§ 3.5 解析函数的高阶导数

一、高阶导数定理

二、柯西不等式

三、刘维尔定理

一、高阶导数定理

分析　如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，

则由柯西积分公式有 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,\ (z\in D).$

又 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(\zeta-z)^{-1}]=(\zeta-z)^{-2}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}[(\zeta-z)^{-1}]=2(\zeta-z)^{-3}$，

…… $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\left(\dfrac{1}{\zeta-z}\right)=n!(\zeta-z)^{-(n+1)}=\dfrac{n!}{(\zeta-z)^{n+1}}$，

$$\Rightarrow f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ (z\in D).$$

(?)

一、高阶导数定理

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $f(z)$ 的各阶导数均在 D 上解析，且

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\ (z\in D).$$

意义 解析函数的导数仍解析。

应用

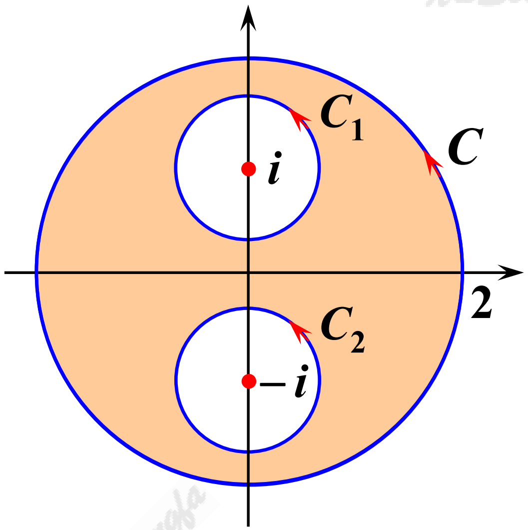
- 反过来计算积分 $\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0).$
- 推出一些理论结果。

例 计算 $\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} \mathrm{d}z$.

解 $\oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!} \cos'' z \Big|_{z=i}$

$$= -\pi i \cos i = -\frac{\pi i}{2}(\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}).$$

例 计算 $I=\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z.$



解 (1) 令 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-i)^2(z+i)^2}.$

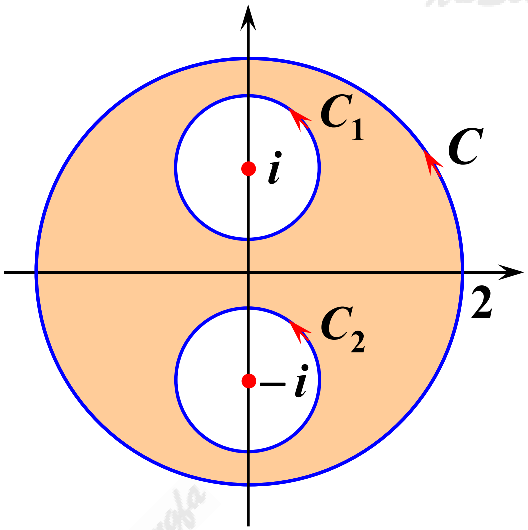
如图，作 C_1, C_2两个小圆，

则 $I=\oint_{C_1}f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2}f(z)\mathrm{d}z$ (复合闭路定理)

$$=\oint_{C_1}\boxed{\frac{\mathrm{e}^z}{(z+i)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^2}+\oint_{C_2}\boxed{\frac{\mathrm{e}^z}{(z-i)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{(z+i)^2}$$

$$\xlongequal{\text{记为}} I_1+I_2.$$

例 计算 $I=\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz$.



解 (2) $I_1=\oint_{C_1}\boxed{\frac{e^z}{(z+i)^2}}\cdot\frac{dz}{(z-i)^2}$

$$\underline{\underline{(\text{高阶导数公式})}}\ \frac{2\pi i}{1!}\cdot\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}$$

$$=\frac{\pi}{2}(1-i)e^i.$$

同样可求得 $I_2=-\frac{\pi}{2}(1+i)e^{-i}$.

(3) $I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}[(1-i)e^i-(1+i)e^{-i}]=\sqrt{2}\pi i\sin(1-\frac{\pi}{4})$.

二、柯西不等式

定理 设函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内解析，且 $|f(z)|<M$，则

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{R^n}, \quad (n=1,2,\cdots). \qquad \text{(柯西不等式)}$$

证明 $\forall R_1: 0<R_1<R$，函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|\le R_1$ 上解析，

$$\Rightarrow f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z, \quad (n=1,2,\cdots).$$

$$\Rightarrow |f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R_1}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\mathrm{d}s \le \frac{n!M}{R_1^n},$$

令 $R_1\to R$，即得 $|f^{(n)}(z_0)| \le \dfrac{n!M}{R^n}, \quad (n=1,2,\cdots).$

三、刘维尔定理

定理 设函数 $f(z)$ 在全平面上解析且有界，则 $f(z)$ 为一常数。

证明 设 z_0 为平面上任意一点，

$\forall R>0$，函数 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 上解析，且 $|f(z)|<M$，

根据柯西不等式有 $|f'(z_0)|\le \dfrac{M}{R}$，

令 $R\to+\infty$，即得 $f'(z_0)=0$，

由 z_0 的任意性，知在全平面上有 $f'(z)\equiv 0$，

则 $f(z)$ 为一常数。

休息一下 ……

附：高阶导数定理的证明

定理 如果函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，则 $f(z)$ 的各阶导数均在 D 上解析，且

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,\ (z_0\in D).$$

证明 由函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}=D+C$ 上连续，有

$|f(z)|$ 在 $\overline{D}=D+C$ 上有界，即 $|f(z)|\le M$.

设边界 C 的长度为 L。

(1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$.

附：高阶导数定理的证明

证明 (1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$.

根据柯西积分公式有 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$,

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i\Delta z}\oint_C f(z)\left(\frac{1}{z-z_0-\Delta z}-\frac{1}{z-z_0}\right)\mathrm{d}z$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\mathrm{d}z,$$

附：高阶导数定理的证明

证明 (1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$.

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)}\mathrm{d}z,$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}-\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z$$

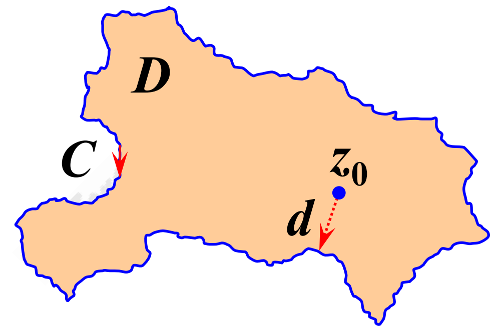
$$=\frac{\Delta z}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\mathrm{d}z \xlongequal{\text{记为}} I.$$

- 下面需要证明：当 $\Delta z\to 0$ 时，$I\to 0$.

附：高阶导数定理的证明

证明 (1) 先证 $n=1$ 的情形，即证 $f'(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$

$$I=\frac{\Delta z}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-\Delta z)(z-z_0)^2}\mathrm{d}z.$$



如图，设 d 为 z_0 到 C 的最短距离，

即 $|z-z_0|\geq d,$

取 Δz 适当小，使其满足 $|\Delta z|<\dfrac{d}{2}$，则

$$|z-z_0-\Delta z|\geq|z-z_0|-|\Delta z|>\frac{d}{2},$$

即得 $|I|\leq\dfrac{|\Delta z|}{2\pi}\cdot\dfrac{2}{d}\cdot\dfrac{1}{d^2}\cdot ML\rightarrow 0,\ (\Delta z\rightarrow 0),$

附：高阶导数定理的证明

证明 (2) 对于 $n=2$ 的情形

由于前面已经证明了解析函数的导数仍是解析函数，因此将 $f'(z)$ 作为新的函数，用同样的方法求极限：

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f'(z_0+\Delta z)-f'(z_0)}{\Delta z},$$

即可得 $f''(z_0)=\dfrac{2!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}\mathrm{d}z.$

(3) 依此类推，则可以证明

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z,\ (z_0\in D).$$

(返回)