計量分析 2：復習テスト 12

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 1 月 9 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 30 日の予定）にまとめて提出すること．

1. (Y_t, X_t) を時点 $t = 0, 1$ の確率ベクトルとし，処置群に対して時点 1 に処置を行う．処置群ダミーを D とすると，Y_t の (D, X_t) 上への回帰モデルは

$$\mathrm{E}(Y_0|D, X_0) = \alpha_0 + \beta X_0$$
$$\mathrm{E}(Y_1|D, X_1) = \alpha_1 + \mathrm{ATE} \cdot D + \beta X_1$$

ただし時点により切片が異なると仮定する．$\{X_t\}$ が観測できないため，DID 法で ATE を推定したい．

(a) $\mathrm{E}(Y_0|D)$ と $\mathrm{E}(Y_1|D)$ を求めなさい．

(b) $t = 0, 1$ について $\mathrm{E}(Y_t|D = 1) - \mathrm{E}(Y_t|D = 0)$ を求めなさい．

(c) $\mathrm{E}(Y_1|D = 1) - \mathrm{E}(Y_1|D = 0)$ と $\mathrm{E}(Y_0|D = 1) - \mathrm{E}(Y_0|D = 0)$ の差（差分の差分）を求めなさい．

(d) DID 法で ATE を正しく推定できるための条件を与えなさい．

2. (Y_t, X_t, Z) を時点 $t = 0, 1$ の確率ベクトルする．ただし Z は一定とする．Y_t の (X_t, Z) 上への重回帰モデルは

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha_t + \beta X_t + \gamma Z + U_t \\ \mathrm{E}(U_t | X_t, Z) &= 0 \end{aligned}$$

ただし時点により切片が異なると仮定する．Z が観測できないとして，β を推定したい．

(a) $\bar{Y} := (Y_0 + Y_1)/2$, $\bar{X} := (X_0 + X_1)/2$, $\bar{U} := (U_0 + U_1)/2$ とする．$\bar{Y}$ を $\bar{X}, Z, \bar{U}$ で表しなさい．

(b) $Y_t - \bar{Y}$ を $X_t - \bar{X}$ と $U_t - \bar{U}$ で表しなさい．

(c) $\{X_t\}$ の強外生性の定義を与えなさい．

(d) $\{X_t\}$ が強外生なら次の回帰モデルが得られることを示しなさい（平均差分法）．

$$\mathrm{E}\left(Y_t - \bar{Y} | X_0, X_1\right) = \alpha_t - \bar{\alpha} + \beta\left(X_t - \bar{X}\right)$$

解答例

1. (a) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_0|D) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y_0|D, X_0)|D) \\
&= \mathrm{E}(\alpha_0 + \beta X_0|D) \\
&= \alpha_0 + \beta\,\mathrm{E}(X_0|D) \\
\mathrm{E}(Y_1|D) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y_1|D, X_1)|D) \\
&= \mathrm{E}(\alpha_1 + \mathrm{ATE}\cdot D + \beta X_1|D) \\
&= \alpha_1 + \mathrm{ATE}\cdot D + \beta\,\mathrm{E}(X_1|D)
\end{aligned}$$

(b) 前問より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_0|D=1) - \mathrm{E}(Y_0|D=0) &= \alpha_0 + \beta\,\mathrm{E}(X_0|D=1) - (\alpha_0 + \beta\,\mathrm{E}(X_0|D=0)) \\
&= \beta(\mathrm{E}(X_0|D=1) - \mathrm{E}(X_0|D=0)) \\
\mathrm{E}(Y_1|D=1) - \mathrm{E}(Y_1|D=0) &= \alpha_1 + \mathrm{ATE} + \beta\,\mathrm{E}(X_1|D=1) - (\alpha_1 + \beta\,\mathrm{E}(X_1|D=0)) \\
&= \mathrm{ATE} + \beta(\mathrm{E}(X_1|D=1) - \mathrm{E}(X_1|D=0))
\end{aligned}$$

(c) $\Delta X := X_1 - X_0$ とすると，前問より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(Y_1|D=1) - \mathrm{E}(Y_1|D=0) - (\mathrm{E}(Y_0|D=1) - \mathrm{E}(Y_0|D=0)) \\
&= \mathrm{ATE} + \beta(\mathrm{E}(X_1|D=1) - \mathrm{E}(X_1|D=0)) - \beta(\mathrm{E}(X_0|D=1) - \mathrm{E}(X_0|D=0)) \\
&= \mathrm{ATE} + \beta(\mathrm{E}(X_1|D=1) - \mathrm{E}(X_1|D=0) - \mathrm{E}(X_0|D=1) + \mathrm{E}(X_0|D=0)) \\
&= \mathrm{ATE} + \beta(\mathrm{E}(X_1|D=1) - \mathrm{E}(X_0|D=1) - \mathrm{E}(X_1|D=0) + \mathrm{E}(X_0|D=0)) \\
&= \mathrm{ATE} + \beta(\mathrm{E}(X_1 - X_0|D=1) - \mathrm{E}(X_1 - X_0|D=0)) \\
&= \mathrm{ATE} + \beta(\mathrm{E}(\Delta X|D=1) - \mathrm{E}(\Delta X|D=0))
\end{aligned}$$

(d) 前問より条件は $\mathrm{E}(\Delta X|D=1) = \mathrm{E}(\Delta X|D=0)$（平行トレンドの仮定）.

2. (a)

$$\begin{aligned}
\bar{Y} &:= \frac{Y_0 + Y_1}{2} \\
&= \frac{\alpha_0 + \beta X_0 + \gamma Z + U_0 + \alpha_1 + \beta X_1 + \gamma Z + U_1}{2} \\
&= \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} + \frac{\beta(X_0 + X_1)}{2} + \frac{2\gamma Z}{2} + \frac{U_0 + U_1}{2} \\
&= \bar{\alpha} + \beta\bar{X} + \gamma Z + \bar{U}
\end{aligned}$$

ただし $\bar{\alpha} := (\alpha_0 + \alpha_1)/2$.

(b) 前問より

$$\begin{aligned}
Y_t - \bar{Y} &= \alpha_t + \beta X_t + \gamma Z + U_t - \left(\bar{\alpha} + \beta\bar{X} + \gamma Z + \bar{U}\right) \\
&= \alpha_t - \bar{\alpha} + \beta\left(X_t - \bar{X}\right) + U_t - \bar{U}
\end{aligned}$$

(c) $t = 0, 1$ について $\mathrm{E}(U_t|X_0, X_1) = 0$ なら $\{X_t\}$ は強外生という.

(d)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(Y_t - \bar{Y}|X_0, X_1\right) &= \mathrm{E}\left(\alpha_t - \bar{\alpha} + \beta\left(X_t - \bar{X}\right) + U_t - \bar{U}|X_0, X_1\right) \\
&= \alpha_t - \bar{\alpha} + \beta\left(X_t - \bar{X}\right) + \mathrm{E}\left(U_t - \bar{U}|X_0, X_1\right)
\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{E}\left(U_t - \bar{U}|X_0, X_1\right) = 0$ を示せばよい．$\{X_t\}$ は強外生なので

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(U_t - \bar{U}|X_0, X_1\right) &= \mathrm{E}(U_t|X_0, X_1) - \mathrm{E}\left(\bar{U}|X_0, X_1\right) \\
&= -\mathrm{E}\left(\frac{U_0 + U_1}{2}|X_0, X_1\right) \\
&= -\frac{\mathrm{E}(U_0|X_0, X_1) + \mathrm{E}(U_1|X_0, X_1)}{2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$