§ 2.3 初等函数

将实数域中的初等函数扩充到复数域遵循的原则 是:自变量 z 取实值 x 时,必须和实数域中的函数一 致,另外扩充后的函数必须保留原函数的一些本质特 性.

扩充的方法是利用原来函数的某些本质特性作为 定义基本初等函数的基础.

§ 2.3.1 指数函数 (exponent -指数)

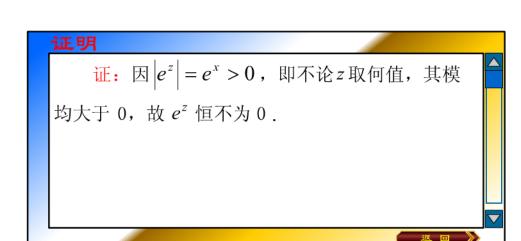
定义 2.4 称 $e^z = \exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ 为指数函数.

由 e^z 的定义知, $|e^z|=e^x$,Arg $e^z=y+2k\pi(k$ 为整数)









证明

if:
$$e^{z+2\pi i} = e^{x+2\pi i}e^{iy} = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

|若还有周期为 $w = w_1 + i w_2$,即 $e^{z+w} = e^z$,则有

$$e^{x+w_1}e^{i(y+w_2)}=e^xe^{iy}$$
.

比较上式两端的模与辐角,有

$$x + w_1 = x, y + w_2 = y + 2k\pi (k 为整数),$$





§ 2.3.2 对数函数

定义 2.5 $\exp w = e^w = z$,称 w 为 z 的对数函数记为 $w = f(z) = \operatorname{Ln} z$ (与实函数定义一样,对数函数为指数函数的反函数).

性质:

1>多值性 设
$$z = re^{i\theta}, w = u + iv$$
, 即 $e^w = re^{i\theta}$, 即 $e^{u+iv} = e^u e^{iv} = re^{i(\arg z + 2k\pi)} = re^{i(\theta + 2k\pi)}$,

即
$$e^u = r, e^{iv} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$$
,所以, $u = \ln r, v = \theta + 2k\pi$.

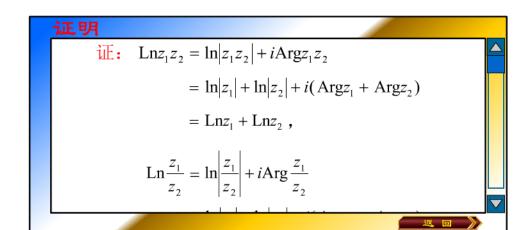
亦即,
$$w = \text{Ln}z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$$
, $k = 0,\pm 1,\pm 2,...$.

(注: Lnz与lnr不一样,Lnz无底,记号lnr以e为底的自然对数.)





解: 1) $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\arg z + 2k\pi) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi)$ $= (2k+1)\pi i$, $\arg z = \arg(-1) = \pi$, 主枝 $\ln z = \ln 1 + \pi i = \pi i$. 2) $\operatorname{Ln}(-i) = \ln 1 + i(\arg z + 2k\pi) = \ln 1 + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$





§ 2.3.3 幂函数

定义 2.6 函数
$$w = z^{\alpha}$$
 规定为 $z^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Lnz}}, \quad (\alpha \text{ 为复常数}, z \neq 0)$

称为复变量 z 的幂函数.

还规定: 当 α 为正实数且z=0时, $z^{\alpha}=0$. 由于 Lnz 是多值函数, 所以 $e^{\alpha \text{Ln} z}$ 一般是多值函数.

1) 当 α 为正整数n时,

$$w = z^{n} = e^{n \operatorname{Ln} z}$$

= $e^{n[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]} = e^{n(\ln|z| + i\arg z)} = e^{n \ln z}$,

是一个单值函数.

因
$$(z^n)' = nz^{n-1},$$





1. 三角函数

为正弦函数,余弦函数.

性质:

- 1) 当 z = x 时,与实函数一致.
- 2) 在复平面内解析,因

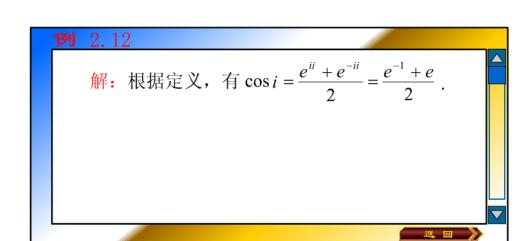
$$(\sin z)' = \cos z,$$

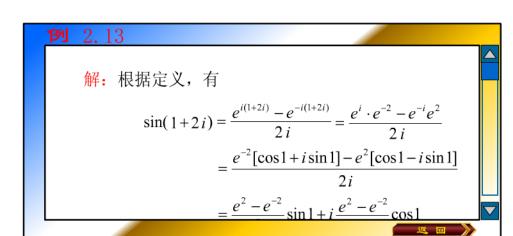
$$(\cos z)' = -\sin z.$$

3) 奇偶性同实函数一致.











本章小结

解析函数是复变函数的主要研究对象.本章的重点是正确理解复变函数的导数与解析函数等基本概念、掌握判断复变函数可导与解析的方法、熟悉复变量初等函数的定义和主要性质,特别要注意在复数范围内,实变初等函数的哪些性质不再成立,以及显现出哪些在实数范围内所没有的性质.

本章学习重点如下:

1.解析函数具有很好的性质. C-R 条件是判断函数可微和解析的主要条件,函数 f(z) 在区域 D 内可 微。 等价于函数 f(z)在 D 内解析。 但 f(z)在一点 Z_0 可

