第九章 Laplace变换

§ 9.1 Laplace 变换的概念

一、Laplace 变换的引入

二、Laplace 变换的定义

三、存在性定理

四、几个常用函数的 Laplace 变换

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的局限性

对象 1（攻击）

- 当函数 $f(t)$ 满足 Dirichlet 条件，且在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积时，则可以进行古典 Fourier 变换。

问题 1

- 由于绝对可积是一个相当强的条件，使得一些简单函数（如常数函数、线性函数、正弦与余弦函数等）的 Fourier 变换也受到限制。

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的局限性

对象 2（攻击）

- 广义 Fourier 变换的引入，扩大了古典 Fourier 变换的适用范围，使得缓增函数也能进行 Fourier 变换，而且将 Fourier 级数与 Fourier 变换统一起来。

问题 2

- 对于以指数级增长的函数，如 $e^{at}\,(a>0)$ 等，广义 Fourier 变换仍无能为力；而且在变换式中引入了冲激函数，也使人感到不太满意。

一、Laplace 变换的引入

1. Fourier 变换的局限性

对象 3 (攻击)

- 在工程实际问题中，函数 $f(t)$ 在 $t<0$ 时通常为零，或者在 $t<0$ 时根本没有意义，比如起始时刻为零的因果信号等。

问题 3

- 在对这些实际信号进行 Fourier 变换时，没有必要或者不可能在整个实轴上进行。

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换进行改造

- 基本想法

(1) 将函数 $f(t)$ 乘以一个单位阶跃函数 $u(t)$，

使得函数在 $t<0$ 的部分补零(或充零)。

(2) 将函数再乘上一个衰减指数函数 $e^{-\beta t}\,(\beta>0)$，

使得函数在 $t>0$ 的部分尽快地衰减下来。

- 通过上述处理，就有希望使得函数 $f(t)\cdot u(t)\cdot e^{-\beta t}$ 满足 Fourier 变换的条件，从而可以进行 Fourier 变换。

一、Laplace 变换的引入

2. 如何对 Fourier 变换进行改造

- 实施结果

$$\mathscr{F}[f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-(\beta+j\omega)t}\mathrm{d}t.$$

将上式中的 $\beta + j\omega$ 记为 s，就得到了一种新的变换：

$$\int_{0}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \overset{\text{记为}}{=\!=} F(s).$$

- 上述积分存在的关键：变量 s 的实部 $\mathrm{Re}\,s = \beta$ 足够大。

二、Laplace 变换的定义

定义 设实值函数 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，令 $s=\beta+j\omega$，

P214 定义 9.1

若积分 $F(s)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$ 在 s 平面的某区域内收敛，

则称函数 $F(s)$ 为函数 $f(t)$ 的 Laplace 变换或者像函数，

记为 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$，即

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t\,.$$

相应地，称 $f(t)$ 为 $F(s)$ 的 Laplace 逆变换或像原函数，

记为 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]$.

（Laplace 简介）

注 $f(t)$ 的 Laplace 变换就是 $f(t)u(t)\mathrm{e}^{-\beta t}$ 的 Fourier 变换。

二、Laplace 变换的定义

例 $\mathscr{L}[1]=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{-s}e^{-st}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s},\quad (\mathrm{Re}\,s>0).$

P214 例 9.1

$\mathscr{L}[u(t)]=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\quad (\mathrm{Re}\,s>0).$

$\mathscr{L}[\mathrm{sgn}\,t]=\int_0^{+\infty}\mathrm{sgn}\,t\,e^{-st}\,dt=\int_0^{+\infty}1\cdot e^{-st}\,dt=\frac{1}{s},\quad (\mathrm{Re}\,s>0).$

例 $\mathscr{L}[e^{at}]=\int_0^{+\infty}e^{at}e^{-st}\,dt=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{s-a},\quad (\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,a).$

P217 例 9.3

要点 进行积分时，通过保证积分存在，确定 s 的取值范围。

二、Laplace 变换的定义

启示 ● 从上述例子可以看出：

(1) 即使函数以指数级增长，其 Laplace 变换仍然存在；

(2) 即使函数不同，但其 Laplace 变换的结果可能相同。

问题 (1) 到底哪些函数存在 Laplace 变换呢？

如果存在，收敛域(或者存在域)如何？有何特点？

(2) 如何求 Laplace 逆变换？是否唯一？

$$\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s},\ (\mathrm{Re}\,s>0).\qquad \mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\frac{1}{s-a},\ (\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,a).$$

三、存在性定理

定理 设函数 $f(t)$ 满足：

P216 定理 9.1

(1) 在 $t \geq 0$ 的任何有限区间上分段连续；

(2) 当 $t \to +\infty$ 时，$f(t)$ 具有有限的增长性，

即存在常数 $M > 0$ 及 $c \geq 0$，使得

$$|f(t)| \leq M e^{ct},\quad (0 \leq t < +\infty),$$

其中，c 称为函数 $f(t)$ 的增长指数。

则象函数 $F(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\, s > c$ 上一定存在且解析。

证明 （略）

三、存在性定理

- 两点说明

(1) 像函数 $F(s)$ 的存在域一般是一个右半平面 $\mathrm{Re}\,s > c$，

即只要复数 s 的实部足够大就可以了。

- 因此在进行 Laplace 变换时，常常略去存在域，只有在非常必要时才特别注明。

(2) 在 Laplace 变换中的函数一般均约定在 $t < 0$ 时为零，

即函数 $f(t)$ 等价于函数 $f(t)u(t)$.

- 比如 $\mathscr{L}^{-1}[\frac{1}{s}] = 1$.

四、几个常用函数的 Laplace 变换 （汇总）

$$(1)\ \mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\frac{1}{s}.$$

$$(2)\ \mathscr{L}[\delta(t)]=1.$$

$$(3)\ \mathscr{L}[t^m]$$

$$(4)\ \mathscr{L}[e^{at}]=\frac{1}{s-a}.$$

$$(5)\ \mathscr{L}[\cos at]$$

$$(6)\ \mathscr{L}[\sin at]$$

解 (2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=\int_{0^-}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}\,dt$

$$=e^{-st}\Big|_{t=0}=1.$$

含冲激函数的拉氏变换问题

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}.$

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1.$

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}.$

(4) $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}.$

(5) $\mathscr{L}[\cos at]$

(6) $\mathscr{L}[\sin at]$

解 (3) $\mathscr{L}[t^m]=\int_0^{+\infty}t^m e^{-st}\,dt=\dfrac{1}{-s}\int_0^{+\infty}t^m\,de^{-st}$

（Γ 函数简介）

$$=\frac{1}{-s}t^m e^{-st}\Big|_0^{+\infty}+\frac{m}{s}\int_0^{+\infty}t^{m-1}e^{-st}\,dt=\frac{m}{s}\mathscr{L}[t^{m-1}]$$

$$=\frac{m(m-1)}{s^2}\mathscr{L}[t^{m-2}]=\cdots=\frac{m!}{s^m}\mathscr{L}[1]=\frac{m!}{s^{m+1}}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}.$

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1.$

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}.$

(4) $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}.$

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}.$

(6) $\mathscr{L}[\sin at]$

解 (5) $$\mathscr{L}[\cos at]=\frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty}e^{jat}e^{-st}\,dt+\int_0^{+\infty}e^{-jat}e^{-st}\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\mathscr{L}[e^{jat}]+\mathscr{L}[e^{-jat}]\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ja}+\frac{1}{s+ja}\right)=\frac{s}{s^2+a^2}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}.$

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1.$

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}.$

(4) $\mathscr{L}[e^{at}]=\dfrac{1}{s-a}.$

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}.$

(6) $\mathscr{L}[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}.$

解 (6) $$\mathscr{L}[\sin at]=\frac{1}{2j}\left(\int_0^{+\infty}e^{jat}e^{-st}\,dt-\int_0^{+\infty}e^{-jat}e^{-st}\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\mathscr{L}[e^{jat}]-\mathscr{L}[e^{-jat}]\right)$$

$$=\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-ja}-\frac{1}{s+ja}\right)=\frac{a}{s^2+a^2}.$$

四、几个常用函数的 Laplace 变换(汇总)

(1) $\mathscr{L}[1]=\mathscr{L}[u(t)]=\dfrac{1}{s}.$

(2) $\mathscr{L}[\delta(t)]=1.$

(3) $\mathscr{L}[t^m]=\dfrac{m!}{s^{m+1}}=\dfrac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}.$

(4) $\mathscr{L}[\mathrm{e}^{at}]=\dfrac{1}{s-a}.$

(5) $\mathscr{L}[\cos at]=\dfrac{s}{s^2+a^2}.$

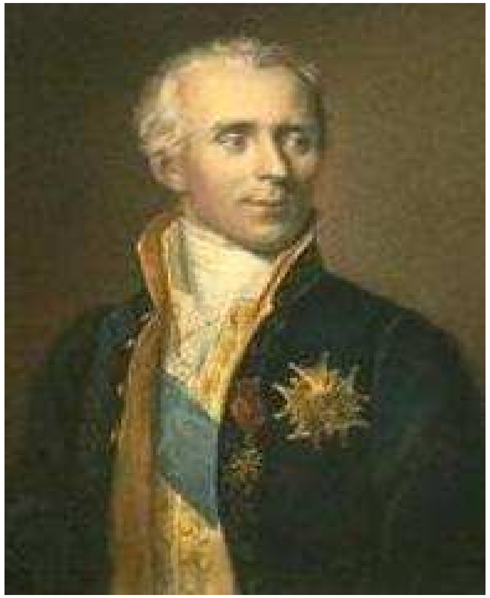
(6) $\mathscr{L}[\sin at]=\dfrac{a}{s^2+a^2}.$

特点

- 上述函数的 Laplace 变换的结果均为分式函数。
- 它们的分母几乎涵盖了单根、重根及复根等情况。

放松一下吧！……

附：人物介绍 —— 拉普拉斯



拉普拉斯

Laplace，Pierre-Simon

(1749～1827)

法国数学家、天文学家

- 天体力学的主要奠基人，天体演化学的创立者之一。
- 分析概率论的创始人，应用数学的先躯。
- 因研究太阳系稳定性的动力学问题被誉为法国的牛顿和天体力学之父。

附：人物介绍 —— 拉普拉斯

- 1749 年 3 月 23 日，生于法国卡尔瓦多斯的博蒙昂诺日。
- 1795 年任巴黎综合工科学校教授。
- 1816 年被选为法兰西学院院士，次年任该院院长。
- 1827 年 3 月 5 日，卒于巴黎。

- 曾任拿破仑的老师，并在拿破仑政府中担任过内政部长。
- 发表的天文学、数学和物理学的论文有 270 多篇。
- 专著合计有 4000 多页。其中最有代表性的专著有：

《天体力学》、《宇宙体系论》和《概率分析理论》。

(返回)

附：Γ－函数（Gamma 函数）简介

定义 Γ－函数定义为 $\Gamma(m)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,t^{m-1}\,\mathrm{d}\,t$，$(0<m<+\infty)$.

性质 $\Gamma(1)=1$； $\Gamma(m+1)=m\,\Gamma(m)$.

证明 $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}\,t=-e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=1$；

$$\Gamma(m+1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,t^{m}\,\mathrm{d}\,t=-\int_0^{+\infty}t^{m}\,\mathrm{d}e^{-t}$$

$$=-t^{m}e^{-t}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-t}\mathrm{d}\,t^{m}$$

$$=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,m\,t^{m-1}\,\mathrm{d}\,t=m\,\Gamma(m).$$

- 特别地，当 m 为正整数时，有 $\Gamma(m+1)=m!$.

（返回）

附：关于含冲激函数的 Laplace 变换问题

P231［注］

- 当函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 附近有界时，

  $f(0)$ 的取值将不会影响其 Laplace 变换的结果。

- 当函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处含冲激函数时，

  对积分下限分别取 0^+ 和 0^-，可得到两种 Laplace 变换：

$$\mathcal{L}_+[f(t)]=\int_{0^+}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t;$$ （右 Laplace 变换）

$$\mathcal{L}_-[f(t)]=\int_{0^-}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t.$$ （左 Laplace 变换）

- 本教材采用了后一种形式作为 δ 函数的 Laplace 变换。

（返回）

放松一下吧！……