5. HAFTA

BLM323

SAYISAL ANALİZ

Yrd.Doç.Dr Burhan SELÇUK

bselcuk@karabuk.edu.tr

KBUZEM
Karabük Üniversitesi
Uzaktan Eğitim Uygulama ve Araştırma Merkezi

Lineer Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

1) Direkt Methodlar

(a) Cramer Yöntemi

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered}$$

n bilinmeyenli n denklemli bir sistem ve $A = [a_{ij}]$ katsayılar matrisi olsun. Böylece verilen sistemi $AX = B$ biçiminde yazabiliriz. Burada

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

dir. Eğer $|A| \neq 0$ ise, yukarıdaki sistemin

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

şeklinde bir tek çözümü vardır. Burada A_i, A nın i −inci sütununun B ile yerdeğiştirmesiyle elde edilen matristir. Örneğin aşağıdaki sistemin çözümünü Cramer yöntemi ile bulalım;

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{gathered}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, |A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$
$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, |A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

olmak üzere

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}$$

dır.

Örnek 1. Aşağıdaki sisteminin çözümünü Cramer metodunu kullanarak bulunuz;

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$$

Çözüm. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}, |A_1| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 14 & 2 \end{vmatrix}, |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}$ alalım. O halde

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 14 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{20}{10} = 2, y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{10}{10} = 1$$

elde edilir.

Örnek 2. Aşağıdaki sistemin çözümünü Cramer yöntemini kullanarak bulunuz;

$$\begin{gathered} 2x - y - z = 2 \\ 4x + y - z = -5 \\ 6x - 2y + 2z = 17 \end{gathered}$$

Çözüm.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 28, |A_1| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 17 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 14,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 6 & 17 & 2 \end{vmatrix} = -112, |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \\ 6 & -2 & 17 \end{vmatrix} = 84$$

olmak üzere

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}, y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-112}{28} = -4, z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{84}{28} = 3$$

dır.

(b) Gauss Yok-Etme ve Gauss-Jordan Metodu

n bilinmeyenli m lineer denklemden oluşan sistemi çözmek için iki farklı metod kullanılarak sonuç bulunacaktır. Bu metotlar kullanılırken lineer sistemin ilaveli matrisi ele alınır ve bunun üzerinde uygun elementer işlemler yapılarak, lineer sisteme denk olan yeni bir matris elde edilir. (Yani bu sistem orjinal olan lineer sistem ile aynı çözüme sahiptir.) Burada önemli olan nokta, lineer sistemin sonuçta çok daha kolay çözülebilir olmasıdır.

Bir lineer sistemin ilaveli matrisinin özel bir biçimde nasıl kolay bir şekilde çözülebileceğini görmek için, aşağıda verilen örneğe bakalım.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

matrisi lineer bir sistemin ilaveli matrisi olsun. Bu sistemin çözümü buna denk olan

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = -1 \end{gathered}$$

denklem sisteminin çözümü ile bulunur. Böylece çözüm

$$\begin{gathered} x_3 = -1 \\ x_2 = 2 - x_3 = 2 + 1 = 3 \\ x_1 = 3 - 2x_2 = 3 - 6 = -3 \end{gathered}$$

biçimindedir. Bu bölümün amacı, verilen lineer sistemin ilaveli matrisini ele alarak bunu daha kolay bir çözüm veren değişik bir biçimde ifade etmektir.

Tanım 1. $m \times n$ tipindeki bir A matrisi, aşağıdaki özelliklerin sağlanması durumunda satırca indirgenmiş eşelon biçimindeki matris olarak adlandırılır.

(a) Eğer matrisin bir satırındaki elemanların hepsi sıfır ise, bunlar matrisin en alt satırında bulunmalıdır.
(b) Matrisin sıfırdan farklı ilk satırının ilk elemanı 1 olmalıdır. Bu elemana bu satırın ilk elemanı adı verilir. (Bazı kaynaklarda ilk elemanın 1 den farklı olabileceği belirtilmiştir. Biz işlem kolaylığını temin etmek için ilk elemanı her zaman 1 yapacağız)
(c) Sıfırdan farklı herbir satırda bu ilk eleman, bir önceki satıra göre sağa doğru bir kaymak suretiyle yer alır.
(d) Eğer matrisin sütununun birisi bu ilk elemanı içeriyorsa, o sütundaki diğer elemanların hepsi sıfırdır.

Böylece satırca indirgenmiş eşelon biçimindeki bir matris, ilk satırının elemanı 1 olan ve köşegen elemanı üzerindeki elemanları da 1 (alt satırdaki tüm elemanlar sıfır olabilir) olarak yer alan matristir.

Eğer $m \times n$ tipindeki bir matris yukar‹daki tanımda yer alan (a), (b) ve (c) şıklarındaki özellikleri sağlıyor ise, bu matris satırca eşelon biçimindedir denir. Tanım 1 gereğince matrisin bir satırındaki elemanların hepsi sıfır da olmayabilir.

Benzer bir tanım sütunca indirgenmiş eşelon biçim ve sütunca eşelon biçimi için de aşikar bir biçimde yapılabilir.

Örnek 3. Aşağıda verilen matrisler yukarıda ifade edilen tanımdaki (a), (b), (c) ve (d) şıklarını sağlayan satırca indirgenmiş eşelon biçimindeki matrislerdir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki matrisler ise indirgenmiş satırca eşelon biçimde değildirler (Neden?)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

İndirgenmiş matrislerin en faydalı özelliği; A matrisi I_n'den farklı satırca indirgenmiş eşelon biçiminde $n \times n$ tipinde bir matris ise, bu taktirde A matrisi elemanları tamamen sıfır olan bir satıra sahiptir.

Şimdi, her matrisin satır (sütun) eşelon biçimde veya satırca (sütunca) indirgenmiş eşelon biçimde satır veya sütun elementer işlemleri kullanılarak nasıl ifade edileceğini göstereceğiz.

Tanım 2. Bir A matrisi üzerinde elementer satır (sütun) işlemleri aşağıda verilen işlemlerden herhangi birisidir.
(a) TİP 1: Herhangi iki satır (veya sütun)'ın yer değiştirmesi
(b) TİP 2: Bir satır (veya sütun)'ın sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılması
(c) TİP 3: Bir satır (veya sütun)'ın bir katının diğer bir satıra (veya sütuna) eklenmesi.

Bir matris, bir lineer sistemin ilaveli matrisi olarak gözönüne alınırsa, sırasıyla iki denklemin yer değiştirmesi, sıfırdan farklı bir sabit ile denklemin çarpılması ve denklemin bir sabitle çarpılıp bir diğer denklemle ilave edilmesinin elementer satır işlemlerine denk olduğunu gözlemleyiniz.

Örnek 4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. Bu matrisin 1.satırı ile 3.satırı yer değiştirilirse,

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur. B matrisinin 1.satırı 1/3 ile çarpılırsa

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. C matrisinin 1.satırının -2 katı 2.satıra eklenirse,

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Tanım 3. Eğer bir B matrisi, A matrisine elementer satır (veya sütun) işlemlerinin sonlu bir dizisi uygulanarak elde edilebiliyorsa, $m \times n$ tipindeki B matrisi $m \times n$ tipindeki bir A matrisine **satırca (veya sütunca)** denktir denir.

Örnek 4'de A ve D matrisleri birbirlerine satırca denktir.

Teorem 1. Sıfırdan farklı her $m \times n$ tipindeki A matrisi, satırca (veya sütunca) eşelon biçimindeki bir matrise satırca (veya sütunca) denktir.

Teorem 2. $AX = B$ ve $CX = D$, herbiri m denklem ve n bilinmeyenli iki lineer denklem sistemi olsun. Eğer, $[A|B]$ ve $[C|D]$ ilaveli matrisleri satırca denk ise, bu taktirde lineer sistemler denktir. Yani, tam olarak aynı çözümlere sahiptir.

Şimdi lineer sistemlerin çözümü için ileride kullanılacak olan çok önemli iki metodu verip bunları detaylı bir şekilde inceleyeceğiz. Başlangıçta $AX = B$ lineer sistemi alınırsa, bu taktirde elde edilen $[C|D]$ ilaveli matrisi ya satırca eşelon biçimindeki veya indirgenmiş satırca eşelon biçimindeki $[A|B]$ ilaveli matrisine satırca denktir. Ayrıca $[C|D]$ matrisi $CX = D$ lineer sistemini ifade eder (gösterir). Bunun yanında bu sistemin çözümü $[C|D]$ gösterimi sebebi ile oldukça basittir. Bu sistemin çözüm cümlesi de tamamen $AX = B$ lineer sisteminin çözüm cümlesini verir. Satırca eşelon biçimindeki $[C|D]$ matrisinin çözümü için kullanılan bu metoda **"Gauss yoketme metodu"** adı verilir. Benzer şekilde indirgenmiş satırca eşelon biçimindeki $[C|D]$ matrisinin çözümü için kullanılan bu metoda da "**Gauss-Jordan indirgeme metodu**" denir.

Gauss yok-etme metodu ve Gauss-Jordan indirgeme metodu küçük problemlerin çözümü için daha uygundur.

Örnek 5.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$3x_1 - x_3 = 3$$

sistemi verilsin. Bu sistemin ilaveli matrisi

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

biçimindedir. İlk önce bu matris satırca eşelon biçimine dönüştürelim. 1.satırın (-2) katını 2.satıra ve (-3) katını 3.satıra eklersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$$

matrisi elde edilir. Bu matriste 2.satırın (-1/5) katını alırsak

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)$$

matrisi elde edilir. Bu matriste 2.satırın 6 katını 3.satıra eklersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

matrisi elde edilir. Bu matriste 3.satırın (-1/4) katını alırsak

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

matrisi elde edilir.
Bu matris $[A|B]$ nin satırca eşelon biçimi olarak ifade edilir. $[C|D]$ yi lineer denklem sistemine dönüştürürsek

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9$$
$$x_2 + x_3 = 2$$
$$x_3 = 3$$

elde edilir. Geriye yerine koyma ile

$$x_3 = 3$$
$$x_2 = 2 - x_3 = 2 - 3 = -1$$
$$x_1 = 9 - 2x_2 - 3x_3 = 9 + 2 - 9 = 2$$

elde edilir. Böylece çözüm

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$$

olur. Bu çözümler Gauss yok etme metodu kullanılarak elde edilen çözümlerdir. Verilen lineer denklem sistemini Gauss-Jordan indirgeme metodu ile çözmek için son bulunan matris, aşağıdaki adımlar takip edilerek $[C|D]$ biçimindeki indirgenmiş satırca eşelon biçimindeki matrise dönüştürülür.

Yukarıda bulunan en son matrisin 3.satırının (-1) katını 2.satıra ve (-3) katını 1.satıra ilave edersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

matrisi elde edilir. Bu matriste 2.satırın (-2) katını 1.satıra eklersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

matrisi bulunur. Böylece daha önceki metotda olduğu gibi çözümler

$$x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$$

biçimindedir.

Örnek 6.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 14$$
$$3x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

lineer sistemini gözönüne alalım. Bu sistemin ilaveli matrisi

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

biçimindedir. İlk önce bu matris satırca eşelon biçimine dönüştürelim. 1.satırın (-2) katını 2.satıra ve (-3) katını 3.satıra eklersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right)$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin 3.satırı (-1/5) ile çarpılır ve 3.satır ile 2.satır yerdeğiştirirlerse

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right)$$

matrisi bulunmuş olur. Bu matrisin 2.satırının 7 katını 3.satıra ilave edersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right)$$

matrisi elde ederiz. Bu matrisin 3.satırın 1/10 ile çarparsak

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

matrisini buluruz. Bu matris eşelon biçimindedir.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

elde edilir. Geri yerine koyma ile istenen çözüm

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$$

elde edilir. Bu çözümler Gauss yok etme metodu kullanılarak elde edilen çözümlerdir. Verilen lineer denklem sistemini Gauss-Jordan indirgeme metodu ile çözmek için son bulunan matris, aşağıdaki adımlar takip edilerek $[C|D]$ biçimindeki indirgenmiş satırca eşelon biçimindeki matrise dönüştürülür.

Yukarıda bulunan en son matrisin 3.satırının (-2) katını 2.satıra ve (-3) katını 1.satıra ilave edersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

matrisi bulunur. Bu matrisin 2.satırının (-2) katını 1.satıra ilave edersek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

matrisi bulunur. Böylece daha önceki metotda olduğu gibi çözümler

$$x_1 = 1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 3$$

biçimindedir.

b.1. Pivot Yardımıyla Eşelon Forma Çevirme

İlk sütununda sıfırdan farklı elemana sahip olan bir $m \times n$ tipindeki A matrisini gözününe alalım. İlk sütununda sıfırdan farklı bir elemana sahip olan sütuna **pivot sütunu**, pivot sütunundaki sıfırdan farklı ilk elemana da **pivot** adı verilir. Pivot sütununun j-yinci sütun olduğunu ve i.satırda da pivotun bulunduğunu kabul edelim. Şimdi de eğer gerekiyorsa 1. ve i.satırların yerlerini değiştirerek $B = [b_{ij}]$ matrisini elde edelim. Böylece b_{ij}, pivotu sıfırdan farklıdır. B matrisinin ilk satırını $\frac{1}{b_{ij}}$ ile çarparak (yani pivotun tersi ile çarparak) $C = [c_{ij}]$ matrisini bulalım. Burada $c_{ij} = 1$ olduğuna da dikkat edelim. Ardından da $2 \leq h \leq m$ olmak zere c_{hj} sıfırdan farklı ise 1.satırı $-c_{hj}$ ile çarpıp C nin h.satırına ilave edelim. Bu işlemi h nın herbir değeri için yapalım. Buradan C nin $2,3,\ldots,m$ -inci satır ve j-inci sütununda yer alan elemanlarının sıfır olduğu sonucu çıkar. Sonuçta elde edilen matrisi D ile gösterelim.

Daha sonra D matrisinin ilk satırının çıkarılması ile elde edilen D matrisinin $(m-1) \times n$ tipindeki alt matrisi olan A_1 matrisini gözönüne alalım. Yukarıda yapılan işlemleri A matrisi yerine A_1 matrisini alarak tekrar edelim. Bu biçime devam edersek A matrisine satırca denk olan satırca eşelon biçiminde bir matris elde ederiz.

Örnek 7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. 1.sütun, A matrisinin sıfırdan farklı elemana sahip olan (soldan sağa doğru sayıldığında) ilk sütunudur. (Yukarıdan aşağıya sayıldığında) pivot sütunundaki sıfırdan farklı ilk eleman 3.satırdadır. Dolayısıyla pivot $a_{31} = 2$ dir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \boldsymbol{pivot = 2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

A matrisindeki 3.satır 1.satır ile yer değiştirilirse

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur. B matrisinin 1.satırı $\frac{1}{b_{11}} = \frac{1}{2}$ ile çarpılırsa,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Pivot sütunun $d_{11} = 1$ olmak üzere (sadece) sıfırdan farklı elemana sahip olan bir D matrisini elde etmek için C matrisinin ilk satırını (-2) ile çarpar, 4.satıra ilave ederiz ve

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisini buluruz.

D matrisinin ilk satırının çıkarılması ile elde edilen bu D matrisinin A_1 alt matrisini, D matrisinin ilk satırını silmeden (çıkarmadan) tanımlayıp, yukarıdaki adımları A matrisi yerine A_1 matrisi olarak tekrarlayalım.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boldsymbol{pivot = 2} & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinde pivot sütunu 2.sütundur ve pivot a_{32} = 2 dir. A_1 matrisinde 1.satır ile 2.satır yer değiştirilirse

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur. B_1 matrisinin 1.satırı 1/2 ile çarpılırsa,

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. C_1 matrisinin 1.satırını 2 ile çarpılıp 3.satıra ilave edilirse,

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur.

D_1 matrisinin ilk satırı çıkarıldığında A_2 matrisi elde edilir. Yukarıdaki işlemleri A matrisi yerine A_2 matrisi olarak tekrarlayalım. Burada A_2 matrisinin hiç bir satırının yer değiştirmemesine özen gösterelim.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B_2$$

B_2 matrisinin 1.satırı ½ ile çarpılırsa

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur. Sonuç olarak C_2 matrisinin 1.satırı (-2) ile çarpılıp ikinci satıra ilave edilirse,

$$D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece D_2 matrisi satırca eşelon biçiminde olup A matrisine satırca denktir

Kaynakça

- Ömer Akın, Uygulamalı Lineer Cebir, Palme Yayınevi.
- Nuri Özalp, Elif Demirci, Nümerik Analiz, (Numerical Analysis, D. Kincaid, W. Cheney, 3rd ed., (2002), Gazi Kitabevi Yayınları (2012)