§ 8.3 Fourier 变换的性质

一、基本性质

二、卷积与卷积定理

一、基本性质

- 在下面给出的所有基本性质中，假定函数的 Fourier 变换均存在，且 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，$G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]$.
- 对于涉及到的一些运算（如求导、积分、极限及求和等）的次序交换问题，均不另作说明。

直接进入基本性质汇总

1. 线性性质 P 197

性质 设 a,b 为常数，则

$$\mathscr{F}[af(t)+bg(t)]=aF(\omega)+bG(\omega).$$

证明（略）

一、基本性质

2. 位移性质 P197

性质 设 t_0, ω_0 为实常数，则

$$(1)\ \mathscr{F}[f(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}F(\omega);\quad \text{(时移性质)}$$

$$(2)\ \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)] = e^{j\omega_0 t}f(t).\quad \text{(频移性质)}$$

证明 (1) $\mathscr{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-t_0)e^{-j\omega t}\,dt$

$$\xlongequal{\text{令 } x=t-t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j\omega x}\cdot e^{-j\omega t_0}\,dx$$

$$= e^{-j\omega t_0}F(\omega);$$

(2) 同理，可得到频移性质。

一、基本性质

2. 位移性质

性质 设 t_0, ω_0 为实常数，则

$$(1)\ \mathscr{F}[f(t-t_0)] = \mathrm{e}^{-j\omega t_0}F(\omega);\quad (\text{时移性质})$$

$$(2)\ \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)] = \mathrm{e}^{j\omega_0 t}f(t).\quad (\text{频移性质})$$

意义

- 时移性质表明，当信号沿时间轴移动后，各频率成份的大小不发生改变，但相位发生变化。
- 频移性质通常被用来对信号进行频谱搬移，这一技术在通信系统中得到了广泛应用。

一、基本性质

3. 相似性质 P 198

性质 设 a 为非零常数，则 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

证明 (1) 当 $a>0$ 时，

$$\mathscr{F}[f(at)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)e^{-j\omega t}\,dt$$

$$\underline{\underline{令\ x=at}}\ \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-j\frac{\omega}{a}x}\,dx=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right);$$

(2) 当 $a<0$ 时，

同理可得 $\mathscr{F}[f(at)]=-\dfrac{1}{a}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

一、基本性质

3. 相似性质

性质 设 a 为非零常数，则 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

意义 相似性质表明，若信号压缩 $(|a|>1)$，则频谱扩展；

若信号扩展 $(|a|<1)$，则频谱压缩。

- 事实上，在对矩形脉冲信号的频谱分析中已知：（参见§8.1）

> 脉冲越窄，则其频谱（主瓣）越宽；
>
> 脉冲越宽，则其频谱（主瓣）越窄。

- 相似性质正好体现了脉冲宽度与频带宽度之间的反比关系。

一、基本性质

3. 相似性质

性质　设 a 为非零常数，则 $\mathscr{F}[f(at)] = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

- 在电信通讯中，

为了迅速地传递信号，希望信号的脉冲宽度要小；
为了有效地利用信道，希望信号的频带宽度要窄。

- 可惜相似性质表明，不可能同时压缩脉冲宽度和频带宽度，因此上述想法在实际通讯中是矛盾的。

一、基本性质

4. 微分性质 P 200

性质 若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t)=0$，则 $\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega F(\omega)$.

证明 由 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t)=0$，有 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}=0$，

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}f(t)$$

$$=f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+j\omega\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=j\omega F(\omega).$$

一、基本性质

4. 微分性质

性质　若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f(t)=0$，则 $\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega F(\omega)$.

- 一般地，若 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} f^{(k)}(t)=0$，$(k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$，

　则 $\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n F(\omega)$.

记忆　由 $f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$,

$$\Rightarrow \boxed{f'(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{j\omega F(\omega)}\,e^{j\omega t}\,d\omega;$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{(n)}(t)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\boxed{(j\omega)^n F(\omega)}\,e^{j\omega t}\,d\omega.$$

一、基本性质

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega).$$

4. 微分性质

- 同理，可得到像函数的导数公式：

$$\mathcal{F}^{-1}[F'(\omega)] = -jt\,f(t);$$

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)] = (-jt)^n f(t).$$

- 上式可用来求 $t^n f(t)$ 的 Fourier 变换。

记忆　由 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}\,t$,

$$\Rightarrow \boxed{F'(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{(-jt)\,f(t)}\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}\,t;$$

$$\Rightarrow \boxed{F^{(n)}(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{(-jt)^n f(t)}\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}\,t.$$

一、基本性质

5. 积分性质 P 200

性质 若 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t=0$，则 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega).$

证明 令 $g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{|t|\to+\infty} g(t)=0$，

根据微分性质，可得

$$\mathscr{F}[g'(t)]=j\omega\mathscr{F}[g(t)].$$

又由 $g'(t)=f(t)$，有 $\mathscr{F}[f(t)]=j\omega\mathscr{F}[g(t)]$，

即得 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega).$

一、基本性质

6. 帕塞瓦尔(Parseval)等式 P200

性质 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$ (能量守恒)

证明 (1) 由 $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}t$$

交换积分次序

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega.$$

一、基本性质

6. 帕塞瓦尔(Parseval)等式

性质 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$ (能量守恒)

证明 (2) 由 $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$，有

$$\overline{F(\omega)}=\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)}\,\overline{\mathrm{e}^{-j\omega t}}\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}t.$$

即得 $$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\cdot\overline{F(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$$

一、基本性质(汇总)

线性性质 $\mathscr{F}[af(t)+bg(t)]=aF(\omega)+bG(\omega)$.

位移性质 $\mathscr{F}[f(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}F(\omega)$; (时移性质)

$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{j\omega_0 t}f(t)$. (频移性质)

相似性质 $\mathscr{F}[f(at)]=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$.

一、基本性质(汇总)

微分性质 $\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n F(\omega);$

$$\mathscr{F}^{-1}[F^{(n)}(\omega)]=(-jt)^n f(t).$$

积分性质 $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(t)\,\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{j\omega}F(\omega).$

Parseval 等式 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega.$

(直接进入 Parseval 等式举例?)

例 设 $f(t)=u(t)\cdot 2\cos\omega_0 t$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 (1) 已知 $\mathscr{F}[u(t)]=\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\xlongequal{\text{记为}}U(\omega)$,

且 $f(t)=u(t)\cdot(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})=u(t)\cdot e^{j\omega_0 t}+u(t)\cdot e^{-j\omega_0 t}$.

(2) 根据线性性质和频移性质，可得

$$\mathscr{F}[f(t)]=U(\omega-\omega_0)+U(\omega+\omega_0)$$

$$=\frac{1}{j(\omega-\omega_0)}+\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{j(\omega+\omega_0)}+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

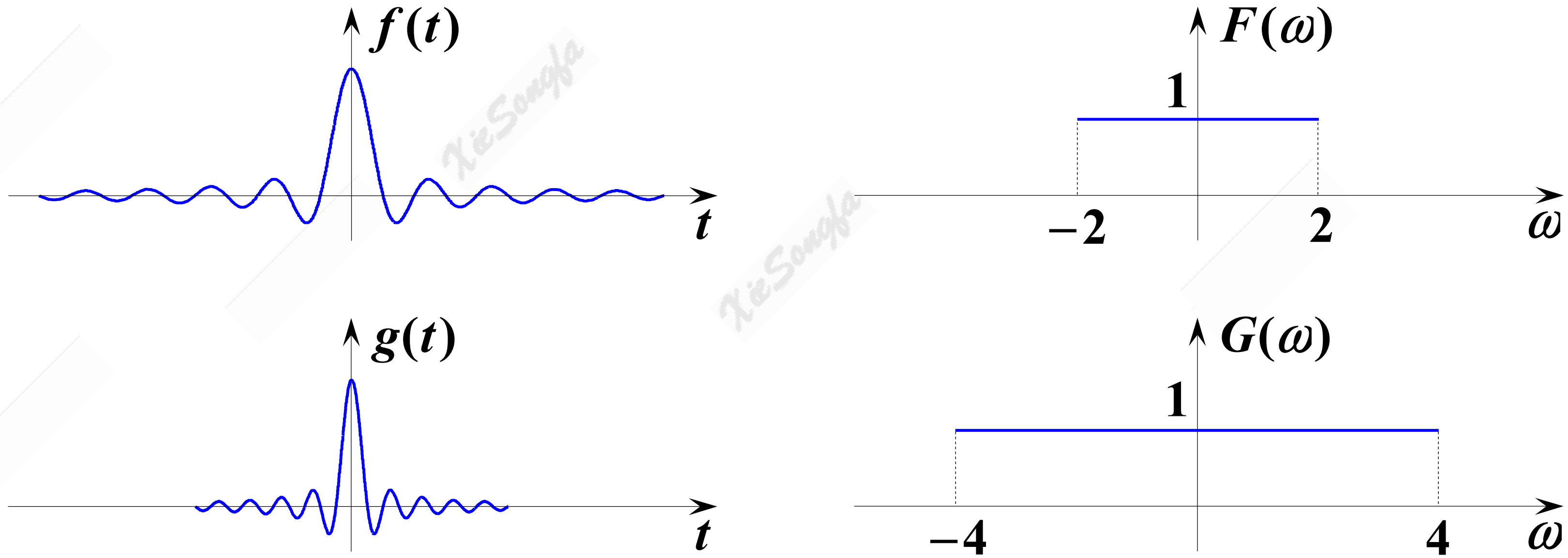
$$=\frac{2j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}+\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)].$$

例 已知抽样信号 $f(t)=\dfrac{\sin 2t}{\pi t}$ 的频谱为 $F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le 2,\\ 0, & |\omega|>2.\end{cases}$

求信号 $g(t)=f(2t)$ 的频谱 $G(\omega)$。 P199 例 8.11 修改

解 根据相似性质，有 $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\mathscr{F}[f(2t)]$

$$=\frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right)=\begin{cases}1/2, & |\omega|\le 4,\\ 0, & |\omega|>4.\end{cases}$$



例 设 $f(t)=t^2\cos t$，求 $\mathscr{F}[f(t)]$.

解 (1) 令 $g(t)=\cos t$，则 $f(t)=t^2 g(t)$，

且 $G(\omega)=\mathscr{F}[\cos t]=\pi\delta(\omega-1)+\pi\delta(\omega+1)$.

(2) 根据微分性质，有

$$\mathscr{F}^{-1}[G''(\omega)]=(-jt)^2 g(t)=-t^2 g(t).$$

即得 $\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[t^2 g(t)]=-G''(\omega)$

$$=-\pi\delta''(\omega-1)-\pi\delta''(\omega+1).$$

例 试求积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\omega}{\omega^2}\mathrm{d}\,\omega$ 的值。

P201 例 8.12

解 (1) 设矩形脉冲函数 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\le 1,\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$

则已知 $f(t)$ 的频谱函数为：$F(\omega)=\dfrac{2\sin\omega}{\omega}$.

(2) 由 Parserval 等式，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\,\omega=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f^2(t)\,\mathrm{d}\,t$,

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\sin^2\omega}{\omega^2}\mathrm{d}\,\omega=2\pi\int_{-1}^{1}1^2\mathrm{d}\,t=4\pi.$$

由于被积函数为偶函数，故有 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin^2\omega}{\omega^2}\mathrm{d}\,\omega=\dfrac{\pi}{2}$.

二、卷积与卷积定理

1. 卷积的概念与运算性质

P201 定义 8.2

定义 设函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，

如果广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ 对任何实数 t 都收敛，

则它在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上定义了一个自变量为 t 的函数，

称此函数为 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积，记为 $f_1(t) * f_2(t)$，

即 $$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

二、卷积与卷积定理

1. 卷积的概念与运算性质

性质 (1) 交换律

P 202

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t).$$

(2) 结合律

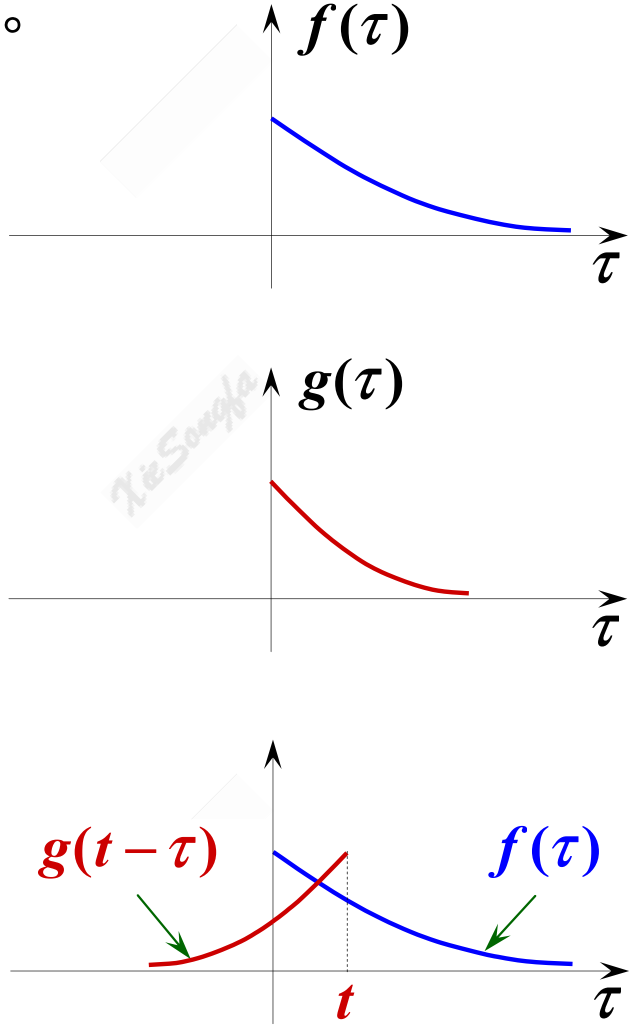
$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t).$$

(3) 分配律

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t).$$

例 设 $f(t)=\mathrm{e}^{-\alpha t}u(t)$，$g(t)=\mathrm{e}^{-\beta t}u(t)$，其中，$\alpha>0$，$\beta>0$，且 $\alpha\neq\beta$，求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

P202 例 8.13



解 $$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

(1) 当 $t\le 0$ 时，$f(t)*g(t)=0.$

(2) 当 $t>0$ 时，

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mathrm{e}^{-\beta(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}.$$

- 从上面的例子可以看出 P 204

(1) 在求分段函数的卷积时，如何确定积分限是解题的关键，如果采用图形方式则比较容易确定积分限。

(2) 卷积由反褶、平移、相乘、积分四个部分组成。

① 首先将函数 $g(\tau)$ 反褶并平移到 t，得到 $g(t-\tau)$.

② 再与函数 $f(t)$ 相乘后求积分，得到卷积 $f(t)*g(t)$.

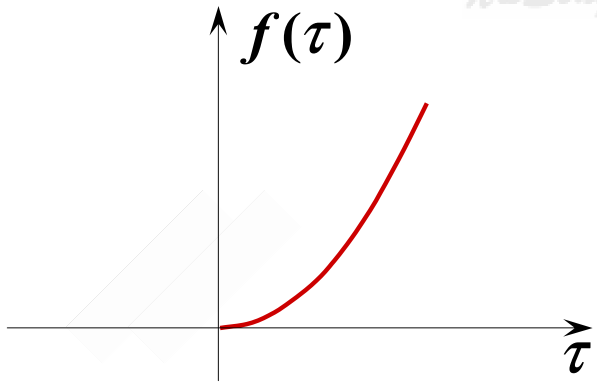
因此，卷积又称为褶积或卷乘。

- 另外，由于卷积运算满足交换律，因此对于有些分段函数，还可以适当地选择两个函数的卷积次序，从而使得积分限的确定相对容易一些。

例 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积，其中，

P203 例 8.14 修改

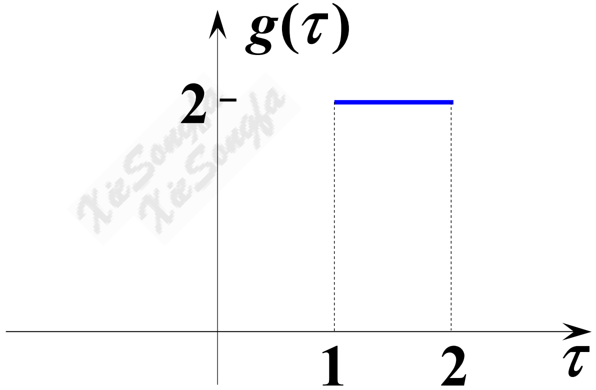
$$f(t)=t^2u(t),\quad g(t)=\begin{cases}2, & 1\le t\le 2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



解 根据卷积的定义，有

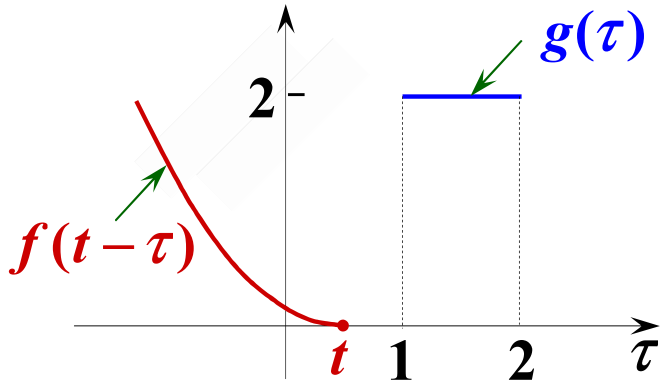
$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

交换律 $$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$



(1) 当 $t\le 1$ 时，

$$f(t)*g(t)=0.$$

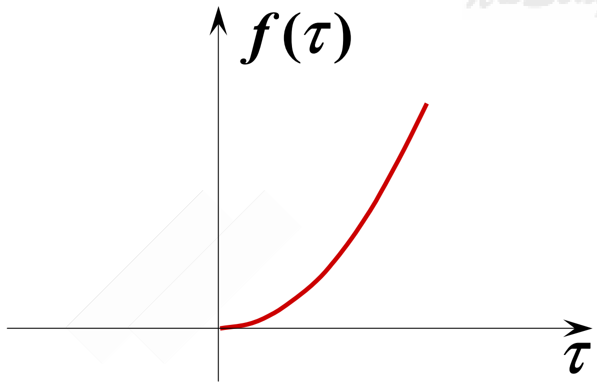


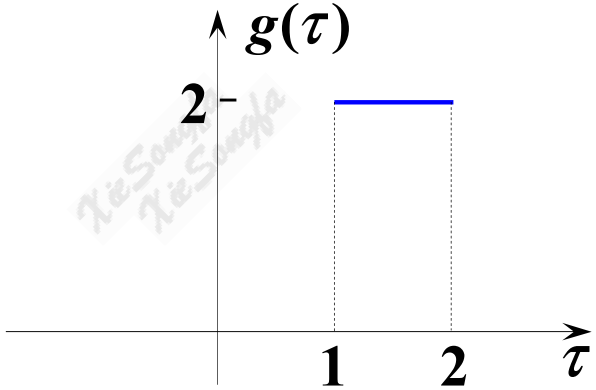
【第八章 傅里叶变换】

例 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积，其中，

P203 例 8.14 修改

$$f(t)=t^2u(t),\quad g(t)=\begin{cases}2, & 1\le t\le 2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$





解 根据卷积的定义，有

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

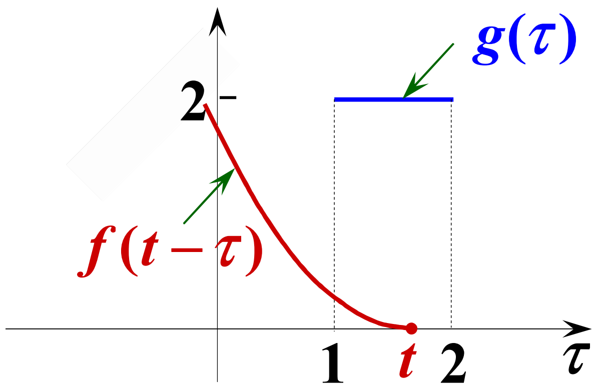
交换律

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

(2) 当 $1<t<2$ 时，

$$f(t)*g(t)=\int_1^t 2\cdot(t-\tau)^2\,\mathrm{d}\tau$$

$$=2(t-1)^3/3.$$

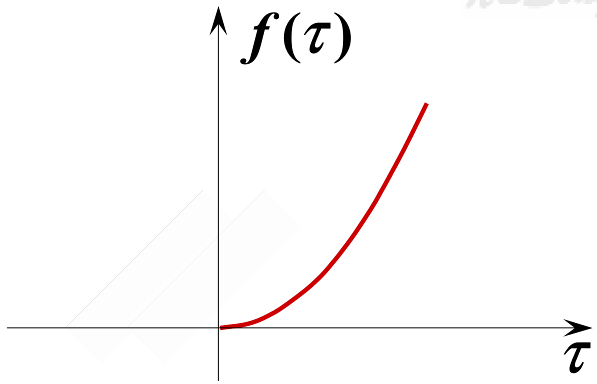


【第八章 傅裏葉變換】

例 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积，其中，

P203 例 8.14 修改

$$f(t)=t^2u(t),\quad g(t)=\begin{cases}2, & 1\le t\le 2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

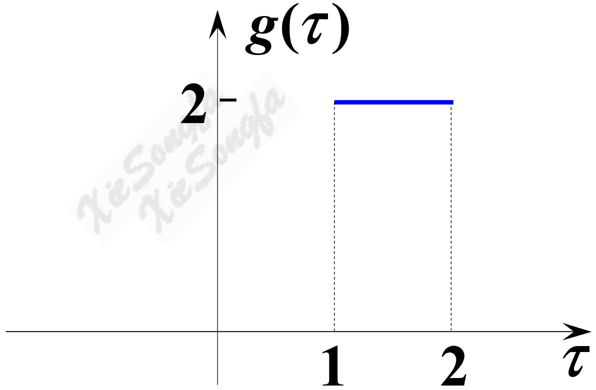


解 根据卷积的定义，有

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

交换律

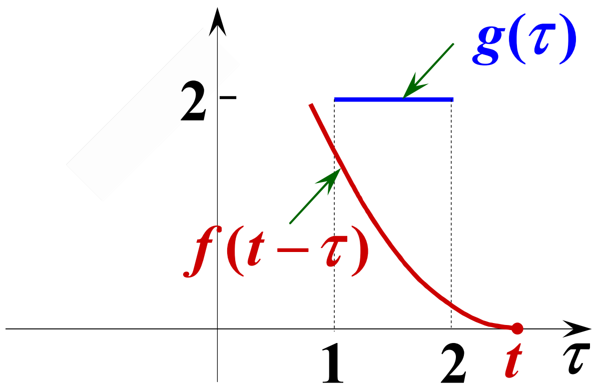
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$



(3) 当 $t\ge 2$ 时，

$$f(t)*g(t)=\int_1^2 2\cdot(t-\tau)^2\,\mathrm{d}\tau$$

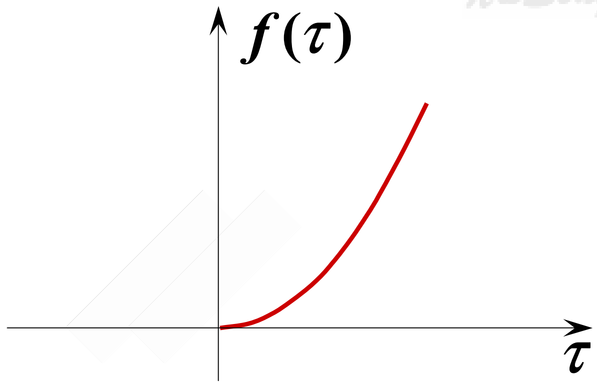
$$=2[(t-1)^3-(t-2)^3]/3.$$



例 求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积，其中，

P203 例 8.14 修改

$$f(t)=t^2u(t),\quad g(t)=\begin{cases}2, & 1\le t\le 2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

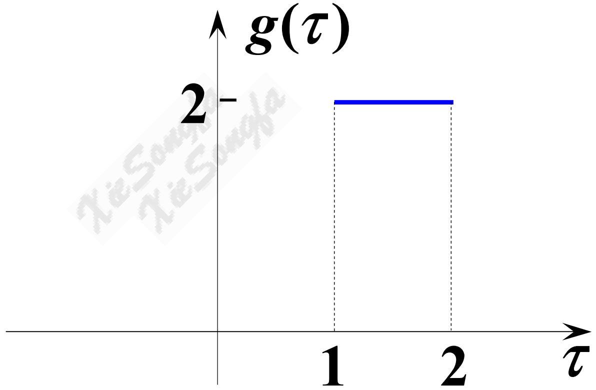


解 根据卷积的定义，有

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

交换律

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)f(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$



- 综合可得：

$$f(t)*g(t)=\begin{cases}0, & t\le 1,\\ 2(t-1)^3/3, & 1<t<2,\\ 2[(t-1)^3-(t-2)^3]/3, & t\ge 2.\end{cases}$$

二、卷积与卷积定理

2. 卷积定理

定理 设 $\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$，$\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$，则有

P204 定理 8.4

$$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega); \qquad (A)$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega) * F_2(\omega)] = 2\pi f_1(t) \cdot f_2(t). \qquad (B)$$

证明 仅证 (A) 式。

$$\mathscr{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) * f_2(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau\right] \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \mathrm{e}^{-j\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t-\tau) \mathrm{e}^{-j\omega(t-\tau)} \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\tau = F_1(\omega) \cdot F_2(\omega).$$

二、卷积与卷积定理

*3. 卷积的物理意义

(跳过?)

背景 (1) 在发送的实际信号中，通常含有多个频带的信号，

如何从中分离出某个频带内的信号？

(2) 在信号的传输过程中，通常受到各种噪声的干扰，

如何从中消除这些噪声？

实例 设有某信号为 $f(t)$，试将该信号的低频成份完全保留，

而高频成份完全去掉，即对其进行理想低通滤波。

二、卷积与卷积定理

*3. 卷积的物理意义

方法1 在频率域中实现

(1) 求出信号 $f(t)$ 频谱函数 $F(\omega)$.

(2) 设计门函数 $H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\leq a,\\ 0, & |\omega|>a.\end{cases}$ (理想低通滤波器)

(3) 将 $F(\omega)$ 与 $H(\omega)$ 相乘，得 $\tilde{F}(\omega)=F(\omega)\cdot H(\omega)$.

(4) 对 $\tilde{F}(\omega)$ 作 Fourier 逆变换，得 $\tilde{f}(t)=\mathcal{F}^{-1}[\tilde{F}(\omega)]$.

- 显然，在新的信号 $\tilde{f}(t)$ 中，完全保留了原信号 $f(t)$ 中频率低于 a 的频率成份，而去掉了频率高于 a 的频率成份。

二、卷积与卷积定理

*3. 卷积的物理意义

方法2 在时间域中实现

(1) 设计门函数 $H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le a,\\ 0, & |\omega|>a.\end{cases}$ （理想低通滤波器）

(2) 求 $h(t)=\mathcal{F}^{-1}[H(\omega)]=\dfrac{\sin at}{\pi t}$. （理想低通滤波因子）

(3) 计算卷积 $\widehat{f}(t)=f(t)*h(t)$.

- 根据卷积定理，信号 $\widehat{f}(t)$ 与方法1中的信号 $\tilde{f}(t)$ 是一样的，这正是卷积的实际意义和价值。

注 $H(\omega)$ 与 $h(t)$ 分别又称为频率响应函数与冲激响应函数。

例 设函数 $f(t)=\dfrac{\sin at}{\pi t}$，$g(t)=\dfrac{\sin bt}{\pi t}$，其中，$a>0$，$b>0$，

P204 例 8.15

求函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

解 (1) 函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 均为抽样信号，其频谱分别为

$$F(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le a,\\ 0, & |\omega|>a,\end{cases}\qquad G(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le b,\\ 0, & |\omega|>b.\end{cases}$$

令 $c=\min(a,b)$，则 $F(\omega)\cdot G(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|\le c,\\ 0, & |\omega|>c.\end{cases}$

(2) 根据卷积定理，有

$$f_1(t)*f_2(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=\frac{\sin ct}{\pi t}.$$

例 求函数 $f(t)$ 和 $\delta(t)$ 的卷积。 (跳过?)

解 方法1 $f(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(t).$

方法2 已知 $\delta(t)$ 的 Fourier 变换为 $D(\omega)=\mathscr{F}[\delta(t)]=1,$

令 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$，根据卷积定理，

有 $f(t)*\delta(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)\cdot D(\omega)]$

$=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=f(t).$

注 (1) 本例的结论通常被用来检测系统的冲激响应函数。

(2) 一般地，有 $f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0).$

例 求 $f(t)=e^{-at}u(t)\cos bt\ (a>0)$ 的 Fourier 变换。 P205 例 8.16

(跳过?)

解 方法1 利用卷积定理求解。

(1) 令 $g(t)=e^{-at}u(t)$， $h(t)=\cos bt$，

则 $G(\omega)=\mathcal{F}[g(t)]=\dfrac{1}{a+j\omega}$，

$$H(\omega)=\mathcal{F}[h(t)]=\pi[\delta(\omega+b)+\delta(\omega-b)].$$

(2) 根据卷积定理，有

$$\mathcal{F}[f(t)]=\mathcal{F}[g(t)\cdot h(t)]=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*H(\omega)$$

$$=\frac{\pi}{2\pi}[G(\omega)*\delta(\omega+b)+G(\omega)*\delta(\omega-b)].$$

$$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$$

例 求 $f(t)=\mathrm{e}^{-at}u(t)\cos bt\ (a>0)$ 的 Fourier 变换。 P205 例 8.16

解 方法1 利用卷积定理求解。

(2) 根据卷积定理，有

$$\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}[g(t)\cdot h(t)]=\frac{1}{2\pi}G(\omega)*H(\omega)$$

$$=\frac{\pi}{2\pi}[G(\omega)*\delta(\omega+b)+G(\omega)*\delta(\omega-b)]$$

$$=[G(\omega+b)+G(\omega-b)]/2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega+b)}+\frac{1}{a+j(\omega-b)}\right]$$

$$=\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+b^2}.$$

例 求 $f(t)=e^{-at}u(t)\cos bt\ (a>0)$ 的 Fourier 变换。 P205 例 8.16

解 方法2 利用频移性质求解。

(1) 令 $g(t)=e^{-at}u(t)$，则 $G(\omega)=\mathscr{F}[g(t)]=\dfrac{1}{a+j\omega}$，

且 $f(t)=[g(t)e^{-jbt}+g(t)e^{jbt}]/2$.

(2) 根据频移性质，有

$$\mathscr{F}[f(t)]=[G(\omega+b)+G(\omega-b)]/2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+j(\omega+b)}+\frac{1}{a+j(\omega-b)}\right]$$

$$=\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+b^2}.$$

(Matlab 编程?)

放松一下吧！……

附：利用 Matlab 实现 Fourier 变换

- 在数学软件 Matlab 的符号演算工具箱中，提供了专用函数来进行 Fourier 变换与 Fourier 逆变换。

(1) **F = fourier (f)**　对函数 $f(x)$ 进行 Fourier 变换，并返回结果 $F(w)$。

(2) **f = ifourier (F)**　对函数 $F(w)$ 进行 Fourier 逆变换，并返回结果 $f(x)$。

附：利用 Matlab 实现 Fourier 变换

例　求函数 $f(x)=\cos ax$ 的 Fourier 变换。

解　程序代码：

```
clear ;
syms a real ;
syms x ;
f = cos (a * x) ;
F = fourier (f ) ;
```

运行结果：　F = pi * (Dirac (w – a) + Dirac (w + a))

其中，Dirac 为 δ 函数，pi 代表 π.

数学表示：　$F(\omega)=\pi[\delta(\omega-a)+\delta(\omega+a)].$

附：利用 Matlab 实现 Fourier 变换

例 已知函数 $f(x)$ 频谱为 $F(\omega)=\dfrac{2}{j\omega}$，求 $f(x)$.

解 程序代码：

```
clear;
syms w;
F = 2/(j*w);
f = ifourier(F);
```

运行结果： f = 2*Heaviside(x) − 1

其中，Heaviside 为单位阶跃函数。

数学表示： $f(x)=2u(x)-1=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

放松一下吧！……