§4.4泰勒级数

一、泰勒(Taylor)定理

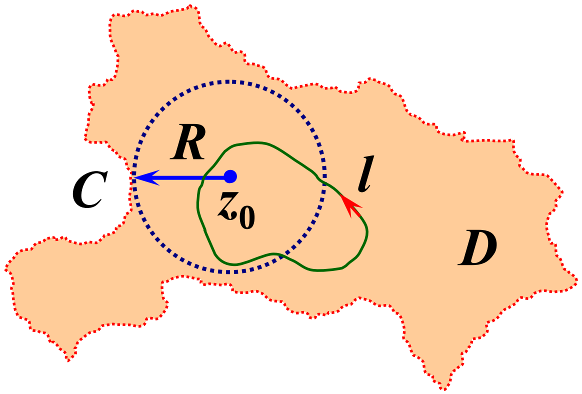
二、将函数展开为泰勒级数的方法

一、泰勒(Taylor)定理

定理 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 的边界，$z_0 \in D$，

$R = \min\limits_{z \in C} |z - z_0|$，则当 $|z - z_0| < R$ 时，有

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$



其中，$a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z.$$

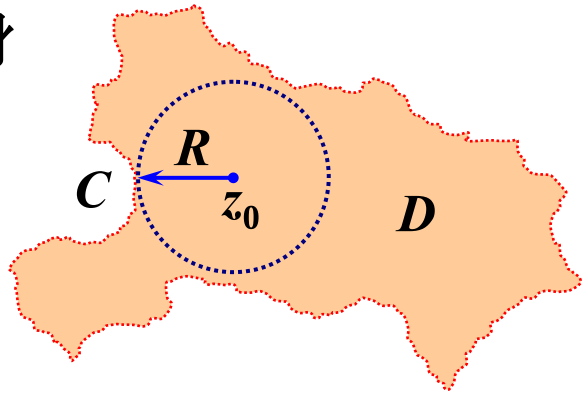
（l 为 D 内包围 z_0 点的任意一条闭曲线。）

证明 (略)

一、泰勒(Taylor)定理

注 (1) 为什么只能在圆域 $|z-z_0|<R$ 上展开为幂级数，而不是在整个解析区域 D 上展开?

回答 这是由于受到幂级数本身的收敛性质的限制：



- 幂级数的收敛域必须是圆域。
- 幂级数一旦收敛，其和函数一定解析。

一、泰勒(Taylor)定理

注 (2) 展开式中的系数 a_n 还可以用下列方法直接给出。

方法一 $$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}+$$

$$\boxed{a_n(z-z_0)^n}+a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots,$$

$$\Rightarrow\ f^{(n)}(z)=0+n!a_n+(z-z_0)\,p(z),$$

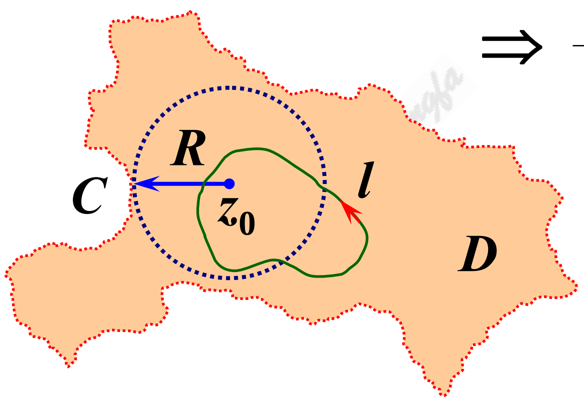
$$\Rightarrow\ f^{(n)}(z_0)=n!a_n\,,$$

$$\Rightarrow\ a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

一、泰勒(Taylor)定理

注 (2) 展开式中的系数 a_n 还可以用下列方法直接给出。

方法二 $f(z)=a_0+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$



$$\Rightarrow \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}=\frac{a_0}{(z-z_0)^{n+1}}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{(z-z_0)^2}+\boxed{\frac{a_n}{z-z_0}}+a_{n+1}+\cdots,$$

$$\Rightarrow \oint_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=0+2\pi i a_n+0,$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

一、泰勒(Taylor)定理

注 (3) 对于一个给定的函数，用任何方法展开为幂级数，其结果都是一样的，即具有唯一性。

一、泰勒(Taylor)定理

注 (4) 对于一个给定的函数，能不能在不具体展开为幂级数的情况下，就知道其收敛域？ 可以知道。

结论 函数 $f(z)$ 在 z_0 点展开为泰勒级数，其收敛半径等于从 z_0 点到 $f(z)$ 的最近一个奇点 $\tilde{z}$ 的距离。

理由 (1) 幂级数在收敛圆内解析， 因此奇点 $\tilde{z}$ 不可能在收敛圆内；

(2) 奇点 $\tilde{z}$ 也不可能在收敛圆外，不然收敛半径还可以扩大，故奇点 $\tilde{z}$ 只能在收敛圆周上。

二、将函数展开为泰勒级数的方法

1. 直接展开法

- 利用泰勒定理，直接计算展开系数 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

例 将函数 $f(z) = \mathrm{e}^z$ 在 $z = 0$ 点展开为幂级数。

P90 例4.6

解 $f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^z \big|_{z=0} = 1, \quad \Rightarrow \quad a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!},$

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

二、将函数展开为泰勒级数的方法

1. 直接展开法

- 利用泰勒定理，直接计算展开系数 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

- 同理可得

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \quad |z| < +\infty.$$

二、将函数展开为泰勒级数的方法

2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。

- 两个重要的已知展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3\cdots, \quad |z|<1.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots, \quad |z|<+\infty.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 在 $z=i$ 点展开为幂级数。

解 函数 $f(z)$ 有奇点 $z=1$，故收敛半径 $R=|1-i|=\sqrt{2}$.

(1) $$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{(1-i)-(z-i)}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-i}{1-i}}$$

$$=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}},\quad |z-i|<\sqrt{2}.$$

(2) $$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{(1-i)^{n+1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{(1-i)^{n+2}}(z-i)^n,\quad |z-i|<\sqrt{2}.$$

轻松一下吧 ……