§2.2 解析函数与调和函数的关系

解析函数有一些重要性质，且与调和函数有关，在理论及实际中均有重要应用.

定义 2.3 如果二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数且满足拉普拉斯(Laplace)方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

则称 $\varphi=\varphi(x,y)$为区域D内的调和函数，或称函数$\varphi(x,y)$在区域 D 内调和.

定理 2.3 如果 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则 u,v 在 D 内都是调和函数.

证：

定理 2.3

证：（结论：解析函数的导数仍为解析函数，待证．）

设 $w=f(z)=u+iv$ 解析，

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$，

返 回

例 2.8

解：$u_x = 2x + 2y$，$u_{xx} = 2$，$u_y = 2x - 2y$，$u_{yy} = -2$．

所以 $u_{xx} + u_{yy} = 0$．故 u 为调和函数.

设 u 的共轭调和函数为 $v(x,y)$，则

$u_x = v_y, u_y = -v_x$．所以 $v_y = 2x + 2y$，则

$$v = \int (2x + 2y)dy = 2xy + y^2 + g(x),$$

返 回

例 2.9

解： 容易证明 u 是全平面上的调和函数. 利用 $C-R$ 条件，先求出 v 的两个偏导数.

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2y-x,\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y\ ,$$

则

$$v(x,y)=\int^{(x,y)}(2y-x)\ dx+(2x+y)dy+c$$

返 回