§5.3 留数在定积分计算上的应用

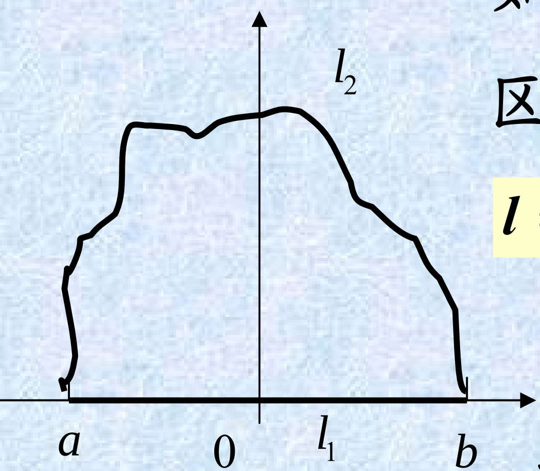
一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

二. 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

三. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\,\mathrm{d}x\left(a>0\right)$ 的积分

引言

留数定理是复变函数的定理，又是应用到闭路积分的，因此要将定积分变为闭路积分的形式。



如图，对于实积分 $\int_a^b f(x)dx$，变量 x 定义在闭区间 $[a,b]$ (线段 l_1)， 现在构造闭路曲线 $l = l_1 + l_2$。为了将定积分变为闭路积分，则闭曲线L必须落在被积函数f(x)所对应的复变函数f(z)的解析范围内。因此有如下关系式:

容易计算或等于零

$$\oint_l f(z)dz = \int_a^b f(x)dx + \boxed{\int_{l_2} f(z)dz}$$

用留数计算

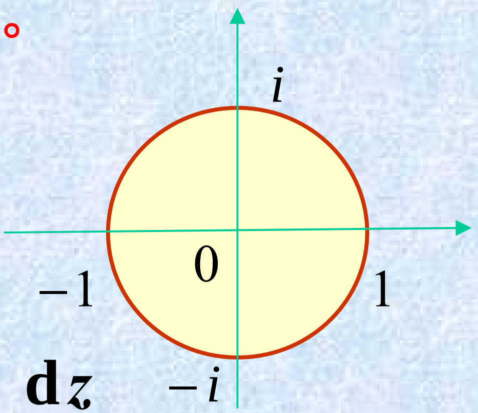
一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

其中 $R(u,v)$ 是 u, v 的有理函数。

作变量代换 $z = \mathrm{e}^{i\theta}$

有

$\Rightarrow$



且 $\mathrm{d}z = i\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta = iz\,\mathrm{d}\theta, \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz},$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z},$$

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz},$$

从而上述积分化为沿正向单位圆周的复积分如下

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} \boxed{R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}}\,\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad \boxed{f(z)}$$

其中$f(z)$是z的有理函数，且在单位圆周$|z|=1$上分母不为零，

根据留数定理有

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

其中z_k $(k=1,2,\ldots,n)$为单位圆 $|z|=1$内的 $f(z)$的孤立奇点.

注意：上述定积分的积分区间长度为2π时才能由变换$z = \mathrm{e}^{i\theta}$

化为单位圆周上的复闭路积分。

例1 计算$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5+3\cos\theta}d\theta$的值.

解: 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $dz=ie^{i\theta}d\theta$, 而 $\cos\theta=\frac{z^2+1}{2z}$

所以原式$=\oint_{|z|=1}\frac{2}{i\left(3z^2+10z+3\right)}dz$

$$=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{1}{(3z+1)(z+3)}dz \quad =2\pi i\cdot\frac{2}{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{(3z+1)(z+3)},-\frac{1}{3}\right]$$

$$=4\pi\cdot\lim_{z\to-\frac{1}{3}}\left(z+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3\left(z+\frac{1}{3}\right)(z+3)} \quad =4\pi\cdot\frac{1}{8}=\frac{\pi}{2}.$$ (实数)

例2 计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}d\theta$ 的值.

解 由于 $\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}$ 为偶函数，记 $I_1=2I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

(1) 令 $z=\mathrm{e}^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}\theta=\frac{\mathrm{d}z}{iz}$， $\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，

$$I_1=\oint_{|z|=1}\frac{z+z^{-1}}{2}\cdot\frac{1}{5+4\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

$$=\oint_{|z|=1}\boxed{\frac{1+z^2}{4iz(z+1/2)(z+2)}}\mathrm{d}z=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z.$$

(2) 在 $|z|<1$ 内，$f(z)$ 有两个一阶极点：$z_1=0$，$z_2=-\dfrac{1}{2}$.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z f(z)=\left.\frac{1+z^2}{4i(z+1/2)(z+2)}\right|_{z=0}=\frac{1}{4i};$$

$$\operatorname{Res}\left[f(z),-\frac{1}{2}\right]=\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)f(z)=\left.\frac{1+z^2}{4iz(z+2)}\right|_{z=-\frac{1}{2}}=-\frac{5}{12i}.$$

$$I=\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\frac{1}{4i}-\frac{5}{12i}\right]=-\frac{\pi}{6}.\qquad (实数)$$

二. 形如$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$的积分

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高二次；

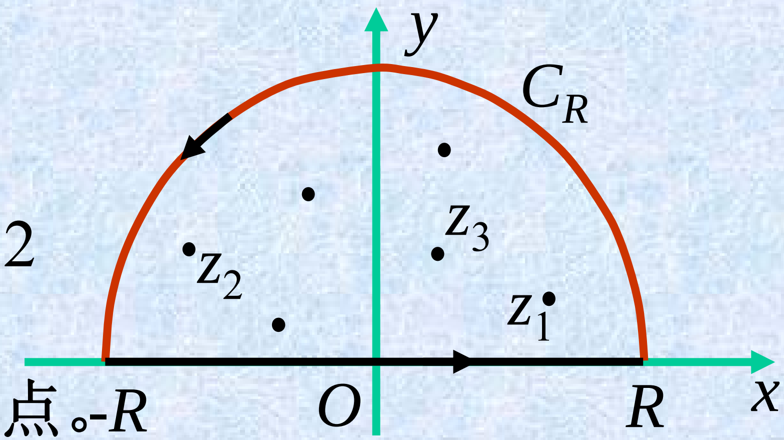
(3) 分母 $Q(x)$ 无实零点。

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i\sum_{k}\mathrm{Res}[R(z), z_k].$$

这里 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面的所有孤立奇点。

事实上，设

$$R(z)=\frac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}, m-n\geq 2$$



显然 $\boldsymbol{R(z)}$ 只有有限个孤立奇点且为极点。

取积分路线如图所示，其中$\boldsymbol{C_R}$是以原点为中心，$\boldsymbol{R}$为半径的在上半平面的半圆周. 取$\boldsymbol{R}$适当大，使$\boldsymbol{R(z)}$所有的在上半平面内的极点$\boldsymbol{z_k}$都包在这闭路积分曲线$\boldsymbol{C=[-R,R]+C_R}$内.

$$\oint_C R(z)dz=\int_{-R}^{R}R(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}R(z)dz=2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z),z_k]$$

此等式不因$\boldsymbol{C_R}$的半径$\boldsymbol{R}$不断增大而有所改变（闭路变形原理）.

即 $$\lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}R(x)dx+\int_{C_R}R(z)dz\right]=2\pi i\sum_k \mathrm{Re\,s}[R(z),z_k]$$

而 $$|R(z)| = \frac{|z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n|}{|z^m + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \cdots + b_m|}$$

$$= \frac{1}{|z|^2} \cdot \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|}$$

$$< \frac{3}{|z|^2}. \qquad (\text{当} |z| \text{ 足够大})$$

有 $$\left|\int_{C_R} R(z)\,dz\right| \le \int_{C_R} |R(z)|\,ds \le \frac{3}{R^2}\pi R = \frac{3\pi}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}\,x = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k].$$

注意：如果$R(x)$为偶函数,

$$\int_0^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}\,x = \pi i \sum \mathrm{Res}[R(z), z_k].$$

例 3 计算积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$ 的值。

解：这里m=4,n=2,m-n=2.$R(z)$在实轴上无孤立奇点, 因而所求的积分是存在的.

(1) 令 $R(z)=\frac{z^2-z+2}{z^4+10z^2+9}=\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z^2+9)}$

在上半平面内，i 与 $3i$ 为 $R(z)$ 一阶极点 。

(2) $\text{Res}[R(z),i]=\left.\frac{z^2-z+2}{(z+i)(z^2+9)}\right|_{z=i}=-\frac{1+i}{16}$,

$\text{Res}[R(z),3i]=\left.\frac{z^2-z+2}{(z^2+1)(z+3i)}\right|_{z=3i}=\frac{3-7i}{48}$.

(3) $I=2\pi i\left(-\frac{1+i}{16}+\frac{3-7i}{48}\right)=\frac{5\pi}{12}$.

三. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}\,\mathrm{d}x\left(a>0\right)$ 的积分

要求 (1) $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中，$P(x)$，$Q(x)$ 为多项式；

(2) 分母 $Q(x)$ 的次数比分子 $P(x)$ 的次数至少高一次；

(3) 分母 $Q(x)$ 无实零点。

则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\mathrm{e}^{iax}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k} \mathrm{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k] = A + iB$$

（这里 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面的所有孤立奇点）

于是有 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax dx = A$；$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax dx = B$.

即要求上述类型的广义定积分，可转化为复积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}dx$ 用留数来求解。

例4 计算$I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx\ (a>0)$ 的值.

解：这里$m=2,n=1,m-n=1$.$R(z)$在实轴上无孤立奇点，因而所求的积分是存在的. $R(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$ 为偶函数，在上半平面内有一级极点ai。

而 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}I_1=\frac{1}{2}(\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{ix}dx)$

又 $I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{ix}dx=2\pi i\operatorname{Re}s[R(z)e^{iz},ai]$

$$=2\pi i\lim_{z\to ia}\frac{ze^{iz}}{z+ia}=2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2}=\pi ie^{-a}.$$

因此 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}I_1=\frac{1}{2}\pi e^{-a}$.