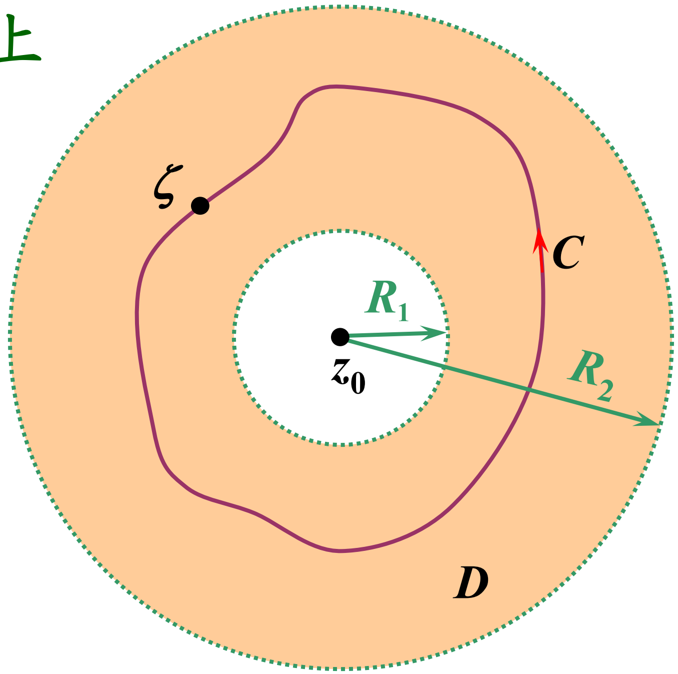
§4.6洛朗级数的展开

三、将函数展开为洛朗级数的方法

1. 直接展开法

- 根据洛朗定理，在指定的解析环上直接计算展开系数：

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$



- 有点繁！有点烦！

三、将函数展开为洛朗级数的方法

2. 间接展开法

- 根据唯一性，利用一些已知的展开式，通过有理运算、代换运算、逐项求导、逐项求积等方法展开。

- 两个重要的已知展开式

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=1+z+z^2+z^3\cdots,\quad |z|<1.$$

$$e^z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots,\quad |z|<+\infty.$$

三、将函数展开为洛朗级数的方法

注意 无论是直接展开法还是间接展开法，在求展开式之前，都需要根据函数的奇点位置，将复平面(或者题目指定的展开区域)分为若干个解析环

比如 设函数的奇点为 z_1, z_2, z_3.

展开点为 z_0，则复平面

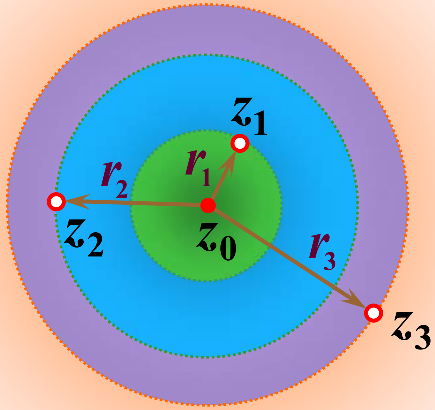
被分为四个解析环：

$$0 \le |z - z_0| < r_1;$$

$$r_1 < |z - z_0| < r_2;$$

$$r_2 < |z - z_0| < r_3;$$

$$r_3 < |z - z_0| < +\infty.$$



例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

P97 例4.13

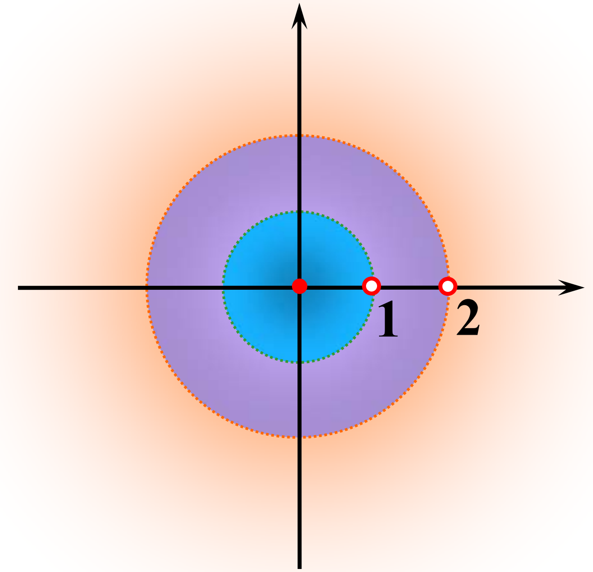
解 (1) 将复平面分为若干个解析环

函数 $f(z)$ 有两个奇点：

$$z=1,\quad z=2,$$

以展开点 $z=0$ 为中心，

将复平面分为三个解析环：



① $0\le|z|<1$； ② $1<|z|<2$； ③ $2<|z|<+\infty$.

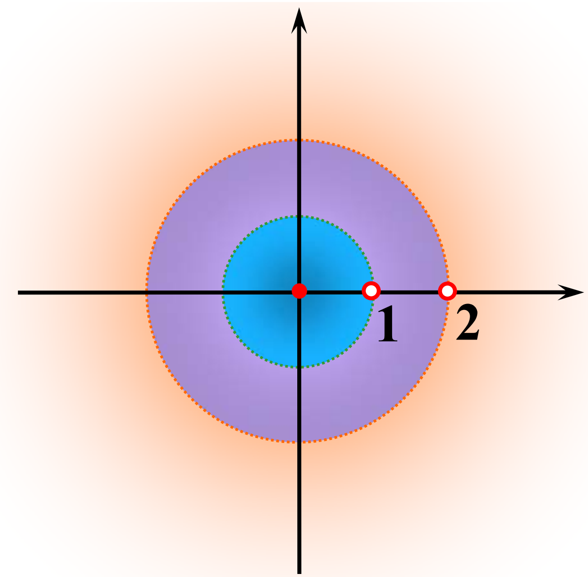
(2) 将函数进行部分分式分解

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

解 (3) 将函数在每个解析环内分别展开

① 当 $0\le|z|<1$ 时,



$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

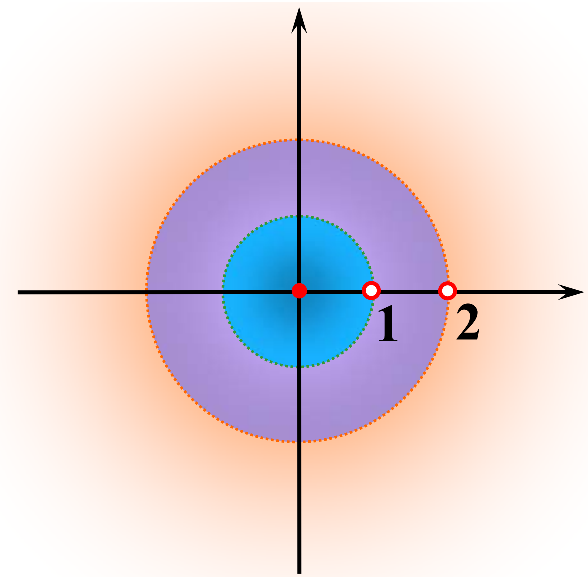
$$=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

解 (3) 将函数在每个解析环内分别展开

② 当 $1<|z|<2$ 时，



$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

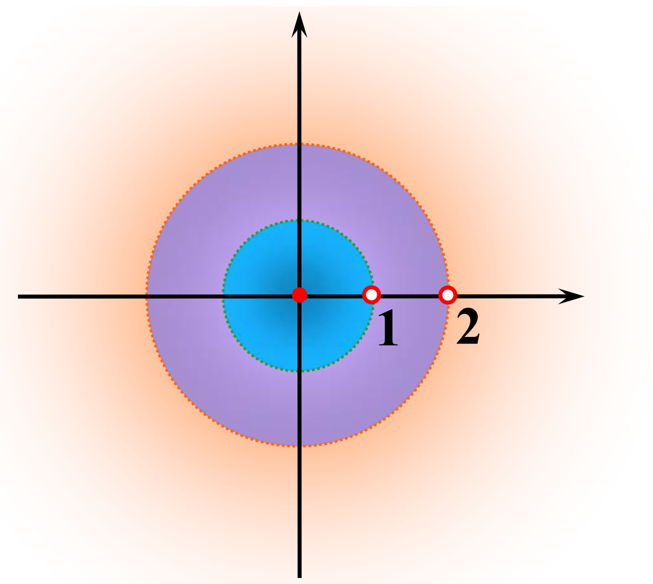
$$=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z}{2}}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数。

解 (3) 将函数在每个解析环内分别展开

③ 当 $2<|z|<+\infty$ 时，



$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

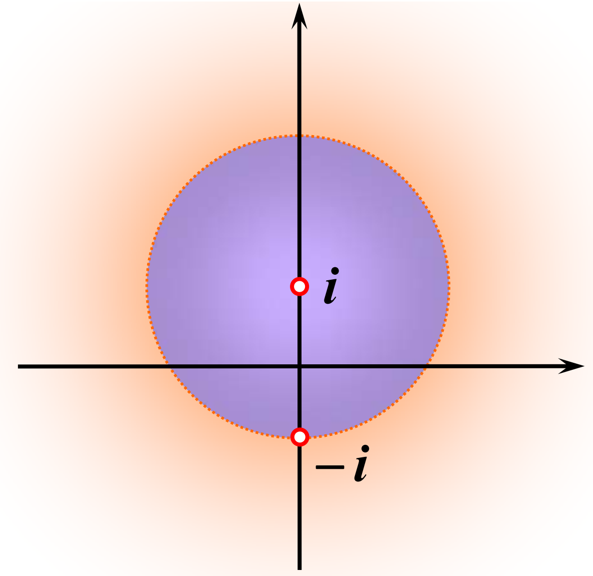
$$=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2}{z}}$$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n}{z^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=i$ 处展开为洛朗级数。

P98 例4.15

解 (1) 将复平面分为若干个解析环



函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$,

有两个奇点: $z=\pm i$,

以展开点 $z=i$ 为中心,

将复平面分为两个解析环:

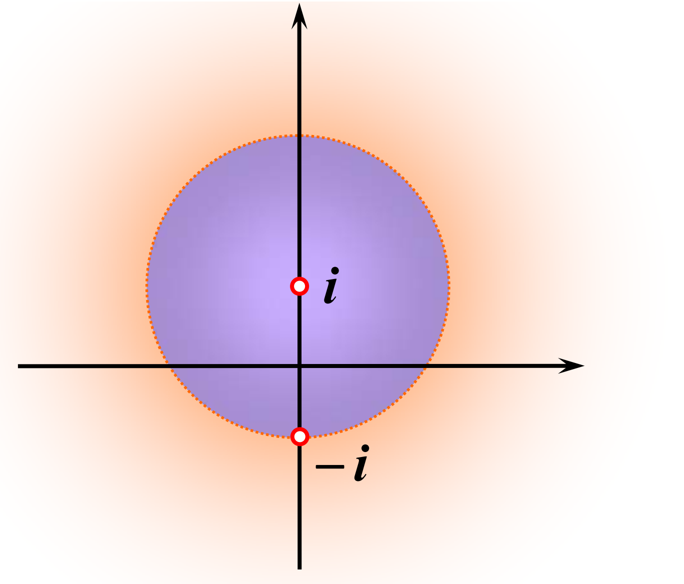
① $0<|z-i|<2$; ② $2<|z-i|<+\infty$.

注意: 不需要将函数进行部分分式分解。

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=i$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

① 当 $0<|z-i|<2$ 时，



$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{(z-i)+2i}$$

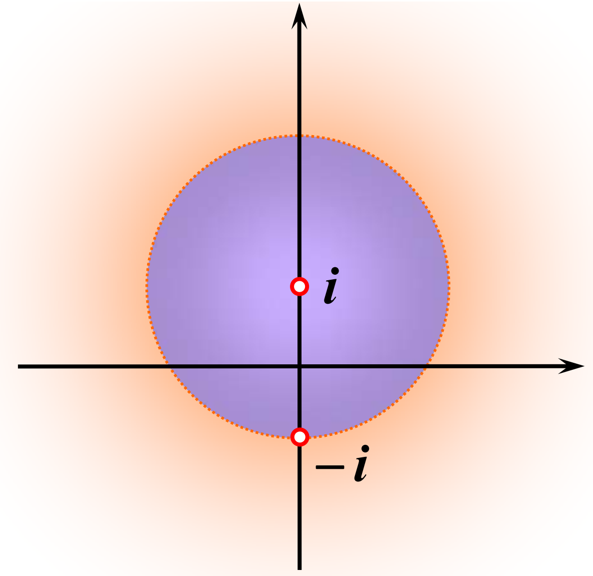
$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{\dfrac{z-i}{2i}+1}$$

$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在 $z=i$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

② 当 $2<|z-i|<+\infty$ 时，



$$f(z)=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{(z-i)+2i}$$

$$=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2i}{z-i}}$$

$$=\frac{1}{(z-i)^2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2i)^n}{(z-i)^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-2i)^n}{(z-i)^{n+2}}.$$

例 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(2-z)}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 (1) 将复平面分为若干个解析环

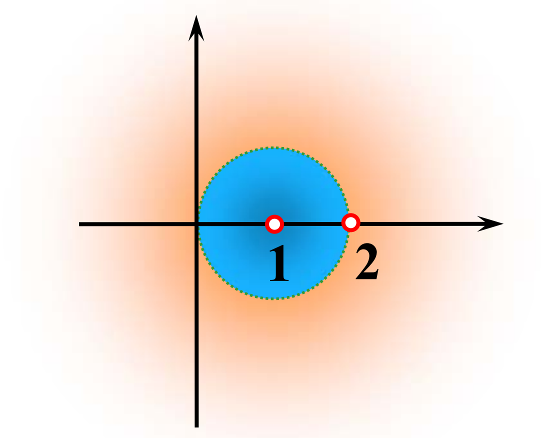
函数 $f(z)$ 有两个奇点：$z=1$，$z=2$，

以展开点 $z=1$ 为中心，

将复平面分为两个解析环：

① $0<|z-1|<1$;

② $1<|z-1|<+\infty$.



注意：不需要将函数进行部分分式分解。

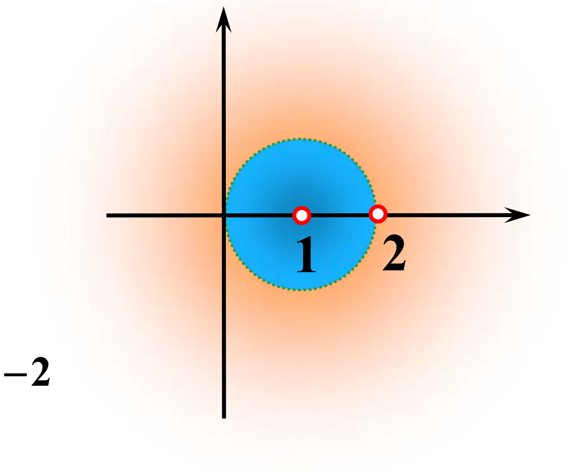
例 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(2-z)}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

$$f(z)=\frac{z-1+1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2-z}=\Big(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\Big)\cdot\frac{1}{1-(z-1)}.$$

① 当 $0<|z-1|<1$ 时，

$$\frac{1}{1-(z-1)}=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n,$$



$$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-2}$$

$$=\frac{1}{(z-1)^2}+2\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1}.$$

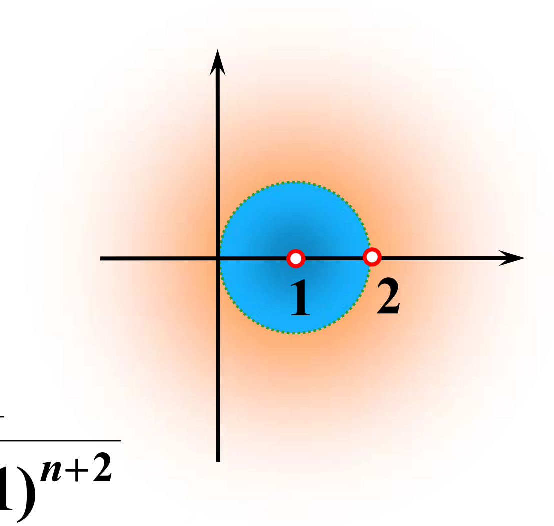
例 将函数 $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(2-z)}$ 在 $z=1$ 处展开为洛朗级数。

解 (2) 将函数在每个解析环内分别展开

$$f(z)=\frac{z-1+1}{(z-1)^2}\cdot\frac{1}{2-z}=\left(\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}\right)\cdot\frac{1}{1-(z-1)}.$$

② 当 $1<|z-1|<+\infty$ 时，

$$\frac{1}{1-(z-1)}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n},$$



$$f(z)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+2}}$$

$$=-\frac{1}{(z-1)^2}-2\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

例 把函数 $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数。

解 $$z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}+\frac{1}{3!\,z^3}+\frac{1}{4!\,z^4}+\cdots\right)$$

$$= z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!\,z}+\cdots,\quad 0<|z|<+\infty.$$

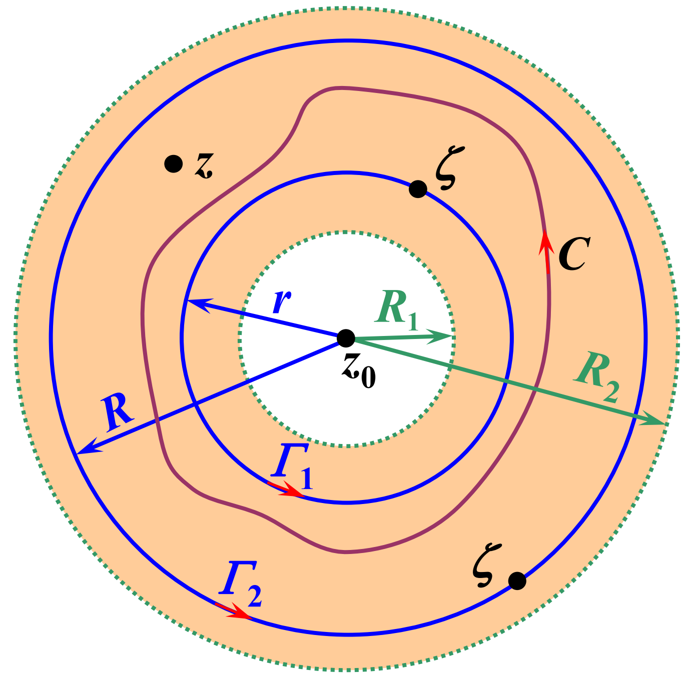
例 把函数 $\frac{1}{z^2}e^z$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数。

解 $$\frac{1}{z^2}e^z=\frac{1}{z^2}\left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}z+\frac{1}{4!}z^2+\cdots,\quad 0<|z|<+\infty.$$

轻松一下吧 ……

附：洛朗定理的证明



证明 如图，在圆环内作两个圆：

$\Gamma_1: |z-z_0| = r$, $\Gamma_2: |z-z_0| = R$,

其中，$R_1 < r < R < R_2$,

对 $r < |z-z_0| < R$ 内任一点 z,

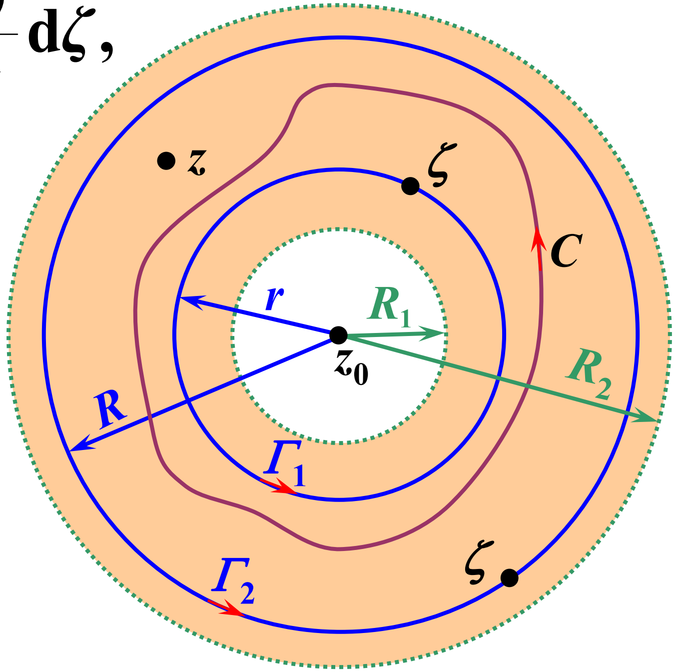
由二连域的柯西积分公式有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta,$$

$$\overset{\text{记为}}{=\!=\!=} I_1 + I_2.$$

附：洛朗定理的证明

证明 对第一个积分 $I_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$,



ζ 在 Γ_2 上, z 在 Γ_2 内,

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1.$$

和泰勒展开式一样，可以推得

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta\right](z-z_0)^n$$

附：洛朗定理的证明

证明 对于第二个积分 $I_2 = -\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$

由于 ζ 在 Γ_2 上，点 z 在 Γ_1 的外部，$\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1.$

因此 $$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}(z - z_0)^{-n},$$

附：洛朗定理的证明

证明 $$I_2 = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

$$= \sum_{n=1}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta\right](z-z_0)^{-n} + R_N(z),$$

其中 $$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta)}{(z-z_0)^n}\right]\mathrm{d}\zeta.$$

令 $q = \left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \dfrac{r}{|z - z_0|}$，则 $0 < q < 1$

附：洛朗定理的证明

证明 因此有 $|R_N(z)| \le \dfrac{1}{2\pi}\oint_{\Gamma_1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|^n\right]\mathrm{d}s$

$$\le \frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{M_1}{r}q^n\cdot 2\pi r=\frac{M_1 q^N}{1-q}.$$

其中，M_1 是 $|f(z)|$ 在 Γ_1 上的最大值.

因为 $\lim\limits_{N\to\infty} q^N \to 0$，所以 $\lim\limits_{N\to\infty} R_N(z)=0$.

附：洛朗定理的证明

证明 因此 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (4.4.5)$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=0,1,2,\cdots)\ (4.4.6)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=1,2,\cdots)\ (4.4.7)$$

附：洛朗定理的证明

证明 级数(4.4.5)的系数由不同的式子(4.4.6)与(4.4.7) 表出.

如果在圆环域内取绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线 C,

则根据闭路变形原理, 这两个式子可用一个式子来表示:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

即 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$,

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

(返回)