第六章　共形映射

§6.1 共形映射的概念

- 本章将从几何的角度来研究复变函数，特别是要弄清楚解析函数的几何映射特征。

- 具体地说，z 平面上的曲线或者区域经映射 $w = f(z)$ 后，在 w 平面上的像到底发生了什么变化？

- 本小节将首先给出两个指标(即伸缩率与旋转角)来定量地刻画这种变化，然后指出导数的几何意义，最后提出共形映射的概念。

§6.1 共形映射的概念

一、伸缩率与旋转角

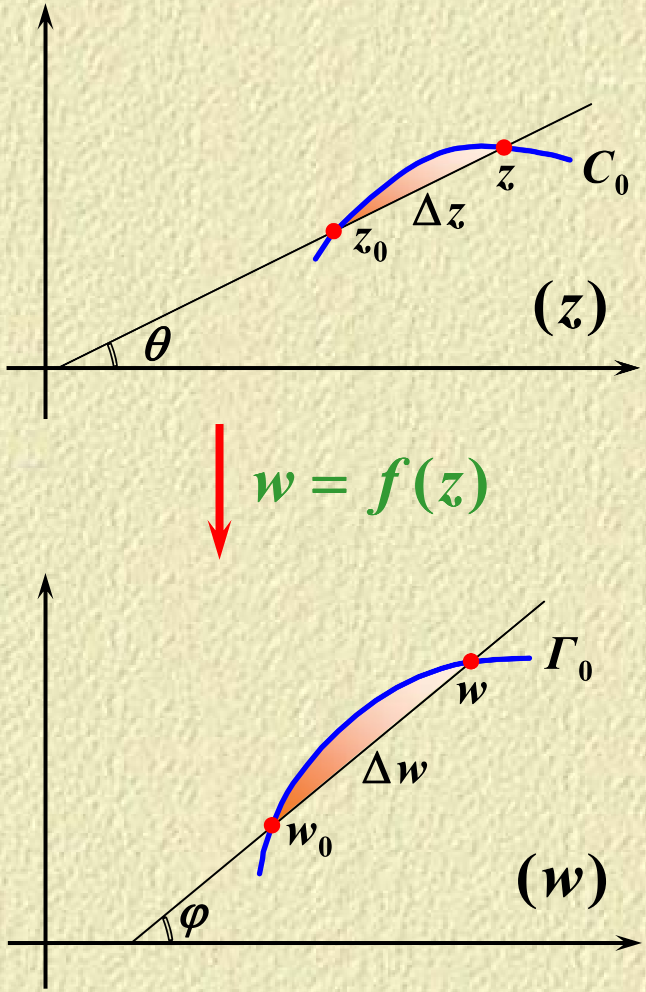
二、导数的几何意义

三、共形映射

上页 下页 返回

一、伸缩率与旋转角

- 如图，过 z_0 点的曲线 C_0 经 $w=f(z)$ 映射后，变成了过 w_0 点的曲线 Γ_0. 可以看出，曲线被伸缩和旋转。



1. 伸缩率

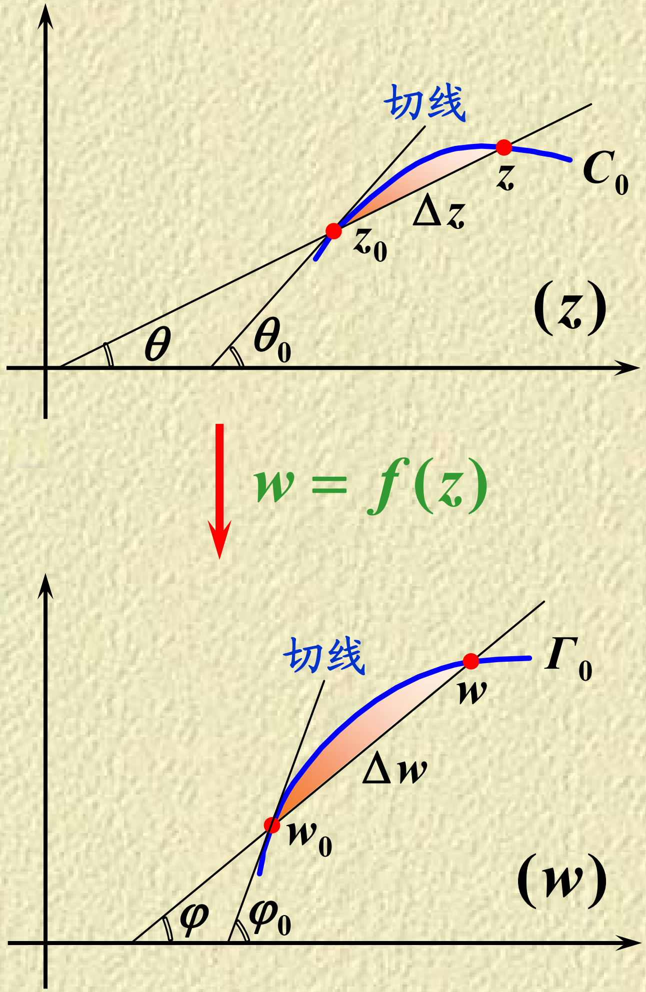
定义 称 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ C_0}}\dfrac{|w-w_0|}{|z-z_0|}=\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ C_0}}\dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$

为曲线 C_0 经 $w=f(z)$ 映射后在 z_0 点的伸缩率。

上页 下页 返回

一、伸缩率与旋转角

- 如图，过 z_0 点的曲线 C_0 经 $w=f(z)$ 映射后，变成了过 w_0 点的曲线 Γ_0. 可以看出，曲线被伸缩和旋转。



2. 旋转角

定义 称 $\lim\limits_{\substack{z\to z_0\\ C_0}}(\varphi-\theta)=\varphi_0-\theta_0$

为曲线 C_0 经 $w=f(z)$ 映射后

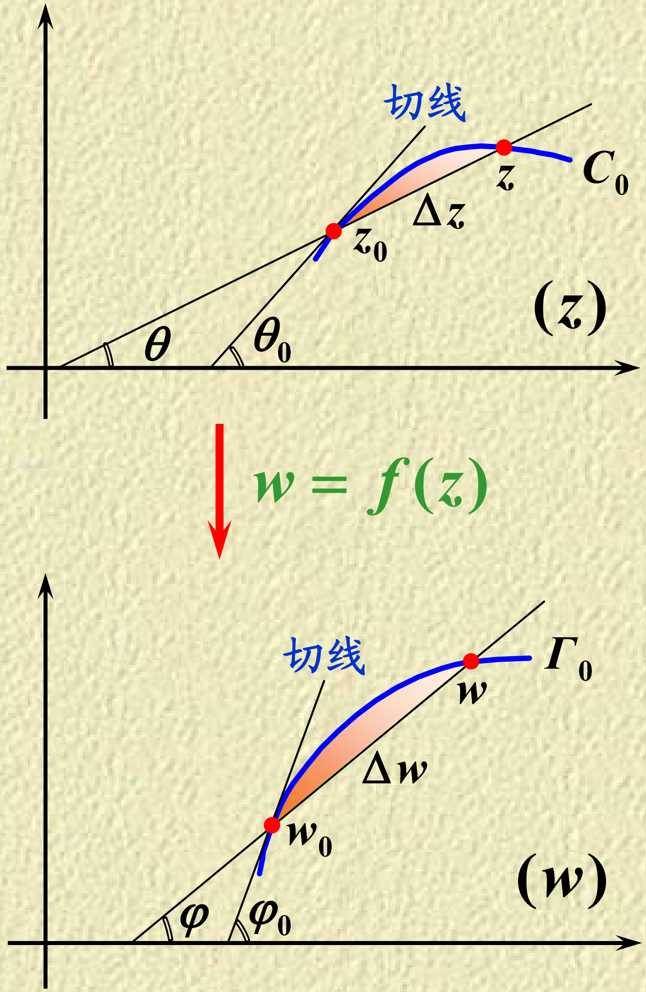
在 z_0 点的旋转角。

- 这两个指标定量地刻画了曲线经映射后的局部变化特征。

二、导数的几何意义

- 设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析，

$z_0 \in D$, 且 $f'(z_0) \neq 0$.



分析 $$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ C_0}} \frac{\Delta w}{\Delta z},$$

由 $\Delta w = |\Delta w| e^{i\varphi}$, $\Delta z = |\Delta z| e^{i\theta}$, 有

$$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ C_0}} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} e^{i(\varphi - \theta)},$$

$$= \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ C_0}} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \cdot e^{i(\varphi_0 - \theta_0)},$$

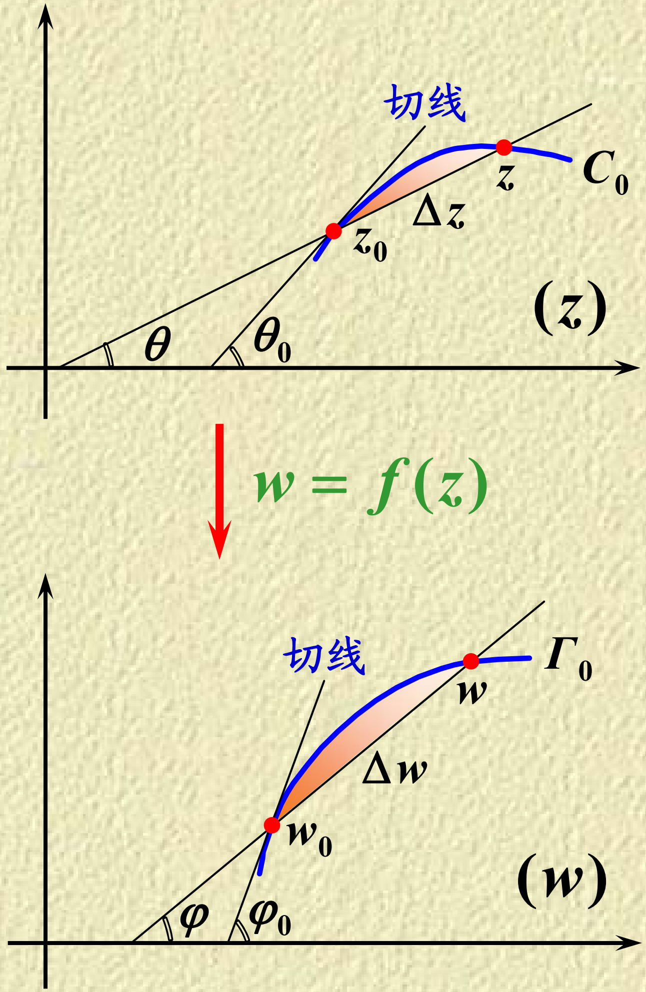
二、导数的几何意义

- 设函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析，

$z_0 \in D$，且 $f'(z_0) \neq 0$.

分析 $$f'(z_0) = \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ C_0}} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \cdot e^{i(\varphi_0 - \theta_0)},$$

$$= |f'(z_0)| \cdot e^{i \arg f'(z_0)}.$$



1. 导数的几何意义

$|f'(z_0)|$ 与曲线无关 在 z_0 点的伸缩率。

$\arg f'(z_0)$ 与曲线无关 在 z_0 点的旋转角。

上页 下页 返回

二、导数的几何意义

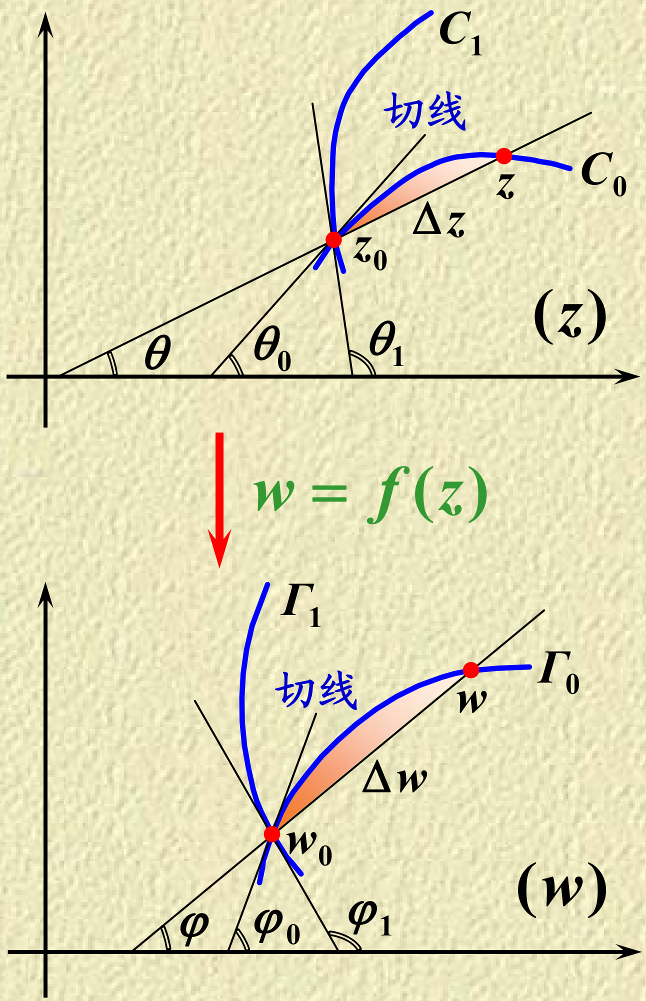
2. 伸缩率不变性

任何一条经过 z_0 点的曲线的伸缩率均为 $|f'(z_0)|$.

3. 旋转角不变性

任何一条经过 z_0 点的曲线的旋转角均为 $\arg f'(z_0)$. 即

$$\arg f'(z_0) = \varphi_0 - \theta_0 = \varphi_1 - \theta_1,$$



上页 下页 返回

二、导数的几何意义

2. 伸缩率不变性

任何一条经过 z_0 点的曲线的伸缩率均为 $|f'(z_0)|$.

3. 旋转角不变性

任何一条经过 z_0 点的曲线的旋转角均为 $\arg f'(z_0)$. 即

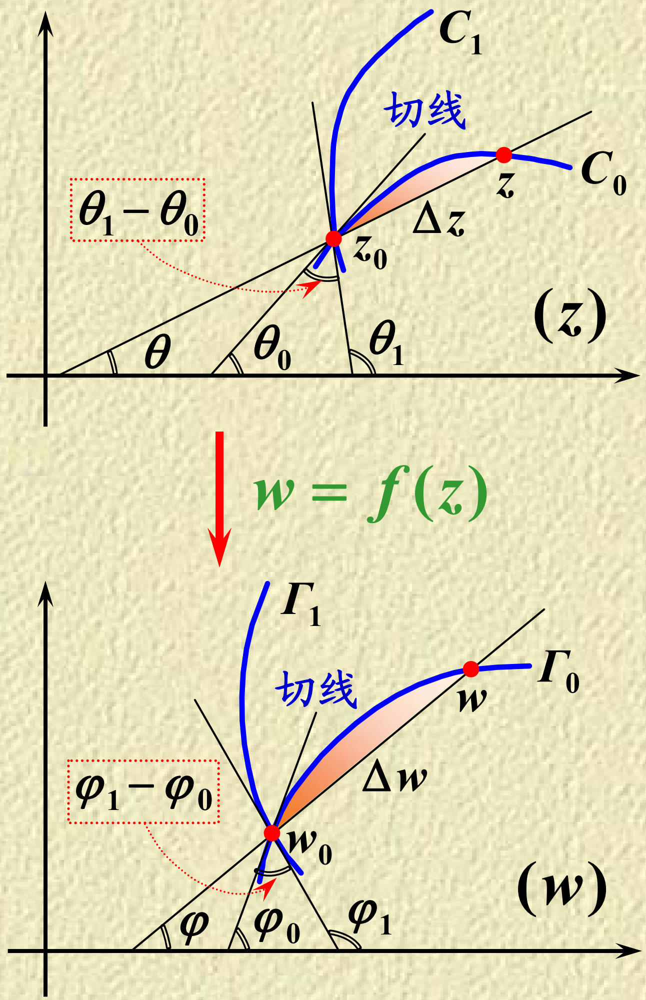
4. 保角性

(保大小, 保方向)

由 $\arg f'(z_0) = \varphi_0 - \theta_0 = \varphi_1 - \theta_1$,

$$\Rightarrow \quad \varphi_1 - \varphi_0 = \theta_1 - \theta_0.$$

即 $w = f(z)$ 保持了两条曲线的交角的大小与方向不变。



上页 下页 返回

三、共形映射

1. 第一类保角映射

定义 若函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内满足:

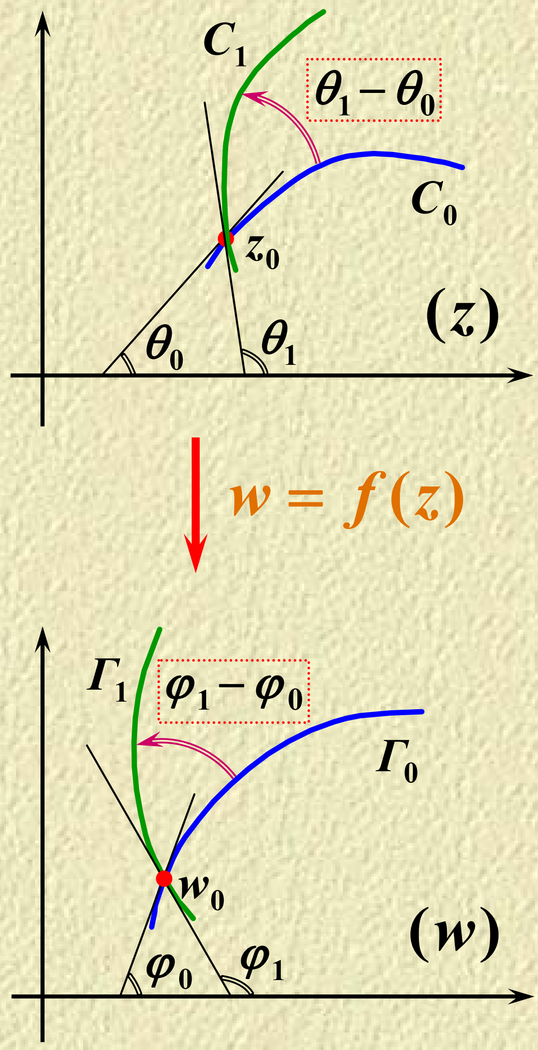
P138 定义 6.1

(1) 保角性, (保大小, 保方向);

(2) 伸缩率不变性,

则称函数 $w = f(z)$ 为区域 D 内的

第一类保角映射。



结论 若函数 $w = f(z)$ 在区域 D 内解析,

P138 定理 6.1

且 $f'(z) \neq 0$, 则函数 $w = f(z)$ 为

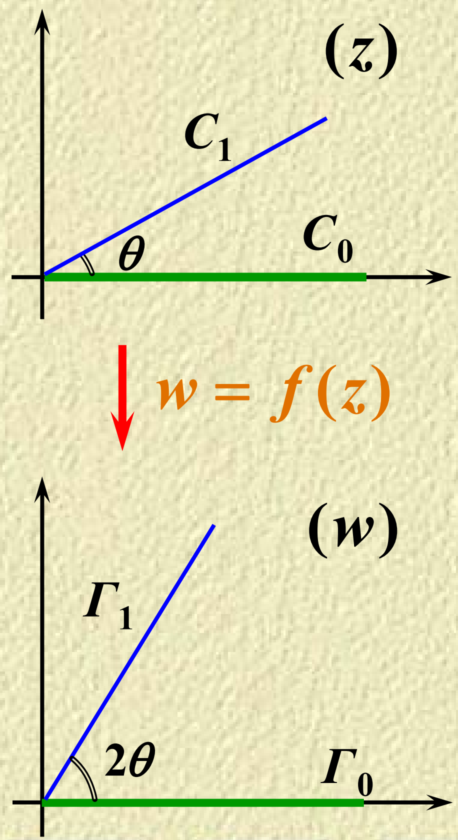
区域 D 内的第一类保角映射。

例 求函数 $w=f(z)=z^2$ 在 $z_1=i$ 和 $z_2=0$ 处的导数值，并说明其几何意义。P137 例6.1

解 函数 $f(z)$ 在复平面上处处解析，且 $f'(z)=2z$.

(1) 在 $z_1=i$ 点，$f'(i)=2i=2e^{\frac{\pi}{2}i}$，

因此，函数 $w=f(z)$ 在 $z_1=i$ 处的伸缩率不变，且具有保角性，其伸缩率为 2，旋转角为 $\pi/2$.



(2) 在 $z_2=0$ 点，$f'(0)=0$，

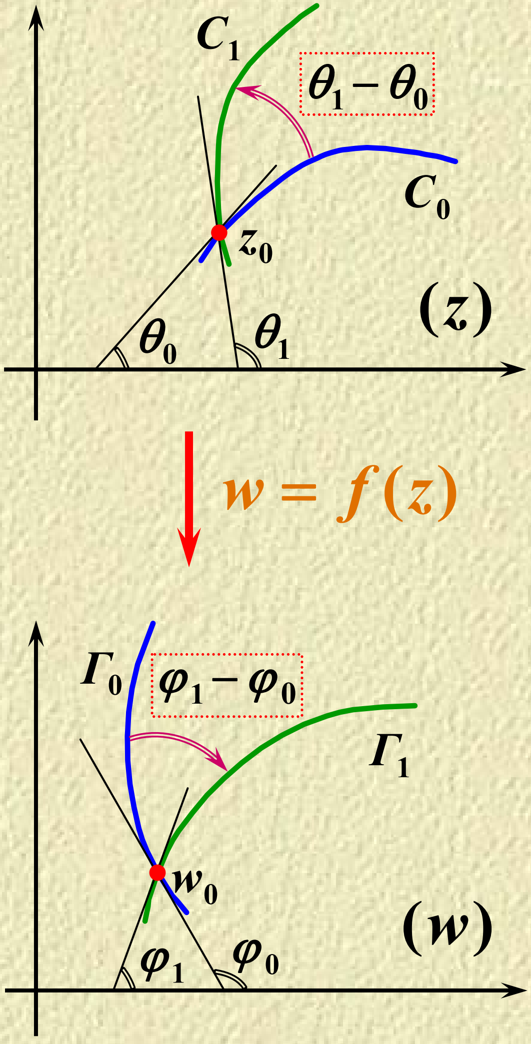
因此，函数的保角性不成立。

上页 下页 返回

三、共形映射

1. 第一类保角映射 (1) 保角性，(保大小，保方向)；(2) 伸缩率不变性，

2. 第二类保角映射



定义 若函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内满足：

P138 定义 6.1

(1) 能保持两条曲线的交角的大小不变，但方向相反；

(2) 伸缩率不变性，

则称函数 $w=f(z)$ 为区域 D 内的<u>第二类保角映射</u>。

例 函数 $w=\bar{z}$ 在复平面上是第二类保角映射。

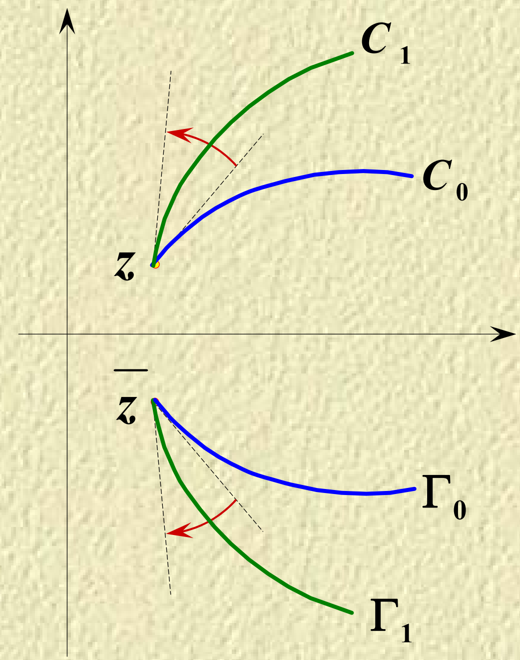
上页 下页 返回

例 函数 $w=\overline{z}$ 在复平面上是第二类保角映射。

解 (1) 首先考察一下它的<u>伸缩率</u>。

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\overline{\Delta z}|}{|\Delta z|}=1,$$

- 因此，它<u>具有伸缩率不变性</u>。



(2) 其次考察一下它的<u>保角性</u>。

- 该函数能保持两条曲线的交角的<u>大小不变</u>，但<u>方向相反</u>。

(3) 由此可见，函数 $w=\overline{z}$ 是<u>第二类保角映射</u>。

三、共形映射

1. 第一类保角映射 (1) 保角性，(保大小，保方向)；
(2) 伸缩率不变性，

2. 第二类保角映射

3. 共形映射

定义　若函数 $w = f(z)$ 为区域 D 内的第一类保角映射，且当 $z_1 \neq z_2$ 时，$f(z_1) \neq f(z_2)$，则称 $w = f(z)$ 为区域 D 内的共形映射。

P138 定义 6.2

关键　要求函数还必须是一一映射(即双方单值)。

$$\underset{f'(z)\neq 0,}{\text{解析}} + \text{一一映射} \longrightarrow \text{共形映射}$$

上页　下页　返回

例 求函数$w=\mathrm{e}^z$是否为共形映射？ P139 例6.3

解 (1) 由于 $w=\mathrm{e}^z$ 在复平面上处处解析，且 $(\mathrm{e}^z)'=\mathrm{e}^z\neq 0$,

因此，它在整个复平面上是第一类保角映射。

(2) 取 $z_1=\pi i$, $z_2=3\pi i$, 则有 $\mathrm{e}^{z_1}=\mathrm{e}^{z_2}=-1$,

可见，它不是双方单值的,

因此，在整个复平面上，它不是共形映射。

(3) 如果仅考虑区域 $D=\{z:0<\mathrm{Im}z<2\pi\}$,

则它在区域 D 内是双方单值的,

因此，在区域 D 内，它是共形映射。