第二章　解析函数

把复变函数 $f(z)$ 理解为二个二元实函数的观点，可使我们利用对二元实函数的认识来认识复变函数，但它们又有本质的区别. 解析函数是复变函数研究的主要对象，在理论与实际中都有着广泛的应用.

§2.1 解析函数的概念

§2.1.1 复变函数的导数

1) 导数的定义

定义 2.1 设 $w=f(z)$ 定义于区域 D, $z_0, z_0+\Delta z \in D$,

如果 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在，则称 $f(z)$ 在 z_0

例 2.2

证：对任意给定的 z，其差商

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$=\frac{\overline{(z+\Delta z)}-\bar{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$；

返 回

§2.1.2 解析函数的概念

定义2.2

1） 若$f(z)$在z_0及z_0的邻域内处处可导，则称$f(z)$在z_0解析.

2） 若$f(z)$在区域D内每一点解析，则称$f(z)$在区域D内解析或称$f(z)$是区域D内的一个解析函数.

3) 若$f(z)$在z_0处不解析，则称z_0为$f(z)$的奇点.

由定义知，解析比可导的要求高，函数在区域内解析与在区域内可导是等价的. 但是：函数在一点处解析和可导是不等价的，即函数在一点可导不一定在该点解析.

例 2.3

解：因

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z}_0}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}),$$

返 回

例 2.4

解： 因为 w 在全平面除点 $z_0=0$ 外处处可导，

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{1}{z^2}$$

所以，在除了 $z=0$ 的复平面上， $w=\dfrac{1}{z}$ 处处解析，

而 $z_0=0$ 是它的奇点.

§2.1.3 函数解析的充要条件

我们知道并不是每一个复变函数都是解析函数，判断一个函数是否为解析函数，若根据定义是比较烦琐的，有些则是比较困难的，因此我们需要找到简洁的方法，这就是本节要解决的问题.

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y),$$

柯西—黎曼条件（方程）（Cauchy-Riemann方程）：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (C-R \text{ 方程}).$$

定理 2.1 函数 $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z = x + iy$ 处可导的充要条件是：$u(x,y)$, $v(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，而且满足 $C-R$ 方程

定理 2.2

证：（先解释可微的含义，

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\rho(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\rho=0,$$

则称 $u(x,y)$ 可微. ）

必要性：因 $w=f(z)$ 在 D 内解析，即在 D 内任一点可导, 则

例 2.5

解：

1）因为$u=e^x\cos y$，$v=e^x\sin y$处处可微，又

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y,$$

返 回

例 2.7

解：因$|f(z)|^2=u^2+v^2=$常数，将此式两边对x,y求偏导得：

$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0，\quad u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

由$C-R$方程：

返 回