中級統計学：復習テスト 20

学籍番号___________________氏名___________________

2025 年 12 月 9 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 14〜20 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 3 回中間試験実施日（12 月 12 日の予定）に提出すること．

1. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}$ とする．
   (a) $\bar{X}$ の分布を求めなさい．

   (b) σ^2 を既知として μ の 95 %信頼区間を求めなさい．

2. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本分散を s^2 とする．
   (a) s^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：変形が必要）

   (b) $n = 10$ として σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

3. $\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$, $\mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ から独立に抽出した大きさ m, n の無作為標本の標本分散を s_X^2, s_Y^2 とする.

（a） s_X^2, s_Y^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：変形が必要）

（b） s_X^2/s_Y^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：同上）

（c） $m=4,\ n=6$ として σ_X^2/σ_Y^2 の 95 %信頼区間を求めなさい.

解答例

1.（a）期待値の線形性より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1+\cdots+X_n)}{n} \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_n)}{n} \\
&= \frac{\mu+\cdots+\mu}{n} \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

$X_1,\ldots,X_n$ は独立なので

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1+\cdots+X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1)+\cdots+\mathrm{var}(X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2+\cdots+\sigma^2}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

正規分布の線形変換は正規分布なので

$$
\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)
$$

（b）標準化すると

$$
\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)
$$

標準正規分布表より

$$
\Pr\left[-1.96 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \le 1.96\right] = 0.95
$$

すなわち

$$
\Pr\left[-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \bar{X}-\mu \le 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = 0.95
$$

または

$$
\Pr\left[\bar{X}-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \mu \le \bar{X}+1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = 0.95
$$

したがって μ の 95 %信頼区間は

$$
\left[\bar{X}-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X}+1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]
$$

2. (a)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(b) χ^2 分布表より

$$\Pr\left[2.70039 \le \frac{9s^2}{\sigma^2} \le 19.0228\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{19.0228} \le \frac{\sigma^2}{9s^2} \le \frac{1}{2.70039}\right] = 0.95$$

または

$$\Pr\left[\frac{9s^2}{19.0228} \le \sigma^2 \le \frac{9s^2}{2.70039}\right] = 0.95$$

したがって σ^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{9}{19.0228}s^2, \frac{9}{2.70039}s^2\right]$$

3. (a)

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$
$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(b)

$$\frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

すなわち

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

(c) F 分布表より

$$\Pr\left[\frac{1}{14.885} \le \frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \le 7.764\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{7.764} \le \frac{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}{s_X^2/s_Y^2} \le 14.885\right] = 0.95$$

または

$$\Pr\left[\frac{1}{7.764}\frac{s_X^2}{s_Y^2} \le \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \le 14.885\frac{s_X^2}{s_Y^2}\right] = 0.95$$

したがって σ_X^2/σ_Y^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{1}{7.764}\frac{s_X^2}{s_Y^2}, 14.885\frac{s_X^2}{s_Y^2}\right]$$