

中級統計学：復習テスト 3

学籍番号 _____ 氏名 _____

2024 年 9 月 27 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1～8 を順に重ねて左上でホチキス止めし、第 1 回中間試験実施日（10 月 18 日の予定）に提出すること。

1. 1 変量データ (x_1, \dots, x_n) の平均を μ ，分散を σ^2 とする。

(a) σ^2 の定義を式で書きなさい。

(b) σ^2 が次のようにも書けることを示しなさい。

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2$$

注： $\sum_{i=1}^n x_i^2 := x_1^2 + \dots + x_n^2$

2. 2 変量データ $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ の平均を μ_x, μ_y , 分散を σ_x^2, σ_y^2 , 共分散を σ_{xy} , 相関係数を ρ_{xy} とする.

(a) σ_{xy} の定義を式で書きなさい.

(b) σ_{xy} が次のようにも書けることを示しなさい.

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \mu_x \mu_y$$

注: $\sum_{i=1}^n x_i y_i := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

(c) ρ_{xy} の定義を式で書きなさい.

(d) ρ_{xy} が次のように書けることを示しなさい.

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

解答例

1. (a)

$$\sigma^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

(b)

$$\begin{aligned}\sigma^2 &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) \\&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i\mu + \sum_{i=1}^n \mu^2 \right) \\&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i\mu + n\mu^2 \right) \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n x_i\mu + \mu^2 \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \mu + \mu^2 \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2\end{aligned}$$

2. (a)

$$\sigma_{xy} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

(b)

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i \mu_y - \mu_x y_i + \mu_x \mu_y) \\&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \mu_y - \mu_x \sum_{i=1}^n y_i + n \mu_x \mu_y \right) \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \mu_y - \mu_x \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i + \mu_x \mu_y \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y + \mu_x \mu_y \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \mu_x \mu_y\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \\ &= \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} \\ &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\end{aligned}$$