# 計量分析 2：復習テスト 13

学籍番号____________________氏名____________________

2024 年 1 月 16 日

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 30 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $(Y, X, Z)$ を確率ベクトルとする．以下を示しなさい．

   （a）$X$ と $Y$ は独立 $\Longrightarrow \mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y)$

   （b）$\mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y) \Longrightarrow \mathrm{cov}(X, Y) = 0$

   （c）$Z$ を所与として $X$ と $Y$ は条件付き独立 $\Longrightarrow \mathrm{E}(Y|X, Z) = \mathrm{E}(Y|Z)$

2. 処置ダミーを $D$, 処置あり／なしの潜在的な結果を $Y_1^*, Y_0^*$ とし，共変量を $X$, 傾向スコアを $p(X) := \Pr[D=1|X]$ とする．$X$ を所与として $(Y_1^*, Y_0^*)$ と $D$ が条件付き独立なら，$p(X)$ を所与としても両者は条件付き独立であることを示したい．すなわち

$$\Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, X] = \Pr[D=1|X] \Longrightarrow \Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \Pr[D=1|p(X)]$$

以下を順に示しなさい.

(a)

$$\Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, X] = \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, X)$$
$$\Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X))$$

(b)

$$\Pr[D=1|p(X)] = p(X)$$

(c)

$$\mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, X) = p(X) \Longrightarrow \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) = p(X)$$

解答例

1. (a) 独立性の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y}(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{E}(Y)\end{aligned}$$

(b) 共分散の計算公式と繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(XY|X)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}(Y|X)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}(Y)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

(c) 条件付き独立性の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X,Z) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X,Z}(y|x,z)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|Z}(y|z)\,\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{E}(Y|Z)\end{aligned}$$

2. (a) 期待値の定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(D|Y_1^*,Y_0^*,X) &:= 1\cdot\Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,X] + 0\cdot\Pr[D=0|Y_1^*,Y_0^*,X] \\ &= \Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,X] \\ \mathrm{E}(D|Y_1^*,Y_0^*,p(X)) &:= 1\cdot\Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,p(X)] + 0\cdot\Pr[D=0|Y_1^*,Y_0^*,p(X)] \\ &= \Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,p(X)]\end{aligned}$$

(b) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\Pr[D=1|p(X)] &= \mathrm{E}(D|p(X)) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(D|X)|p(X)) \\ &= \mathrm{E}(\Pr[D=1|X]|p(X)) \\ &= \mathrm{E}(p(X)|p(X)) \\ &= p(X)\end{aligned}$$

(c) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(D|Y_1^*,Y_0^*,p(X)) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(D|Y_1^*,Y_0^*,X)|Y_1^*,Y_0^*,p(X)) \\ &= \mathrm{E}(p(X)|Y_1^*,Y_0^*,p(X)) \\ &= p(X)\end{aligned}$$