第一章 复数与复变函数

§1.1 复数

在初等代数中（即实数）我们遇到了以下六种运算：

$$\begin{array}{ccccccc} \text{数} & \longrightarrow & \text{加法} & \xrightarrow{\text{同数相加}} & \text{乘法} & \xrightarrow{\text{同数相乘}} & \text{乘幂（乘方，方根）} \\ & & \Big\downarrow \text{逆} & & \Big\downarrow \text{逆} & & \Big\downarrow \text{逆} \\ & & \text{减法} & & \text{除法} & & \text{对数} \end{array}$$

在实数范围内，第三种运算——乘幂是不完备的.

因为：

1. $a^b = c$ 约定 $a > 0$ 即 a 不能为负数，如

§1.1.2 四则运算

设 $z_1 = x_1 + iy_1$， $z_2 = x_2 + iy_2$ 是两个复数．则有

1） $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$；

2） $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$；

3） $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad \left(x_2 + iy_2 \neq 0\right).$

注：其运算法则同以前学过的一样，复数的除法关键是：使分母的复数实化．如：

$$\frac{3-2i}{2+3i} = \frac{(3-2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{(6-6)+i(-4-9)}{2^2+3^2} = -i$$

§1.2 复数的几何表示法

§1.2.1 复平面(或z平面)

“复数”与“点”可视为同义语.

$$x+iy \Leftrightarrow (x,y)$$

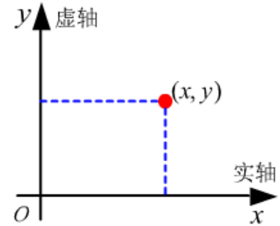


图 1.1

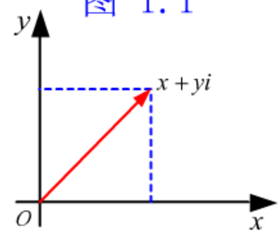


图 1.2

§1.2.2 复数的矢量表示

$$x+iy \Leftrightarrow x\vec{i}+y\vec{j}$$

即复数 z 可用从原点指向点 (x,y) 的矢量表示，反之亦然.

矢量的长度称为复数 z 的模或绝对值，记为：

$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

定义：点 z ($z\neq0$) 到原点o的距离 r 叫做复数 z 的模.

§1.2.2 复数的矢量表示

$$x+iy \Leftrightarrow x\vec{i}+y\vec{j}$$

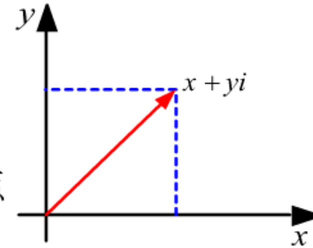


图 1.2

即复数 z 可用从原点指向点 (x,y) 的矢量表示，反之亦然.

矢量的长度称为复数 z 的模或绝对值，记为：

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

§1.2.3 共轭复数及其性质：

共轭复数：实部相同而虚部正负号相反的两个虚数称之.

如：$z=x+iy$是一个复数，称 $x-iy$ 为 z 的共轭复数.

性质：

1）对称于实轴；

2）$|z|=|\bar{z}|$；

3）$z\bar{z}=|z|^2$；

4）$\bar{\bar{z}}=z$； z 是实数 $\Leftrightarrow z=\bar{z}$ ，

$\mathrm{Re}\,\bar{z}=\mathrm{Re}\,z$，$\mathrm{Im}\,\bar{z}=-\mathrm{Im}\,z$.

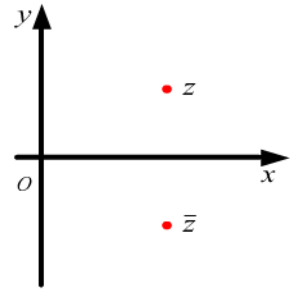


图 1.3

5）$\mathrm{Re}\,z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ ，$\mathrm{Im}\,z=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}=\dfrac{i(\bar{z}-z)}{2}$.

6）$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$ ，$\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\,\bar{z}_2$ ，$\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}=\dfrac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}$.

§1.2.4 复数的三角形式

根据直角坐标与极坐标的关系有：

若 $z=x+yi$，则 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，其中 $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\bar{z}}$. 称

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

为复数的三角形式（或极坐标形式），θ是矢量oz与极轴的夹角. 根据 Euler 公式，z还可写成

$$z=re^{i\theta},$$

称为复数的指数式 .

如果 $z\neq 0$，满足$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$\theta$之值有

§1.2.5　复数的四则运算的几何表示

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad z_1+z_2 \\ &2)\quad z_1-z_2 \end{aligned}\right\}$$视为两矢量的和差.

注：$|z_1-z_2|$表示 z_1 与 z_2 的距离.

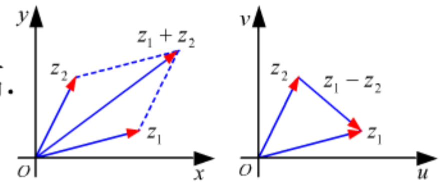


图 1.4

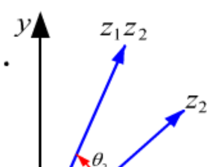
3) z_1z_2，$\dfrac{z_1}{z_2}$.

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right],$$

$$\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)=\theta_1+\theta_2+2k\pi=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2.$$

几何意义：逆时针旋转，模放大或缩小.



$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right],$$