제 1 장
미분방정식

1.1 미분방정식

어떤 미지의 함수와 그 미분(differential) 또는 도함수(derivative) 간의 관계를 기술한 함수에 관한 방정식을 미분 방정식(differential equation)이라고 한다. 이 미분방정식은 1677 년에 Leibniz 가 Newton 에게 편지로 처음 미분방정식에 대한 수학용어를 제안한 이후 17 세기 후반 부터 자연과학과 사회과학 분야에서 다양한 문제에 적용되고 있다.

수학에 대한 역사서에 따르면 Leibniz(1646−1716) 와 Newton(1642−1727)는 각각 다음과 같은 식을 제안하였고 이들 식이 미분방정식의 시초라고 알려져 있다.

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 \quad : \; Leibniz \tag{1.1a}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dx} = f(x), & \dfrac{dy}{dx} = f(x, y) \\ x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = u & \end{array}\right\} \; : \; Newton \tag{1.1b}$$

상미분방정식(ordinary differential equation, ODE)은 하나의 독립 변수의 함수 하나 이상과 해당 함수의 미분을 포함하는 미분방정식을 말한다. 이에 반해 편미분방정식(partial differential equation, PDF)는 여러 개의 독립변수로 구성된 함수와 그 함수의 편미분으로 구성된 미분방정식이다. 다음은 상미분방정식과 편미분방정식의 예를 나타낸 것이다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 7y = 0, \quad y = f(x) \; : \; ODF \tag{1.1c}$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0, \quad \theta = \phi(x, y) \quad : \; PDF \tag{1.1d}$$

상미분방정식에서는 미분 기호로 “ d ” 를 사용하고, 편미분방정식에서는 미분 기호로

“∂” 기호를 사용한다. 다음에 상미분(ordinary differentiation) 과 편미분(partial differentiation) 의 정의를 나타내었다.

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (= f'(x)\,,\ \frac{d}{dx} f(x)) \tag{1.1e}$$

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\right]_{y=const} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x, y) - \phi(x,y)}{\Delta x} \qquad (= \phi_x(x,y)) \\ \left.\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}\right]_{x=const} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x, y+\Delta y) - \phi(x,y)}{\Delta y} \qquad (= \phi_y(x,y)) \end{aligned}\right\} \tag{1.1f}$$

여기서 상미분 $\frac{df(x)}{dx}$ 는 함수 f 가 하나의 변수 x 만의 함수이고 x 값의 미소 변화 Δx 가 영으로 접근할 때 함수 f 의 변화값 Δf 을 의미하며, 편미분 $\left.\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\right]_{y=const}$ 는 함수 ϕ 가 두개의 변수 x, y 의 함수일 때 y 가 고정된 상태에서 x 값의 변화에 대한 함수 ϕ 의 변화값을 의미한다. 상미분에 대한 기학학적 의미를 아래 그림 1-1 에 나타내었다.

$$f(x) = x^2 + x - 1 \ (= y)$$
$$x \to x + \Delta x$$
$$\begin{aligned} f(x+\Delta x) &= (x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - 1 \\ &= (x^2 + x - 1) + (2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x - 1) \\ &= f(x) + (2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x - 1) \end{aligned}$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x - 1$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (\frac{df}{dx} = f')$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x + 1$$
$$= 2x + 1$$
$$\therefore \frac{df}{dx} = 2x + 1 \ (= f')$$

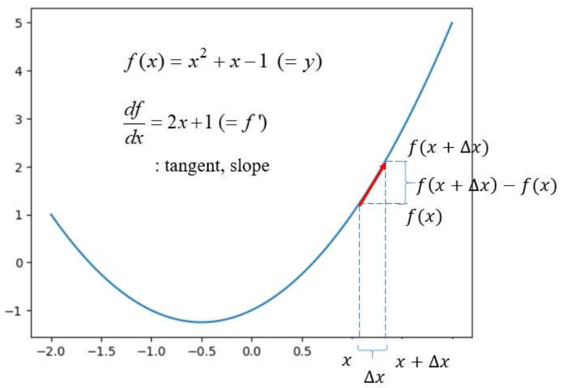


Fig. 1-1 상미분의 기하학적 의미

미분방정식은 통상 상미분방정식, 편미분방정식, 선형미분방정식, 비선형미분방정식, 제차미분방정식, 비제자미분방정식 등으로 구분한다.

1.1.1 다양한 미분방정식 문제

이 장에서는 상미분방정식에 대해서만 다루고 편미분방정식에 대해서는 제 5 장에서 다루기로 한다. 아래에 다양한 문제들에 대한 미분방정식을 나타내었다.

(1) 자유 낙하하는 강체의 운동 방정식 ;

$$F = ma \;\; (= m\frac{d^2y}{dt^2}) = mg \tag{1.2}$$

(2) 객체군(인구) 증가 모델 ;

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad \text{: (Malthus model, exponential growth model)} \tag{1.3a}$$

(r: rate of growth)

$$\frac{dN}{dt} = (r - aN)N = rN(\frac{k-N}{k}) \quad \text{: (Verhulst model, Logistic model)} \tag{1.3b}$$

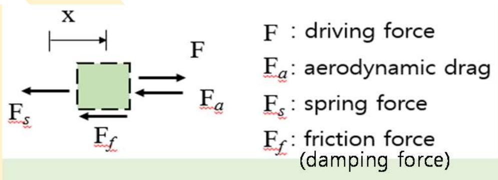
(r : intrinsic growth rate, $k = \frac{r}{a}$, k: saturation value)

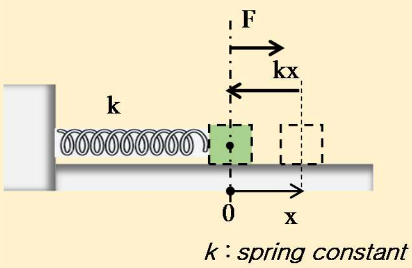
(3) 자유 낙하하는 강체의 운동 방정식 ;

$$ma \;\; (= m\frac{d^2y}{dt^2}) = mg \tag{1.4a}$$

(4) 마찰이 없는 평면 상에서 스프링으로 연결된 물체의 운동(진동) 방정식 :

$$ma \;\; (= m\frac{d^2x}{dt^2}) = -kx, \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \tag{1.4b}$$





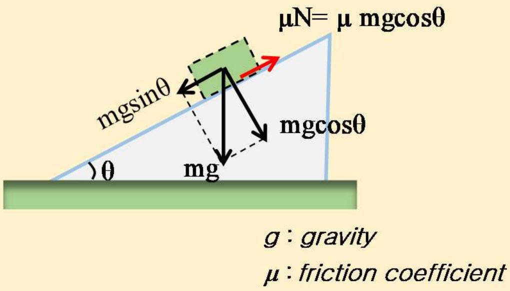
$$ma \;\; (= m\frac{d^2x}{dt^2}) = F - F_s - F_f - F_a$$

$$mx'' + cx' + kx = F(t) \tag{1.4c}$$

$$F_a \approx 0,\; F_s \approx kx,\; F_f \approx cx'(t)$$

Fig. 1-2(a) 스프링-질량 시스템과 운동방정식

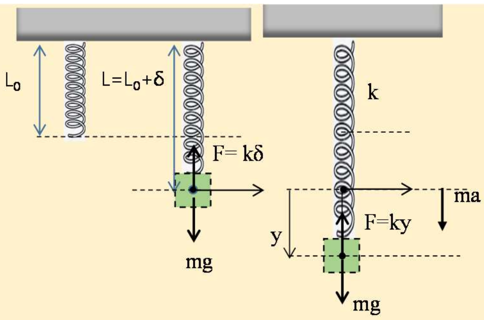
(5) 쿠롬 마찰이 작용하는 경사면에서 낙하하는 물체의 운동 방정식 :



$$ma \;\; (= m\frac{d^2x}{dt^2}) = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta \tag{1.5}$$

Fig. 1-2(b) 경사면에서 낙하하는 물체의 운동방정식

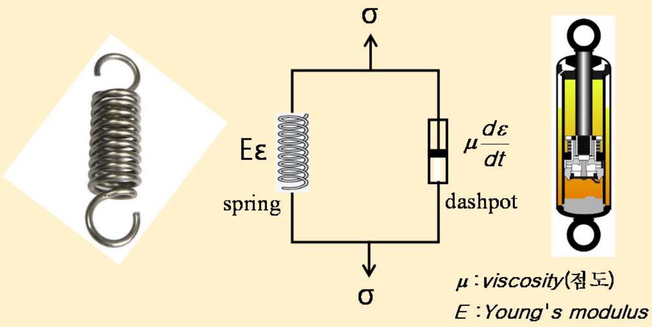
(6) 스프링에 매달려 있는 물체의 진동 방정식 :



$$ma \;\; (= m\frac{d^2y}{dt^2}) = -ky + mg \tag{1.6}$$

Fig. 1-3 수직으로 매달려 있는 물체-스프링 시스템의 평형과 운동

(7) 스프링과 데쉬포트(dashpot)가 병렬로 연결된 시스템에 일정한 응력 σ 가 작용하는 경우의 크립(creep) 방정식 :



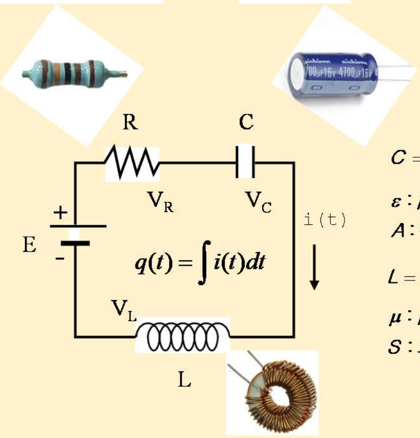
$$\sigma = E\varepsilon + \mu\frac{d\varepsilon}{dt} \quad (=\sigma_o)$$

(σ : stress, ε : strain)

(1.7)

Fig. 1-4 스프링과 데쉬포트가 병렬로 연결된 시스템

(8) 리지스턴스가 R 인 저항(resistor, 리지스터), 커패시턴스가 C 인 축전기 (capacitor, 커패시터), 인덕턴스가 L 인 유도자(inductor, 인덕터)가 직렬로 연결된 R-C-L 전기회로에서 직류전압 E 가 작용할 때의 전하량(electric charge) 방정식 :



$C = \dfrac{\varepsilon A}{d}$ [F]

ε : permittivity(유전율)

A : 판면적, d:거리

$L = \mu S n^2$ [H]

μ : permeability(투자율)

S : 코일 단면적, n:코일 권수

$$E = V_R + V_C + V_L$$
$$= RI + \frac{1}{C}q(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$
$$= R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) + L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

(1.8)

$q(t)$: electric charge,

$I = \dfrac{dq(t)}{dt}$: electric current,

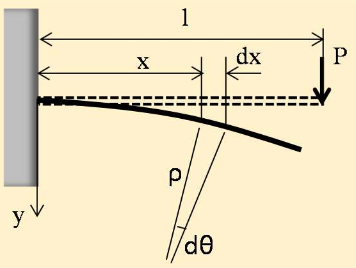
Fig. 1-5 저항-축전기-유도자가 직렬로 연결된 R-C-L 회로

㈜ 축전기는 자주 콘덴서(condenser)로 불리며, 직류 전압을 가하면 각 전극에 전기(전하)를 축적(저장)하는 역할 과 교류에서는 직류를 차단하고 교류 성분을 통과시키는 성질을 갖는다.

한편 인덕터는 자주 코일(coil)로 불린다. 유도자는 전류의 변화량에 비례해서 전압을 유도하는 코일부품으로 회로에 전류가 변하면 그것을 방해하는 방향으로 전압(역기전력, 유도기전력)을 유도한다. 이 유도자는 전류변화에 저항하여 전류의 급격한 변화를 억제하는 역할을 한다.

이 R-C-L 회로는 저항-축전기-코일 회로, R-L-C 회로는 저항-코일-축전기 회로라고 불린다.

(9) 한쪽 단이 고정된 사각단면 외팔보의 다른 끝 단에 작용하는 하중에 의한 보의 굽힘변형 방정식 :



$$\frac{1}{\rho} \cong \frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = P(l-x)$$

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} by^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

: area moment of inertia

Fig. 1-6 외팔보의 굽힘변형 방정식

(1.9)

(10) 불안정한 방사성 동위원소의 원자핵의 붕괴(radioactive decay)에 대한 미분방정식 ;

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\lambda N \qquad (1.10)$$

N : atom number, λ : decay rate

(11) 속도에 비례하는 공기저항을 받는 비 방울에 대한 미분방정식 ;

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \quad (v < 0.1m/s)$$
$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \quad (v > 1m/s) \tag{1.11}$$

(12) Slow−Swan 경제 성장모형(자본축척 모형) 미분방정식 ;

$$Y(t) = F(K(t), A(t), L(t))$$
$$e.g. \quad Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}, \; Y = (AK)^{\alpha}L^{1-\alpha}, \quad Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$
$$\frac{dK(t)}{dt} = sY(t) - \delta K(t) \tag{1.12a}$$

(Capital change rate = Investment rate - Depreciation rate)

$$y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = \frac{K(t)^{\alpha}}{(A(t)L(t))^{\alpha}} = k(t)^{\alpha} \tag{1.12b}$$

$$\frac{dk(t)}{dt} = sk(t)^{\alpha} - (n+g+\delta)k(t) \quad \text{: Capital intensity} \tag{1.12c}$$

(Captial intensity rate=Actual investment per unit of effective labour
-Break-even investment)

$Y(t)$: Total production (e.g. GDP), $K(t)$: Capital

$A(t)$: Labor augmenting technology

$L(t)$: Labor, $A(t)L(t)$: Effective labor

s: Saved share, δ: Depreciation rate $(0 < s, \delta < 1)$

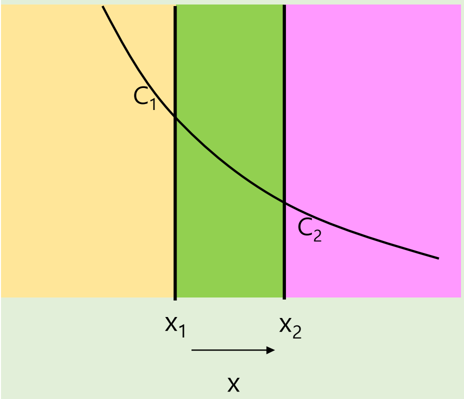
(13) 정상상태에서 확산(물질전달)에 대한 픽스의 제 1 미분방정식(Fick’s first law of diffusion for steady state) ;

$$J_x = -D\frac{\partial C}{\partial x}, \quad C = C(x) \tag{1.13a}$$

J_x : diffusion flux(확산유량 or mass flux) (=amount of substance/(area × time))

D: diffusion coefficient (or diffusivity) (=area/time)

C: concentraction (=mol/cm^2)



$$J = -D\frac{\partial C}{\partial x}, \qquad \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1}$$

$$D = D_0 \exp(-\frac{Q}{RT})$$

J: Flux(mol/cm$^2 \cdot$s or kg/m$^2 \cdot$s)
C: Concentration (kg/m^3)
D: Diffusion coefficient(m^2/s)
D_o : Pre-exponential(m^2/s)
R: Gas constant, 8.314(J/mol$\cdot$K)
Q: Activation energy(J/mol)
T: Absolute temperature(K)

Fig. 1-8 정상상태의 물질확산 방정식

(14) 시간에 따른 확산에 대한 픽스의 제 2 미분방정식(Fick' s second law of diffusion for nonsteady state);

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial J_x}{\partial x} \quad \left(i.e, \quad \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(-D\frac{\partial C}{\partial x}) = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \right), \quad C = C(x,t) \tag{1.13b}$$

3 차원 공간에서는

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 C \tag{1.13c}$$

평형상태(equilibrium state)에서는 $\frac{\partial C}{\partial t} = 0$ 이므로 식 (1.13b)는 식 (1.13a)가 된다.

(16) 포식자-먹이모델(predator-prey model);

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y = -y(\gamma - \delta x) \end{aligned} \tag{1.13d}$$

여기서 $x(t)$ 는 시간 t (time)에서의 먹이(prey)의 양을 $y(t)$ 는 포식자(predator)의 수를 나타낸다. 이 식은 Lotka-Volterra 방정식이라고도 부른다

이 미분방정식들을 간단히 나타내기 위해서 미분 표시로 프라임 기호(prime notation) y' 또는 도트 기호(dot notation) $\dot{y}$ 를 자주 사용한다. 즉,

$$y' = \frac{dy}{dx},\ \ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ \ y''' = \frac{d^3y}{dx^3},\cdots \tag{1.14a}$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt},\ \ \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2},\ \ \dddot{y} = \frac{d^3y}{dt^3},\cdots \tag{1.14b}$$

독립 변수가 시간 t 인 경우에는 주로 도트(dot) 기호를 사용하지만 일반적으로는 프라임 기호를 자주 사용한다. 이하에는 미분을 나타낼 때는 프라임 기호를 사용하는 것으로 하였다. 한편 식 (1.1d)와 같은 편미분방정식의 편도함수들은 독립변수들을 아래첨자로 표기하는 아래첨자 표기법(subscript notation)을 종종 이용한다. 즉, $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$.

미분방정식에 포함된 도함수 중에서 최고 도함수를 미분방정식의 계(order)라고 하며, 최고 도함수의 거듭제곱 수를 미분방정식의 차수(degree)라고 한다. 예를 들어 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$ 는 3 계 1 차의 미분방정식이고, $(y''')^2 + x^2y' = 0$ 는 3 계 2 차의 미분방정식이다.

일반적으로 한 개의 종속변수를 가지는 n 계 미분방정식은 다음과 같이 나타내진다.

$$f(x,\ y,\ y', y'', \cdots,\ y^{(n)}) = 0 \tag{1.14c}$$

여기서 $y' = \dfrac{dy}{dx},\ y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2},\ y^{(n)} = \dfrac{d^ny}{dx^n}$ 을 나타낸다.

이 식은 실용적으로 최고계 도함수를 나머지 변수들로 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$y^{(n)} (= \frac{d^ny}{dx^n}) = F(x,\ y,\ y', y'', \cdots) \tag{1.14d}$$

미분방정식은 만일 종속변수 또는 그들의 도함수값들이 독립변수의 초기값에 대해서 알려져 있으면 초기값 문제(initial value problem, IVP)라고 하고, 이들이 한 점 이상의 경계점들에서 알려져 있으면 경계값 문제 (boundary value problem, VBP)라고 한다.

$$y'' + y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0.16,\ \ y'(0) = 0 \qquad : \mathrm{IVP}$$
$$y'' + y' = 0, \quad y(0) = 0,\ \ y'(\pi) = 0 \qquad : \mathrm{BVP}$$

1.1.2 미분방정식의 해(일반해와 특수해)

미분방정식으로부터 해를 구하는 방법을 설명하기 위해서 간단한 경우로 곡선 $y = f(x)$ 가 점 (2,2)를 통과하고 임의 점에서의 기울기가 $4x$ 인 곡선의 방정식을 구해보자. 이 경우에 곡선에 대한 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = 4x$$

이 식을 적분하면 다음과 같이 된다.

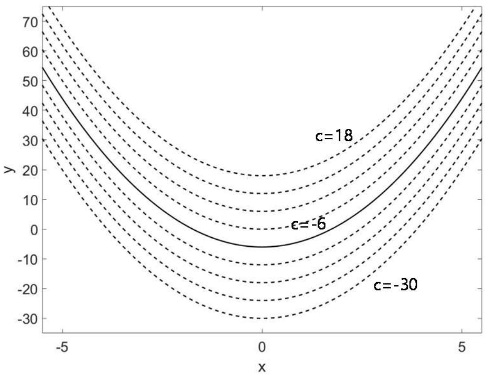
$$\int dy = \int 4x dx \rightarrow y = 2x^2 + C$$

여기서 C 는 임의의 값을 갖는 적분상수(integration constant)이다. $x = 2$ 에서 $y = 2$ 인 경계조건을 이 식에 대입하면 $C = -6$ 이 얻어진다. 따라서 미분방정식의 해는 다음과 같이 된다.

$$y = 2x^2 - 6$$

이 해가 미분방정식을 만족시키는지를 확인하기 위해서는 $y = 2x^2 - 6$ 를 x 에 대해서 미분해보면 된다. 즉, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^2 - 6) = 4x$. 따라서 해 $y = 2x^2 - 6$ 는 미분방정식이 만족한다는 것을 알 수 있다. 물론 적분상수를 포함하고 있는 해 $y = 2x^2 + C$ 에 대한 미분방정식도 동일하다. 위 식에서 C 와 같이 임의의 적분상수를 포함하고 있는 해를 일반해(general solution)라고 하고 이 일반해에 경계조건 또는 초기조건을 적용하여 적분상수 C 를 특정한 해, 즉 해에 상수가 없는 해를 특수해(particular solution)라고 한다. 임의의 적분상수 C 를 포함하고 있는 식 $y = 2x^2 + C$ 는 적분상수가 하나이며 이 경우에 대한 그래프를 그려보면 그림 1-9 와 같이 상수 C 의 값에 따라서 다양한 곡선군(family of curves 또는 곡선족)을 그릴 수 있다.

그림 1-10 은 미분방정식 $\frac{dy}{dx} = 4x$ 의 기울기 $\frac{dy}{dx}$ 를 나타낸 것이다. 이렇게 기울기를 짧은 선분으로 2 차원 평면에 나타낸 것을 방향장(direction field) 또는 기울기장(slope field)이라고 부른다.



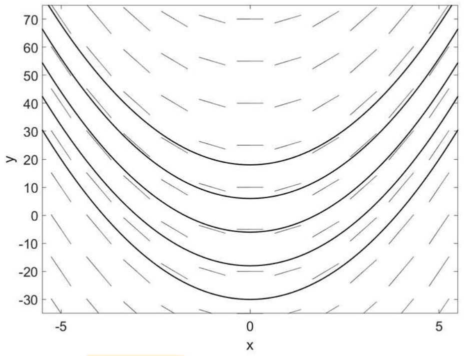


Fig. 1-9 미분방정식의 일반해와 곡선군   Fig. 1-10 미분방정식의 해와 방향장

미분방정식의 해가 다음과 같이 하나의 적분상수를 포함하는 식으로 나타내질 때 미분방정식을 구해보자.

$$3x^2 y + x\cos(xy) + e^x \ln y = C$$

양변을 x 에 관해서 미분을 하고

$$\frac{d}{dx}(3x^2 y) + \frac{d}{dx}\{x\cos(xy)\} + \frac{d}{dx}(e^x \ln y) = \frac{d}{dx}C$$

여기서 전미분(total differential) $d(uv) = udv + vdu$ 인 관계를 이용하면

$$y\frac{d}{dx}(3x^2) + 3x^2\frac{d}{dx}(y) + \cos(xy)\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}\{\cos(xy)\}$$
$$+\ln y\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(\ln y) = 0$$

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ 로 하고 이 식을 간단히 하면

$$6xy + 3x^2 y' + \cos(xy) + x\frac{d}{dx}\{\cos(xy)\} + e^x \ln y + e^x\frac{d}{dx}(\ln y) = 0$$

여기서 다음의 연쇄법칙(chain rule)을 이용하면

$$y = f(t),\ \ t = g(x),\ \ y = f(g(x))$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = f'(t)g'(x) \tag{1.14e}$$

따라서

$$\frac{d}{dx}\{\cos(xy)\} = \frac{d\{\cos(xy)\}}{d(xy)}\frac{d}{dx}(xy) = -\sin(xy)[y\frac{dx}{dx} + x\frac{dy}{dx}]$$
$$= -\sin(xy)[y + xy']$$

따라서 미분방정식은 다음과 같이 나타내진다.

$$6xy + 3x^2y' + \cos(xy) - x\sin(xy)(y + xy') + e^x \ln y + e^x(\frac{1}{y}y) = 0$$
$$6xy + \cos(xy) - xy\sin(xy) + e^x \ln y + [3x^2y' - x^2\sin(xy) + e^x y^{-1}\ ]y' = 0$$
$$(y' = \frac{dy}{dx})$$

또는 다음과 같이 나타내진다.

$$[-6xy - \cos(xy) + xy\sin(xy) - e^x \ln y]dx = [3x^2y' - x^2\sin(xy) + e^x y^{-1}\ ]dy$$

예제 1-1 직선 경로를 10m/sec 로 이동하고 있는 물체에 어느 순간에 -2m/sec^2 의 제동 가속도를 작동시킬 때 물체가 멈출 때까지의 시간과 거리를 구하라.

[해] 물체가 제동을 시작한 후 t (sec)에서 s (m)를 이동하였다고 가정한다. 이때 물체의 미분방정식은 다음과 같이 나타내진다.

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -2$$

이 식을 두 번 적분하면 속도 v 와 거리 s 에 대한 일반해를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{ds}{dt}(=v) = -2t + C_1 \ \rightarrow\ s = -t^2 + C_1t + C_2$$

여기서 C_1, C_2 는 임의의 값을 갖는 적분상수들이다. 첫 번째 식에 $t = 0$ 에서 $v = 10$ 조건을 대입하면 $C_1 = 10$ 을 얻는다. 또한 두 번째 식에 $t = 0$ 에서 $s = 0$ 조건을 대입하면 $C_2 = 0$ 을 얻는다. 따라서 속도 v 및 거리 s 에 대한 미분방정식의 해는 다음과 같이 된다.

$$v = -2t + 10,\ s = -t^2 + 10t$$

물체가 완전히 멈추는 조건은 물체의 속도가 영이라는 의미이다.

따라서 위 식에 $v = 0$ 를 대입하면 물체가 멈출 때까지 걸리는 시간을 구할 수 있다.

$$t = \frac{10}{2} = 5(\text{sec})$$

이 값을 거리의 식에 대입하면 제동거리를 구할 수 있다.

$$s = -5^2 + 10 \times 5 = 25(m)$$

이 문제에서 $s = -t^2 + C_1 t + C_2$ 가 주어진 미분방정식의 일반해란 것을 증명하기 위해서는 이 함수를 미분방정식에 대입하여 미분방정식이 만족한다는 것을 보이면 된다. 즉

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(-t^2 + C_1 t + C_2) = -2$$

이하에 다양한 형태의 미분방정식을 소개하고 이들 미분방정식을 풀기 위한 방법들을 소개한다.

1.2 1 계 미분방정식

1 계 미분방정식의 해를 구하는 것은 미분방정식을 푸는 기초이다. 1 계 미분방정식의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$f(x, y, y') = 0 \qquad (1.15a)$$

또는

$$y' = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1.15b)$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (1.16)$$

x 를 독립변수로, y 를 종속변수로 간주하고 $Q(x, y) \neq 0$ 인 경우에는 위 식은 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \qquad (1.17)$$

이하에 1 계 미분방정식의 해를 구하는 대표적인 방법에 대해서 설명한다.

1.2.1 변수분리 미분방정식

일반적으로 1 계 미분방정식 $y' = f(x, y)$ 은 다음과 같이

$$p(y)dy = q(x)dx \qquad (1.18)$$

한 쪽에 x 와 dx 만을 포함하고 다른 쪽에는 y 와 dy 만을 포함하는 함수로 분리하여 나타낼 수 있다. 이 식의 양변을 적분하면 적분상수를 갖는 해를 구할 수 있다. 즉

$$\int p(y)dy = \int q(x)dx \ \rightarrow \ P(y) = Q(x) + C \qquad (1.19)$$

이 방법을 변수분리 방법(variable separable method)이라고 한다. 이 변수분리 방법이 미분방정식을 푸는데 가장 기본적인 해법이다. 학생들은 미분방정식을 접하면 먼저 변수분리가 가능한지를 파악하길 바란다.

예제 1-2 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y' = 2xy$$

[해] 이 미분방정식을 변수분리 형태로 나타내면.

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

따라서 양변을 적분하면 해가 구해진다.

$$\int \frac{1}{y}dy = \int 2xdx \ \rightarrow \ \ln y = x^2 + C_1$$

$$\therefore y = e^{x^2 + C_1} = e^{x^2}e^{C_1} = Ce^{x^2}$$

예제 1-3 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'(=\frac{dy}{dx}) = x\sqrt{y-1}$$

[해] 이 미분방정식을 변수분리 형태로 나타내면.

$$\frac{1}{\sqrt{y-1}}dy = xdx$$

따라서 양변을 적분하면 해가 구해진다.

$$\int \frac{1}{\sqrt{y-1}}dy = \int xdx \ \rightarrow \ 2\sqrt{y-1} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\therefore y = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{C}{2})^2 + 1$$

이 해를 $G(x,y,C) = (\frac{1}{4}x^2 + \frac{C}{2})^2 + 1 - y = 0$ 로 나타내고 적분상수 C 에 대해서 미분하여 영으로 두면 $\frac{\partial G}{\partial C} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{C}{2} = 0$, 따라서 $C = -\frac{1}{4}x^2$ 가 된다. 두 식에서 C 를 제거하면 $G(x,y,C) = 1 - y = 0$, 즉 $y = 1$ 이 된다. 이 식이 곡선군 $G(x,y,C)$ 의

포락선(envelope)이다. 여기서 포락선이란 어떤 단일 매개변수에 따라 정의된 무한개의 곡선이 있을 때 그 곡선군의 모든 곡선에 접하는 곡선을 말한다. 마찬가지로 2 차원 곡면군 $G(x,y,C)=0$ 에 대해서 포락면은 $G(x,y,z,C)=\dfrac{\partial G(x,y,z,C)}{\partial C}=0$ 로부터 정의할 수 있다.

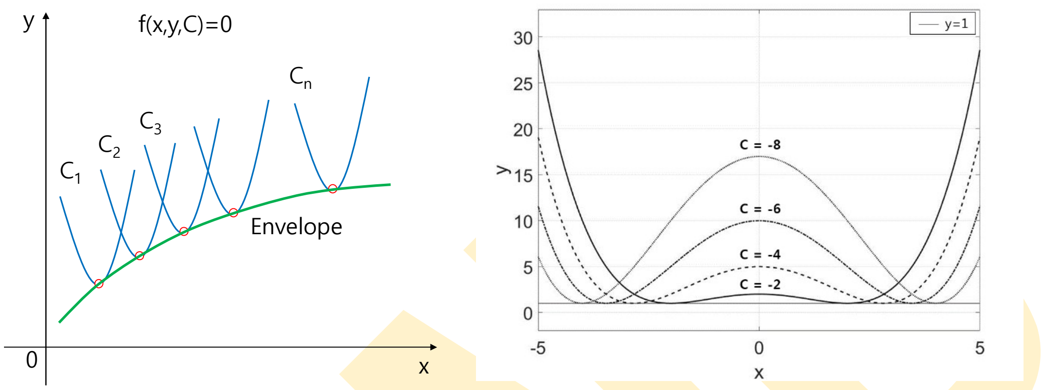


Fig. 1-11 미분방정식의 일반해와 포락선

예제 1-5 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y' = 1 + x + y^2 + xy^2$$

[해] 이 미분방정식을 다시 정리하여 변수분리 형태로 나타내면.

$$y' = (1+x)(1+y^2) \;\rightarrow\; \frac{1}{1+y^2}dy = (1+x)dx$$

따라서 양변을 적분하면 해가 구해진다.

$$\int \frac{1}{1+y^2}dy = \int (1+x)dx \;\rightarrow\; \arctan y = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$\therefore y = \tan(\frac{1}{2}x^2 + x + C)$$

예제 1-6 식 (1.3b)에 나타낸 버허스트가 고안한 인구증가 모델에 대한 해를 구하라.

$$\frac{dN(t)}{dt} = (r - aN)N, \qquad N(0) = N_0 \tag{1.20a}$$

이 식에서 $N(t)$는 주어진 종의 인구수이다. r은 내적 증가율로 불리며 그 생물이 도달할 수 있는 최대 증가율이다. 또한 a는 한 개체의 증가에 따라 증감율이 감소하는 비율을 나타낸다.

[해] 변수분리하여 해를 구하면

$$\int \frac{dN}{(r-aN)N} = \int dt \quad \rightarrow \int [-\frac{1}{r}\frac{1}{N-\frac{r}{a}} + \frac{1}{r}\frac{1}{N}]\, dN = \int dt \qquad (1.20b)$$

양변을 적분하면

$$-\frac{1}{r}\ln\left|N-\frac{r}{a}\right| + \frac{1}{r}\ln N = t + C \quad \rightarrow \quad \left|\frac{N}{N-(r/a)}\right|^{1/a} = e^{t+C} \qquad (1.20c)$$

따라서

$$\frac{N}{N-(r/a)} = Ae^{rt} \qquad (1\text{−}20d)$$

이 식에 초기조건, $N(0) = N_0$, 을 대입하여 풀면 $A = \dfrac{N_0}{N_0-(r/a)}$ 이므로 인구수 $N(t)$는 다음과 같이 나타내진다.

$$N(t) = \frac{rN}{(r-aN_0)e^{-rt} + aN_0} \qquad (1.20e)$$

그림 12 는 멜세스 인구증가모델 (1.3a) 과 버허스트의 인구증가모델 (1.3b)을 비교한 것이다. 멜세스 모델은 시간에 따라 인구수가 기하급수적으로 증가하지만 버허스트 모델은 인구수가 초기에는 급격히 증가하다가 점차 일정한 값으로 수렴하는 시그모이드 곡선의 형태를 보이는 것을 알 수 있다.

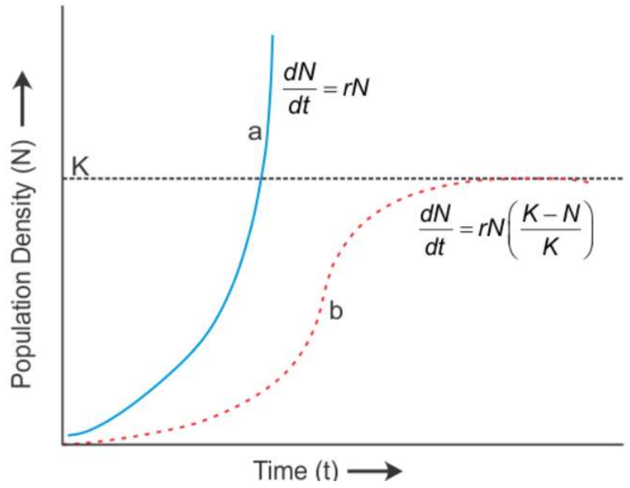


Fig. 1-12 멜서스의 인구증가 모델과 버허스트의 인구증가 모델

예제 1-7 식 (1.11)의 첫 번째 식과 같이 빗방울이 속도에 비례하는 공기 저항을 받으면서 낙하하는 경우에 빗방울의 종단속도(terminal speed)를 구하고, 이때의 위치를 구하라.

[해] 식 (1.11)에 제시된 미분방정식을 변수분리하여 해를 구한다. 즉

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{k}{m}v=-\frac{k}{m}(v-\frac{mg}{k}),\quad (k>0) \tag{1.20f}$$

여기서 $v-\frac{mg}{k}=u$ 라고 하면 $\frac{dv}{dt}=\frac{du}{dt}$ 이므로 위 식은 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{du}{dt}=-\frac{k}{m}u \tag{1.20g}$$

이 식을 적분하면

$$\begin{aligned}&\frac{du}{u}=-\frac{k}{m}dt \;\rightarrow\; \int\frac{du}{u}=-\frac{k}{m}\int dt\\ &\ln u=-\frac{k}{m}t+C\end{aligned} \tag{1.20h}$$

따라서

$$u = Ce^{-\frac{k}{m}t}$$
$$\therefore v = u + \frac{mg}{k} = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \tag{1.20i}$$

시간 t=0 일 때는 v(t=0)=0 이므로 $C = -\frac{mg}{k}$ 이다. 따라서 빗방울의 낙하속도는 다음과 같이 나타내진다.

$$v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{mt}{k}}) \tag{1.20j}$$

시간이 충분히 지나서 t 가 무한대(∞) 가 되면

$$v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{mt}{k}})_{t\to\infty} \quad \rightarrow \quad v(t=\infty) = \frac{mg}{k} \tag{1.20k}$$

빗방울의 속도는 일정한 값 mg/k 에 근접하고 이 값을 넘어설 수는 없다. 이 속도를 종단속도라고 부른다. 이 종단속도에 도달할 때까지 빗방울이 낙하한 거리는 빗방울의 속도를 적분하는 것에 의해 구해진다. 즉

$$y = \int v(t) = \int \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{mt}{k}})dt$$
$$= \frac{mg}{k}\left[t - (-\frac{m}{k})e^{-\frac{mt}{k}}\right] + C = \frac{mg}{k}t + (\frac{m}{k})^2 ge^{-\frac{mt}{k}} + C \tag{1.20l}$$

t=0 일 때 y(0)=0 이므로 $C = -(\frac{m}{k})^2 g$ 이다. 따라서 낙하한 거리는 다음과 같이 나타내진다.

$$y = \frac{mg}{k}t + (\frac{m}{k})^2 g(e^{-\frac{mt}{k}} - 1) \tag{1.20m}$$

예제 1-8 식 (1.13a)의 확산 방정식을 다음과 같은 반경이 R 인 구형 알약(pill)에 대해서 적용하여 다음 관계가 성립하는 것을 보여라.

$$\frac{C - C_\infty}{C_R - C_\infty} = \frac{R}{r} \tag{1.20n}$$

여기서 C_R 은 알약 표면의 농도, C_∞ 는 알약으로부터 멀리 떨어진 거리에서의 농도이다.

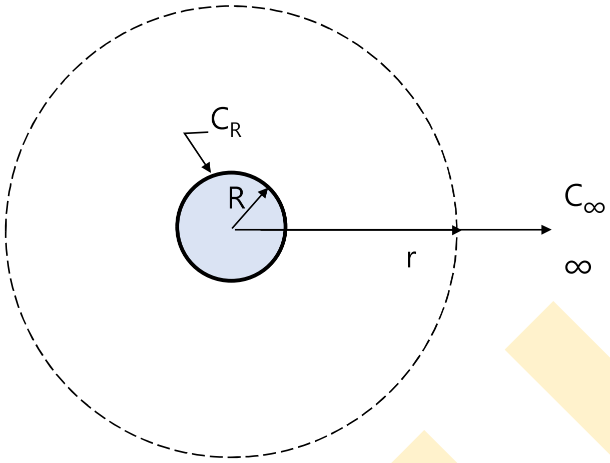


Fig. 1-13 구형 알약 주위의 약 효과의 확산

[해] 식 (1.13a)로부터 단위 시간당 유출되는 물체의 질량(mass flow rate) $J_x(=\frac{m}{At}=\frac{\phi_m}{A})$ 은

$$\phi_m = D4\pi r^2\left(-\frac{dC}{dr}\right) \tag{1.20o}$$

여기서 m은 질량(mass), A는 알약의 표면적이다. 따라서
양변을 적분하면

$$-\int dC = \frac{\phi_m}{4\pi D}\int\frac{1}{r^2}dr \quad \rightarrow \quad C = \frac{\phi_m}{4\pi D}\frac{1}{r} + I.C \tag{1.20p}$$

여기서 I.C는 적분 상수이다. 이 적분 상수는 $r=\infty$에서 $C=C_\infty$ 조건을 적용하여 구한다.
즉, $I.C = C_\infty$. 따라서

$$C - C_\infty = \frac{\phi_m}{4\pi D}\frac{1}{r} \tag{1.20q}$$

이 식에 알약의 표면

$$-dC = \frac{\phi_m}{4\pi D}\frac{1}{r^2}dr \tag{1.20r}$$

$r=R$에서 $C=C_R$ 조건을 적용하면

$$C_R - C_\infty = \frac{\phi_m}{4\pi D}\frac{1}{R} \tag{1.20s}$$

식 (1.20q)와 식 (1.20s)의 두 식으로부터 식 (1.20n)의 관계가 얻어진다.

예제 1-9 고온에서 탄소를 재료의 표면에 확산시켜 표면 경도와 마모 저항성을 높이는 공정인 침탄처리(carburizing)을 통해 탄소를 확산시켜 티타늄을 경화(hardening)시키려고 한다. 티타늄 슬래브 표면의 1mm 에서 탄소 농도는 $0.68kg/m^3$ 이고 3mm 에서 농도는 $0.25kg/m^3$ 이다. 침탄 환경의 온도는 섭씨 925 도이고 탄소가 이 2mm 두께 영역으로 들어가는 확산유량은 $1.27kg/m^2s$ 이다. 이 침탄처리에서 탄소 확산 계수를 구하라.

[해] 식 (1.13a)로부터

$$J = -D\frac{\partial C}{\partial x} = -D\frac{\Delta C}{\Delta x} \tag{1.20t}$$

따라서

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{(0.68-0.25)}{(0.001-0.003)} = -215kg/m^4$$
$$1.27\times10^{-9}kg/m^2s = -D\times(-215kg/m^4)$$
$$\therefore D = 5.91\times10^{-12}m^2/s$$

농도분석은 보통 EPMA(Electron Probe Micro Analyzer)로 측정한다.

예제 1-10 비교적 저온에서 수행하는 질화처리(nitriding) 공정에서 2.5mm 두께의 강판의 양쪽이 900°C 에서 질소 분위기에 놓여있으며 정상 상태의 확산 조건이 얻어지도록 하였다. 이 온도에서 강철 내의 질소 확산 계수는 $1.2\times10^{-10}m^2/s$ 이고, 확산 유량은 $1.0\times10^{-7}kg/m^2s$ 이었다. 또한 고압 표면에서의 강 철에서의 질소 농도는 $2kg/m^3$ 이다. 이 고압측에서 질소 농도가 0.5 가 되는 위치를 구하라. 단, 선형 농도 프로파일을 가정한다.

[해] 식 (1.20t)로부터

$$J = -D\frac{dC}{dx} = -D\frac{\Delta C}{\Delta x} = -D\frac{C_x - C_0}{x-0}$$

따라서

$$x = -D\frac{C_x - C_0}{J} = -1.2\times10^{-10}\ m^2/s\frac{(2-0.5)\ kg/m^3}{1.0\times10^{-7}\ kg/m^2 s} = 0.0018m$$

따라서 질소 농도가 0.5 가 되는 위치는 $1.8mm$ 이다.

그림 14 에 질화처리의 개념과 SCM420 강으로 만들어진 헤리컬 기어의 질화처리에 의한 표면 경도 향상 효과를 해석한 결과를 나타내었다.

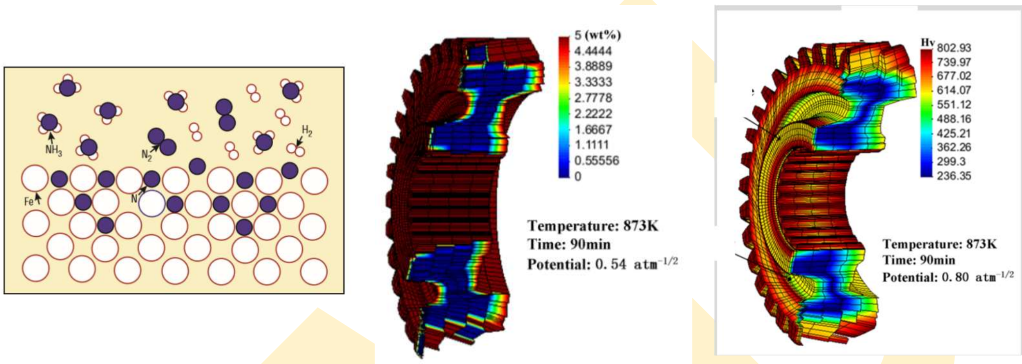


Fig. 1-14 질화처리의 개념과 SCM420 강으로 만들어진 Herical gear 의 질화처리에 의한 표면 경도 향상 해석(COSMAP SW 이용)

예제 1-11 질화처리 공정에서 가스 상태에 있는 질소가 온도 675°C 에서 순철 안으로 확산된다. 만일 표면의 질소 농도 C_s 가 0.2wt%으로 일정하게 유지된다면(constant surface concentration) 25 시간 후에 표면으로부터 2mm 위치에서의 질소농도 C_x 는 얼마인가? 단 철내에서의 질소의 확산계수 D 는 $1.9\times10^{-11} m^2/s$ 이다. 단, 비정상상태에 대한 다음 식을 이용하라

$$\frac{C_x - C_0}{C_s - C_0} = 1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \tag{1.20u}$$

여기서 $erf(z)$ 은 $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-z^2)dz$ 로 정의되는 오차함수(error function)이다. 식 (1.20u)의 유도는 이 장의 말미에 첨부하였다.

[해] 순철 내의 초기 질소 농도는 영이다. ($C_0 = 0$) $C_s = 0.2wt\%,\ t = 25h = 90000s$, $x = 0.002m,$ 이므로 식 (1.20t)로부터

$$\frac{C_x - C_0}{C_s - C_0} = 1 - erf\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

$$erf\left(\frac{0.002}{2\sqrt{1.9\times10^{-11}\times90000}}\right) = erf(0.765)$$

$$\therefore z = 0.765$$

$$erf(z) = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\left[erf(z_1) - erf(z_0)\right] + erf(z_0)$$

$$erf(0.765) = \frac{0.765 - 0.75}{0.8 - 0.75}\left[erf(0.8) - erf(0.75)\right] + erf(0.75) = 0.72024$$

$$\frac{C_x - 0}{0.2 - 0} = 1 - 0.72024, \qquad \therefore C_x = 0.0559 wt\%$$

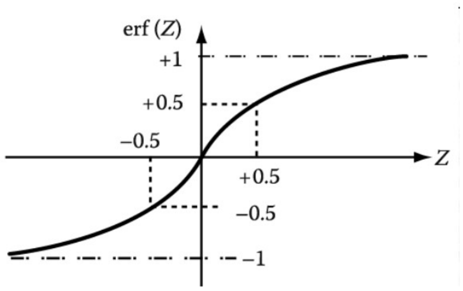


Fig. 1−15 오차함수

z	erf(z)	z	erf(z)	z	erf(z)
0	0	0.55	0.5633	1.3	0.9340
0.025	0.0282	0.60	0.6039	1.4	0.9523
0.05	0.0564	0.65	0.6420	1.5	0.9661
0.10	0.1125	0.70	0.6778	1.6	0.9763
0.15	0.1680	0.75	0.7112	1.7	0.9838
0.20	0.2227	0.80	0.7421	1.8	0.9891
0.25	0.2763	0.85	0.7707	1.9	0.9928
0.30	0.3286	0.90	0.7970	2.0	0.9953
0.35	0.3794	0.95	0.8209	2.2	0.9981
0.40	0.4284	1.0	0.8427	2.4	0.9993
0.45	0.4755	1.1	0.8802	2.6	0.9998
0.50	0.5205	1.2	0.9103	2.8	0.9999

예제 1−12 Slow−Swan 의 식 (1.12c)를 유도하라.

[해] 식 (1.12b)를 시간미분하면

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2}\left[A(t)\dot{L}(t) + L(t)\dot{A}(t)\right] \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{L}}{L} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{A}}{A}\end{aligned} \tag{1.20v}$$

이 식에 식 (1.12a)를 대입하면 식 (1.12c)가 얻어진다.

$$\begin{aligned}\dot{k}(t) &= s\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} - \delta\frac{K(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{L}}{L} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{A}}{A} \\ &= sy(t) - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \\ &= sk(t)^{\alpha} - (\delta + n + g)k(t) \\ &\quad (\frac{\dot{L}}{L} = n,\ \frac{\dot{A}}{A} = g)\end{aligned} \tag{1.20w}$$

1.2.2 동차함수를 포함한 미분방정식

1 계 미분방정식 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 에서 $P(x,y)$ 와 $Q(x,y)$ 가 같은 차원을 갖는 경우를 동차함수를 포함한 미분방정식(differential equation with homogeneous function)이라고 한다. 이 경우에 미분방정식 $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = f(x,y)$ 의 함수 $f(x,y)$ 를 $f(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$ 형태로 나타낼 수 있다.

예를 들면 다음 미분방정식들은 동차함수를 포함한 미분방정식이다.

$$xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{(\frac{y}{x}) - 1} \tag{1.21a}$$

$$(x+y)dx - xydy = 0: \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \tag{1.21b}$$

이 미분방정식을 풀기 위해서는 $u = \frac{y}{x}$, 즉 $y = ux$ 로 변수를 치환하여 풀면 된다. x 를 독립변수로 y 를 종속변수로 간주하고 $Q(x,y) \neq 0$ 인 경우에는 다음과 같이 표현할 수도 있다.

예제 1-13 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y^2 + x^2 y' = xyy' \qquad \left(y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx} \right)$$

[해] $y' = \dfrac{dy}{dx}$ 라고 하고 이 미분방정식을 동차함수를 포함한 미분방정식 형태로 정리하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2} = \frac{(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x} - 1}$$

따라서 $u = \dfrac{y}{x}$, 즉 $y = ux$ 로 치환하고

$$\begin{aligned} &y = ux, \quad dy = udx + xdu \\ &\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} \end{aligned} \tag{1.22}$$

이 관계를 앞의 식에 대입하면

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u-1}$$

이 식을 변수분리하여 나타내면

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1} \quad \rightarrow \quad \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = \frac{dx}{x}$$

양변을 적분하고 이 식에 $u = \dfrac{y}{x}$ 를 대입하면 해가 구해진다.

$$u - \ln u + C = \ln x \quad \rightarrow \quad \ln(xu) = u + C$$

$$\therefore \ln y = \frac{y}{x} + C$$

1.2.3 1계 선형 미분방정식

미분방정식은 자주 선형 미분방정식과 비선형 미분방정식으로 구분된다. 다음과 같은 미분방정식은 만일 F 가 종속변수 $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 의 선형함수인 경우에 미분방정식은 선형이라고 불린다.

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.23a}$$

즉, 종속변수 및 그 도함수가 1 차이고, 계수(coefficient)들이 독립변수 만의 함수인 경우에 그 미분방정식을 선형 미분방정식이라고 부른다.

따라서 n 계 선형 미분방정식은 다음과 같이 나타내진다.

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = q(x) \tag{1.23b}$$

식 (1.23b)와 같은 형식으로 나타내지지 않는 미분방정식은 비선형 미분방정식이다. 즉, 종속변수 및 그 도함수가 1 차가 아닌 멱 지수를 갖을 때나, 계수가 종속변수를 포함하거나, 비선형 함수(예: $\sin y$, $\ln y$ 등)를 포함하는 항이 있을 때는 비선형 미분방정식이라고 한다.

예를 들면 다음의 미분 방정식들은 선형 미분방정식이고

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C}Q(t) = E(t)$$

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$$

다음의 미분방정식은 비선형 미분방정식이다.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \sin(t+y) = \sin t\,, \quad (y')^2 + t\,y' + 4y = 0$$

한편 미분방정식이 다음과 같이 나타내질 때 이 미분방정식을 1 계 선형 미분방정식 (linear differential equation)이라고 한다.

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.23c}$$

이 미분방정식의 특징은 독립변수 x 와 $P(x)$ 및 $Q(x)$ 의 형태와 상관없이 종속변수 y 와 그 도함수 y' 이 선형이란 것이다. 우변이 영, $Q(x)=0$ 인 경우를 제차 방정식 (homogeneous equation)이라고 하고, 우변이 영이 아닌, $Q(x)\neq 0$ 인 경우를 비제차 방정식(nonhomogeneous equation)이라고 한다.

먼저 $Q(x)=0$ 인 경우에 대한 해는 변수분리법을 이용하여 구할 수 있다. 즉

$$y' + P(x)y = 0: \quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

$$\ln y = -\int P(x)dx + C_1 \tag{1.24}$$

$$y = e^{-\int P(x)dx + C_1} = Ce^{-\int P(x)dx}$$

제차 방정식에 대한 이 해에서 적분상수 C 를 함수 C(x)로 교체하여

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{1.25a}$$

$$y'(=\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dx}\left\{C(x)e^{-\int P(x)dx}\right\} \tag{1.25b}$$
$$=C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x)$$

이 식들을 $Q(x)\neq 0$ 인 비제차 방정식에 대입하면

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx}-C(x)e^{-\int P(x)dx}P(x)+P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

$$\rightarrow\ C'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)\ \rightarrow\ C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{1.26}$$

$$\therefore C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C_2$$

따라서 이 C(x)를 제차 방정식에 다시 대입하면 비제차 방정식의 해가 다음과 같이 구해진다.

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C_2]e^{-\int P(x)dx} \tag{1.27}$$

예제 1-14 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'-\frac{2y}{x+1}=(1+x)^{\frac{5}{2}}$$

[해] 이 방정식은 다음과 같이 1 계 선형 미분방정식의 형태로 나타낼 수 있다.

$$y'-\frac{2}{x+1}y=(1+x)^{\frac{5}{2}}$$
$$y'+P(x)y=Q(x):\quad P(x)=-\frac{2}{x+1},\ Q(x)=(1+x)^{\frac{5}{2}}$$

먼저 $Q(x)=0$ 인 제차 방정식에 대한 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$y'-\frac{2}{x+1}y=0$$
$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}\ \rightarrow\ \ln y=2\ln(x+1)+C_1$$
$$\therefore y=C(x+1)^2$$

이 해에서 적분상수 C 를 함수 C(x) 로 하여

$$y = C(x)(x+1)^2$$
$$y'(=\frac{dy}{dx}) = C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1)$$

이 식들을 $Q(x) \neq 0$ 인 비제차 방정식에 대입하면

$$C'(x)(x+1)^2 + 2C(x)(x+1) - \frac{2}{x+1}C(x)(x+1)^2 = (x+1)^{\frac{5}{2}}$$
$$\to C'(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}$$

따라서 적분하면

$$C(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2$$

이 C(x)를 제차 방정식의 해에 다시 대입하면 비제차 방정식의 해가 다음과 같이 구해진다.

$$y = C(x)(x+1)^2 = [\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C_2](x+1)^2$$

이 해는 식 (1.27)의 공식 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx} = [\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C_2]e^{-\int P(x)dx}$ 를 바로 적용하여 구할 수도 있다.

1.2.4 베르누이 미분방정식

다음 형식의 비선형 미분방정식을 베르누이 미분방정식(Bernoulli differential equations)이라고 한다.

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1) \tag{1.28}$$

이 비선형 베르누이 미분방정식에서 $u = y^{n-1}$ 로 치환하면 선형 미분방정식이 얻어진다. 즉, 베르누이 방정식의 양변을 y^n 으로 나누고

$$u = y^{1-n}, \qquad \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{1.29}$$

을 적용한다.

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x), \quad u' = (1-n)y^{-n}y'$$
$$y' = \frac{1}{(1-n)}y^n u' \tag{1.30a}$$

이 식을 식 (1.28)에 적용하면 다음과 같이 선형 미분방정식이 된다.

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x) \tag{1.30b}$$

예제 1-15 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$\frac{dy}{dx} - 6x^2 y = x^2 y^2$$

[해] 베르누이 방정식의 양변을 y^2 으로 나누고

$$y^{-2}\frac{dy}{dx} - 6x^2 y^{-1} = x^2$$

$u = y^{-1}$, $\dfrac{du}{dx} = -y^{-2}\dfrac{dy}{dx}$ 을 적용하면 다음의 1 계 선형 미분방정식이 얻어진다.

$$\frac{du}{dx} + 6x^2 u = -x^2$$
$$u' + P(x)u = Q(x): \ P(x) = 6x^2, \ Q(x) = -x^2$$

이 선형방정식의 해는 식 (1.27)을 이용하면 다음과 같이 구해진다.

$$u = [\int (-x^2)e^{\int 6x^2 dx} + C_2]e^{-\int 6x^2 dx} = (\frac{1}{6}e^{-2x^3} + C_2)e^{-2x^3} = \frac{1}{6}e^{-4x^3} + C_2 e^{-2x^3}$$

여기에 $u = y^{-1}$ 를 적용하면 미분방정식의 해가 구해진다. 즉

$$u = \frac{1}{6}e^{-4x^3} + C_2 e^{-2x^3} = \frac{1}{y}$$
$$\therefore (\frac{1}{6}e^{-4x^3} + C_2 e^{-2x^3})y = 1$$

1.2.5 완전 미분방정식

함수 $f(x,y)$ 가 연속인 편도함수를 가진다면 임의의 함수 $f(x,y) = c$ ($c = \text{constant}$) 에 대한 전미분(total differentiation)은 다음과 같이 나타내진다.

$$f(x,y) = c,$$
$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{1.31}$$

여기서 1 계 제차 선형미분방정식 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ 의 계수 함수 $P(x,y)$ 및 $Q(x,y)$ 가 다음과 같다고 가정하면

$$P(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x},\ Q(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{1.32}$$

$P(x,y)$ 와 $Q(x,y)$ 사이에 다음의 관계를 만족할 때 이 미분방정식 식 (1.31)을 완전 미분방정식(exact differential equation)이라고 한다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \\ &\because \frac{\partial}{\partial x}Q = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}P = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(= \frac{\partial}{\partial x}Q) \end{aligned} \tag{1.33}$$

이 조건을 만족하는 완전 미분방정식의 해는 $f(x,y) = c$ 이다.

예제 1-16 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$(5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0$$

[해] $P(x,y) = 5x^4 + 3xy^2 - y^3 (= \frac{\partial f}{\partial x})$, $Q(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 + y^2 (= \frac{\partial f}{\partial y})$ 라고 하면

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

따라서 이 미분방정식은 완전 미분방정식이다. 해 $f(x,y)$ 는 다음과 같이 구해진다. 먼저 $P(x,y) = 5x^4 + 3xy^2 - y^3 (= \frac{\partial f}{\partial x})$ 에서 $f(x,y)$ 를 구해보면

$$f(x,y) = \int (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx = x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - y^3x + F(y)$$

여기서 적분상수가 C 가 아니고 F(y)인 것에 주의하여야 한다. 이 $f(x,y)$ 를 $Q(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 + y^2 (= \frac{\partial f}{\partial y})$ 에 적용해보면 $F(y)$ 가 구해진다. 즉,

$$Q(x,y) = 3x^2y - 3xy^2 + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\{x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - y^3x + F(y)\} = 3x^2y - 3y^2x + F'(y) = Q(x,y)$$
$$\therefore F'(y) = y^2$$
$$\therefore F(y) = \int F'(y)dy = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + C$$

따라서 함수 $f(x,y)$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$f(x,y) = x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - y^3x + F(y) = x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - y^3x + \frac{1}{3}y^3 = c$$

1.2.6 적분인자

1 계 제차 선형미분방정식 $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ 가 완전 미분방정식은 아니지만 임의의 함수 $\mu(x,y)(\neq 0)$ 를 곱했을 때 이 방정식이 완전 미분방정식이 된다고 할때 $\mu = \mu(x,y)$ 를 적분인자(integrating factor, IF)라고 한다.

$$\begin{aligned} &\{p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0\} \quad \times \mu(x,y) \\ &\mu(x,y)p(x,y)dx + \mu(x,y)q(x,y)dy = 0 \end{aligned} \tag{1.34}$$

이 방정식이 완전 미분방정식이 되기 위한 조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y}(\mu p) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu q) \\ &\frac{\partial \mu}{\partial y}p + \frac{\partial p}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}q + \frac{\partial q}{\partial x}\mu \end{aligned} \tag{1.35a}$$

예를 들면 $xdy - ydx = 0$ 는 완전 미분방정식이 아니지만 양변에 $\frac{1}{y^2}$ 을 곱한 방정식은 완전 미분방정식이 된다.

$$\begin{aligned} &(ydx - xdy = 0)\times(\frac{1}{y^2}) \ \rightarrow \ \frac{y}{y^2}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0, \quad \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0 \\ &P = \frac{1}{y}, \ \ Q = -\frac{x}{y^2} \\ &\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}) = -\frac{1}{y^2} \ \Leftrightarrow \ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{x}{y^2}) = -\frac{1}{y^2} \end{aligned} \tag{1.35b}$$

따라서 이 경우의 적분인자 $\mu = \mu(x, y)$ 는 $\dfrac{1}{y^2}$ 가 된다. 한편 $-ydx + xdy = 0$ 에 대한 적분인자는 $\dfrac{1}{x^2}$ 인 것을 쉽게 증명할 수 있다.

적분인자 $\mu = \mu(x, y)$ 를 구하는 것은 쉽지 않다. 여기서는 적분인자가 x 만의 함수, $\mu = \mu(x)$ 라고 가정하고 적분인자를 구해보자. 이 경우에 식 (1.35a)는 다음과 같이 나타내지고

$$\frac{\partial p}{\partial y}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}q + \frac{\partial q}{\partial x}\mu \tag{1.36}$$

양변을 μq 로 나누면

$$\frac{1}{\mu q}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\mu - \frac{\partial q}{\partial x}\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}q\right) \rightarrow \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} \tag{1.37}$$

이 식을 R 이라고 하면 다음이 얻어진다.

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x} = R \tag{1.38a}$$

$$R = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) \tag{1.38b}$$

$\mu = \mu(x)$ 이므로 식 (1.38a)을 풀면 적분인자 μ 를 구할 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\mu}{\mu} = Rdx, \quad \ln\mu = \int Rdx + c \\ &\therefore \mu = e^{\int Rdx + c} = Ce^{\int Rdx} = e^{\int Rdx} \quad (C = 1) \\ &R = \frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.39}$$

여기서 많은 적분인자가 필요하지 않으므로 C=1 을 택하였다.

만일 $\mu = \mu(y)$ 라고 가정하면 이 경우의 적분인자는 다음과 같이 나타내진다.

$$\left.\begin{aligned} &\mu = e^{\int Rdy} \\ &R = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

예제 1-17 다음 미분방정식의 적분인자를 구하고 해를 구하라.

$$\frac{dy}{dx}+2xy=4x$$

[해] 이 식을 다시 정리하면

$$(2xy-4x)dx+dy=0$$

따라서 적분인자는 식 (1.39)에서 $p=2xy-4x,\ q=1$ 이므로

$$R=\frac{1}{q}(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x})=\frac{1}{1}(2x-0)=2x$$

$$\mu(x)=e^{\int Rdx}=e^{x^2}$$

이 적분인자를 원래의 미분방정식에 곱하면 다음과 같이 된다.

$$e^{x^2}\left[\frac{dy}{dx}+2xy\right]=\frac{dy}{dx}e^{x^2}+2xye^{x^2}=4xe^{x^2}\quad\leftrightarrow\quad y'e^{x^2}+y(e^{x^2})'=4xe^{x^2}$$

미분 곱의 법칙(product rule of derivative) $(uv)'=u'v+uv'$ 로부터 해는 다음과 같이 구해진다.

$$(ye^{x^2})'=4xe^{x^2}$$

$$\int\frac{d}{dx}(ye^{x^2})dx=\int 4xe^{x^2}dx$$

$$ye^{x^2}=\int 4xe^{x^2}dx=2\int e^u du$$

$$(\because u=x^2,\ \ du=2xdx:\text{integration by substitution})$$

$$=2e^u+C=2e^{x^2}+C$$

$$\therefore y=2+\frac{C}{e^{x^2}}$$

1.2.7 클레로 미분방정식

$y=xy'+\psi(y')$ 형태의 미분방정식을 클레로 미분방정식 (Clairaut’s differential equation) 이라고 부른다. 이 미분방정식의 대표적인 형태는 다음과 같다.

$$y=xy'+(y')^2 \tag{1.41a}$$

이 클레로 미분방정식의 해는 $y'=p,\ dy=pdx$ 로 치환하는 것에 의해 구할 수 있다. 즉

$$y=xp+p^2 \tag{1.41b}$$

이 식을 미분하면

$$dy = xdp + pdx + 2pdp \;\rightarrow\; pdx = xdp + pdx + 2pdp \tag{1.41c}$$

따라서

$$(x + 2p)dp = 0 \tag{1.41d}$$

이 식은 $dp = 0$ 와 $x + 2p = 0$ 인 경우에 만족한다. $dp = 0$ 에서 $p = C$ 가 되므로 식 (1.41a)는

$$y = Cx + C^2 \tag{1.41e}$$

가 된다. 이 식은 1-매개변수 곡선군으로 그림 1-16 과 같이 나타내진다.

식 (1.41c)를 $G(x, y, C) = Cx + C^2 - y = 0$ 로 나타내고 $\frac{\partial G}{\partial C} = x + 2C = 0$ 로부터 구해지는 $C = -\frac{x}{2}$ 를 식 (1.41e)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$y = (-\frac{x}{2})x + (-\frac{x}{2})^2 = -\frac{x^2}{4} \tag{1.41f}$$

이 식이 식 (1.41e)의 포락선이다.

한편 식 (1.41d)에서 $x + 2p = 0$ 와 식 (1.41b)의 $y = xp + p^2$ 에서 p 를 제거하여도 동일한 포락선이 얻어진다는 것을 알 수 있다.

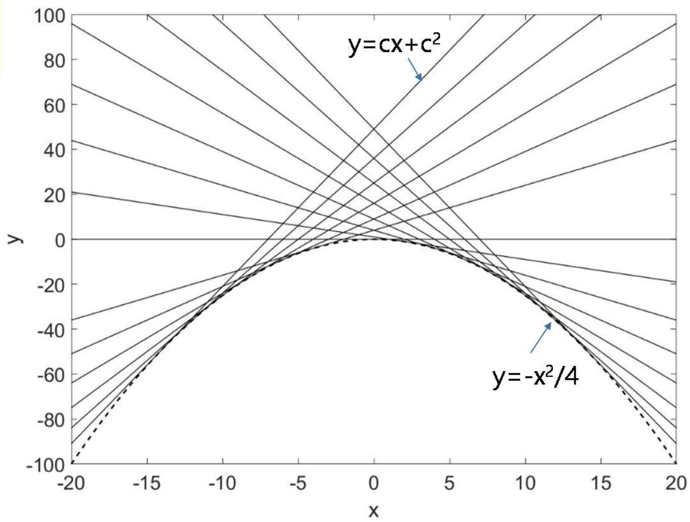


Fig. 1-16 클레로 미분방적식의 해와 포락선

1.2.8 자율 미분방정식

y 의 1 차 도함수가 독립변수 x 가 아닌 y 그 자신값에만 의존하는 다음과 같은 미분방정식을 자율 미분방정식(autonomous differential equation) 이라고 부른다.

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \quad \text{또는} \quad y' = f(y) \tag{1.41g}$$

이 미분방정식에서는 y 의 변화값이 x 에는 의존하지 않고 오직 y 의 현재값에만 의존하기 때문에 자율적이라고 부르는 것이다.

이 미분방정식에서 $f(y)=0$ 가 되는 y 값을 미분방정식의 임계점(critical point)라고 부르고, y_0 가 이 미분방정식의 임계점이면 일정한 해 $y(x)=y_0$ 를 미분방정식의 평형해(equilibrium solution)라고 부른다.

한편 다른 해들이 $y(x)=y_0$ 의 평형해로 향해 갈 때는 안정 평형해(stable equilibrium solution)라고 부르고, 해들이 $y(x)=y_0$ 의 평형해로부터 멀어져 갈때는 불안정 평형해(unstable equilibrium solution)라고 부른다.

이 미분 방정식의 예로 다음 식을 검토해보자.

$$y' = -y^2 + 2y \tag{1.41h}$$

이 방정식은 그림 1-17 과 같이 방향장으로 나타낼 수 있으며 이로부터 이 방정식의 해에 대한 중요한 정보를 얻을 수 있다.

즉 y = 0 및 y = 2 일 때 기울기는 0 이며(y' =0), y = 0 미만에서 시작하는 해는 모두 내려 가고, y = 0 과 y = 2 사이에서 시작하는 해는 모두 y = 2 를 향해 올라간다. y = 2 이상에서 시작하는 해는 모두 y = 2 를 향해 내려간다는 것을 알 수 있다. 이 경우에 y = 0 는 불안정 임계점이며, y = 2 는 안정 임계점이다.

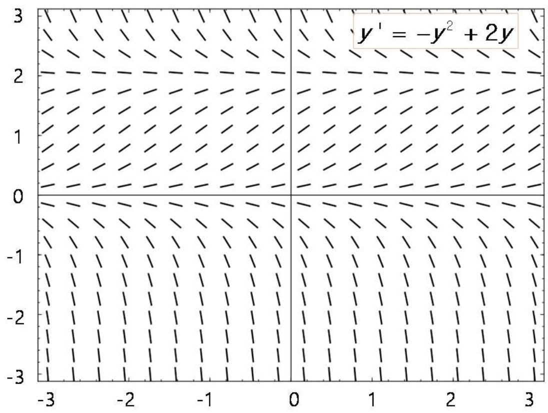


Fig. 1-17 자율 미분방정식의 방향장

1.2.9 선형 독립과 선형 종속

앞에서 논한 1 계 미분방정식의 경우에 해가 $y(x)(=y_1(x))$ 의 하나로 정의되지만, 2 계 미분방정식의 경우에 해가 $y_1(x), y_2(x)$ 의 2 개가 존재할 수 있다. 이때 해 $y_2(x)$ 가 해 $y_1(x)$ 의 실수 배라면(서로 종속 관계) 미분방정식의 해를 $y_1(x)$ 만의 함수로 나타낼 수 있다. 만일 $y_2(x)$ 와 $y_1(x)$ 가 어떤 상관관계도 갖지 않는다면(서로 독립관계) 미분방정식의 해는 $y_1(x)$ 과 $y_2(x)$ 를 모두 포함하여야 한다. 함수 $y_2(x)$ 와 $y_1(x)$ 가 서로 종속인지 독립인지를 판단하기 위해서는 다음과 같은 방법이 사용된다.

함수 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 이 구간 I 에서 정의된 n 개의 영이 아닌 함수라고 하고, 이들 함수를 선형 조합시킨 결과가 0 인 다음 항등식을 만족하는 영이 아닌 계수 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 가 존재한다면 이 항등식의 함수들은 서로 선형 종속(linearly dependent 또는 1 차 종속)이라고 부른다.

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) = 0 \tag{1.42a}$$

이 경우에는 임의의 함수 $y_i(x)$ 를 다른 함수들의 선형 조합으로 나타낼 수 있다는 것을 의미한다. 즉

$$y_i(x) = -\frac{1}{C_i}\{C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)\} \tag{1.42b}$$

이 경우에 계수(coefficients) C_i 는 자주 가중(weights)이라고도 불린다. 즉, 이 경우에 계수 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 는 각각의 함수 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 가 y_i 에 어느 정도 기여도하고 있는지 나타낸다고 생각할 수 있으므로 가중값으로 생각할 수 있다.

만일 식 (1.42a)의 항등식을 만족하는 영이 아닌 계수 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 가 존재하지 않는다면 이 항등식의 함수들은 서로 선형 독립(linearly independent 또는 일차 독립)이다. 즉, 이 경우에 항등식이 만족하기 위해서는 계수들이 모두 영이어야만 한다.

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0 \tag{1.42c}$$

한편 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 이 함수가 아니고 벡터인 경우에도 선형 독립과 선형 종속의 판단은 이들 벡터를 선형 조합시켜 영으로 한 항등식에서 판단할 수 있다. 즉, 만일 벡터 공간 V 에서 n 개의 영이 아니 벡터 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 을 R^n 상에서 선형 조합시킨 결과가 영인 다음 항등식을 만족하는 영이 아닌 계수 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 가 존재한다면 이 벡터들은 서로 선형 종속이다.

$$C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3 + \cdots + C_nv_n = 0 \tag{1.42d}$$

이 선형 종속인 경우에는 한 벡터 성분은 다른 벡터성분의 조합으로 나타낼 수 있다는 것을 의미한다. 예를 들면 식 (1.42b)에서와 같이 $C_2 \neq 0$ 이라면

$$v_2 = -\frac{1}{C_2}\{C_1v_1 + C_3v_3 + \cdots + C_nv_n\} \tag{1.42e}$$

반대로 만일 식 (1.42d)의 항등식을 만족하는 영이 아닌 계수 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 가 존재하지 않는다면 이 벡터들은 서로 선형 독립이다.

n 개의 선형 독립인 벡터 집합 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 을 R^n 에 대한 기저(basis) 또는 벡터공간 V 에 대한 기저라고 한다. 벡터공간 V 에서 이 기저를 구성하는 벡터의 개수를 V 의 차원(dimension)이라고 하며 dim V 로 나타낸다. 즉, R^n 벡터공간의 차원은 n 이다. ($\dim V = n$)

예를 들면 R^3 공간의 세 벡터 $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$ 은

$$(0,0,0) = C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3 = C_1(1,0,0) + C_2(0,1,0) + C_3(0,0,1)$$

에서 $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ 가 성립하므로 선형 독립이고 따라서 세 벡터 v_1, v_2, v_3 는 R^3 공간의 기저가 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 벡터공간 V 의 임의의 벡터는 v_1, v_2, v_3 의 선형결합으로 나타낼 수 있다.

한편 이 벡터들이 선형 독립인지는 이들 벡터를 열로 하는 행렬의 행렬식(determinant)이 0 이 아닌 것을 보이는 것으로도 판단할 수 있다. 즉

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ (\neq 0)$$

만일 행렬식이 영이라면 벡터들은 선형 독립이 아니다.

마찬가지로 R^3 공간의 세 벡터 $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$ 에 대해서 $(0,0,0) = C_1(1,0,0) + C_2(1,1,0) + C_3(0,1,1)$ 로부터 $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ 가 성립하기 때문에 이 세 벡터도 R^3 공간의 기저이다.

선형 독립이며 서로 직교(orthogonal)하는 벡터들을 직교 기저(orthogonal basis) 또는 기저 벡터(basis vector)라고 부른다. 또한 만일 직교 기저가 단위 크기를 갖는 경우에 직교 기저는 정규 직교 기저(orthonormal basis)라고 부른다. 위에서 $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,0,1)$ 는 직교 기저이지만 $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$ 는 단순히 기저이다.

만일 벡터 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 를 R^n 상에서 선형 독립인 기저 벡터들의 집합이라면 임의의 벡터 $w\ (\in R^n)$ 는 계수들 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 과의 선형 조합으로 표시할 수 있다.

$$w = C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots + C_n v_n \tag{1.42f}$$

이 식에서 계수들 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 는 벡터의 스칼러 곱(scalar product 또는 내적 (inner product) 또는 dot product)으로 부터 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$\begin{gathered} w \cdot v_1 = (C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots + C_n v_n) \cdot v_1 = C_1 (v_1 \cdot v_1) \\ (\because v_m \cdot v_j = 0 \ \ (m \neq j),\ \ \text{orthogonal}\ ) \end{gathered} \tag{1.42g}$$

마찬가지로 $w \cdot v_2 = C_2(v_2 \cdot v_2)$, $w \cdot v_3 = C_3(v_3 \cdot v_3), \cdots$. 따라서

$$C_j = \frac{w \cdot v_j}{v_j \cdot v_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.42h}$$

이 관계를 식 (1.42f)에 적용하면

$$w = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}\ v_1 + \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}\ v_2 + \cdots + \frac{w \cdot v_n}{v_n \cdot v_n}\ v_n \tag{1.42i}$$

벡터의 스칼러 곱 $v_i \cdot v_j$ 은 자주 $< v_i, v_j >$ 와 같이 나타내진다. 이 표현을 이용하면 위식은 다음과 같이 나타내진다.

$$w = \frac{< w,\ v_1 >}{< v_1,\ v_1 >}\ v_1 + \frac{< w,\ v_2 >}{< v_2,\ v_2 >}\ v_2 + \cdots + \frac{< w,\ v_n >}{< v_n,\ v_n >}\ v_n \tag{1.42j}$$

예제 1-18 다음 v_1, v_2, v_3 가 직교 기저임을 보이고 벡터 w 를 이들의 직교 기저로 나타내어라. 또한 정규 직교 기저를 나타내어라.

$$v_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix},\ v_2 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix},\ v_3 = \begin{Bmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 7/2 \end{Bmatrix}$$

$$w = \begin{Bmatrix} 6 \\ 1 \\ -8 \end{Bmatrix}$$

[해] 이 벡터들이 직교하다는 것은 서로 다른 벡터들의 쌍 (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3) 에 대해서 스칼러 곱을 하여 그 결과가 영이 되는 것을 보이면 된다. 즉

$$v_1 \cdot v_2 = 3 \times (-1) + 1 \times (2) + 1 \times (1) = 0$$

$$v_1 \cdot v_3 = 3 \times (-\frac{1}{2}) + 1 \times (-2) + 1 \times (\frac{7}{2}) = 0$$

$$v_2 \cdot v_3 = -1 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times (-2) + 1 \times (\frac{7}{2}) = 0$$

또한 이 벡터들이 기저이기 위해서는 선형 독립이어야 한다. 다음 식으로부터

$$(0,0,0) = C_1 v_1 + C_2 v_2 + C_3 v_3 = C_1(3,1,1) + C_2(-1,2,1) + C_3(-\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2})$$

$C_1 = C_2 = C_3 = 0$ 가 성립하므로 이 벡터들이 기저이다. 따라서 v_1, v_2, v_3 는 직교 기저이다. 벡터 w 를 이들 직교 기저의 선형 조합으로 나타내면

$$\begin{aligned} w &= C_1\ v_1 + C_2\ v_2 + C_3\ v_3 = (\frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1})\ v_1 + (\frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2})\ v_2 + (\frac{w \cdot v_3}{v_3 \cdot v_3})\ v_3 \\ &= \frac{11}{11}\ v_1 + \frac{-12}{6}\ v_2 + \frac{-33}{33/2}\ v_3 \\ &= v_1 - 2v_2 - 2v_3 \end{aligned}$$

직교 기저 v_1, v_2, v_3 에 대한 정규 직교 기저 u_1, u_2, u_3 는 각각의 직교 기저의 크기를 1.0 으로 하는 것(단위 벡터로 만듬)에 의해 얻어진다. 즉

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2+1^2}}\begin{Bmatrix}3\\1\\1\end{Bmatrix},\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}}\begin{Bmatrix}-1\\2\\1\end{Bmatrix},$$

$$u_3 = \frac{1}{\sqrt{(-1/2)^2+(-2)^2+(7/2)^2}}\begin{Bmatrix}-1/2\\-2\\7/2\end{Bmatrix}$$

식 (1.42i) 관계로부터 $\dfrac{w\cdot v_j}{v_j\cdot v_j}v_j$ 는 벡터 w 를 벡터 v_j 에 직교투영(Orthogonal projection)한 것을 나타낸다. 왜냐하면 벡터 v_j 의 단위 벡터는 $\dfrac{v_j}{\sqrt{v_j\cdot v_j}}$ 로 나타내지므로 벡터 w 를 벡터 v_j 에 직교투영하여 얻어지는 벡터는 $\left(w\cdot\dfrac{v_j}{\sqrt{v_j\cdot v_j}}\right)\dfrac{v_j}{\sqrt{v_j\cdot v_j}} = \dfrac{w\cdot v_j}{v_j\cdot v_j}v_j$ 로 나타내진다.

이 직교투영에 대한 기하학적인 의미를 그림 1-18 에 나타내었다.

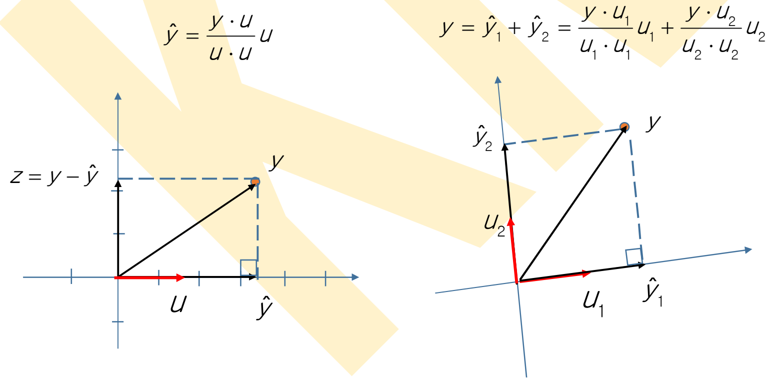


Fig. 1-18 벡터의 직교 투영

즉, R^n 공간에서 영이 아닌 벡터 u 가 주어질 때 한 벡터 y 는 벡터 u 에 계수를 곱한 벡터 $\hat{y}$ 와 이 벡터에 수직인 벡터 z 의 합으로 나타낼 수 있으며, 따라서 벡터 $\hat{y}$ 와 $y-\hat{y}$ 는 서로 직교란 것을 알 수 있다.

$$y = \hat{y} + z, \quad \hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u$$
$$\hat{y} \cdot (y - \hat{y}) = 0$$

예제 1-19 다음의 벡터 u 를 이용하여 벡터 y 를 이 벡터 u 에 직교투영하라. 또한 벡터 y 를 이 직교투영과 이 직교투영에 수직인 벡터의 합으로 나타내어라.

$$u = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix}, \ y = \begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

[해] 벡터 y 의 벡터 u 에 직교투영은

$$\hat{y} = \frac{y \cdot u}{u \cdot u} u = \frac{(7(4)+6(2))}{(4(4)+2(2))} \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

따라서

$$z = y - \hat{y} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 8 \\ 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$y = z + \hat{y}, \qquad \begin{Bmatrix} 7 \\ 6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

이 벡터 $\hat{y}$ 와 $y-\hat{y}$ 는 직교한다. 즉, $\hat{y} \cdot (y - \hat{y}) = 8 \times (-1) + 4 \times (2) = 0$.

1.3 2 계 미분방정식

2 계 혹은 그 이상의 미분방정식을 고계 미분방정식이라고 한다. 특히 2 계 선형 미분방정식은 역학, 파동, 열전도 등의 문제에 많이 이용된다. 2 계 선형 미분방정식의 일반적인 형태는 다음과 같다.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{1.43a}$$

여기서 우변의 $f(x)=0$ 인 경우는 제차 방정식, $f(x) \neq 0$ 인 경우는 비제차 방정식이다.

이하에서는 다양한 2 계 미분방정식의 형태와 그 해를 구하기 위한 방법들을 학습한다.

1.3.1 $y''=f(x,y')$ 형태 미분방정식

다음 식과 같이 미분방정식에 종속변수 y 를 포함하고 있지 않은 2 계 미분방정식을 y-결핍 미분방정식(2nd order differential equation with missing y-variable)이라고 부른다.

$$\left.\begin{aligned} y''&=f(x,y') \\ y''+p(x)y'&=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.43b}$$

이 경우는 2 계 미분항을 1 계 미분항으로 계수를 낮추어 1 계 미분방정식 형태로 만들어 푸는 방법이 제안되어 있다. 이 방법을 계수축소법(method of reduction of order)이라고 하다. 즉 $y'=w(x)$ 로 두면 $y''=w'(x)$ 가 되므로

$$y''=f(x,y') \;\rightarrow\; w'=f(x,w) \tag{1.43c}$$

이 식의 해는 $w=\varphi(x,C_1)$ 가 되다. 따라서 미분방정식의 해는 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1) \;\rightarrow\; y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2 \tag{1.44}$$

예제 1-20 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y''=y'+x$$

[해] $y'=w(x),\; y''=w'(x)$ 라고 하면 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w'=w+x \;\rightarrow\; w'-w=x$$

이 식은 식 (1.23)의 1 계 선형 미분방정식의 형태이므로 식 (1.27)의 공식에 의해 해를 구할 수 있다. $P(x)=-1,\; Q(x)=x$ 이므로

$$\begin{aligned} w&=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}+C_2]e^{-\int P(x)dx}=[\int xe^{\int -1dx}+C_2]e^{-\int -1dx} \\ &=[\int xe^{-x}+C_2]e^{x} \\ &=-1-x+C_2e^{x} \end{aligned}$$
$$(\because \int xe^{-x}dx=\int e^{-x}dx-\int xe^{-x}dx, \quad \text{partial integral})$$

따라서

$$\frac{dy}{dx} = w = -1 - x + C_2 e^x$$
$$y = \int w dx = -x - \frac{x^2}{2} + C_2 e^x + C_1$$

1.3.2 $y'' = f(y, y')$ 형태 미분방정식

식 (1.41h)의 1 계 자율 미분방정식을 한번 더 미분하면 $y'' = -2yy' + 2y'$ 가 된다. 이와 같이 미분방정식에 독립변수 x 를 포함하고 있지 않은 2 계 미분방정식을 2 계 자율 미분방정식(2^{nd} order autonomus equation) 또는 x−결핍 미분방정식(2nd order differential equation with missing x−variable)이라고 부른다.

$$y'' = f(y, y') \tag{1.45}$$

이 경우에는 변수 x 가 없기 때문에 $y' = w(x)$ 라고 할 수 없다. 따라서 $y' = w(y)$ 로 두면

$$y' = w(y) \tag{1.46}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dy} w = w\frac{dw}{dy} \tag{1.47}$$

따라서 식 (1.45)의 2 계 자율 미분방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w\frac{dw}{dy} = f(y, w) \tag{1.48}$$

이 1 계 미분방정식을 풀어서(적분하여) $y' = w = \varphi(y, C_1)$ 를 구하고 이 식에서 해 y 를 구한다.

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C \tag{1.49}$$

식 (1.48)의 적분곡선은 (y,w) 평면에 나타낼 수 있다. 이것을 푸앙카레의 기본 상평면(Poincare' phase plane 또는 위상평면) 이라고 부른다. 만일 y 가 식 (1.45)의 해이고 $y = y(t)$ 이라면 $w = y'(t)$ 는 식 (1.48)의 적분곡선에 대한 매개변수 방정식(parametric equation)이 된다. 이 적분곡선을 식 (1.45)의 궤적(trajectory)라고 부른다. 그리고 식 (1.48)을 식 (1)의 상평면 등가(phase plane equivalent)라고 한다

예제 1−21 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$y'' = (y')^2$$

[해] $y' = w(y),\ y'' = w\dfrac{dw}{dy}$ 를 적용하면 다음과 같이 상평면 등가가 얻어진다.

$$w\frac{dw}{dy} = w^2$$

이 식을 적분하면

$$\frac{dw}{w} = dy$$
$$\ln w = y + C_2 \ \rightarrow\ w = e^{y+C_2} = C_1 e^y$$

다시 윗식에서 $w = y'$로 하여 해 y를 구한다.

$$y' = w;\quad \frac{dy}{dx} = C_1 e^y$$
$$e^{-y}dy = C_1 dx \ \rightarrow\ \int e^{-y}dy = \int C_1 dx \ \rightarrow\ -e^{-y} = C_1 x + C_2$$
$$\therefore\ y = -\ln(-C_1 x - C_2)$$

예제 1-22 다음 미분방정식의 궤적을 나타내어라.

$$y'' + y(y-1) = 0$$

[해] 앞의 예제와 같이 $y' = w(y),\ y'' = w\dfrac{dw}{dy}$ 를 적용하면 다음과 같이 상평면 등가가 얻어진다.

$$w\frac{dw}{dy} + y(y-1) = 0$$

이 식을 적분하면 다음과 같이 된다.

$$w^2 + \frac{1}{3}y^2(2y-3) = C$$

따라서 이 식을 (y,w) 상평면에 나타내면 그림 19 와 같은 궤적이 얻어진다. 여기서 점선은 C가 영인 경우이다.

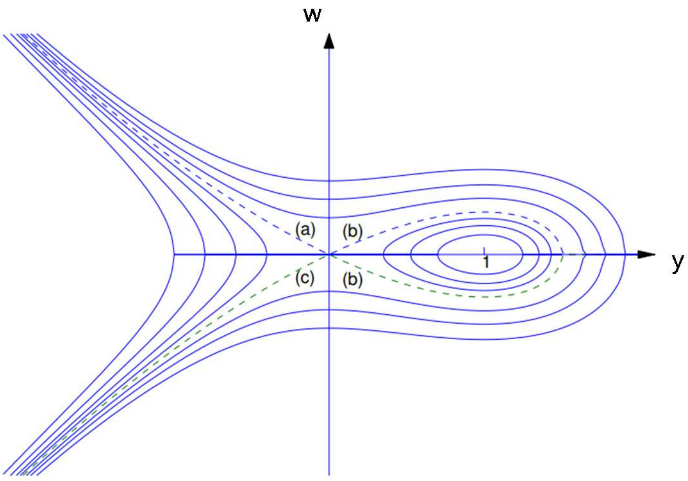


Fig. 1-19 상 평면과 궤적

1.3.3. 2 계 제차 선형 미분방정식의 해를 구하는 방법

다음의 2 계 제차 선형 미분방정식(2nd order homogeneous linear differential equation)을 구하기 전에 이 미분방정식을 만족하는 두 개의 해 $y_1(x)$ 과 $y_2(x)$ 가 존재할 때 두 해가 서로 독립인지 종속인지를 판단하는 하는 방법에 대해서 알아본다.

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \tag{1.50}$$

함수 $y_1(x)$ 과 $y_2(x)$ 가 이 방정식의 해이고 선형 독립이라면 이 두 해를 선형 결합한 함수 $y(x)$ 도 미분방정식의 해가 된다.

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{1.51}$$

[증명] 식 (1.51)이 2 계 제차 선형 미분방정식 (1.50)의 해가 되기 위해서는

$$(C_1y_1+C_2y_2)''+P(x)(C_1y_1+C_2y_2)'+Q(x)(C_1y_1+C_2y_2)=0 \tag{1.52}$$

가 성립하여야 한다. 이 식은 다시 다음과 같이 두 식으로 분리할 수 있다.

$$\begin{cases} C_1y_1''+P(x)C_1y_1'+Q(x)C_1y_1=0 \\ C_2y_2''+P(x)C_2y_2'+Q(x)C_2y_2=0 \end{cases} \tag{1.53}$$

그런데 식 (1.53)은 $y = y_1(x)$ 과 $y = y_2(x)$ 가 각각 식 (1.50)의 해라는 것을 의미하므로 이 두 해를 선형 결합한 함수 $y(x)$ 도 미분방정식의 해가 됨을 알 수 있다.

두 함수 y_1, y_2 가 선형 독립인지 아닌지를 판단하는데 다음의 론스키안(Wronskian) 값이 이용된다. 즉 론스키안이 영이 아니면 두 함수 y_1, y_2 는 서로 독립이다.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.54a}$$

두 함수 y_1, y_2 가 식 (1.50)으로 주어진 2 계 제차 선형 미분방정식의 해라고 하면 다음을 만족한다.

$$\begin{cases} y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \end{cases} \tag{1.54b}$$

첫 번째 식에 $-y_2$ 를 곱하고 두 번째 식에 y_1 을 곱하여 두 식을 더하면 다음 식이 얻어진다.

$$(y_1y_2'' - y_2y_1'') + P(x)(y_1y_2' - y_2y_1') = 0 \tag{1.54c}$$

여기서

$$\begin{aligned} W &= y_1y_2' - y_2y_1' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ W' &= (y_1y_2' - y_2y_1')' = y_1y_2'' - y_2y_1'' \end{aligned} \tag{1.55}$$

라고 하면 식 (1.56c)는 다음과 같이 나타내진다.

$$W' + P(x)W = 0 \tag{1.56a}$$

따라서 이 선형 미분방정식의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\int \frac{dW}{W} = -\int P(t)dt \\ &\therefore W = Ce^{-\int P(t)dt} \end{aligned} \tag{1.56b}$$

따라서 론스키안이 영이 아니면 두 함수 y_1, y_2 는 서로 독립이고 기저(basis 또는 기본집합(fundamental sets))가 된다. 따라서 일반해를 이들 기저의 선형결합, $y = C_1y_1 + C_2y_2$, 으로 나타낼 수 있다.

론스키안 식 (1.55)을 다시 생각해보자. 만일 하나의 해가 $y_1 \neq 0$ 인 경우에 식 (1.55)를 y_1^2 으로 나누어 그 값이 영인 경우를 생각해 보면

$$\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = 0 \tag{1.56c}$$

이 미분방정식의 해는 $\frac{y_2}{y_1} = C$ 상수값이 된다. 이것은 $y_2 = Cy_1$ 을 의미한다. 즉 해 y_2 는 해 y_1 에 종속이란 것을 의미한다. 따라서 일반해를 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 으로 나타낼 수 없다.

예제 1-23 두 함수 $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ 가 미분방정식 $y'' + y = 0$ 의 해임을 보이고 y_1, y_2 가 선형 독립인 것을 보이고 일반해를 구하라.

[해] $y_1 = \cos x$ 과 $y_2 = \sin x$ 가 $y'' + y' = 0$ 의 해가 되기 위해서는 각각의 해를 미분방정식에 대입하여 우변이 영이 되어야 한다.

$$\begin{cases} y_1 = \cos x : y_1'' + y_1 = -\cos x + \cos x = 0 \\ y_2 = \sin x \ : y_2'' + y_2 = -\sin x + \sin x = 0 \end{cases}$$

따라서 y_1, y_2 가 미분방정식의 해이다. 이 두 해가 독립이기 위해서는 이 두 해를 선형 결합한 항등식을 검토하여야 한다. 즉

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0$$
$$C_1 \cos x + C_2 \sin x = 0$$

이 식에서 y_1, y_2 가 구간 $[-\infty, \infty]$ 에서 영이 아닌 함수이기 때문에 이 항등식이 성립하기 위해서는 $C_1 = C_2 = 0$ 이어야 한다. 따라서 y_1, y_2 는 독립이다. 따라서 본 예제의 일반해는 독립인 이들 해의 선형 결합으로 나타낼 수 있다.

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

또한 식 (1.54a)의 론스키안의 정의로부터도

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = (\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \neq 0$$

론스키안이 영이 아니므로 서로 독립이다.

예제 1-24 두 함수 $y_1 = x,\ y_2 = e^x$ 가 다음 미분방정식 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ 의 해임을 보이고 일반해를 구하라.

[해]

$$\begin{cases} y_1 = x\ \ : (x-1)y_1'' - xy_1' + y_1 = 0 - x + x = 0 \\ y_2 = e^x : (x-1)y_2'' - xy_2' + y_2 = (x-1)e^x - xe^x + e^x = 0 \end{cases}$$

y_1, y_2 가 미분방정식의 해이다. 또한 $y_1 = x,\ y_2 = e^x$ 에 대한 론스키안이 영이 아니므로 선형 독립이기 때문에 일반해는 다음과 같이 나타내진다.

$$y = C_1 x + C_2 e^x$$

예제 1-25 다음 두 벡터가 선형 독립인지 선형 종속인지를 보여라.

$$\text{(a)}\quad y_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix},\ y_2 = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad y_1 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix},\ y_2 = \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

[해] (a)에 대한 두 벡터의 선형 조합으로 만들어지는 항등식은 다음과 같고

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

$$c_1 \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \rightarrow\ \begin{cases} 3c_1 + 6c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

여기서 $c_1 = -2c_2$ 이면 항등식이 만족한다. 즉 $y_2 = 2y_1$ 으로 두 벡터는 성 선형 종속이다.

(b)에 대한 두 벡터의 선형 조합으로 만들어지는 항등식은 다음과 같고

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

$$c_1 \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} 6 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \ \rightarrow\ \begin{cases} 3c_1 + 6c_2 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

이 항등식이 성립하기 위해서는 $c_1 = c_2 = 0$ 이어야만 한다. 따라서 두 벡터는 선형 독립이다.

위에서는 방정식을 직접 풀어서 c_1, c_2 를 구하여 선형 독립과 종속을 판단하였지만 변수가 많아지면 방정식을 직접 푸는 것이 쉽지 않다. 이 경우는 다음과 같이 행렬 방정식을 풀어서 선형 독립과 종속을 판단하는 방법을 사용한다. 즉 (a)의 경우에

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} (=0)} \neq \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

; 선형 종속(linearly dependent)

여기서 분모의 계수 행렬식이 영인 경우는, $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} (=0)$, c_1과 c_2가 영이 아닌 값을 가진다는 것이 자명하다. 따라서 (a)의 경우는 선형 종속이다.

또한 (b)의 경우에

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} (\neq 0)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

; 선형 독립(linearly independent)

여기서 분모의 계수 행렬식이 영이 아닌 경우는, $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} (\neq 0)$, c_1과 c_2가 영의 값을 가진다는 것이 자명하다. 따라서 (b)의 경우는 선형 독립이다.

이 예제와 같이 벡터들이 서로 선형독립일 필요충분조건(necessary and sufficient condition)은 벡터의 계수 행렬식의 값이 영이 아니어야 한다.

1.3.3 하나의 해를 알고 다른 해를 모르는 경우에 해를 구하는 방법

하나의 해 y_1을 알고 y_1, y_2이 서로 독립이라고 가정하면 y_2/y_1는 상수가 될 수 없기 때문에 이 값을 함수 형태로 가정한다. 즉

$$y_2(x) = u(x) y_1(x) \tag{1.57}$$

y_1이 2 계 제차 미분방정식의 해이므로

$$y_1'' + P(x) y_1' + Q(x) y_1 = 0 \tag{1.58}$$

또한 y_2 도 이 2 계 제차 미분방정식의 해이므로

$$y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0 \tag{1.59}$$

식 (1.57)에서

$$\begin{aligned} y_2' &= u'y_1 + uy_1' \\ y_2'' &= (y_2')' = u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1'' = u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' \end{aligned} \tag{1.60}$$

이 식을 식 (1.59)에 대입하면

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 \\ &= u''y_1 + u'(2y_1' + Py_1) + u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) \end{aligned} \tag{1.61}$$

우변의 마지막 항은 식 (1.58)에서 영이므로 다음 식이 성립한다.

$$u''y_1 + u'(2y_1' + Py_1) = 0 \tag{1.62}$$

여기서 $u' = w$ 로 하여 계수축소법을 적용하여 적분을 수행하면

$$w'y_1 + w(2y_1' + Py_1) = 0 \tag{1.63a}$$

즉 식 (1.63)은 w 에 대한 1 차 미분방정식이며, 주어진 2 차 미분방정식에서 차수가 계수가 감소된 형태임을 알 수 있다. 이 식을 적분하면

$$\int \frac{dw}{w} + \int \frac{2y_1' + Py_1}{y_1} dx = 0 \;\rightarrow\; \ln w = -2\ln y_1 - \int P dx \;\rightarrow\; \ln(wy_1^2) = -\int p dx$$

$$\therefore w = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx}$$

따라서 $u' = w$ 로부터

$$u = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx \tag{1.64}$$

그러므로 일반해는 다음 식으로 나타내진다.

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 y_1(x) + C_2 u(x) y_1(x) \\ &= C_1 y_1(x) + C_2 \left(\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx \right) y_1(x) \end{aligned} \tag{1.65}$$

예제 1-26 다음 미분방정식의 해를 구하라. 단 하나의 해는 $y_1 = e^x$ 이다.

$$y'' - y = 0$$

[해] 식 (1.65)를 이용하면

$$y = C_1 y_1(x) + C_2\left(\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx\right) y_1(x), \qquad (P(x)=0,\ Q(x)=-1)$$

$$y = C_1 e^x + C_2\left(\int \frac{1}{(e^x)^2} e^{-\int 0 dx} dx\right) e^x$$

$$= C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

1.3.4 2 계 비제차 선형 미분방정식의 해를 구하는 방법

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{1.66}$$

여기서 $f(x)=0$ 인 제차 미분방정식의 해를 $y_h(x)$ 라고 하고 $y_p(x)$ 를 $f(x)\neq 0$ 인 비제차 미분방정식의 특수해라고 하면 2 계 비제차 선형 미분방정식(2nd order nonhomogeneous linear differential equation)의 해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = y_h(x) + y_p(x) \tag{1.67}$$

여기서 비제차 미분방정식의 특수해 $y_p(x)$ 는 함수 $f(x)$ 와 유사한 함수 특성을 가진다고 알려져 있다. 이 특수해는 통상 미정계수법(method of undetermined coefficients) 로 구해진다. 상세한 내용은 1.6.2 절에서 설명한다.

예를 들면 다음 2 계 비제차 미분방정식를 생각해보자.

$$y'' + y = x^2$$

이 경우에 $y''+y=0$ 인 제차 미분방정식의 해는 $y_h(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$ 이고, 비제차 미분방정식 $y''+y=x^2$ 의 특수해는 $y_p = x^2 - 2$ 이다. 따라서 이 문제의 일반해는 $y = y_h(x) + y_p(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 - 2$ 가 된다.

1.3.5 2 계 상수 계수 선형 (제차) 미분방정식

아래 형식의 미분방정식을 2 계 상수 계수 선형 미분방정식이라고 한다.

$$y'' + Py' + Qy = f(x) \tag{1.68}$$

여기서 P, Q 는 상수이다. 앞에서와 같이 $f(x)=0$ 인 경우는 제차 미분방정식, $f(x)\neq 0$ 인 경우는 비제차 미분방정식이다. 먼저 제차 미분방정식의 경우에 해의 형태는

$y = e^{mx}$ $(= y_h)$ 으로 표시할 수 있다. 이것을 제차 미분방정식에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$y = e^{mx} \quad \rightarrow \quad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$
$$(m^2 + Pm + Q)e^{mx} = 0 \tag{1.69}$$

$e^{mx} \neq 0$ 이므로 다음 식이 성립한다.

$$m^2 + Pm + Q = 0 \tag{1.70}$$

m 에 관한 이 대수방정식을 $f(x) = 0$ 인 미분방정식 $y'' + Py' + Qy = 0$ 에 대한 특성방정식(characteristic equation)이라 하고 이 특성방정식의 근 m_1, m_2 은 다음과 같이 구해진다.

$$m_{1,2} = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \tag{1.71}$$

따라서 제차 미분방정식의 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} \tag{1.72}$$

보다 구체적으로 이 해는 제곱근 $\sqrt{P^2 - 4Q}$ 값의 특성에 따라 다음과 같이 세가지로 분류할 수 있다.

(1) $P^2 - 4Q > 0$ 인 경우	$m_1 = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$, $m_2 = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$ (1.73)
(2) $P^2 - 4Q = 0$ 인 경우	$m_1 = \frac{-P}{2} = m_2$ (1.74)
(3) $P^2 - 4Q < 0$ 인 경우	$m_1 = \alpha + i\beta$, $m_2 = \alpha - i\beta$ $\alpha = -\frac{P}{2}$, $\beta = \frac{\sqrt{P^2 - 4Q}}{2}$ (1.75)

여기서 α 는 복소수의 실수부(real part), $i\beta$ 는 복소수의 허수부(imaginary part)를 나타낸다. i 는 복소수의 허수 단위(imaginary number)를 나타내며 $i^2 = -1$ 을 만족한다.

세가지로 분류된 특성방정식에 의한 각각의 미분방정식의 해는 다음과 같다.

(1) 특성방정식이 두 개의 서로 다른 실근을 갖는 경우($P^2 - 4Q > 0$);

$$m_1 = \frac{-P + \sqrt{P^2 - 4Q}}{2}, \quad m_2 = \frac{-P - \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \qquad (1.76)$$
$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

(2) 특성방정식이 중근을 갖는 경우($P^2 - 4Q = 0$);

이 경우에 하나의 해는 $m_1 = \frac{-P}{2}$, $y_1 = e^{m_1 x}$ 으로 주어진다. 또 다른 해는 식 (1.57)과 같은 방법으로 식 (1.67)로부터 구할 수 있다. 즉, 이 경우의 미분방정식의 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1(x) + C_2 \left(\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P dx} dx \right) y_1(x) \\ &= C_1 e^{m_1 x} + C_2 \left(\int \frac{1}{(e^{m_1 x})^2} e^{-\int P dx} dx \right) e^{m_1 x} \\ &= C_1 e^{m_1 x} + C_2 \left(\int e^{(-2m_1 x - px)} dx \right) e^{m_1 x}, \quad (m_1 = -\frac{P}{2}) \qquad (1.77) \\ &= C_1 e^{m_1 x} + C_2 \left(\int 1 \cdot dx \right) e^{m_1 x} \\ &= e^{m_1 x}(C_1 + C_2 x) \end{aligned}$$

(3) 특성방정식이 두 개의 서로 다른 허근을 갖는 경우($P^2 - 4Q < 0$);

이 경우에 오일러 공식(Euler formula), $e^{\pm \beta \mathrm{i}} = \cos\beta \pm \mathrm{i}\sin\beta$ (여기서 i 는 허수 단위이다), 을 이용하면

$$\begin{aligned} & m_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta, \; m_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta, \; \alpha = -\frac{P}{2}, \; \beta = \frac{\sqrt{4Q - P^2}}{2} \\ & y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} = C_1 e^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x} + C_2 e^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)x} \\ & \quad = C_1 e^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x) + C_2 e^{\alpha x}(\cos\beta x - \mathrm{i}\sin\beta x) \\ & \quad = (C_1 + C_2) e^{\alpha x}\cos\beta x + \mathrm{i}(C_1 - C_2) e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (1.78) \\ & \quad = e^{\alpha x}(D_1 \cos\beta x + D_2 \sin\beta x) \end{aligned}$$

$$(D_1 = C_1 + C_2 : real, \; D_2 = \mathrm{i}(C_1 - C_2) : imaginary)$$

또는

$$y = e^{\alpha x}(D_1 \cos\beta x + D_2 \sin\beta x)$$
$$= e^{\alpha x}\sqrt{D_1^2 + D_2^2}\ \{\frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}\cos\beta x + \frac{D_2}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}\sin\beta x\} \quad (1.79)$$

이 식은 간단히 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$y = Ae^{\alpha x}cos(\beta x - \phi)$$
$$(\because A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2},\ \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}} = \cos\phi,\ \frac{D_2}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}} = \sin\phi,\ \tan\phi = \frac{D_2}{D_1}) \quad (1.80)$$

여기서 $\cos(\beta x \pm \phi) = \cos\beta x \cos\phi \mp \sin\phi x \sin\phi$ 관계를 이용하였다.

따라서 2 계 상수 계수 선형 미분방정식의 해를 구하는 과정은 다음과 같이 정리 할 수 있다. (i) 미분방정식의 특성방정식을 구하고, (ii) 특성방정식의 두 개의 근을 구하고, (iii) 두 개의 근의 형태에 따라 미분방정식의 일반해를 구한다.

1.4 미분방정식의 다양한 해법

1.4.1 매개변수변화법

매개변수 변화법(Variation of parameters)은 비제차 미분방정식의 특수해를 구하는데 널리 사용되며 특히 식 (1.66)의 우변의 함수 f(x) 가 $\ln x$, x, e^x 등과 같은 경우에 매우 유용하다. 이 방법에서 특수해의 형태는 다음과 같이 제차 미분방정식의 해 y_1, y_2 를 이용하여 다음과 같은 형태의 특수해를 가정한다.

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad (1.81a)$$

이 방법은 식 (1.57)의 계수축소법의 과정을 확장한 것으로 이해하면 된다.

이 특수해를 1 차 미분하면

$$y'_p = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' \quad (1.81b)$$

여기서 다음 식을 가정하면

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \quad (1.82)$$

따라서 식 (1.81b)는

$$y'_p = u_1y_1' + u_2y_2' \quad (1.83)$$

또한 2 차 미분 y_p''을 구하여

$$(y'_p)' = (u_1 y_1' + u_2' y_2)' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2' \tag{1.84}$$

원래 미분방정식에 대입하면

$$\begin{aligned} f(x) &= y_p'' + P y_p' + Q y_p \\ &= (u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2'' y_2 + u_2' y_2') + P(u_1 y_1' + u_2 y_2') + Q(u_1 y_1 + u_2 y_2) \\ &= u_1(y_1'' + P y_1' + Q y_1) + u_2(y_2'' + P y_2' + Q y_2) + u_1' y_1' + u_2' y_2' \end{aligned} \tag{1.85}$$

여기서 y_1, y_2 는 제차 미분방정식의 해라고 가정하였으므로 각각 $y_1'' + P y_1' + Q y_1 = 0$, $y_2'' + P y_2' + Q y_2 = 0$ 가 성립한다. 따라서

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x) \tag{1.86}$$

식 (1.82)와 식 (1.86)을 이용하여 미지 함수 u_1', u_2' 에 대해 다음과 같은 행렬을 구성할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f(x) \end{Bmatrix} \tag{1.87}$$

여기에 크래머의 공식(Cramer’ s rule)을 적용하면 u_1', u_2'를 다음과 같이 구한다.

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = -\frac{y_2 f(x)}{W} \\ u_2' &= \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \mathrm{f(x)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} = \frac{y_1 f(x)}{W} \\ &\left(W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \right) \end{aligned} \tag{1.88}$$

여기서 W 는 식 (1.56)에서 정의한 y_1, y_2 에 대한 론스키안이다. 따라서 u_1, u_2 는 이 u_1', u_2'을 적분함으로써 구해진다. 즉,

$$u_1 = -\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx, \quad u_2 = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx \tag{1.89}$$

예제 1-27 다음 미분방정식의 특수해를 구하라.

$$y''+y=\mathrm{cosec}x$$

[해] 제차 미분방정식 $y''+y'=0$ 에 대한 특성방정식은 $m^2+1=0$ 이고, 근은 $m_1=\mathrm{i}$, $m_2=-\mathrm{i}$ (두 개의 허근)이므로 제차 미분방정식에 대한 해는 $y_h=C_1\cos x+C_2\sin x$ 이므로

$$y_1=\cos x,\ \ y_2=\sin x$$

이다. 식 (1.88)로부터 y_1, y_2 에 대한 론스키안 W 은 다음과 같다.

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=1$$

또한 u_1, u_2 는 식 (1.89)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$u_1=-\int\frac{y_2 f(x)}{W}dx=-\int\sin x\ \mathrm{cosec}x dx=-x$$

$$u_2=\int\frac{y_1 f(x)}{W}dx=\int\cos x\ \mathrm{cosec}x dx=-\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln|\sin x|$$

따라서 비제차 미분방정식의 특수해는 $y_p=u_1y_1+u_2y_2=-x\cos x+\sin x\ln|\sin x|$ 이다.

1.4.2 미정계수법

매개변수 변화법과 같이 일반적인 방법은 아니지만 특수해를 구하는 또 다른 방법으로 널리 이용되는 방법이 미정계수법(method of undetermined coefficients) 이다. 이 방법은 비제차 미분방정식의 우변 함수 $f(x)$ 와 유사한 형태(아래 표 참조)로 해를 가정하여 구하는 방법이다.

Particular solution type for $y''+Py'+Qy=f(x)$		
$f(x)$		$y_p(x)$
Polynomial functions	K	C
	K_1x+K_2	C_1x+C_2
	$K_1x^2+K_2x+K_3$	$C_1x^2+C_2x+C_3$
Trigonometric functions	$K\sin x$	$C_1\sin x+C_2\cos x$
	$K\cos x$	$C_1\sin x+C_2\cos x$

	$K_1 \sin x + K_2 \cos x$	$C_1 \sin x + C_2 \cos x$
Exponential functions	ke^{ax}	Ce^{ax}
Combination of basic functions	kxe^{ax}	$(C_1 + C_2 x)e^{ax}$
	$kx^2 e^{ax}$	$(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{ax}$
	$kx^{ax} \sin x$	$e^{ax}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$
	$kx^{ax} \cos x$	$e^{ax}(C_1 \sin x + C_2 \cos x)$
	$kx \sin x$	$(C_1 + C_2 x)\sin x + (C_3 + C_4 x)\cos x$
	$kx \cos x$	$(C_1 + C_2 x)\sin x + (C_3 + C_4 x)\cos x$
If a term in the above particular solution appears in the homogeneous solution, it is necessary to multiply by a sufficient large power of x in order to make the solution independent.		

예제 1-28 다음 미분방정식을 미정계수법으로 풀어서 해를 구하라.

$$y' + y = x^2$$

[해] 이 문제의 경우에 제차 미분방정식 $y' + y = 0$ 의 해는 $y_h = Ce^{-x}$, 특수해는 $y_p = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$ 인 형태를 갖는다. 이 특수해를 미분방정식에 대입하면

$$(2C_1 x + C_2) + (C_1 x^2 + C_2 x + C_3) = x^2$$
$$(C_1 - 1)x^2 + (2C_1 + C_2)x + (C_2 + C_3) = 0$$
$$\therefore C_1 = 1,\ \ C_2 = 2,\ \ C_3 = -2$$

따라서 특수해는 $y_p = x^2 + 2x - 2$ 이다. 따라서 이 미분방정식의 해는 다음 식으로 주어진다.

$$y = y \ + y_p = C\, e^{-x} + x^2 + 2x - 2$$

예제 1-29 다음 미분방정식을 미정계수법으로 풀어서 해를 구하라.

$$y' - y = e^x$$

[해] 이 문제의 경우에 제차 미분방정식 $y'-y=0$ 의 해는 $y_h = Ce^x$, 특수해의 형태로 $y_p = C_1 e^x$ 를 고려할 수 있으나 미분방정식이 제차인 경우에 해도 e^x 형태로 나타나기 때문에 특수해와 같은 형식을 갖는다. 따라서 특수해가 제차 미분방정식의 해와 독립적이지 않다. 따라서 특수해의 형태를 변경하여 $y_p = C_1 xe^x$ 를 고려한다. 이 특수해를 미분방정식에 대입하면

$$(C_1 xe^x + C_1 e^x) - C_1 xe^x = e^x$$
$$\therefore C_1 = 1$$

따라서 특수해는 $y_p = xe^x$ 이다. 따라서 이 미분방정식의 해는 다음 식으로 주어진다.

$$y = y_h + y_p = C\ e^x + xe^x$$

1.4.3 오일러-코시 미분방정식

다음과 같은 형태의 미분방정식을 오일러-코시 방정식(Euler-Cauchy equation)이라고 한다.

$$x^2 y'' + axy' + by = 0 \tag{1.90}$$

이 오일러-코시 방정식의 해는 다음과 같이 표시된다.

$$y = x^m \tag{1.91}$$

이 식의 1 차 미분, 2 차 미분 관계를 식 (1.90)에 대입하면 다음과 같은 특성방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &x^2 m(m-1)x^{m-2} + axmx^{m-1} + bx^m = 0 \\ &x^m \{m + (a-1)m + b\} = 0 \end{aligned} \tag{1.92}$$

이 식은 m 에 대한 2 차 대수방정식으로 앞에서와 같이 이 방정식의 근의 형태에 따라서 세 가지의 해가 존재한다.

(1) 특성방정식이 두 개의 서로 다른 실근, $m_1 \neq m_2$,을 갖는 경우;

$$y = C_1 x^{m_1 x} + C_2 x^{m_2 x} \tag{1.93}$$

(2) 특성방정식이 중근, $m_1 = m_2 = \dfrac{1-a}{2}$,을 갖는 경우;

$$y = C_1 x^{\frac{1-a}{2}} + C_2(\ln x) x^{\frac{1-a}{2}} \tag{1.94}$$

(3) 특성방정식이 두 개의 서로 다른 허근, $m_1 = \alpha + \beta \mathrm{i}$, $m_2 = \alpha - \beta \mathrm{i}$,을 갖는 경우;

$$y = x^{\alpha}\{C_1 \cos(\beta \ln x) + C_2 \sin(\beta \ln x)\} \tag{1.95}$$

오일러-코시 방정식의 해를 구하는 또 다른 방법을 생각해보자. 만일 식 (1.90)에서 $x = e^t$ 으로 놓으면 다음 관계들이 성립한다.

$$x = e^t, \quad t = \ln x \tag{1.96a}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x} \\ y'' &= \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \end{aligned} \tag{1.96b}$$

이들 식을 식 (1.90)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0$$

이 식은 2 계 상수 계수 선형 미분방정식이므로 앞에서 기술한 방법으로 해를 구할 수 있다. $y = y(t)$ 인 해를 구한 후에 t 대신에 $\ln x$ 를 대입하면 원 미분방정식의 해를 구할 수 있다.

예제 1-30 다음 미분방정식의 해를 구하라.

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$$

[해] 이 미분방정식의 해를 $x = e^t$ 이라고 하면 원 미분방정식은 다음과 같이 나타내지고

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y = 0$$

이 2 계 상수 계수 선형 미분방정식에 대한 특성방정식은 $m^2 + m - 6 = 0$ 이므로 해 $m = 2,\ -3$ 을 얻는다. 따라서

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t}$$

가 되고, 여기에 $t = \ln x$ 를 대입하면 최종 해 y 가 얻어진다.

$$y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x^3}$$

1.4.4 정수 계수 선형 연립 미분방정식

독립변수를 t (시간) 으로 하여 두 개의 미지변수 x=x(t), y=y(t) 에 대해서 다음과 같은 두 개의 정수 계수 비제차 선형 연립미분방정식(system of linear differential equation)을 검토한다.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + ax + by = f(t) \\ \dfrac{dy}{dt} + mx + ny = g(t) \end{cases} \tag{1.97a}$$

여기서 a, b, m, n 은 정수이다.

이 미분방정식에서 $D = \dfrac{d}{dt}$ 로 치환하면 위 식은 다음과 같이 표시되고

$$\begin{cases} Dx + ax + by = f(t) \\ Dy + mx + ny = g(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (D+a)x + by = f(t) \\ (D+n)y + mx = g(t) \end{cases} \tag{1.97b}$$

한편 식 (1.96)의 연립미분방정식은 선형대수 행렬을 이용해서 풀 수 있다. 즉, 식 (1.96)은 다시 다음과 같이 행렬형식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{Bmatrix} \tag{1.98a}$$

즉,

$$X' + AX = F(t)$$
$$(X' = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}, X = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, F(t) = \begin{Bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{Bmatrix}) \tag{1.98b}$$

식 (1.97) 또는 식 (1.98)을 풀기 위한 방법으로는 소거해법(elimination method) 과 일반적인 대각해법(diagonalization method)이 자주 사용된다.

(1) 소거법에 의한 해

다음 선형 연립미분방정식을 예로 소거법에 의해 해를 구하는 방법을 설명한다.

$$\begin{cases} 2x' + y' - 4x - y = e^t \\ x' + 3x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2(D-2)x + (D-1)y = e^t & \text{(i)} \\ Dx + 3x + y = 0 & \text{(ii)} \end{cases}$$

식 (i)과 식 (ii)에서 y 를 소거하기 위해서 식 (ii)에 (D−1)을 곱하고 식 (i)를 빼면, 즉 −(i)+(D−1) x (ii)으로 부터 첫 번째 식은

$$\{(D-1)(D+3)-2(D-2)\}x = e^t$$
$$\therefore (D^2+1)x = e^t \quad \rightarrow \quad x''+x = e^t$$

변수 x 만의 이 미분방정식을 풀면 제차방정식의 해와 비제차방정식의 해를 더하여 다음 해가 얻어진다.

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t \qquad \text{(iii)}$$

이 x 에 대한 해를 식 (ii)에 대입하고 y 에 대해서 풀면 다음 해가 다음과 같이 얻어진다

$$\begin{aligned} y &= -\frac{d}{dt}x - 3x \\ &= -\frac{d}{dt}(C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t) - 3(C_1\cos t + C_2\sin t - \frac{1}{2}e^t) \\ &= (C_1 - 3C_2)\sin t - (3C_1 + C_2)\cos t + 2e^t \end{aligned} \qquad \text{(iv)}$$

또 다른 풀이 방법을 검토해보자. 식 (i), (ii)의 연립방정식은 다음과 같이 행렬 형식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e^t \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(v)}$$

양변에 역행렬 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$ 을 곱하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} e^t \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -10 & 3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e^t \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &\left(\because \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned} \qquad \text{(vi)}$$

이 연립방정식은 식 (1.98a)의 형식을 갖는다. 이 식을 전개하여 나타내면

$$\begin{cases} x'+3x+y = 0 \\ y'-10x-3y = e^t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (D+3)x+y = 0 \\ (D-3)y-10x = e^t \end{cases} \qquad \text{(vii)}$$

식 (vii)의 첫 번째 식에서 $y = -(D+3)x$ 를 두 번째 식에 대입하면

$$\begin{aligned} &-(D+3)(D-3)x - 10x = e^t \\ &\rightarrow (D^2+1)x = -e^t, \quad i.e,\ x''+x = -e^t \end{aligned} \qquad \text{(viii)}$$

따라서 x 에 대한 해는 식 (iii)과 같이 된다.

$$x = x_h + x_p = C_1 \cos t + C_2 \sin t - \frac{1}{2}e^t$$

또한 y 에 대한 해는 식 (iv)에서 다음과 같이 구해진다.

$$y = -(D+3)x = -(\frac{d}{dt}+3)x = (C_1 - 3C_2)\sin t - (3C_1 + C_2)\cos t + 2e^t$$

(2) 대각화에 의한 해

여기서는 다음과 같은 제차 선형 연립미분방정식을 대상으로 대각화에 의한 해를 구하는 방법을 설명한다.

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{Y}' = A\vec{Y}$$

$$\vec{Y}' = \begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ m & n \end{bmatrix}, \quad \vec{Y} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \tag{1.99}$$

이 문제에서는 A 행렬이 2 x 2 행렬이지만 이하에서는 A 행렬이 n x n 행렬인 경우에 대해서 설명한다.

이 방정식, $\vec{Y}' = A\vec{Y}$,을 대각화하기 위해 다음과 같이 변수 변환을 한다.

$$\vec{Y} = P\vec{Z} \tag{1.100}$$

여기서 P 는 실수 성분을 갖는 직교 변환행렬(orthogonal transformation matrix)이다. 따라서 식 (1.100)을 식 (1.99)에 대입하면

$$\vec{Y}' = A\vec{Y}, \quad P\vec{Z}' = AP\vec{Z}$$

$$\therefore \vec{Z}' = P^{-1}AP\vec{Z} = \Lambda\vec{Z} \tag{1.101}$$

$$\Lambda = P^{-1}AP = P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \cdots\cdot \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots\cdot \\ \cdot\cdot & & \\ 0 \cdots\cdot & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad : \text{diagonal matrix}$$

따라서

$$\vec{Z}' = P^{-1}AP\vec{Z} = \Lambda\vec{Z}$$

$$\begin{Bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \; 0 \; 0 \cdots\cdot \\ 0 \;\; \lambda_2 \, 0 \cdots\cdot \\ \cdot\cdot \\ 0 \cdots\cdot \qquad \lambda_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} \tag{1.102a}$$

$$\therefore z_1 = c_1 e^{\lambda_1 t},\ z_2 = c_2 e^{\lambda_2 t},\ \cdots$$

또한

$$\vec{Z} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} \tag{1.102b}$$

따라서 이 미분방정식의 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$\vec{Y} = P\,\vec{Z} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots p_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{Bmatrix} \tag{1.103a}$$

$$\begin{aligned} x &= c_1 p_{11} e^{\lambda_1 t} + c_2 p_{12} e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n p_{n1} e^{\lambda_n t} \\ y &= c_1 p_{21} e^{\lambda_1 t} + c_2 p_{22} e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n p_{n2} e^{\lambda_n t} \end{aligned} \tag{1.103b}$$

1.4.5 정수 계수 비선형 연립미분방정식

식 (1.13d)의 포식자-먹이모델은 대표적인 비선형 연립미분방정식이다.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy = x(\alpha - \beta y) \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y = -y(\gamma - \delta x) \end{aligned} \tag{1.104a}$$

여기서 먹이는 토끼풀, 포식자는 토끼 또는 먹이는 토끼, 포식자는 여우나 살쾡이라고 생각할 수 있다. 이 식으로부터 만일 포식자(y=0)가 없다면 먹이 x 는 선형적으로 증가하고 또한 먹이가 없다면(x=0) 포식자 y 는 선형적으로 줄어든다. 또한 포식자와

먹이가 있는 경우에 먹이는 포식자와 먹이의 곱에 비례하여 감소하고, 포식자는 포식자와 먹이의 곱에 비례하여 증가한다는 것을 알 수 있다.
이 경우에 해는 두 식으로부터 다음과 같이 나타내지고

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(\delta x - \gamma)}{x(\beta y - \alpha)} \tag{1.104b}$$

이 식을 변수분리하고

$$\frac{\beta y - \alpha}{y} dy + \frac{\delta x - \gamma}{x} dx = 0 \tag{1.104c}$$

적분하면 해가 다음과 같이 된다.

$$C = \delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y \tag{1.104d}$$

한편 먹이와 포식자의 변화가 없는 안정한 상태를 고려하면

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 0 \ \rightarrow x(\alpha - \beta y) = 0 \ \rightarrow y = \frac{\alpha}{\beta} \\ &\frac{dy}{dt} = 0 \ \rightarrow -y(\gamma - \delta x) = 0 \ \rightarrow x = \frac{\gamma}{\delta} \end{aligned} \tag{1.104e}$$

따라서 임계점은 $(x, y) = (\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$ 이 된다. 여기서 $\alpha, \beta, \delta, \gamma = 1,1,1,1$ 로 하고 C 를 1.5~3.0 로 한 경우에 포식자(여우)−먹이(토끼) 한계곡선(그림 1−20)과 시간에 따른 두 개채군의 변화(그림 1−21)를 아래에 나타내었다.

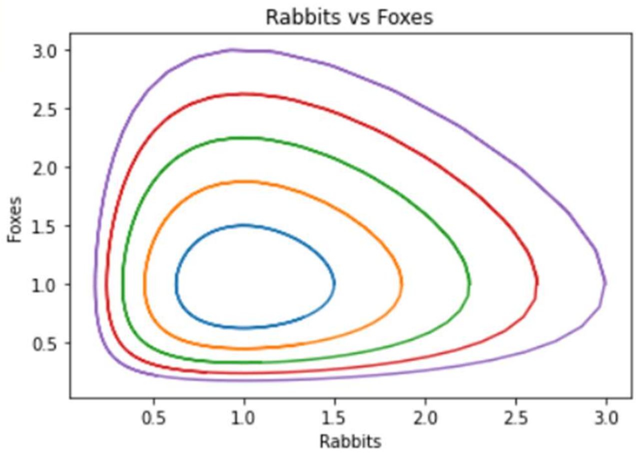


Fig. 1−20 먹이와 포식자의 한계곡선

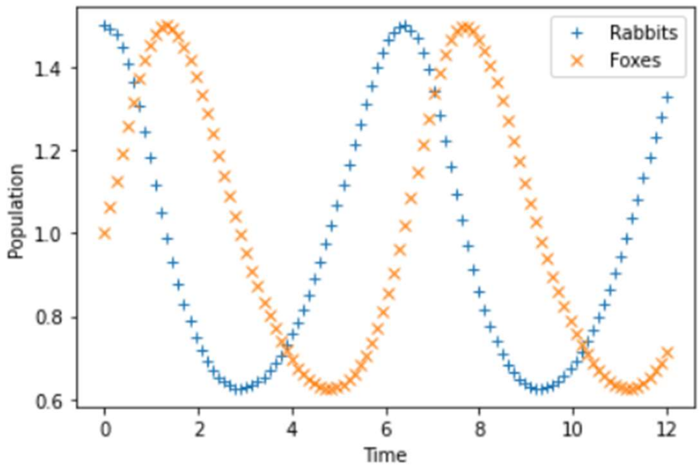


Fig. 1-21 먹이와 포식자 수의 시간 변화

1.4.6 고계 미분방정식의 1 계 미분방정식화

고계 미분방정식의 계수를 낮추어 1 계 선형 연립미분방정식의 형태로 만들어 해를 구하는 방법을 이하에 설명한다. 다음 2 계 상미분방정식 문제를 검토한다.

$$2y''-5y'+y=0,\quad \text{B.C.}: y(3)=6,\;\; y'(3)=-1$$

이 문제에서 다음과 같은 2 개의 함수를 도입한다.

$$y(t)=x_1(t),\; y'(t)=x_2(t)$$

따라서 각각을 미분해보면

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= y'(t)=x_2 \\ x'_2(t) &= y''(t)=-\frac{1}{2}y+\frac{5}{2}y'=-\frac{1}{2}x_1+\frac{5}{2}x_2 \end{aligned}$$

또한 경계조건은

$$\begin{aligned} y(3) &= x_1(3)=6 \\ y'(3) &= x_2(3)=-1 \end{aligned}$$

따라서 문제의 2 계 상미분방정식을 푸는 것은 다음의 1 계 선형 연립미분방정식을 푸는 문제로 치환된다.

$$\begin{cases} x'_1 = x_2\,, & x_1(3)=6 \\ x'_2 = -\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{5}{2}x_2\,, & x_2(3)=\text{-}1 \end{cases}$$

이 1 계 선형 연립미분방정식은 앞에서 설명한 소거법을 이용하면 풀 수 있다.

다음과 같은 고계 미분방정식의 경우도 동일한 방법을 적용할 수 있다.

$$y^{(4)} = 3y'' - (\sin t)y' + 8y = t^2,$$
$$\mathrm{IC}: y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3,\ y'''(0) = 4$$

여기서 $x_1 = y,\ x_2 = y',\ x_3 = y'',\ x_4 = y'''$ 인 함수를 도입하면 이 문제도 다음의 1 계 선형 연립미분방정식을 푸는 문제로 치환된다.

$$\begin{aligned}
x'_1 &= y' = x_2 & x_1(0) &= 1\\
x'_2 &= y'' = x_3 & x_2(0) &= 2\\
x'_3 &= y''' = x_4 & x_3(0) &= 3\\
x'_4 &= y^{(4)} = -8y + (\sin t)y' - 3y'' + t^2 & &\\
&= -8x_1 + (\sin t)x_2 - 3x_3 + t^2 & x_4(0) &= 4
\end{aligned}$$

위에서는 고계 미분방정식의 계수를 낮추어 1 계 선형 연립미분방정식의 형태로 하여 해를 구하였지만 그 역으로 1 계 선형 연립미분방정식을 고계 미분방정식으로 변환하여 이 미분방정식에 대해서 해를 구할 수도 있다.

다음 1 계 선형 연립미분방정식을 검토해보자.

$$\begin{cases} y' = 5y + 4z \\ z' = 4y + 5z \end{cases}$$

첫 번째 식을 미분해보면

$$y'' = (y')' = 5y' + 4z'$$
$$y'' = 5y' + 4(4y + 5z) = 5y' + 16y + 20z$$

그런데 두 번째 식에서 $z = \frac{1}{4}(y' - 5y)$ 이므로 이 식을 위 식에 대입하면 다음과 같이 2 계 미분방정식이 얻어진다.

$$y'' = 5y' + 16y + 20(\frac{1}{4}(y' - 5y)$$
$$\therefore y'' - 10y' + 9y = 0$$

이 2 계 미분방정식의 해 y 는 다음과 같이 나타내진다.

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$$

따라서 해 z 는 다음과 같이 나타내진다.

$$z=\frac{1}{4}(y'-5y)=\frac{1}{4}\left\{C_1e^x+9C_2e^{9x}-4(C_1e^x+C_2e^{9x})\right\}$$
$$=-C_1e^x+C_2e^{9x}$$

예제 1-31 1500 리터 용량의 탱크에 시간 t=0 에서 소금 5 kg 이 녹아 있는 물 600 리터가 들어 있다. 이 탱크에 $\frac{1}{5}(1+\cos t)$ (kg/liter)인 농도 (concentration of the salt)의 소금을 포함하고 있는 물이 시간당 9 리터의 속도로 탱크에 유입되고 있다. 한편 탱크의 밑바닥으로부터 시간당 6 리터의 속도로 잘 섞인 소금물이 빠져 나가고 있다. 탱크 안의 소금의 양 Q 를 시간 t 의 함수로 나타내어라. 또한 탱크를 가득 채울 때 탱크에 남아있는 소금의 양은 어떻게 되는가?

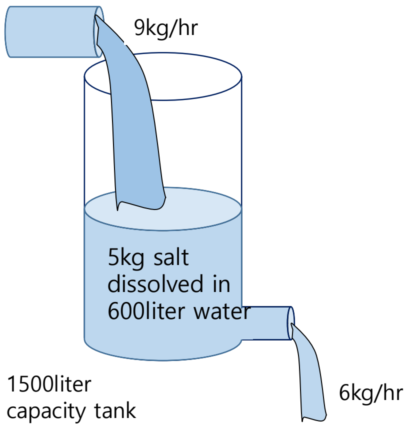


Fig. 1-22 탱크 내의 소금물 농도계산

[해] 탱크에는 매시간 마다 3 리터의 소금물이 증가하게 되고(=소금 유입량-소금 유출량) 따라서 t 시간 후에는 탱크에는 600+3t 의 소금물이 남아있으며, 탱크의 소금양의 증가는 다음과 같이 초기값 문제에 대한 미분방정식으로 나타낼 수 있다. 현재 시간에

탱크 안의 소금의 양 Q 라고 하면 시간당 소금 유입량은 $9\times\left(\frac{1}{5}(1+\cos t)\right)$, 소금 유출량은 $6\times\left(\frac{Q(t)}{600+3t}\right)$이므로 소금양 증가는

$$Q'(t)=9\times\left(\frac{1}{5}(1+\cos t)\right)-6\times\left(\frac{Q(t)}{600+3t}\right),\quad \text{IV}:Q(0)=5 \tag{1-105a}$$

이 식을 다시 정리하면

$$Q'(t)+\frac{2Q(t)}{200+t}=\frac{9}{5}(1+\cos t) \tag{1-105b}$$

이 식을 식 (1.34)와 같이 1 계 선형 미분방정식으로 나타내면

$$\left(\frac{2Q(t)}{200+t}-\frac{9}{5}(1+\cos t)\right)dt+dQ=0 \tag{1-105c}$$

따라서 식 (1.39)의 적분인자는 $p=\left(\frac{2Q(t)}{200+t}-\frac{9}{5}(1+\cos t)\right)$, $q=1$가 되므로

$$R=\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial Q}-\frac{\partial q}{\partial t}\right)=\frac{1}{1}\left(\frac{2}{200+t}-0\right)\quad \therefore \mu=e^{\int Rdt}=e^{\int\frac{2}{200+t}dt}=(200+t)^2 \tag{1-105d}$$

이 적분인자를 양변에 곱하면

$$\begin{aligned}&(200+t)^2\times\left\{Q'(t)+\frac{2Q(t)}{200+t}=\frac{9}{5}(1+\cos t)\right\}\\&(200+t)^2Q'(t)+2Q(t)(200+t)=(200+t)^2\frac{9}{5}(1+\cos t)\end{aligned} \tag{1-105e}$$

여기서 좌변은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(200+t)^2Q'+2Q(200+t)=\{(200+t)^2Q(t)\}' \tag{1-105f}$$

따라서 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{(200+t)^2Q(t)\}'=(200+t)^2\frac{9}{5}(1+\cos t) \tag{1-105g}$$

이 식을 적분하면

$$\int\left\{(200+t)^2 Q(t)\right\}' dt=\int(200+t)^2 \frac{9}{5}(1+\cos t)dt$$
$$(200+t)^2 Q(t)=\frac{9}{5}\left\{\frac{1}{3}(200+t)^3+\int(200+t)^2\cos t dt\right\}+C$$
$$\int(200+t)^2\cos t dt=[(200+t)^2\sin t]-2\int(200+t)\sin t dt \qquad (1-105h)$$
$$(\int uv'=\int[uv]'-\int u'v,\quad \int\cos t dt=\sin t,\quad \int\sin t dt=-\cos t)$$
$$\int(200+t)\sin t dt=[-(200+t)\cos t]+\int\cos t dt$$
$$\therefore Q(t)=\frac{1}{(200+t)^2}\frac{9}{5}\left\{\frac{1}{3}(200+t)^3+(200+t)^2\sin t+2(200+t)\cos t-2\sin t\right\}+C$$

초기에 탱크 내에 소금 5kg 이 녹아있었으므로 초기조건, Q(t=0)=5 을 대입하면 적분상수 C=−120013 가 얻어지고 따라서 시간 t 에서 탱크에 남아있는 소금양은 다음과 같다.

$$Q(t)=\frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}(200+t)+\sin t+\frac{2\cos t}{200+t}-\frac{2\sin t}{(200+t)^2}\right)-\frac{120013}{(200+t)^2} \qquad (1-105i)$$

또한 탱크가 가득 차는 것은 1500=600+3t 일 때이므로 t=300 시간이다. 따라서 이 때 탱크에 들어있는 소금양은 Q(t=300)=297.962 kg 이다.

만일 이 문제에서 시간 t=0 에서 탱크 내에는 물(맹물) 600 리터가 들어 있는 경우를 가정하면 식 (1−105h)에서 초기조건, Q(t=0)=0 을 적용하면 적분상수 C(=−120018)가 구해진다.

1.5 미분방정식의 수치해법

1.5.1 미분방정식의 급수해

다음과 같은 형태의 미분방정식을 수치해석적으로 풀기 위한 한 방법으로 급수해(power series solution 또는 멱급수해(冪級數解))를 이용하여 푸는 방법에 대해서 이하에 설명한다.

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1.106)$$

이 미분방정식의 해로 다음과 같은 급수해의 형태를 가정한다.

$$y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \tag{1.107a}$$

이 식은 $x=0$ 에서 무한 연속미분이 가능하다는 것을 알 수 있다. 이 함수는 $x=0$ 에서 해석적(analytic)이라고 한다. 식 (1.107a)와 같이 수렴하는 급수해로 나타낼 수 있는 해석적인 함수를 해석함수(analytic fuction)라고 부른다.

미분방정식 (1.106)의 함수 $P(x)$ 와 $Q(x)$ 가 $x=0$ 에서 해석적이라면 $x=0$ 를 이 미분방정식의 정상점(ordinary point)이라고 부른다. 이 경우에 식 (1.107a)의 급수해가 미분방정식 (1.106)의 해가 될 수 있다. 만일 $x=\alpha$ 에서 미분방정식 (1.106)의 함수 $P(x)$ 와 $Q(x)$ 가 해석적이 아니라면 $x=\alpha$ 를 특이점(singular point)이라고 한다.

이 절에서는 $x=0$ 에서 $P(x)$ 와 $Q(x)$ 가 해석적인 경우 만을 다루고, $x=\alpha$ 에서 특이점을 갖는 경우는 다음 절에서 설명한다.

식 (1.107a)를 식 (1.106)에 대입하여 계수들 간의 재귀적 관계(recurrence relation, 재귀식 또는 점화식)를 결정하여 해를 구한다. 다음과 같은 미분방정식을 예로 구체적으로 이 방법을 설명해보자.

$$y'' + 2y' + xy = 0 \tag{1.107b}$$

이 식에 식 (1.107a)로부터 다음의 관계를 대입하면

$$\begin{cases} y = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \\ y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \\ y'' = 2a_2 + 2\times 3a_3x + \cdots + (n-1)na_nx^{n-2} + \cdots \end{cases} \tag{1.107c}$$

또는

$$\begin{cases} y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \quad (\neq \sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1}) \\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} \quad (\neq \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}) \end{cases} \tag{1.107d}$$

여기서 각각의 미분에서 합 기호의 하한이 다르다는 것에 주의하여야 한다.

따라서 식 (1.107c)를 식 (1.107b)에 대입하면

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + 2y' + xy \\ &= 2a_1 + (6a_2 + a_0)x + (12a_3 + a_1)x^2 + \cdots + [(n^2+n)a_n + a_{n-2}]x^{n-1} + \cdots \end{aligned} \tag{1.107e}$$

이 식에서 좌변 0 이 만족하기 위해서는 우변의 계수들이 모두 영이어야 하므로 $a_0 \neq 0$ 이라고 하면 계수들 사이에 다음 관계가 성립한다.

$$a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{a_0}{6},\ a_3 = -\frac{a_1}{12} = 0,\ \cdots,\ a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)} \quad (n \geq 2) \tag{1.107f}$$

따라서

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= a_0 \left\{ 1 + (-\frac{1}{3!})x^2 + (\frac{1}{5!})x^4 + (-\frac{1}{7!})x^5 + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \cdots \right\} \end{aligned} \tag{1.107g}$$

위에서는 식 (1.107c)를 이용하였지만 식 (1.107d)를 식 (1.107b)에 대입하는 경우에는

$$\begin{aligned} 0 = xy'' + 2y' + xy &= x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \end{aligned} \tag{1.107h}$$

우변 첫 번째, 두 번째 식에서 $n = k+2$, 세 번째 식에서는 $n = k$ 로 두어서 모든 항의 x 의 차수를 (k+1)로 동일하게 한다.

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^{k+1} + 2\sum_{k=-1}^{\infty} (k+2)a_{k+2} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \tag{1.107i}$$

또한 모든 식에서 합 기호의 하한을 k=0 로 동일하게 하기 위해서 두 번째 식을 전개하면

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^{k+1} + \left\{ 2(-1+2)a_{(-1+2)} x^{-1+1} + \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+2)a_{k+2} x^{k+1} \right\} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \\ &= 2(-1+2)a_{(-1+2)} x^{-1+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \{ (k+2)(k+1)a_{k+2} + 2(k+2)a_{k+2} + a_k \} x^{k+1} \end{aligned} \tag{1.107j}$$

따라서

$$\therefore \begin{cases} 2(-1+2)a_{(-1+2)}x^{-1+1} = 0, \qquad \to a_1 = 0 \\ \sum_{k=0}^{\infty}\{(k+2)(k+1)a_{k+2} + 2(k+2)a_{k+2} + a_k\}x^{k+1} \\ \qquad \to a_{k+2} = -\frac{1}{(k+2)(k+3)}a_k \end{cases} \tag{1.107k}$$

여기서 계수들 간에는 $a_{k+2} = -\frac{1}{(k+2)(k+3)}a_k$ 관계가 있고 이것을 재귀적 관계라고 한다. 이 관계식을 적용하면 최종 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= a_0 + (-\frac{a_0}{3!})x^2 + (\frac{a_0}{5!})x^4 \cdots + (-1)^k \frac{a_0}{(2k+1)!}x^{2k} + \cdots \end{aligned} \tag{1.107l}$$

$$(\because a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{a_0}{3\cdot 2},\ a_3 = -\frac{a_1}{4\cdot 3} = 0,\ a_4 = -\frac{a_2}{5\cdot 4} = \frac{a_0}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}, \cdots)$$

그림 1-23 에 $a_0 = 1$ 로 하여 $n = 2, 4, \cdots, 50$ 에 대해서 윗 식의 부분 합들에 대한 도형을 나타내었다.

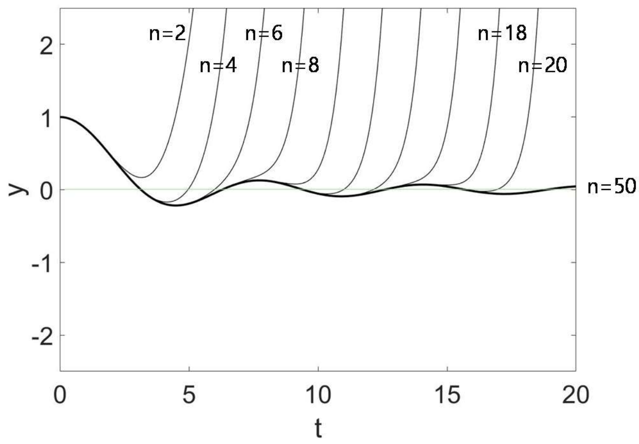


Fig. 1-23 미분방정식의 급수해 예

예제 1-32 다음 에르미트 미분방정식(Hermite differential equation)에 대해 급수해법을 이용하여 해를 구하고 계수들간의 재귀적 관계를 나타내어라.

$$y''-2xy'+\lambda y=0, \qquad \lambda=1 \tag{1.108}$$

[해] 앞에서와 같은 방법으로 수행하면 계수들간에 다음의 재귀적 관계가 얻어진다.

$$a_{k+2}=\frac{(2k-1)}{(k+2)(k+3)}a_k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

따라서

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= a_0\left\{1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{240}x^6-\cdots\right\}+a_1\left\{x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{112}x^7+\cdots\right\} \\ &= a_0 H_\lambda(x)+a_1 h_\lambda(x) \end{aligned} \tag{1.109}$$

여기서

$$\begin{aligned} H_\lambda(x) &= 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{240}x^6-\cdots \\ h_\lambda(x) &= x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^5+\frac{1}{112}x^7+\cdots \end{aligned} \tag{1.110}$$

$H_\lambda(x)$ 는 에르미트 다항식(Hermite polynomials)이고 $h_\lambda(x)$ 는 에르미트 함수 (Hermite functions)이다.

이 에르미트 다항식 $H_\lambda(x)$ 은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} &H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) \\ &H_0(x)=1,\ \ H_1(x)=2x,\ \ H_2(x)=4x^2-2 \\ &H_3(x)=8x^3-12x,\ \ H_4(x)=16x^4-48x^2+12 \\ &\cdot \end{aligned} \tag{1.111}$$

그림 1-24 에 이들 에르미트 다항식의 형태를 나타내었다.

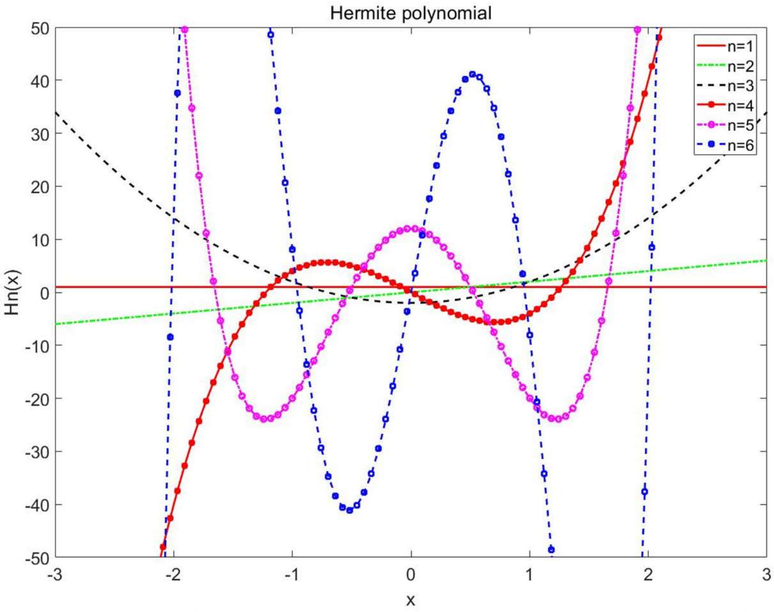


Fig. 1-24 에르미트 미분방정식의 급수해와 에르미트 다항식

이 에르미트 미분방정식에서 얻어지는 에르미트 다항식은 대표적인 직교 다항식이다.

두 벡터에 대한 직교성은 벡터들을 스칼러 곱으로 판단하지만 함수에 대한 직교성은 두 함수들의 곱을 구간 영역 내에서 적분한 결과로 판단한다. 즉 에르미트 함수의 경우에는 다음과 같이 직교성을 갖는다.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} H_1(x)H_2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2x\cdot(4x^2-2)dx = 0 \\
&\int_{-\infty}^{\infty} H_2(x)H_3(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} (4x^2-2)\cdot(8x^3-12x)dx = 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)dx = 0 \quad (m \neq n)
\end{aligned} \tag{1.112}$$

예제 1-33 다음 르장드르 미분방정식(Legendre differential equation)에 대해 급수해법을 이용하여 해를 구하고 계수들간의 재귀적 관계를 나타내어라.

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y = 0, \qquad (-1<x<1) \tag{1.113a}$$

이 르장드르 방정식은 제 4 장에서 기술할 스트럼−리우빌 방정식(Sturm−Liouville eqation) 형태로도 나타낼 수 있다.

$$\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right\}+\lambda y=0,\qquad \lambda=\alpha(\alpha+1) \tag{1.113b}$$

[해] 앞에서와 같은 방법으로 수행하면 계수들간에 다음의 재귀적 관계가 얻어진다.

$$a_{k+2}=\frac{(\alpha-k)(\alpha+k+1)}{(k+1)(k+2)}a_k \qquad (k=0,1,2,\cdots)$$

$$\begin{aligned} y&=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=a_0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \\ &=a_0\left\{1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4-\cdots\right\} \\ &\quad+a_1\left\{x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^2+\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{4!}x^5-\cdots\right\} \\ &=a_0u_\alpha(x)+a_1v_\alpha(x)\qquad (=P(x)) \end{aligned} \tag{1.114}$$

여기서

$$\begin{aligned} u_\alpha(x)&=1-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4-\cdots \\ v_\alpha(x)&=x-\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^2+\frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{4!}x^5-\cdots \end{aligned} \tag{1.115}$$

$P(x)$ 는 르장드르(Legendre polynomials)이다.

이 르장드르 다항식 $P(x)$ 은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$P(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(x^2-1)^n\right\}:\quad \text{Rodriges' formular}$$

$$\begin{aligned} &P_0(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1) \\ &P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\quad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \\ &\cdots \end{aligned} \tag{1.116}$$

그림 1−25 에 르장드르 다항식의 형태를 나타내었다

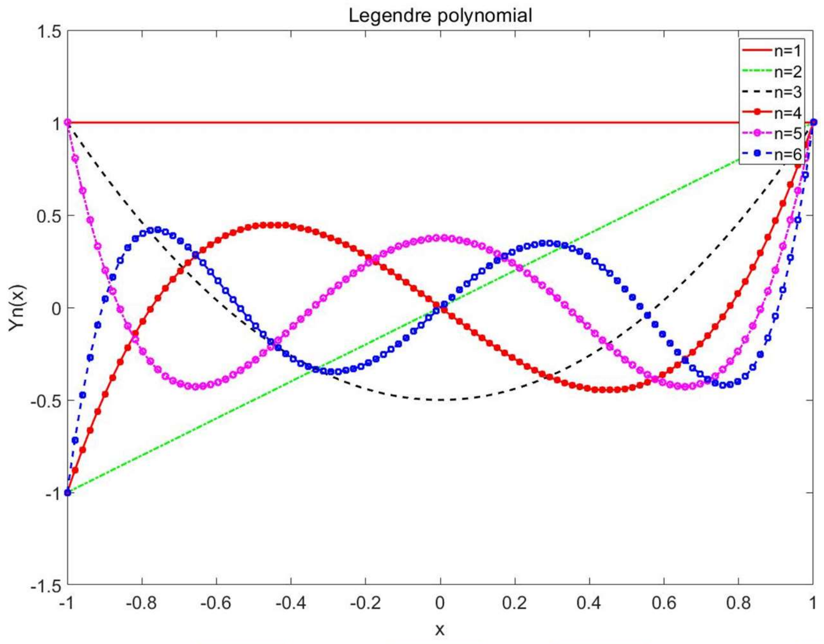


Fig. 1-25 르장드르 미분방정식의 급수해와 르장드르 다항식

르장드르 함수의 경우도 다음과 같이 직교성을 갖는다.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)dx = \int_{-1}^{1} x\cdot\frac{1}{2}(3x^2-1)dx = 0 \\
&\int_{-1}^{1} P_2(x)P_3(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3x^2-1)\cdot\frac{1}{2}(5x^3-3x)dx = 0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = 0 \quad (m \neq n)
\end{aligned} \tag{1.117}$$

1.5.2 정규 특이점을 갖는 미분방정식의 급수해

$x=\alpha$ 에서 특이점을 가는 다음의 미분방정식에서

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1.118}$$

$(x-\alpha)P(x)$ 과 $(x-\alpha)^2Q(x)$ 이 정상점이라면 $x=\alpha$ 를 이 미분방정식의 정규 특이점(regular singular point)이라고 한다.

아래의 미분방정식을 생각해보자.

$$(x-1)^3 x^2 y'' + 2(x-1)xy' - 3y = 0$$
$$y'' + \frac{2}{(x-1)^2 x} y' - \frac{3}{(x-1)^3 x^2} y = 0$$
$$P(x) = \frac{2}{(x-1)^2 x}, \quad Q(x) = -\frac{3}{(x-1)^3 x^2}$$

이 미분방정식에서 $x=0$과 $x=1$은 특이점이다. 그런데 $x=0$에서

$$(x-0)P(x) = \frac{2}{(x-1)^2}, \quad (x-0)^2 Q(x) = -\frac{3}{(x-1)^3}$$

이므로 $x=0$는 정규 특이점이다. 그런데 $x=1$은 비정규 특이점(irregular singular point)이다.

$x=\alpha$가 미분방정식의 정규 특이점이라면 미분방정식의 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$\begin{aligned} y &= (x-\alpha)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n \\ &= (x-\alpha)^{\lambda} \left\{ a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots \right\} \end{aligned} \tag{1.119a}$$

만일 $x=0$이라면 식 (1.119a)는 다음과 같이 나타내진다.

$$y = x^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^{\lambda} + a_1 x^{\lambda+1} + a_2 x^{\lambda+2} + \cdots \tag{1.119b}$$

이 식에 의한 미분방정식의 풀이 방법을 **프로베니우스 방법**(Frobenius method)이라고 한다. 이들 식을 이용하여 y’, y’’을 구하여 원 미분방정식에 대입하여 정리하고 $a_0 \neq 0$라고 하면 λ에 대한 2 차방정식이 얻어진다. 이 방정식을 결정 방정식(indicial equation 또는 결정 다항식(indicial polynomial))이라고 부른다.

다음 예제를 통하여 정규 특이점을 갖는 미분방정식의 해가 어떻게 구해지는지를 설명한다.

예제 1-34 다음 미분방정식의 해를 급수해로 구하라.

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2) y = 0, \quad (0 < x < 1) \tag{1.120a}$$

여기서 α는 임의의 복소수(complex number) 이다. 이 미분방정식은 α 계의 베셀 미분방정식(Bessel’s differential equation of α order)이라고 불린다.

[해] 이 미분방정식은 다시 다음과 같이 나타낼 수 있고

$$y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{\alpha^2}{x^2})y=0 \quad (\alpha \ge 0) \tag{1.120b}$$

이 미분방정식에서 $x=0$ 는 정규 특이점이다. 따라서 이 미분방정식의 해는 다음과 같은 급수해로 나타낼 수 있다.

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \quad (a_0 \ne 0) \tag{1.121}$$

이 급수해의 y', y''을 구하여 다음 관계를 미분방정식에 대입하면

$$x^2 y''=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda}$$

$$xy'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda}$$

$$(x^2-a^2)y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda+2} - \alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda}$$

이들 식을 원 미분방정식에 대입하여 풀기 위해서는 x 의 지수가 같아야 한다. 따라서 마지막 식에서

$$\begin{aligned}(x^2-a^2)y&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda+2} - \alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda}\\ &=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2} x^{n+\lambda} - \alpha^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+\lambda}\end{aligned}$$

와 같이 전개하면 나머지 식들의 항에서도 합의 하한을 n=2 로 하는 것, 즉 $\sum_{n=2}^{\infty}(\cdot\cdot)$ 형태의 식으로 만드는 것 필요하다. 위 식들을 다시 합의 하한을 n=2 로 만들면

$$x^2 y''=a_0\lambda(\lambda-1)x^{\lambda}+a_1(\lambda+1)\lambda x^{\lambda+1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(n+\lambda)(n+\lambda-1)x^{n+\lambda}$$

$$xy'=a_0\lambda x^{\lambda}+a_1(\lambda+1)x^{\lambda+1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_n(n+\lambda)x^{n+\lambda}$$

$$(x^2-a^2)y=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n+\lambda}-\alpha^2(a_0x^{\lambda}+a_1x^{\lambda+1})-\alpha^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^{n+\lambda}$$

따라서 원 미분방정식은 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2) y \\ &= a_0 \left\{ \lambda(\lambda-1) + \lambda - \alpha^2 \right\} x^{\lambda} + a_1 \left\{ \lambda(\lambda+1) + \lambda + 1 - \alpha^2 \right\} x^{\lambda+1} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) + a_n (n+\lambda) + a_{n-2} - a_n \alpha^2 \right\} x^{n+\lambda} \end{aligned} \tag{1.122}$$

이 임의 x 에 대해서 위 식이 만족하기 위해서는 다음 식들이 성립하여야 한다.

$$\begin{cases} (i)\ a_0 \left\{ \lambda(\lambda-1) + \lambda - \alpha^2 \right\} = a_0 \left\{ \lambda^2 - \alpha^2 \right\} = 0 \\ (ii)\ a_1 \left\{ \lambda(\lambda+1) + \lambda + 1 - \alpha^2 \right\} = a_1 \left\{ (\lambda+1)^2 - \alpha^2 \right\} = 0 \\ (iii)\ a_n (n+\lambda)(n+\lambda-1) + a_n (n+\lambda) + a_{n-2} - a_n \alpha^2 \\ \qquad = a_n (n+\lambda+\alpha)(n+\lambda-\alpha) + a_{n-2} = 0 \quad (n \ge 2) \end{cases} \tag{1.123}$$

이들 식 중에서 a_0를 포함한 첫 번째 식이 결정방정식이다. 이 식으로부터

$$\lambda = \pm\alpha \tag{1.124a}$$

가 얻어진다. 이 λ를 두 번째 식에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$a_1 \left\{ (\pm\alpha+1)^2 - \alpha^2 \right\} = a_1 (\pm 2\alpha + 1) = 0 \tag{1.124b}$$

여기서 $a_1 = 0, \alpha = -0.5$ 또는 $a_1 = 0, \alpha = 0.5$가 된다. 그런데 $\alpha \ge 0$ 이어야 하므로 $\alpha \ne 0.5$ 이면 $a_1 = 0$이어야 한다.

세 변째 식에서 계수들간의 재귀적 관계는

$$a_n = -\frac{1}{(n+\lambda+\alpha)(n+\lambda-\alpha)} a_{n-2} \quad (n \ge 0) \tag{1.125}$$

이므로 $\lambda = \alpha$ 일 때는 다음 관계가 얻어진다.

$$a_n = -\frac{1}{n(2\alpha+n)} a_{n-2} \tag{1.126}$$

$a_1 = 0$이므로 이 관계식은 구체적으로

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{2(2\alpha+2)} a_0 = -\frac{1}{2 \cdot 2(\alpha+1)} a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{3(2\alpha+3)} a_1 = 0, \\ a_4 &= -\frac{1}{4(2\alpha+4)} a_2 = (-1)\frac{1}{4 \cdot 2(\alpha+2)} (-1)\frac{1}{2 \cdot 2(\alpha+1)} a_0 \\ &= (-1)^2 \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 2^2 (\alpha+1)(\alpha+2)} a_0 =, \quad a_5 = 0, \cdots \end{aligned}$$

따라서

$$
\begin{aligned}
a_{2m} &= (-1)^m \frac{1}{(2\cdot 4\cdots 2m\cdot 2^m(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)} a_0 \\
&= (-1)^m \frac{1}{(2^{2m}\cdot m!)(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)} a_0 \quad (m=0,1,2\cdots)
\end{aligned}
\tag{1.127}
$$

여기서 $a_0 = 1$로 두면 이 미분방정식의 해는 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2^{2m}\cdot m!)(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)} x^{2m+\alpha} \quad (m=0,1,2\cdots) \\
&= x^{\alpha}\left\{1-\frac{x^2}{2^2(\alpha+1)}+\frac{x^4}{2^4 2!(\alpha+1)(\alpha+2)}-\frac{x^6}{2^6 3!(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\cdots\right\}
\end{aligned}
\tag{1.128}
$$

한편 $\lambda = -\alpha$ 일 때는 마찬가지 방법으로 다음 관계가 얻어진다.

$$
y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2^{2m}\cdot m!)(-\alpha+1)(-\alpha+2)\cdots(-\alpha+m)} x^{2m-\alpha} \quad (m=0,1,2\cdots) \tag{1.129}
$$

만일 a_0를

$$
a_0 = \frac{1}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)} \tag{1.130}
$$

라고 하면

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2^{2m}\cdot m!)(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)} \frac{1}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)} x^{2m+\alpha} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2^{2m+\alpha}\cdot m!)} \frac{1}{\Gamma(1+\alpha+m)} x^{2m+\alpha} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1+\alpha+m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha} \quad (m=0,1,2\cdots) \\
&= J_{\alpha}(x)
\end{aligned}
\tag{1.131}
$$

여기서 $\Gamma(x)$는 감마 함수(Gamma function)이고 다음과 같은 특성을 갖는다.

$$\Gamma(x)=\int_o^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\quad \Gamma(x+1)=\int_o^\infty t^x e^{-t}dt$$

$$\Gamma(1)=\int_o^\infty e^{-t}dt=1,\ \Gamma(2)=1\Gamma(1)=1,\ \Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!,$$

$$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3!,\ \cdots$$

$$\Gamma(1+m)=m\Gamma(m)=m! \tag{1.132}$$

$$\Gamma(m+\alpha+1)=(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+m)\Gamma(\alpha+1)$$

$$=(\alpha+m)!$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

마찬가지로 $\lambda=-\alpha$ 일 때는 해가 다음과 같이 나타내진다.

$$y_2=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(2^{2m-\alpha}\cdot m!)}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha+m)}x^{2m-\alpha}\quad=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1-\alpha+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\alpha} \tag{1.133}$$

$$=J_{-\alpha}(x)$$

식 (1.131)의 함수 $J_\alpha(x)$ 와 식 (1.133)의 함수 $J_{-\alpha}(x)$ 를 α 계의 제 1 종 베셀 함수(Bessel function of the first kind of order α)이라고 부른다.

만일 α 가 0 인 경우에 식 (1.131)로부터

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}=1-\frac{x^2}{2^2(1!)^2}+\frac{x^4}{2^4(2!)^2}-\frac{x^6}{2^6(3!)^2}+\cdots$$

$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2},\qquad x>0 \tag{1.134a}$$

α 가 1 인 경우에 식 (1.131)로부터

$$J_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(1+1+m)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}=\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3 1!2!}+\frac{x^5}{2^5 2!3!}-\frac{x^7}{2^7 3!4!}+\cdots \tag{1.134b}$$

또한 α 가 1/2 또는 −1/2 인 경우는 다음 식으로 주어진다.

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,\quad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x \tag{1.134c}$$

이 베셀 함수의 재귀 관계식으로 다음 관계들이 유용하게 사용된다.

$$J_{\alpha-1}(x)+J_{\alpha+1}(x)=\frac{2\alpha}{x}J_\alpha(x) \tag{1.134d}$$

$$J_{\alpha-1}(x)-J_{\alpha+1}(x)=2J'_\alpha(x) \tag{1.134e}$$

$$[x^{\alpha}J_{\alpha}(x)]' = x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x) \tag{1.134f}$$

$$\int_a^b x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x)dx = \int_a^b [x^{\alpha}J_{\alpha}(x)]'dx = x^{\alpha}J_{\alpha}(x)\Big|_a^b \tag{1.134g}$$

$$[x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)]' = -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x) \tag{1.134h}$$

$$\int_a^b x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)dx = -\int_a^b [x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)]'dx = -x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)\Big|_a^b \tag{1.134i}$$

따라서 예를 들면 식 (1.134d)로부터 다음 관계들이 얻어진다.

$$J_2(x) = \frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x) \tag{1.134j}$$

$$\begin{aligned} J_3(x) &= \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x) = \frac{4}{x}\left(\frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)\right) - J_1(x) \\ &= \left(\frac{8}{x^2} - 1\right)J_1(x) - \frac{4}{x}J_0(x) \end{aligned} \tag{1.134k}$$

한편 만일 α 가 정수가 아니면 식 (1.57)에서 언급한 방법을 사용하면, $y_2 = y_1\ J_{\alpha}(x)$, 이 미분방정식의 일반해는 다음과 같이 나타내진다.

$$y = C_1J_{\alpha}(x) + C_2J_{-\alpha}(x) \tag{1.135}$$

α 가 정수인 경우는 일반해가 다음과 같이 나타내진다.

$$y = C_1J_{\alpha}(x) + C_2Y_{\alpha}(x) \tag{1.136a}$$

따라서 α 가 0 인 경우에 0 계 베셀 미분방정식의 해는 다음과 같이 나타내진다.

$$y = C_1J_0(x) + C_2Y_0(x) \tag{1.136b}$$

여기서 $Y_{\alpha}(x)$는 α 계의 제 2 종 베셀 함수(Bessel function of the second kind)이다

$$Y_{\alpha}(x) = J_{\alpha}(x)\int \frac{1}{xJ_{\alpha}^2(x)}dx = \frac{\cos\alpha\pi J_{\alpha}(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \tag{1.137a}$$

한편 0 계의 제 2 종 베셀 함수는

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi}\left[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)\right] \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right], \qquad x > 0 \end{aligned} \tag{1.137b}$$

여기서 $H_m = 1 + (1/2) + \cdots + (1/m)$, $\gamma = \lim_{m\to\infty}(H_m - \ln m)$ 이다.

식 (1.137a) 함수는 자주 노이만 함수(Neumann function) 또는 웨버 함수(Weber function)라고도 불린다.

베셀 함수의 경우에는 다음과 같이 직교성을 갖는다.

$$\int_0^1 xJ_\alpha(ax)J_\alpha(bx)dx = \begin{cases} 0, & (a \neq b) \\ \frac{1}{2}J_{\alpha+1}^2(a) = \frac{1}{2}J_{\alpha-1}^2(a), & (a = b) \end{cases} \tag{1.138}$$

이 관계는 다음과 같이 증명할 수 있다.

먼저 베셀 미분방정식을 다음과 같이 변형시킨다.

$$x(xy')' + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \tag{1.139}$$

이 식에서 x 를 ax 로 바꾸는 경우에 $ax\dfrac{dy}{d(ax)} = ax\dfrac{dy}{adx} = x\dfrac{dy}{dx}$ 가 되고 마찬가지로 $x(xy)'$ 값은 변하지 않는다. 따라서 식 (1.139)는 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(xy')' + \{a^2x^2 - \alpha^2\}y = 0 \tag{1.140}$$

$$(xy')' + (xa^2 - \frac{1}{x}\alpha^2)y = 0 \tag{1.141}$$

이 베셀 미분방정식 (1.140)의 해는 베셀 함수 $J_\alpha(ax)$ 이므로 이 식은 다시 다음과 같이 표시된다.

$$\{xJ'_\alpha(ax)\}' + (xa^2 - \frac{1}{x}\alpha^2)J_\alpha(ax) = 0 \tag{1.142}$$

마찬가지로 x 를 bx 로 바꾸는 경우에 베셀 미분방정식 (1.140)의 해는 베셀 함수 $J_\alpha(bx)$ 이므로 이 식은 다시 다음과 같이 표시된다.

$$\{xJ'_\alpha(bx)\}' + (xb^2 - \frac{1}{x}\alpha^2)J_\alpha(bx) = 0 \tag{1.143}$$

식 (1.142)에 $J_\alpha(bx)$ 를 곱하고 식 (1.143)에 $J_\alpha(ax)$ 를 곱하여 빼면 다음 식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} 0 &= [\{xJ'_\alpha(ax)\}' + (xa^2 - \frac{1}{x}\alpha^2)J_\alpha(ax)] \cdot J_\alpha(bx) \\ &\quad - [\{xJ'_\alpha(bx)\}' + (xb^2 - \frac{1}{x}\alpha^2)J_\alpha(bx)] \cdot J_\alpha(ax) \end{aligned} \tag{1.144a}$$

즉,

$$\begin{aligned}0 &= \{xJ'_\alpha(ax)\}'J_\alpha(bx) - \{xJ'_\alpha(bx)\}'J_\alpha(ax) + (a^2-b^2)xJ_\alpha(ax)J_\alpha(bx)\\ &= \left[\{xJ'_\alpha(ax)J_\alpha(bx)\}' - \{xJ_\alpha(ax)J_\alpha(bx)\}\right] - \left[\{xJ'_\alpha(bx)J_\alpha(ax)\}' - \{xJ_\alpha(ax)J_\alpha(bx)\}\right]\\ &\quad + (a^2-b^2)xJ_\alpha(ax)J_\alpha(bx)\\ &= \frac{d}{dx}\left[xJ'_\alpha(ax)J_\alpha(bx) - xJ'_\alpha(bx)J_\alpha(ax)\right] + (a^2-b^2)xJ_\alpha(ax)J_\alpha(bx)\end{aligned} \tag{1.144b}$$

이 식을 구간 0~1 에서 적분하면

$$\left[xJ'_\alpha(ax)J_\alpha(bx) - xJ'_\alpha(bx)J_\alpha(ax)\right]_0^1 + (a^2-b^2)\int_0^1 xJ_\alpha(ax)J_\alpha(bx)dx = 0 \tag{1.145}$$

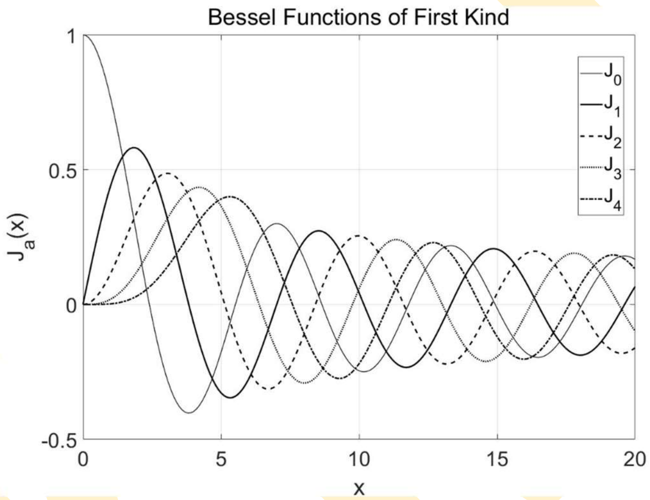


Fig. 1-26 베셀 미분방정식의 급수해와 1 종 베셀함수

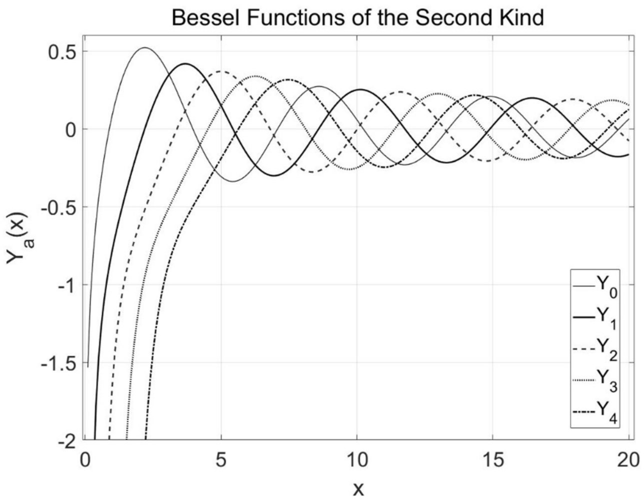


Fig. 1–27 베셀 미분방정식의 급수해와 2종 베셀함수

식 (1.41c)를 $G(x,y,C)=Cx+C^2-y=0$ 로 나타내고 $\dfrac{\partial G}{\partial C}=x+2C=0$ 로부터 구해지는 $C=-\dfrac{x}{2}$를 식 (1.41e)에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$y=(-\frac{x}{2})x+(-\frac{x}{2})^2=-\frac{x^2}{4} \tag{1.41f}$$

이 식이 식 (1.41e)의 포락선이다.

한편 식 (1.41d)에서 $x+2p=0$와 식 (1.41b)의 $y=xp+p^2$ 에서 p를 제거하여도 동일한 포락선이 얻어진다는 것을 알 수 있다.

식 (1.131)의 베셀 함수의 근사식(approximation of Bessel function)으로 다음 식이 알려져 있다.

$$J_\alpha(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\cos x-(2\alpha+1)\frac{\pi}{4}\right) \quad (x\gg 1) \tag{1.147}$$

그림 1–28에 베셀 함수와 근사 베셀 함수의 차이를 나타내었다. 실선은 식 (1.131)의 베셀 함수, 점선은 식 (1.147)의 근사 베셀 함수를 나타낸 것이다.

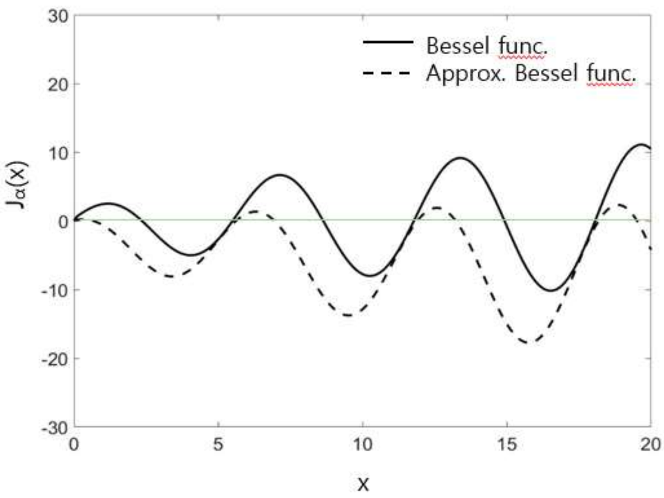


Fig. 1-28 베셀함수와 근사 베셀함수