Z变换

$$X(z)=\mathcal{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

逆Z变换*

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

单边Z变换

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}=x(0)+\frac{x(1)}{z}+\frac{x(2)}{z^2}+\cdots$$

常用单边Z变换：

①.单位样值信号 $\delta(n)=\begin{cases}1 & (n=0)\\ 0 & (n\neq 0)\end{cases}$ $\qquad \delta(n)\longleftrightarrow 1$

②.单位阶跃信号 $u(n)=\begin{cases}1 & (n\geq 0)\\ 0 & (n<0)\end{cases}$ $\qquad u(n)\longleftrightarrow \frac{z}{z-1}$，$|z|>1$

③.矩阵序列 $R_N(n)=\begin{cases}1 & (0\leq n\leq N-1)\\ 0 & (n<0,\ n\geq N)\end{cases}$

④.斜变信号 $x(n)=nu(n)$ $\qquad nu(n)\longleftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$，$|z|>1$

⑤.指数信号 $x(n)=a^nu(n)$ $\qquad a^nu(n)\longleftrightarrow \frac{z}{z-a}$，$|z|>|a|$ $\Rightarrow \begin{cases}e^{jw_0n}u(n)\longleftrightarrow \frac{z}{z-e^{jw_0}}, & |z|>1\\ e^{-jw_0n}u(n)\longleftrightarrow \frac{z}{z-e^{-jw_0}}, & |z|>1\end{cases}$

⑥.正弦余弦序列

$\cos(w_0n)u(n)=\frac{1}{2}(e^{jw_0n}+e^{-jw_0n})u(n)\longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{jw_0}}+\frac{z}{z-e^{-jw_0}}\right)=\frac{z(z-\cos w_0)}{z^2-2z\cos w_0+1}$，$|z|>1$

$\sin(w_0n)u(n)=\frac{1}{2j}(e^{jw_0n}-e^{-jw_0n})u(n)\longleftrightarrow \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{jw_0}}+\frac{z}{z-e^{-jw_0}}\right)=\frac{z(z-\cos w_0)}{z^2-2z\cos w_0+1}$，$|z|>1$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos(\frac{\pi}{2}n)u(n)\longleftrightarrow \frac{z^2}{z^2+1}, & |z|>1\\ \sin(\frac{\pi}{2}n)u(n)\longleftrightarrow \frac{z}{z^2+1}, & |z|>1\end{cases}$

常用性质

线性： $ax(n)+by(n)$

位移： 单边：
$$\begin{cases}x(n-m)u(n-m)\longleftrightarrow X(z)z^{-m}\\ x(n-m)u(n)\longleftrightarrow z^{-m}\left[X(z)+\sum_{r=-m}^{-1}x(r)z^{-r}\right]\\ x(n+m)u(n)\longleftrightarrow z^{m}\left[X(z)-\sum_{r=0}^{m-1}x(r)z^{-r}\right]\end{cases}$$

双边：
$$\begin{cases}x(n-m)\longleftrightarrow z^{-m}X(z)\\ x(n+m)\longleftrightarrow z^{m}X(z)\end{cases}$$

常用：
$$\begin{cases}x(n-1)u(n)\longleftrightarrow z^{-1}X(z)+x(-1)\\ x(n-2)u(n)\longleftrightarrow z^{-2}X(z)+z^{-1}x(-1)+x(-2)\end{cases}$$
$$\begin{cases}x(n+1)u(n)\longleftrightarrow zX(z)-zx(0)\\ x(n+2)u(n)\longleftrightarrow z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)\end{cases}$$

线性加权：(Z域微分) $nx(n)\longleftrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z)$ $\Rightarrow n^mx(n)\longleftrightarrow \left[-z\frac{d}{dz}\right]^mX(z)$

指数加权：(Z域尺度变换) $a^nx(n)\longleftrightarrow X(\frac{z}{a})$ $(R_{x1}<|\frac{z}{a}|<R_{x2})$ $\Rightarrow \begin{cases}a^{-n}x(n)\longleftrightarrow X(az) & R_{x1}<|az|<R_{x2}\\ (-1)^nx(n)\longleftrightarrow X(-z) & R_{x1}<|z|<R_{x2}\end{cases}$

初值定理： 若$x(n)$为因果序列：$x(0)=\lim_{z\to\infty}X(z)$

终值定理： 若$x(n)$为因果序列：$\lim_{n\to\infty}x(n)=\lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$ 只有当$n\to\infty$时，$x(n)$收敛，才可应用终值定理(即$X(z)$在单位圆内)

时域卷积定理： $x(n)*h(n)\longleftrightarrow X(z)\cdot H(z)$ 收敛域为两者重叠部分

收敛域：

不同收敛域对应原函数不同，如 $\begin{cases}a^nu(n)\longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, & |z|>|a|\\ -a^nu(-n-1)\longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, & |z|<|a|\end{cases}$

(1). 有限长 $n_1\leq n\leq n_2$ $\begin{cases}(a).\ n_1<0,\ n_2>0\text{时}, & 0<|z|<\infty\\ (b).\ n_2\leq 0\text{时}, & |z|<\infty\\ (c).\ n_1\geq 0\text{时}, & 0<|z|\end{cases}$

(2). 右边序列 $n\geq n_1$ $\begin{cases}(a).\ n_1\geq 0\text{时}, & R_{x1}<|z|\\ (b).\ n_1<0\text{时}, & R_{x1}<|z|<\infty\end{cases}$ 其中 $R_{x1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(n)|}$

(3). 左边序列 $n\leq n_2$ $\begin{cases}(a).\ n_2\leq 0\text{时}, & |z|<R_{x2}\\ (b).\ n_2>0\text{时}, & 0<|z|<R_{x2}\end{cases}$ 其中 $R_{x2}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x(-n)|}}$

(4). 双边序列：有 $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$， 若 $R_{x2}<R_{x1}$，则$X(z)$不收敛；若 $R_{x2}>R_{x1}$，则 $R_{x1}<|z|<R_{x2}$

部分分式展开法：

先将 $\frac{X(z)}{z}$ 展开，然后每个分式 $\times z \Rightarrow \sum\frac{z}{z-z_m}$ 下面是常用Z^{-1}变换对

$X(z)$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$，即右序列	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$，即左序列
$\frac{z}{z-1}$	$u(n)$	$-u(-n-1)$
$\frac{z}{(z-1)^2}$	$nu(n)$	$-nu(-n-1)$
$\frac{z}{z-a}$	$a^nu(n)$	$-a^nu(-n-1)$
$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$(n+1)a^nu(n)$	$-(n+1)a^nu(-n-1)$
$\frac{z}{(z-a)^2}$	$n\cdot a^{n-1}u(n)$	$-na^{n-1}u(-n-1)$