計量分析 2：復習テスト 4

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2022 年 10 月 20 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（12 月 1 日の予定）にまとめて提出すること．

1. (X, Y) を確率ベクトルとする．以下の公式を示しなさい．

(a)

$$\mathrm{E}(aX + bY) = a\,\mathrm{E}(X) + b\,\mathrm{E}(Y)$$

(b)

$$\mathrm{var}(aX + bY) = a^2\,\mathrm{var}(X) + 2ab\,\mathrm{cov}(X, Y) + b^2\,\mathrm{var}(Y)$$

(c)

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

2. (X, Y) を確率ベクトルとする．以下の命題を証明しなさい．

(a)

$$\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) = \mathrm{E}(X)$$

(b)

$$\mathrm{E}(X|Y) = 0 \Longrightarrow \mathrm{E}(XY) = 0$$

(c)

$$\mathrm{E}(X|Y) = 0 \Longrightarrow \mathrm{cov}(X, Y) = 0$$

3. X と Y は独立とする．このとき以下の式が成り立つことを示しなさい．

(a)

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

(b)

$$\mathrm{cov}(X, Y) = 0$$

(c)

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$$

解答例

1. (a) (X,Y) が連続なら

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX+bY) &:= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(ax+by)f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + b\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= a\,\mathrm{E}(X)+b\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}
$$

離散の場合も同様.

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(aX+bY) &:= \mathrm{E}\left((aX+bY-\mathrm{E}(aX+bY))^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left([a(X-\mathrm{E}(X))+b(Y-\mathrm{E}(Y))]^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(a^2(X-\mathrm{E}(X))^2\right)+2\,\mathrm{E}(a(X-\mathrm{E}(X))b(Y-\mathrm{E}(Y)))+\mathrm{E}\left(b^2(Y-\mathrm{E}(Y))^2\right) \\
&= a^2\,\mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right)+2ab\,\mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y)))+b^2\,\mathrm{E}\left((Y-\mathrm{E}(Y))^2\right) \\
&= a^2\,\mathrm{var}(X)+2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)+b^2\,\mathrm{var}(Y)
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &:= \mathrm{E}((X-\mathrm{E}(X))(Y-\mathrm{E}(Y))) \\
&= \mathrm{E}(XY-X\,\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)Y+\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)) \\
&= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)+\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)
\end{aligned}
$$

2. (a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) &:= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}xf_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}xf_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}x\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(XY|Y)) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（c）

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)) \\ &= 0\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

3.（a）(X,Y) が連続なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XY) &:= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

離散の場合も同様.

（b）前問の結果より

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

（c）前問の結果より

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X+Y) &= \operatorname{var}(X) + 2\operatorname{cov}(X,Y) + \operatorname{var}(Y) \\ &= \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)\end{aligned}$$