第二章 解析函数

把复变函数 *f*(*z*) 理解为二个二元实函数的观点,可使我们利用对二元实函数的认识来认识复变函数,但它们又有本质的区别.解析函数是复变函数研究的主要对象,在理论与实际中都有着广泛的应用.

- § 2.1 解析函数的概念
 - § 2.1.1 复变函数的导数
 - 1)导数的定义

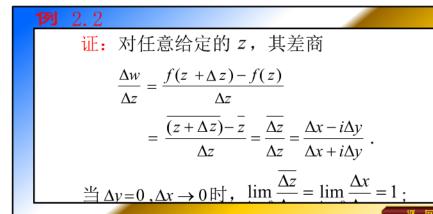
定义 2.1 设 w=f(z) 定义于区域 D, $z_0, z_0 + \Delta z \in D$,

如果
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$
 存在,则称 $f(z)$ 在 z_0









§ 2.1.2 解析函数的概念

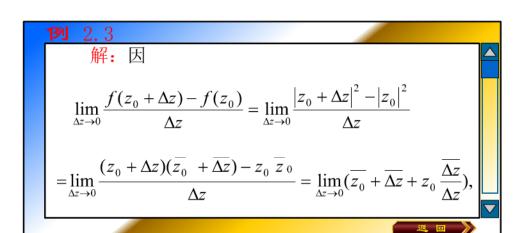
定义2.2

- 1) 若f(z)在z。及z。的邻域内处处可导,则称f(z)在z0解析.
- 2) 若f(z)在区域D内每一点解析,则称f(z)在区域D内解析或称f(z)是区域D内的一个解析函数.
 - 3) 若f(z)在 z_0 处不解析,则称 z_0 为f(z)的奇点.

由定义知,解析比可导的要求高,函数在区域内解析与在区域内可导是等价的.但是:函数在一点处解析和可导是不等价的,即函数在一点可导不一定在该点解析.









1列 2 4

解:因为w在全平面除点 $z_0 = 0$ 外处处可导,

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{z^2}$$

所以,在除了z=0 的复平面上, $w=\frac{1}{z}$ 处处解析,

而 $z_0 = 0$ 是它的奇点.



§ 2.1.3 函数解析的充要条件

我们知道并不是每一个复变函数都是解析函数, 判断一个函数是否为解析函数, 若根据定义是比较烦琐的, 有些则是比较困难的, 因此我们需要找到简洁的方法, 这就是本节要解决的问题.

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

柯西一黎曼条件(方程)(Cauchy-Riemann方程):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (C - R 方程).$$

定理 2.1 函数 w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) 在 z = x + iy处可导的充要条件是: u(x, y), v(x, y) 在点 (x, y)





定理 9 9

证: (先解释可微的含义,

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \rho (\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}), \lim_{\Delta x \to 0 \atop \Delta y \to 0} \rho = 0,$$

则称 u(x,y) 可微.)

必要性: 因w = f(z)在D内解析,即在D内

任一点可导,则





解:

1) 因为 $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ 处处可微,又 $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$,





