計量経済 I：前期試験

村澤 康友

2018 年 7 月 31 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）2 項分布
   （b）（区間 $[a, b]$ 上の）一様分布
   （c）同時累積分布関数
   （d）（確率変数の）共分散
2. （30 点）$X \sim \mathrm{N}(4, 3)$ と $Y \sim \mathrm{N}(2, 1)$ は独立とする．
   （a）$Z := X - Y$ の分布を求めなさい．
   （b）$\Pr[0 < Z \leq 5]$ を標準正規分布表を利用して求めなさい．
   （c）$\mathrm{cov}(X, Z)$ を求めなさい．
3. （50 点）2 次元確率ベクトル (X, Y) は以下の同時分布をもつ．

$X \backslash Y$	0	1
0	1/10	2/10
1	3/10	4/10

   （a）X と Y の周辺分布をそれぞれ求めなさい．
   （b）X と Y の期待値をそれぞれ求めなさい．
   （c）X と Y の分散をそれぞれ求めなさい．
   （d）XY の分布を求めなさい．
   （e）X と Y の共分散を求めなさい．

解答例

1. 確率の基本用語
   (a) 独立かつ同一な n 回のベルヌーイ試行における成功回数の分布.
      - pmf で定義しても OK.
   (b) 区間 $[a,b]$ 上の一様分布の pdf は

$$f(x) := \begin{cases} 1/(b-a) & \text{for } x \in [a,b] \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

      - 「pdf が一定」は「区間 $[a,b]$ 上」の説明がないので 2 点.
   (c) (X,Y) の同時 cdf は，任意の (x,y) について

$$F_{X,Y}(x,y) := \Pr[X \le x, Y \le y]$$

   (d) X と Y の共分散は

$$\operatorname{cov}(X,Y) := \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))$$

      - 「平均からの偏差の積の平均」も OK.
      - カッコの間違いは意味が変わるので 0 点.
      - $\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$ は定義でないので 0 点.
2. 正規分布
   (a) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}(X-Y) \\ &= \mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y) \\ &= 4-2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

   X と Y は独立なので

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(Z) &= \operatorname{var}(X-Y) \\ &= \operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y) \\ &= 3+1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

   正規分布の線形変換は正規分布なので $Z \sim \mathrm{N}(2,4)$.
      - 平均で 2 点，分散で 4 点，正規分布で 4 点.
   (b) 標準正規分布表より

$$\begin{aligned} \Pr[0 < Z \le 5] &= \Pr\left[\frac{0-2}{2} < \frac{Z-2}{2} \le \frac{5-2}{2}\right] \\ &= \Pr\left[-1 < \frac{Z-2}{2} \le 1.5\right] \\ &= 1-Q(1)-Q(1.5) \\ &\approx 1-.15866-.066807 \\ &= .774533 \end{aligned}$$

- 正しい標準化で 5 点.

(c) X と Y は独立なので

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Z) &= \operatorname{cov}(X, X-Y) \\
&= \operatorname{var}(X) - \operatorname{cov}(X, Y) \\
&= \operatorname{var}(X) \\
&= 3
\end{aligned}
$$

3. 最も単純な 2 変量分布

(a)

$$
\begin{aligned}
X &= \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 7/10 \\ 0 & \text{with pr. } 3/10 \end{cases} \\
Y &= \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 6/10 \\ 0 & \text{with pr. } 4/10 \end{cases}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &:= 1 \cdot \frac{7}{10} + 0 \cdot \frac{3}{10} \\
&= \frac{7}{10} \\
\mathrm{E}(Y) &:= 1 \cdot \frac{6}{10} + 0 \cdot \frac{4}{10} \\
&= \frac{6}{10}
\end{aligned}
$$

(c) 簡単な求め方は

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \mathrm{E}(X)(1 - \mathrm{E}(X)) \\
&= \frac{21}{100} \\
\operatorname{var}(Y) &= \mathrm{E}(Y)(1 - \mathrm{E}(Y)) \\
&= \frac{24}{100}
\end{aligned}
$$

同時分布または周辺分布から定義通りに求めてもよい.

(d)

$$
XY = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 4/10 \\ 0 & \text{with pr. } 6/10 \end{cases}
$$

(e) 簡単な求め方は

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \frac{4}{10} - \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \\
&= -\frac{2}{100}
\end{aligned}
$$

同時分布または周辺分布から定義通りに求めてもよい.

- $\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$ で 5 点.