第三章 复变函数的积分

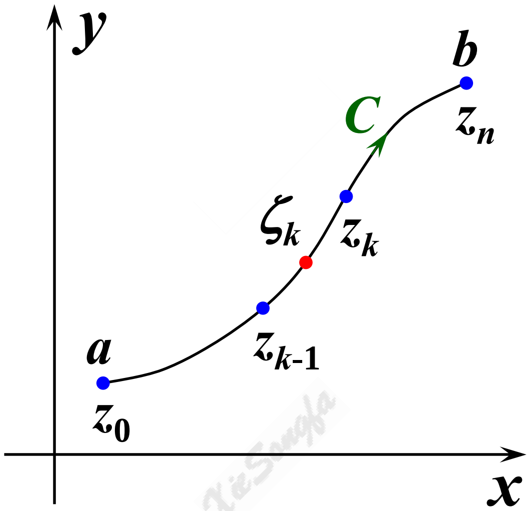
§ 3.1 复积分的概念

一、复积分的定义

二、复积分的性质

三、复积分的计算

一、复积分的定义



定义 如图设 C 为简单光滑的有向曲线，其方向是从 a 到 b，函数 $f(z)$ 在 C 上有定义，

(1) 将曲线 C 任意划分：

$$z_0 = a, z_1, z_2, \cdots, z_n = b,$$

令 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$，$\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} |\Delta z_k|$，

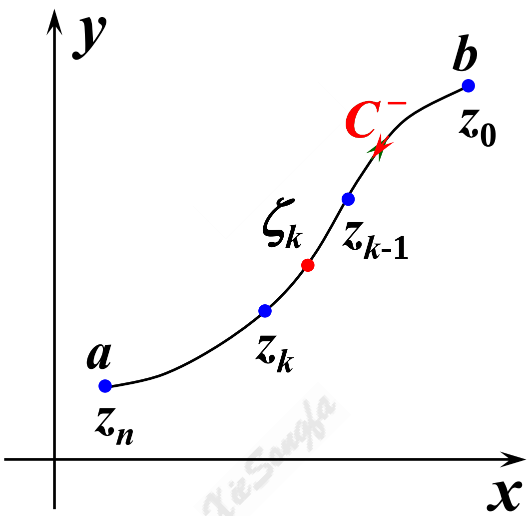
(2) 在每个弧段 $\overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$ 上任取一点 $\zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1} z_k}$，

若 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ 存在（不依赖 C 的划分和 ζ_k 的选取），

则称之为 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分，记为 $\int_C f(z)\mathrm{d}z$.

注 (1) $\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 表示沿曲线 C 的负方向积分；

(2) $\oint_{\Gamma} f(z)\mathrm{d}z$ 表示沿闭曲线 Γ（的逆时针方向）积分；



二、复积分的性质

(1) $\int_C [\alpha f(z)+\beta g(z)]\mathrm{d}z=\alpha\int_C f(z)\mathrm{d}z+\beta\int_C g(z)\mathrm{d}z$.

(2) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=-\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$.

(3) $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$,

其中，$C=C_1+C_2$.

(4) $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C |f(z)||\mathrm{d}z|=\boxed{\int_C |f(z)|\mathrm{d}s}\le ML$,

其中，$M=\max\limits_{z\in C}|f(z)|$,

第一类曲线积分

L为曲线C的弧长。

三、复积分的计算

方法一 化为第二类曲线积分

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C (u+iv)(\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)$$

$$=\int_C u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y+i\int_C v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y.$$

- 进一步可化为定积分或二重积分。

附 格林 (Green) 公式

设 D 为单连域，边界 C 分段光滑，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 $\overline{D}=D+C$ 上的偏导数连续，则

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

方法二 直接化为定积分

设曲线 $C: z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$，$t: a \to b$，则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]\,z'(t)\,\mathrm{d}t,$$

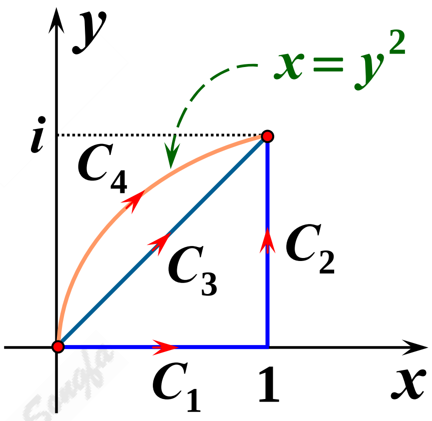
其中，$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.

附 其它方法

- 利用原函数计算，即 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$.
- 利用柯西积分公式、高阶导公式计算。
- 利用留数计算。

例1 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为(如图)：

(1) $C=C_1+C_2$; (2) $C=C_3$; (3) $C=C_4$.



解 (1) 曲线 C_1 的方程为 $z=x$，$x:0\to 1$,

曲线 C_2 的方程为 $z=1+iy$，$y:0\to 1$,

$$I=\int_{C_1} z\,\mathrm{d}z+\int_{C_2} z\,\mathrm{d}z,$$

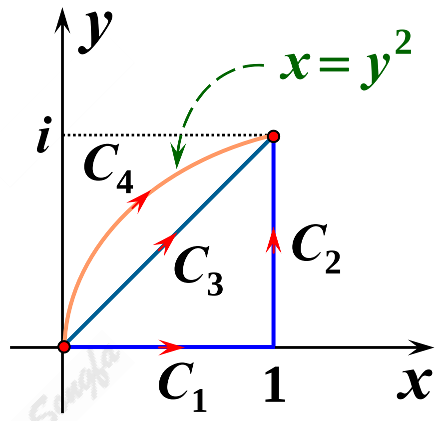
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1(1+iy)\,\mathrm{d}(1+iy)$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 i(1+iy)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\left(iy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1=i.$$

例1 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为(如图)：

(1) $C=C_1+C_2$；(2) $C=C_3$；(3) $C=C_4$.



解 (2) 曲线 C_3 的方程为 $z=t+it$，$t:0\to 1$，

$$I=\int_{C_3} z\,\mathrm{d}z$$

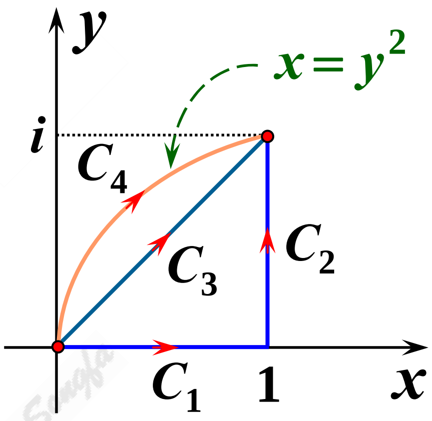
$$=\int_0^1 (t+it)\,\mathrm{d}(t+it)$$

$$=(1+i)(1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2i\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = i.$$

例1 计算 $I=\int_C z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为(如图)：

(1) $C=C_1+C_2$; (2) $C=C_3$; (3) $C=C_4$.



解 (3) 曲线 C_4 的方程为 $z=t^2+it$, $t:0\to 1$,

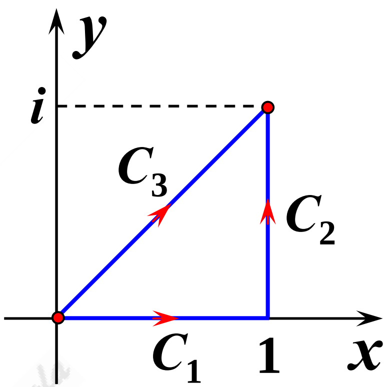
$$I=\int_{C_4} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 (t^2+it)\,\mathrm{d}(t^2+it)$$

$$=\frac{1}{2}(t^2+it)^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2}(1+i)^2=i.$$

例2 计算 $I=\int_C \bar{z}\,\mathrm{d}z$，其中 C 为：(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$.



解 (1) 曲线 C_1 的方程为 $z=x$，$x:0\to 1$,

曲线 C_2 的方程为 $z=1+iy$，$y:0\to 1$,

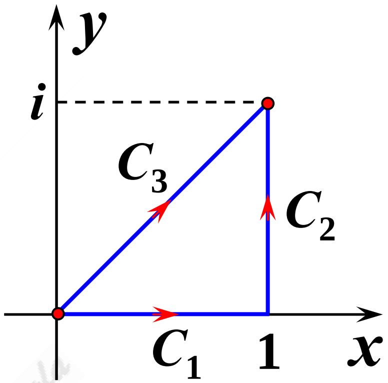
$$I=\int_{C_1}\bar{z}\,\mathrm{d}z+\int_{C_2}\bar{z}\,\mathrm{d}z,$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1(1-iy)\,\mathrm{d}(1+iy)$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x+\int_0^1 i(1-iy)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1+\left(iy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^1=1+i.$$

例2 计算 $I=\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$，其中 C 为：(1) $C=C_1+C_2$； (2) $C=C_3$.



解 (2) 曲线 C_3 的方程为 $z=t+it$， $t:0\to 1$,

$$I=\int_{C_3}\overline{z}\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 (t-it)\,\mathrm{d}(t+it)$$

$$=(1-i)(1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

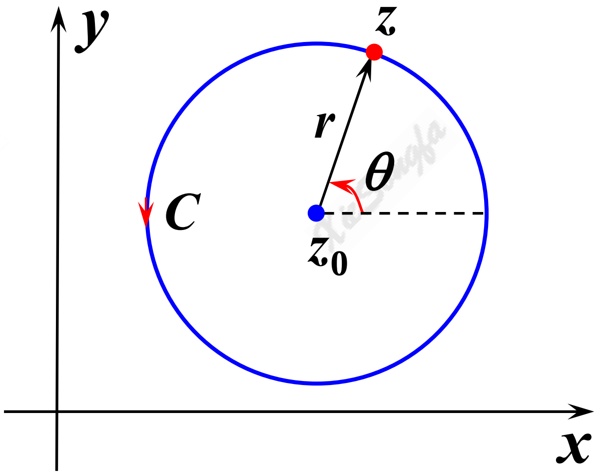
$$=2\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 =1.$$

例3 计算 $I=\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$，其中，$C$ 为 $|z-z_0|=r$，n 为整数。

解 曲线 C 的参数方程为 $z=z_0+r\mathrm{e}^{i\theta}$，$\theta:0\to 2\pi$,

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{r\mathrm{e}^{i\theta}\,i}{(r\mathrm{e}^{i\theta})^n}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{i}{r^{n-1}}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta,$$



当 $n=1$ 时，$I=2\pi i$;

当 $n\neq 1$ 时，$I=\dfrac{i}{i(1-n)r^{n-1}}\mathrm{e}^{i(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi}=0.$

注 此例的结果很重要!