計量経済 I：復習テスト 10

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2025 年 6 月 24 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（7 月 29 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ を無作為標本とする．y_i の x_i 上への定数項なしの単回帰モデルは

$$\begin{aligned} y_i &= \beta x_i + u_i \\ \mathrm{E}(u_i|x_i) &= 0 \end{aligned}$$

β の OLS 推定量を b_n，OLS 残差を e_i とする．

（a）$\sqrt{n}(b_n - \beta)$ が次のように表現できることを示しなさい．

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) = \frac{(1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n)\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

（b）$\sqrt{n}(b_n - \beta)$ の分布が次の正規分布で近似できる理由を説明しなさい．

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(0, \frac{\mathrm{var}(x_i u_i)}{\mathrm{E}(x_i^2)^2}\right)$$

（c）次式を示しなさい．

$$\mathrm{var}(x_i u_i) = \mathrm{E}\left(x_i^2 u_i^2\right)$$

（d）$\mathrm{var}(x_i u_i)$ の White の推定量を与えなさい．

2. $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ を無作為標本とする．次のような y_i の x_i 上への条件つき不均一分散をもつ単回帰モデルを仮定する．

$$
\begin{aligned}
y_i &= \alpha + \beta x_i + u_i \\
\mathrm{E}(u_i|x_i) &= 0 \\
\mathrm{var}(u_i|x_i) &= \sigma^2 \exp(\gamma x_i)
\end{aligned}
$$

(a) 条件つき不均一分散の検定問題を定式化しなさい．

(b) 次式を示しなさい．

$$
\mathrm{var}(u_i|x_i) = \mathrm{E}\left(u_i^2|x_i\right)
$$

(c) H_0 の下で次式を示しなさい．

$$
\mathrm{E}\left(u_i^2 - \sigma^2|x_i\right) = 0
$$

(d) Breusch–Pagan による条件つき不均一分散の検定方法を直感的に説明しなさい．

解答例

1. (a) β の OLS 推定量は

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$y_i = \beta x_i + u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i(\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \left(\beta x_i^2 + x_i u_i\right)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\beta \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

式変形すると

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) = \frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(b) 大数の法則より分母は

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \mathrm{E}\left(x_i^2\right)$$

$\mathrm{E}(u_i|x_i) = 0 \Longrightarrow \mathrm{E}(x_i u_i) = 0$ なので中心極限定理より分子は

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i u_i \xrightarrow{d} \mathrm{N}(0, \mathrm{var}(x_i u_i))$$

極限において正規分布の線形変換となっているので

$$\frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2} \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \frac{\mathrm{var}(x_i u_i)}{\mathrm{E}(x_i^2)^2}\right)$$

この極限分布で $\sqrt{n}(b_n - \beta)$ の分布を近似する.

(c) 分散の計算公式より

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(x_i u_i) &= \mathrm{E}\left((x_i u_i)^2\right) - \mathrm{E}(x_i u_i)^2 \\ &= \mathrm{E}\left(x_i^2 u_i^2\right) - \mathrm{E}(x_i u_i)^2 \end{aligned}$$

繰り返し期待値の法則より第 2 項は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(x_i u_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(x_i u_i|x_i)) \\ &= \mathrm{E}(x_i \mathrm{E}(u_i|x_i)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(d) $\mathrm{var}(x_i u_i)$ の White の推定量は

$$\widehat{\mathrm{var}}(x_i u_i) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2$$

2.（a）条件つき不均一分散の検定問題は

$$H_0 : \gamma = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \gamma \neq 0$$

（b）$\mathrm{E}(u_i|x_i) = 0$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(u_i|x_i) &:= \mathrm{E}\left((u_i - \mathrm{E}(u_i|x_i))^2|x_i\right) \\ &= \mathrm{E}\left(u_i^2|x_i\right)\end{aligned}$$

（c）前問より

$$\mathrm{E}\left(u_i^2|x_i\right) = \sigma^2 \exp(\gamma x_i)$$

H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(u_i^2|x_i\right) = \sigma^2$$

すなわち

$$\mathrm{E}\left(u_i^2 - \sigma^2|x_i\right) = 0$$

（d）前問より $u_i^2 - \sigma^2$ の x_i 上への回帰の回帰係数は H_0 の下で 0．(α, β) の OLS 推定量を (a, b)，OLS 残差を $e_i := y_i - a - bx_i$，H_0 の下での誤差分散の推定量を $\hat{\sigma}^2 := (1/n)\sum_{i=1}^n e_i^2$ とする．Breusch–Pagan の検定では $u_i^2 - \sigma^2$ の代わりに $e_i^2 - \hat{\sigma}^2$ を x_i に回帰して回帰係数が 0 かどうかを検定する．