§ 6.3 分式线性映射

一、分式线性映射的一般形式

二、分式线性映射的分解

三、分式线性映射的特性

四、唯一决定分式线性映射的条件

五、两个典型区域间的映射

上页 下页 返回

一、分式线性映射的一般形式

定义　由分式线性函数

$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad（a,b,c,d\text{为复数且}\ \frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}）$$

构成的映射，称为**分式线性映射**；

特别地，若 $c=0$，则称为**(整式) 线性映射**。

注　(1) 两个分式线性映射的复合，仍是一个分式线性映射;

(2) 分式线性映射的逆映射也是一个分式线性映射:

$$z=-\frac{dw-b}{cw-a}.$$

上页　下页　返回

二、分式线性映射的分解

分析　将分式线性函数 $w=\dfrac{2z}{z+i}$ 分解:

$$w=\frac{2z}{z+i}=\frac{2z+2i-2i}{z+i}=2+\frac{-2i}{z+i}=2+2e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

其复合过程为:

$$z\xrightarrow{z+i}z_1\xrightarrow{\frac{1}{z_1}}z_2\xrightarrow{e^{-\frac{\pi}{2}i}z_2}z_3\xrightarrow{2z_3}z_4\xrightarrow{z_4+2}w$$

上页　下页　返回

二、分式线性映射的分解

分析 因此，一个一般形式的分式线性映射可以由下面四种最简单的分式线性映射复合而成。

(1) $w = z + b$,（b为复数）;

(2) $w = \mathrm{e}^{i\theta_0} z$,（$\theta_0$为实数）;

(3) $w = rz$,（r为正数）;

(1)–(3) 复合成(整式)线性映射。

(4) $w = \dfrac{1}{z}$.

(1)–(4) 复合成分式线性映射。

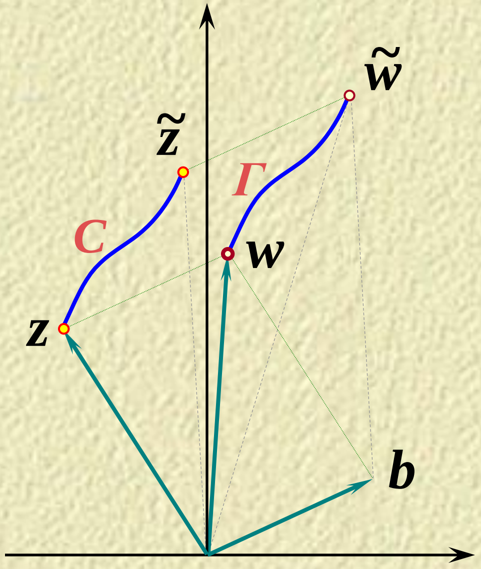
- 在后面的讨论中，有时会根据需要，只对(整式)线性映射和第(4)种映射分别进行讨论。

二、分式线性映射的分解

- 下面分别对四种映射进行讨论。为了比较映射前后的变化，将 w 平面与 z 平面放在同一个平面上。

1. 平移映射

$w = z + b$，（b为复数）



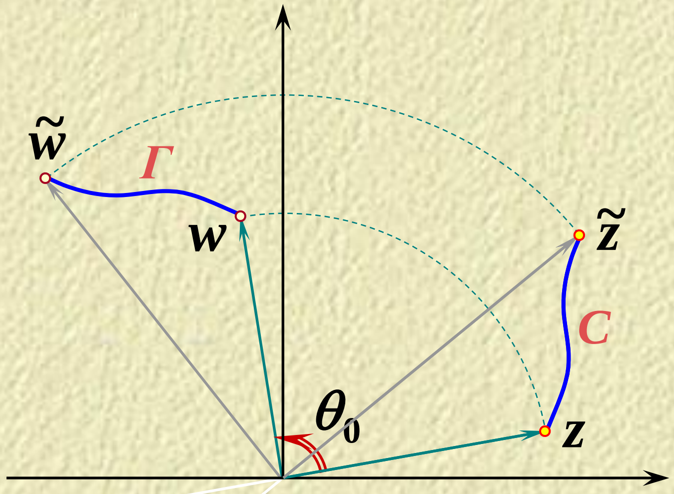
特点　平移映射将点集沿着向量 $\vec{b}$ 的方向平移一段距离 $|\vec{b}|$.

上页　下页　返回

二、分式线性映射的分解

2. 旋转映射

$$w = e^{i\theta_0} z, \ (\theta_0 \text{为实数})$$



分析 令 $z = |z| e^{i\theta}$,

则有 $w = |z| e^{i(\theta+\theta_0)}$.

特点 旋转映射将点集绕原点旋转一个角度 θ_0.

- 当 $\theta_0 > 0$ 时，沿逆时针旋转；

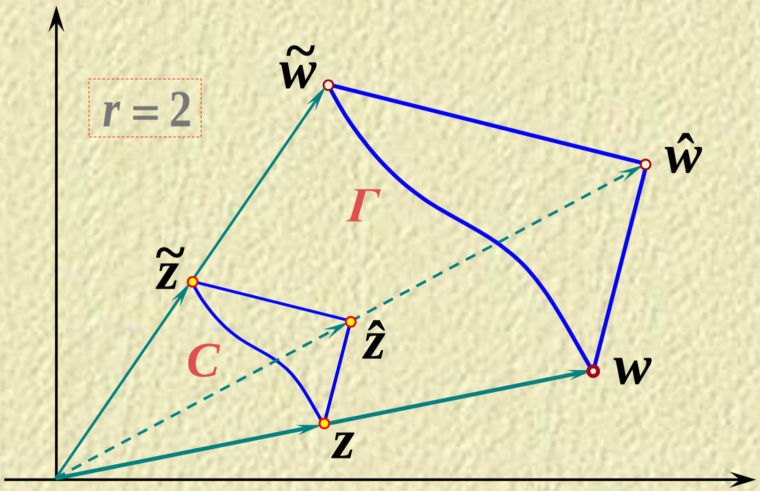
  当 $\theta_0 < 0$ 时，沿顺时针旋转。

上页 下页 返回

二、分式线性映射的分解

3. 相似映射

$w = rz$，（r为正数）



分析　令 $z = |z| e^{i\theta}$,

则有 $w = r|z| e^{i\theta}$.

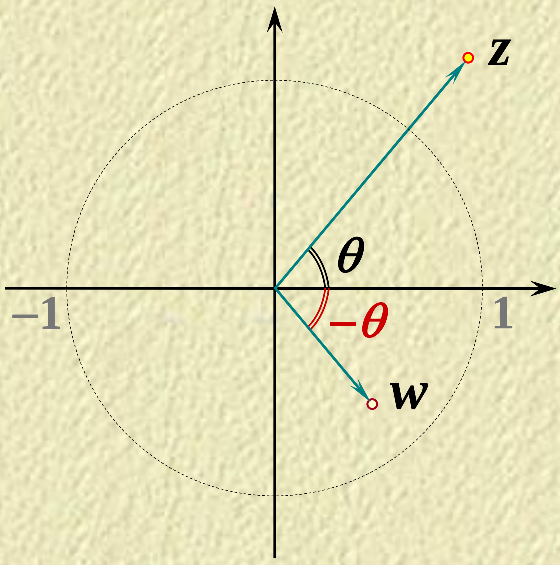
特点　相似映射保持点的辐角不变，但模扩大(或缩小)r 倍，因此，它将点集沿极径方向相似地扩大(或缩小)r 倍。

上页　下页　返回

二、分式线性映射的分解

4. 反演映射(或倒数映射)

$$w=\frac{1}{z}$$



分析　令 $z=|z|e^{i\theta}$,

则有 $w=\dfrac{1}{|z|}e^{i(-\theta)}$.

它们的模互为倒数，且辐角反号。

特点　倒数映射将单位圆内(外)的点映射到单位圆外(内)的点.

二、分式线性映射的分解

4. 反演映射(或倒数映射) $w=\dfrac{1}{z}$

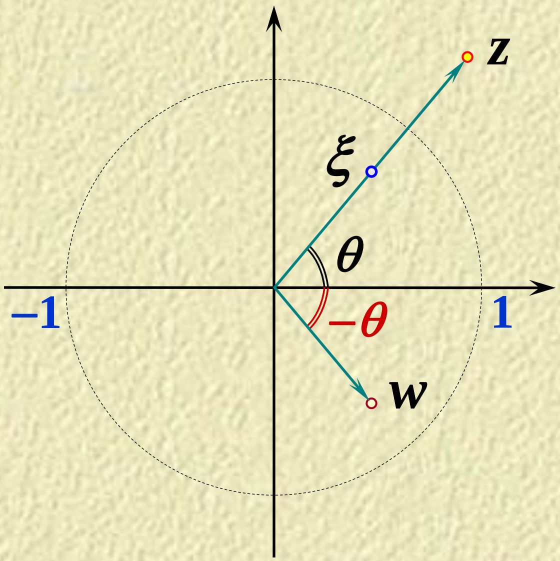
- 倒数映射通常还可以分解为下面的两个映射来完成:

(1) 将 z 映射为 ξ，满足:

$$|\xi|=\frac{1}{|z|},\quad \arg\xi=\arg z;$$

(2) 将 ξ 映射为 w，满足:

$$|w|=|\xi|,\quad \arg w=-\arg\xi.$$



如图: ξ 和 w 关于实轴对称映射 $w=\overline{\xi}$

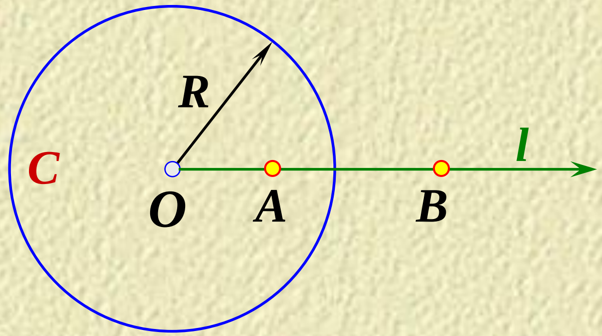
二、分式线性映射的分解

4. 反演映射(或倒数映射) $w=\dfrac{1}{z}$

- 圆周对称的概念

定义 如图，设圆周 C 的半径为 R，A,B 两点位于从圆心 O 出发的射线上，且 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=R^2$，则称 A 点和 B 点是关于圆周 C 对称的。

P146 定义 6.3

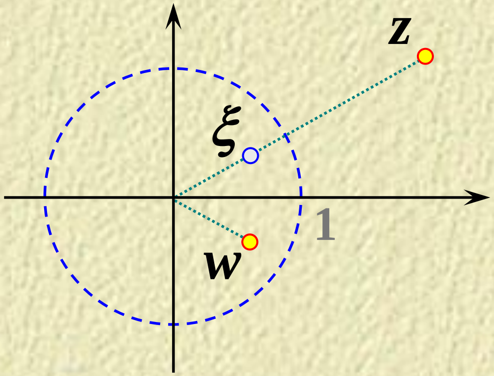


- 自然地，规定圆心 O 与无穷远点 ∞ 关于该圆周对称。

上页 下页 返回

二、分式线性映射的分解

4. 反演映射(或倒数映射) $w=\dfrac{1}{z}$



结论：z 和 ξ 关于单位圆周对称。

$w=\dfrac{1}{z}$ $\xleftarrow{\text{复合}}$ $\begin{cases} \xi=\dfrac{1}{\bar z}; & \text{(1)关于单位圆周的对称映射} \\ w=\bar{\xi}. & \text{(2)关于实轴的对称映射} \end{cases}$

注意 上述两个映射并不是解析的，因此它们不能单独地作为共形映射来使用。

三、分式线性映射的几种特性

1. 保形性

由于 分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$

- 可分解为线性映射和倒数映射的复合，

下面我们主要针对倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 的保形性进行分析。

倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 的保形性

分析 • 单值性

规定：当 $z=\infty$ 时，$w=0$;

当 $z=0$ 时，$w=\infty$.

由此，倒数映射在扩充复平面上是双方单值的。

上页 下页 返回

三、分式线性映射的几种特性

倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 的保形性

分析 • 解析性

(1) 当 $z\neq\infty$ 且 $z\neq 0$ 时，

函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 解析，且 $\dfrac{dw}{dz}=-\dfrac{1}{z^2}\neq 0.$

(2) 当 $z=\infty$ 时，

令 $\xi=\dfrac{1}{z}$，则 $w=\xi \overset{\text{记为}}{=\!=\!=} \varphi(\xi)$，

函数 $\varphi(\xi)$ 在 $\xi=0$ 处解析，且 $\varphi'(0)=1\neq 0.$

可知，$w=\dfrac{1}{z}$ 在扩充复平面上除 $z=0$ 外是共形映射。

上页 下页 返回

三、分式线性映射的几种特性

倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 的保形性

分析 可知， $w=\dfrac{1}{z}$ 在扩充复平面上除 $z=0$ 外是共形映射。

同理， $z=\dfrac{1}{w}$ 在 w 扩充复平面上除 $w=0$ 外是共形映射，

特别地， $z=\dfrac{1}{w}$ 在 $w=\infty$ 处是共形映射。

由此即得， $w=\dfrac{1}{z}$ 在 $z=0$ 处是共形映射。

结论 倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 在扩充复平面上是共形映射。

三、分式线性映射的几种特性

1. 保形性

类似分析可得：

结论 线性映射 $w = az + b$ 在扩充复平面上是共形映射。

- 综上所述，可得如下定理。

定理 分式线性映射 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ 在扩充复平面上是共形映射。

注 该定理不仅从理论上确保了分式线性映射是共形映射，而且其中的保角性在映射的构造与分析中非常实用。

三、分式线性映射的几种特性

2. 保圆性

(1)倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 的保圆性

分析 (1) 由 $w=\dfrac{1}{z}$，有 $z=\dfrac{1}{w}$

令 $z=x+iy$, $w=u+iv$,

则有 $x+iy=\dfrac{1}{u+iv}$

$$=\frac{u}{u^2+v^2}+i\frac{-v}{u^2+v^2},$$

$$\Rightarrow\quad x=\frac{u}{u^2+v^2},\quad y=\frac{-v}{u^2+v^2}. \qquad (A)$$

三、分式线性映射的几种特性

2. 保圆性

(1)倒数映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 的保圆性

分析 (1) $x=\dfrac{u}{u^2+v^2}$，$y=\dfrac{-v}{u^2+v^2}$. (A)

(2) 对于 z 平面上一个任意给定的圆：

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0,$$ （当 $a=0$ 时为直线），

将 (A) 式代入，即得到其像曲线的方程为：

$$d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0,$$ （当 $d=0$ 时为直线）。

结论 倒数映射将圆变成圆或直线，将直线变成圆或直线，

上页 下页 返回

三、分式线性映射的几种特性

2. 保圆性

(2)线性映射 $w = az + b,\ (a \neq 0)$ 的保圆性

- 由于线性映射可分解为平移映射、旋转映射和相似映射等三种映射的复合，因此显然有如下的结论。

结论 线性映射将圆变成圆，将直线变成直线。

约定 将直线看作是半径为无穷大的圆。

定理 在扩充复平面上，分式线性映射能把圆变成圆。

三、分式线性映射的几种特性

2. 保圆性

- 几点说明：

(1) 如果给定的圆(或直线)上没有点映射成无穷远点，则它就映射成半径有限的圆。

(2) 如果给定的圆(或直线)上有一点映射成无穷远点，则它就映射成直线。

(3) 对于圆弧段(或直线段)，如果其中一个端点映射成无穷远点，则它就映射成射线。

三、分式线性映射的几种特性

- 在分式线性映射下，求圆(或圆弧段)的像曲线的方法

方法 1　分解为四种简单映射的复合。

方法 2　利用保圆性，取三点定圆。

- 对于圆弧段(或直线段)，两个端点必须选定。

方法 3　综合利用保圆性与保角性。

(1) 找出原像曲线中的一些特殊点所对应的像点，从而能够大致地确定出像曲线的位置。

(2) 找出一些特殊曲线(如坐标轴等)所对应的像。

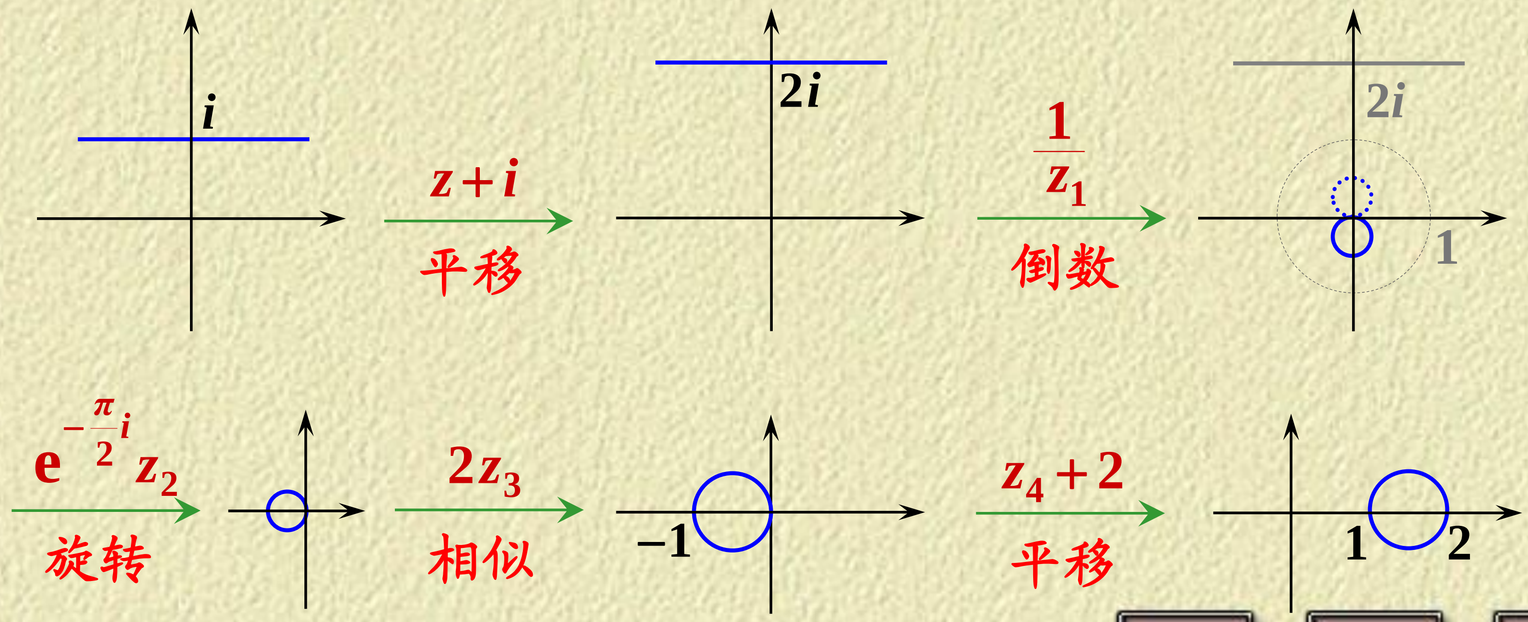
(3) 由原像之间的关系(如夹角等)确定像之间的关系。

例 求直线 $C=\{z:\operatorname{Im}z=1\}$ 在映射 $w=\dfrac{2z}{z+i}$ 下的像曲线。

P148 例6.6 修改

解 方法 1 分解为四种简单映射。$w=2+2e^{-\frac{\pi}{2}i}\cdot\dfrac{1}{z+i}$.

$$z\xrightarrow[\text{平移}]{z+i}z_1\xrightarrow[\text{倒数}]{\frac{1}{z_1}}z_2\xrightarrow[\text{旋转}]{e^{-\frac{\pi}{2}i}z_2}z_3\xrightarrow[\text{相似}]{2z_3}z_4\xrightarrow[\text{平移}]{z_4+2}w$$



上页 下页 返回

例 求直线 $C=\{z:\operatorname{Im} z=1\}$ 在映射 $w=\dfrac{2z}{z+i}$ 下的像曲线。

P148 例6.6 修改

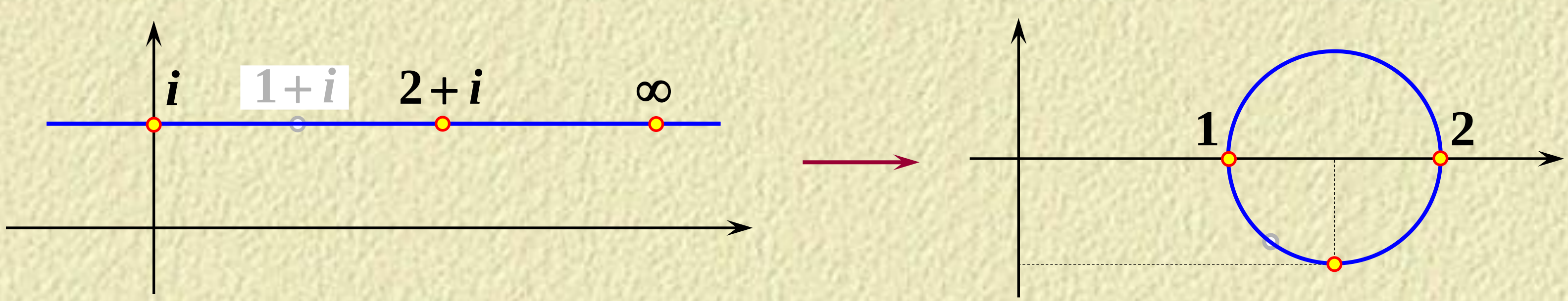
解 方法 2 利用保圆性，取三点定圆。

取三点 $\left\{\begin{array}{lcl} i & \longrightarrow & 1 \\ 1+i & \longrightarrow & \dfrac{6}{5}-\dfrac{2}{5}i \\ \infty & \longrightarrow & 2 \end{array}\right.$

（不是蛮好直接定圆）

另取三点 $\left\{\begin{array}{lcl} i & \longrightarrow & 1 \\ 2+i & \longrightarrow & \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i \\ \infty & \longrightarrow & 2 \end{array}\right.$

（可以了，Ok 了）



例 求直线 $C=\{z:\operatorname{Im}z=1\}$ 在映射 $w=\dfrac{2z}{z+i}$ 下的像曲线。

P148 例6.6 修改

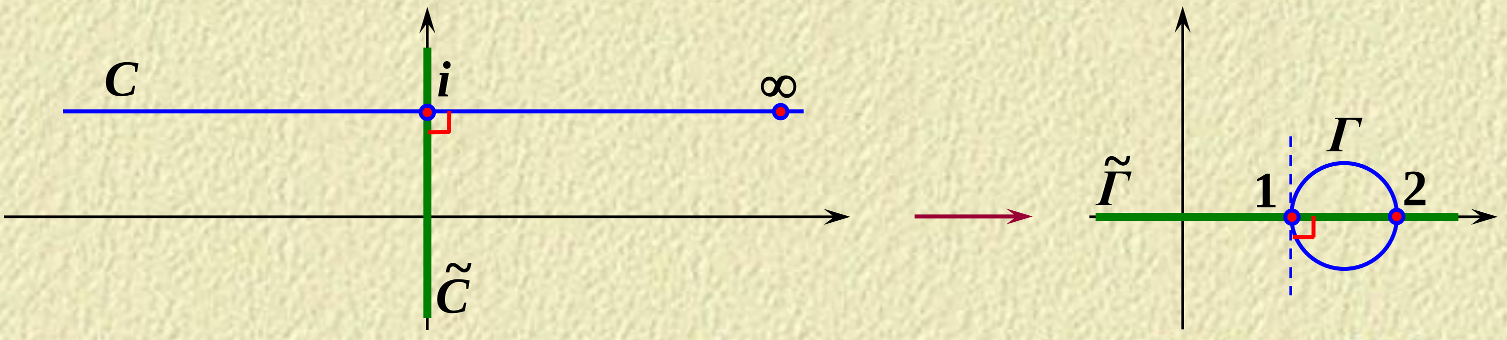
解 方法3 借助特殊点和特殊曲线。

(1) 特殊点 在直线 C 上取两点 i 和 ∞，由于 $i,\infty \longrightarrow 1, 2$，

故其像曲线 Γ 是经过 1, 2 两点的圆；

(2) 特殊线 将虚轴记为 $\tilde{C}$，则其像曲线 $\tilde{\Gamma}$ 为实轴；

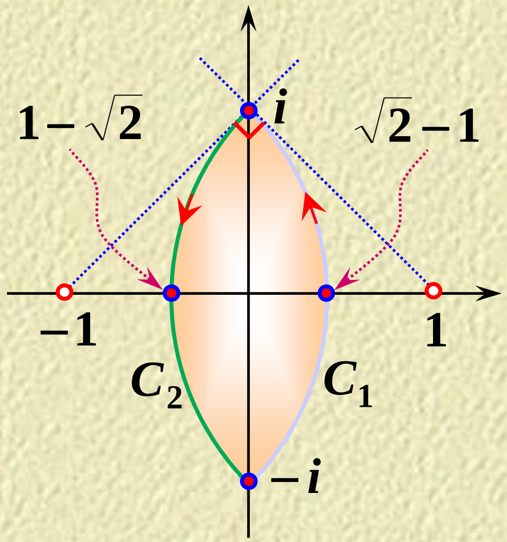
(3) 由于 C 和 $\tilde{C}$ 在 $z=i$ 点正交，故 Γ 和 $\tilde{\Gamma}$ 在 $w=1$ 点正交；



上页 下页 返回

例 求区域 $D=\{z:|z-1|<\sqrt{2},|z+1|<\sqrt{2}\}$在映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 下的像区域。P149 例6.7

解 首先作一个简单的定性分析



(1) 区域 D 的边界 C_1 和 C_2 是圆弧段，

且 C_1 和 C_2 的交角为 90 度；

(2) 由于所给的映射为分式线性映射，

因此具有保圆性与保角性；

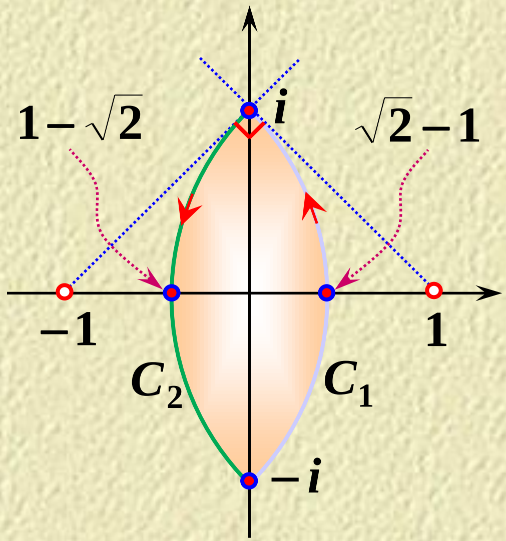
(3) 由于 $-i$ 被映射为 ∞， i 被映射为 0，因此圆弧 C_1 和 C_2

被映射为从原点出发且相互垂直的两条射线。

上页 下页 返回

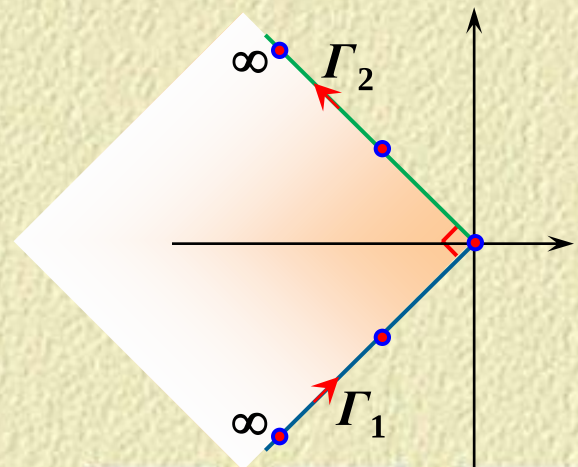
例 求区域 $D=\{z:|z-1|<\sqrt{2},|z+1|<\sqrt{2}\}$ 在映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 下的像区域。P149 例6.7

解 方法一 利用保圆性，取三点定圆



$$C_1\left\{\begin{array}{ccc} -i & \longrightarrow & \infty \\ \sqrt{2}-1 & \longrightarrow & a(-1-i) \\ i & \longrightarrow & 0 \end{array}\right\}\Gamma_1$$

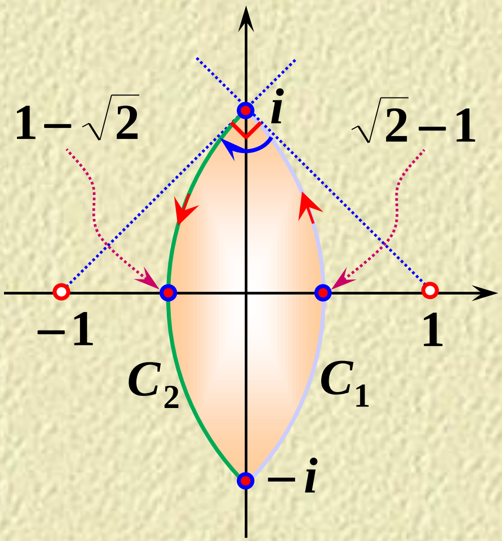
$$C_2\left\{\begin{array}{ccc} i & \longrightarrow & 0 \\ 1-\sqrt{2} & \longrightarrow & a(-1+i) \\ -i & \longrightarrow & \infty \end{array}\right\}\Gamma_2$$



其中 $a=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)^2+1}$.

例 求区域 $D=\{z:|z-1|<\sqrt{2},|z+1|<\sqrt{2}\}$ 在映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 下的像区域。P149 例6.7

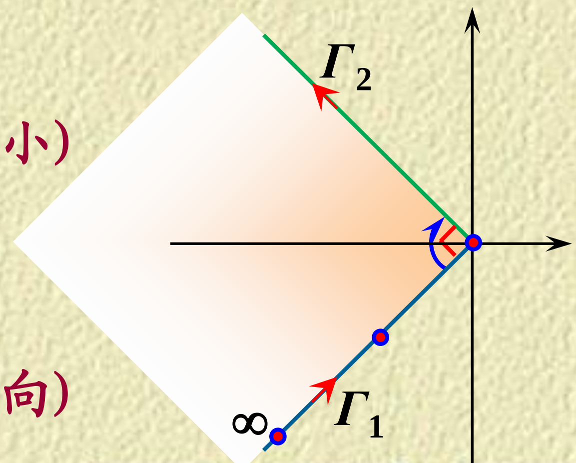
解 方法二 利用保圆性和保角性



$$(1)\ C_1\left\{\begin{array}{ccc} -i & \longrightarrow & \infty \\ \sqrt{2}-1 & \longrightarrow & a(-1-i) \\ i & \longrightarrow & 0 \end{array}\right\}\Gamma_1$$

(2) 由 C_1 和 C_2 在 $z=i$ 点正交，

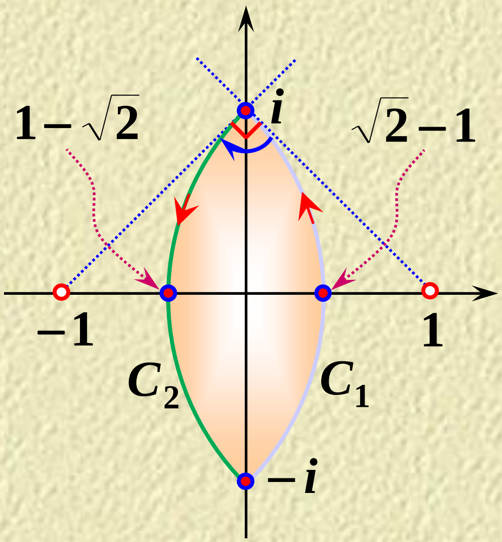
知 Γ_1 和 Γ_2 在 $w=0$ 点正交； (保大小)



(3) 由 C_1 顺时针旋转90度到 C_2，

知 Γ_1 顺时针旋转90度到 Γ_2。(保方向)

例 求区域 $D=\{z:|z-1|<\sqrt{2},|z+1|<\sqrt{2}\}$在映射 $w=\dfrac{z-i}{z+i}$ 下的像区域。P149 例6.7

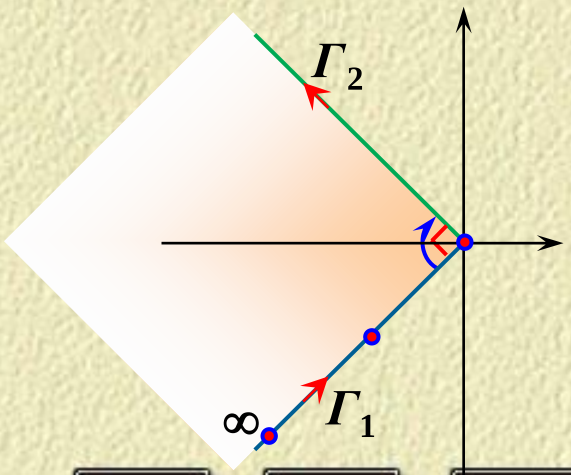


- 本例的重要启示

分式线性映射可以将

仅由两段圆弧围成且有两个交点的区域 D

映射为顶点在原点的角形域。

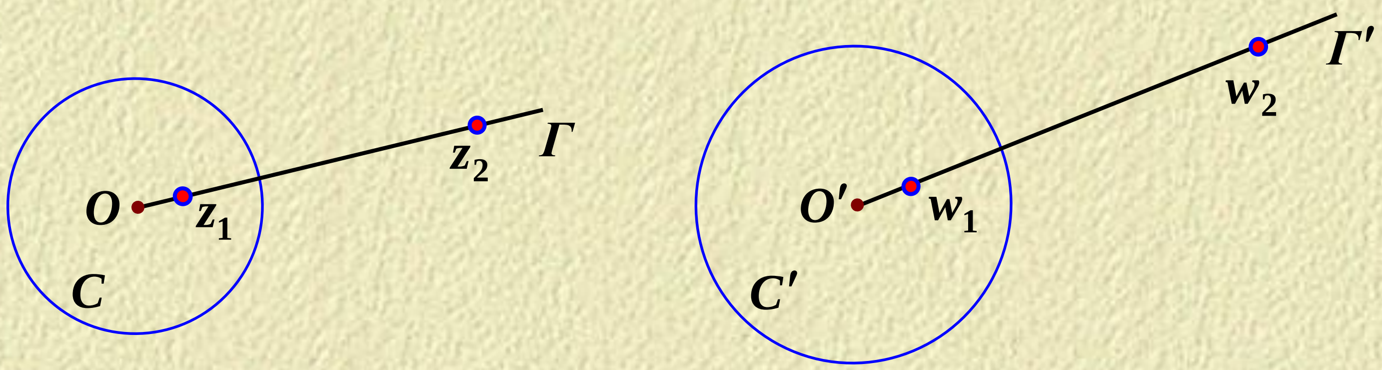


三、分式线性映射的几种特性

3、保对称点性

定理 设点 z_1, z_2 关于圆周 C 对称，则在分式线性映射下，它们的像点 w_1, w_2 也关于像曲线 C' 对称。

P151 定理 6.7



证明（略）

上页 下页 返回

四、唯一决定分式线性映射的条件

分析

- 分式线性映射 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 中含有四个常数 a, b, c, d.
- 如果用这四个数中的一个去除分子和分母，则可以将分式线性映射中的四个常数化为三个独立的常数。
- 由此可见，只需要给定三个条件，就能决定一个分式线性映射。

定理

P152 定理 6.8

在 z 平面上任给三个不同的点 z_1, z_2, z_3，在 w 平面上也任给三个不同的点 w_1, w_2, w_3，则存在唯一的分式线性映射，将 z_1, z_2, z_3 分别依次映射为 w_1, w_2, w_3.

上页 下页 返回

四、唯一决定分式线性映射的条件

证明（仅证明存在性）设分式线性映射为 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，

代入条件得 $w_1=\dfrac{az_1+b}{cz_1+d}$，$w_2=\dfrac{az_2+b}{cz_2+d}$，$w_3=\dfrac{az_3+b}{cz_3+d}$.

$$\Rightarrow \quad w-w_1=\frac{az+b}{cz+d}-\frac{az_1+b}{cz_1+d}=\frac{ad-bc}{cz+d}\cdot\frac{z-z_1}{cz_1+d}.$$

同理，$w-w_2=\dfrac{ad-bc}{cz+d}\cdot\dfrac{z-z_2}{cz_2+d}$，

$$\Rightarrow \quad \frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{cz_2+d}{cz_1+d}.$$

四、唯一决定分式线性映射的条件

证明 (仅证明存在性) 设分式线性映射为 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$，

代入条件得 $w_1=\dfrac{az_1+b}{cz_1+d}$，$w_2=\dfrac{az_2+b}{cz_2+d}$，$w_3=\dfrac{az_3+b}{cz_3+d}$.

$$\Rightarrow \quad \frac{w-w_1}{w-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}\cdot\frac{cz_2+d}{cz_1+d}.$$

同理，$\dfrac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\cdot\dfrac{cz_2+d}{cz_1+d}$，

$$\Rightarrow \quad \frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

将上式整理后，即得到所要的分式线性映射。

上页 下页 返回

四、唯一决定分式线性映射的条件

定义 称下式为对应点公式:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

注 (1) 由于分式线性映射具有保圆性，因此该公式通常用于:

把过 z_1, z_2, z_3 三点的圆(或圆弧)映射为过 w_1, w_2, w_3 三点的圆(或圆弧)。

(2) 如果 z_1, z_2, z_3 和 w_1, w_2, w_3 中有一个为无穷远点 ∞，则只需将对应点公式中含有 ∞ 的项换成 1。

P153 推论 6.1

上页 下页 返回

四、唯一决定分式线性映射的条件

定义　称下式为对应点公式:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

推论　设 $w=f(z)$ 为分式线性映射，且 $f(z_1)=w_1$，$f(z_2)=w_2$，

P153 推论 6.2

则它可表示为: $\dfrac{w-w_1}{w-w_2}=k\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$,

- 特别地，若 $f(z_1)=0$，$f(z_2)=\infty$，

则 $w=k\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$.（k 待定）

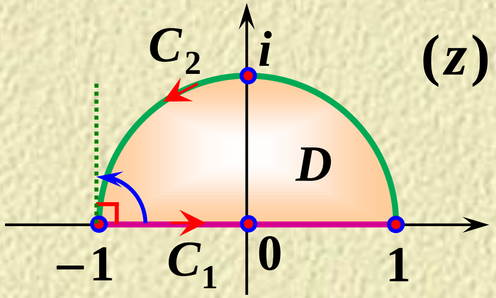
非常实用

如果在构造共形映射的过程中，左式是作为中间步骤，则 k 可直接设为1.

特点：把过 z_1,z_2 点的弧映射成过原点的直线。

上页　下页　返回

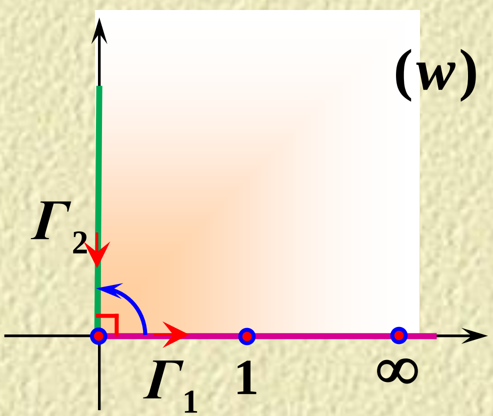
例 已知区域 $D=\{z: |z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$，求一分式线性映射，将区域 D 映射为第一象限。 P153 例6.9



解 方法一 令 $w=k\dfrac{z-(-1)}{z-1}$，k 待定，

再要求将 $z=0 \longrightarrow w=1$，

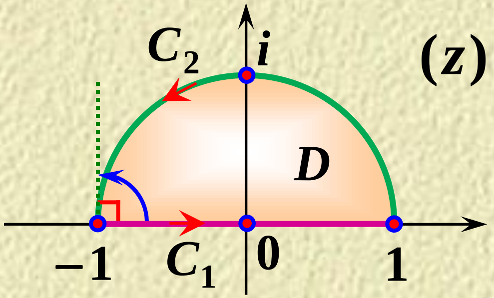
得 $k=-1$，故 $w=-\dfrac{z+1}{z-1}$.



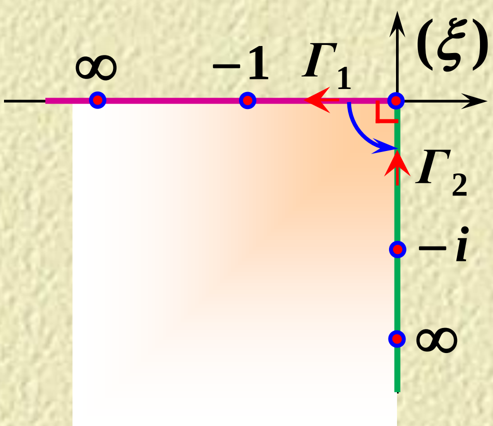
说明 也可要求将 $z=0 \longrightarrow w=2$ 或者其它点.

事实上 k 不唯一

例 已知区域 $D=\{z:|z|<1,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$，求一分式线性映射，将区域 D 映射为第一象限。 P153例6.9



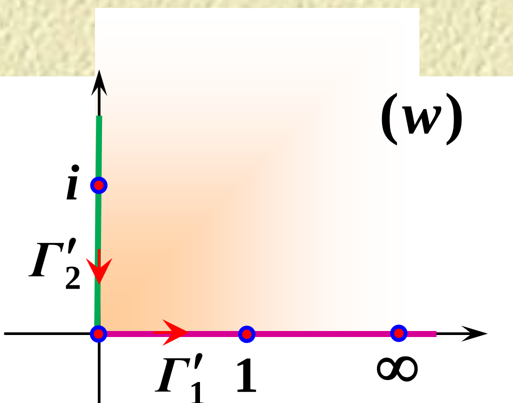
解 方法二 (1) 令 $\xi=\dfrac{z-(-1)}{z-1}=\dfrac{z+1}{z-1}$,



$$\text{则 } C_1\left\{\begin{array}{ccc} -1 & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & -1 \\ 1 & \longrightarrow & \infty \end{array}\right\}\Gamma_1$$

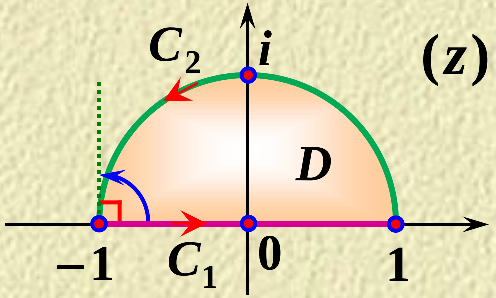
可由保角性直接得 Γ_2,

(2) 旋转 $w=e^{i\pi}\xi=-\dfrac{z+1}{z-1}$.



上页 下页 返回

例 已知区域 $D=\{z:|z|<1, \operatorname{Im} z>0\}$，求一分式线性映射，将区域 D 映射为第一象限。



结论：从上半单位圆域到第一象限的映射为 $\boxed{w=-\dfrac{z+1}{z-1}.}$

如果所给区域的边界由两段圆弧组成且有两个交点，则一定存在一个分式线性映射，将区域映射成角型域。

方法 将区域边界的一个交点映射为0，

另一个(交)点映射为∞。

注：若区域边界只有一个交点，则将唯一交点映射为∞。

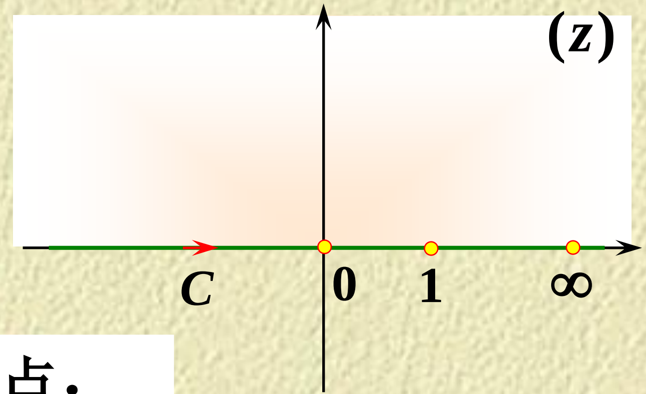
(此时区域被映射成带型域)

上页 下页 返回

五、两个典型区域间的映射

1. 将上半平面映射成单位圆域

推导　方法 1　三点定圆。



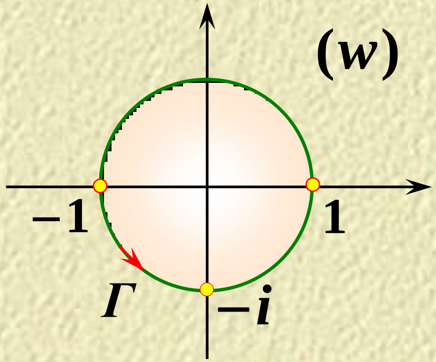
P154 例 6.10

- 在实轴和单位圆周上分别取三点：

$$z_1 = 0, \longrightarrow w_1 = -1,$$

$$z_2 = 1, \longrightarrow w_2 = -i,$$

$$z_3 = \infty, \longrightarrow w_3 = 1,$$



根据对应点公式，有

$$\frac{w-(-1)}{w-(-i)} : \frac{1-(-1)}{1-(-i)} = \frac{z-0}{z-1} : \frac{1}{1},$$ 整理得 $$\boxed{w = \frac{z-i}{z+i}}.$$

- 显然，如果取另外的三点则会得到另外的结果。

上页　下页　返回

五、两个典型区域间的映射

1. 将上半平面映射成单位圆域

推导　方法 2　求通式。

(1) 在上半平面任取一点 z_0，

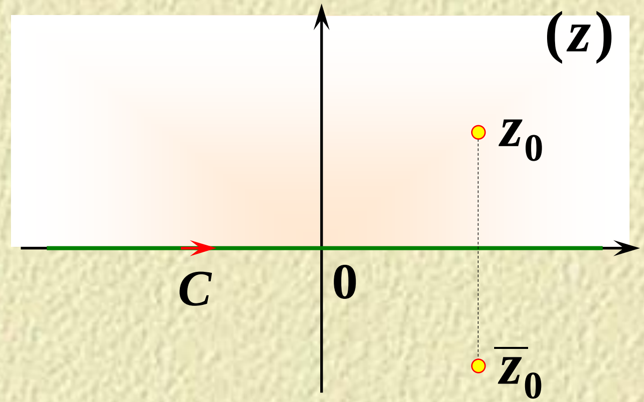
使其映射到 w 平面的点 $w_1 = 0$，

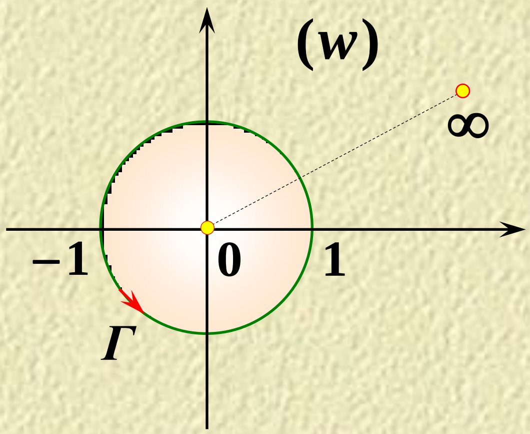
根据保对称点性，则有

$$\bar{z}_0 \longrightarrow w_2 = \infty,$$

从而所构造的分式线性映射为：

$$w = k\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},\ (k \text{ 待定})。$$



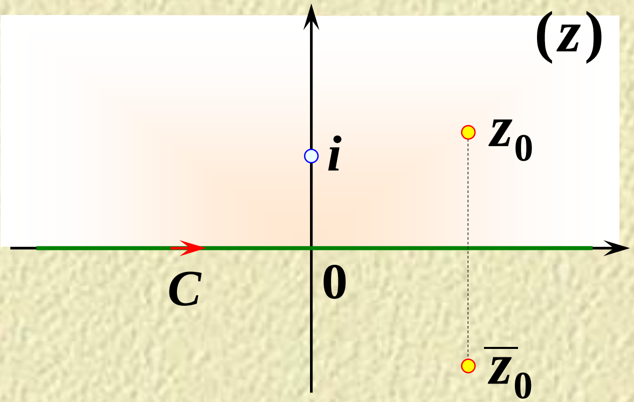


上页　下页　返回

五、两个典型区域间的映射

1. 将上半平面映射成单位圆域

推导　方法 2　求通式。

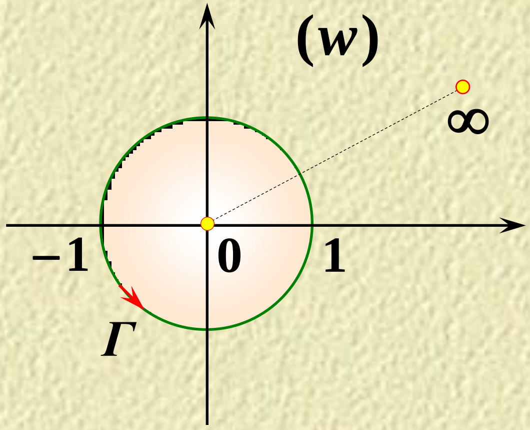


(2) 当 z 在实轴上取值时，有

$$\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}\right|=1,\quad |w|=1,$$

$$\Rightarrow\ |k|=1,\ \text{即}\ k=e^{i\theta},$$

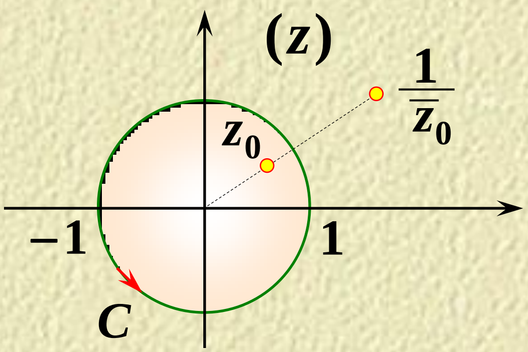
即得通式为: $w=e^{i\theta}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}.$



- 特别地，取 $\theta=0$，$z_0=i$，则得到方法 1 的结果。

五、两个典型区域间的映射

2. 将单位圆域映射成单位圆域

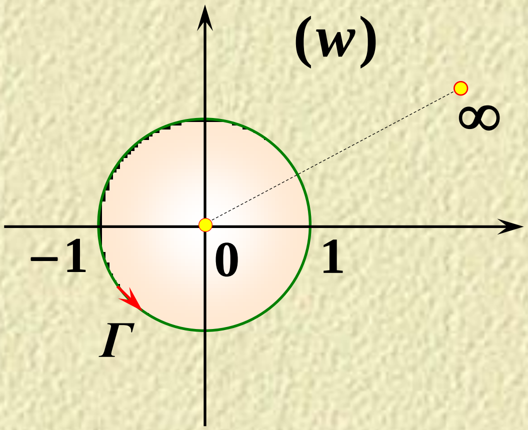


推导 直接求通式。

P155 例 6.11

(1) 在 $|z|<1$ 内任取一点 $z_0 \longrightarrow w_1 = 0$,

由保对称点性，有 $\dfrac{1}{\overline{z}_0} \longrightarrow w_2 = \infty$,



因此相应的分式线性映射为：

$$w = k\frac{z-z_0}{z-\dfrac{1}{\overline{z}_0}},\ (k\ 待定),$$

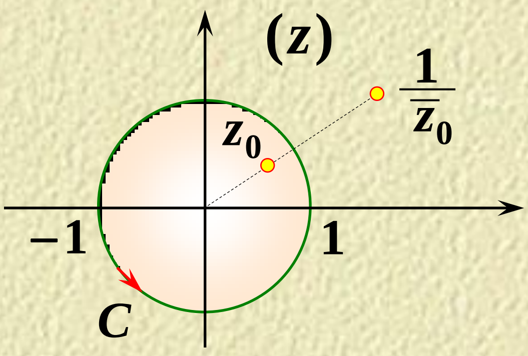
即 $w = k_1 \dfrac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}$，（$k_1 = -k\overline{z}_0$ 待定）。

上页 下页 返回

五、两个典型区域间的映射

2. 将单位圆域映射成单位圆域

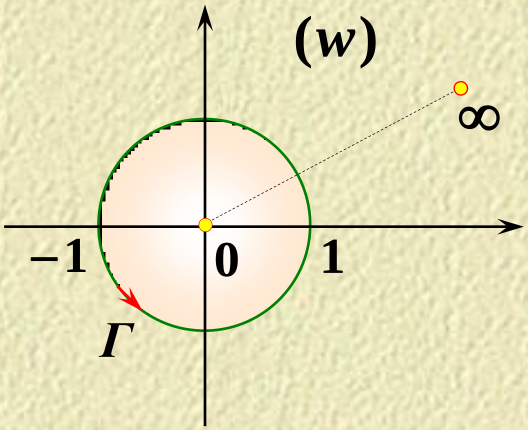
推导 直接求通式。



(2) 当 z 在 $|z|=1$ 上取值时，有 $|w|=1$,

且 $$\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}\right| = \left|\frac{z-z_0}{\overline{z}z-\overline{z}_0 z}\right|$$

$$= \left|\frac{z-z_0}{\overline{z}-\overline{z}_0}\right| = 1,$$

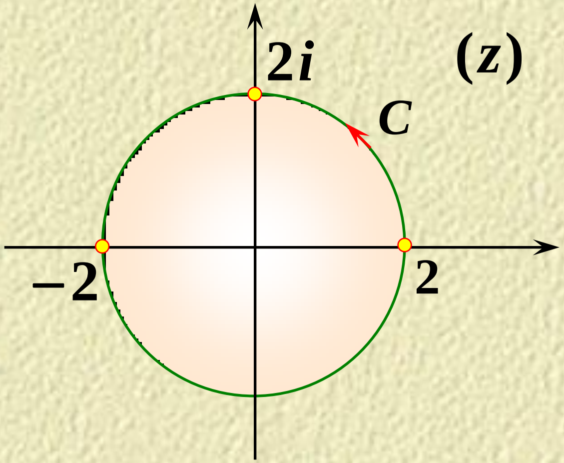


$\Rightarrow\ |k_1|=1$, 即 $k_1 = \mathrm{e}^{i\theta}$,

即得通式为: $$w = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{z-z_0}{1-\overline{z}_0 z}.$$

例 求一共形映射 $w = f(z)$，将区域 $|z| < 2$ 映射为 $\mathrm{Re}\, w > 0$.

解 方法 1 利用三点定圆。

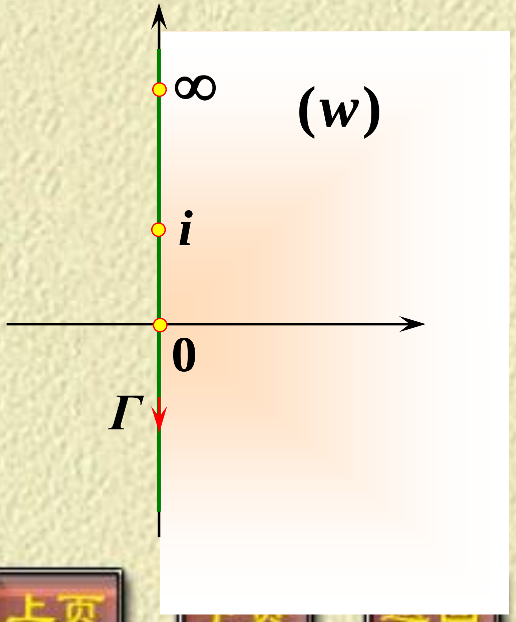


如图，在 C 和 Γ 上分别取三点：

$$z_1 = 2, \longrightarrow w_1 = \infty,$$

$$z_2 = 2i, \longrightarrow w_2 = i,$$

$$z_3 = -2, \longrightarrow w_3 = 0,$$



根据对应点公式，有

$$\frac{1}{w-i} : \frac{1}{0-i} = \frac{z-2}{z-2i} : \frac{-2-2}{-2-2i},$$

整理后，即得 $w = -\dfrac{z+2}{z-2}$.

例 求一共形映射 $w=f(z)$，将区域 $|z|<2$ 映射为 $\mathrm{Re}\,w>0$.

解 <u>方法 2</u> 利用保对称点性。

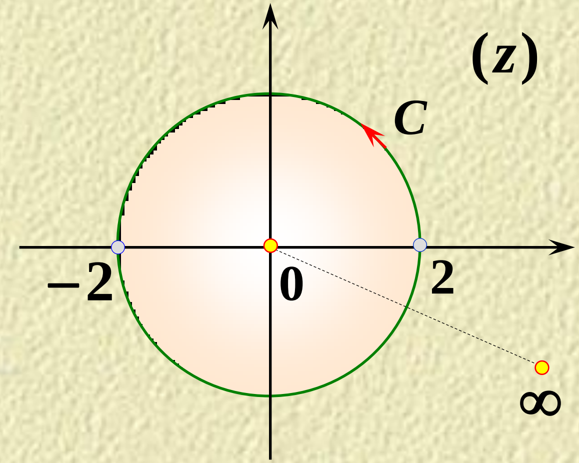
在 $|z|<2$ 内取一点 $z_1=0 \longrightarrow w_1=1$,

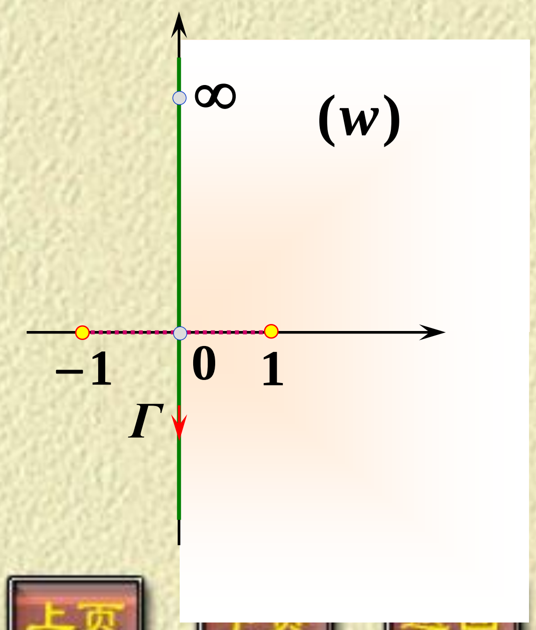
由<u>保对称点性</u>有 $z_2=\infty \longrightarrow w_2=-1$,

即得 $z=k\dfrac{w-1}{w-(-1)}$,（k 待定）。

再令 $z=2 \longrightarrow w=0$, $\Rightarrow$ $k=-2$,

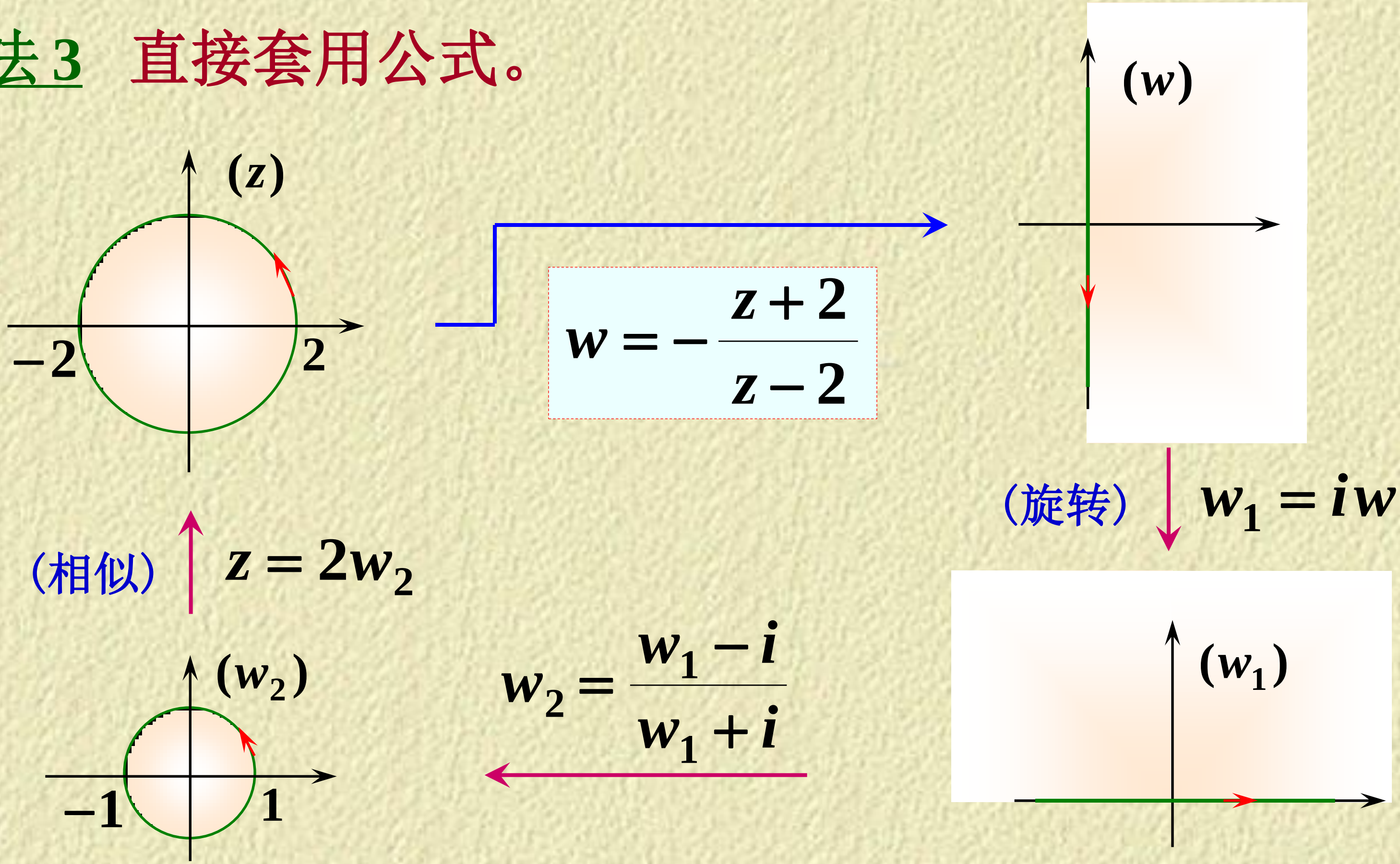
故 $z=-2\dfrac{w-1}{w+1}$, $\Rightarrow$ $w=-\dfrac{z-2}{z+2}$.





例 求一共形映射 $w = f(z)$，将区域 $|z| < 2$ 映射为 $\mathrm{Re}\, w > 0$.

解 <u>方法3</u> 直接套用公式。

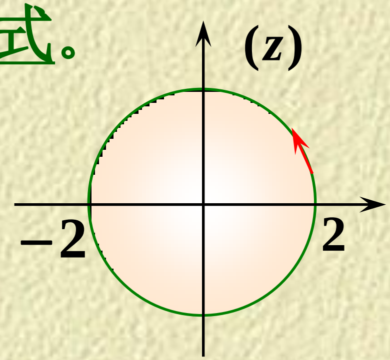


由 $z = 2w_2 = 2\dfrac{iw - i}{iw + i} = 2\dfrac{w-1}{w+1}$， $\Rightarrow$ $w = -\dfrac{z+2}{z-2}$.

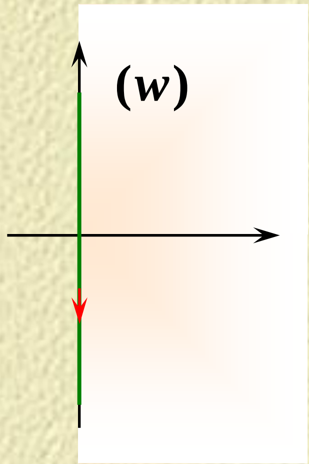
例 求一共形映射 $w = f(z)$，将区域 $|z| < 2$ 映射为 $\mathrm{Re}\, w > 0$，满足 $f(0) = 1$，$\arg f'(0) = \pi/2$.

P155 例 6.12

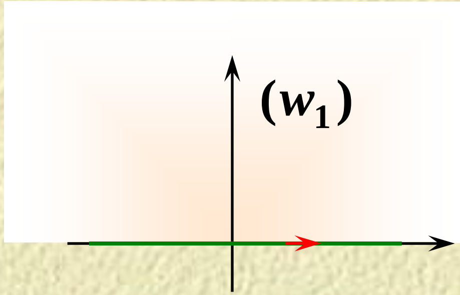
解 (1) 求通式。



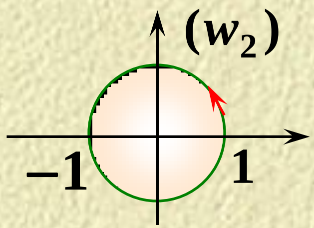
$$w = \frac{\bar{a} z - 2a\mathrm{e}^{i\theta}}{iz - 2i\mathrm{e}^{i\theta}}$$



(旋转) $w_1 = iw$



$$w_2 = \mathrm{e}^{i\theta} \frac{w_1 - a}{w_1 - \bar{a}}$$



(相似) $z = 2w_2$

由 $z = 2w_2 = 2\mathrm{e}^{i\theta} \dfrac{iw - a}{iw - a}$，$\Rightarrow$ $w = f(z) = \dfrac{az - 2a\mathrm{e}^{i\theta}}{iz - 2i\mathrm{e}^{i\theta}}$.

例 求一共形映射 $w=f(z)$，将区域 $|z|<2$ 映射为 $\mathrm{Re}\,w>0$，满足 $f(0)=1$，$\arg f'(0)=\pi/2$.

解 (1) 求通式。

$$w=f(z)=\frac{\bar{a}z-2a\mathrm{e}^{i\theta}}{iz-2i\mathrm{e}^{i\theta}}.$$

(2) 代入条件。

由 $f(0)=1$，有 $a=i$，故 $w=f(z)=-\dfrac{z+2\mathrm{e}^{i\theta}}{z-2\mathrm{e}^{i\theta}}$；

$$\Rightarrow\ f'(0)=-\frac{(z-2\mathrm{e}^{i\theta})-(z+2\mathrm{e}^{i\theta})}{(z-2\mathrm{e}^{i\theta})^2}\bigg|_{z=0}=\mathrm{e}^{i(-\theta)},$$

由 $\arg f'(0)=\dfrac{\pi}{2}$，有 $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$，即得 $w=-\dfrac{z-2i}{z+2i}$.

上页 下页 返回