§1.5 复变函数

复自变量函数论的基本概念几乎是实自变量函数 中相应概念的逐字逐句的推广,这种在基本定义中的 极其相似,导致在某些章节的许多理论的极其相似.

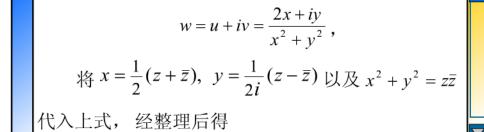
§ 1.5.1 复变函数的概念

定义 1.3 设有一复数 z = x + iy 的集合 G,如果有一个确定的法则存在,对于集合 G 中的每一个复数 z,按照这一法则,复数 w = u + iv 就随着而定,那 么称 w 是复变数 z 的函数(简称复变函数)记为 w = f(z)

如果z的一个值对应着一个w值,则称f(z)为单







解: 记 x + iy = z, u + iv = w, 则

§ 1.5.2 映射的概念

在"微积分"中,我们常把实变函数用几何图形表示,它可直观的帮助我们理解和研究函数的性质. 对于复变函数由于它反映了 *u*,*v* 和 *x*,*y* 之间的对应关系. 因而无法用同一平面或空间的几何图形表示(因有两个自由度)必须把它看成两个复平面上的点集之间的对应关系.

如果要把函数 w = f(z) 的定义集合 G 看成是 Z 平面上的一个点集合. 而把函数值集合 D 看成是另一个平面即 w平面上的一个点集合,那么函数 w = f(z) 在几何上就可以看成是把集合 G 变到 D 的一个映射.



§1.5.3 复变函数的极限与连续性

1. 函数的极限

定义 1.4 设函数 w = f(z) 定义在 z_0 的邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内,总有一确定的数 A 存在, $\forall \varepsilon > 0$,相 应地必有正数 $\delta(\varepsilon)$,使得当 $0 < |z - z_0| < \delta(0 < \delta \le \rho)$ 时,有

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$
,

则称A为f(z)当z趋向于 z_0 时的极限,记为

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A .$$

或

$$z \to z_0, \quad f(z) \to A$$
.





证: 充分性: 由 $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = a$, $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = b$.

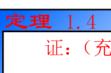
则当 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时,有 $|u-a| < \frac{\varepsilon}{2}, |v-b| < \frac{\varepsilon}{2},$

$$|u-a|<\frac{\varepsilon}{2}, |v-b|<\frac{\varepsilon}{2},$$

 $|a| f(z) - A| \le |u - a| + |v - b|$, 故在 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时,有







证: (充分性) 因 u, v 在(x_0, y_0) 处连续,

即

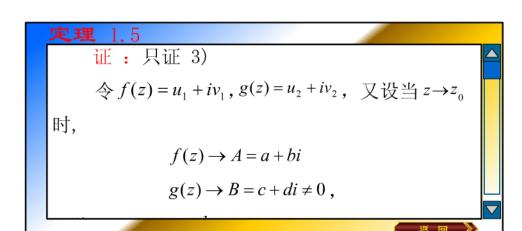
$$\lim u = u_0, \lim v = v_0.$$

由定理 1.2 的充分性知 $\lim_{z \to z_0} f(z)$ 存在.

 ∇







本章小结

本章学习了复数概念、复数运算及其表示: 复变 函数概念及其极限、连续等内容,这些内容是学习全 书的基础, 因为今后研究的问题均在复数范围内讨论, 所以我们对复数的性质必须要有清楚的认识,并需牢 固掌握复数运算的方法,由于复数全体与平面上点的 全体可作成——对应, 故一个复数集可视为一个平面 点集, 而用复数表示复平面上的点, 较之解析几何中 用直角坐标表示点,有时要方便的多. 当我们研究复 变函数的性质即研究两个复数集之间的一种对应关系 时,清晰地了解平面点集是很重要的前提.



