計量経済 I：期末試験

村澤 康友

2016 年 7 月 26 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) ベルヌーイ試行
   (b) 同時累積分布関数
   (c) （確率変数の）共分散
   (d) 確率収束
2. （30 点）$X \sim \mathrm{N}(2, 4)$ とする．標準正規分布表を利用して以下の確率を求めなさい．
   (a) $\Pr[X \leq 0]$
   (b) $\Pr[-1 < X \leq 2]$
   (c) $\Pr[|X| \geq 3]$
3. （50 点）2 次元確率ベクトル (X, Y) は以下の同時分布をもつ．

$X \backslash Y$	0	1
0	1/2	1/8
1	1/4	1/8

   (a) X と Y の周辺分布をそれぞれ求めなさい．
   (b) X と Y の期待値をそれぞれ求めなさい．
   (c) X と Y の分散をそれぞれ求めなさい．
   (d) XY の分布を求めなさい．
   (e) X と Y の共分散を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 結果が 2 通りしかない試行.
   (b) (X, Y) の同時 cdf は
   $$F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$$
   (c) X と Y の共分散は
   $$\operatorname{cov}(X, Y) := \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))(Y - \mathrm{E}(Y)))$$
   - $\mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$ は定義でないので 0 点.

   (d) 任意の $\epsilon > 0$ について
   $$\lim_{n \to \infty} \Pr[|X_n - c| < \epsilon] = 1$$
   なら $\{X_n\}$ は c に確率収束.
   - 「任意の」がなければ 1 点減.
2. 正規分布の確率計算
   (a)
   $$\begin{aligned}\Pr[X \leq 0] &= \Pr\left[\frac{X-2}{2} \leq \frac{0-2}{2}\right] \\ &= \Phi(-1) \\ &= Q(1) \\ &= .15866\end{aligned}$$
   - $\Phi(-1)$ で 5 点.

   (b)
   $$\Pr[-1 < X \leq 2] = \Pr[X \leq 2] - \Pr[X \leq -1]$$
   ここで
   $$\begin{aligned}\Pr[X \leq 2] &= \Pr\left[\frac{X-2}{2} \leq \frac{2-2}{2}\right] \\ &= \Phi(0) \\ &= .5 \\ \Pr[X \leq -1] &= \Pr\left[\frac{X-2}{2} \leq \frac{-1-2}{2}\right] \\ &= \Phi(-1.5) \\ &= Q(1.5) \\ &= .066807\end{aligned}$$
   したがって
   $$\begin{aligned}\Pr[-1 < X \leq 2] &= .5 - .066807 \\ &= .433193\end{aligned}$$
   - $\Phi(0) - \Phi(-1.5)$ で 5 点.

（c）

$$\Pr[|X| \geq 3] = \Pr[X \leq -3] + \Pr[X \geq 3]$$

ここで

$$\begin{aligned}
\Pr[X \leq -3] &= \Pr\left[\frac{X-2}{2} \leq \frac{-3-2}{2}\right] \\
&= \Phi(-2.5) \\
&= Q(2.5) \\
&= .0062097 \\
\Pr[X \geq 3] &= \Pr\left[\frac{X-2}{2} \geq \frac{3-2}{2}\right] \\
&= Q(.5) \\
&= .30854
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\Pr[|X| \geq 3] &= .0062097 + .30854 \\
&= .3147497
\end{aligned}$$

- $\Phi(-2.5) + Q(.5)$ で 5 点.

3. 最も単純な 2 変量分布

（a）

$$X = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 3/8 \\ 0 & \text{with pr. } 5/8 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/4 \\ 0 & \text{with pr. } 3/4 \end{cases}$$

（b）

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &:= 1 \cdot \frac{3}{8} + 0 \cdot \frac{5}{8} \\
&= \frac{3}{8} \\
\mathrm{E}(Y) &:= 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{3}{4} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- 前問の答と整合的なら OK.

（c）簡単な求め方は

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \mathrm{E}(X)(1 - \mathrm{E}(X)) \\
&= \frac{15}{64} \\
\operatorname{var}(Y) &= \mathrm{E}(Y)(1 - \mathrm{E}(Y)) \\
&= \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

同時分布または周辺分布から定義通りに求めてもよい.

- 前問の答と整合的なら OK.

（d）

$$XY = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/8 \\ 0 & \text{with pr. } 7/8 \end{cases}$$

（e）簡単な求め方は

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X, Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= \frac{1}{8} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

同時分布または周辺分布から定義通りに求めてもよい.

- 前問までの答と整合的なら OK.