§ 6.2 共形映射的基本问题

一、问题一

对于给定的区域 D 和定义在区域 D 上的解析函数 $w = f(z)$，求像集合 $G = f(D)$，

并讨论 $f(z)$ 是否将D共形地映射为G？

二、问题二(基本问题)

对给定的区域 D 和 G，求一解析函数 $w = f(z)$，使得

$f(z)$ 将 D共形映射为 G.

上页 下页 返回

一、问题一

$$D \xrightarrow{w=f(z)} ?$$

对于给定的区域 D 和定义在区域 D 上的函数 $w=f(z)$，求像集合 $G=f(D)$.

1. 保域性定理

定理 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析，且不恒为常数，则其像集合 $G=f(D)$ 仍然为区域。

P140 定理 6.2

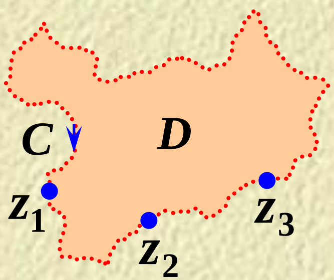
意义 保域性定理将解析函数的像集合的求解问题变成了求像区域的问题。

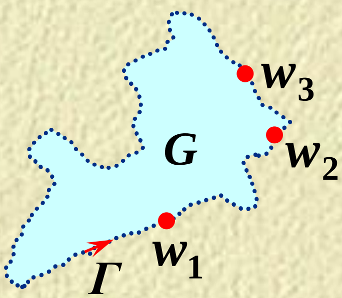
一、问题一 $D \xrightarrow{w=f(z)} ?$

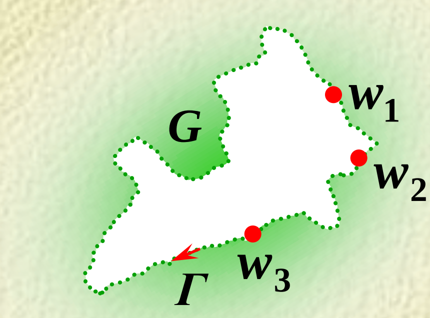
2. 边界对应原理

定理 设区域 D 的边界为简单闭曲线 C，函数 $w=f(z)$ 在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上解析，且将曲线 C 双方单值地映射为简单闭曲线 Γ． 当 z 沿 C 的正向绕行时，相应的 w 的绕行方向定为 Γ 的正向， 并令 G 是以 Γ 为边界的区域，则 $w=f(z)$ 将 D 共形映射为 G。

P140 定理 6.3







意义 边界对应原理进一步将解析函数的像区域的求解问题变成了求像曲线的问题。

一、问题一 $D \xrightarrow{w=f(z)} ?$

3. 求像区域的一般步骤

设函数 $w=f(z)$ 在闭域 $\overline{D}=D+C$ 上解析，且为一一映射。

(1) 令 $z=x+iy$, $w=u+iv$，则有

$$z=f^{-1}(w), \quad \Rightarrow \quad (\text{A})\begin{cases} x=\varphi(u,v), \\ y=\psi(u,v). \end{cases}$$

(2) 求边界曲线 C 的像曲线 Γ. (即将(A)代入曲线C的方程化简)

(3) 求像区域. (确定像曲线正向)

方案一 沿边界 C 的正向找三点，考察其像点的走向。

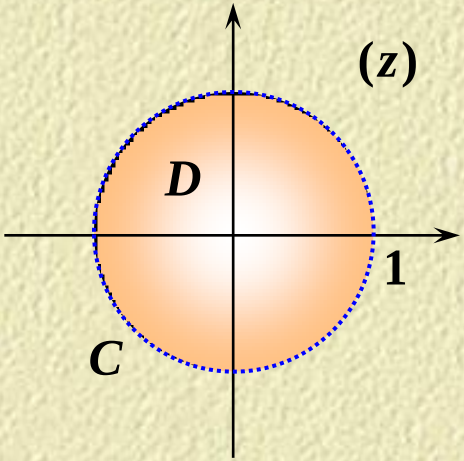
方案二 在区域 D 的内部找一点，考察其像点的位置。

注意 对于具体的函数和区域，将还会有一些特殊的方法。

上页 下页 返回

例 设区域 $D=\{z:|z|<1\}$, 求它在下列映射下的像区域 G.

$$w=\frac{1}{z}.$$



解法一 (1) 求点与像点之间的坐标变换关系。

由 $w=\dfrac{1}{z}$, 有 $z=\dfrac{1}{w}$,

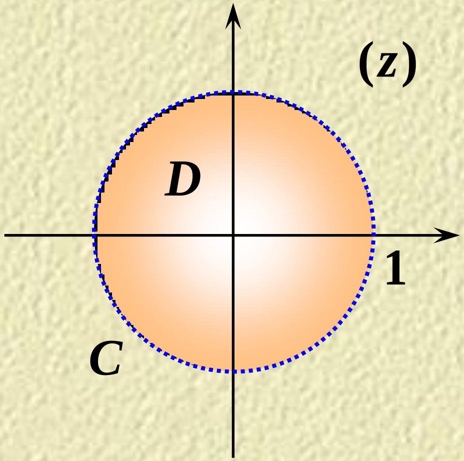
令 $z=x+iy$, $w=u+iv$,

则有 $x+iy=\dfrac{1}{u+iv}=\dfrac{u-iv}{u^2+v^2}$,

即得 $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$.

例　设区域 $D=\{z:|z|<1\}$，求它在下列映射下的像区域 G.

$$w=\frac{1}{z}.$$



解法一　(2) 求边界曲线 C 的像曲线 Γ。

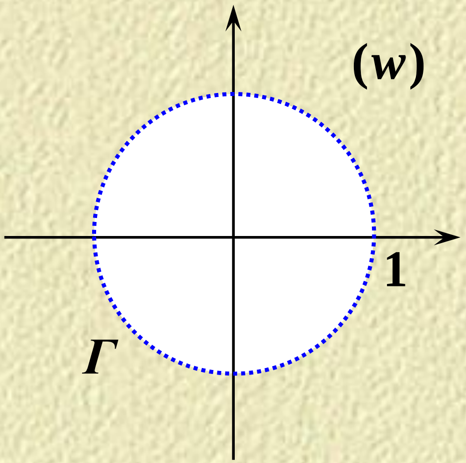
已知曲线 C 的方程为：$x^2+y^2=1$,

由　$x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$, $y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$,

有 $u^2+v^2=(u^2+v^2)^2$,

即得像曲线 Γ 的方程为：

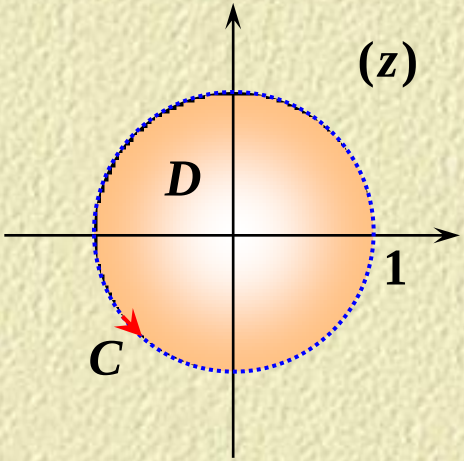
$$u^2+v^2=1.$$



上页　下页　返回

例 设区域 $D=\{z:|z|<1\}$，求它在下列映射下的像区域 G.

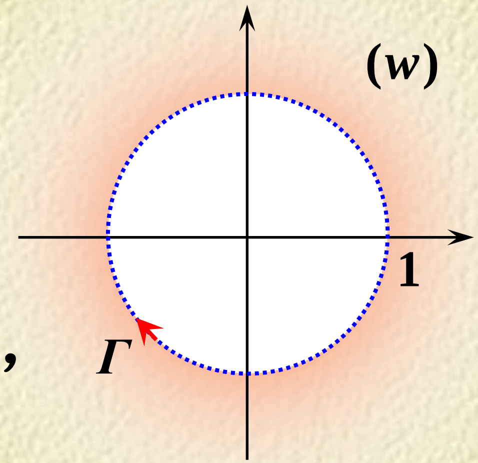
$$w=\frac{1}{z}.$$



解法一 (3) 确定像区域。

方案 1 沿边界 C 的正向取三点：

$z_1=1,$	$\longrightarrow$	$w_1=1,$
$z_2=i,$	$\longrightarrow$	$w_2=-i,$
$z_3=-1,$	$\longrightarrow$	$w_3=-1,$



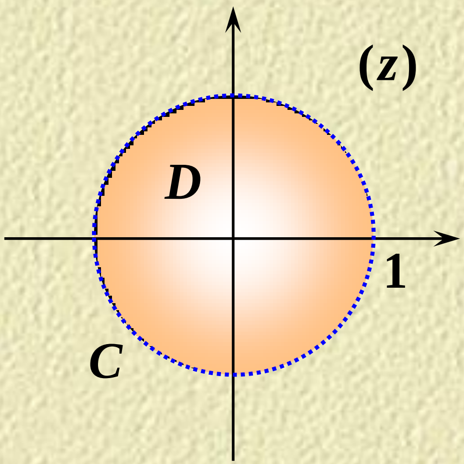
可知像区域 G 在 Γ 的外部。

注 事实上，通过以下章节的讨论将会知道，本题仅仅由这一步就可以解决。

上页 下页 返回

例 设区域 $D=\{z:|z|<1\}$, 求它在下列映射下的像区域G.

$$w=\frac{1}{z}.$$



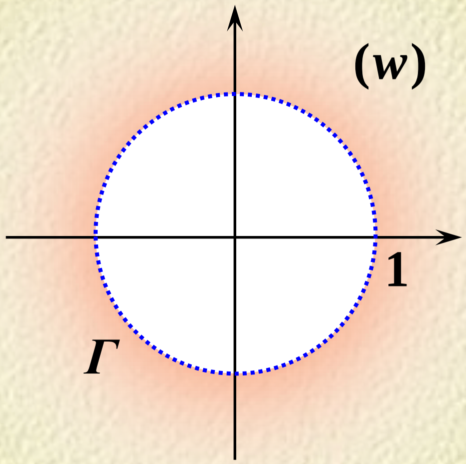
解法一 (3) 确定像区域。

方案2 在 D 的内部取一点 $z_0=0$,

代入函数 $w=\frac{1}{z}$,

得到像点 $w_0=\infty$,

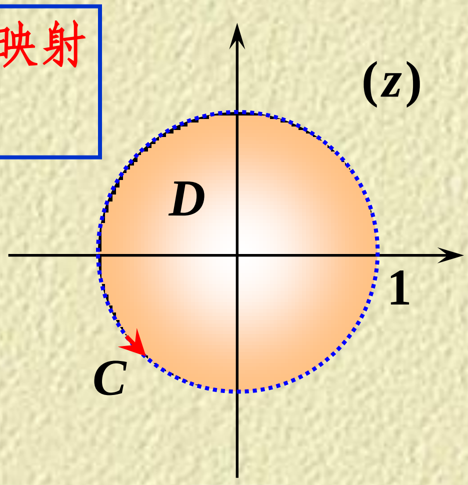
因此像区域 G 在 Γ 的外部。



上页 下页 返回

例 设区域 $D=\{z:|z|<1\}$，求它在下列映射下的像区域 G.

反演(或倒数)映射 $w=\dfrac{1}{z}$. 将单位圆内（外）映射到单位圆外（内）



解法二 (1)设区域 D 的边界为 C，则 C 的方程为

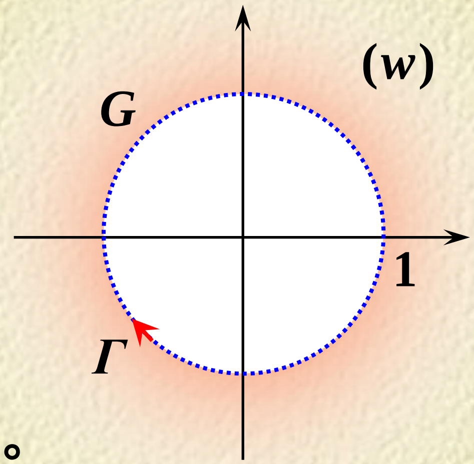
$$z=e^{i\theta},\ \text{其中}\ \theta:0\to 2\pi.$$

(2) 在 $w=\dfrac{1}{z}$ 的映射下，曲线 C 对应的像曲线 Γ 的方程为

$$w=1/e^{i\theta}=e^{i(-\theta)}=e^{i\varphi},$$

其中 $\varphi:0\to -2\pi$.

即得像区域 $G=\{w:|w|>1\}$如图所示。



上页 下页 返回

二、问题二(基本问题) $D \xrightarrow{?} G$

对给定的区域 D 和 G，求共形映射 $w = f(z)$，使 $G = f(D)$.

1. 黎曼存在唯一性定理

P143 定理 6.4

定理 (1) 设 D 和 G 是任给的两个单连域，在其各自的边界上至少含有两个点，则一定存在解析函数 $w = f(z)$ 将区域 D 共形地映射为 G。

(2) 如果在区域 D 和 G 内再分别任意指定一点 z_0 和 w_0，并任给一实数 $\theta_0 \in (-\pi, \pi]$，使得 $\arg f'(z_0) = \theta_0$ 且 $f(z_0) = w_0$，则映射 $w = f(z)$ 是唯一的。

上页 下页 返回

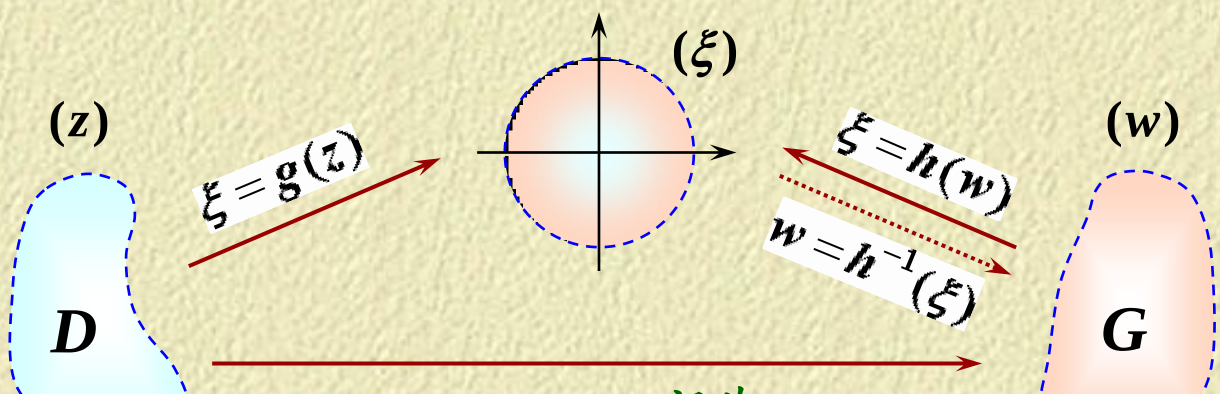
二、问题二(基本问题) $D \xrightarrow{\;?\;}$ 单位圆域

对给定的区域 D 和 G，求共形映射 $w = f(z)$，使 $G = f(D)$.

2. 基本问题的简化 P139

对给定的单连域 D，求共形映射，使得 D 映射为单位圆域。

- 事实上，由此即可求得任意两个单连域之间的共形映射。



$$w = h^{-1}(g(z)) \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} f(z)$$