§1.5 复变函数

复自变量函数论的基本概念几乎是实自变量函数中相应概念的逐字逐句的推广，这种在基本定义中的极其相似，导致在某些章节的许多理论的极其相似.

§1.5.1 复变函数的概念

定义 1.3 设有一复数 $z=x+iy$ 的集合 G，如果有一个确定的法则存在，对于集合 G 中的每一个复数 z，按照这一法则，复数 $w=u+iv$ 就随着而定，那么称 w 是复变数 z 的函数（简称复变函数）记为 $w=f(z)$.

如果 z 的一个值对应着一个 w 值，则称 $f(z)$ 为单

例 1.6

解： 记 $x+iy=z, u+iv=w$，则

$$w=u+iv=\frac{2x+iy}{x^2+y^2},$$

将 $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$，$y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$ 以及 $x^2+y^2=z\bar{z}$

代入上式，经整理后得

返 回

§1.5.2 映射的概念

在“微积分”中，我们常把实变函数用几何图形表示，它可直观的帮助我们理解和研究函数的性质. 对于复变函数由于它反映了 u,v 和 x，y 之间的对应关系. 因而无法用同一平面或空间的几何图形表示（因有两个自由度）必须把它看成两个复平面上的点集之间的对应关系.

如果要把函数 $w=f(z)$ 的定义集合 G 看成是 z 平面上的一个点集合. 而把函数值集合 D 看成是另一个平面即 w平面上的一个点集合，那么函数 $w=f(z)$ 在几何上就可以看成是把集合 G 变到 D 的一个映射.

§1.5.3 复变函数的极限与连续性

1. 函数的极限

定义 1.4 设函数 $w=f(z)$ 定义在 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内，总有一确定的数 A 存在，$\forall\varepsilon>0$，相应地必有正数 $\delta(\varepsilon)$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta\ (0<\delta\le\rho)$ 时，有

$$|f(z)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记为

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A.$$

或

$$z\to z_0,\quad f(z)\to A.$$

定理 1.2

证：充分性：由 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=a$， $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=b$.

则当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，有

$$|u-a|<\frac{\varepsilon}{2},|v-b|<\frac{\varepsilon}{2},$$

但$|f(z)-A|\le|u-a|+|v-b|$，故在$0<|z-z_0|<\delta$时，有

返 回

定理 1.4

证：（充分性） 因 u, v 在(x_0, y_0)处连续，

即

$$\lim u = u_0, \ \lim v = v_0.$$

由定理 1.2 的充分性知 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在.

∇

返 回

定理 1.5

证：只证 3)

令 $f(z)=u_1+iv_1$, $g(z)=u_2+iv_2$， 又设当 $z\to z_0$ 时,

$$f(z)\to A=a+bi$$

$$g(z)\to B=c+di\neq 0,$$

返 回

本章小结

本章学习了复数概念、复数运算及其表示；复变函数概念及其极限、连续等内容．这些内容是学习全书的基础．因为今后研究的问题均在复数范围内讨论，所以我们对复数的性质必须要有清楚的认识，并需牢固掌握复数运算的方法．由于复数全体与平面上点的全体可作成一一对应，故一个复数集可视为一个平面点集，而用复数表示复平面上的点，较之解析几何中用直角坐标表示点，有时要方便的多．当我们研究复变函数的性质即研究两个复数集之间的一种对应关系时，清晰地了解平面点集是很重要的前提．