

計量分析 2：復習テスト 7

学籍番号 _____ 氏名 _____

2023 年 11 月 7 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1～8 をまとめて左上でホチキス止めし、中間試験実施日（11 月 28 日の予定）に提出すること。

1. $(1+k)$ 変量データを $\{(y_i, x_{i,1}, \dots, x_{i,k})\}_{i=1}^n$ とする。 y_i の $(x_{i,1}, \dots, x_{i,k})$ 上への重回帰モデルは

$$E(y_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) = \beta_1 x_{i,1} + \dots + \beta_k x_{i,k}$$

回帰の誤差項は $u_i := y_i - E(y_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k})$ 。以下の式を証明しなさい。

(a)

$$E(u_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) = 0$$

(b)

$$E(u_i) = 0$$

(c)

$$E(x_{i,1} u_i) = \dots = E(x_{i,k} u_i) = 0$$

2. 前問と同じ重回帰モデルを考える. $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ の MM (= OLS) 推定量を (b_1, \dots, b_k) , y_i の回帰予測を \hat{y}_i , OLS 残差を e_i とする.

(a) (b_1, \dots, b_k) を定義しなさい.

(b) \hat{y}_i と e_i を定義しなさい.

(c) 次式を示しなさい.

$$\sum_{i=1}^n x_{i,1} e_i = \dots = \sum_{i=1}^n x_{i,k} e_i = 0$$

(d) 次式を示しなさい.

$$\sum_{i=1}^n \hat{y}_i e_i = 0$$

解答例

1. (a) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} E(u_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) &= E(y_i - E(y_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) | x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \\ &= E(y_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) - E(y_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) 繰り返し期待値の法則と前問より

$$\begin{aligned} E(u_i) &= E(E(u_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k})) \\ &= E(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) 繰り返し期待値の法則と前々問より

$$\begin{aligned} E(x_{i,1}u_i) &= E(E(x_{i,1}u_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k})) \\ &= E(x_{i,1} E(u_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k})) \\ &= E(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$E(x_{i,2}u_i), \dots, E(x_{i,k}u_i)$ も同様.

2. (a) (b_1, \dots, b_k) は次の連立方程式の解:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,1}(y_i - b_1x_{i,1} - \dots - b_kx_{i,k}) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,k}(y_i - b_1x_{i,1} - \dots - b_kx_{i,k}) &= 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \hat{y}_i &:= b_1x_{i,1} + \dots + b_kx_{i,k} \\ e_i &:= y_i - \hat{y}_i \\ &= y_i - b_1x_{i,1} - \dots - b_kx_{i,k} \end{aligned}$$

(c) 前 2 問より

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,1}e_i &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i,k}e_i &= 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\sum_{i=1}^n x_{i,1}e_i = \dots = \sum_{i=1}^n x_{i,k}e_i = 0$$

(d) $\hat{y}_i := b_1 x_{i,1} + \cdots + b_k x_{i,k}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \hat{y}_i e_i &= \sum_{i=1}^n (b_1 x_{i,1} + \cdots + b_k x_{i,k}) e_i \\ &= b_1 \sum_{i=1}^n x_{i,1} e_i + \cdots + b_k \sum_{i=1}^n x_{i,k} e_i\end{aligned}$$

前問より各項は 0.