# 計量経済 I：中間試験

村澤 康友

2016 年 6 月 7 日

**注意**：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 事象
   (b) 条件つき確率
   (c) 確率関数
   (d) 中心積率
2. （30 点）次の確率変数を考える．
$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ -1 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$
   (a) $\mathrm{E}(X)$ を求めなさい．
   (b) $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ を求めなさい．
   (c) $\mathrm{var}(X)$ を求めなさい．
3. （50 点）$X$ の cdf は，任意の $x$ について
$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x^2 & \text{for } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$
   (a) $X$ の pdf を求め，式とグラフで表しなさい．
   (b) $\mathrm{E}(X) = 2/3$ となることを示しなさい．
   (c) $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ を求めなさい．
   (d) $\mathrm{var}(X)$ を求めなさい．
   (e) $Y := 2X - 1$ とする．$\mathrm{E}(Y)$ と $\mathrm{var}(Y)$ を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 標本空間の部分集合.
      - 「部分集合」で 1 点.
      - 「起こりうることがら」は定義でないので 0 点（教科書 p. 68, 69 参照）.
   (b) $B$ が起こったという条件の下での $A$ の条件つき確率は
$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
   (c) 任意の $x$ に対して $\Pr[X = x]$ を与える関数.
      - 「確率の関数」だけでは意味が不明確なので 0 点.
   (d) $X$ の $k$ 次の中心積率は
$$\mu'_{X,k} := \mathrm{E}\left((X - \mu_X)^k\right)$$
      - 「積率」の定義は 1 点.
2. 離散分布の期待値計算
   (a)
$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &:= 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) \\ &= 2p - 1\end{aligned}$$
      - $\mathrm{E}(X)$ の定義で 5 点.
   (b)
$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X^2\right) &:= 1^2 \cdot p + (-1)^2 \cdot (1 - p) \\ &= 1\end{aligned}$$
   (c)
$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= 1 - (2p - 1)^2 \\ &= 1 - \left(4p^2 - 4p + 1\right) \\ &= 4p(1 - p)\end{aligned}$$
      - $\mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$ で 5 点.
      - 定義から求めても OK.
3. 連続分布の期待値計算
   (a)
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 2x & \text{for } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$
      グラフは省略.
      - 式で 5 点，グラフで 5 点.
      - cdf を微分して 2 点.

（b）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &:= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x \cdot 2x \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} x \cdot 0 \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{0}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

（c）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X^2\right) &:= \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2x \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} x^2 \cdot 0 \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \int_{0}^{1} x^3 \,\mathrm{d}x \\
&= 2 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

（d）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \frac{9}{18} - \frac{8}{18} \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$ で 5 点.

（e）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y) &= \mathrm{E}(2X - 1) \\
&= 2\,\mathrm{E}(X) - 1 \\
&= 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 \\
&= \frac{1}{3} \\
\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{var}(2X - 1) \\
&= 4\,\mathrm{var}(X) \\
&= 4 \cdot \frac{1}{18} \\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{E}(Y) = 2\,\mathrm{E}(X) - 1$ で 2 点.
- $\mathrm{var}(Y) = 4\,\mathrm{var}(X)$ で 2 点.