§ 6.4 几个初等函数构成的映射

一、幂函数

二、指数函数

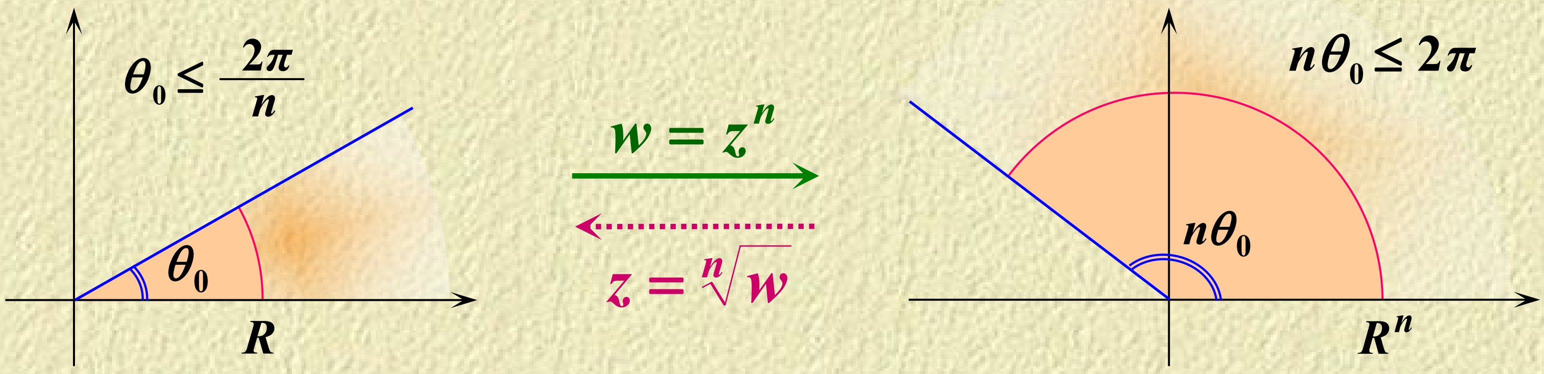
三、综合举例

上页 下页 返回

一、幂函数 $w = z^n$,（$n \geq 2$ 整数）

1. 映射特点

令 $z = re^{i\theta}$, 则有 $w = r^n e^{in\theta}$, 即 $|w| = r^n$, $\arg w = n\theta$.



特点 幂函数 $w = z^n$ 扩大顶点在原点的角形域(或扇形域)。

- 相应地，根式函数 $w = \sqrt[n]{z}$ 作为幂函数的逆映射，其映射特点是缩小顶点在原点的角形域(或扇形域)。

一、幂函数 $w = z^n$,（$n \geq 2$ 整数）

2. 保形性

分析 (1) 在 z 平面上处处解析，且 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = nz^{n-1}$；

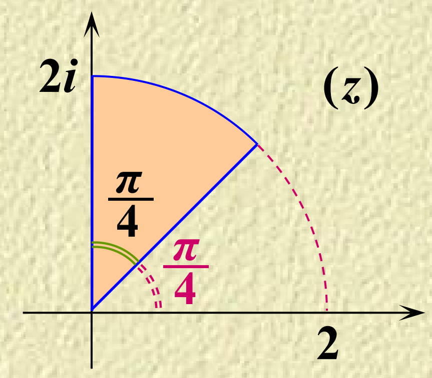
(2) 当 $z \neq 0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} \neq 0$.

结论 幂函数 $w = z^n$ 在 z 平面上除原点外是第一类保角映射。

- 在角形域或扇形域 $(0 < \theta < \theta_0)$ 上，如果 $\theta_0 \leq \dfrac{2\pi}{n}$,

  则幂函数 $w = z^n$ 是共形映射。

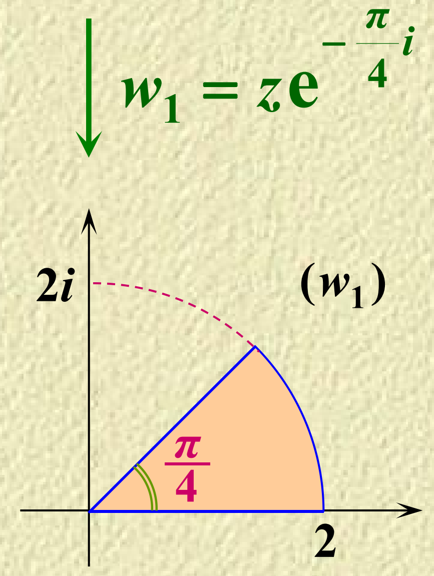
例 求区域 $D=\{z:\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{2}, 0<|z|<2\}$ 在映射 $w=(ze^{-\frac{\pi}{4}i})^4$ 下的像区域。

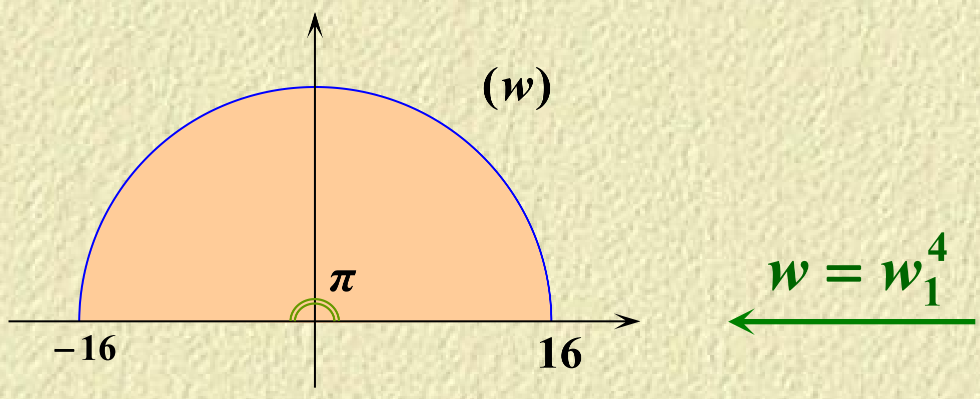


解 令 $w_1=ze^{-\frac{\pi}{4}i}$，则 $w=w_1^4$.

如图，所求的像区域 G 为：

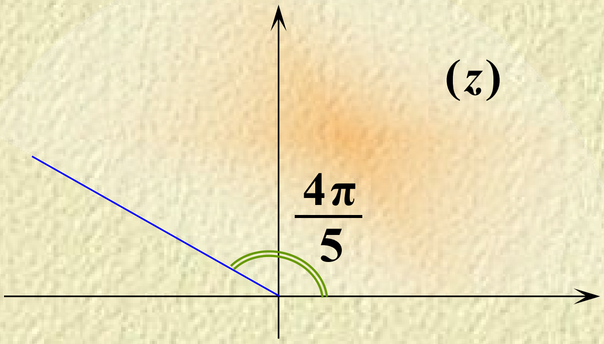
$$G=\{w:|w|<16, \operatorname{Im}w>0\}.$$



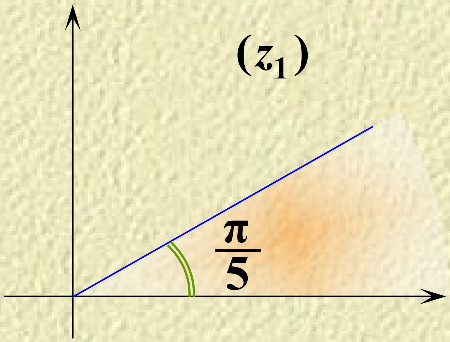


例 设区域 $D=\{z: 0<\arg z<\dfrac{4\pi}{5}\}$，求一共形映射将 D 映射成单位圆域。 P158 例 6.14

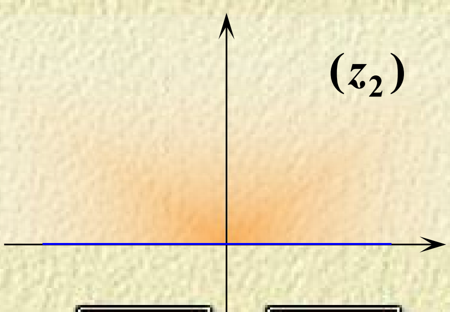
解



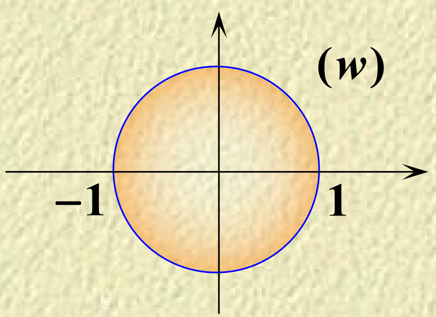
$$z_1=\sqrt[4]{z}\ \longrightarrow$$



$$\downarrow\ z_2=z_1^5$$



$$\longleftarrow\ w=\frac{z_2-i}{z_2+i}$$

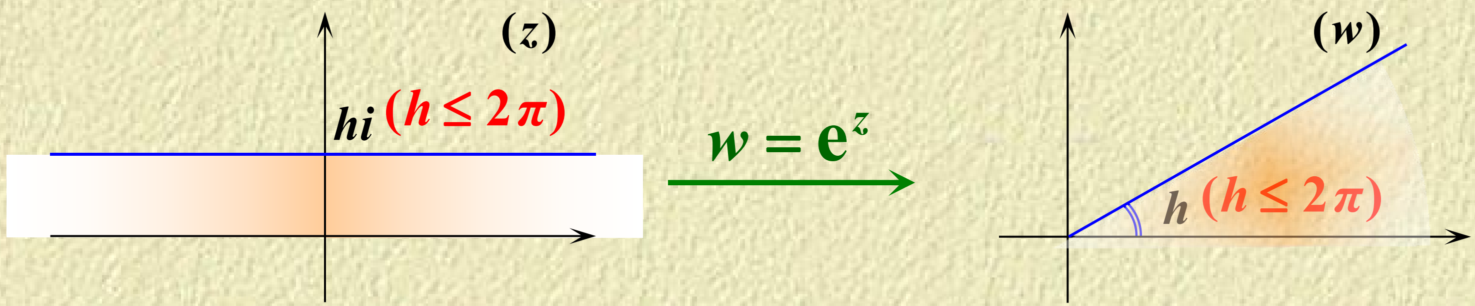


$$\downarrow\ \boxed{w=\frac{(\sqrt[4]{z})^5-i}{(\sqrt[4]{z})^5+i}}$$

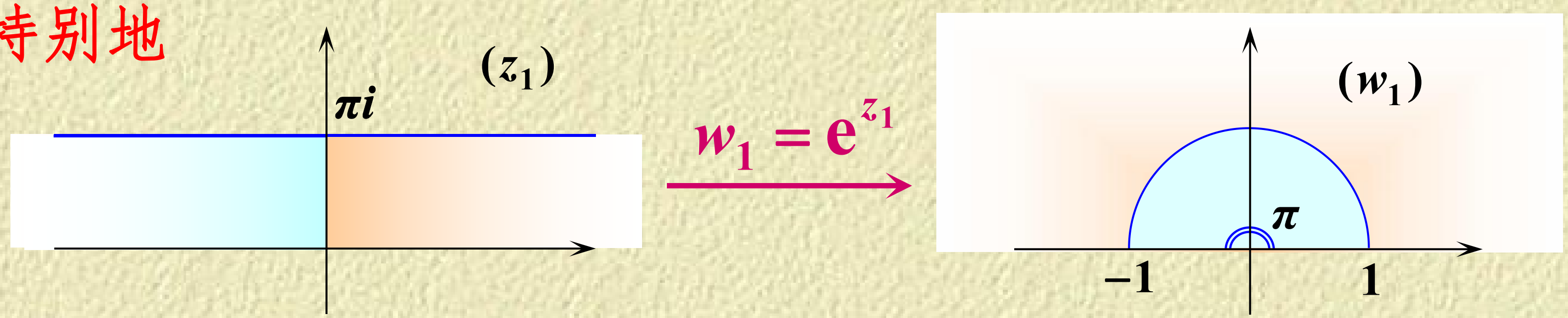
二、指数函数 $\boxed{w = e^z}$

1. 映射特点

分析 令 $z = x + iy$，则有 $w = e^z = e^x \cdot e^{iy}$，



特别地



特点 指数函数 $w = e^z$ 将水平带形域（半带形域）变为角形域（或扇形域）。

上页 下页 返回

二、指数函数 $w = e^z$

2. 保形性

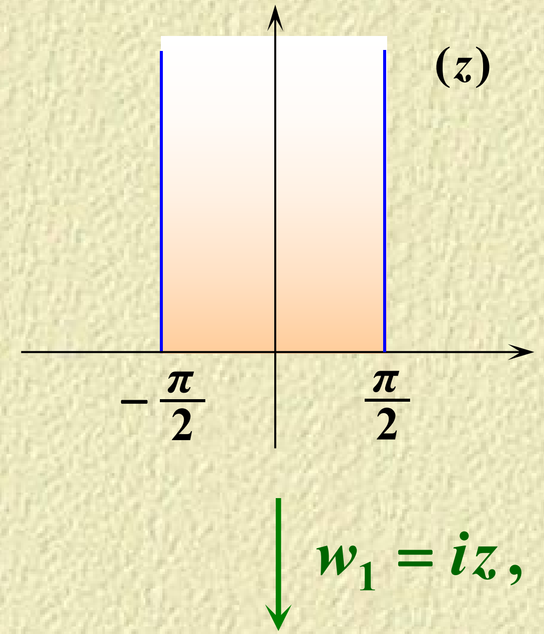
分析 • 指数函数在 z 平面上处处解析，且 $\dfrac{dw}{dz} = e^z \neq 0.$

结论 指数函数 $w = e^z$ 在 z 平面上是第一类保角映射。

• 在水平带形域 $(0 < y < h)$上，如果 $h \leq 2\pi$，则指数函数 $w = e^z$ 是共形映射。

上页 下页 返回

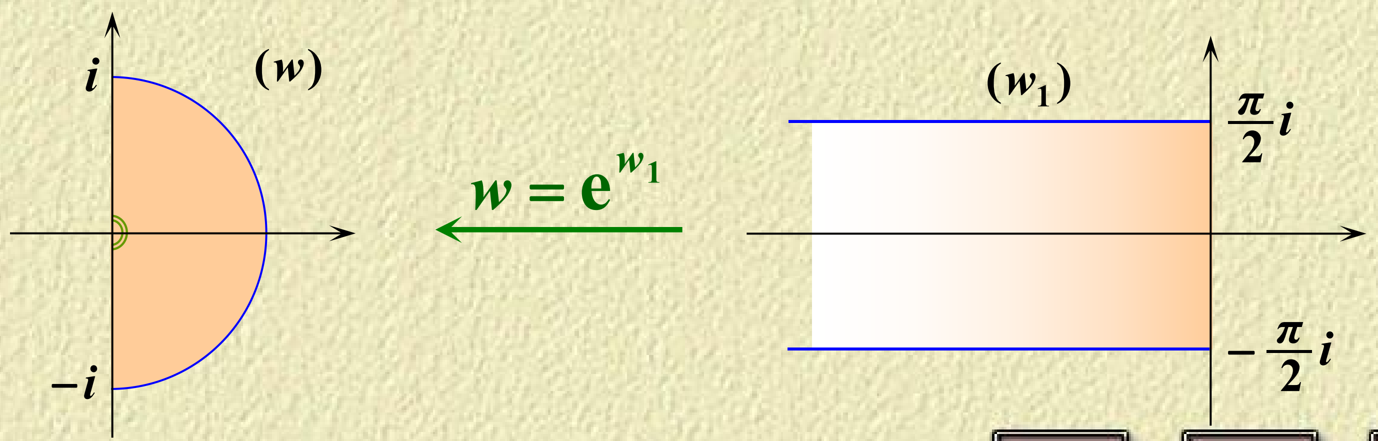
例 求区域 $D=\{z:-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}z<\frac{\pi}{2},\mathrm{Im}z>0\}$在映射 $w=\mathrm{e}^{iz}$ 下的像区域。



解 令 $w_1=iz$，则 $w=\mathrm{e}^{w_1}$.

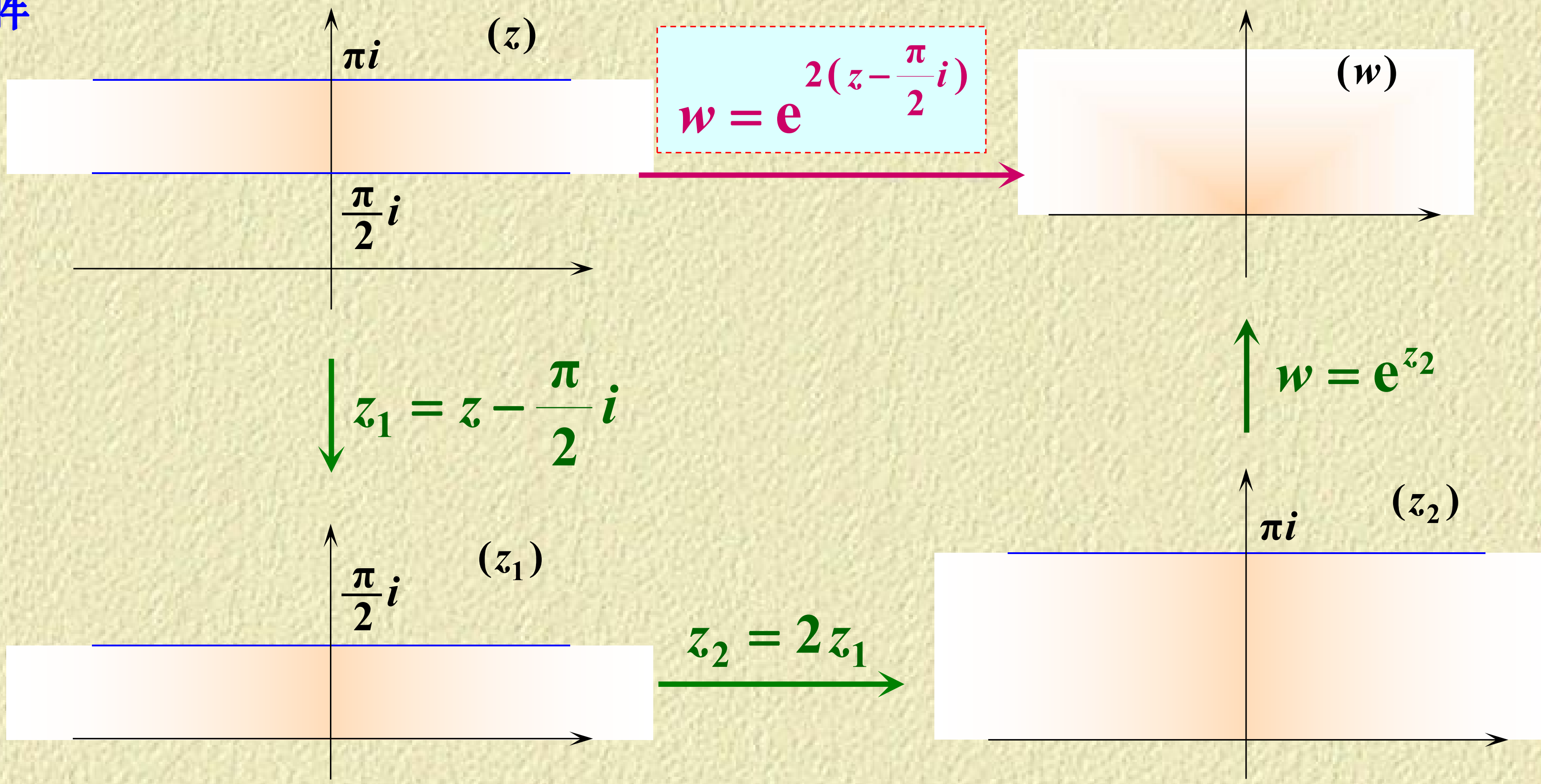
如图，所求的像区域 G 为：

$$G=\{w:|w|<1,\ \mathrm{Re}w>0\}.$$



例 设区域 $D=\{z:\frac{\pi}{2}<\operatorname{Im} z<\pi\}$，求一共形映射将 D 映射成上半平面。 P159 例 6.15

解



三、综合举例

主要步骤（一般）

(1) 预处理　使区域的边界至多由两个圆弧段构成。

(2) 将区域映射为角形域(或者带形域)（通过构造分式映射）

方法　将区域边界的一个交点 z_1 映射为 ∞;

[另一个(交)点 z_2 映射为 0]。

工具　$$w = k\frac{z-z_2}{z-z_1}.$$

注：若区域边界只有一个交点，则将唯一交点映射为∞。

公式　从上半单位圆域到第一象限的映射为 $$\boxed{w=-\frac{z+1}{z-1}.}$$

三、综合举例

主要步骤 (一般)

(3) 将角形域(或者带形域)映射为上半平面

工具 $w = z^n$, $w = \sqrt[n]{z}$. (对于角形域)

$w = e^z$. (对于带形域)

注意范围

(4) 将上半平面映射为单位圆域

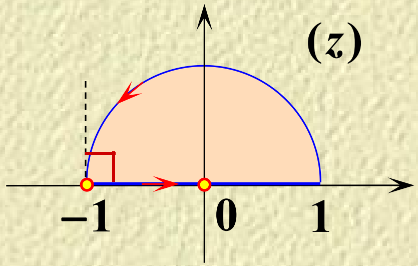
工具 $w = \dfrac{z-i}{z+i}$. (无附加条件)

$w = e^{i\theta_0} \dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$. (由附加条件确定$\theta_0$, z_0)

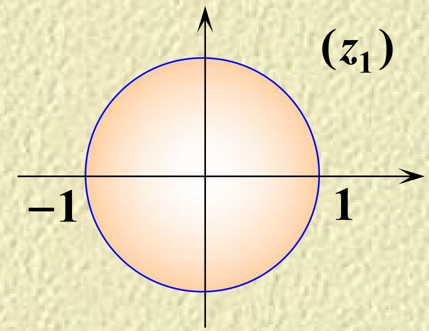
上页 下页 返回

例1 设区域 $D=\{z:|z|<1,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$，求一共形映射将 D 映射为单位圆域。 P162 例 6.18

解



$w=z^2$?（错!!）

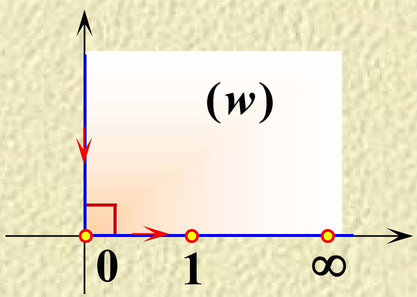


P153 例 6.9

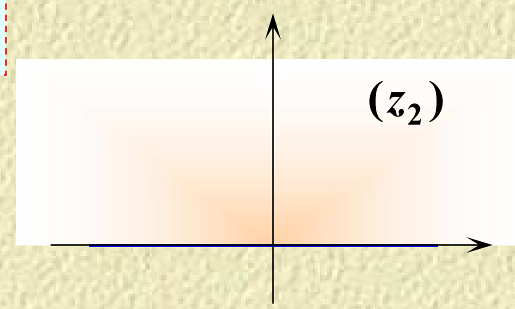
$$z_1=-\frac{z+1}{z-1}$$

$$w=\frac{\left(-\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2-i}{\left(-\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2+i}$$

$$w=\frac{z_2-i}{z_2+i}$$



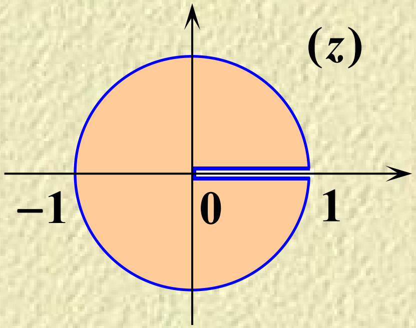
$$z_2=z_1^2$$

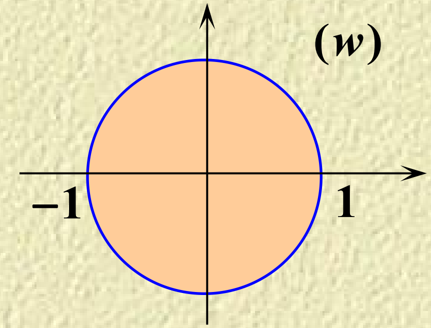


附 从上半单位圆域到上半平面的映射为 $w=\left(-\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$. 公式

例2 设区域 $D=\{z:|z|<1,$ 沿0到1有割痕$\}$，求一共形映射将D映射成单位圆域。

解

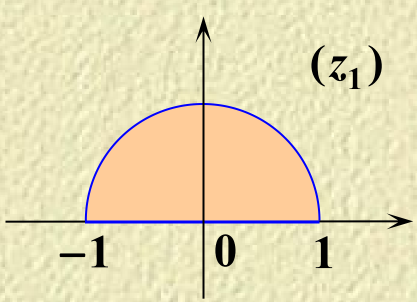




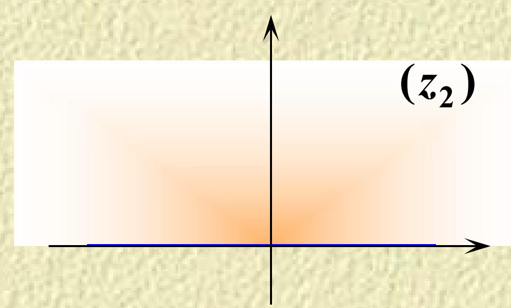
$$w=\frac{\left(-\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2-i}{\left(-\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2+i}$$

$$z_1=\sqrt{z}$$

$$w=\frac{z_2-i}{z_2+i}$$



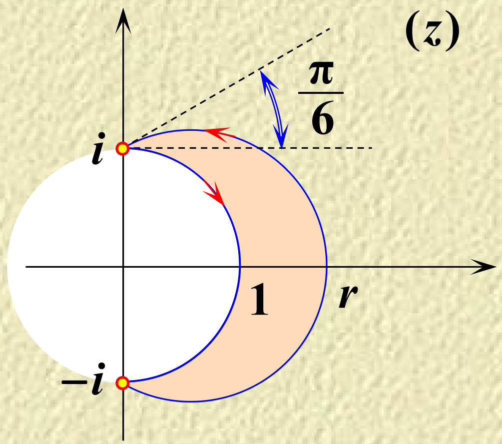
$$z_2=\left(-\frac{z_1+1}{z_1-1}\right)^2$$



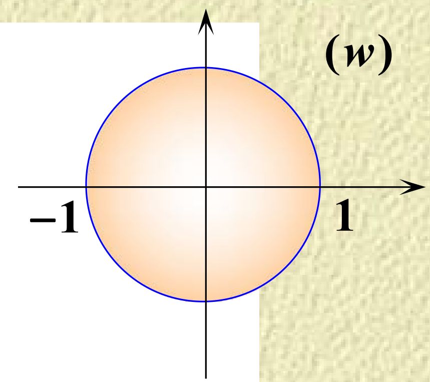
例3 设区域 D 由两个圆弧围成(如图所示)，其中 $r>1$，求一共形映射将 D 映射成单位圆域。

P161 例 6.17

解

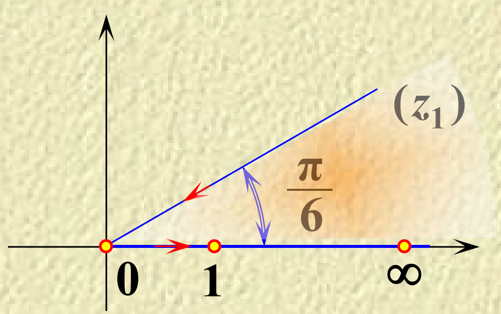


$$w=\frac{\left(i\,\dfrac{z-i}{z+i}\right)^6-i}{\left(i\,\dfrac{z-i}{z+i}\right)^6+i}$$

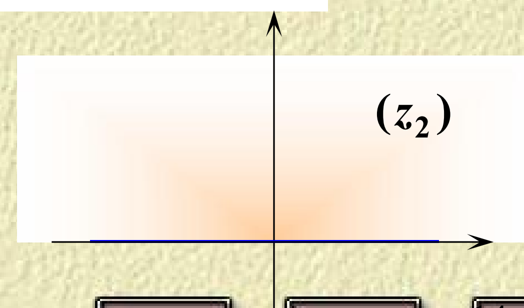


$$z_1=i\,\frac{z-i}{z+i}$$

$$w=\frac{z_2-i}{z_2+i}$$

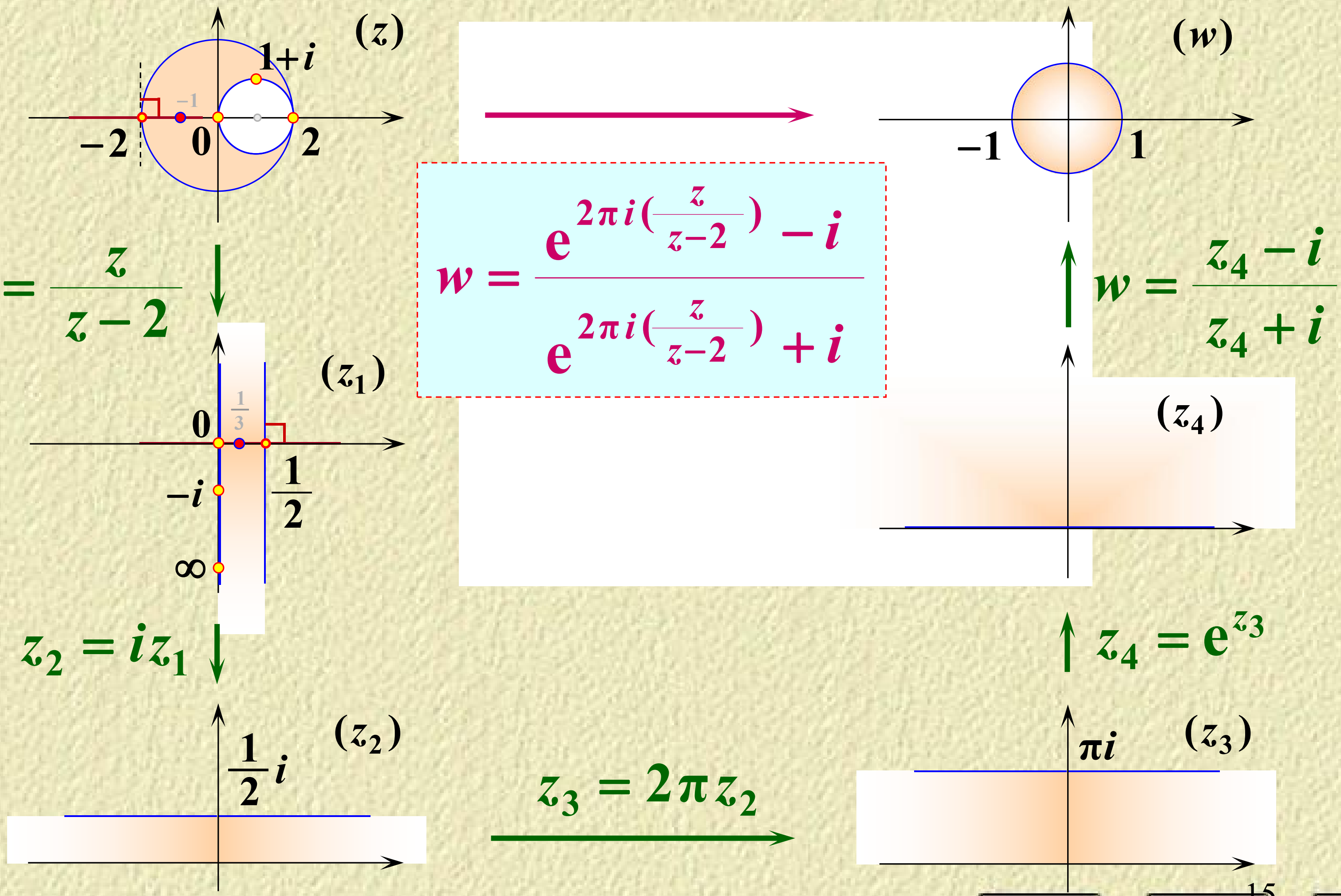


$$z_2=z_1^6$$



例4 设区域 $D=\{z:|z|<2,|z-1|>1\}$，求一共形映射将 D 映射为单位圆域。 P160 例 6.16

解



$$z_1=\frac{z}{z-2}$$

$$z_2=iz_1$$

$$z_3=2\pi z_2$$

$$z_4=e^{z_3}$$

$$w=\frac{z_4-i}{z_4+i}$$

$$w=\frac{e^{2\pi i\left(\frac{z}{z-2}\right)}-i}{e^{2\pi i\left(\frac{z}{z-2}\right)}+i}$$