# § 4.2 幂级数

一、基本概念

二、幂级数

# 一、基本概念

## 1. 复变函数项级数

定义 设复变函数 $f_n(z)$ 在区域 $G$ 内有定义，

(1) 称 $\{f_n(z)\}_{n=1,2,\cdots}$ 为区域 $G$ 内的复变函数序列。

(2) 称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$ 为区域 $G$ 内的复变函数项级数，简记为 $\sum f_n(z)$.

# 一、基本概念

## 2. 复变函数项级数收敛的定义

**定义** 设 $\sum f_n(z)$ 为区域 $G$ 内的复变函数项级数，

(1) 称 $s_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ 为级数 $\sum f_n(z)$ 的部分和。

(2) 如果对 $G$ 内的某一点 $z_0$，有 $\lim_{n\to+\infty} s_n(z_0)=s(z_0)$，则称级数 $\sum f_n(z)$ 在 $z_0$ 点收敛。

(3) 如果存在区域 $D\subseteq G$，$\forall z\in D$，有 $\lim_{n\to+\infty} s_n(z)=s(z)$，则称级数 $\sum f_n(z)$ 在区域 $D$ 内收敛。此时，称 $s(z)$ 为和函数，$D$ 为收敛域。

# 二、幂级数

## 1. 幂级数的概念

**定义** 称由下式给出的复变函数项级数为幂级数：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots, \qquad (\mathrm{I})$$

其中，$a_n$, $a$ 为复常数。特别地，当 $a=0$ 时有

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots. \qquad (\mathrm{II})$$

**注** (1) 下面主要是对 (II) 型幂级数进行讨论，所得到的结论只需将 $z$ 换成 $(z-a)$ 即可应用到 (I) 型幂级数。

(2) 对于 (II) 型幂级数，在 $z=0$ 点肯定收敛。

## 二、幂级数

### 2. 阿贝尔 (Abel) 定理

**定理** 对于幂级数 $\sum a_n z^n$，有

(1) 如果级数在 $z_0$ 点收敛，则它在 $|z|<|z_0|$ 上绝对收敛；

(2) 如果级数在 $z_1$ 点发散，则它在 $|z|>|z_1|$ 上发散。

**证明** (1) 由 $\sum a_n z_0^n$ 收敛，有 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z_0^n = 0$，

则存在 $M$，使对所有的 $n$ 有 $|a_n z_0^n| \le M$，

$$\Rightarrow |a_n z^n| = |a_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le M q^n,\quad 其中\ q = \left|\frac{z}{z_0}\right|,$$

当 $|z|<|z_0|$ 时，$q<1$，即得 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| \le \sum\limits_{n=0}^{+\infty} M q^n$ 收敛。

## 二、幂级数

### 2. 阿贝尔(Abel)定理

**定理** 对于幂级数 $\sum a_n z^n$，有

(1) 如果级数在 $z_0$ 点收敛，则它在 $|z|<|z_0|$ 上绝对收敛；

(2) 如果级数在 $z_1$ 点发散，则它在 $|z|>|z_1|$ 上发散。

**证明** (2) 反证法: 已知级数在 $z_1$ 点发散，

假设存在 $z_2$: $|z_2|>|z_1|$，使得级数在 $z_2$ 点收敛，

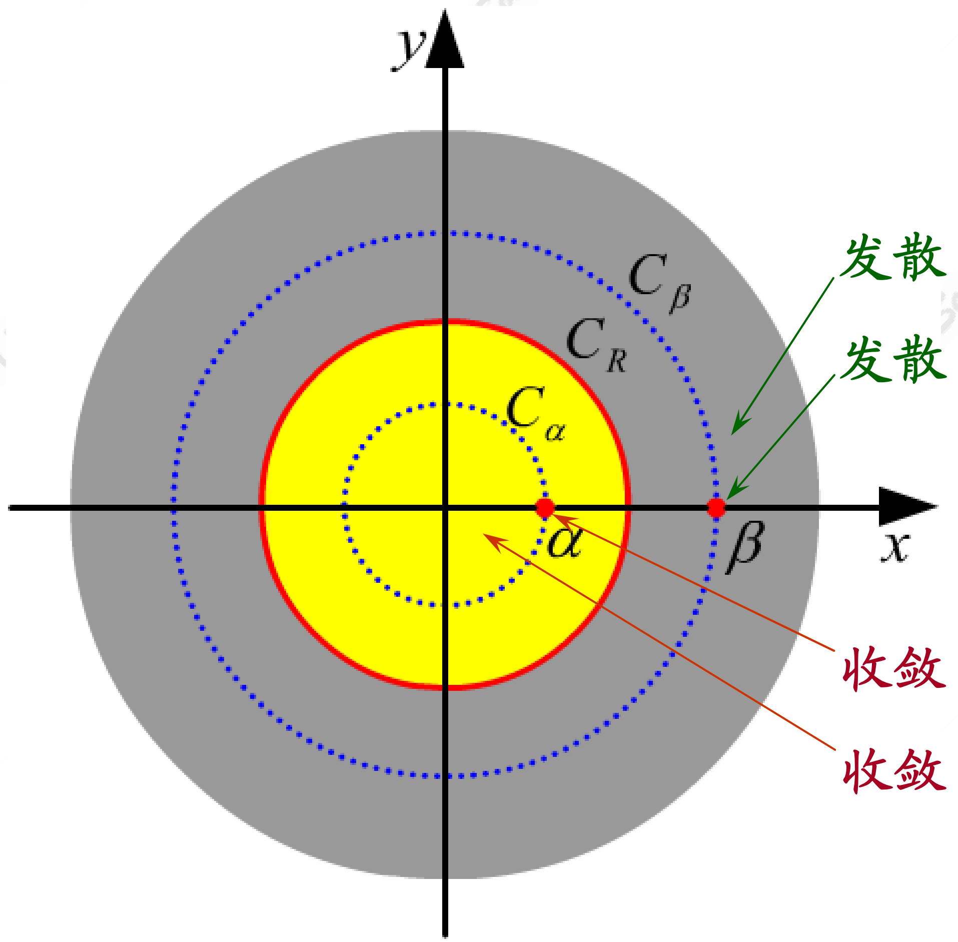
由定理的第(1)条有，级数在 $|z|<|z_2|$ 上绝对收敛；

$\Rightarrow$ 级数在 $z_1$ 点收敛， 与已知条件矛盾。

# 二、幂级数

## 3. 收敛圆与收敛半径

分析



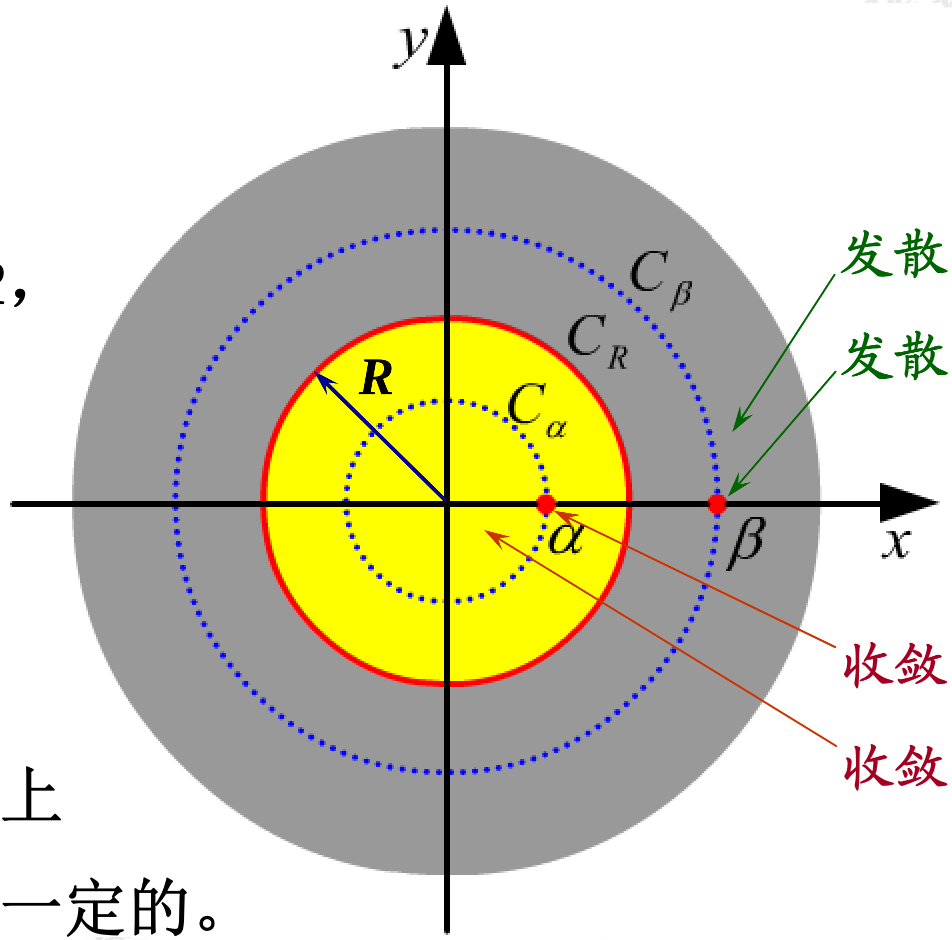
## 二、幂级数

### 3. 收敛圆与收敛半径

**定义** 如图设$C_R$的半径为$R$,

(1) 称圆域 $|z|< R$ 为收敛圆。

(2) 称 $R$ 为收敛半径。




**注意** 级数在收敛圆的边界上各点的收敛情况是不一定的。

**约定** $R=0$ 表示级数仅在 $z=0$ 点收敛;

$R=+\infty$ 表示级数在整个复平面上 收敛。

**例** 考察级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(nz)^n = 1 + z + (2z)^2 + (3z)^3 + \cdots$ 的收敛性。

**解** 对任意的 $z \neq 0$，都有 $\lim\limits_{n\to+\infty}(nz)^n \neq 0$， (必要条件?)

故级数 $\sum(nz)^n$ 仅在 $z = 0$ 点收敛，收敛半径为 $R = 0$.

**例** 考察级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n = 1 + z + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^3 + \cdots$ 的收敛性。

**解** 对任意固定的 $z$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，有 $\frac{|z|}{n} < \frac{1}{2}$，

由 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 收敛， $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{|z|}{n}\right)^n$ 收敛，

因此级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$ 在全平面上收敛，收敛半径为 $R = +\infty$.

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数。

解 级数的部分和为 $s_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$，$(z \neq 1)$，

(1) 当 $|z| < 1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty} |z|^{n+1} = 0$，$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$，

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{1-z}，\text{级数收敛；}$$

(2) 当 $|z| \geq 1$时，$\lim\limits_{n\to+\infty} z^{n+1} \neq 0$，级数发散。

故级数收敛半径为 $R = 1$， 和函数为 $s(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

$$\boxed{\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots, \quad (|z| < 1).}$$

轻松一下吧 ……