計量経済 II：中間試験

村澤 康友

2017 年 11 月 14 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 復元抽出
   (b) 母分散
   (c) 区間推定
   (d) 漸近分布
2. （30 点）$\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ の pdf は
   $$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$
   $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本を $(X_1, \ldots, X_n)$ とする．
   (a) $(X_1, \ldots, X_n)$ の同時 pdf を書きなさい．
   (b) $(X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ を観測したときの $\left(\mu, \sigma^2\right)$ の尤度関数を書きなさい．
   (c) $(X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)$ を観測したときの $\left(\mu, \sigma^2\right)$ の対数尤度関数を書きなさい．
3. （50 点）K 大生の（1 日平均）勉強時間の分布を調べたい．母集団分布を $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ と仮定する（μ, σ^2 は未知）．無作為に選んだ K 大生 6 人に勉強時間を尋ねたところ，45 分・50 分・60 分・65 分・65 分・75 分という回答が得られた．
   (a) 標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 s^2 を求めなさい．
   (b) $\bar{X}$ と s^2 はどのような分布をもつか？（証明不要）
   (c) $\bar{X}$ の分散の推定値を求めなさい．
   (d) μ の 95 %信頼区間を求めなさい．
   (e) σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 取り出した個体を母集団に戻しながら繰り返す抽出.
   (b) 母集団分布の分散.
      - 「母集団の分散」は 1 点減．分散は分布に対して定義する．例えば「日本人の所得の（分布の）分散」は分かるが「日本人の分散」は意味不明.
   (c) 母数を含む領域を定める推定.
   (d) 大標本における推定量の近似的な分布.
2. 最尤法
   (a)

$$
\begin{aligned}
f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) &= f(x_1)\cdots f(x_n)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\cdots\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\\
&= (2\pi)^{-n/2}\left(\sigma^2\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{(x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
L\left(\mu,\sigma^2\right) = (2\pi)^{-n/2}\left(\sigma^2\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{(x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)
$$

   (c)

$$
\ell\left(\mu,\sigma^2\right) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{(x_1-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}
$$

3. 母平均・母分散の区間推定
   (a) 標本平均は

$$
\begin{aligned}
\bar{X} &:= \frac{45+50+60+65+65+75}{6}\\
&= 60
\end{aligned}
$$

   標本分散は

$$
\begin{aligned}
s^2 &:= \frac{(45-60)^2+(50-60)^2+(60-60)^2+(65-60)^2+(65-60)^2+(75-60)^2}{5}\\
&= \frac{225+100+0+25+25+225}{5}\\
&= 120
\end{aligned}
$$

      - 標本平均で 5 点，標本分散で 5 点.
      - s^2 の代わりに $\hat{\sigma}^2$ は 0 点.

   (b)

$$
\begin{gathered}
\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{6}\right)\\
\frac{5s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(5)
\end{gathered}
$$

      - $\bar{X}$ の分布で 5 点，s^2 の分布で 5 点.

（c）$\bar{X}$ の分散の推定値は

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{n} &= \frac{120}{6} \\ &= 20\end{aligned}$$

- σ^2/n は 2 点.

（d）$\bar{X}$ を標準化すると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/6}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/6}} \sim \mathrm{t}(5)$$

t 分布表より

$$\Pr\left[-2.571 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/6}} \le 2.571\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\bar{X} - 2.571\sqrt{\frac{s^2}{6}} \le \mu \le \bar{X} + 2.571\sqrt{\frac{s^2}{6}}\right] = .95$$

$\bar{X} = 60$，$s^2 = 120$ より μ の 95 %信頼区間は

$$\left[60 - 2.571\sqrt{20}, 60 + 2.571\sqrt{20}\right] \approx [48.50, 71.50]$$

- $\mathrm{N}(0,1)$ に基づく信頼区間は 5 点.

（e）$5s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(5)$ なので χ^2 分布表より

$$\Pr\left[.831212 \le \frac{5s^2}{\sigma^2} \le 12.8325\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{5s^2}{12.8325} \le \sigma^2 \le \frac{5s^2}{.831212}\right] = .95$$

$s^2 = 120$ より σ^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{600}{12.8325}, \frac{600}{.831212}\right] \approx [46.76, 721.84]$$