§8.2 单位冲激函数

一、为什么要引入单位冲激函数

二、单位冲激函数的概念及性质

三、单位冲激函数的 **Fourier** 变换

四、周期函数的 **Fourier** 变换

一、为什么要引入单位冲激函数

理由

- 在数学、物理学以及实际工程技术中，一些常用的函数，如常数函数、线性函数、符号函数以及单位阶跃函数等等，都不能进行 Fourier 变换。
- Fourier 级数以及 Fourier 变换都是用来对信号进行频谱分析的，它们之间能否统一起来。
- 在工程实际问题中，有许多瞬时物理量不能用通常的函数形式来描述，如冲击力、脉冲电压、质点的质量等等。

一、为什么要引入单位冲激函数

引例 (1) 如图，设有一条长度为 a，质量为 m 的均匀细杆

P192 例 8.5

放置在 x 轴的 $[0, a]$ 区间上。

则它的线密度函数为：

$$P_a(x)=\begin{cases}\dfrac{m}{a}, & 0\le x\le a,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

- 显然，由线密度函数进行积分即得质量：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P_a(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a\frac{m}{a}\,\mathrm{d}x=m.$$

一、为什么要引入单位冲激函数

引例 (2) 设有质量为 m 的质点放置在坐标原点，则可认为它相当于是细杆取 $a\to 0$ 的结果。

P192 例 8.5

相应地，该质点的密度函数为：

$$P(x)=\lim_{a\to 0}P_a(x)=\begin{cases}\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}$$

- 可是，该密度函数并没有体现质点的质量信息，还必须附加一个条件：$\int_{-\infty}^{+\infty}P(x)\,\mathrm{d}x=m.$

二、单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念

定义 单位冲激函数 $\delta(t)$ 满足:

P193

(1) 当 $t \neq 0$ 时，$\delta(t) = 0$;

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$.

- 显然，通过引入单位冲激函数，前面引例中质点的密度函数就可简洁地表示为：$P(x) = m\,\delta(x)$.

- 单位冲激函数又称为 Dirac 函数或者 δ 函数。

二、单位冲激函数的概念及性质

1. 单位冲激函数的概念

注意 (1) 单位冲激函数 $\delta(t)$ 并不是经典意义下的函数，因此通常称其为广义函数(或者奇异函数)。

(2) 它不能用常规意义下的值的对应关系来理解和使用，而总是通过它的性质来使用它。

(3) 单位冲激函数 $\delta(t)$ 有多种定义方式，前面所给出的定义方式是由 Dirac(狄拉克)给出的。

(其它定义方式)

二、单位冲激函数的概念及性质

2. 单位冲激函数的性质

性质1 筛选性质

P193 性质 8.1

- 设函数 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数，且在 $t=0$ 处连续，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0).$$

- 一般地，若 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 点连续，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t_0).$$

证明 （略）

二、单位冲激函数的概念及性质

2. 单位冲激函数的性质

性质 2　对称性质

P194 性质 8.2

- 单位冲激函数为偶函数，即 $\delta(t)=\delta(-t)$.

性质 3　积分性质

P194 性质 8.3

- 设函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t<0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$

则有 $\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,\mathrm{d}t=u(t)$, $u'(t)=\delta(t)$.

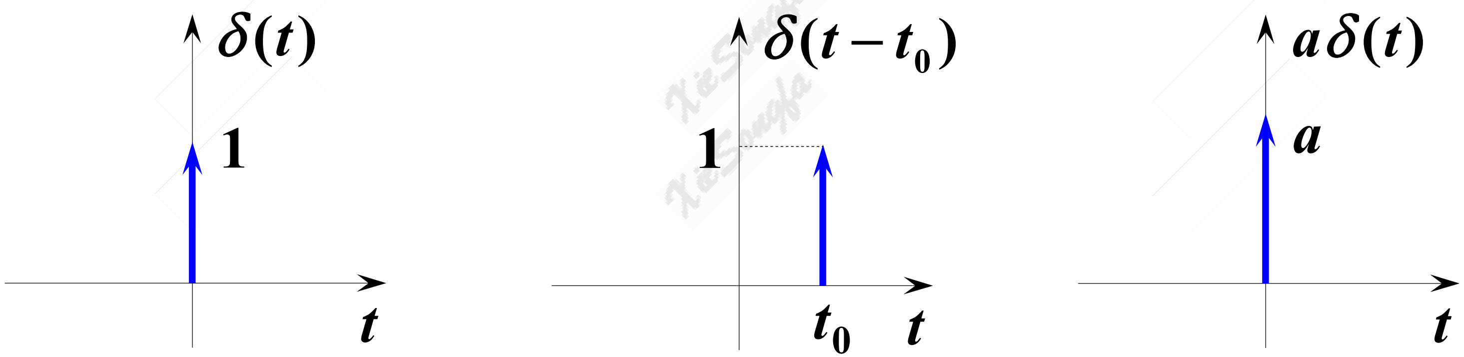
注　称函数 $u(t)$ 为单位阶跃函数，也称为 **Heaviside 函数**，它是工程技术中最常用的函数之一。

二、单位冲激函数的概念及性质

3. 单位冲激函数的图形表示

- 单位冲激函数的图形表示方式非常特别，通常采用一条从原点出发且长度为1的有向线段来表示。
- 相应地，函数 $\delta(t-t_0)$ 和 $a\delta(t)$ 的图形表示如下图所示，其中有向线段的长度称为冲激函数的冲激强度。

比如　函数 $a\delta(t)$ 的冲激强度为 a。

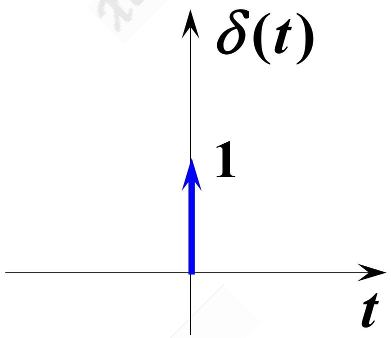


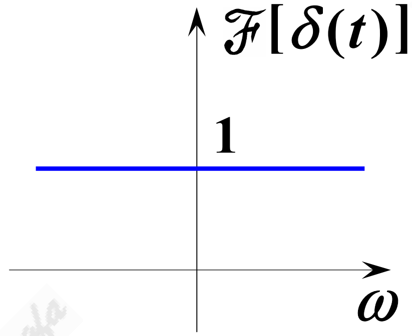
三、单位冲激函数的 Fourier 变换

- 利用筛选性质，易得 δ 函数的 Fourier 变换： P 195

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \mathrm{e}^{-j\omega t} \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1.$$

即 $\delta(t)$ 与 1 构成 Fourier 变换对：$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$





- 由此可见，单位冲激函数包含所有频率成份，且它们具有相等的幅度，称此为均匀频谱或白色频谱。

三、单位冲激函数的 Fourier 变换

- 进一步，根据 Fourier 逆变换公式，可得

$$\mathscr{F}^{-1}[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{j\omega t}\,d\omega=\delta(t).$$

- 由此即得重要公式：

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{j\omega t}\,d\omega=2\pi\delta(t).}$$

注意　在 δ 函数的 Fourier 变换中，其广义积分是根据 δ 函数的性质直接给出的，而不是按通常的积分方式得到的，称这种方式的 Fourier 变换为广义 Fourier 变换。

启示　在使用 δ 函数时，应牢记三个性质及重要公式。

例 分别求函数 $f_1(t)=1$ 与 $f_2(t)=t$ 的 Fourier 变换。

P195 例 8.7 修改

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(-\omega)=2\pi\delta(\omega).$$

(2) 将等式 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta(\omega)$ 的两边对 ω 求导，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(-jt)e^{-j\omega t}dt=2\pi\delta'(\omega),$$

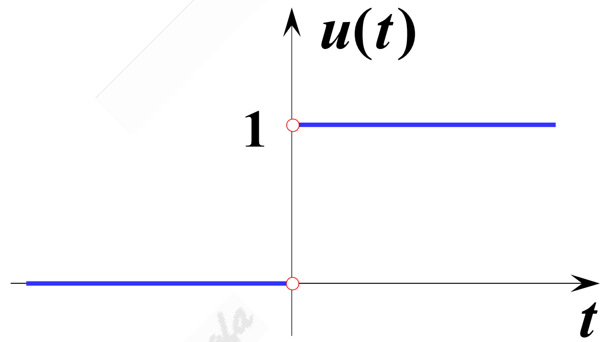
$$\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}t\,e^{-j\omega t}dt=2\pi j\,\delta'(\omega),$$

即得 $F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]=2\pi j\,\delta'(\omega).$

例 求单位阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$ 的 Fourier 变换 $U(\omega)$。

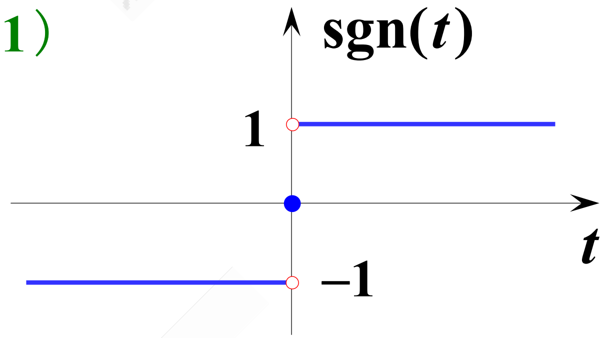
P195 例 8.7 修改

解 由于 $u(t)=\dfrac{1}{2}(\operatorname{sgn} t+1)$,



又已知 $\mathscr{F}[1]=2\pi\,\delta(\omega)$,

$$\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]=\frac{2}{j\omega},$$ （参见本课件§8.1）



即得 $U(\omega)=\dfrac{1}{2}\left(\mathscr{F}[\operatorname{sgn} t]+\mathscr{F}[1]\right)$

$$=\frac{1}{j\omega}+\pi\,\delta(\omega).$$

【第八章 傅裏葉變換】

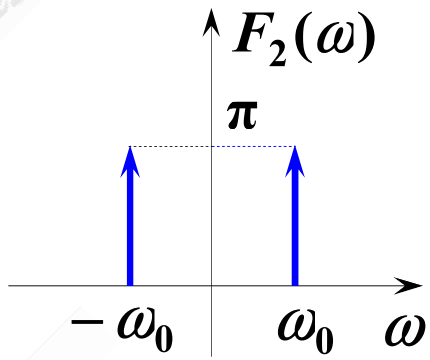
例 分别求函数 $f_2(t)=\mathrm{e}^{j\omega_0 t}$ 与 $f_2(t)=\cos\omega_0 t$ 的 Fourier 变换。

P195 例 8.7 部分 P196 例 8.9

解 (1) $F_1(\omega)=\mathscr{F}[f_1(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{j(\omega_0-\omega)t}\,\mathrm{d}t=2\pi\,\delta(\omega_0-\omega)=2\pi\,\delta(\omega-\omega_0).$$

(2) 由 $\cos\omega_0 t=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{j\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-j\omega_0 t})$，有



$$F_2(\omega)=\mathscr{F}[f_2(t)]$$

$$=\frac{1}{2}(\mathscr{F}[\mathrm{e}^{j\omega_0 t}]+\mathscr{F}[\mathrm{e}^{-j\omega_0 t}])$$

$$=\pi\,\delta(\omega-\omega_0)+\pi\,\delta(\omega+\omega_0).$$

四、周期函数的 Fourier 变换

定理 设 $f(t)$ 以 T 为周期，在 $[0, T]$ 上满足 Dirichlet 条件，

P196 定理 8.3

则 $f(t)$ 的 Fourier 变换为：

$$F(\omega)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0).$$

其中，$\omega_0=2\pi/T$，$F(n\omega_0)$ 是 $f(t)$ 的离散频谱。

证明 由 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}$，有

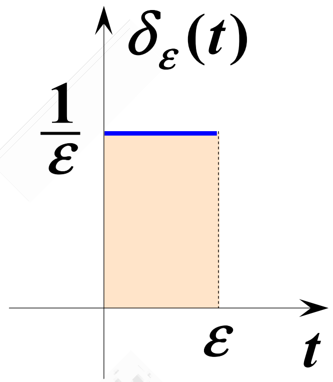
$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{jn\omega_0 t}\cdot\mathrm{e}^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(n\omega_0)\delta(\omega-n\omega_0).$$

放松一下吧！……

附：单位冲激函数的其它定义方式

方式一　令 $\delta_\varepsilon(t)=\begin{cases}1/\varepsilon, & 0\le t\le\varepsilon,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$



则 $\delta(t)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon(t).$

方式二　（20 世纪 50 年代，由 Schwarz 给出）

单位冲激函数 $\delta(t)$ 满足：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\varphi(0),$$

其中，$\varphi(t)\in C^\infty$ 称为检验函数。

（返回）

放松一下吧！……