第四章 解析函数的级数表示

§4.1 复数项级数

第四章 解析函数的级数表示

一、复数序列

1. 基本概念

定义 设 z_n 为复数，称 $\{z_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为复数序列。

极限 设 $\{z_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为一复数序列，又设 a 为一确定的复数，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，相应地存在自然数 N，使得当 $n>N$ 时，总有 $|z_n-a|<\varepsilon$ 成立，则称复数序列 $\{z_n\}$ 收敛于复数 a，或称 a 为复数序列 $\{z_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = a, \quad \text{或} \quad z_n \to a, (n\to+\infty).$$

如果复数序列 $\{z_n\}$ 不收敛，则称 $\{z_n\}$ 发散。

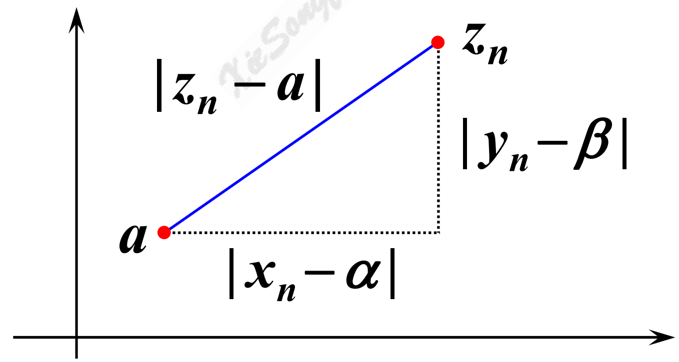
一、复数序列

2. 复数序列极限存在的充要条件

定理 设 $z_n = x_n + i y_n$, $a = \alpha + i\beta$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \beta.$$

证明 必要性 "$\Rightarrow$"



若 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$,

当 $n > N$ 时, $|z_n - a| < \varepsilon$,

$$\Rightarrow |x_n - \alpha| \le |z_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - \beta| \le |z_n - a| < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} y_n = \alpha, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \beta.$$

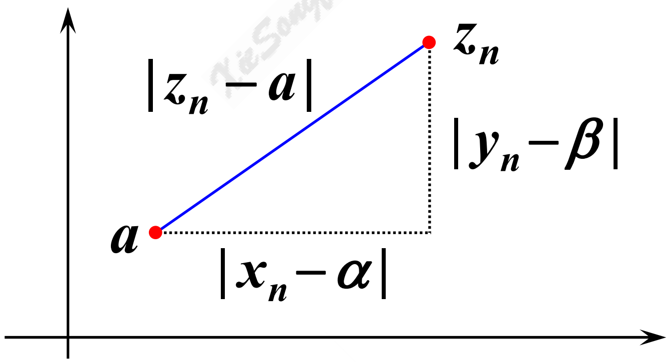
一、复数序列

2. 复数序列极限存在的充要条件

定理 设 $z_n = x_n + i y_n,\ a = \alpha + i\beta$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha,\quad \lim_{n\to+\infty} y_n = \beta.$$

证明 充分性 “$\Leftarrow$”



若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha,\ \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \beta$，

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，

$$|x_n - \alpha| < \varepsilon,\quad |y_n - \beta| < \varepsilon,$$

$$\Rightarrow |z_n - a| \le |x_n - \alpha| + |y_n - \beta| < 2\varepsilon,\quad \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} z_n = a.$$

例 设 $z_n = i^n + \frac{i}{n}$，讨论序列 $\{z_n\}$ 的收敛性。

解 $z_n = i^n + \frac{i}{n} = e^{\frac{\pi}{2} in} + \frac{i}{n} = \cos\frac{n\pi}{2} + i\left(\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\right).$

由 $\{\cos\frac{n\pi}{2}\}$ 或 $\{\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\}$ 发散，即得 $\{z_n\}$ 也发散。

二、复数项级数

1. 基本概念

定义 设 $\{z_n\}_{n=1,2,\cdots}$ 为一复数序列，

(1) 称 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots$ 为复数项级数，简记为 $\sum z_n$.

(2) 称 $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为级数的部分和；

(3) 如果序列 $\{s_n\}$ 收敛，即 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$，则称级数收敛，

并且极限值 s 称为级数的和；

(4) 如果序列 $\{s_n\}$ 不收敛，则称级数发散。

二、复数项级数

2. 复数项级数收敛的充要条件

定理 设 $z_n = x_n + i y_n$，则级数 $\sum z_n$ 收敛的充分必要条件是级数 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 都收敛。

3. 复数项级数收敛的必要条件

定理 设 $z_n = x_n + i y_n$，则级数 $\sum z_n$ 收敛的充分必要条件是

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = 0.$$

例 设 $z_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{i}{2^n}$，讨论级数 $\sum z_n$ 的收敛性。

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 收敛，　　(几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^n$，$0 < a < 1$ 时收敛)

但级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，　　(p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^p}$，$p \le 1$ 时发散)

因此级数 $\sum z_n$ 发散。

例 设 $z_n = \frac{1}{n^2} i^n$，讨论级数 $\sum z_n$ 的收敛性。

解 $$z_n = \frac{1}{n^2} i^n = \frac{1}{n^2} \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}n}$$

$$= \frac{1}{n^2}\cos\frac{\pi n}{2} + i\frac{1}{n^2}\sin\frac{\pi n}{2} \xlongequal{\text{记为}} x_n + i y_n,$$

由于级数 $\sum |x_n|$ 和 $\sum |y_n|$ 均为收敛， (绝对收敛)

故有级数 $\sum x_n$ 和 $\sum y_n$ 均收敛，即得级数 $\sum z_n$ 收敛。

- 在复数项级数中是否也能引入绝对收敛的概念呢?

二、复数项级数

4. 复数项级数的绝对收敛与条件收敛

定义 (1) 若 $\sum |z_n|$ 收敛，则称 $\sum z_n$ 绝对收敛。

(2) 若 $\sum |z_n|$ 发散，$\sum z_n$ 收敛，则称 $\sum z_n$ 条件收敛。

定理 若 $\sum |z_n|$ 收敛，则 $\sum z_n$ 必收敛。

例 设 $z_n=\dfrac{i^n}{\sqrt{n}}$，讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z_n$ 的收敛性。

分析 由于 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|z_n|=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，（p 级数，比阶法）

因此不能马上判断 $\sum z_n$ 是否收敛。

解 $z_n=\dfrac{i^n}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cos\dfrac{\pi n}{2}+i\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\dfrac{\pi n}{2}\xlongequal{\text{记为}}x_n+iy_n$，

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x_n=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}+\cdots$ 收敛，（莱布尼兹型的交错级数）

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}y_n=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\cdots$ 收敛， 故级数 $\sum z_n$ 收敛。

轻松一下吧 ······