中級統計学：復習テスト 20

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 12 月 6 日

注意： すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 14〜20 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 3 回中間試験実施日（12 月 10 日の予定）に提出すること．

1. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}$ とする．

   (a) $\bar{X}$ の分布を求めなさい．

   (b) σ^2 を既知として μ の 95 %信頼区間を求めなさい．

2. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本分散を s^2 とする．

   (a) s^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：変形が必要）

   (b) $n = 10$ として σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

3. $\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$, $\mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ から独立に抽出した大きさ m, n の無作為標本の標本分散を s_X^2, s_Y^2 とする.

（a）s_X^2, s_Y^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：変形が必要）

（b）s_X^2/s_Y^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：同上）

（c）$m = 4,\ n = 6$ として σ_X^2/σ_Y^2 の 95 %信頼区間を求めなさい.

解答例

1. (a) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n)}{n} \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n)}{n} \\
&= \frac{\mu + \cdots + \mu}{n} \\
&= \mu
\end{aligned}$$

$X_1, \dots, X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

正規分布の線形変換は正規分布なので

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(b) 標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

標準正規分布表より

$$\Pr\left[-1.96 \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \le 1.96\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \bar{X} - \mu \le 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = 0.95$$

または

$$\Pr\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = 0.95$$

したがって μ の 95 %信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

2. (a)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(b) χ^2 分布表より

$$\Pr\left[2.70039 \leq \frac{9s^2}{\sigma^2} \leq 19.0228\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{19.0228} \leq \frac{\sigma^2}{9s^2} \leq \frac{1}{2.70039}\right] = 0.95$$

または

$$\Pr\left[\frac{9s^2}{19.0228} \leq \sigma^2 \leq \frac{9s^2}{2.70039}\right] = 0.95$$

したがって σ^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{9}{19.0228}s^2, \frac{9}{2.70039}s^2\right]$$

3. (a)

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$
$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(b)

$$\frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

すなわち

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

(c) F 分布表より

$$\Pr\left[\frac{1}{14.885} \leq \frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \leq 7.764\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{7.764} \leq \frac{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}{s_X^2/s_Y^2} \leq 14.885\right] = 0.95$$

または

$$\Pr\left[\frac{1}{7.764}\frac{s_X^2}{s_Y^2} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq 14.885\frac{s_X^2}{s_Y^2}\right] = 0.95$$

したがって σ_X^2/σ_Y^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{1}{7.764}\frac{s_X^2}{s_Y^2}, 14.885\frac{s_X^2}{s_Y^2}\right]$$