1章 复数与复变函数

1, 复数的概念

2, 复数的代数运算

3, 共轭复数及其性质

$z=x+iy$ $\bar{z}=x-iy$

$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$ $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $z\bar{z}=|z|^2$

$z+\bar{z}=2Re(z)$ $z-\bar{z}=2iIm(z)$

4, 复数的几何表示

$\bar{z}=0$的充要条件为$z=0$

$|x|\le|z|$ $|y|\le|z|$ $|z|\le|x|+|y|$ $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ $|z_1-z_2|\ge\big||z_1|-|z_2|\big|$

幅角 $Arg z=\theta+2k\pi$，在$(z\neq0)$的幅角中，$-\pi<\theta\le\pi$的为$\arg z$为主值

幅角不确定 $(-\pi,\pi]$

主值$\arg z$可由$\arctan\frac{y}{x}$确定（注意：$\arctan\frac{y}{x}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$）

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x} & \text{一、四象限}\\ \arctan\frac{y}{x}+\pi & \text{二象限}\\ \arctan\frac{y}{x}-\pi & \text{三象限}\\ \frac{\pi}{2} & x=0\ \ y>0\\ -\frac{\pi}{2} & x=0\ \ y<0\\ \pi & x<0\ \ y=0\end{cases}$$

z与$\bar{z}$关于实轴对称

若z不在负实轴上且$z\neq0$ 有$\arg z=-\arg\bar{z}$

5, 复数乘积和商的模与幅角

$z_1z_2=r_1r_2e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

则有 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ $Arg(z_1z_2)=Arg z_1+Arg z_2$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Arg z_1-Arg z_2$ → 推广 $|z^n|=|z|^n$

乘积的几何意义

6, 复数的乘幂

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ 棣莫弗公式

7, 复数的方根

加上$2k\pi$，注意

$w^n=z$ $w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

有n个不同的值

8, 无穷远点

复数∞的实部，虚部与幅角均无意义 $|\infty|=+\infty$

注：$\infty\pm\infty$ $0\cdot\infty$ $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$ 无意义

9, 一些区域的概念

10, 复变函数

$w=f(z)$ $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ 一个复变函数对应于两个实变函数

$z_1\neq z_2$ 则$f(z_1)\neq f(z_2)$

f是G上（值域为G^*）单叶函数的充要条件是f是G到G^*的一一映射

11, 复变函数的极限

设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$定义于$z_0=x_0+iy_0$的去心邻域内，$A=u_0+iv_0$

则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$的充要条件是 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=u_0$ $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=v_0$

一些有理运算法则

判断极限是否存在，可用二元函数以任何方式趋向的方法

12, 复变函数的连续性

处处连续 → D内连续

$f(z)$在z_0处连续 $\Longleftrightarrow$ u与v在(x_0,y_0)处同时连续

进行有理运算、复合之后依然连续

2章 解析函数

例：$f(z)=\bar{z}$ 在复平面处处不可导

1.复变函数的导数：$f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

极限存在的要求为 $z_0+\Delta z\to z_0$ 与路径无关

可微：设 $w=f(z)$ 在 $z_0\in D$ 可导，令 $\rho(\Delta z)=\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}-f'(z_0)$

$\Delta w=f'(z_0)\Delta z+\rho(\Delta z)\Delta z$ （$|\rho(\Delta z)\Delta z|$ 是 $|\Delta z|$ 的高阶无穷小）

$dw=f'(z_0)dz$ w 在 z_0 的微分，$f(z)$ 可微

f 在 z_0 可导 $\Longleftrightarrow$ f 在 z_0 可微

在D处处可微 $\to$ f 在D内可微

$\boxed{\text{求导公式：}f\text{解析}\to\text{公式与实变函数一样}}$

2.解析函数

$w=f(z)$ 在 $z_0\in C$ 及其某个邻域内处处可导，则在 z_0 解析

奇点：$f(z)$ 在 z_0 不解析的点 一般用求导，直接看使分母为0的点

处处解析 $\to$ D内解析 $\to$ f 为D内的解析函数（全纯函数，正则函数）

$\begin{cases}\text{D内解析}\Longleftrightarrow\text{D内可导}\\ z_0\text{解析}\not\Longleftrightarrow z_0\text{可导}\end{cases}$

一些有理运算性质，复合性质

3.柯西-黎曼方程（C-R方程）

$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases}$ 记忆 $\begin{cases}u_x=v_y\\ v_x=-u_y\end{cases}$

① 设 $f=u(x,y)+iv(x,y)$ 在任一点 $z=x+iy$ 处可导 $\Longrightarrow$

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 在 (x,y) 处存在 (2) C-R方程

② f 在任一点 $z=x+iy$ 处可导 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}u(x,y)\ v(x,y)\text{ 在 }(x,y)\text{处可微}\\ \text{C-R方程}\end{cases}$

③ f 在D内解析 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}u(x,y)\ v(x,y)\text{ 在D内可微}\\ \text{C-R方程}\end{cases}$

④ $\left.\begin{array}{l}u(x,y)\text{与}v(x,y)\text{在D内有一阶连续偏导数}\\ \text{C-R方程}\end{array}\right\}\Rightarrow f$ 在D内解析

4.复变初等函数

① 指数函数 $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$

性质：$e^{z+2\pi i}=e^z$ 以 $2\pi i$ 为周期

$\lim\limits_{z\to\infty}e^z$ 不存在

② 对数函数 $e^w=z\ (z\neq 0)\to w=\mathrm{Ln}z=\ln|z|+i\mathrm{Arg}z=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$

$\ln z=\ln|z|+i\arg z\to\mathrm{Ln}z$ 的主值

$\mathrm{Ln}z=\ln z+2k\pi i$

性质：理解为集合相等 类似实数

$\mathrm{Ln}z^n=n\mathrm{Ln}z$ $\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\mathrm{Ln}z$ 不成立

~

与实数不同，$\mathrm{Ln}z$ 的各个分支在除去原点与负实轴的复平面内处处连续，处处解析，且 $(\mathrm{Ln}z)'=\frac{1}{z}$

③ 乘幂与幂函数 $a^b=e^{b\mathrm{Ln}a}$ （b：任一复数；a：非零复数） 是多值的 $\mathrm{Ln}a$ 取 $\ln a$，a^b 取主值

性质：当 b 为整数 $\to$ a^b 单值

当 b 为有理数 $\frac{p}{q}$ （p,q 互质且 $q>0$）$\to$ 有 q 个值

（特别的，$b=\frac{1}{n}$，a^b 为 a 的 n 次方根） n个值

其他复数 b $\longrightarrow$ 无穷多值

幂函数：$z^b=e^{b\mathrm{Ln}z}$

z^n 在复平面内单值解析

其他在除去原点与负实轴的复平面内解析（参考 $\mathrm{Ln}z$）

④ 三角函数与双曲函数 $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

$e^{iz}=\cos z+i\sin z$ 成立

$|\sin z|$ $|\cos z|$ 无界 （极限也不存在） $\sin z$ $\cos z$ 在复平面上处处解析

双曲函数：$\mathrm{sh}z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ $\mathrm{ch}z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$ $\mathrm{th}z=\dfrac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z}$ 以 $2\pi i$ 为周期

$\cos iy=\mathrm{ch}y$ $\sin iy=i\mathrm{sh}y$

$(\mathrm{ch}z)'=\mathrm{sh}z$ $(\mathrm{sh}z)'=\mathrm{ch}z$

⑤ 反三角函数与反双曲函数 $w=\mathrm{Arccos}z=-i\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$ 多值函数

3章 复变函数的积分

1. 存在定理：
连续 → $\int_C f(z)dz=\int_C(udx-vdy)+i\int_C(vdx+udy)$

计算时类似于第二型曲线积分，化成 $x(t)dt$ $y(t)dt$

$$\int_C f(z)dz=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt$$

2. 柯西古萨基本定理

$f(z)$在闭曲线C及围成的D内处处解析则 $\oint_C f(z)dz=0$

$f(z)$在单连通B内处处解析，则B内任一条闭曲线C $\oint_C f(z)dz=0$

在C上只连续亦可

复合闭路定理：$\oint_C f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{C_k}f(z)dz$ (均取逆时针)

$\oint_{C+C_k^-\cdots}f(z)dz=0$ (取正向)(区域在左)

多连通区域

结论：$\oint_C\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\begin{cases}2\pi i & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{cases}$ C为包含z_0的正向闭曲线

3. 原函数与不定积分

B内解析 ⇒ $\int_L f(z)dz$与路径无关

原函数：$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi$

$\int f(z)dz=F(z)+C$ → 与实函数类似

若f在B内处处解析 $\int_{z_0}^{z_1}f(z)dz=G(z_1)-G(z_0)=G(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$

4. 柯西积分公式与高阶导公式

柯西积分公式：f在D内处处解析，C为D内正向闭曲线，z_0为C内部一点，则有

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

条件可改为在D(单连通或复连通)及D的正向边界L上解析，$\forall z_0\in D$

改写 $\oint_L\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0)$

高阶导数公式：解析函数f的导数仍为解析函数

$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$ (C是D内绕z_0的正向闭曲线)

D内解析函数在D内具有任意高阶导数，各阶导仍为解析函数 (无限可微性)

改写：$\oint_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0)$

柯西不等式：设f在D解析，$z_0\in D$，圆周 $K_R=\{z\,|\,|z-z_0|=R\}$及其内部均含于D，则

$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!M(R)}{R^n}$ → $M(R)=\max_{|z-z_0|=R}|f(z)|$ $|f(z)|$在$|z-z_0|=R$上的最大值

刘维尔定理：若$f(z)$在整个复平面上解析且有界，则$f(z)$在复平面上恒为常数

莫雷拉定理：若f在单连通B内连续，且对B内任一闭曲线C $\oint_C f(z)dz=0$，f在B解析

5. 解析函数与调和函数的关系

实变函数 → 二元实函数 $\varphi(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$ φ为调和函数

① 若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域D内解析，则u，v都是D内的调和函数 $\begin{cases}U_{xx}+U_{yy}=0\\ V_{xx}+V_{yy}=0\end{cases}$

② 设$u(x,y)$为D内调和函数，若D内另一个函数$v(x,y)$使$u+iv$在D内构成解析函数

则v为u的共轭调和函数

即：若v与u在D内满足C-R方程，v与u的共轭调和函数

4章 复变函数项级数

1, 复数项级数

收敛的概念

复数列 $\{\alpha_n\}=\{a_n+ib_n\}$ 收敛于复数 $\alpha=a+ib$ 的充要条件为 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n=b\end{cases}$

复数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$

部分和、和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=s$

定理1：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\ (\alpha_n=a_n+ib_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛

定理2：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

定理3：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛，且 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\right|\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$

绝对收敛与条件收敛

定理4 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n\ (\alpha_n=a_n+ib_n)$ 绝对收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛

2, 幂级数

① 复变函数列、复变函数项级数、部分和、和、收敛域、和函数

② 阿贝尔定理：对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ $\begin{cases}\text{若它在 } z_0\neq 0 \text{ 处收敛，则当 } |z|<|z_0| \text{ 时，该级数绝对收敛}\\ \text{若它在 } z_0 \text{ 处发散，则当 } |z|>|z_0| \text{ 时，该级数发散}\end{cases}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 类似，亦可认为是幂级数

收敛圆、收敛半径、圆周上敛散性不确定

③ 收敛半径求法：$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lambda$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lambda \longrightarrow R=\frac{1}{\lambda}$

(1) 有理运算之后，在 $|z|<\min\{r_1,r_2\}$ 内依旧收敛

但不一定这个就是收敛半径

(2) 级数 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)$ 在D内收敛

则 $f(z)g(z)=\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$

其中 $c_n=a_nb_0+\cdots+a_0b_n$

(3) 变量代换：若 z 为 $Z(\zeta)$，将其先看成一个整体来求

④ 性质若 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ （D内收敛时）

则：(1) $f(z)$ 是收敛圆 $|z-a|=R$ 内的解析函数 ☆

(2) $f(z)$ 在收敛圆内任意阶可导，并且可以逐项求导

$$f^{(k)}(z)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n\right)^{(k)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n(z-a)^n\right]^{(k)}$$

(3) $f(z)$ 在收敛圆内可积，并且可以逐项积分

$$\int_{\underset{\text{在收敛圆内}}{c}}f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_c(z-a)^ndz$$

3, 泰勒级数

$f(z)$ 在圆域 $K=\{z\,|\,|z-z_0|<R\}$ 内解析，则在K内 $f(z)$ 能唯一地展开成

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$

其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 为泰勒系数

$C_\rho=\{\zeta\,|\,|\zeta-z_0|=\rho\}$ → 在圆域内

定理叙述：f为D内的解析函数，$z_0\in D$，d为 z_0 到D边界上各点的最短距离

则当 $|z-z_0|<d$ 时，$f(z)$ 可唯一地展开为幂级数

$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$

推论：设函数在区域D内解析，$z_0\in D$，α 为 $f(z)$ 在D内距 z_0 最近的一个奇点，

则使展开式 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 成立的 $R=|\alpha-z_0|$

说明幂级数的收敛性与其和函数的解析性并无必然的关系

即使幂级数在其收敛圆上处处收敛，其和函数在收敛圆上仍然至少有一个奇点

例：$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$

$\boxed{\text{总结：f在D内解析} \Longleftrightarrow \text{f在D内任一点的邻域内可以展开成 } z-z_0 \text{ 的幂级数}}$

本质属性

① 直接展开法：(1) 求出 $f^{(n)}(z_0)$，$n=0,1,2\cdots$

(2) 写出 $f(z)$ 在 z_0 处的泰勒级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

求出其收敛半径R：从 z_0 到距 z_0 最近的一个奇点的距离

(3) 写出完整泰勒级数形式

② 间接展开法 5个常用展开式

☆ $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ $|z|<1$

$e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$ $|z|<+\infty$

$\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}$ $|z|<+\infty$ →反号☆

$\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$ $|z|<+\infty$

☆ $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n$ $|z|<1$

4, 洛朗级数

以 z_0 为中心的某一圆环域

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}+\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$$

↓收敛 $|z-z_0|>R_1$　　↓收敛 $|z-z_0|<R_2$

$R_1>R_2$ 处处发散

$R_1<R_2$ 则 $R_1<|z-z_0|<R_2$ → 收敛圆环域

性质：和函数解析、逐项积分、逐项求导

① 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则在此圆环域内 $f(z)$ 必能唯一展开成双边幂级数

$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$　其中 $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta$ → 不能写成 $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，因为f不在 z_0 处解析

↓圆环域内任一条绕 z_0 的简单闭曲线

洛朗级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 解析部分

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n(z-z_0)^{-n}$ 主要部分

② 直接展开法 (1) 求 c_n

(2) 代入写为式（注意写上圆环域）

间接展开法：利用常用展开式，根据圆环域找到对应的收敛级数，并使用

5章 留数

1. 解析函数的孤立奇点

孤立奇点：f(z)在z_0不解析，但在z_0的某一个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内处处解析

展开成洛朗级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{+\infty} C_n(z-z_0)^{-n}$

①不含负幂项 → z_0为可去奇点

②负幂项为有限项，$C_{-m}\neq 0$，$n<-m$时$C_n=0$ → z_0为 m级极点

$$f(z)=C_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{-1}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots$$
$$=(z-z_0)^{-m}\left(C_{-m}+\cdots+C_{-1}(z-z_0)^{m-1}+C_0(z-z_0)^{m}+\cdots\right]$$

$f(z)=(z-z_0)^{-m}g(z)$ → 判断m级极点的充要条件

$\begin{cases} g(z_0)=C_{-m}\neq 0 \\ g(z)在z_0点解析 \end{cases}$

且有 $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$

③负幂项有无穷多项 → z_0为本性奇点

设f在 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，若z_0是f的本性奇点，则对任何复常数α，都有一个收敛于z_0的点数列$\{z_n\}$，使得 $\lim_{z\to z_0} f(z_n)=\alpha$

即：$\lim_{z\to z_0} f(z)$不存在且也不为∞

分类方法 ①定义

②极限：z_0为可去奇点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=C_0$，$C_0$为有限复常数

z_0为极点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ 例：$\frac{1}{\sin z}$ → 一级极点

z_0为本性奇点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)$不存在且不为∞

例：说e的本性奇点

2. 零点与极点

① $f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z)$ $\varphi(z)$在z_0处解析且≠0 → z_0为m级零点

解析

② z_0为f(z)的m级零点 $\Longleftrightarrow f^{(n)}(z_0)=0$ $n=1,\cdots,m-1$ $f^{(m)}(z_0)\neq 0$

③ z_0为f(z)m级极点 $\Longleftrightarrow$ z_0为 $\frac{1}{f(z)}$的m级零点

推论：① $f(z)=\frac{1}{P(z)Q(z)}$ z_0为P(z)的m级零点，Q(z)的n级零点 ∴ z_0为f(z)的 m+n级极点

② $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ z_0为P(z)的m级零点 Q(z)的n级零点 $\begin{cases} n>m & n-m级极点 \\ n\le m & 可去奇点 \end{cases}$

3. 函数在无穷远点（奇点讨论时要带上∞）

若f在 $z=\infty$ 的去心邻域 $\mathring{U}(\infty)=\{z\,|\,0<R<|z|<+\infty\}$内解析，则称∞点为孤立奇点。

令 $\varphi(t)=f(\frac{1}{t})$ → $f(\frac{1}{t})=\varphi(t)$ 以 $\boxed{t=0}$ 为可去、m级、本性

则f(z) 以 $\boxed{\infty}$ 为可去、m级、本性

$z=\infty$为可去 f(z)不含正幂项 $\lim_{z\to\infty} f(z)$存在（有限值）

$z=\infty$为极点 f(z)含有有限个正幂项 $\underbrace{C_m\neq 0 \quad C_k=0\ (k>m)}_{m级极点}$ $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$

$z=\infty$为本性奇点 f(z)含有无穷多个正幂项 $\lim_{z\to\infty} f(z)$不存在且不为∞

讨论方法1：$z=\frac{1}{t}$ 讨论$f(\frac{1}{t})$中 $t=0$ 的奇点类型

2：求f(z)在 $R<|z|<+\infty$ 内的洛朗级数，讨论其正幂项的情况

4. 留数与留数定理

留数：$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=C_{-1}$ z_0孤立奇点

以z_0为中心圆环域洛朗展开式 −1次幂项的系数

无穷远点的留数：$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz=-C_{-1}$ → 在 $R<|z|<+\infty$ 内洛朗 C_{-1}的负数

绕原点的负向，绕∞的正向（在 $R<|z|<+\infty$ 内的解析域内）

计算留数的方法：①若z_0为f(z)的有限可去奇点 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0$ （无C_{-1}） ∞不可用

②若z_0为f(z)的一级极点 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

③若z_0为f(z)的m级极点 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\{(z-z_0)^m f(z)\}}{dz^{m-1}}$

若级数<m，当成级数=m一样做 $(z-z_0)^m f(z)\to C_{-1}(z-z_0)^{m-1}$ ∴ $C_{-1}=\cdots$（求导）

④若 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，P(z)与Q(z)在z_0都解析，且 $P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$，$Q'(z_0)\neq 0$

则 $\mathrm{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)},z_0\right]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$（此时$z_0$为f是1级极点）

⑥ 若为本性奇点，则求洛朗级数的C_{-1}

⑤无穷远点的留数公式：$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0\right]$

⑦ 若z_0不是f的奇点，Res=0

留数定理：设f(z)在D内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析，C是D内包含所有奇点的一条正向简单闭曲线，则 $\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$

有限 有限区域 在C内的

积分⟺留数

若f(z)在扩充的复平面内除有限个孤立奇点外解析，则f(z)在所有各奇点（包括∞点）的留数的总和必为0 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]=0$

5. 留数定理在计算实积分上的应用

① 形如 $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$ 的积分 $R(\cos\theta,\sin\theta)$表示与$\cos\theta,\sin\theta$有关的有理函数

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}f(z)dz$$ → f(z)在|z|=1上无奇点

则 $\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$ → 为|z|=1内所有奇点

若$R(\cos\theta,\sin\theta)$为θ的偶函数 ∵ $\int_0^{\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$，所以也可以用 $z=e^{i\theta}$来计算

② 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx$ 的积分

其中 $R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}$ 要求 $\begin{cases} a_m\neq 0 \quad b_n\neq 0 \\ n-m\geq 2 \\ R(z)在实轴上无奇点 \end{cases}$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$ → 上半平面所有奇点

若R(x)为偶函数 $\int_0^{+\infty}R(x)dx=\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z),z_k]$

③ 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx\ (a>0)$ 的积分 要求 $\begin{cases} n-m\geq 1 \\ R(z)在实轴上无奇点 \end{cases}$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[R(z)e^{iaz},z_k]$ → 上半平面所有奇点

而 $\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)e^{iax}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos ax\,dx+i\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin ax\,dx$

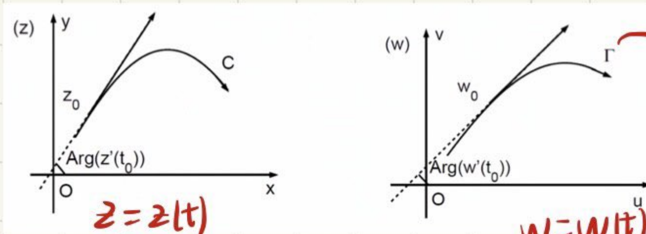
∴ $\boxed{\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\cos ax\,dx&=\mathrm{Re}\left(2\pi i\sum\mathrm{Res}[R(z)e^{iaz},z_k]\right)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}R(x)\sin ax\,dx&=\mathrm{Im}\left(2\pi i\sum\mathrm{Res}[R(z)e^{iaz},z_k]\right)\end{aligned}}$

6章 共形映射

1. 解析函数导数的几何意义

① 若 $z'(t_0)\neq 0$ 则 $\operatorname{Arg} z'(t_0)$ 为曲线C在 z_0 处切向量的倾角

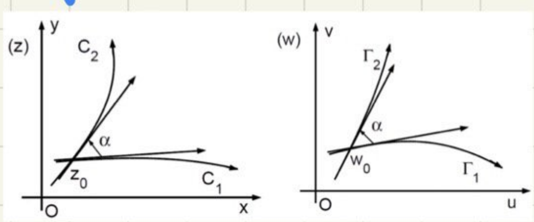
② 某一条曲线



$z=z(t)$　　$w=w(t)$　　$\to w=f(z)$

$\operatorname{Arg} w'(t_0) - \operatorname{Arg} z'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0)$ → 映射后转动角大小与方向仅与 z_0 有关,与C形状与方向无关

③ 两条曲线



$$\begin{cases}\operatorname{Arg} w_1'(t_0) - \operatorname{Arg} z_1'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) \\ \operatorname{Arg} w_2'(t_0') - \operatorname{Arg} z_2'(t_0') = \operatorname{Arg} f'(z_0)\end{cases} \Rightarrow \operatorname{Arg} w_2'(t_0') - \operatorname{Arg} w_1'(t_0) = \operatorname{Arg} z_2'(t_0') - \operatorname{Arg} z_1'(t_0)$$

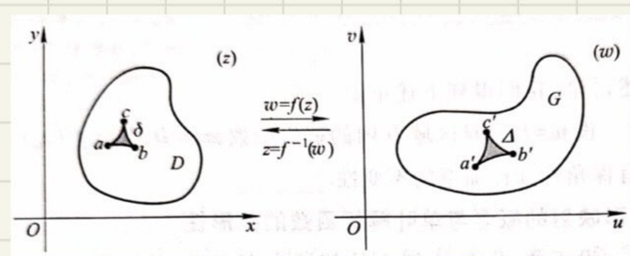
映射前后 C_1C_2 与 $\Gamma_1\Gamma_2$ 两个夹角相等 → 保角性

$|f'(z_0)| = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ → 经过 $w=f(z)$ 映射后通过点 z_0 的任何曲线C在 z_0 的伸缩率,与C无关

★ $\left.\begin{array}{l} w=f(z) \text{ 解析(D内)} \\ f'(z_0)\neq 0 \end{array}\right\}$ → 映射在 z_0 处具有保角性和伸缩率不变性 → 在 z_0 处保角

D内 → 在D内保角

2. 共形映射、单叶解析函数的共形性



z_0 处保角、D内保角映射的概念

单叶且保角 → 共形(保形)映射 → 映射成相似形

$z_1\neq z_2 \Rightarrow f(z_1)\neq f(z_2)$

映射成的区域

$z\in D$

定理: $w=f(z)$ 在区域D内单叶解析 → 反函数 $z=f^{-1}(w)$ 在区域G内单叶解析

$w=f(z)\in G$

且 $[f^{-1}(w)]' = \dfrac{1}{f'(z)}$