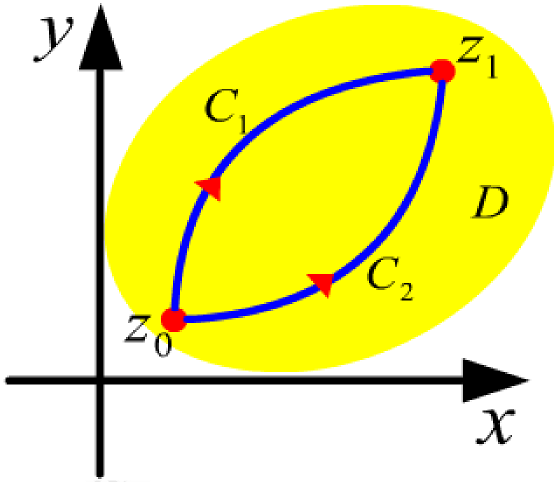
§3.3 原函数

定理 设函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析，C_1, C_2 为 D 内的任意两条从 z_0 到 z_1 的简单曲线，则有

P60 定理 3.3

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$



证明 由 $\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2^-} f(z)\,dz = 0$,

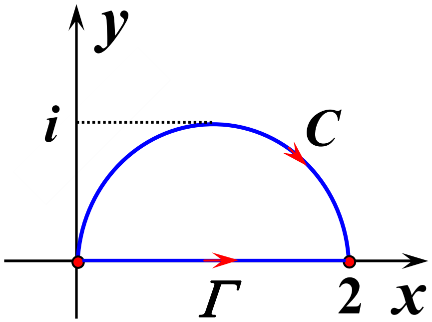
$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)\,dz = -\int_{C_2^-} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

- 可见，解析函数在单连域内的积分只与起点和终点有关，

因此，$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz \xlongequal{\text{可记为}} \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz.$

例 计算 $I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z$，其中 C 为如图所示的一个半圆。

P61 例3.6



解 设 Γ 如图所示，由于 $\sin z$ 在复平面上处处解析，因此有

$$I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z=\int_\Gamma \sin z\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^2 \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^2=1-\cos 2.$$

问 是否可以直接计算？

即 $I=\int_C \sin z\,\mathrm{d}z=\int_0^2 \sin z\,\mathrm{d}z=-\cos z\Big|_0^2=1-\cos 2.$

定义 设在单连域 D 内，函数 $F(z)$ 恒满足条件 $F'(z)=f(z)$，

P64 定义 3.2

则 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 在 D 内的一个原函数。

性质 函数 $f(z)$ 的任何两个原函数相差一个常数。

证明 设 $G(z)$ 和 $H(z)$ 是 $f(z)$ 的两个原函数，则

$$[G(z)-H(z)]'=G'(z)-H'(z)=f(z)-f(z)=0,$$

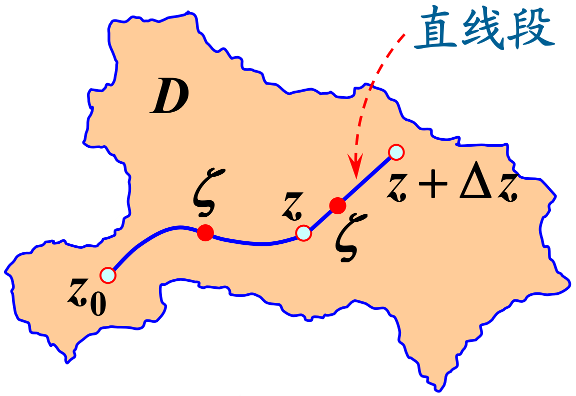
$\Rightarrow G(z)-H(z)=c$，其中，c 为任意常数。

定义 函数 $f(z)$ 的原函数 $F(z)+c$ 称为 $f(z)$ 的不定积分，

补

记作 $\int f(z)\,\mathrm{d}z=F(z)+c.$

由变上限积分构成的原函数



定理 若 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析，

P63 定理 3.5

令 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$，$z$，$z_0\in D$，

则 $F(z)$ 在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$.

证明 (思路)

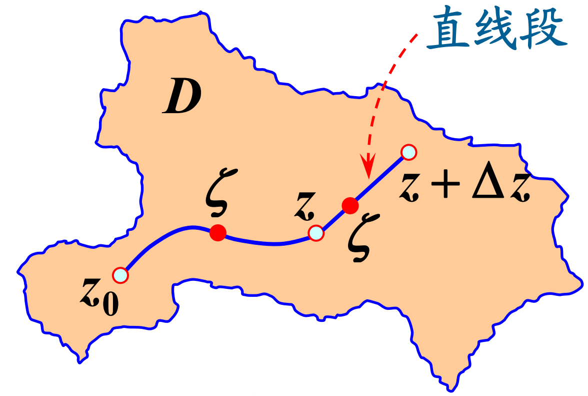
(跳过?)

(1) $$\frac{\Delta F}{\Delta z}=\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta,$$

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z}-f(z)\right|\le\frac{1}{|\Delta z|}\int_{z}^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)|\,\mathrm{d}s,$$

由变上限积分构成的原函数



定理 若 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析，

令 $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$，$z, z_0 \in D$，

则 $F(z)$ 在 D 内解析，且 $F'(z)=f(z)$.

Newton-Leibniz公式

定理 若 $f(z)$ 在单连域 D 内处处解析， $G(z)$ 为 $f(z)$ 的原函数，

P64 定理 3.6

则 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z = G(z_1) - G(z_0)$，其中 $z,\ z_0 \in D$.

证明 由于 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 也是 $f(z)$ 的一个原函数，

有 $F(z) = G(z) + c$， $\Rightarrow\ F(z_0) = G(z_0) + c$,

$$F(z_1) = G(z_1) + c,$$

$$\Rightarrow\ F(z_1) - F(z_0) = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\,\mathrm{d}z - 0 = G(z_1) - G(z_0).$$

例 求 $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z$.

解 $\int_0^{1+i} z^2 \mathrm{d}z = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1+i)^3.$

例 求 $\int_{-i}^{i}\ln(1+z)\mathrm{d}z$.

解 $$\int_{-i}^{i}\ln(1+z)\mathrm{d}z = z\ln(1+z)\Big|_{-i}^{i}-\int_{-i}^{i}\frac{z}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$= z\ln(1+z)\Big|_{-i}^{i}-\int_{-i}^{i}\frac{z+1-1}{1+z}\mathrm{d}z$$

$$= [z\ln(1+z)-z+\ln(1+z)]\Big|_{-i}^{i}$$

$$= (-2+\ln 2)i+\frac{\pi}{2}i.$$