§ 5.2 留数

1. 留数的定义及留数定理

定义5.3 设 z_0 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内展开成洛朗级数：

$$f(z) = \ldots + c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{-1}$$

$$+ c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \quad 0<|z-z_0|<R$$

两端沿C逐项积分: $\oint_C f(z)dz = c_{-1}\oint_C (z-z_0)^{-1}dz = 2\pi i c_{-1}$

其中，C 是 z_0 的去心邻域内绕 z_0 的一条简单闭曲线。

即 c_{-1} 是积分过程中唯一残留下来的Laurent系数。

称 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 处的留数，记作：

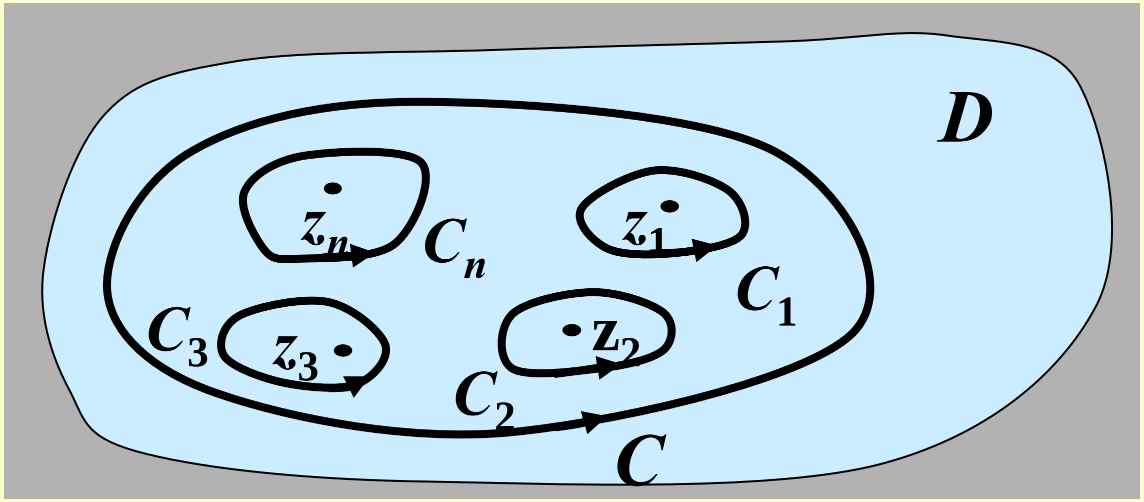
$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z,$$

定理5.3(留数定理) 设函数$f(z)$在区域D内除有限个孤立奇点z_1, z_2, ..., z_n外处处解析. C是D内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线,

则 $$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

证: 把在C内的孤立奇点$z_k(k=1,2,...,n)$用互不包含的正向简单闭曲线C_k围绕起来, 则根据复合闭路定理有

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\cdots+\oint_{C_n} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s[f(z), z_k]$$



由定义知函数在孤立奇点z_0处的留数，就是它在洛朗级数中$(z-z_0)^{-1}$项的系数c_{-1}.

但如果知道奇点的类型,对求留数可能更有利.

如果z_0是$f(z)$的可去奇点,则$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=0$.

如果z_0是本性奇点,则只好将其按洛朗级数展开.

如果z_0是极点,则有一些对求c_{-1}有用的规则.

2. 留数的计算规则

法则1 如果z_0为$f(z)$的一阶极点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

法则2 如果 z_0为$f(z)$的m阶极点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$$

事实上, 由于

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\ldots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+\ldots,$$

$$(z-z_0)^m f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+c_0(z-z_0)^m+\ldots,$$

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}=(m-1)!c_{-1}+a(z-z_0)+\cdots$$

令两端 $z\to z_0$, 同除$(m-1)!$即得法则2, 当 $m=1$时就是法则1。

法则3 若 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$， $Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq 0$, $P(z_0)\neq 0$,

且 $P(z),Q(z)$ 在 z_0 点解析，则 z_0 是 $f(z)$ 的简单极点，

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

事实上，因为 $Q(z_0)=0$ 及 $Q'(z_0)\neq 0$，所以 z_0 为 $Q(z)$的一级零点，从而 z_0 为$1/Q(z)$的一阶极点. 且 $\boldsymbol{P}(z_0)\neq 0$. 故 z_0 为 $f(z)$的一阶极点.

根据法则 1,$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$,**而** $Q(z_0)=0$.

所以 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{P(z)}{\dfrac{Q(z)-Q(z_0)}{z-z_0}}=\dfrac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$,

即得 法则3。

例 1 计算积分$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz$, C 为正向圆周$|z|=2$.

解：由于$f(z)=\frac{ze^z}{z^2-1}$有两个一阶极点+1,–1，而这两个

极点都在圆周$|z|=2$ 内，所以

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz = 2\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),-1]\},$$

由法则1, 得 $\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{ze^z}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{ze^z}{z+1}=\frac{e}{2}$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{ze^z}{z^2-1}=\lim_{z\to -1}\frac{ze^z}{z-1}=\frac{e^{-1}}{2}.$$

因此 $\oint_C \frac{ze^z}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\frac{e}{2}+\frac{e^{-1}}{2}\right)=2\pi i\,\mathrm{ch}1$

我们也可以用法则3来求留数：$\mathrm{Res}[f(z),1]=\left.\frac{ze^z}{2z}\right|_{z=1}=\frac{e}{2};$

$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\left.\frac{ze^z}{2z}\right|_{z=-1}=\frac{e^{-1}}{2}.$$

这比用法则1要简单些.

例 2 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z(z-1)^2} dz$, C **为正向圆周** $|z|=2$.

解:　　$z=0$ 为被积函数的一阶极点, $z=1$ 为二阶极点, 而

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0} z\cdot\frac{e^z}{z(z-1)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1.$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z-1)^2\frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0.$$

所以 $\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^3}\mathrm{d}z=2\pi i\{\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]\}$

$$=2\pi i(1+0)=2\pi i.$$

例 3　计算　$I=\oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-e^{z})^{3}}dz$

解:　　在 $|z|=1$ 内：$z=0$为一阶极点。

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z\sin z}{(1-e^{z})^{3}},0\right]=\lim_{z\to 0}\frac{z^{2}\sin z}{(1-e^{z})^{3}}=\lim_{z\to 0}\frac{z^{3}}{(1-e^{z})^{3}}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=(-1)^{3}=-1$$

$$\Rightarrow I=-2\pi i$$

例 4　计算积分$\oint_{C}\frac{1}{z^{101}\left(1-z^{2}\right)}dz$, C 为正向圆周$|z|=1/2$.

解: 令 $f(z)=\frac{1}{z^{101}(1-z^{2})}$， $z=0$ 为$f(z)$的 101 阶极点。

$$f(z)=\frac{1}{z^{101}}\sum_{n=0}^{+\infty}z^{2n}=\frac{1}{z^{101}}+\frac{1}{z^{99}}+\cdots+\frac{1}{z}+z+z^{2}+\cdots,0<|z|<1$$

$\Rightarrow$　$\mathrm{Res}[f(z),0]=1$，所以 原式$=2\pi i$

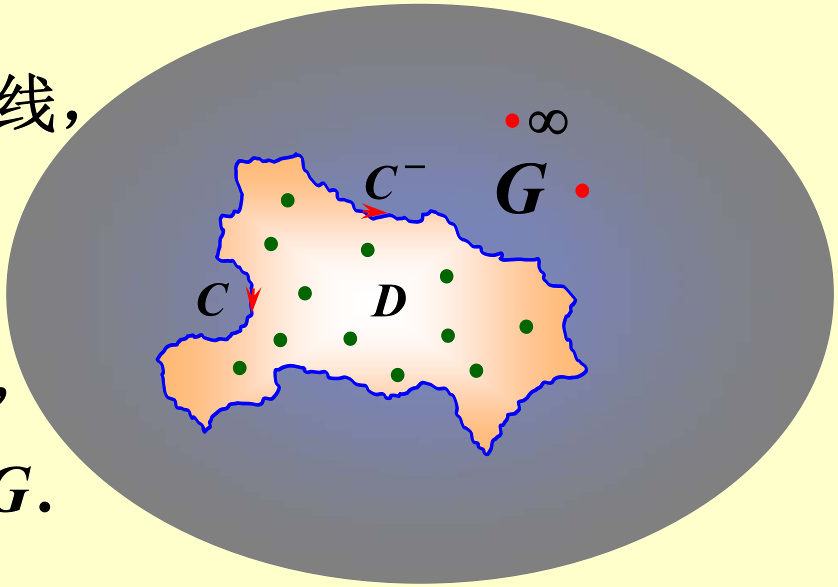
3.在无穷远点的留数

- 一般说来，闭路积分只与该闭路所包围的区域内的奇点有关，但为什么又要引入无穷远点的留数呢？

设想

- 如图，设 C 是一条简单闭曲线，

  则 $\oint_C f(z)dz = -\oint_{C^-} f(z)dz$



- 将曲线 C 围成的区域记为 D，

  而曲线 C^- 围成的区域记为 G.

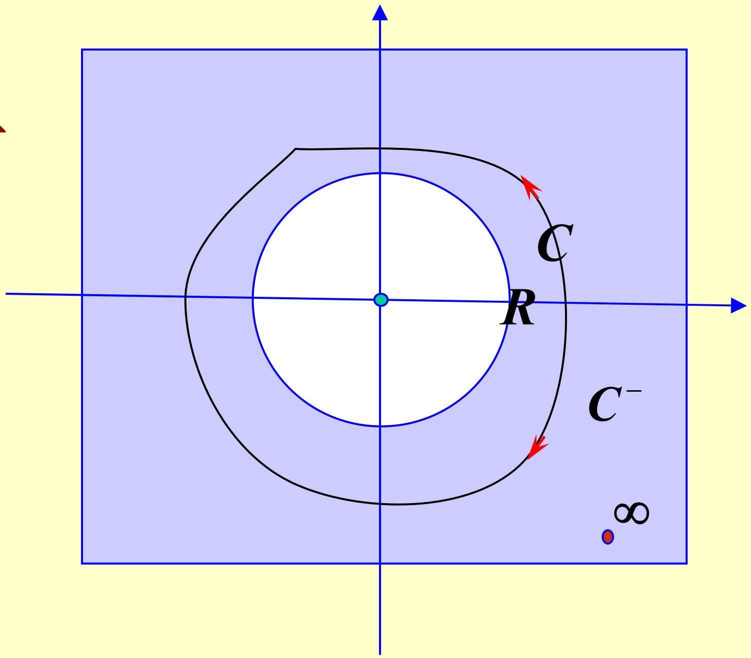
- 如果区域 D 内的奇点很多，但区域 G 内的奇点很少，甚至只有无穷远点 ∞ 为奇点，则沿 C^- 上的积分显然要比沿 C 上的积分简便得多。

定义5. 4:　设函数 $f(z)$在圆环域 $R<|z|<\infty$内解析, C为内绕原点的任何一条简单闭曲线，则积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,dz$$

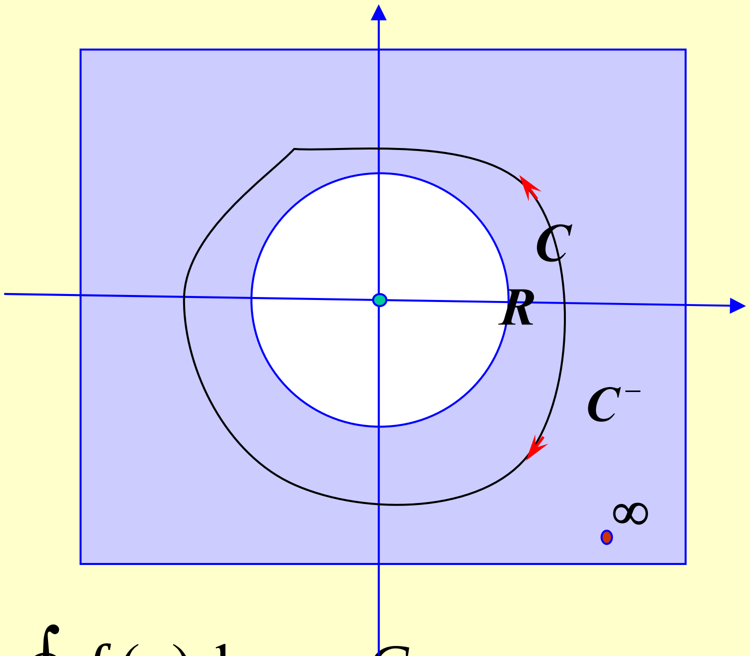
为$f(z)$在∞点的留数,

记作 $$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,dz$$



C^- 理解为圆环域内绕 ∞的任何一条简单闭曲线。

$f(z)$在圆环域 $R<|z|<\infty$内解析:



$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \Rightarrow$$

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C} f(z)\,\mathrm{d}z=-C_{-1}$$

这就是说,$f(z)$在∞点的留数等于它在∞点的去心邻域 $R<|z|<+\infty$内洛朗展开式中 z^{-1}的系数变号.

注：当∞为可去奇点时，$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$不一定为零.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$，∞为可去奇点。

$f(z)$在$1<|z|<+\infty$内展开为Lauren级数：

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)=-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}[f(z),\infty]=-C_{-1}=1$$

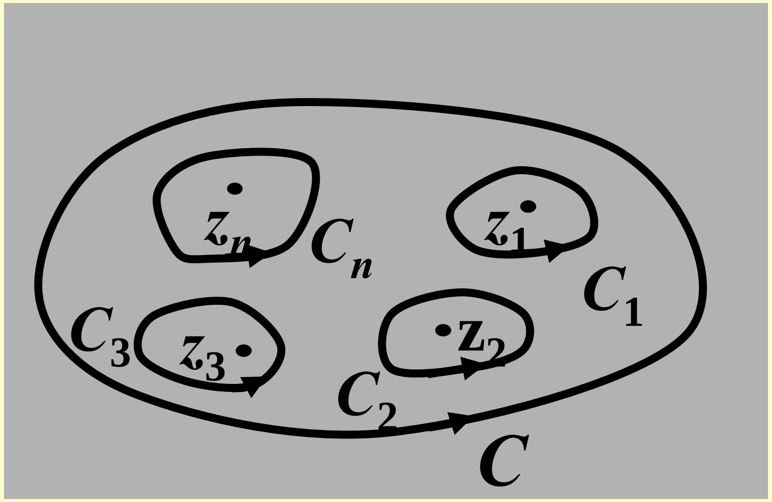
定理5.4 如果$f(z)$在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，那末$f(z)$在所有各奇点(包括∞点)的留数总和必等于零.

证：除∞点外，设$f(z)$的有限个奇点为$z_k(k=1,2,\ldots,n)$.

且C为一条绕原点的并将$z_k(k=1,2,\ldots,n)$包含在它内部的正向简单闭曲线，则根据留数定理与在无穷远点的留数定义，有

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z+\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$



那么 $$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]=-\operatorname{Res}[f(z),\infty]$$

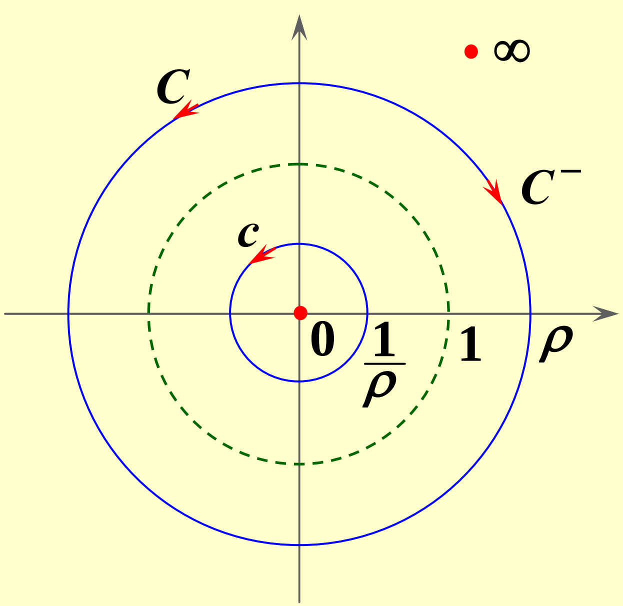
法则 4 $\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\bullet\frac{1}{z^2},0\right]$.

事实上,在无穷远点的留数定义中,取正向简单闭曲线C为半径足够大的正向圆周: $|z|=\rho$。令 $z=\frac{1}{\zeta}$, 并设 $z=\rho e^{i\theta}$, $\zeta=re^{i\varphi}$,那末 $\rho=\frac{1}{r}, \theta=-\varphi, d\theta=-d\varphi$,于是有 $dz=-d\zeta/\zeta^2$

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z,$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}f\left(\frac{1}{\xi}\right)\cdot\frac{1}{\xi^2}\mathrm{d}\xi$$

$$=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2},0\right].$$



定理5.4与法则4为我们提供了计算函数沿闭曲线积分的又一种方法，在满足条件情况下，这种方法有时会更简便.

例 5 计算 $\mathrm{I}=\oint_{|z|=4} \frac{z^{15}}{(z^4+2)^3(z^2+1)^2} dz$

[解] $f(z)$在$|z|=4$ 的外部除∞外无奇点,

$|z|<4$内有6个极点：$\pm i$(二阶)，$\sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$(三阶)

$$I=-\operatorname{Re}s[f(z),\infty]=2\pi i\operatorname{Re}s[f(\frac{1}{z})\frac{1}{z^2},0]$$

$$=2\pi i\operatorname{Re}s[\frac{1}{z(1+2z^4)^3(1+z^2)^2},0]=2\pi i.$$

例 6:计算积分$\oint_C \frac{z}{z^4-1}dz$, C **为正向圆周**:$|z|=2$.

[解] $\frac{z}{z^4-1}$**在**$|z|=2$ **的外部除**∞**外无奇点,在曲线内部有四个简单极点。**由于

$$\frac{1}{z^2}f(\frac{1}{z})=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{z^{-1}}{z^{-4}-1}=\frac{z^{-3}}{z^{-4}-1}=\frac{z}{1-z^4}$$

则有

$$\oint_C \frac{z}{z^4-1}\mathrm{d}z=-2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f(z),\infty\right]=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{z}{1-z^4},0\right]=0$$