

第 13 回 大数の法則と中心極限定理 (8)

村澤 康友

2025 年 11 月 11 日

今日のポイント

- 確率変数列 $\{X_i\}$ の標本平均 $\bar{X}_n := (X_1 + \dots + X_n)/n$ の分布を近似する.
- $\{X_i\}$ が平均 μ , 分散 σ^2 の独立かつ同一な分布をもつなら $\{\bar{X}_n\}$ は μ に確率収束 (大数の法則).
- $\{Z_i\}$ が平均 0, 分散 1 の独立かつ同一な分布をもつなら $\{\sqrt{n}\bar{Z}_n\}$ は $N(0, 1)$ に分布収束 (中心極限定理). したがって $\bar{Z}_n \xrightarrow{a} N(0, 1/n)$.

目次

1	標本平均 (pp. 149, 183)	1
2	大数の法則	2
2.1	確率収束 (p. 162)	2
2.2	大数の法則 (p. 160)	2
3	中心極限定理	2
3.1	分布収束	2
3.2	総乗記号	2
3.3	中心極限定理 (p. 162)	2
3.4	正規乱数の生成 (p. 171)	3
4	今日のキーワード	4
5	次回までの準備	4
1	標本平均 (pp. 149, 183)	

$\{X_i\}$ を確率変数列とする.

定義 1. (X_1, \dots, X_n) の標本平均は

$$\bar{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

注 1. 確率変数の平均 (期待値) とは異なる.

定理 1. X_1, \dots, X_n が平均 μ の同一な分布をもつなら

$$E(\bar{X}_n) = \mu$$

証明. 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_n) &= E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n} \\ &= \frac{\mu + \dots + \mu}{n} \\ &= \mu \end{aligned}$$

□

定理 2. X_1, \dots, X_n が分散 σ^2 の独立かつ同一な分布をもつなら

$$\text{var}(\bar{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

証明. X_1, \dots, X_n は独立なので

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{X}_n) &= \text{var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{\text{var}(X_1 + \dots + X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\text{var}(X_1) + \dots + \text{var}(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2 + \dots + \sigma^2}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

□

2 大数の法則

2.1 確率収束 (p. 162)

$\{x_n\}$ を実数列, $\{X_n\}$ を確率変数列とする.

定義 2. 任意の $\epsilon > 0$ について, ある自然数 $N(\epsilon)$ が存在し,

$$n \geq N(\epsilon) \implies |x_n - c| < \epsilon$$

なら $\{x_n\}$ は c に収束するという.

注 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ または $x_n \rightarrow c$ と書く.

定義 3. 任意の $\epsilon > 0$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[|X_n - c| < \epsilon] = 1$$

なら $\{X_n\}$ は c に確率収束するという.

注 3. $\text{plim}_{n \rightarrow \infty} X_n = c$ または $X_n \xrightarrow{p} c$ と書く.

注 4. 確率変数列の収束の概念は他にもある.

2.2 大数の法則 (p. 160)

定理 3 (チェビシェフの大数の弱法則). $\{X_i\}$ が平均 μ , 分散 σ^2 の独立かつ同一な分布をもつなら

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu$$

証明. チェビシェフの不等式より, 任意の $\epsilon > 0$ について

$$\Pr[|\bar{X}_n - \mathbb{E}(\bar{X}_n)| \geq \epsilon] \leq \frac{\text{var}(\bar{X}_n)}{\epsilon^2}$$

すなわち

$$\Pr[|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon] \leq \frac{\sigma^2/n}{\epsilon^2}$$

余事象の確率は

$$\Pr[|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon] > 1 - \frac{\sigma^2/n}{\epsilon^2}$$

$n \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[|\bar{X}_n - \mu| < \epsilon] \geq 1$$

確率は 1 以下なので等号が成立. \square

例 1. コインを 10 回, 100 回, 1000 回と投げ続けると表の出る割合は $1/2$ に近づく (図 1).

3 中心極限定理

3.1 分布収束

$\{X_n\}$ に対応する cdf の列を $\{F_n(\cdot)\}$ とする.

定義 4. $F(\cdot)$ の任意の連続点 x で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

なら $\{X_n\}$ は $F(\cdot)$ に分布(法則)収束するという.

注 5. $X_n \xrightarrow{d} F(\cdot)$ と書く.

3.2 総乗記号

定義 5.

$$\prod_{i=1}^n x_i := x_1 \cdots x_n$$

練習 1. 以下の公式を示しなさい.

1. $\prod_{i=1}^n ax_i = a^n \prod_{i=1}^n x_i$
2. $\prod_{i=1}^n a^{x_i} = a^{\sum_{i=1}^n x_i}$
3. $\prod_{i=1}^n x_i y_i = \prod_{i=1}^n x_i \prod_{i=1}^n y_i$

3.3 中心極限定理 (p. 162)

定理 4 (リンドバーグ=レヴィの中心極限定理). $\{Z_i\}$ が平均 0, 分散 1 の独立かつ同一な分布をもつなら

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

証明. $(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n Z_i$ の mgf が $N(0, 1)$ の mgf に収束することを示せばよい. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i}(t) = e^{t^2/2}$$

を示したい. Z_1, \dots, Z_n は独立かつ同一な分布をもつので

$$\begin{aligned} M_{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i}(t) &:= E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i}\right) \\ &= E\left(\prod_{i=1}^n e^{\frac{t}{\sqrt{n}} Z_i}\right) \\ &= \prod_{i=1}^n E\left(e^{\frac{t}{\sqrt{n}} Z_i}\right) \\ &= M_Z\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \end{aligned}$$

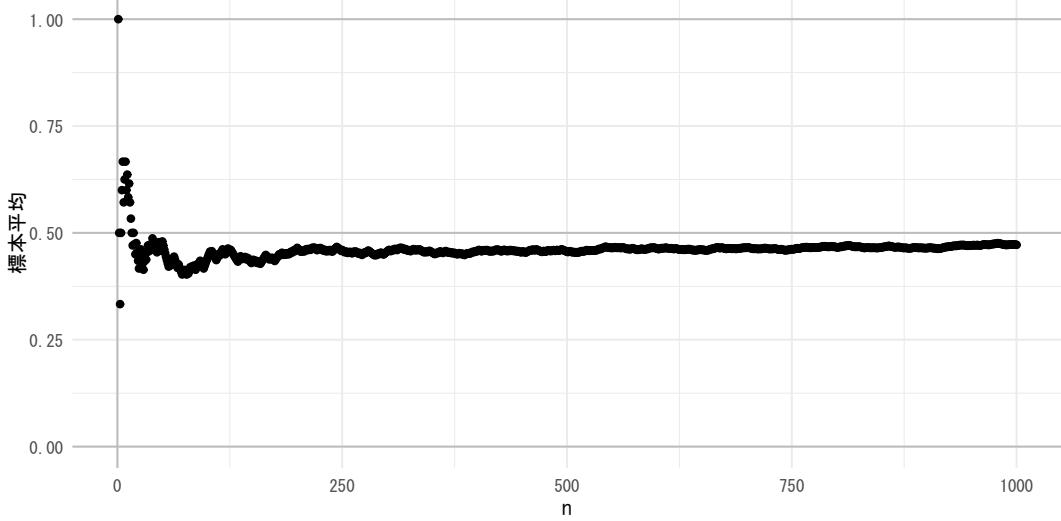


図 1 n 回のコイントスにおける表の割合

$M'_Z(0) = 0, M''_Z(0) = 1$ なので、マクローリン展開より

$$\begin{aligned} M_Z\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ = M_Z(0) + M'_Z(0)\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{M''_Z(0)}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + \dots \\ = 1 + \frac{t^2}{2n} + \dots \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_Z\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \dots\right)^n = e^{t^2/2}$$

□

注 6. 式変形すると

$$\sqrt{n}\bar{Z}_n \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

系 1. $\{X_i\}$ が平均 μ , 分散 σ^2 の独立かつ同一な分布をもつなら

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

証明. $Z_i := (X_i - \mu)/\sigma$ として前定理を適用. □

注 7. 式変形すると

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

定義 6. n が大きいときの X_n の近似分布を漸近分布という.

注 8. 中心極限定理より

$$\sqrt{n}\bar{Z}_n \xrightarrow{a} N(0, 1)$$

$$\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \xrightarrow{a} N(0, 1)$$

すなわち

$$\bar{Z}_n \xrightarrow{a} N\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

ただし \xrightarrow{a} は漸近分布を表す.

例 2. 指数乱数の標本平均の分布（図 2）.

3.4 正規乱数の生成 (p. 171)

$\{U_i\}$ を $[0, 1]$ 上の一様乱数の列とすると

$$E(U_i) = \frac{1}{2}$$

$$\text{var}(U_i) = \frac{1}{12}$$

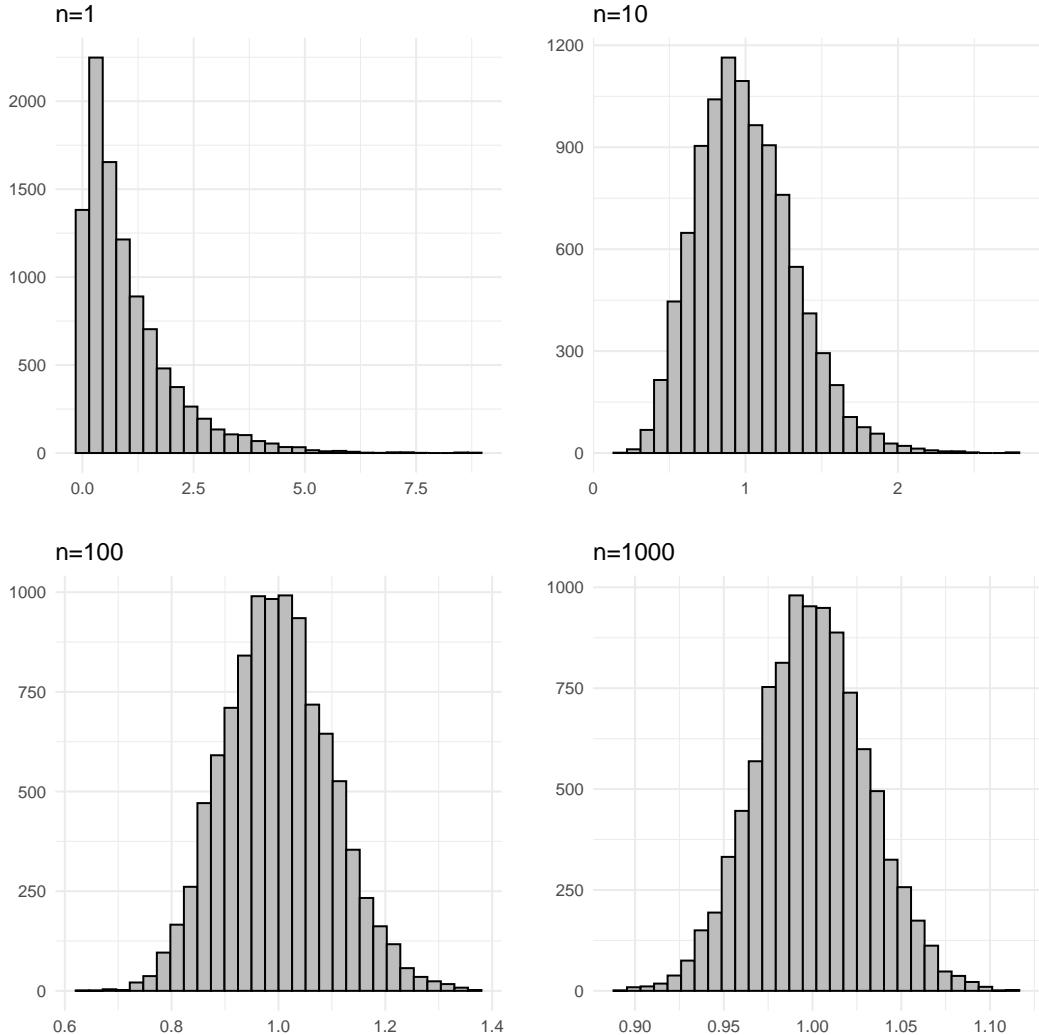


図 2 指数乱数の標本平均の分布

$X := U_1 + \dots + U_{12} - 6$ とすると

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \\ \text{var}(X) &= 1\end{aligned}$$

中心極限定理より

$$X \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

これを用いて一様乱数から標準正規乱数が生成できる（図 3）。

4 今日のキーワード

標本平均, 確率収束, 大数の法則, 分布収束, 中心極限定理, 減近分布

5 次回までの準備

提出 宿題 4, 復習テスト 9–13

復習 教科書第 8 章, 復習テスト 13

試験 (1) 教科書を読む (2) 用語の定義を覚える (3) 復習テストを自力で解く (4) 過去問に挑戦

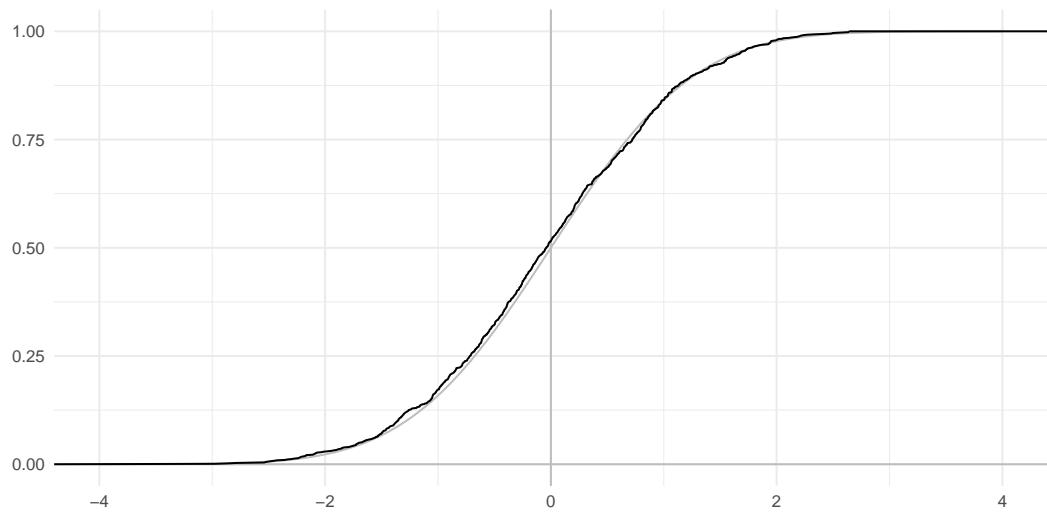


図 3 1000 個の標準正規乱数の累積相対度数グラフと $N(0, 1)$ の cdf