拉普拉斯变换

正变换：$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt=\mathcal{L}[f(t)]$

逆变换：$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}ds=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

其中 $s=\sigma+j\omega$

常见信号的拉氏变换：

① 阶跃函数：$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}$　$Re\{s\}>0$

单边指数信号：$e^{-\alpha t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}$　$Re\{s\}>-\alpha$

单边正弦信号：$\sin\omega t\, u(t) \longleftrightarrow \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$　$Re\{s\}>0$

单边余弦信号：$\cos\omega t\, u(t) \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+\omega^2}$　$Re\{s\}>0$

单边衰减正弦：$e^{-\alpha t}\sin\omega t\, u(t) \longleftrightarrow \frac{\omega}{(s+\alpha)^2+\omega^2}$　$Re\{s\}>-\alpha$

② t的正幂信号：$t^n u(t) \longleftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}$　$Re\{s\}>0$

$\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$，$\mathcal{L}[t]=\frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}[t^n]=\int_{0^-}^{\infty} t^n e^{-st}dt=\frac{n}{s}\cdot\mathcal{L}[t^{n-1}]=\cdots=\frac{n!}{s^{n+1}}$

③ 冲激信号：

$\delta(t) \longleftrightarrow 1$　$Re\{s\}:(-\infty,+\infty)$

$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}$

$\delta'(t) \longleftrightarrow s$

拉氏变换性质：

线性：$a_1f_1(t)+a_2f_2(t) \longleftrightarrow a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$

时域微分：

$\frac{df(t)}{dt} \longleftrightarrow sF(s)-f(0_-)$

$\frac{d^2f(t)}{dt^2} \longleftrightarrow s^2F(s)-sf(0_-)-f'(0_-)$

$\frac{d^nf(t)}{dt^n} \longleftrightarrow s^nF(s)-s^{n-1}f(0_-)-\cdots-f^{(n-1)}(0_-)$

时域积分：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s}+\frac{f^{(-1)}(0_-)}{s}$

有始函数：

$\frac{df(t)u(t)}{dt} \longleftrightarrow sF(s)$

$\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s}$

$\Longrightarrow t\cdot u(t)=\int_{0^-}^{t}u(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s^2}$

延时特性：(时域平移) $f(t-t_0)u(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}F(s)$，$t_0>0$

S域平移：$f(t)e^{-s_0t} \longleftrightarrow F(s+s_0)$

尺度变换：$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$　$(a>0)$

初值定理：$f(0^+)=\lim_{t\to0^+}f(t)=\lim_{s\to\infty}sF(s)$　(当F(s)为真分式时成立)

终值定理：$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{s\to0}sF(s)$　(F(s)极点在复频域左半平面)

卷积定理：
- 时域　$f_1(t)*f_2(t) \longleftrightarrow F_1(s)\cdot F_2(s)$
- 复频域　$f_1(t)\cdot f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi j}F_1(s)*F_2(s)$

复频域微分：$-tf(t) \longleftrightarrow \frac{dF(s)}{ds}$

复频域积分：$\frac{f(t)}{t} \longleftrightarrow \int_{s}^{\infty}F(s)ds$

序列傅里叶变换(DTFT: discrete time Fourier transform)

正变换：$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$ 记作 $DTFT[x(n)]$

逆变换：$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$　记作 $IDFT[X(e^{j\omega})]$

性质：
- 序列位移：$DTFT[x(n-n_0)]=e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
- 频域位移：$DTFT[e^{j\omega_0 n}x(n)]=X[e^{j(\omega-\omega_0)}]$
- 线性加权：$DTFT[nx(n)]=j[\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})]$
- 序列反褶：$DTFT[x(-n)]=X(e^{-j\omega})$