§2.3 初等函数

将实数域中的初等函数扩充到复数域遵循的原则是：自变量z取实值x时，必须和实数域中的函数一致，另外扩充后的函数必须保留原函数的一些本质特性.

扩充的方法是利用原来函数的某些本质特性作为定义基本初等函数的基础.

§2.3.1 指数函数（exponent -指数）

定义 2.4　称 $e^z = \exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$ 为指数函数.

由e^z的定义知，$\left|e^z\right| = e^x$，$\mathrm{Arg}\, e^z = y + 2k\pi$（$k$为整数）

证明

证：因 $\left|e^z\right| = e^x > 0$，即不论 z 取何值，其模均大于 0，故 e^z 恒不为 0．

返 回

证明

证： $e^{z+2\pi i}=e^{x+2\pi i}e^{iy}=e^{x}e^{iy}=e^{x+iy}=e^{z}$

若还有周期为 $w=w_1+iw_2$，即 $e^{z+w}=e^{z}$，则有

$$e^{x+w_1}e^{i(y+w_2)}=e^{x}e^{iy}.$$

比较上式两端的模与辐角，有

$$x+w_1=x, y+w_2=y+2k\pi\text{（}k\text{ 为整数）},$$

返 回

§ 2.3.2 对数函数

定义 2.5　$\exp w = e^w = z$，称 w 为 z 的对数函数记为 $w = f(z) = \mathrm{Ln}z$（与实函数定义一样，对数函数为指数函数的反函数）.

性质：

1>多值性　设 $z = re^{i\theta}, w = u + iv$，即 $e^w = re^{i\theta}$，即

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = re^{i(\arg z + 2k\pi)} = re^{i(\theta + 2k\pi)},$$

即 $e^u = r, e^{iv} = e^{i(\theta+2k\pi)}$，所以，$u = \ln r, v = \theta + 2k\pi$.

亦即，$w = \mathrm{Ln}z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$，$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

（注：$\mathrm{Ln}z$ 与 $\ln r$ 不一样，$\mathrm{Ln}z$ 无底，记号 $\ln r$ 以 e 为底的自然对数.）

例 2.10

解： 1） $\mathrm{Ln}(-1)=\ln 1+i(\arg z+2k\pi)=\ln 1+i(\pi+2k\pi)$

$$=(2k+1)\pi i,$$

$$\arg z=\arg(-1)=\pi,$$

主枝 $\ln z=\ln 1+\pi i=\pi i$.

2） $\mathrm{Ln}(-i)=\ln 1+i(\arg z+2k\pi)=\ln 1+i(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)$

返 回

证明

证： $\mathrm{Ln}z_1z_2 = \ln|z_1z_2| + i\mathrm{Arg}z_1z_2$

$$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2)$$

$$= \mathrm{Ln}z_1 + \mathrm{Ln}z_2 \ ,$$

$$\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + i\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2}$$

返 回

§2.3.3 幂函数

定义 2.6 函数 $w=z^{\alpha}$ 规定为

$$z^{\alpha}=e^{\alpha \mathrm{Ln} z},\quad (\alpha\text{为复常数},\ z\neq 0)$$

称为复变量 z 的幂函数.

还规定：当 α 为正实数且 $z=0$ 时，$z^{\alpha}=0$. 由于 Lnz 是多值函数，所以 $e^{\alpha \mathrm{Ln} z}$ 一般是多值函数.

1) 当 α 为正整数 n 时，

$$w=z^{n}=e^{n\mathrm{Ln} z}$$

$$=e^{n[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]}=e^{n(\ln|z|+i\arg z)}=e^{n\ln z},$$

是一个单值函数.

因 $$(z^{n})'=nz^{n-1},$$

§2.3.4 三角函数与双曲函数

1. 三角函数

定义 2.8 称 $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$，分别为正弦函数，余弦函数.

性质：

1）当 $z = x$ 时，与实函数一致.

2）在复平面内解析，因

$$(\sin z)' = \cos z,$$

$$(\cos z)' = -\sin z.$$

3）奇偶性同实函数一致.

例 2.12

解：根据定义，有 $\cos i=\dfrac{e^{ii}+e^{-ii}}{2}=\dfrac{e^{-1}+e}{2}$.

返 回

例 2.13

解：根据定义，有

$$\sin(1+2i)=\frac{e^{i(1+2i)}-e^{-i(1+2i)}}{2i}=\frac{e^{i}\cdot e^{-2}-e^{-i}e^{2}}{2i}$$

$$=\frac{e^{-2}[\cos 1+i\sin 1]-e^{2}[\cos 1-i\sin 1]}{2i}$$

$$=\frac{e^{2}-e^{-2}}{\quad}\sin 1+i\frac{e^{2}-e^{-2}}{\quad}\cos 1$$

本章小结

解析函数是复变函数的主要研究对象．本章的重点是正确理解复变函数的导数与解析函数等基本概念、掌握判断复变函数可导与解析的方法、熟悉复变量初等函数的定义和主要性质，特别要注意在复数范围内，实变初等函数的哪些性质不再成立，以及显现出哪些在实数范围内所没有的性质．

本章学习重点如下：

1．解析函数具有很好的性质． $C-R$ 条件是判断函数可微和解析的主要条件，函数 $f(z)$ 在区域 D 内可微，等价于函数 $f(z)$ 在 D 内解析，但 $f(z)$ 在一点 z_0 可