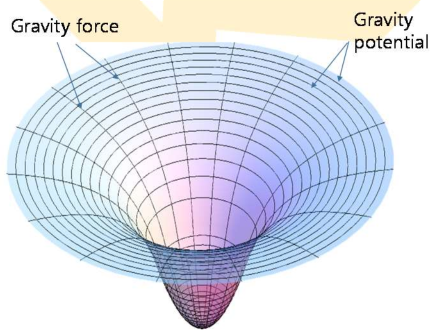


Fig. 3-10 등 포텐셜 곡면과 곡면에 수직인 벡터

이 포텐셜의 구배를 $\nabla f = F$ 라고 하면 이 값은 벡터이며 포텐셜에 수직인 벡터이며 다양한 물리 현상에서 중요한 의미를 갖는다. 즉, 공간의 (x, y, z) 위치에서의 값으로만 정해지는 포텔셜에 대한 예로는 중력 포텐셜(중력장), 소성역학 문제에서의 소성 포텐셜(소성항복곡면), 전기 포텐셜(전기장), 유체역학 문제에서의 속도 포텐셜 등등이 있다. 이들 문제에서 포텐셜의 구배는 중력 포텐셜에 대해서는 중력벡터, 소성 포텐셜에 대해서는 소성변형률 속도벡터, 전기 포텐셜에 대해서는 전기력 벡터, 속도 포텐셜에 속도벡터에 해당한다.



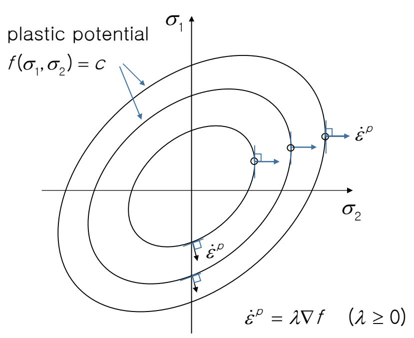


Fig. 3-11 등 포텐셜 곡면의 예(중력 포텐셜, 소성 포텐셜)

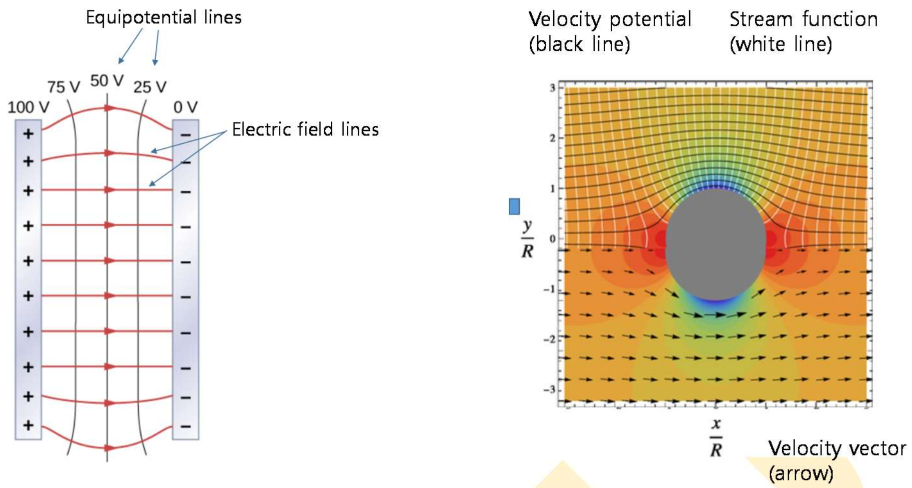


Fig. 3-12 등 포텐셜(전기장 포텐셜, 속도 포텐셜)

이 포텐셜의 구배에 대한 정의는 곡면에 대한 단위 법선벡터와 곡면에 대한 방정식을 정의하는데 유용하게 활용된다.

예제 3-3 곡면의 방정식이 $f(x,y,z)=x^2-4y^2+z^2-16=0$ 으로 주어질 때 다음 물음에 답하라.

(a) 점 P(2,1,4)에서 구배 ∇f 를 구하라.

(b) 점 P(2,1,4)에서 접평면(tangent plane)의 방정식을 구하라.

(c) 점 P(2,1,4)에서 곡면에 대한 단위 법선벡터를 구하라.

(d) 점 P(2,1,4)에서 법선 방정식(normal line equation)을 구하라

[해]

(a) 구배에 대한 정의로부터

$$\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k=2zi-8yj+2zk=4i-8j+8k$$

(b) 점 $P(x_0,y_0,z_0)$ 에서 법선 벡터 $\vec{n}=ai+bj+ck$ (단위 법선벡터일 필요는 없음)를 갖는 접평면에 대한 방정식은 $df=\nabla f\cdot dr=\nabla f\cdot(r-r_0)=0$ 관계식으로부터 다음과 같이 나타내진다.(그림 3-13)

$$a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0 \tag{3.43a}$$

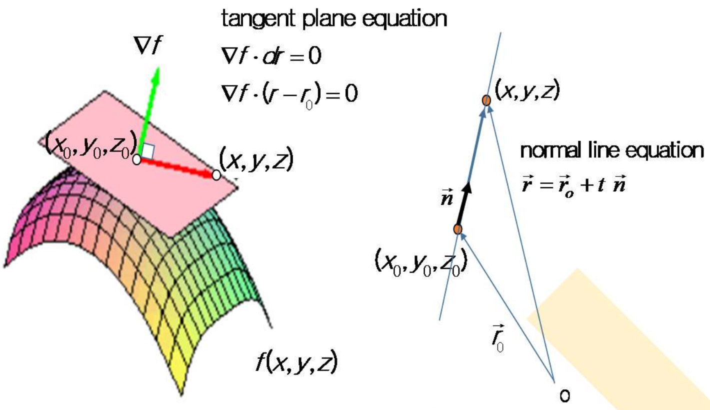


Fig. 3-13 곡면에 법선 방향 벡터와 접평면 방정식

따라서 P(2,1,4)에서 접평면의 방정식은 다음과 같다.

$$4(x-2)-8(y-1)+8(z-4)=0 \;\rightarrow\; 4x-8y+8z=32$$

(c) 단위 법선벡터는 다음과 같다.

$$n = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{4i-8j+8k}{\sqrt{(4)^2+(-8)^2+(8)^2}} = \frac{1}{3}(-2j+2k), \qquad |n| = 1$$

(d) $P(x_0, y_0, z_0)$ 에서 법선 벡터 $\vec{n} = ai + bj + ck$ 를 갖는 법선 방정식은 다음과 같이 나타내진다.

$$\vec{r} = \vec{r}_o + t\,\vec{n} \qquad (0 \le t \le 1)$$

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t \times (a, b, c) = (x_o + ta, y_o + tb, z_o + tc)$$

(3.43b)

$$\therefore x = x_o + ta, \;\; y = y_o + tb, \;\; z = z_o + tc$$

$$\therefore \frac{x - x_o}{a} = \frac{y - y_o}{b} = \frac{z - z_o}{c} \quad (= t)$$

따라서 P(2,1,4)에서 법선 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-4}{8} \;\; = t$$

또는 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\vec{r} = (2+4t,\ 1-8t,\ 4+8t)$$

예제 3-4 재료의 소성변형을 해석하기 위해서 응력(stress) σ_{ij} 들로 정의된 소성포텐셜(plastic potential)이 이용된다.

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 - \sigma_{YS}^2 = 0 \tag{3.44a}$$

이 식은 미세스의 항복조건식(Mises yield criterion)으로 알려져 있다. 여기서 σ_{YS} 는 재료가 탄성변형을 지나서 소성변형을 시작할 때의 응력으로 소성항복응력(plastic yielding strength, YS)이다. 이 값은 재료를 인장실험하면 구해진다.

이 소성포텐셜의 구배로부터 소성변형률 속도(plastic strain rate) $\dot{\varepsilon}\ (=\dfrac{d\varepsilon}{dt})$ 이 다음과 같이 정의된다.

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda}\nabla f \quad (\dot{\lambda} \ge 0) \tag{3.44b}$$

여기서 $\dot{\lambda}$ 는 소성변형과 더불어 변하는 비례정수이다. 따라서 이 식을 성분별로 전개하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_1 i + \dot{\varepsilon}_2 j = \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} i + \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} j\right) \\ &\therefore \dot{\varepsilon}_1 = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_1},\ \ \dot{\varepsilon}_2 = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \end{aligned} \tag{3.44c}$$

자동차 회사에서 새로운 모델의 차량을 개발하기 위해서는 판재를 프레스 가공하는 공정을 거쳐야 한다. 이 프레스 공정에서 판재는 1, 2 축으로 작용하는 응력에 의해 소성변형을 한다. 응력비 $\alpha = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 가 1.0, 0.5 와 0일 때 판재의 소성변형률 속도비 $\beta = \dfrac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2}$ 를 구하라.

[해] 식 (3.44c)로부터 소성변형률 속도비는 다음과 같다.

$$\beta = \frac{\dot{\varepsilon}_1}{\dot{\varepsilon}_2} = \frac{\lambda\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_1}}{\lambda\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_2}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{-\sigma_1 + 2\sigma_2} = \frac{2\alpha - 1}{-\alpha + 2}$$

따라서 $\alpha = 1$ 일 때 $\beta = 1$, 또한 $\alpha = 0.5$ 일 때 $\beta = 0$, 그리고 $\alpha = 0$ 일 때 $\beta = -0.5$ 가

된다. 이 변형 상태들을 아래 그림 3-14로 나타내었다. 여기서 실선은 변형 전에 판재에 그려 놓은 원의 형상이고 점선은 변형 후의 형상을 나타낸다.

이렇게 원형 그리드를 프레스 가공할 판재에 그려 놓고 프레스 성형 후에 변형된 그리드의 형상으로부터 변형률을 측정하면 역으로 각각의 그리드가 받는 응력상태를 파악할 수 있다. 이 방법을 원형 그리드 분석방법(circle grid analysis, CGA)이라고 하며 실제 자동차의 프레스 가공현장에서 가공용 프레스 금형이 적절하게 제작되었는지 그리고 프레스 가공불량의 원인 분석 등에 널리 사용되고 있다. (그림 3-15)

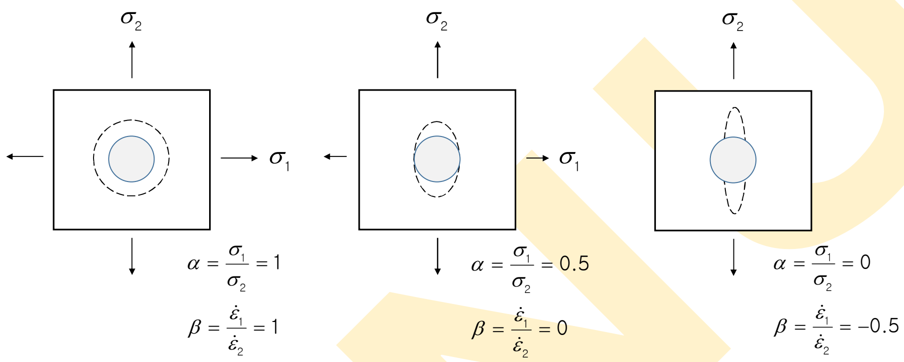


Fig. 3-14 다양한 소성변형에서 응력 비와 변형률 비

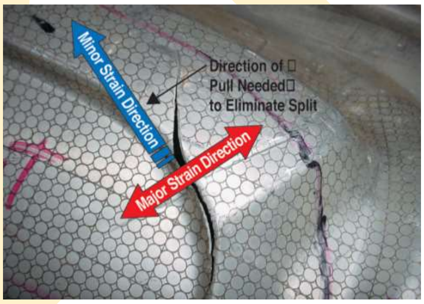


Fig. 3-15 프레스 가공불량의 원인 규명을 위한 원형 그리드 분석방법의 적용 예

3.3.2 벡터 장의 발산

앞에서 정의한 구배 ∇ 를 이용하여 벡터 함수 $A = A_x i + A_y j + A_z k$ 를 스칼러 곱하면

다음과 같이 스칼라 값이 얻어진다.

$$\nabla \cdot A = (\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k) \cdot (A_x i + A_y j + A_z k)$$
$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div\ A \tag{3.45}$$

이 정의를 벡터 A의 발산(divergence)라고 하고 $\nabla \cdot A$ 또는 div A 라고 표시한다. 발산은 그 용어에서 의미하는 것과 같이 물질의 내부로부터 뿜어져 나오는 것의 벡터량을 나타낸다. 그림 3-16과 같이 마치 공간에 있는 구로부터 가스나 유체가 분출되는 속도벡터를 생각하면 좋다.

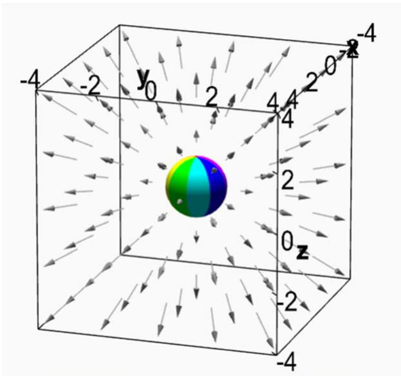


Fig. 3-16 물체의 발산 개념을 나타낸 예

이 벡터의 발산은 물질의 질량보존법칙, 연속의 방정식 등의 유도에 매우 중요한 역할을 한다. 다음과 같이 미소 직육면체의 세 면을 통해서 물질이 유입되고 또한 다른 세 면을 통해서 물질이 유출되는 경우를 생각해보자.

이 경우에 물질의 밀도를 ρ, 속도벡터를 A(x,y,z)라고 하면, x-방향에 수직인 면 $\Delta y \Delta z$ 을 통과하여 유입되는 질량은(mass flow in)은 $A_x \rho \Delta y \Delta z$ 이 된다. 속도 성분 A_y 와 A_z 는 x-축에 수직인 면 $\Delta y \Delta z$ 과 평행이기 때문에 이 속도성분은 물질의 유입 체적에 기여하지 않는다. 또한 x-축에 수직인 면 $\Delta y \Delta z$ 에서 Δx 만큼 떨어진 마주보는 면으로 유출되는 속도벡터는 $A + \frac{\partial A}{\partial x} \Delta x$ 이며, 이 면에서 유출되는 질량은(mass flow out)은 $\left(A_x \rho + \frac{\partial (A_x \rho)}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z$ 이 된다. 따라서 x-축에 수직인 두 면을 통해서 유입되고

유출되는 질량은 다음과 같다.

$$\Delta mass_x = (mass_{out} - mass_{in})_x = \frac{\partial (A_x \rho)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \tag{3.46}$$

마찬가지로 y-축에 수직인 면 그리고 z-축에 수직인 면을 통해 유입, 유출되는 질량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta mass_y &= \frac{\partial (A_y \rho)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \\ \Delta mass_z &= \frac{\partial (A_z \rho)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \tag{3.47}$$

따라서 세 방향 모두를 고려하면 물질이 미소 직육면체의 세 면을 통해서 유입되고 다른 세 면을 통해서 유출되는 경우에 미소 직육면체 내에서 질량 변화는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \Delta mass &= \Delta mass_x + \Delta mass_y + \Delta mass_z \\ &= \left(\frac{\partial (A_x \rho)}{\partial x} + \frac{\partial (A_y \rho)}{\partial y} + \frac{\partial (A_z \rho)}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned} \Delta mass_x &= mass\ flow\ out_x - mass\ flow\ in_x \\ &= (A_x \rho + \frac{\partial (A_x \rho)}{\partial x} \Delta x) \Delta t \Delta y \Delta z - A_x \rho) \Delta y \Delta z \\ &= \frac{\partial (A_x \rho)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned}$$

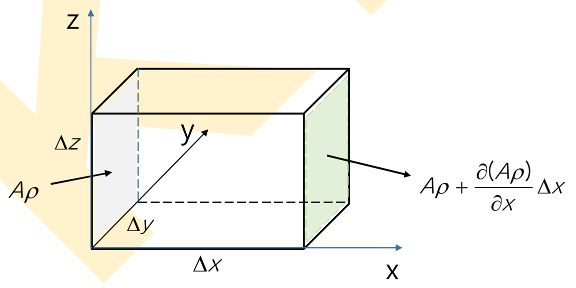


Fig. 3-17 육면체의 내부로 유입되고 유출되는 질량

이것이 $\Delta x \Delta y \Delta z$ 의 체적을 갖는 미소 직육면체 내의 질량변화율과 같아야 하므로

$$\left(\frac{\partial (A_x \rho)}{\partial x} + \frac{\partial (A_y \rho)}{\partial y} + \frac{\partial (A_z \rho)}{\partial z}\right) \Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) \tag{3.49}$$

따라서

$$\frac{\partial(A_x\rho)}{\partial x}+\frac{\partial(A_y\rho)}{\partial y}+\frac{\partial(A_z\rho)}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{3.50}$$

$$\nabla\cdot(\rho A)=\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{3.51}$$

이 식을 연속의 식(continuity equation) 또는 질량보존식(mass conservation equation)이라고 부른다.

만일 물체의 유동 패턴이 이 시간에 따라 변하지 않는 정상 상태(steady state)를 유지하면 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 이므로 위 식은 다음과 같이 된다.

$$\nabla\cdot(\rho A)=0 \tag{3.52}$$

만일 유동하고 있는 물질이 유체라고 하고 밀도 ρ 가 일정한 비압축성(incompressible)이라고 하면 위 식은 $\nabla\cdot A=0$ 가 된다.

예제 3-5 벡터 $A=e^x i+\ln(xy)j+e^{xyz}k$ 에 대한 발산을 구하라.

[해]

$$\begin{aligned}\nabla\cdot A&=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\\&=\frac{\partial}{\partial x}e^x+\frac{\partial}{\partial y}\ln(xy)+\frac{\partial}{\partial z}e^{xyz}\qquad(\ln(xy)=\ln x+\ln y)\\&=e^x+\frac{1}{y}+xye^{xyz}\end{aligned}$$

3.3.3 벡터 장의 회전

앞에서 정의한 구배 ∇ 를 이용하여 벡터 함수 $A=A_x i+A_y j+A_z k$ 를 벡터 곱을 한 것을 벡터의 회전(rotation)이라고 하며 rot A 또는 Curl A로 나타낸다.

$$Curl\ A = \nabla \times A = (\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k) \times (A_x i + A_y j + A_z k) \quad (= rot\ A)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{3.54}$$

이 식을 구체적으로 전개하면 다음과 같다.

$$\nabla \times A = i(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_y & A_z \end{vmatrix} + j(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_z \end{vmatrix} + k(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ A_x & A_y \end{vmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)i - \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)j + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)k \tag{3.55}$$

즉, 크기 $|\nabla \times A|$는 회전의 크기를 나타낸다.

이 정의가 회전을 나타내는 지를 공간에 고정된 물체의 회전에 대해서 검토해 보자. 물체의 회전 중심까지의 팔의 거리 벡터를 r, 물체에 작용하는 힘 벡터를 F라고 할 때 물체에 작용하는 회전 모멘트는 $R = F \times r = R_x i + R_y j + R_z k$ 와 같이 나타낼 수 있다. 여기서 문제를 간단히 하기 위해서 xy 평면에 작용하는 힘 벡터 성분에 의해 발생하는 회전 모멘트 증분 성분 dR_z 만을 검토한다.

그림에서와 같이 벡터장 F(힘 벡터장) 하에 놓여 있는 직사각형 QRST를 생각하자. 각 정점 P, Q, R, S의 위치는

$$Q(x+\Delta x, y+\Delta y),\ R(x-\Delta x, y+\Delta y),\ S(x-\Delta x, y-\Delta y),\ T(x+\Delta x, y-\Delta y) \tag{3.56}$$

또한 각 변의 중심 a, b, c, d의 위치는

$$a(x+\Delta x, y),\ b(x, y+\Delta y),\ c(x-\Delta x, y),\ d(x, y-\Delta y) \tag{3.57}$$

이다. 각 변에 작용하는 힘 벡터에 거리 벡터를 곱해보자. 즉,

$$dR_z = F(a)\cdot(2\Delta yj) + F(b)\cdot(-2\Delta xi) + F(c)\cdot(-2\Delta yj) + F(d)\cdot(2\Delta xi) \tag{3.58}$$

여기서

$$F(a) = F + \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x,\quad F(b) = F + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta x,\quad F(c) = F - \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x,$$
$$F(d) = F - \frac{\partial F}{\partial y}\Delta x \tag{3.59}$$

이므로 식 (3.58)은 다음과 같이 나타내진다.

$$
\begin{aligned}
dR_z &= \{F(a) - F(c)\} \cdot (2\Delta yj) + \{F(b) - F(d) \cdot (-2\Delta xi) \\
&= \{2\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x\} \cdot (2\Delta yj) + \{2\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y\} \cdot (-2\Delta xi) \quad (F \cdot i = F_x,\ F \cdot j = F_y) \\
&= (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})4\Delta x\Delta y = (\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y})dA \quad (dA = 4\Delta x\Delta y) \qquad (3.60) \\
\therefore \frac{dR_z}{dA} &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}
\end{aligned}
$$

즉 z 방향의 단위 면적 당 회전 모멘트은 식 (3.55)의 우변 세 번째 식과 같아진다는 것을 알 수 있다. x 방향과 y 방향의 회전 모멘트 증분도 마찬가지로 표시할 수 있다. 따라서 이 경우에 회전 모멘트 증분 벡터들의 합이 $\nabla \times F$ 로 나타내 진다는 것을 알 수 있다.

이 $\nabla \times F$ 는 고체의 회전 뿐 아니라 자동차 배기가스나 토네이도와 같이 회전을 수반하는 유체의 난류 유동(turbulent flow)에서의 와류(vortex) 특성을 나타내는데 자주 사용된다.

그림 3-18, 3-19, 3-20은 공기역학 풍동실험(aerodynamic wind tunnel test)을 통한 차량 외부의 유동패턴 형상, 속도벡터 분포 그리고 차량 도어의 오염(contaminant) 원인을 전산유체역학(computational fluid dynamics, CFD)으로 해석한 예이다. 차량의 외관 전체적으로는 층류 유동(laminar flow)을 보이고 있으나 차량 뒷부분, 앞 유리창의 밑부분, A-필러, 백미러 근처에서 와류가 심하게 발생하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 3-18 CFD로 해석한 차량 외부의 유동 패턴

(https://www.nasa.gov/centers/ames/images)

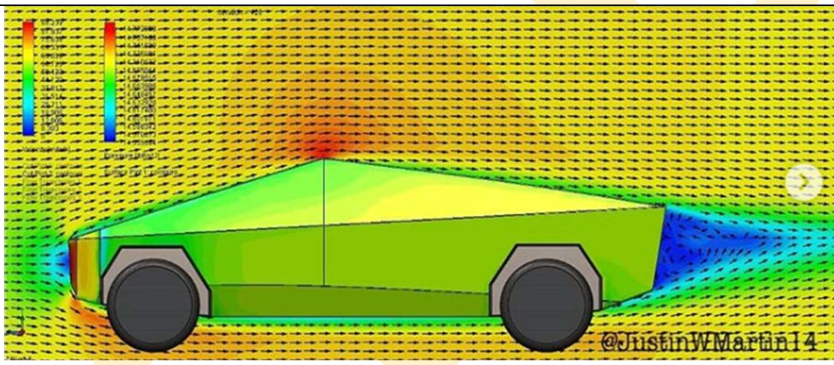


Fig. 3-19 CFD로 해석한 Tesla Cybertruck 외부의 유동 패턴

(https://interestingengineering.com/teslas-cybertruck-aerodynamics-do-flow-smoothly-as-per-a-cfd-analysis)

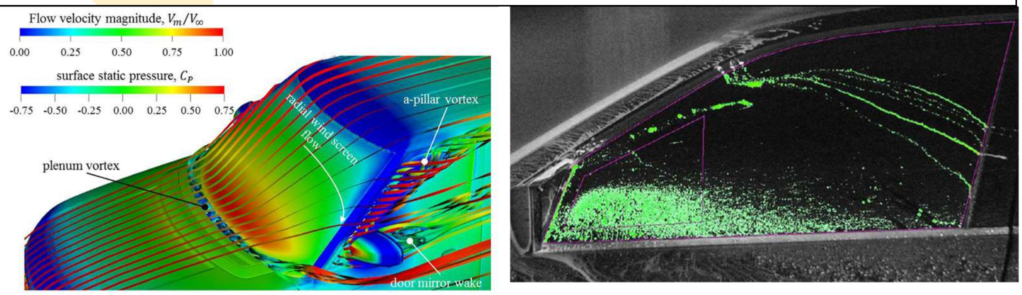


Fig. 3-20 CFD로 해석한 차량 외부(백미러 주위)의 유동 패턴

(Adrian P Gaylard et al., Proc IMechE Part D: J. Auto. Eng., 231(9) (2017)

1160–1176)

구배 ∇ 를 포함하고 있는 스칼러 장의 구배, 벡터 장의 발산및 회전과 관련한 널리 사용되고 있는 유익한 관계식들을 아래에 나타내었다.

$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g$ $\nabla(\frac{f}{g})=\frac{g\nabla f-f\nabla g}{g^2}$ $\nabla^2 f=\nabla\cdot\nabla f$ $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ $(Laplacian)$	$\nabla\times(\phi A)=\phi\nabla\times A+(\nabla\phi)\times A$ $(\phi: scalar)$ $\nabla\times(\nabla\phi)=0$ $\nabla\cdot(\nabla\times A)=0$ $\nabla\cdot(A\times B)=B\cdot(\nabla\times A)-A\cdot(\nabla\times B)$ $\nabla\times(\nabla\times A)=\nabla(\nabla\cdot A)-\nabla^2 A$ (3.61)

예제 3-6 $A=xz^3 i-2x^2yzj+2yz^4k$ 에 대해서 $\nabla\times A$ 를 구하라.

[해]

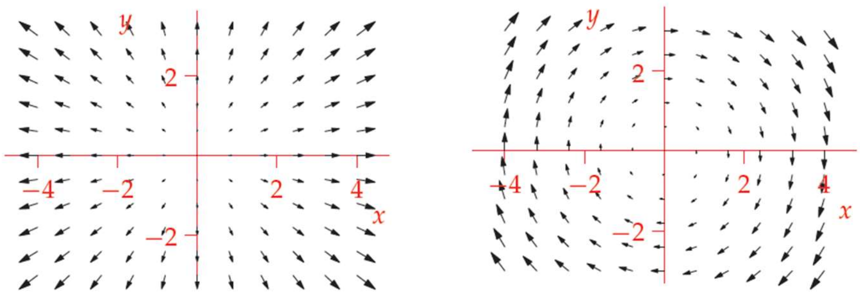
$$\nabla\times A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz^3 & \text{-2x}^2\text{yz} & \text{2yz}^4 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial(\text{2yz}^4)}{\partial y}-\frac{\partial(\text{-2x}^2\text{yz})}{\partial z}\right)i-\left(\frac{\partial(\text{2yz}^4)}{\partial x}-\frac{\partial(xz^3)}{\partial z}\right)j+\left(\frac{\partial(\text{-2x}^2\text{yz})}{\partial x}-\frac{\partial(xz^3)}{\partial y}\right)k$$

$$=(2z^4+2x^2y)i+3xz^2j-4xyzk$$

예제 3-7 속도 벡터가 $A=xi+yj$ 와 $B=yi-xj$ 인 두 벡터장을 xy평면에 나타내고 각각에 대해서 논하라.

[해] 그림 3-21(a)의 A 벡터장은 $\nabla\times A=0$ 로 회전이 없이 원점에서 발산하고 있는 벡터장을 나타내고, 그림 (b)의 B 벡터장은 $\nabla\times A=-2k$ 원점을 주위로 시계방향으로 회전하고 있는 벡터장을 나타낸다.



(a) (b)

Fig. 3-21 (a) 발산 속도장, (b) 회전 속도장

예제 3-8 강의 폭이 4이고 물의 속도가 $A=(1-\frac{1}{4}y^2)i$ 이다. 5마리의 오리들이 강 폭에 일정한 간격으로 헤엄치고 있다. 물의 속도를 속도장으로 나타내고, 어떤 오리가 가장 빨리 헤엄치는지 그리고 어디에 위치한 오리가 가장 늦게 헤엄치는지 그 이유를 설명하라.

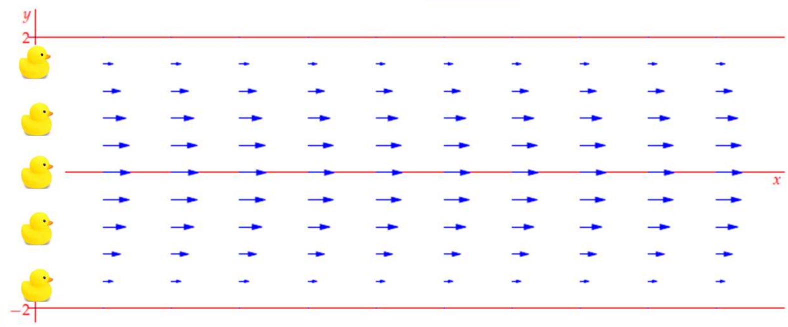


Fig. 3-22 오리들의 초기 위치에 따른 헤엄 속도 차이

[해] 중앙(y=0)에 위치한 오리가 가장 먼저 헤엄친다. 왜냐하면 중앙에 위치한 오리에는 물의 회전이 작용하지 않지만, 가장자리 근처 y=+2 와 y=−2 위치에 있는 오리는 다음과 같은 회전을 받는다.

$$\nabla\times A=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)i-\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)j+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)k$$

$$=0+0+\left(0-\frac{\partial}{\partial y}(1-\frac{1}{4}y^2)\right)k=\frac{1}{2}yk$$

즉, y=2 위치에 있는 오리는 $\Delta\times A\big|_{y=2}=k$ 크기의 시계방향으로 회전을 받고 있으며,

y=−2 위치에 있는 오리는 $\Delta \times A|_{y=-2} = -k$ 의 반시계 방향으로 회전을 받기 때문에 헤엄치는 속도가 늦다.

3.4 벡터 적분

3.4.1 선적분

다음 그림에 나타내 것과 같이 3차원 공간에서 위치에 따라 변하는 힘 벡터 $F(r_i)$ 가 부분 매끄러운 곡선(piecewise smooth curve) PQ를 따라 작용할 때 전체 일을 구하는 문제를 생각해 보자.

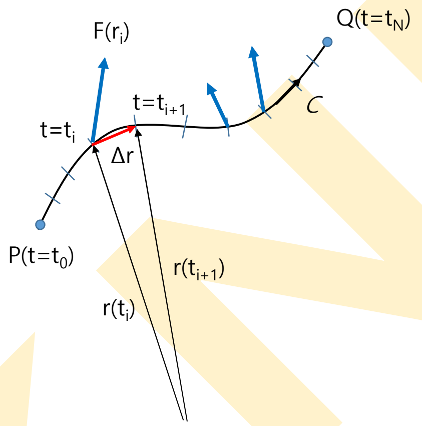


Fig. 3-23 힘 벡터가 매끄러운 곡선을 따라 작용할 때의 일 기여량

시간 $t = t_i$ 와 시간 $t = t_{i+1} = t_i + \Delta t$ 사이에 힘 벡터 $F(r_i)$ 가 행한 증분 일은 힘 벡터 $F(r_i)$ 와 위치 벡터 Δr 의 스칼러 곱으로 나타내진다.

$$\Delta W_i = F_i \cdot \Delta r_i \tag{3.62}$$

따라서 전체 경로에서 행한 일은 이 선 요소(line element)에 작용하는 증분 일을 전체 경로에 따라 더해가면 얻을 수 있다. 즉,

$$W = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \Delta r_i \tag{3.63}$$

여기서 n을 무한으로 증가시키면 $|\Delta r|(=\Delta s)$ 이 작아져서 극한에서 0으로 점근한다. 이

경우 위 식은 경로 C를 따라 적분한 것이 된다.

$$W = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta r \to 0}} \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \Delta r_i = \int_C F \cdot dr \tag{3.64}$$

이와 같은 정의를 곡선 경로 C에 대한 벡터장의 선적분(line integral 또는 경로적분(path integral, contour integral))라고 한다.

힘 벡터 F와 위치 벡터 r를 성분 별로 나타내면

$$\begin{aligned} F &= F_x i + F_y j + F_z k \\ dr &= dxi + dyj + dzk \end{aligned} \tag{3.65}$$

따라서 선적분은 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} W &= \int_C F \cdot dr = \int_C (F_x i + F_y j + F_z k)\cdot(dxi + dyj + dzk) \\ &= \int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned} \tag{3.66}$$

만일 위치 벡터 r가 시간 t에 대한 함수라면

$$\begin{aligned} & r = r(t), \\ & dr = \frac{dr}{dt}dt = (\frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}i + \frac{dz}{dt}k)dt \quad (= r'dt) \end{aligned} \tag{3.67}$$

로 표시할 수 있다.

한편 매끄러운 곡선 경로 C에 대한 스칼러 장 $\phi(x,y,z)$에 대한 선적분은 다음과 같이 나타내진다.

$$\int_C \varphi(x,y,z)\ dt \quad , \quad \int_C \varphi(x,y,z)\ ds \tag{3.68}$$

예제 3-9 곡선 C 가 $r = ti + t^2 j + t^3 k \quad (0 \le t \le 1)$, $F = (3x^2 + 6x)i - 14yzj + 20xz^2 k$ 일 때 선적분 $W = \int_C F \cdot dr$ 를 구하라.

[해]

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C \left\{ (3x^2 + 6x)dx - (14yz)dy + (20xz^2)dz \right\}$$

여기서 $x = t,\ t = t^2,\ z = t^3$ 이므로

$$W = \int_C \left\{ (3x^2 + 6x)dx - (14yz)dy + (20xz^2)dz \right\}$$
$$= \int_0^1 \left\{ [3(t)^2 + 6(t)]dt - [14(t^2)(t^3)]2tdt + [20(t)(t^3)^2]3t^2 dt \right\} = 5$$

예제 3-10 시작점이 P(1,0,0), 종점이 Q(0,1,π /2) 인 선분에 작용하는 벡터장 $F = 2yi + xj + \sin^2 xk$ 에 의한 선적분을 구하라

[해] 두 점 QP를 연결하는 직선의 기울기는 (0−1, 1−0, π /2−0) 성분을 갖는다. 따라서 두 점을 연결하는 직선의 방정식을 매개변수 t를 이용하여 다음과 같이 얻어진다.

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{\pi/2} = t$$
$$x = 1-t,\ \ y = t,\ \ z = \frac{\pi}{2}t$$
$$r = xi + yj + zk = (1-t)i + tj + \frac{\pi}{2}tk, \quad (0 \le t \le 1)$$

따라서

$$\int_C F \cdot dr = \int_C (F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_z \frac{dz}{dt})dt = \int_0^1 [(2t)(-1) + (1-t)(1) + (\sin^2 \frac{\pi}{2} t)(\frac{\pi}{2})]dt$$
$$= \int_0^1 [1 - 3t + \frac{1-\cos \pi t}{2}(\frac{\pi}{2})]dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

3.4.2 면적적분

3차원 공간 내의 3차원 형상의 곡면은 두 개의 매개변수 u와 v에 의해 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v) \tag{3.69}$$

이 식에서 u와 v를 소거하면 $z = g(x,y)$ 가 얻어진다. 위 식에서 v를 일정한 값 a로 하면 a 값의 크기에 따라 곡선군 (u−곡선군)이 얻어지고 마찬가지로 u를 일정한 값 b로 하면 b 값에 따라 곡선군 (v−곡선군)이 얻어진다.

벡터의 면적적분(area integral 또는 이중적분(double integral))은 이 곡면에 작용하는 벡터 F(x,y,z)와 곡면을 구성하는 미소 면요소 벡터 $d\vec{S}(= ndS)$ 의 내적의 합으로 나타내진다. 즉,

$$I = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta S\to 0}} \sum_{i=1}^{n} F\cdot\Delta\vec{S} = \iint_S F\cdot ndS \quad (d\vec{S} = ndS) \tag{3.70}$$

그림 3-24에서와 같이 곡면 상에 임의 점 P를 잡고, 점 P 근방에 u-곡선 상에 점 Q, 그리고 v-곡선 상에 점 R을 잡는다. 이 두 점들을 연결하는 선분 PQ와 선분 PR이 이루는 평형사변형의 미소 면적 dS를 면요소(area element) 라고 한다. 식 (3.12)에 대한 벡터의 외적에 대한 정의에 따라 이 면요소는 벡터 PQ($=\dfrac{\partial r}{\partial u}\Delta u$)와 PR($=\dfrac{\partial r}{\partial v}\Delta v$) 로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta\vec{S} &= \frac{\partial r}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial r}{\partial v}\Delta v = \frac{\partial r}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial r}{\partial v}\Delta v = n\Delta S \\ \Delta S &= \left|\Delta\vec{S}\right| = \left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|\Delta u\Delta v \end{aligned} \tag{3.71}$$

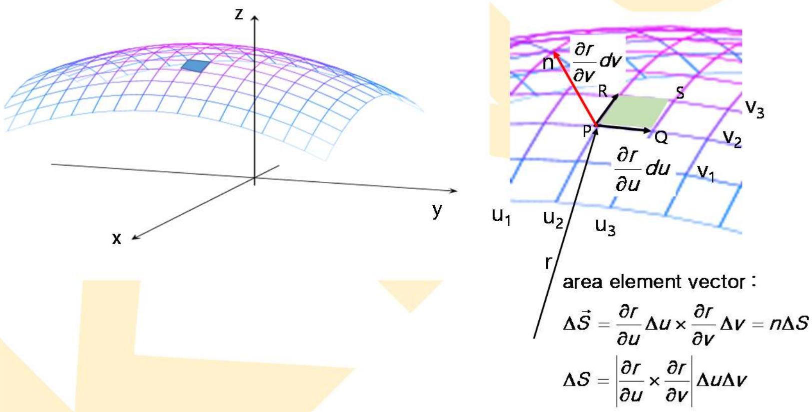


Fig. 3-24 곡면 상의 면요소 정의

여기서 n은 곡면에 수직방향으로 향하는 단위 법선벡터이며 다음과 같이 정의된다.

$$n = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right) \Big/ \left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right| \tag{3.72}$$

$ndS\ (= d\vec{S})$ 는 면요소 벡터(area element vector) 라고 부른다. 곡면을 구성하는 미소 면요소의 수를 무한대 늘리면 위 식들에서 증분표시 Δ를 미분표시 d 로 바꾸면 된다. 즉,

$$d\vec{S} = \frac{\partial r}{\partial u}du \times \frac{\partial r}{\partial v}dv = \frac{\partial r}{\partial u}du \times \frac{\partial r}{\partial v}dv = ndS \tag{3.73}$$

한편 곡면이 $z=g(x,y)$ 으로 주어지는 경우는 $r=xi+yj+g(x,y)k$ 가 되므로

$$\frac{\partial r}{\partial x}=i+\frac{\partial g}{\partial x}k, \quad \frac{\partial r}{\partial y}=j+\frac{\partial g}{\partial y}k \tag{3.74}$$

면요소 벡터 $d\vec{S}$ 와 단위 법선벡터 n 은 벡터 적의 정의를 이용하여 다음과 같이 나타내진다.

$$\frac{\partial r}{\partial x}dx\times\frac{\partial r}{\partial y}dy=(i+\frac{\partial g}{\partial x}k)dx\times(j+\frac{\partial g}{\partial y}k)dy=\left(-\frac{\partial g}{\partial x}i-\frac{\partial g}{\partial y}j+k\right)dxdy$$

$$\left|\frac{\partial r}{\partial x}dx\times\frac{\partial r}{\partial y}dy\right|=\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}\ dxdy \tag{3.75}$$

$$n=\frac{-\frac{\partial g}{\partial x}i-\frac{\partial g}{\partial y}j+k}{\sqrt{1+(\frac{\partial g}{\partial x})^2+(\frac{\partial g}{\partial y})^2}}$$

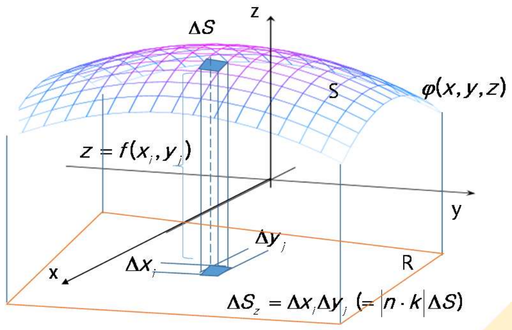
한편 그림 3-25와 같이 곡면 S에 대한 스칼러 장 $\varphi(x,y,z)=c$ 에 대한 면적적분은 직교 xy 평면에서 잡은 미소 면요소 $\Delta x_i\Delta y_j(=\Delta S)$ 에 $z=f(x_i,y_i)$ 크기의 함수값이 작용하는 것의 합으로 생각할 수 있다. (그림 3-26) 여기서 좌표 (x_i,y_i) 는 미소 면요소 내에서 대표 점의 좌표를 나타낸다. 따라서

$$I=\lim_{\substack{n,m\to\infty\\ \Delta x_i\to 0\\ \Delta y_j\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}f(x_i,y_i)\Delta x_i\Delta y_j=\iint_S f(x,y)dS \tag{3.76}$$

만일 미소 면요소를 직교하지 않는 uv 평면에서 잡으면 곡면 S에 대한 스칼러 장 $\varphi(x,y,z)=c$ 에 대한 면적적분은 벡터 적의 정의를 이용하여 다음과 같이 나타내진다.

$$\iint_S \varphi(x,y,z)dS=\iint_D \varphi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right|dudv \tag{3.77}$$

여기서 D는 곡면 S 에 대응하는 (u,v) 영역이다.



$$I_{ij} = f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

$$I = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_i^n \sum_j^m f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j = \iint_S f(x,y)dxdy$$

Fig. 3-25 스칼러 장의 미소 면요소에 대한 면적적분

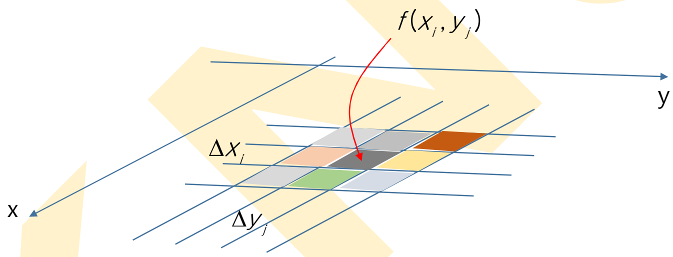


Fig. 3-26 xy 평면 상의 면요소 정의

예제 3-11 다음 면적적분 값을 구하라. 또한 적분 순서를 바꾸었을 경우에 결과가 달라지는 지를 검토하라. x, y의 적분 구간은 모두 [1,2] 이다.

$$I = \iint_D \frac{1}{(x+y)^2} dxdy$$

[해] y 에 대해서 먼저 적분한 후에 x에 대해서 적분해보자.

$$I=\int_1^2 dx\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}dy=\int_1^2 dx[-(x+y)^{-1}]_1^2=\int_1^2[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}]dx$$
$$=[\ln\frac{x+1}{x+2}]_1^2$$
$$=\ln\frac{9}{8}$$

x에 대해서 먼저 적분한 후에 y에 대해서 적분하여도 동일한 결과가 얻어진다. 따라서 스칼러 장의 면적적분의 경우에 적분값은 적분경로에 무관하다는 것을 알 있다.

이 것을 일반한 것이 푸비니스 정리(Fubini' s theorem)이다. 즉 적분 영역이 $a\le x\le b,\ c\le y\le d$ 인 경우에 스칼러 장 $f(x,y)$에 대한 면적적분은 적분경로에 무관하게 같은 값을 가진다.

$$I=\iint_R f(x,y)dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dydx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

여기서 적분영역은 자주 다음과 같이 표시되기도 한다.

$$R=\{(x,y): a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$

3.4.3 체적적분

공간 체적 V에 대한 스칼러 장 $\varphi(x,y,z)=c$ 에 대한 체적적분(volume intergral 또는 삼중적분(triple integral))은 체적 V 내의 미소 체적요소 $\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k(=\Delta V)$ 과 이 미소 체적요소의 대표 점 위치에 작용하는 함수 $z=f(x_i,y_j,z_k)$ 의 곱에 대한 합으로 생각할 수 있다. 따라서

$$I=\lim_{\substack{n,m,l\to\infty\\ \Delta x_i\to 0\\ \Delta y_j\to 0\\ \Delta z_k\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(x_i,y_i,z_k)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k=\iint_S f(x,y,z)dV \tag{3.78}$$

3.4.4 야코비안에 의한 좌표계 변환

변수 u와 v로 변수 x와 y가 다음과 같이 정의된다고 하자.

$$x=f(u,\ v),\qquad y=g(u,\ v) \tag{3.79}$$

x 와 y에 대한 전미분을 구하면 다음과 같다.

$$dx = df(u,\ v) = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$$
$$dy = dg(u,\ v) = \frac{\partial g}{\partial u}du + \frac{\partial g}{\partial v}dv = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \tag{3.80}$$

즉, dx와 dy를 du와 dv로 나타낼 수 있다. 이 식을 행렬로 표시하면

$$\begin{Bmatrix} dx \\ dy \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \end{Bmatrix} \tag{3.81}$$

여기서

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \tag{3.82}$$

를 야코비안 (Jacobian 또는 Jacobian matrix)이라고 하고 J로 표시한다. 이 야코비안은 변수들을 바꾼 경우에 변수들간의 대응 관계를 나타낸다.

이 야코비안을 이용하면 벡터 dx와 벡터 dy의 벡터 곱으로 정의되는 미소 면적은 벡터 dx와 벡터 dy의 벡터 곱으로 다음과 같이 나타내진다.

$$dS = dxi \times dyj = \left(\frac{\partial x}{\partial u}dui + \frac{\partial x}{\partial v}dvj\right) \times \left(\frac{\partial y}{\partial u}dui + \frac{\partial y}{\partial v}dvj\right)$$
$$dS = |dxdy|k = \left(\frac{\partial x}{\partial u}dui + \frac{\partial x}{\partial v}dvj\right) \times \left(\frac{\partial y}{\partial u}dui + \frac{\partial y}{\partial v}dvj\right) \tag{3.83}$$
$$= \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| dudvk$$

따라서

$$|dxi \times dyj| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| dudv = |J|dudv$$
$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.84}$$

$|J|$ 은 야코비안의 행렬식(Jacobian determinant)이다. 이 야코비안 행렬식은 편의상 그냥 야코비안 이라고 한다.

이 야코비안의 정의를 이용하면 x, y좌표에서 면적적분은 u, v 좌표계에서의

면적적분으로 다음과 같이 나타내진다.

$$\iint_{R(x,y)} f(x,y)dxdy = \iint_{R(u,v)} f[x(u,v),y(u,v)]|J|dudv \tag{3.85}$$

(r,θ) 의 극좌표계(polar coordinate)를 생각하면 극좌표계와 (x,y)의 카테샨 좌표계(Cartesian coordinate)의 관계는 다음과 같고

$$x = r(r,\theta) = r\cos\theta,\ \ y = r(r,\theta) = r\sin\theta,\quad (r>0,\ \ 0\le\theta\le 2\pi) \tag{3.86}$$

따라서 야코비안 $|J|$ 는

$$\begin{aligned} |J| &= \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= r \end{aligned} \tag{3.87}$$

따라서 카테샨 좌표계에서 면적적분은 극좌표계에서 면적적분으로 다음과 같이 나타내진다.

$$\iint_{R(x,y)} f(x,y)dxdy = \iint_{R(r,\theta)} f[x(r,\theta),y(r,\theta)]|J|drd\theta = \iint_{R(r,\theta)} f(r,\theta)rdrd\theta \tag{3.88}$$

마찬가지로 이 야코비안의 정의를 이용하면 x, y, z 좌표에서 체적적분은 u, v, w 좌표계에서의 체적적분으로 다음과 같이 나타내진다.

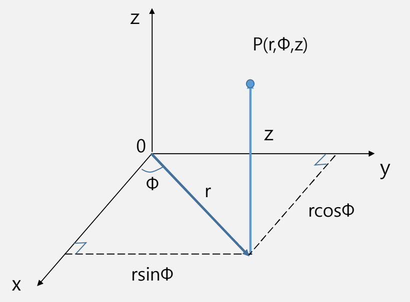
$$\iint_{R(x,y,z)} f(x,y,z)dxdydz = \iint_{R(u,v,w)} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]|J|dudvdw \tag{3.89}$$

이 경우의 야코비안은 다음 식으로 정의된다.

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix},\qquad |J| \ne 0 \tag{3.90}$$

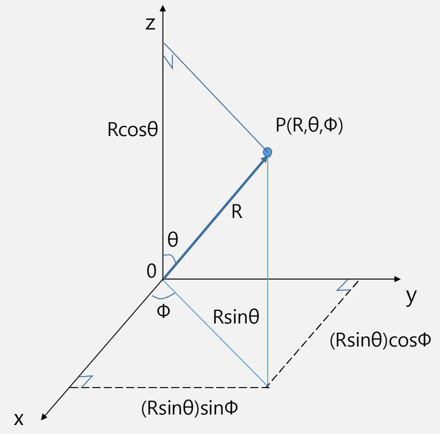
면적 적분이나 체적 적분과 같이 여러 변수들을 포함한 적분을 다중적분(multiple integration)이라고 부른다.

(r,ϕ,z) 의 원통좌표계(cylinderical coordinate)와 (R,θ,ϕ) 의 구좌표계(spherical coordinate)의 정의와 야코비안을 그림 3-27에 나타내었다.



$x = r\cos\phi, y = r\sin\phi, z = z$

$$|J| = \begin{vmatrix} x_r & x_\phi & x_z \\ y_r & y_\phi & y_z \\ z_r & z_\phi & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -r\sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$



$x = R\sin\theta\cos\phi, y = R\sin\theta\sin\phi, z = R\cos\theta$

$$|J| = \begin{vmatrix} x_R & x_\theta & x_\phi \\ y_R & y_\theta & y_\phi \\ z_R & z_\theta & z_\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & R\cos\theta\cos\phi & -R\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & R\cos\theta\sin\phi & R\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -R\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R^2\sin\theta$$

Fig. 3-27 원통좌표계(좌)와 구좌표계(우)에서 야코비안의 정의

예제 3-12 다음 그림 3-28과 같이 네 개의 직선으로 둘러 쌓인 영역에서 적분 값을 구하라.

$$I = \iint_{R(x,y)} (3x+6y)^2\, dA \qquad (dA = dxdy)$$

[해] 여기서는 네 개의 직선으로 둘러 쌓인 영역을 검토하므로 영역을 왼쪽과 오른쪽으로 구분하여 검토한다. 즉

$$\text{Right half}: \frac{x-2}{2} \le y \le \frac{2-x}{2}, \quad 0 \le x \le 2$$

$$\text{Left half}: \frac{-2-x}{2} \le y \le \frac{2+x}{2}, \quad -2 \le x \le 0$$

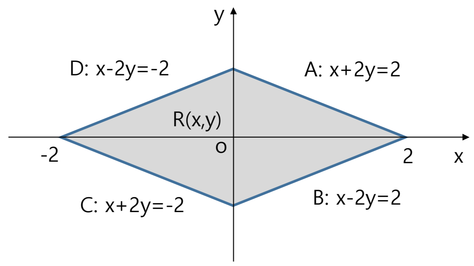


Fig. 3-28 마름모 영역의 적분

따라서 적분은

$$I=\int_{-2}^{0}\int_{-(2+x)/2}^{(x+2)/2}(3x+6y)^2\,dydx+\int_{0}^{2}\int_{(x-2)/2}^{(2-x)/2}(3x+6y)^2\,dydx$$

이 적분 계산에서 적분의 하한과 상한이 변수를 포함한 복잡한 형식을 갖고 있다. 따라서 변수를 교체하는 것에 의해 다음과 같이 간단하게 계산할 수 있다. 즉

$$u=x+2y,\quad v=x-2y$$

$$\rightarrow\quad x=\frac{u+v}{2},\quad y=\frac{u-v}{4}$$

이 변수 교체에 의해 적분을 수행해야 하는 영역 R은 다음과 같이 간단하게 표시된다.

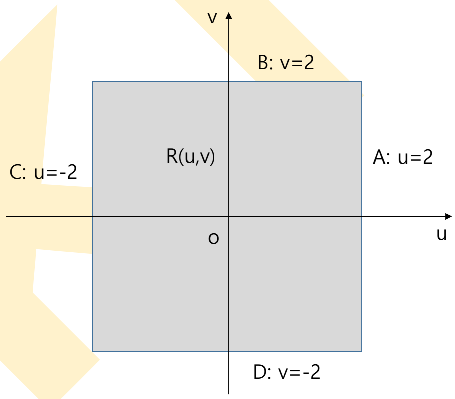


Fig. 3-29 사각 영역의 적분

한편 이 변수 변화에 대한 야코비안은

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u.v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

따라서 이 변수 변경에 의해 적분은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$I = \iint_{R(x,y)} (3x+6y)^2 dydx = \iint_{R(u,v)} [3(\frac{u+v}{2})+6(\frac{u-v}{4})]^2 |J| dudv$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} (9u^2)\frac{1}{4} dudv = 48$$

예제 3-13 다음 체적적분을 수행하라. 단 체적은 $z^2 = x^2 + y^2$ 인 원뿔과 $z = a$ 인 평면으로 둘러 쌓인 체적으로 간주한다.

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

[해]

$$I = \iiint_V (r^2 + z^2) rdrd\varphi dz = \iint_R rdrd\varphi \int_r^a (r^2 + z^2) dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rdr \int_r^a (r^2 + z^2) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a rdr \left(r^2 z + \frac{z^3}{3} \right)_{z=r}^{z=a}$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} \left(ar^3 + \frac{a^3 r}{3} - \frac{4}{3} r^4 \right) dr = 2\pi \left(a\frac{r^4}{4} + a^3 \frac{r^2}{6} - \frac{4}{3}\frac{r^5}{5} \right)_0^a$$

$$= \frac{3\pi a^5}{10}$$

3.5 그린 정리, 스토크스 정리, 가우스 정리

3.5.1 그린 정리

평면 내의 폐곡선 L로 둘러 쌓인 영역 D및 그 영역에서 정의된 함수 f에 대해서 함수의 전 미분은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = Pdx + Qdy \qquad (P = \frac{\partial f}{\partial x},\ Q = \frac{\partial f}{\partial y}) \qquad (3.93)$$

이 식은 앞에서 정의한 스칼러 함수 $f(x,y)$의 구배 벡터 ∇f로 정의한 벡터 $F=\nabla f$와 폐곡선 상의 증분 벡터 dr의 스칼러 곱으로 나타낼 수 도 있다. 즉

$$df = F\cdot dr = \nabla f\cdot dr = (\frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j)\cdot(dxi+dyj) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{3.94}$$

그린의 정리(Green theorem)은 평면 내의 폐곡선 L로 둘러 쌓인 영역 D에서의 면적 적분을 폐곡선 L에 따르는 선 적분으로 평가할 수 있다는 것을 나타낸다. 즉

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L F\cdot dr \quad (= \oint_L Pdx + Qdy) \tag{3.95}$$

여기서 선 적분의 방향은 영역 D를 왼쪽으로 두는 반시계 방향으로 한다. 이 그린 정리의 식을 다음 그림 3-29를 이용하여 증명해보자.

좌변의 두 번째 편미분에 대한 적분은 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy &= \int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}dy \\ &= \int_a^b P(x,y)\Big|_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)}dx = \int_a^b P(x,y_2(x))dx - \int_a^b P(x,y_1(x))dx\end{aligned} \tag{3.96}$$

여기서 우변 첫 번째 식과 두 번째 식은 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\int_a^b P(x,y_2(x))dx = -\int_{BMA} P(x,y)dx \tag{3.97}$$

$$-\int_a^b P(x,y_1(x))dx = -\int_{ANB} P(x,y)dx \tag{3.98}$$

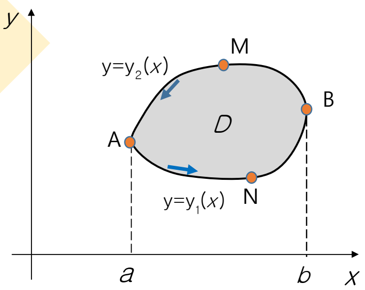


Fig. 3-29 선적분에 대한 그린 정리

따라서

$$
\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int_a^b P(x, y_2(x))dx - \int_a^b P(x, y_1(x))dx \\
&= -\int_{BMA} P(x,y)dx - \int_{ANB} P(x,y)dx = -\oint_{BMANB} P(x,y)dx \\
&= -\oint_L P(x,y)dx
\end{aligned}
\tag{3.99}
$$

마찬가지로 좌변의 첫 번째 편미분에 대한 적분은 다음과 같이 증명할 수 있다.

$$
\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)dy \tag{3.100}
$$

즉,

$$
\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_L P(x,y)dx \quad \rightarrow \quad -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_L P(x,y)dx \tag{3.101}
$$

$$
\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_L Q(x,y)dy \tag{3.102}
$$

따라서 두 식을 합하면 다음의 그린의 정리가 얻어진다.

$$
\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L F \cdot dr \quad \left(= \oint_L Pdx + Qdy \right) \tag{3.103}
$$

그림 3-30에 나타내 것과 같이 영역 D내에 구멍이 있는 경우에 대해서 그린 정리를 적용해보자. 이 경우에 영역을 둘러 쌓고 있는 폐곡선을 L_1 =ANBEFA 과 L_2 =AFEBMA로 구분하고 이들에 의해 분할된 영역을 D_1 과 D_2 라고 하고 각각의 영역에 그린 정리를 적용한다.

$$
\begin{aligned}
\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy &= \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy + \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \oint_{L_1} (Pdx + Qdy) + \oint_{L_2} (Pdx + Qdy)
\end{aligned}
\tag{3.104}
$$

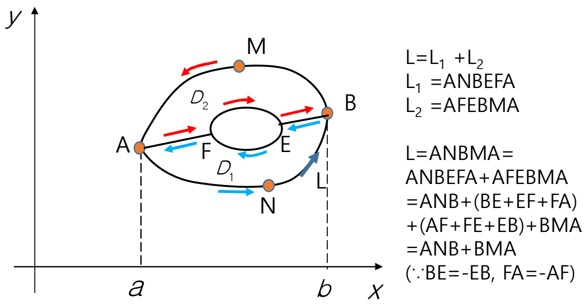


Fig. 3-30 선적분에 대한 그린 정리 유도를 위한 영역의 분할

여기서 폐곡선 L_1, L_2 에 대한 선적분은 다시 다음과 같이 구간 적분으로 나눌 수 있다.

$$\oint_{L_1}(Pdx+Qdy)=\oint_{ANBEFA}(Pdx+Qdy)$$

$$=\int_{ANB}(Pdx+Qdy)+\int_{EB}(Pdx+Qdy)+\int_{EF}(Pdx+Qdy)+\int_{FA}(Pdx+Qdy) \tag{3.105a}$$

$$\oint_{L_2}(Pdx+Qdy)=\oint_{AFEBMA}(Pdx+Qdy)$$

$$=\int_{AF}(Pdx+Qdy)+\int_{FE}(Pdx+Qdy)+\int_{EB}(Pdx+Qdy)+\int_{BMA}(Pdx+Qdy) \tag{3.105b}$$

한편 적분 경로가 반대가 되면 적분값이 마이너스가 되므로 서로 상쇄된다.

$$\int_{EB}(Pdx+Qdy)=-\int_{BE}(Pdx+Qdy)$$
$$\int_{FA}(Pdx+Qdy)=-\int_{AF}(Pdx+Qdy) \tag{3.106}$$

따라서

$$\oint_{L_1}(Pdx+Qdy)+\oint_{L_2}(Pdx+Qdy)$$
$$=\int_{ANB}(Pdx+Qdy)+\int_{BMA}(Pdx+Qdy)+\int_{EF}(Pdx+Qdy)+\int_{FE}(Pdx+Qdy) \tag{3.107}$$

따라서 영역 내에 구멍을 가진 경우에도 그린의 정리가 성립한다는 것을 알 수 있다.

예제 3-14 평면영역 내에서 다음 선 적분을 세 점(0,0), (1,0), (1,3)을 연결하는 곡선 경로 L에 따라 계산하라.

$$I = \oint \sqrt{1+x^3}\,dx + 2xydy$$
$$(P = \sqrt{1+x^3},\ Q = 2xy)$$

[해] 곡선 경로 L에 따른 선 적분의 계산은 그린의 정리에 따라 면적 적분으로 나타낼 수 있다. 따라서

$$I = \oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D 2ydxdy$$
$$(\because \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y,\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0\ )$$
$$I = \iint_D 2ydxdy = \int_0^1 \int_0^{3x} 2ydydx = \int_0^1 \left[y^2\right]_0^{3x} dx = 3$$

3.5.2 스토크스 정리

앞에서 그린의 정리는 평면 영역 내의 면적 적분을 선 적분으로 나타낸 것이다. 이것을 확장하여 아래 그림에서와 같이 공간 내의 열린 곡면(open surface) S에서 면적 적분을 그 면의 경계인 폐곡선 L에 대한 선 적분으로 나타낸 것이 스토크스의 정리(Stokes theorem)이다.

$F = F(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ 가 연속인 곡면 S를 갖는 영역에서 정의되고 1계 연속 편미분을 갖는다고 하면 스토크스 정리는 다음과 같이 나타내진다. 즉,

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot ndS = \oint_L F \cdot dr \qquad (3.108a)$$

여기서

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k \qquad (3.108b)$$

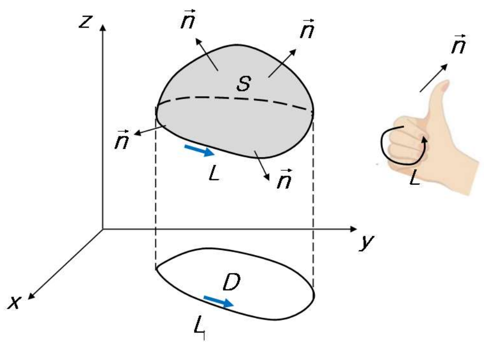


Fig. 3-31 면적적분에 대한 스토크스 정리

이 식을 구체적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\iint_S \left((\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})i+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})j+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})k \right)\cdot ndS=\oint_L (Pdx+Qdy+Rdz) \quad (3.109)$$

$$(i\cdot ndS=dydz,\ \ j\cdot ndS=dzdx,\ \ k\cdot ndS=dxdy)$$

또는

$$\iint_S (\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L (Pdx+Qdy+Rdz) \quad (3.110)$$

여기서 $i,\ j,\ k$ 은 dS 상의 외향 법선 벡터 방향여현이다. $\vec{n}=(i,\ j,\ k)$. 곡면 S의 경계 L을 경계곡선(boundary curve) 라고 부른다.

이 식을 스토크스의 정리 또는 켈빈-스토크스의 정리(Kevin-Stokes theorem)라고 한다. 위 식에서 폐곡선 L의 방향은 곡면에 수직한 단위벡터 방향이 정해져 있을 때 그림에서와 같이 오른나사의 법칙을 적용하여 수직한 벡터방향을 반시계 방향으로 끼고 돌아가는 방향으로 잡는다.

이 스토크스 정리의 식을 증명해보자. 곡면 S의 경계곡선 L은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=f(x(t),y(t)),\quad (a\le t\le b) \quad (3.111)$$

또한 이 식의 시간 미분을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = x'(t)dt,\ dy = \frac{dy}{dt}dt = y'(t)dt,$$
$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t))dt \quad (3.112)$$

따라서 스토크스 정리의 식의 우변 항은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} I &= \oint_L (Pdx + Qdy + Rdz) \\ &= \oint_L \left[Px'(t) + Qy'(t) + R(\frac{\partial f}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}y'(t)) \right] dt \\ &= \oint_L \left[(P + R\frac{\partial f}{\partial x})x'(t) + (Q + R\frac{\partial f}{\partial y})y'(t) \right] dt \\ &= \oint_L (P + R\frac{\partial f}{\partial x})dx + (Q + R\frac{\partial f}{\partial y})dy \\ &= \oint_L P'dx + Q'dy \qquad \{P' = (P + R\frac{\partial f}{\partial x}),\ Q' = (Q + R\frac{\partial f}{\partial y})\} \end{aligned} \quad (3.113)$$

이 식을 앞의 그린 정리의 식 (3.95)에 적용하면

$$I = \oint_L P'dx + Q'dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial y} \right] dxdy$$
$$I = \oint_L (P + R\frac{\partial f}{\partial x})dx + (Q + R\frac{\partial f}{\partial y})dy = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(Q + R\frac{\partial f}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(P + R\frac{\partial f}{\partial x}) \right] dxdy \quad (3.114)$$

이 식은 다시 다음 편미분 관계를 이용하면

$$\frac{\partial}{\partial x}Q = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y,f(x,y)) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}R = \frac{\partial}{\partial x}R(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}R(x,y,f(x,y)) = \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} \quad (3.115)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}Q =, \cdots, \qquad \frac{\partial}{\partial y}R = \cdots$$

여기서 면적적분은

$$I=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(Q+R\frac{\partial f}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial y}(P+R\frac{\partial f}{\partial x})\right]dxdy$$

$$\begin{aligned}[\cdots]&=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+R\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\&\quad-(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}+R\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y})\\&=-\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x}-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{3.116}$$

따라서

$$I=\iint_D\left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x}-\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]dxdy \tag{3.117}$$

그런데 $-\frac{\partial f}{\partial x}dxdy=dydz$, $-\frac{\partial f}{\partial y}dxdy=dzdx$ 이므로 위 식은 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$I=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \tag{3.118}$$

예제 3-15 곡면의 형상이 $z=5-x^2-y^2$ 이다. 이 곡면의 z=1 이상에서 벡터가 $F=z^2i-3xyj+x^3y^2k$ 가 작용하고 있을 때 $\int\int_S \mathrm{Curl}\, F\, dS$ 을 구하라.

[해] z=1에서 곡면에 대한 경계곡선은 $x^2+y^2=4$ 가 되며 이것은 반경이 2인 원이다. 따라서 경계곡선은 t를 매개변수로 하여 다음과 같이 나타내진다.

$$r=2\cos t\ i+2\sin t\ j+k,\quad (0\le t\le 2\pi)$$

스토크스의 정리에 의해 $\int\int_S \mathrm{Curl}\, F\, dS$ 의 계산을 선 적분으로 계산할 수 있다. 즉

$$\iint_S \text{Curl } F\, dS = \iint_S \nabla\times F\, dS = \int_L F\cdot dr = \int_L F\cdot \frac{dr}{dt}dt$$

$$\left(\begin{aligned} &\frac{dr}{dt} = -2\sin t\ i + 2\cos t\ j \\ &F(t) = 1^2 i - 3(2\cos t)(2\sin t)j + (2\cos t)^3(2\sin t)^3 k \\ &= i - 12(\cos t\sin t)j + 64(\cos^3 t\sin^3 t)k \end{aligned}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_L F\cdot\frac{dr}{dt}dt &= \int_L (i - 12(\cos t\sin t)j + 64(\cos^3 t\sin^3 t)k)\cdot(-2\sin t\ i + 2\cos t\ j)dt \\ &= \int_L (-2\sin t\ \ -12\sin t\cos^2 t\ )dt \\ &= [2\cos t + 8\cos^3 t]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

예제 3-16 다음 적분을 스토크스 정리에 의해 계산하라.

$$I = \oint_L (y+2z)dx + (x+2z)dy + (x+2y)dz$$

단, 경계곡선은 $x^2+y^2+z^2=1$ 인 구와 $x+2y+2z=0$ 인 평면과의 교차로 만들어지는 곡선이다.

[해] 다음의 스토크스 정리를 이용하자.

$$\oint_L F\cdot dr = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (\nabla\times F)\cdot n dS$$

여기서 곡면에 외향 법선 벡터 n은

$$n = \frac{i+2j+2k}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$$

또한

$$\begin{aligned} &P = y+2z,\ Q = x+2z,\ Q = x+2y \\ &\nabla\times F = (\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial z})i + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})j + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})k \\ &\quad = (2-2)i + (2-1)j + (1-1)k = j \end{aligned}$$

따라서

$$I = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \oint_L (y+2z)dx + (x+2z)dy + (x+2y)dz$$

$$= \iint_S (\nabla \times F) \cdot ndS = \iint_S j \cdot (\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k)dS = \frac{2}{3}\iint_S dS$$

그런데 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 인 구와 $x + 2y + 2z = 0$ 인 평면과의 교차로 만들어지는 경계곡선은 직경이 1인 원이므로 적분값은 다음과 같다.

$$I = \frac{2}{3}\iint_S dS = \frac{2}{3}\pi \times 1^2 = \frac{2\pi}{3}$$

3.5.3 가우스 발산정리

그린 정리와 스토크스 정리는 선 적분과 면적 적분의 관계를 나타낸다. 체적 적분과 면적 적분의 다음 관계를 가우스의 정리라고 부른다.

$$\iiint_V \nabla \cdot F dV = \oiint_S F \cdot ndS \tag{3.119}$$

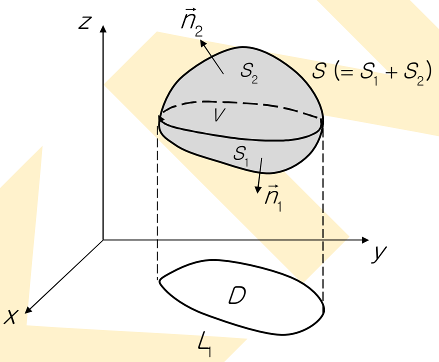


Fig. 3-32 체적적분과 면적적분의 관계를 나타내는 가우스의 발산정리

이 식을 구체적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \tag{3.120}$$

여기서 S는 영역을 둘러 쌓고 있는 경계곡면(boundary surface)이다.

이 가우스의 발산정리는 유체역학, 고체역학, 전자기학, 양자역학 등에서 질량, 운동량, 모멘트, 에너지의 이동을 기술하는 연속방정식(continuity equation)의 유도에 매우

유용하게 사용된다.

예제 3-17 영역 $0 \le x \le 3,\ -2 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\pi$ 으로 둘러 쌓인 영역을 통과하는 유체의 벡터장 $F = 2x^2 i + 2y^2 j + 2z^2 k$ 의 선속(flux)을 가우스의 정리를 이용하여 결정하라. 유체역학에서 선속은 공간에서 유체의 흐름, 또는 단위면적에 대한 유체의 흐름 비율을 나타낸다.

[해] 유체의 선속은 가우스의 발산정리로부터 다음과 같이 나타내진다.

$$\oiint F \cdot ndS = \iiint_V \nabla \cdot FdV = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dV, \quad (P = 2x^2,\ Q = 2y^2,\ R = 2x^2)$$

$$= \int_0^3 \int_{-2}^2 \int_0^{2\pi} (4x + 4y + 4z)dxdydz = \int_{-2}^2 \int_0^{2\pi} (18 + 12y + 12z)dydz$$

$$= \int_0^{2\pi} 24 \times (2z + 3)dz \ = 48\pi \times (2\pi + 3)$$

예제 3-18 벡터장 $F = xyj - \frac{1}{2}y^2 j + zk$ 에 대해서 가우스 정리를 이용하여 다음의 면적 적분을 구하라.

$$I = \oiint_S F \cdot ndS$$

단, 벡터장 F는 다음의 3개의 곡면에 의해 둘러 쌓인 경계곡면에 작용하는 것으로 한다.

$$\begin{cases} z = 3 - 4(x^2 + y^2),\ (1 \le z \le 4) : \text{face 1} \\ x^2 + y^2 = 1,\ (0 \le z \le 1) : \text{face 2} \\ z = 0 : \text{face 3} \end{cases}$$

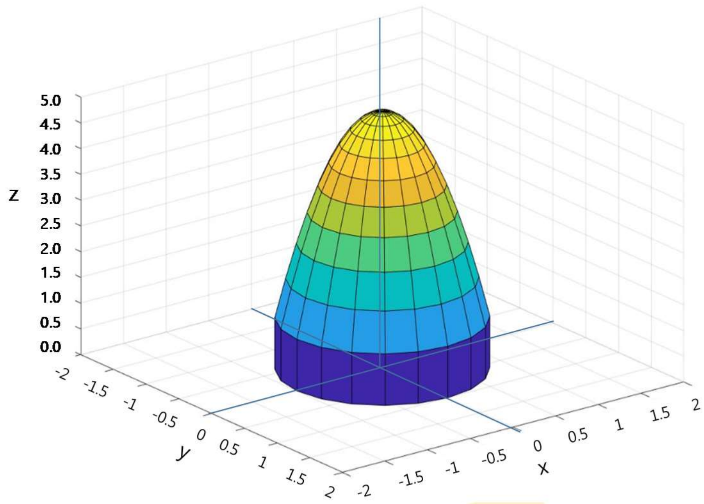


Fig. 3-33 가우스의 발산정리 적용 예

[해] 본 문제의 경계곡면의 형상을 그림 3-33에 나타내었다. 경계곡면은 z=0에 놓여있는 반경이 1인 원과 z=1까지 반경이 1인 실린더 그리고 z=4 까지의 연속적으로 변하는 원의 표면으로 구성되어 있다.

경계영역을 실린더 좌표계로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} 0 \le z \le 4-3r^2 \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

따라서 가우스 정리를 이용하면 면적 적분을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\oiint F \cdot ndS = \iiint_V \nabla \cdot FdV = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV, \quad \left(P = xy,\ Q = -\frac{1}{2}y^2,\ R = z\right)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{4-3r^2}(y-y+1)rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1(4r-3r^3)drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[2r^2-\frac{3}{4}r^4\right]_0^1 d\theta$$

$$= \frac{5}{2}\pi$$

3장 연습문제

[문제 1] Find the unit normal vector at any point P on the next surface. $r = r(u,v) = a\cos v\ i + a\sin v\ j + u\ k$

[답] $n = -\cos v\ i - \sin v\ j$

[문제 2] Determine a, b, c so that the next three vectors are orthogonal.

$A = ai - 2j + 3k,\ B = -2i + bj + k,\ C = i + 2j - ck$

[답] a=1, b=0.5, c=−1

[문제 3] The point O is the origin, and the coordinates of points A, B, and C are (−2, −3,4), (a, 2, −1), (3, a, 2). Determine the value of a where the volume of the parallelepiped produced by OA, OB, and OC is 1.

[답] a=−3 또는 2

[문제 4] Find the unit tangent vector T of the following curve $r = (t - \sin t\cos t)\ i + 2\sin t\ j + \sin^2 t\ k$ and the arc length s from t = 0 to t = 1.

[답] $T = \sin t\ i + \cos t\ j + \sin t\cos t\ k,\ s = 3t - 2$

[문제 5]

[답]

[문제 6] Find the angle between $A'(0)$ and $B'(0)$ for the next two vectors. $A(t) = \sin t\ i + \cos t\ j - e^{-t}k,\ B(t) = (e^{-t} - 1)\ i + e^{2t} j + e^{t} k$

[답] 0

[문제 7] When the surface equation is given by $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$, answer the following questions.

(a) Find the equation of the tangent plane at point P (3,4,5).

(b) Find the normal equation at point P (2,1,4).

[답] (a) $6(x-3) + 8(y-4) - 10(z-5) = 0$ (b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{-8}\ (=t)$

[문제 8] Find the direction derivative $D_u(f)$ for $f(x,y,z) = x^2 + 3x^2 y + zy^3 = 0$ in the $U = i + 2j + 4k$ direction at point P (1,2,3).

[답] $\dfrac{124}{\sqrt{21}}$

[문제 9] Find the following about $\mathbf{r} = xi + yj + zk, \quad r = |\mathbf{r}|$

(a) ∇r (b) $\nabla \cdot \mathbf{r}$ (c) $\nabla \times \mathbf{r}$ (d) $\nabla(\dfrac{1}{r^2})$

[답] (a) $\nabla r = \dfrac{x}{r}i + \dfrac{y}{r}j + \dfrac{z}{r}k$ (b) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ (c) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ (d) $\nabla(\dfrac{1}{r^2}) = \dfrac{2\mathbf{r}}{r^4}$

[문제 10] Find the line integral when the vector field $F = 2yi + xj + \sin^2 xk$ acts along a spiral curve with $r = \cos ti + \sin tj + tk$

[답] 0

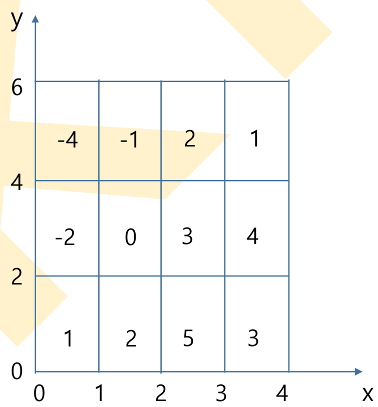
[문제 11] Find the next area integral.

$$I = \iint_R (x+y+z)dS, \quad (2x+2y+z=4,\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z)$$

[답] 8

[문제 12] Find the area integral value for the amount of light entering the pixels of the camera lens as shown in the following figure.

[답] 28



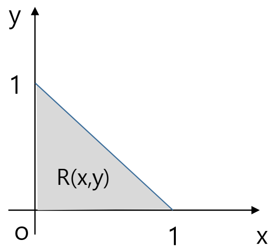
[문제 13] Find the next area integral.

$$I = \iint_R (xy + e^y)dxdy, \quad (3 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 3)$$

[답] $\dfrac{21}{4} + e^2 - e$

[문제 14] Perform area integral on the area R surrounded by the area $x+y\le 1$ and $x\ge 0,\ y\ge 0$. Also, when changing the variable in $u=x-y,\ v=x+y$, indicate the integral area in the u and v planes.

$$I=\iint_D e^{(x-y)/(x+y)}dxdy$$



[답] $I=\frac{1}{4}(e-e^{-1})$.

[문제 15] Calculate the integral in the inner region of the circle with a radius of 1.

$$I=\iint_R \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dxdy$$

[답] $2\pi(\sqrt{2}-1)$

[문제 16] Calculate the integral in the inner region of the hemisphere with radius R.

$$I=\iiint_V (x^2+y^2)dxdydz,\quad (x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0)$$

[답] $\frac{4\pi R^5}{15}$

[문제 17] In the case of a spherical coordinate, the following relation holds.

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\phi\sin\theta,\ z=\rho\cos\theta \qquad (3.91)$$

Find the Jacobian determinant for this spherical coordinate system.

[답] $|J|=\rho^2\sin\phi \qquad (3.92)$

[문제 18] Calculate the next line integral within the plane area. Path L is given by the parabola $y=x^2$ from $(-1,1)$ to $(1,1)$.

$$I = \oint (1+xy^2)dx - x^2 y dy$$

[답] 2

[문제 19] Calculate the next line integral within the plane area. Path L is given by a circle $x^2 + y^2 = 4$.

$$I = \oint x^2 y dx - xy^2 dy$$

[답] -8π

[문제 20] Calculate the next line integral within the plane area. Path L is given by a circle $x^2 + y^2 = 1$.

$$I = \oint \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

[답] 2π

[문제 21] The vector field $F(x,y,z) = yz\ i + zx\ j + xy\ k$ acts on the area where the curved surface $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ is cut by the cylinder $x^2 + y^2 = 1$. Next, find the integral value $I = \int_L F \cdot dr$ and express the equation of the curve obtained by cutting the curved surface with a cylinder.

[답] $r(t) = \cos t\ i + \sin t\ j + \sqrt{3}k \quad (0 \le t \le 2\pi)$, $I = \int_L F \cdot dr = 0$

[문제 22] Calculate the next integral by Stokes' Theorem. However, the boundary curve is a curve created by the intersection of the cylinder of $x^2 + y^2 = a^2$ and the plane of $x + y + z = b$.

$$I = \oint_L y^3 dx - x^3 dy + z^3 dz$$

[답] $-\dfrac{3\pi a^4}{2}$

[문제 23] Calculate the next integral by Stokes' Theorem. However, the boundary curve is a curve created by the intersection of the sphere of $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ and the plane of. $x + y + z = 0$.

$$I = \oint_L ydx + zdy + xdz$$

[답] $-\pi\sqrt{3}a^2$

[문제 24] Calculate the next integral by Stokes' Theorem. However, the boundary curve is a curve created by the intersection of the ellipse of $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ and the plane of $z=1$.

$$I = \oint_L (x+z)dx + (x-y)dy + xdz$$

[답] 6π

[문제 25] Calculate the next integral by Stokes' Theorem. However, the boundary curve is a triangle connecting A (2,0,0), B (0,2,0), and C (0,0,2).

$$I = \oint_L (x-y)dx + (x-z)dy + (y-x)dz$$

[답] 12

[문제 26] Find the flow velocity of the vector field $-1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 4$ of the fluid passing through the area enclosed by area $-1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 4$.

[해] $\frac{135}{2}$

[문제 27] Find the area integral $\oiint_S F \cdot ndS$ for the vector field of the fluid passing through the area enclosed by the surfaces $z = 6 - 2x^2 - 2y^2$ and $z = 0$.

[해] 18π

Johann Carl Friedrich Gauss (1777~1855, 독일) 위대한 수학자 4

“수학의 왕자”라고 불리는 가우스는 독일 브라운슈바이크에서 벽돌 굽는 일을 하는 가난한 가정에서 태어났다. 가우스는 말을 배우기 이전에 수를 먼저 센 수학의 천재로 알려져 있다. 가우스는 일곱 살에 학교에 들어가 산술을 배우는 중 선생님이 1부터 100까지 정수를 모두 더해 보라고 했는데 등차수열의 원리를 알아내고 답을 적었다는 일화는 이미 우리에게 잘 알려져 있다.

가우스는 브라운슈바이크 공작의 지원으로 1792년부터 1795년 사이에 카롤링 학교(지금의 Technische Universität Braunschweig)에서 공부하였고 괴팅겐 대학교로 옮겼다. 여기서 대수학, 해석학, 정수론, 미분기하학, 물리학 등 순수 수학과 응용수학분야에서 뛰어난 기여를 하였다. 가우스는 아르키메데스, 뉴턴과 함께 세계 3대 수학자 중 한 명으로 불린다.

1794년 뉴턴의 Principia 를 입수한 그는 같은 해 최소자승법을 발견하였다. 1796년 가우스는 변의 개수가 페르마 소수인 정다각형은 자와 컴퍼스만으로 작도가 가능하다는 것을 보였다. 특히 정 17각형이 작도 가능하다는 것을 발견하였다. 훗날에 가우스는 이 결과에 너무 기뻐한 나머지 아르키메데스가 묘비에 원기둥에 내접한 구를 새겼고, 야코프 베르누이가 묘비에 로그 나선을 새긴 것과 마찬가지로 자신의 묘비에 십칠각형을 새겨달라고 요청하였다. 그런데 묘비에는 십칠각형을 원과 구별하기 힘들기 때문에, 17개의 점으로 된 별이 대신 새겨졌다. 또한, 가우스는 정수론 영역에서 합동 산술을 발견했고, 1796년에 최초로 이차 상호 법칙을 증명해 보였다. 이 놀라운 일반 법칙은 수학자들이 이차 방정식의 해결 가능성을 결정지을 수 있도록 해주었다. 그리고 1796년에 추측된 소수 정리는 소수들이 정수들 사이에서 어떻게 분포하는지에 대해서 이해할 수 있도록 도와주었다.

가우스가 사망 후 그의 뇌는 보존되었고, Rudolf Wagner가 그의 뇌를 분석하였다. 가우스의 뇌의 무게는 1.492kg, 대뇌의 부분이 219.588cm^{3}이었고, 회백질이 많이 발달되었다는 사실이 발견되어, 20세기 초에 그의 천재성을 설명하는 증거로 제시되었다.

가우스는 완벽주의자이며 대단히 열심히 일하는 학자였다. 아이작 아시모프에 따르면, 어떤 문제와 씨름하던 중, 그의 아내가 아파서 죽어간다는 말을 듣자, "그녀에게 조금만 기다리라고 전해 주시오."라고 했다고 하는 일화가 있다. 가우스는 주로 괴팅겐 왕립 학회지에 여러 회고록 (그의 경험에 대한 보고서)을 발표했다. 그러나 일반적으로 가우스는 논쟁의 여지가 있는 것으로 간주 될 수 있는 것은 출판하기를 꺼려했으며, 그 결과 그의 가장 뛰어난 작품 중 일부는 사망 후에야 발견되었다.

아르키메데스, 아이작 뉴턴과 함께 세계 3 대 수학자 중 한 명으로 불리는 가우스는 수학뿐만 아니라 여러 분야에서 큰 기여를 했다. 특히, 정수론을 수학의 중요한 분야로 만들었다는 평가를 받는다. 가우스는 그의 대표적 저서인 "산술에 관한 연구"(Disquisitiones Arithmeticae)를 21 살이던 1798 년에 완성하였는데, 1801 년에서야 출판되었다.