第五章 留数及其应用

§ **5.1** 孤立奇点

§ **5.2** 留数

§ **5.3** 留数在定积分计算中的应用

引言

- 本章重点解决复闭路积分问题。如图，考虑$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$.

(1) 若$f(z)$ 在 D 内解析，在Γ上连续，由柯西积分定理

$$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z=0.$$

(2) 若$f(z)$在D内有唯一的奇点 z_0，由闭路变形原理

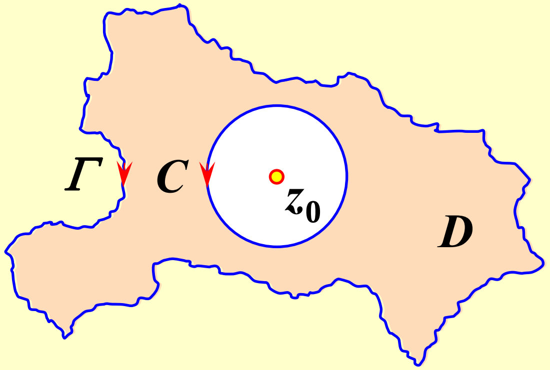
$$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C} f(z)\mathrm{d}z.$$

此时，将函数$f(z)$在 z_0点的邻域内进行洛朗展开，

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots,$$

等式两端沿C的正向取闭路积分

由 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}=\begin{cases}2\pi i, & n=1,\\ 0, & n\neq 1,\end{cases}$



则积分$\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}$。

§5.1 孤立奇点

一、孤立奇点的定义

二、孤立奇点的分类

三、零点与极点的关系

四、函数在无穷远点的性态

一、孤立奇点的定义

定义5.1 设 z_0 为函数 $f(z)$ 的奇点，且存在 $\delta > 0$，

使得 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析，

则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

例 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$， $z = 0$ 为 $f(z)$ 的孤立奇点。

例 $f(z) = \ln z$， 原点及负实轴上的点均为 $f(z)$ 的奇点，

但它们都不是孤立奇点。

二、孤立奇点的分类

将函数 $f(z)$在它的孤立奇点 z_0的去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内展开成洛朗级数. 根据展开式的不同情况对孤立奇点作分类.

1. 可去奇点 如果在洛朗级数中不含$z-z_0$的负幂项, 则孤立奇点z_0称为$f(z)$的可去奇点.

$f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots$ $\quad 0<|z-z_0|<\delta$,

显然 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=c_0$. 定义 $F(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq z_0 \\ c_0 & z=z_0 \end{cases}$

则在圆域 $|z-z_0|<\delta$ 内就有$F(z)=c_0+c_1(z-z_0)+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots$,

从而 $F(z)$ 在 z_0解析。所以 z_0称为 $f(z)$可去奇点.

例1　说明 $z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$ 的可去奇点 .

解: 将 $f(z)$ 在 $z=0$ 的去心邻域内展成洛朗级数

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\right)$$

$$=1-\frac{1}{3!}z^2+\frac{1}{5!}z^4-\cdots,\ (0<|z|<+\infty).$$

由于 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=1$,

则 $F(z)=\begin{cases} f(z) & z\neq 0 \\ 1 & z=0 \end{cases}$ 在点 $z=0$ 就解析了,

因此称 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点。

2. 极点 如果在洛朗级数中只有有限多个$z-z_0$的负幂项, 且其中关于$(z-z_0)^{-1}$的最高负幂次为 m, 即

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\dots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\dots$$

$$(m\geq 1,\ c_{-m}\neq 0),$$

则孤立奇点z_0称为函数$f(z)$的**m阶极点**.

上式也可写成 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ (*)

其中 $g(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+c_{-m+2}(z-z_0)^2+\dots$,

在 $|z-z_0|<\delta$ 内是解析的函数, 且 $g(z_0)\neq 0$.

反过来, 当任何一个函数$f(z)$ 能表示为(*)式且$g(z_0)\neq 0$ 时, 则z_0是$f(z)$的m阶极点.

如果z_0为$f(z)$的极点, 由(*)式, 就有 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$.

例2　说明 $z=1$ 是 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ 的二阶极点　.

解　$z=1$ 是 $f(z)$ 的奇点，由 $\lim\limits_{z\to 1} f(z)=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-1)^2}=\infty$,

可知，$z=1$ 是 $f(z)$ 的极点，且 $f(z)$

满足(*)式，　故 $z=1$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。

注：将 $f(z)$ 在 $z=1$ 的去心邻域内展为洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{z-1}}{(z-1)^2}=\frac{\mathrm{e}}{(z-1)^2}\left(1+(z-1)+\frac{1}{2!}(z-1)^2+\cdots\right)$$

$$=\frac{\mathrm{e}}{(z-1)^2}+\frac{\mathrm{e}}{z-1}+\frac{\mathrm{e}}{2!}+\frac{\mathrm{e}}{3!}(z-1)+\cdots,\quad(0<|z|<+\infty).$$

（含有限个负幂次项，且最高负幂次为2）

3. 本性奇点 如果在洛朗级数中含有无穷多$z-z_0$的负幂项，

则孤立奇点z_0称为$f(z)$的本性奇点.

z_0为$f(z)$的本性奇点 $\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在(也不为$\infty$).

例3 说明 $z=0$是 $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 的本性奇点 .

解 $z=0$ 是 $f(z)$ 的奇点，考察极限 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$.

由 $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^+\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to 0^-\\ y=0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$,

可知，$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在且不为∞.

因此，$z=0$是 $f(z)$的本性奇点。

注：将 $f(z)$在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots,\ (0<|z|<+\infty).$$

(含无穷多个负幂次项)

综上所述:

如果z_0为$f(z)$的可去奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$存在且有限;

如果z_0为$f(z)$的极点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

如果z_0为$f(z)$的本性奇点$\Leftrightarrow \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$不存在且不为$\infty$.

注:在求 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 时，可使用罗比达法则。

我们可以利用上述极限的不同情形来判别孤立奇点的类型.

值得指出的是，此极限的方法只能判断是否是极点!但不能用来判断极点的阶数。

三、零点以及与极点的关系

定义5.2 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，

(1) 若 $f(z_0)=0$, 则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的零点;

(2) 若 $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$, $\varphi(z)$ 在 z_0 处解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$,

则称 $z=z_0$ 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

结论 对于不恒为零的解析函数，其零点是孤立的。

即在零点的一个小邻域内，函数无其它零点。

定理5.1 如果z_0是 $f(z)$的m 阶零点, 则z_0就是$1/f(z)$的m 阶极点,

反过来也成立.

定理5.2 设函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，则下列条件是等价的:

(1) z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

(2) $f^{(k)}(z_0)=0$，$k=0,1,2,\cdots,m-1$; $f^{(m)}(z_0)\neq 0$.

我们可以应用上述定理来判别极点的阶数。

例4 求 函数 $f(z)=1/\sin z$ 的奇点。如果是极点，指出它的阶数。

解：函数 $1/\sin z$ 的奇点 显然是函数 $\sin z$ 的零点。

$\sin z$ 的零点是 $z=k\pi\,(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

由于 $(\sin z)'|_{z=k\pi}=\cos z|_{z=k\pi}=(-1)^k\neq0$，所以 $z=k\pi$

是 $\sin z$ 的一阶零点，也就是 $1/\sin z$ 的一阶极点.

一阶极点亦称简单极点

注.若 $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, 且 z_0 为 $\varphi(z)$ 的 m 阶零点，为 $\psi(z)$ 的 n 阶零点，即 $f(z)=\dfrac{(z-z_0)^m\varphi_1(z)}{(z-z_0)^n\psi_1(z)}=\dfrac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^n}Q(z)$,

则 (1) 当 $m\geq n$ 时， z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

(2) 当 $m<n$ 时， z_0 为 $f(z)$ 的 $(n-m)$ 阶极点。

例5 求 函数 $f(z)=\dfrac{e^z-(1+z)}{z^4}$ 的奇点。如果是极点，指出它的阶数。

解：由于 $z=0$ 是 z^4 的四阶零点，且是 $e^z-(1+z)$ 的二阶零点，

故 $z=0$是 $f(z)$ 的二阶极点。

注：直接利用洛朗级数来判断奇点类型的方法最好也能够掌握

将 $f(z)$在 $z=0$ 的去心邻域内的洛朗级数，有

$$f(z)=\frac{1}{z^4}\left[\left(1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\frac{1}{5!}z^5+\cdots\right)-(1+z)\right]$$

$$=\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}z\cdots,\quad (0<|z|<+\infty).$$

因此， $z=0$ 为 $f(z)$ 的二阶极点。

四、函数在无穷远点的性态

无穷远点是复平面外的理想点，故无穷远点总是函数 $f(z)$ 的奇点。

如果函数 $f(z)$在无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域 $R<|z|<\infty$内解析，称点∞为$f(z)$的孤立奇点.

做变换$w=1/z$把扩充 z平面上∞的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 映射成扩充w平面上原点的去心邻域 $0<|w|<1/R$

若记， $f(z)=f(\frac{1}{w})=\varphi(w)$ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{w\to 0}\varphi(w)$

因此， 函数 $f(z)$在无穷远点 $z=\infty$ 的性态可由函数$\varphi(w)$在原点 $w=0$ 的性态来刻画。

综上所述:

（1）如果 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 存在且有限，

则称 ∞ 是函数f(z)的可去奇点。

（2）如果 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$

则称 ∞ 是函数f(z)的极点。

（3）如果 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在且不为去穷，

则称 ∞ 是函数f(z)的本性奇点。

例6 讨论下列函数在无穷远点的性态

1) $f(z)=(z-2)(z^2+1)$　　2) $f(z)=e^{\tan\frac{1}{z}}$　　3) $f(z)=e^{z}$

解1） $f(z)=f(\frac{1}{w})=(\frac{1}{w}-2)(\frac{1}{w^2}+1)=\varphi(w)$

$$\lim_{z\to\infty}(z-2)(z^2+1)=\lim_{w\to 0}(\frac{1}{w}-2)(\frac{1}{w^2}+1)=\infty$$

故$z=\infty$是 $f(z)$ 极点，显然是3阶极点。

解2） $\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty} e^{\tan\frac{1}{z}}=1$　故$z=\infty$是 $f(z)$ 的可去奇点。

解3） $\lim_{z\to\infty} f(z)=\lim_{z\to\infty} e^{z}$ 不存在，故$z=\infty$是 $f(z)$ 的本性奇点。