傅里叶级数

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nw_1t)+b_n\sin(nw_1t)]$$

其中：$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)dt$

$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cdot\cos(nw_1t)dt$

$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cdot\sin(nw_1t)dt$

合并同频项：$f(t)=d_0+\sum_{n=1}^{\infty}d_n\sin(nw_1t+\theta_n)$

其中：$d_0=a_0$，$d_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$，$\theta_n=\arctan\frac{a_n}{b_n}$

指数形式：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\cdot e^{jnw_1t}$

其中：$F_n=\frac{1}{T_1}\int_{t_0}^{t_0+T_1}f(t)\cdot e^{-jnw_1t}dt=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)=\frac{1}{2}\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,e^{j\varphi_n}$

$\varphi_n=\arctan(-\frac{b_n}{a_n})$

帕塞瓦尔定理：$P=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|F_n|^2$

傅里叶变换

正变换：$F(w)=\mathcal{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-jwt}dt$

逆变换：$f(t)=\mathcal{F}[F(w)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)e^{jwt}dw$

基本信号的傅里叶变换：

单边：$e^{-\alpha t}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{\alpha+jw}$，$\alpha>0$

双边：$e^{-\alpha|t|}\longleftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+w^2}$，$\alpha>0$

门信号：$Eg_\tau(t)\longleftrightarrow E\tau Sa(\frac{w\tau}{2})$

符号函数：$sgn(t)\longleftrightarrow\frac{2}{jw}$

冲激函数：$\delta(t)\longleftrightarrow 1$

常数1：$1\longleftrightarrow 2\pi\delta(w)$

冲激偶：$\delta'(t)\longleftrightarrow jw$

阶跃函数：$u(t)\longleftrightarrow\pi\delta(w)+\frac{1}{jw}$

性质：

线性：$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\longleftrightarrow a_1F_1(w)+a_2F_2(w)$

对称性：$F(t)\longleftrightarrow 2\pi f(-w)$

尺度变换：$f(at)\longleftrightarrow\frac{1}{|a|}F(\frac{w}{a})$

虚实特性：$F(w)=R(w)+jX(w)$，$R(w)$偶，$X(w)$奇

$f(t)$实偶，$F(w)$实偶；$f(t)$实奇，$F(w)$虚奇

欧拉公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

$$\Rightarrow\begin{cases}e^{jw_1t}=\cos w_1t+j\sin w_1t\\ e^{-jw_1t}=\cos w_1t-j\sin w_1t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos(nw_1t)=\frac{1}{2}(e^{jnw_1t}+e^{-jnw_1t})\\ \sin(nw_1t)=\frac{1}{2j}(e^{jnw_1t}-e^{-jnw_1t})\end{cases}$$

阶跃信号和冲激信号

斜变函数 $\xrightarrow{求导}$ 阶跃函数 $\xrightarrow{求导}$ 冲激函数(偶) $\xrightarrow{求导}$ 冲激偶(奇)

$R(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t>0\end{cases}$　$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$　$\begin{cases}\delta(t)=0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)=1\end{cases}$　$\delta'(t)=\frac{d\delta(t)}{dt}$

冲激函数：

加权特性：$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$，$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

抽样特性：$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(0)\delta(t)dt=f(0)$

$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)$

尺度变换：$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$，$\delta(at-t_0)=\frac{1}{|a|}\delta(t-\frac{t_0}{a})$

冲激偶：

抽样特性：$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)dt=f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)df(t)=-\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f'(0)dt=-f'(0)$

$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)dt=-f'(t_0)$

加权特性：$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

$f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$

卷积运算：$s(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$

性质：微分：$s'(t)=f_1(t)*f_2'(t)=f_1'(t)*f_2(t)$

积分：$s^{(-1)}(t)=f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)$

微积分：$s(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2'(t)=f_1(t)*f_2(t)$

$\Longrightarrow s^{(i)}(t)=f_1^{(j)}(t)*f_2^{(i-j)}(t)$

交换律：$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

分配律：$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$

$\Rightarrow$ 并联系统 $h(t)=h_1(t)+h_2(t)$

结合律：$[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)=f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]$

$\Rightarrow$ 串联系统 $h(t)=h_1(t)*h_2(t)$

与冲激函数、冲激偶、阶跃函数

冲激函数$\delta(t)$：$f(t)*\delta(t)=f(t)$

$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

$f(t-t_1)*f(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$

冲激偶$\delta'(t)$：$f(t)*\delta'(t)=f'(t)*\delta(t)=f'(t)$

$f(t)*\delta''(t)=f''(t)*\delta(t)=f''(t)$

阶跃函数$u(t)$：$f(t)*u(t)=f(t)*\delta^{(-1)}(t)=f^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$

$f(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau-t_0)d\tau=\int_{-\infty}^{t-t_0}f(\tau)d\tau$

时移性质：$f_1(t-t_1)*f_2(t-t_2)=s(t-t_1-t_2)$

位移：时移 $f(t-t_0)\longleftrightarrow F(w)e^{-jwt_0}\Rightarrow\delta(t-t_0)\longleftrightarrow e^{-jwt_0}$

频移 $f(t)e^{jw_0t}\longleftrightarrow F(w-w_0)\Rightarrow e^{jw_0t}\longleftrightarrow 2\pi\delta(w-w_0)$

$$\Longrightarrow\begin{cases}\cos w_0t=\frac{1}{2}(e^{jw_0t}+e^{-jw_0t})\\ \sin w_0t=\frac{1}{2j}(e^{jw_0t}-e^{-jw_0t})\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}f(t)\cos(w_0t)\longleftrightarrow\frac{1}{2}[F(w-w_0)+F(w+w_0)]\\ f(t)\sin(w_0t)\longleftrightarrow\frac{1}{2j}[F(w-w_0)+F(w+w_0)]\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\cos w_0t\longleftrightarrow\pi[\delta(w-w_0)+\delta(w+w_0)]\\ \sin w_0t\longleftrightarrow\frac{\pi}{j}[\delta(w-w_0)-\delta(w+w_0)]\end{cases}$$

调制定理：若信号$f(t)$乘以$\cos w_0t$或$\sin w_0t$，等效于$f(t)$的频谱$F(w)$一分为二，沿频率轴向左和向右各平移w_0。

卷积：时域卷积：$f_1(t)*f_2(t)\longleftrightarrow F_1(w)\cdot F_2(w)$

频域卷积：$f_1(t)\cdot f_2(t)\longleftrightarrow\frac{1}{2\pi}F_1(w)*F_2(w)$

微积分：时域：
- 微分：$\frac{df(t)}{dt}\longleftrightarrow jwF(w)$
- 积分：$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\longleftrightarrow\frac{1}{jw}F(w)+\pi F(0)\delta(w)$

频域：
- 微分：$-jtf(t)\longleftrightarrow\frac{dF(w)}{dw}$
- 积分：$\frac{f(t)}{jt}\longleftrightarrow\int_{-\infty}^{w}F(u)du$