経済統計：前期第 3 回中間試験

村澤 康友

2009 年 7 月 6 日

注意：3 問とも解答すること．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）母集団
   （b）（単純）無作為抽出
   （c）最尤法
   （d）一致推定量
2. （50 点）府大生の（1 日平均）睡眠時間の母集団分布を $\mathrm{N}(8,4)$ とする．無作為に選んだ府大生 5 人の睡眠時間を $(X_1,\ldots,X_5)$ とする．
   （a）標本和 $X_1+\cdots+X_5$ の分布を求めなさい．
   （b）標本平均 $\bar{X}$ の分布を求めなさい．
   （c）標本分散 s^2 の分布を示しなさい（証明不要）．
   （d）$\Pr\left[|\bar{X}-8|\le c\right]=.95$ となる c を求めなさい．
   （e）$\Pr\left[a<s^2\le b\right]=.95$ となる a,b を求めなさい．
3. （30 点）府大生の（1 日平均）睡眠時間の分布を調べたい．母集団分布を $\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ と仮定する（μ,σ^2 は未知）．無作為に選んだ府大生 5 人に睡眠時間を尋ねたところ，6 時間・7 時間・7 時間・9 時間・11 時間という回答が得られた．
   （a）標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 s^2 を求めなさい．
   （b）μ の 95 %信頼区間を求めなさい．
   （c）σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 考察の対象全体.
       - 「観察の対象」「調査の対象」は標本なので 0 点.
   (b) 各個体が等確率で取り出される抽出.
       - 「でたらめ（ランダム）な抽出」は OK.
       - 「無作為な抽出」「偏りのない抽出」は具体的でないので 0 点（単純でない無作為抽出もある）.
   (c)（対数）尤度関数を最大にする解を母数の推定値とする手法.
       - 「最も尤もらしい推定値を求める手法」は具体的でないので 0 点.
   (d) 母数に確率収束する推定量.
       - 「母数に」「確率収束」がなければ 0 点.
2. 標本平均・標本分散の標本分布
   (a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_5) &= \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_5) \\
&= 5 \cdot 8 \\
&= 40, \\
\mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_5) &= \mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_5) \\
&= 5 \cdot 4 \\
&= 20.
\end{aligned}
$$

   したがって $X_1 + \cdots + X_5 \sim \mathrm{N}(40, 20)$.
   - 平均・分散のみは 5 点.
   - $\mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$ は 5 点.

   (b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_5}{5}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_5)}{5} \\
&= \frac{40}{5} \\
&= 8, \\
\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_5}{5}\right) \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_5)}{25} \\
&= \frac{20}{25} \\
&= \frac{4}{5}.
\end{aligned}
$$

   したがって $\bar{X} \sim \mathrm{N}(8, 4/5)$.
   - 平均・分散のみは 5 点.
   - $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ は 5 点.

(c) 一般に $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ より

$$\frac{4s^2}{4} \sim \chi^2(4),$$

すなわち

$$s^2 \sim \chi^2(4).$$

- $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ で 5 点.
- $\hat{\sigma}^2$（母平均が既知の場合）との区別が曖昧だったので $5\hat{\sigma}^2/4 \sim \chi^2(5)$ でも 5 点与える.

(d)

$$\begin{aligned}
\Pr\left[|\bar{X}-8| \leq c\right] &= \Pr\left[-c \leq \bar{X}-8 \leq c\right] \\
&= \Pr\left[-\frac{c}{\sqrt{4/5}} \leq \frac{\bar{X}-8}{\sqrt{4/5}} \leq \frac{c}{\sqrt{4/5}}\right] \\
&= \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{4/5}}\right) - \Phi\left(-\frac{c}{\sqrt{4/5}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{4/5}}\right) - \left(1-\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{4/5}}\right)\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{4/5}}\right) - 1.
\end{aligned}$$

したがって

$$2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{4/5}}\right) - 1 = .95 \Longrightarrow \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{4/5}}\right) = .975.$$

標準正規分布表より

$$\frac{c}{\sqrt{4/5}} \approx 1.96.$$

したがって

$$\begin{aligned}
c &\approx 1.96\sqrt{\frac{4}{5}} \\
&\approx 1.75.
\end{aligned}$$

(e) $s^2 \sim \chi^2(4)$ なので χ^2 分布表より

$$\Pr\left[.484419 < s^2 \leq 11.1433\right] = .95.$$

したがって $(a,b) = (.484419, 11.1433)$.

- 片方正解は 5 点.
- $a > 0$ と明記してないので $(a,b) = (0, 9.48773)$ も可.
- $5\hat{\sigma}^2/4 \sim \chi^2(5)$ で求めても可とする.

3. 母平均・母分散の区間推定

(a)

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \frac{6+7+7+9+11}{5} \\ &= 8, \\ s^2 &= \frac{(6-8)^2+(7-8)^2+(7-8)^2+(9-8)^2+(11-8)^2}{5-1} \\ &= \frac{4+1+1+1+9}{4} \\ &= 4.\end{aligned}$$

- 各 5 点.

(b) $\bar{X}, s^2$ の標本分布は

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{5}\right),$$

$$\frac{4s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(4).$$

$\bar{X}$ を標準化すると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/5}} \sim \mathrm{N}(0,1).$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/5}} \sim \mathrm{t}(4).$$

t 分布表より

$$\Pr\left[-2.776 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/5}} \le 2.776\right] = .95.$$

すなわち

$$\Pr\left[\bar{X} - 2.776\sqrt{\frac{s^2}{5}} \le \mu \le \bar{X} + 2.776\sqrt{\frac{s^2}{5}}\right] = .95.$$

$\bar{X} = 8,\ \ s^2 = 4$ より μ の 95 %信頼区間は $[5.52, 10.48]$.

- (a) の解答と整合的なら OK.
- 自由度の間違いは 0 点.

(c) $4s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(4)$ なので χ^2 分布表より

$$\Pr\left[.484419 \le \frac{4s^2}{\sigma^2} \le 11.1433\right] = .95,$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{4s^2}{11.1433} \le \sigma^2 \le \frac{4s^2}{.484419}\right] = .95,$$

$s^2 = 4$ より σ^2 の 95 %信頼区間は $[1.44, 33.03]$.

- (a) の解答と整合的なら OK.
- 自由度の間違いは 0 点.

※答案は返却します．採点や成績に関する質問にも応じます．**オフィスアワーの時間（月水木金の昼休み）に**研究室まで来てください.