§4.3幂级数的性质

一、收敛半径的求法

二、幂级数的性质

一、求收敛半径的方法

对于幂级数 $\sum a_n z^n$，有

(1) 比值法　如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lambda$，则收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\lambda}$.

(2) 根值法　如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\rho$，则收敛半径为 $R=\dfrac{1}{\rho}$.

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径与收敛圆。

解 由 $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$，得

收敛半径为 $R=1$，收敛圆为 $|z|<1$.

例 求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n^2}(z-1)^n$ 的收敛半径与收敛圆。

解 由于 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}$

$$=\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e},$$

故级数的收敛半径为 $R=\frac{1}{\mathrm{e}}$，收敛圆为 $|z-1|<\frac{1}{\mathrm{e}}$.

二、幂级数的性质

1. 幂级数的运算性质 P86

性质 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n,\ |z|<r_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n,\ |z|<r_2,$

令 $r=\min(r_1,r_2)$，则在 $|z|<r$ 内有

$$f(z)\pm g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\pm\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\pm b_n)z^n;$$

$$f(z)g(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\Big)z^n$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)z^n.$$

三、幂级数的性质

2. 幂级数的分析性质 P87

性质 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n$，$|z-z_0|<R$，则

(1) 函数 $f(z)$ 在收敛圆 $|z-z_0|<R$ 内解析。

(2) 函数 $f(z)$ 的导数可由其幂函数逐项求导得到，即

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

(3) 在收敛圆内可以逐项积分，即

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}.$$

三、幂级数的性质

3. 幂级数的代换(复合)性质

性质　设级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 在 $|z|<R$ 内收敛，和函数为 $f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$，

又设函数 $g(z)$ 在 $|z|<r$ 内解析，且满足 $|g(z)|<R$，则

当 $|z|<r$ 时，有 $f[g(z)]=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n [g(z)]^n$.

- 在把函数展开成幂级数时，上述三类性质有着重要的作用。

例 把函数 $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 表示成形如 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ 的幂级数。

解 方法一　利用乘法运算性质

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\frac{1}{1-z}\cdot\frac{1}{1-z}=(1+z+z^2+\cdots)(1+z+z^2+\cdots)$$

$$=1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots,\quad |z|<1.$$

方法二　利用逐项求导性质

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=(1+z+z^2+\cdots)'$$

$$=1+2z+3z^2+\cdots+(n+1)z^n+\cdots,\quad |z|<1.$$

轻松一下吧 ……