

計量経済 I：前期期末試験

村澤 康友

2015 年 7 月 28 日

注意：3 問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいに与えるが、結果のみの解答は 0 点とする）。

1. (20 点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）。
 - (a) 離散一様分布
 - (b) 同時確率関数
 - (c) 条件つき確率関数
 - (d) 標本平均
2. (30 点)
 - (a) $X, Y \sim N(1, 2)$ は独立とする。 $X - Y$ の分布を求めなさい。
 - (b) $Z \sim N(0, 1)$ とする。 $\Pr[Z^2 \leq 4]$ を標準正規分布表を利用して求めなさい。
 - (c) $X \sim N(50, 100)$ とする。 $\Pr[X > 70]$ を標準正規分布表を利用して求めなさい。
3. (50 点) 赤いサイコロの目を X ，青いサイコロの目を Y とする。2 つの目の合計を Z とする。
 - (a) X, Y の確率関数をそれぞれ式で書きなさい。
 - (b) X, Y の平均と分散をそれぞれ求めなさい。
 - (c) Z の確率関数を式で書きなさい。
 - (d) Z の平均と分散を求めなさい。
 - (e) $X = 3$ のときの Z の条件つき確率関数を式で書きなさい。

解答例

1. 確率・統計の基本用語

(a) $\{1, \dots, N\}$ 上の離散一様分布の確率関数は

$$p_X(x) := \begin{cases} 1/N & \text{for } x = 1, \dots, N \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

(b) (X, Y) の同時確率関数は

$$p_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

- 「同時に起こる確率を与える関数」は同時累積分布関数と区別できないので 0 点.

(c) $Y = y$ が与えられたときの X の条件つき確率関数は

$$p_{X|Y}(x|Y = y) := \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

- 「条件をつけた確率を与える関数」は確率の求め方が不明なので 0 点.

(d) (X_1, \dots, X_n) の標本平均は

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

- 「標本の平均」は「標本の期待値」の意味になるので 0 点.

2. 正規分布

(a)

$$\begin{aligned} E(X - Y) &= E(X) - E(Y) \\ &= 0 \\ \text{var}(X - Y) &= \text{var}(X + (-Y)) \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(-Y) \\ &= \text{var}(X) + (-1)^2 \text{var}(Y) \\ &= 4 \end{aligned}$$

したがって正規分布の再生性より $X - Y \sim N(0, 4)$.

(b)

$$\begin{aligned} \Pr[Z^2 \leq 4] &= \Pr[-2 \leq Z \leq 2] \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) \\ &= (1 - Q(2)) - Q(2) \\ &= (1 - .02275) - .02275 \\ &= .9545 \end{aligned}$$

- $\Pr[-2 \leq Z \leq 2]$ まですべて 2 点.
- $\Phi(2) - \Phi(-2)$ まですべて 5 点.

(c) $Z \sim N(0, 1)$ とすると

$$\begin{aligned} \Pr[X > 70] &= \Pr\left[\frac{X - 50}{10} > \frac{70 - 50}{10}\right] \\ &= \Pr[Z > 2] \\ &= .022750 \end{aligned}$$

- 標準化して 5 点.

3. 多変量離散分布の例

(a) X の確率関数は

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{for } x = 1, \dots, 6 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Y についても同様.

- 「for $1 \leq x \leq 6$ 」 「for $1 \leq y \leq 6$ 」 は各 1 点減.
- 確率関数でなければ 0 点.

(b)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^6 x \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1 + \dots + 6}{6} \\ &= 3.5 \\ \text{var}(X) &= \sum_{x=1}^6 (x - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{(1 - 3.5)^2 + \dots + (6 - 3.5)^2}{6} \\ &= \frac{2(2.5^2 + 1.5^2 + .5^2)}{6} \\ &= \frac{6.25 + 2.25 + .25}{3} \\ &= \frac{8.75}{3} \end{aligned}$$

Y についても同様.

(c) Z の確率関数は

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1/36 & \text{for } z = 2, 12 \\ 2/36 & \text{for } z = 3, 11 \\ 3/36 & \text{for } z = 4, 10 \\ 4/36 & \text{for } z = 5, 9 \\ 5/36 & \text{for } z = 6, 8 \\ 6/36 & \text{for } z = 7 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- 確率関数でなければ 5 点.

(d)

$$\begin{aligned} E(Z) &= E(X + Y) \\ &= E(X) + E(Y) \\ &= 7 \\ \text{var}(Z) &= \text{var}(X + Y) \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) \\ &= \frac{17.5}{3} \end{aligned}$$

- 定義から計算しても OK.
- $E(Z) = (2 + \cdots + 12)/11 = 7$ は考え方が間違いなので 0 点.

(e) Z の条件つき確率関数は

$$p_{Z|X=3}(z) = \begin{cases} 1/6 & \text{for } z = 4, \dots, 9 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- 確率関数でなければ 5 点.