§9.3 Laplace 逆变换

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

二、求 Laplace 逆变换的方法

一、反演积分公式 —— Laplace 逆变换公式

1. 公式推导

推导 (1) 设函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换为 $F(s)$，

记 $s=\beta+j\omega$.

(2) 根据 Laplace 变换与 Fourier 变换的关系，可知：

函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=F(\beta+j\omega)$

就是函数 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换。

即 $F(s)=F(\beta+j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}]\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$.

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

1. 公式推导

推导 (3) 根据 Fourier 逆变换公式，有

$$f(t)u(t)e^{-\beta t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\beta+j\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

(4) 将上式两边同乘 $e^{\beta t}$，并由 $s=\beta+j\omega$，有

$$f(t)u(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)e^{st}ds.$$

即得 $$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)e^{st}ds,\quad (t>0).$$

一、反演积分公式——Laplace 逆变换公式

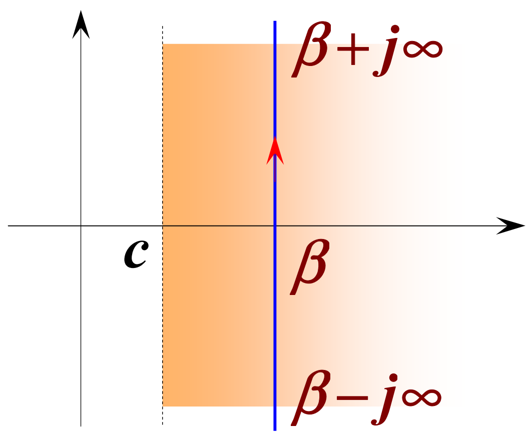
2. 反演积分公式

- 根据上面的推导，得到如下的 Laplace 变换对:

$$\left[\begin{array}{l} F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t; \qquad (A) \\ \Updownarrow \\ f(t)=\dfrac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,\ (t>0). \qquad (B) \end{array}\right.$$

定义 称 (*B*) 式为反演积分公式。

注 反演积分公式中的积分路径是 s 平面上的一条直线 $\mathrm{Re}\,s=\beta$，该直线位于 $F(s)$ 的存在域中。



二、求 Laplace 逆变换的方法

1. 留数法

想法　利用留数计算反演积分。

定理　设 $f(t)$ 的像函数 $F(s)$ 除有限个孤立奇点 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 外

P228 定理 9.2

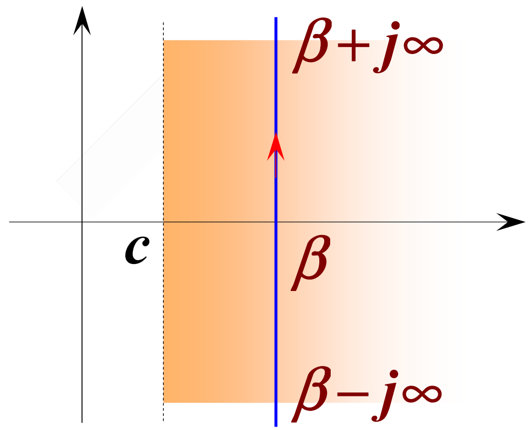
是解析的，且 $\lim\limits_{s\to\infty} F(s)=0$，则对于 $t>0$，有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ s_k].$$

证明　（略）　(进入?)

注　由于 $F(s)$ 在存在域 $\mathrm{Re}\,s>c$ 内解析，

因此 $F(s)$ 的奇点均在 $\mathrm{Re}\,s\le c$ 上。



二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法

想法　利用 Laplace 变换的各种性质，并根据一些已知函数的 Laplac 变换来求逆变换。

优势
- 大多数情况下，象函数 $F(s)$ 通常为（真）分式函数：

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)},$$

其中，$P(s)$ 和 $Q(s)$ 是实系数多项式。

- 由于分式函数总能分解为多项式和部分分式，因此，利用查表法易得象原函数。 ⇨ （部分分式分解）

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法

- 几个常用的 Laplace 逆变换的性质。

$$\mathscr{L}^{-1}[a\,F(s)+b\,G(s)]=a\,f(t)+b\,g(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\,F(s-a)\,]=\mathrm{e}^{a\,t}\,f(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\,\mathrm{e}^{-s\tau}F(s)\,]=f(t-\tau)\,u(t-\tau).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\,F_1(s)\cdot F_2(s)\,]=f_1(t)*f_2(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\,F'(s)\,]=-t\,f(t).\qquad \mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}F(s)]=\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}\,t\,.$$

二、求 Laplace 逆变换的方法

2. 查表法

- 几个常用函数的 Laplace 逆变换。

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}]=1.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}]=e^{at}.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{m!}{s^{m+1}}]=t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{m!}{(s-a)^{m+1}}]=e^{at}\,t^m.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+b^2}]=\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}]=e^{at}\cos bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{b}{s^2+b^2}]=\sin bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{b}{(s-a)^2+b^2}]=e^{at}\sin bt.$$

$$\mathscr{L}^{-1}[1]=\delta(t).$$

$$\mathscr{L}^{-1}[s^n]=\delta^{(n)}(t).$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法1 利用查表法求解。

(1) $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}=\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{3}{s-2}$. （单根）

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-a}]=e^{at}$,

得 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$

$$=2\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s+1}]+3\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s-2}]$$

$$=2e^{-t}+3e^{2t}.$$

例　已知 $F(s)=\dfrac{5s-1}{(s+1)(s-2)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解　方法2　利用留数法求解。

(1) $s_1=-1,\ s_2=2$ 为 $F(s)$ 的一阶极点，

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ -1]=\frac{5s-1}{s-2}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=-1}=2\mathrm{e}^{-t},$$

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ 2]=\frac{5s-1}{s+1}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=2}=3\mathrm{e}^{2t}.$$

(2) $f(t)=\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ -1]+\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ 2]$

$$=2\mathrm{e}^{-t}+3\mathrm{e}^{2t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

P229 例 9.17

解 方法1 利用查表法求解。

(1) $$F(s)=\frac{1}{(s-2)(s-1)^2}$$ （重根）

$$=\frac{1}{s-2}+\frac{-1}{s-1}+\frac{-1}{(s-1)^2}.$$

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-a}\right]=e^{at}$, $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)^2}\right]=t\,e^{at}$,

得 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=e^{2t}-e^{t}-t\,e^{t}$.

例 已知 $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)(s-1)^2}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

P229 例 9.17

解 方法2 利用留数法求解。

(1) $s_1=2,\ s_2=1$ 分别为 $F(s)$ 的一阶与二阶极点，

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ 2]=\frac{1}{(s-1)^2}\mathrm{e}^{st}\Big|_{s=2}=\mathrm{e}^{2t},$$

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ 1]=\left(\frac{\mathrm{e}^{st}}{s-2}\right)'\Big|_{s=1}=-\mathrm{e}^{t}-t\,\mathrm{e}^{t}.$$

(2) $f(t)=\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ 2]+\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ 1]$

$$=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{t}-t\,\mathrm{e}^{t}.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2-2s+5)(s-3)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法1 利用查表法求解。

$$(1)\ F(s)=\frac{(s+1)^2}{[(s-1)^2+4](s-3)}$$ （复根）

$$=\frac{2}{s-3}+\frac{-1\cdot(s-1)+2\cdot 1}{(s-1)^2+2^2},$$

$$\Rightarrow (s+1)^2=A[(s-1)^2+2^2]+[B(s-1)+2C](s-3),$$

令 $s=3$，得 $A=2$;

令 $s=1+2i$，得 $(2+2i)^2=(2iB+2C)(2i-2)$,

$$\Rightarrow B=-1,\ C=1.$$

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2-2s+5)(s-3)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法1 利用查表法求解。

(1) $F(s)=2\cdot\dfrac{1}{s-3}-\dfrac{s-1}{(s-1)^2+2^2}+\dfrac{2}{(s-1)^2+2^2}$,

(2) 由 $\mathscr{L}^{-1}[\dfrac{1}{s-a}]=\mathrm{e}^{at}$,

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}]=\mathrm{e}^{t}\cos 2t,$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\frac{2}{(s-1)^2+2^2}]=\mathrm{e}^{t}\sin 2t,$$

得 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=2\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{t}\cos 2t+\mathrm{e}^{t}\sin 2t$.

例 已知 $F(s)=\dfrac{s^2+2s+1}{(s^2-2s+5)(s-3)}$，求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

解 方法2 利用留数法求解。

(1) $s_1=3$，$s_{2,3}=1\pm 2i$ 为 $F(s)$ 的一阶极点，

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\,3]=2\mathrm{e}^{3t},$$

$$\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\,1\pm 2i]=-\frac{1\pm i}{2}\mathrm{e}^{(1\pm 2i)t}.$$

(2) $$f(t)=2\mathrm{e}^{3t}-\frac{1+i}{2}\mathrm{e}^{(1+2i)t}-\frac{1-i}{2}\mathrm{e}^{(1-2i)t}$$

$$=2\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{t}\cos 2t+\mathrm{e}^{t}\sin 2t.$$

放松一下吧！……

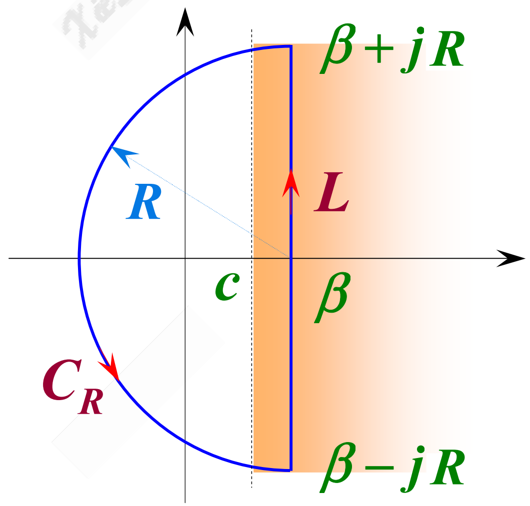
附：利用留数计算反演积分的定理证明

定理 设 $f(t)$ 的像函数 $F(s)$ 除有限个孤立奇点 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 外是解析的，且 $\lim\limits_{s\to\infty} F(s)=0$，则对于 $t>0$，有

P228 定理 9.2

$$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty}F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)\mathrm{e}^{st},\ s_k].$$

证明 (1) 如图，作闭曲线 $C=L+C_R$，



由于函数 e^{st} 在 s 平面上无奇点，

而 $F(s)$ 的奇点均在 $\mathrm{Re}\,s\le c$ 上，

因此，当 R 充分大时，可使得

$F(s)\mathrm{e}^{st}$ 的所有奇点都包含在 C 围成的区域内。

附：利用留数计算反演积分的定理证明

证明 (2) 根据留数定理，有

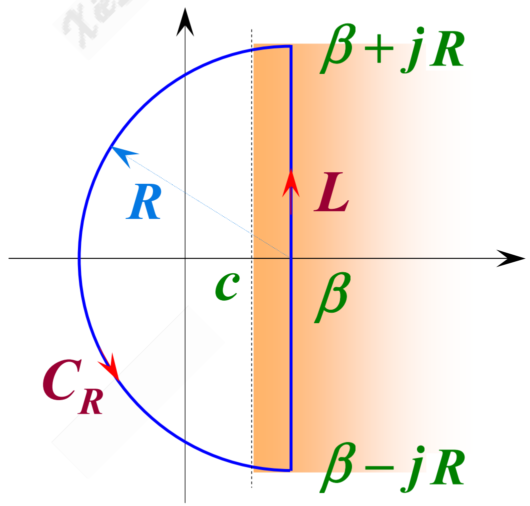
$$\oint_C F(s)e^{st}ds = 2\pi j\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k]$$

$$= \int_L F(s)e^{st}ds + \int_{C_R} F(s)e^{st}ds.$$

利用若尔当引理(§ 5.3)，可得

当 $t>0$ 时，

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} F(s)e^{st}ds = 0,$$



即得 $$\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}ds = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s_k].$$

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

1. 分母 $Q(s)$ 中含单重一阶因子的情况

方法 设 $Q(s)$ 含单重一阶因子 $(s-a)$，即 $Q(s)=(s-a)Q_1(s)$，

则 $$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-a)Q_1(s)}=\frac{A}{s-a}+\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}.$$

将上式两边同乘以 $(s-a)$，有

$$\frac{P(s)}{(s-a)Q_1(s)}(s-a)=A+\frac{P_1(s)}{Q_1(s)}(s-a).$$

令 $s=a$，即得 $A=\left.\dfrac{P(s)}{Q_1(s)}\right|_{s=a}=\dfrac{P(a)}{Q_1(a)}.$

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

2. 分母 $Q(s)$ 中含多重一阶因子的情况

方法 设 $Q(s)$ 含 n 重一阶因子 $(s-a)^n$，即 $Q(s)=(s-a)^n Q_2(s)$,

$$则\ F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(s)}{(s-a)^n Q_2(s)}$$

$$=\frac{A_0}{(s-a)^n}+\frac{A_1}{(s-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_{n-1}}{s-a}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}.$$

将上式两边同乘以 $(s-a)^n$，有

$$\frac{P(s)}{Q_2(s)}=A_0+A_1(s-a)+\cdots+A_{n-1}(s-a)^{n-1}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}(s-a)^n.$$

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

2. 分母 $Q(s)$ 中含多重一阶因子的情况

方法　令 $s=a$，即得 $A_0=\left.\dfrac{P(s)}{Q_2(s)}\right|_{s=a}=\dfrac{P(a)}{Q_2(a)}$；

两边逐次求导，并依次令 $s=a$，即得

$$A_k=\frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}s^k}\left(\frac{P(s)}{Q_2(s)}\right)\bigg|_{s=a},\quad (k=1,2,\cdots,n-1).$$

$$\frac{P(s)}{(s-a)^n Q_2(s)}=\frac{A_0}{(s-a)^n}+\frac{A_1}{(s-a)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_{n-1}}{s-a}+\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}.$$

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

分析

- 前面讨论了 $Q(s)$ 中含有单重和多重一阶因子的情况，如果在复数范围内分解，这两种情况已经够了。
- 但如果仅在实数范围内分解，这两种情况还不够。
- 在实系数多项式中，复零点总是互为共轭出现，即

> 如果复数 $z=a+jb$ 为 $Q(s)$ 的零点，
>
> 则复数 $\bar{z}=a-jb$ 也为 $Q(s)$ 的零点。

由于 $(s-z)(s-\bar{z})=(s-a)^2+b^2$，因此在实数范围内，分母 $Q(s)$ 的最小因子至多为二阶因子。

- 下面只需进一步讨论含实二阶因子的情况。

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

3. 分母 $Q(s)$ 中含单重二阶因子的情况

方法 设 $Q(s)$ 含单重二阶因子 $(s-a)^2+b^2$，即

$$Q(s)=[(s-a)^2+b^2]Q_3(s),$$

则 $$F(s)=\frac{P(s)}{[(s-a)^2+b^2]Q_3(s)}=\frac{C(s-a)+bD}{(s-a)^2+b^2}+\frac{P_3(s)}{Q_3(s)}.$$

将上式两边同乘以 $(s-a)^2+b^2$，得

$$\frac{P(s)}{Q_3(s)}=C(s-a)+bD+\frac{P_3(s)}{Q_3(s)}[(s-a)^2+b^2].$$

附：将实系数真分式 $F(s)=P(s)/Q(s)$ 化为部分分式

3. 分母 $Q(s)$ 中含单重二阶因子的情况

方法　令 $s=a+jb$，则有 $\dfrac{P(a+jb)}{Q_3(a+jb)}=jbC+bD$,

即得 $C=\dfrac{1}{b}\mathrm{Im}[\dfrac{P(a+jb)}{Q_3(a+jb)}]$,　$D=\dfrac{1}{b}\mathrm{Re}[\dfrac{P(a+jb)}{Q_3(a+jb)}]$.

$$\frac{P(s)}{[(s-a)^2+b^2]Q_3(s)}=\frac{C(s-a)+bD}{(s-a)^2+b^2}+\frac{P_3(s)}{Q_3(s)}.$$

4. 分母 $Q(s)$ 中含多重二阶因子的情况（略）

（返回）

放松一下吧！……