§3.2 柯西积分定理

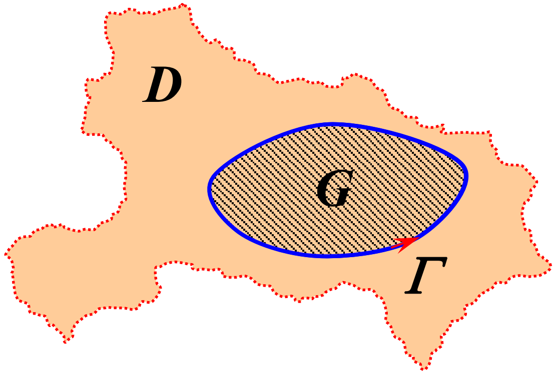
一、柯西基本定理

二、闭路变形原理

三、复合闭路定理

一、柯西基本定理

定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，Γ 为 D 内的任意一条简单闭曲线，则有 $\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$



证明 $\oint_{\Gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{\Gamma}(u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\oint_{\Gamma}(v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$

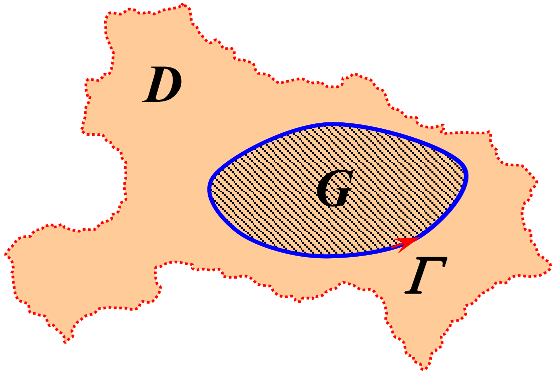
$$\xlongequal{\text{Green公式}} -\iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + i\iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{C-R方程}} 0.$$

- 上述定理又称为柯西-古萨 (Cauchy-Goursat) 基本定理。

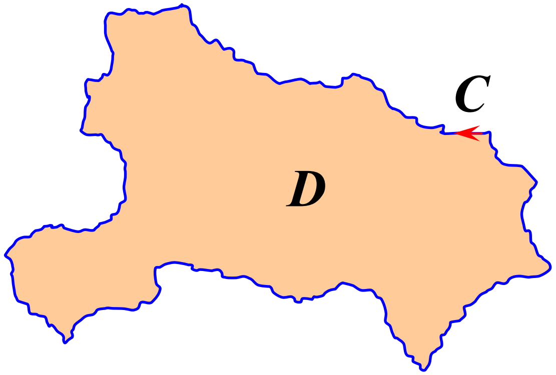
一、柯西基本定理

定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，Γ 为 D 内的任意一条简单闭曲线，则有 $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z = 0$.



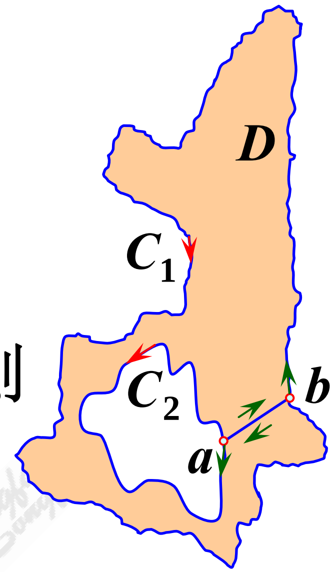
注：定理中的条件还可以进一步减弱。

定理 设单连域 D 的边界为 C，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D} = D + C$ 上连续，则有 $\boxed{\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z = 0.}$



二、闭路变形原理

将柯西积分定理推广到二连域



定理 设二连域 D 的边界为 $C=C_1+C_2^-$（如图），函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在上连续，$\overline{D}=D+C$，则

$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0} \text{ 或 } \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

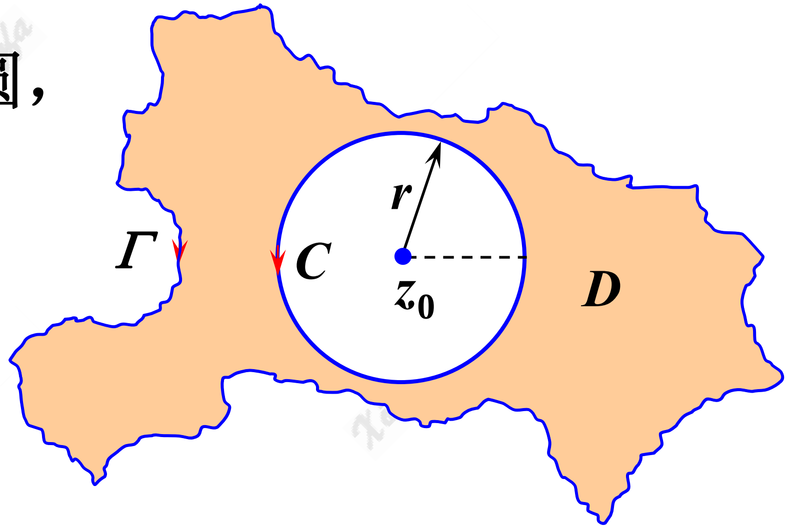
证明 如图，作线段 $\overline{ab}$，则二连域 D 变为单连域，从而有

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\mathrm{d}z=0,$$

由 $\int_{\overrightarrow{ba}} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\overrightarrow{ab}} f(z)\mathrm{d}z=0$，$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2^-} f(z)\mathrm{d}z=0$，

$$\Rightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=0 \text{ 或 } \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

例 计算 $I=\oint_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$， 其中，$\Gamma$ 为包含 z_0 的一条闭曲线。



解 如图以 z_0 为圆心 r 为半径作圆，

则函数 $f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}$ 在

$\overline{D}=D+\Gamma+C^{-}$ 上解析，

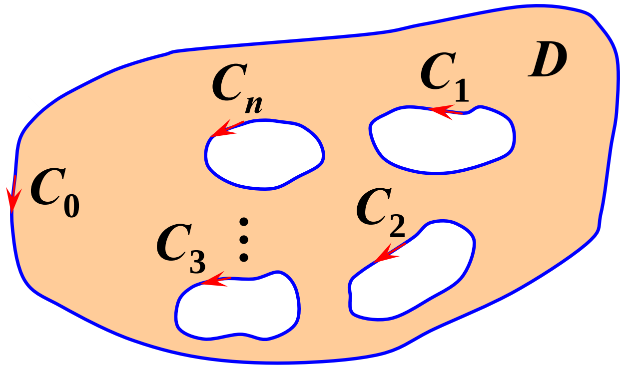
因此有 $I=\oint_{\Gamma}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$

$$=\oint_{C}\frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & \text{当 } n=1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n\neq 1 \text{ 时}。\end{cases}$$

三、复合闭路定理

- 将柯西积分定理推广到多连域

定理 设多连域D的边界为 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$ (如图)，函数 $f(z)$ 在 D 内解析，在 C 上连续，则

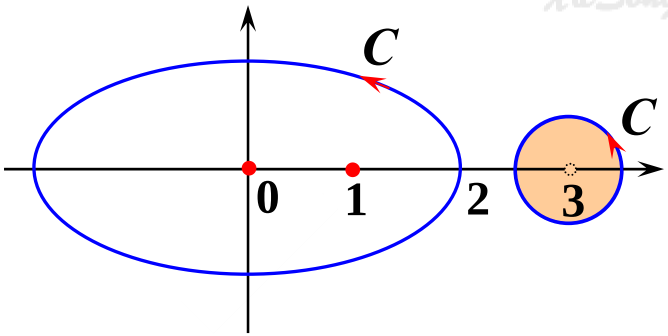


$$\boxed{\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0}$$

或 $$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z.$$

证明 (略)

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 为:



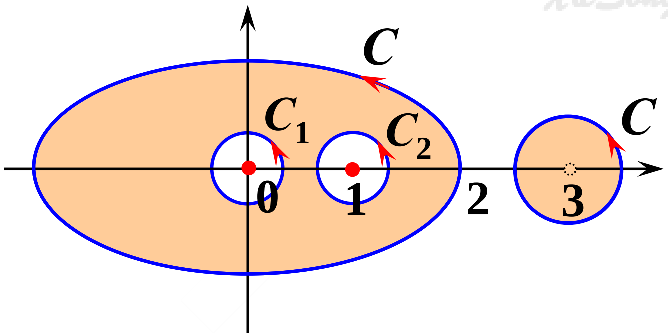
(1) $|z-3|=\dfrac{1}{2}$;　(2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

解 令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}$，则 $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}$，奇点为 $z=0,1$.

(1) 当 C 为 $|z-3|=\dfrac{1}{2}$ 时，$I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z=0$.

例 计算 $I=\oint_C \dfrac{2z-1}{z^2-z}\mathrm{d}z$，其中 C 为:

(1) $|z-3|=\dfrac{1}{2}$； (2) $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$.



解 令 $f(z)=\dfrac{2z-1}{z^2-z}$， 则 $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z-1}$， 奇点为 $z=0,1$.

(2) 当 C 为 $\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1}=1$ 时，令 C_1: $|z|=\dfrac{1}{3}$， C_2: $|z-1|=\dfrac{1}{3}$，

则 $$I=\oint_{C_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_1}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{z-1}\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i+0+0+2\pi i=4\pi i.$$