第 9 回　代表的な離散分布（6.1–6.5）

村澤 康友

2024 年 10 月 22 日

今日のポイント

1. 結果が 2 通り（成功／失敗）しかない試行をベルヌーイ試行という．成功を 1，失敗を 0 とした確率変数の分布をベルヌーイ分布という．
2. 独立かつ同一な n 回のベルヌーイ試行における成功回数の分布を 2 項分布という．
3. まれな現象が起こる回数は，小数の法則によりポアソン分布にしたがう．
4. 独立かつ同一なベルヌーイ試行における初成功までの失敗回数の分布を幾何分布，r 回成功までの失敗回数の分布を負の 2 項分布という．
5. 壺の中の N 個の玉のうち M 個が当たりのとき，n 個を非復元抽出したときの当たりの個数の分布を超幾何分布という．

目次

1　ベルヌーイ分布（p. 111）

定義 1. 結果が 2 通り（成功／失敗）しかない試行を**ベルヌーイ試行**という．

例 1. コイントス．

定義 2. ベルヌーイ試行における成功を 1，失敗を 0 とした確率変数の分布を**ベルヌーイ分布**という．

注 1. 成功確率 p のベルヌーイ確率変数は

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$

pmf は

$$p_X(x) = \begin{cases} p & \text{for } x = 1 \\ 1-p & \text{for } x = 0 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

平均と分散は

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) \\ &= p \\ \mathrm{var}(X) &:= (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) \\ &= (1-p)^2 p + p^2(1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

2　2 項分布（p. 111）

定義 3. 独立かつ同一な n 回のベルヌーイ試行における成功回数の分布を ***2* 項分布**という．

注 2. 試行回数 n，成功確率 p の 2 項分布を $\mathrm{Bin}(n,p)$ と書く．ベルヌーイ分布は $\mathrm{Bin}(1,p)$.

定理 1. $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ の *pmf* は

$$p_X(x) = \begin{cases} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} & \textit{for } x = 0,\dots,n \\ 0 & \textit{for } x \neq 0,\dots,n \end{cases}$$

証明. 特定の x 回で成功し，残りの $n-x$ 回で失敗する確率は $p^x(1-p)^{n-x}$．n 回のうち x 回成功する組み合わせの数は ${}_nC_x$. □

注 3. 2 項定理は

$$\begin{aligned}(p+q)^n &= (p+q)\cdots(p+q) \\ &= p^n + np^{n-1}q + \cdots + npq^{n-1} + q^n \\ &= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x}\end{aligned}$$

$q := 1-p$ とすれば $\mathrm{Bin}(n,p)$ の pmf.

注 4. 2 項係数 ${}_nC_x$ はパスカルの 3 角形で求まる.

$$\begin{aligned}(p+q)^1 &= p+q \\ (p+q)^2 &= p^2+2pq+q^2 \\ (p+q)^3 &= p^3+3p^2q+3pq^2+q^3 \\ (p+q)^4 &= p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^4 \\ &\vdots\end{aligned}$$

例 2. $\mathrm{Bin}(n,p)$ の pmf の例は図 1 の通り.

定理 2. $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= np \\ \mathrm{var}(X) &= np(1-p)\end{aligned}$$

証明 *1.* 期待値の定義通り計算する．教科書 p. 113 参照. □

証明 *2.* mgf を用いる．教科書 p. 130 参照. □

証明 *3.* $X_1,\dots,X_n$ を独立かつ同一な分布をもつベルヌーイ確率変数とすると

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(X_1+\cdots+X_n) \\ &= \mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_n) \\ &= np\end{aligned}$$

$X_1,\dots,X_n$ の独立性より（第 7 章参照）

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \mathrm{var}(X_1+\cdots+X_n) \\ &= \mathrm{var}(X_1)+\cdots+\mathrm{var}(X_n) \\ &= np(1-p)\end{aligned}$$

□

3　ポアソン分布（p. 113）

まれな現象が起こる回数の分布を考える．例えば

- プロシア陸軍の各師団で 1 年間に馬に蹴られて死んだ兵士の数
- ある地域の 1 日当たり交通事故件数
- ある本の 1 ページ当たり誤植数

ある時間（空間）における成功回数の分布は次のように考える.

1. 平均成功回数を λ とする．時間を n 分割し，各時間での平均成功回数が λ/n となるようにする.
2. n を大きくとれば，各時間で 2 回以上成功する確率は 0 とみなせる．このとき各時間での成功回数は成功確率 λ/n のベルヌーイ分布.
3. したがって全体での成功回数は $\mathrm{Bin}(n,\lambda/n)$. この $n\to\infty$ の極限をとる.

定理 3 (小数の法則).

$$\lim_{n\to\infty} {}_nC_x \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}$$

証明. 教科書 p. 115 参照. □

定義 4. **ポアソン分布**の pmf は

$$p_X(x) := \begin{cases} \lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}/x! & \text{for } x = 0,1,\dots \\ 0 & \text{for } x \neq 0,1,\dots \end{cases}$$

注 5. $\mathrm{Poi}(\lambda)$ と書く.

注 6. 関数 $f(\lambda)$ のマクローリン展開は

$$f(\lambda) = f(0) + f'(0)\lambda + \frac{f''(0)}{2!}\lambda^2 + \cdots$$

指数関数 $f(\lambda) = \mathrm{e}^\lambda$ に適用すると

$$\mathrm{e}^\lambda = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots$$

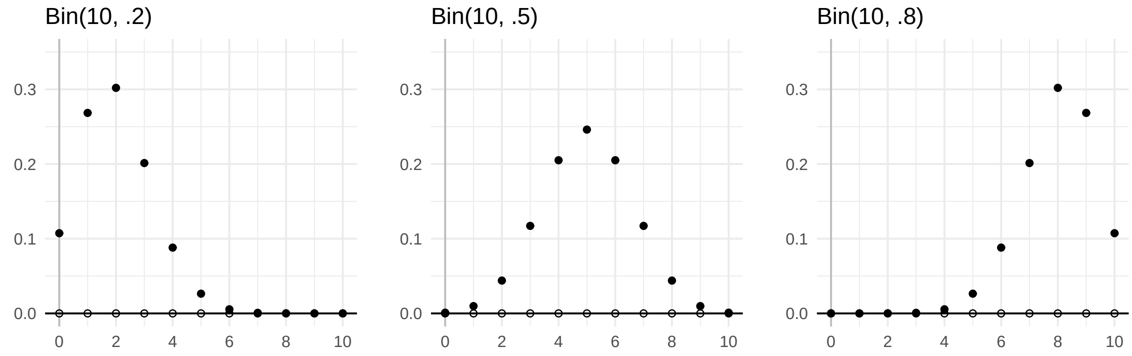

図 1　$\mathrm{Bin}(n, p)$ の pmf の例

両辺を e^{λ} で割ると

$$1 = \mathrm{e}^{-\lambda} + \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{\lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda}}{2!} + \cdots$$

右辺はポアソン分布の pmf.

例 3. $\mathrm{Poi}(\lambda)$ の pmf の例は図 2 の通り.

定理 4. $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ なら

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \lambda \\ \mathrm{var}(X) &= \lambda \end{aligned}$$

証明 *1.* 期待値の定義通り計算する．教科書 p. 115 参照. □

証明 *2.* mgf を用いるのが簡単．教科書 p. 130 参照. □

注 7. $X \sim \mathrm{Bin}(n, \lambda/n)$ とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= n\left(\frac{\lambda}{n}\right) \\ &= \lambda \\ \mathrm{var}(X) &= n\left(\frac{\lambda}{n}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \\ &= \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \end{aligned}$$

この $n \to \infty$ の極限と理解してもよい.

4　幾何分布と負の 2 項分布（p. 116）

定義 5. 独立かつ同一なベルヌーイ試行における初成功までの失敗回数の分布を**幾何分布**という.

定義 6. 独立かつ同一なベルヌーイ試行における r 回成功までの失敗回数の分布を**負の *2* 項（パスカル）分布**という.

注 8. 成功回数 r, 成功確率 p の負の 2 項分布を $\mathrm{NB}(r, p)$ と書く．幾何分布は $\mathrm{NB}(1, p)$.

定理 5. *$X \sim \mathrm{NB}(r, p)$ の pmf は*

$$p_X(x) = \begin{cases} {}_{r+x-1}C_x p^r (1-p)^x & \text{for } x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{for } x \neq 0, 1, \ldots \end{cases}$$

証明. 特定の r 回で成功し，x 回で失敗する確率は $p^r(1-p)^x$．$r + x$ 回目は成功する．残りの $r + x - 1$ 回のうち x 回失敗する組み合わせの数は ${}_{r+x-1}C_x$. □

例 4. $\mathrm{NB}(r, p)$ の pmf の例は図 3 の通り.

5　超幾何分布（p. 109）

定義 7. 取り出したものを戻しながら繰り返す抽出を**復元抽出**という.

定義 8. 取り出したものを戻さずに繰り返す抽出を**非復元抽出**という.

定義 9. 壺の中の N 個の玉のうち M 個が当たりとする．n 個を非復元抽出したときの当たりの個数の分布を**超幾何分布**という.

注 9. 復元抽出なら $\mathrm{Bin}(n, M/N)$.

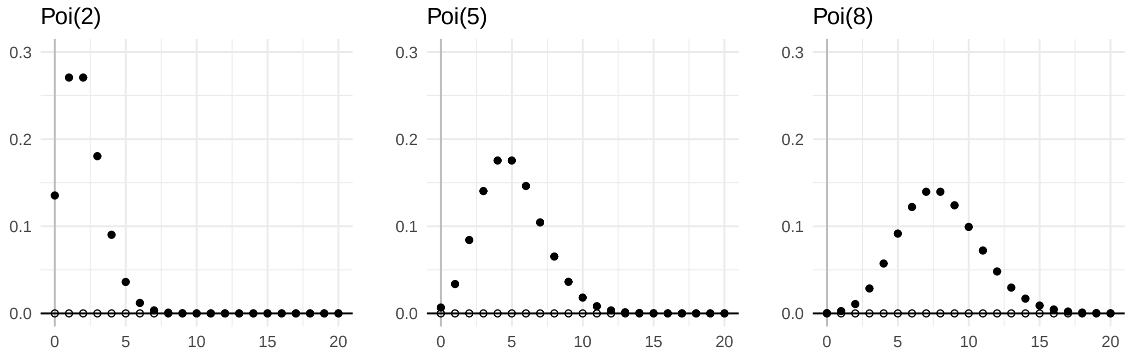

図 2　Poi(λ) の pmf の例

定理 6. 超幾何分布の *pmf* は,

$$p_X(x) = \begin{cases} {}_MC_x \cdot {}_{N-M}C_{n-x} / {}_NC_n \\ \quad \textit{for } x = x_{\min}, \dots, x_{\max} \\ 0 \quad \textit{for } x \neq x_{\min}, \dots, x_{\max} \end{cases}$$

ただし

$$x_{\min} := \max\{0, n-(N-M)\}$$
$$x_{\max} := \min\{n, M\}$$

証明. N 個から n 個取り出す組み合わせの数は ${}_NC_n$. M 個の当たりから x 個取り出す組み合わせの数は ${}_MC_x$. $N-M$ 個のハズレから $n-x$ 個取り出す組み合わせの数は ${}_{N-M}C_{n-x}$. □

6　離散一様分布（p. 119）

定義 10. $\{1,\dots,N\}$ 上の**離散一様分布**の pmf は

$$p_X(x) := \begin{cases} 1/N & \text{for } x = 1,\dots,N \\ 0 & \text{for } x \neq 1,\dots,N \end{cases}$$

注 10. $\mathrm{U}\{1,\dots,N\}$ と書く.

例 5. 公正なコイントスやサイコロ.

7　今日のキーワード

ベルヌーイ試行, ベルヌーイ分布, 2 項分布, 2 項定理, 2 項係数, パスカルの 3 角形, ポアソン分布, 小数の法則, 幾何分布, 負の 2 項分布, 復元抽出, 非復元抽出, 超幾何分布, 離散一様分布

8　次回までの準備

復習　教科書第 6 章 1–5 節, 復習テスト 9

予習　教科書第 6 章 6–9 節

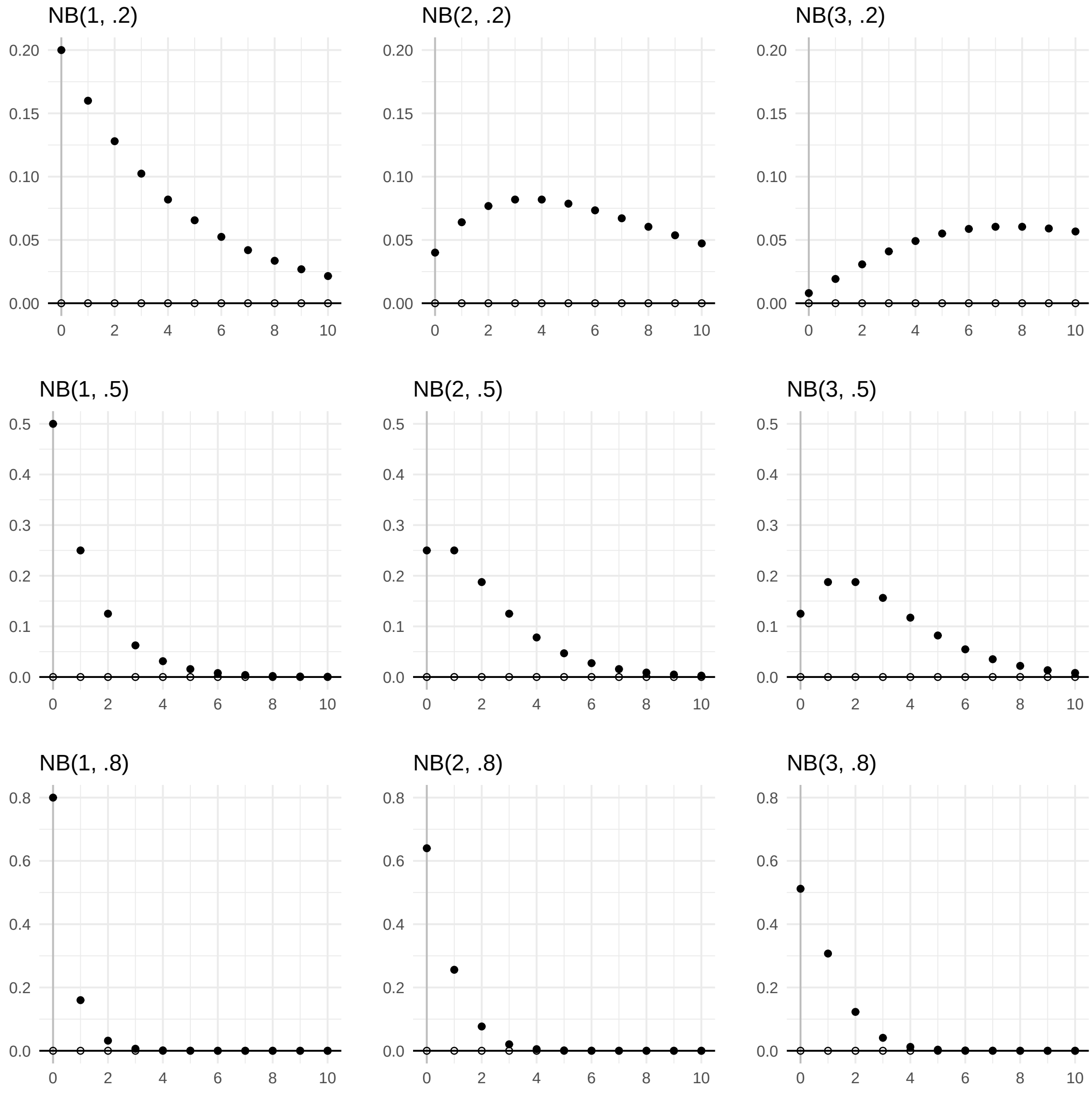

図 3　NB(r, p) の pmf の例