

第 12 回 パネル・データ (9)

村澤 康友

2025 年 7 月 8 日

今日のポイント

1. 処置が無作為でなく共変量が欠落すると、平均処置効果 (ATE) を OLS で推定できない。処置群と対照群の変化の差で ATE を推定する手法を差分の差分 (DID) 法という。共変量の変化の期待値が処置群と対照群で等しければ (平行トレンドの仮定)、DID 法で ATE を推定できる。
2. 個体に固有で観測を通じて一定の効果は個別効果という。観測できない個別効果は欠落変数バイアスをもたらす。パネル・データなら観測できない個別効果を統制できる。
3. 非確率的な個別効果を固定効果という。固定効果は個別ダミーで統制する。確率的な個別効果を変量効果という。変量効果が説明変数と無相関なら欠落変数バイアスは生じない。変量効果モデルの定式化は Hausman 検定で検定できる。

目次

1	差分の差分 (DID) 法	1
1.1	欠落変数バイアス	1
1.2	差分の差分 (DID) 法 (p. 214)	2
1.3	回帰モデル (p. 218)	2
2	パネル・データ	3
2.1	個別効果 (p. 221)	3
2.2	パネル・データ (p. 221)	3

2.3	差分の回帰モデル (p. 223)	3
-----	-------------------	---

3	固定効果と変量効果	3
---	-----------	---

3.1	固定効果モデル (p. 232)	3
-----	------------------	---

3.2	変量効果モデル (p. 232)	4
-----	------------------	---

3.3	Hausman 検定 (p. 234)	4
-----	---------------------	---

4	今日のキーワード	5
---	----------	---

5	次回までの準備	5
---	---------	---

1 差分の差分 (DID) 法

1.1 欠落変数バイアス

(Y, D, X) を確率ベクトルとする。ただし Y は結果、 D は処置群ダミー、 X は共変量とする。 Y に対する D の平均処置効果 (ATE) を推定したい。 Y の (D, X) 上への重回帰モデルは

$$E(Y|D, X) = \alpha + \text{ATE} \cdot D + \beta X$$

X が欠落すると、繰り返し期待値の法則より

$$E(Y|D) = \alpha + \text{ATE} \cdot D + \beta E(X|D)$$

処置群の母平均を $\mu_1 := E(Y|D = 1)$ 、対照群の母平均を $\mu_0 := E(Y|D = 0)$ とする。

定理 1.

$$\mu_1 - \mu_0 = \text{ATE} + \beta(E(X|D = 1) - E(X|D = 0))$$

証明.

$$\begin{aligned} \mu_1 - \mu_0 &= E(Y|D = 1) - E(Y|D = 0) \\ &= \alpha + \text{ATE} + \beta E(X|D = 1) \\ &\quad - (\alpha + \beta E(X|D = 0)) \\ &= \text{ATE} + \beta(E(X|D = 1) - E(X|D = 0)) \end{aligned}$$

□

注 1. 処置が無作為なら $E(X|D) = E(X)$ より第 2 項は 0. そうでなければ $\mu_1 - \mu_0 \neq ATE$ (欠落変数バイアス).

定義 1. 処置を自ら選択することを**自己選択**という.

注 2. 人間が対象だと処置を強制できない. 処置の選択に個人差があるなら $E(X|D=1) \neq E(X|D=0)$.

1.2 差分の差分 (DID) 法 (p. 214)

(Y_t, X_t) を時点 $t = 0, 1$ の確率ベクトルとし, 処置群に対して時点 1 に処置を行う. 処置群ダミーを D とすると, Y_t の (D, X_t) 上への回帰モデルは

$$\begin{aligned} E(Y_0|D, X_0) &= \alpha + \beta X_0 \\ E(Y_1|D, X_1) &= \alpha + ATE \cdot D + \beta X_1 \end{aligned}$$

$\{X_t\}$ が欠落すると, 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} E(Y_0|D) &= \alpha + \beta E(X_0|D) \\ E(Y_1|D) &= \alpha + ATE \cdot D + \beta E(X_1|D) \end{aligned}$$

$\Delta Y := Y_1 - Y_0$, $\Delta X := X_1 - X_0$ とする.

補題 1 (差分). $d = 0, 1$ について

$$E(\Delta Y|D = d) = ATE \cdot d + \beta E(\Delta X|D = d)$$

証明. $d = 0, 1$ について

$$\begin{aligned} E(\Delta Y|D = d) &= E(Y_1 - Y_0|D = d) \\ &= E(Y_1|D = d) - E(Y_0|D = d) \\ &= \alpha + ATE \cdot d + \beta E(X_1|D = d) \\ &\quad - (\alpha + \beta E(X_0|D = d)) \\ &= ATE \cdot d + \beta E(\Delta X|D = d) \end{aligned}$$

□

定理 2 (差分の差分).

$$\begin{aligned} E(\Delta Y|D = 1) - E(\Delta Y|D = 0) \\ = ATE + \beta(E(\Delta X|D = 1) - E(\Delta X|D = 0)) \end{aligned}$$

証明. 補題より明らか.

□

系 1. $E(\Delta X|D = 1) = E(\Delta X|D = 0)$ なら

$$E(\Delta Y|D = 1) - E(\Delta Y|D = 0) = ATE$$

□

定義 2. 共変量の変化の期待値が処置群と対照群で等しいという仮定を**平行トレンドの仮定**という.

注 3. すなわち $E(\Delta X|D = 1) = E(\Delta X|D = 0)$. $t = 0, 1$ について $E(X_t|D = 1) \neq E(X_t|D = 0)$ でも平行トレンドの仮定は成立し得る.

定義 3. 処置群と対照群の変化の差で ATE を推定する手法を**差分の差分** (*difference in differences, DID*) 法という.

定義 4. DID 法による ATE の推定量を **DID 推定量**という.

定義 5. 偶然に生じた実験環境を**自然実験**という.

例 1. 自然災害・制度変更など.

注 4. 自然実験の処置群と対照群において, 共変量の変化が平均的に等しいと想定できるなら, DID 法で ATE を推定できる.

1.3 回帰モデル (p. 218)

(Y, D, T) を確率ベクトルとする. ただし T は観測時点 (0 か 1) を表す. Y の (D, T, DT) 上への重回帰モデルは

$$E(Y|D, T, DT) = \alpha + \beta D + \gamma T + \delta DT$$

定理 3.

$$E(\Delta Y|D = 1) - E(\Delta Y|D = 0) = \delta$$

証明. $d = 0, 1$ について

$$\begin{aligned} E(\Delta Y|D = d) &= E(Y_1 - Y_0|D = d) \\ &= E(Y_1|D = d) - E(Y_0|D = d) \\ &= E(Y|D = d, T = 1) \\ &\quad - E(Y|D = d, T = 0) \\ &= \alpha + \beta d + \gamma + \delta d - (\alpha + \beta d) \\ &= \gamma + \delta d \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} E(\Delta Y|D = 1) - E(\Delta Y|D = 0) &= \gamma + \delta - \gamma \\ &= \delta \end{aligned}$$

注 5. 2 時点の繰り返し横断面データを利用して、処置群ダミー・時点ダミーとその交差項で結果を説明する重回帰モデルを推定すれば、交差項の回帰係数の OLS 推定量 = DID 推定量となる。

注 6. 観測できる共変量については共変量調整を併せて行う方がよい。

2 パネル・データ

2.1 個別効果 (p. 221)

(Y, X, Z) を確率ベクトルする。 Y の (X, Z) 上への重回帰モデルは

$$E(Y|X, Z) = \alpha + \beta X + \gamma Z$$

Z が欠落すると、繰り返し期待値の法則より

$$E(Y|X) = \alpha + \beta X + \gamma E(Z|X)$$

したがって $\text{cov}(X, Z) \neq 0$ なら β の OLS 推定量に偏りが生じる (欠落変数バイアス)。

定義 6. 個体に固有で観測を通じて一定の効果を個別効果という。

例 2. 能力, 性格。

注 7. 観測できない個別効果は欠落変数バイアスをもたらす。

2.2 パネル・データ (p. 221)

(Y_t, X_t, Z) を時点 $t = 0, 1$ の確率ベクトルする。ただし Z は個別効果とする。 Y_t の (X_t, Z) 上への重回帰モデルは

$$\begin{aligned} Y_t &= \alpha + \beta X_t + \gamma Z + U_t \\ E(U_t|X_t, Z) &= 0 \end{aligned}$$

$\Delta Y := Y_1 - Y_0$, $\Delta X := X_1 - X_0$, $\Delta U := U_1 - U_0$ とすると

$$\Delta Y = \beta \Delta X + \Delta U$$

すなわちパネル・データなら観測できない個別効果を消すことができる (1 階差分法)。

2.3 差分の回帰モデル (p. 223)

ΔY の ΔX 上への回帰モデルを得るには追加的な仮定が必要。

定義 7. $t = 0, 1$ について $E(U_t|X_0, X_1) = 0$ なら $\{X_t\}$ は強外生という。

注 8. 繰り返し期待値の法則より $E(U_t|X_0, X_1) = 0 \implies E(U_t|X_t) = 0$. 逆は必ずしも成立しない。

定理 4. $\{X_t\}$ が強外生なら

$$E(\Delta U|\Delta X) = 0$$

証明. 繰り返し期待値の法則より

$$E(\Delta U|\Delta X) = E(E(\Delta U|X_0, X_1)|\Delta X)$$

ここで

$$\begin{aligned} E(\Delta U|X_0, X_1) &= E(U_1 - U_0|X_0, X_1) \\ &= E(U_1|X_0, X_1) - E(U_0|X_0, X_1) \end{aligned}$$

$\{X_t\}$ は強外生なので 2 項とも 0. \square

3 固定効果と変量効果

3.1 固定効果モデル (p. 232)

$\{(y_{i,1}, x_{i,1}), \dots, (y_{i,T}, x_{i,T})\}$ を大きさ n の 2 変量 T 期間パネル・データとする。 $i = 1, \dots, n$ について $\mathbf{x}_i := (x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$ とする。各変量の時間方向の平均は

$$\begin{aligned} \bar{y}_i &:= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{i,t} \\ \bar{x}_i &:= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{i,t} \end{aligned}$$

定義 8. 非確率的な個別効果を固定効果という。

定義 9. $(y_{i,1}, \dots, y_{i,T})$ の \mathbf{x}_i 上への固定効果モデルは

$$\begin{aligned} E(y_{i,1}|\mathbf{x}_i) &= \alpha_i + \beta x_{i,1} \\ &\vdots \\ E(y_{i,T}|\mathbf{x}_i) &= \alpha_i + \beta x_{i,T} \end{aligned}$$

ただし α_i は個体 i の固定効果。

注 9. $d_{i,1}, \dots, d_{i,n}$ を個別ダミーとすると、固定効果モデルは $y_{i,t}$ の $(d_{i,1}, \dots, d_{i,n}, \mathbf{x}_i)$ 上への重回帰モデル。

補題 2. $i = 1, \dots, n$ について

$$E(\bar{y}_i | \mathbf{x}_i) = \alpha_i + \beta \bar{x}_i$$

証明. $i = 1, \dots, n$ について

$$\begin{aligned} E(\bar{y}_i | \mathbf{x}_i) &= E\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_{i,t} | \mathbf{x}_i\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(y_{i,t} | \mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\alpha_i + \beta x_{i,t}) \\ &= \alpha_i + \beta \cdot \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_{i,t} \\ &= \alpha_i + \beta \bar{x}_i \end{aligned}$$

□

定理 5. $i = 1, \dots, n$ について

$$\begin{aligned} E(y_{i,1} - \bar{y}_i | \mathbf{x}_i) &= \beta(x_{i,1} - \bar{x}_i) \\ &\vdots \\ E(y_{i,T} - \bar{y}_i | \mathbf{x}_i) &= \beta(x_{i,T} - \bar{x}_i) \end{aligned}$$

証明. 補題より明らか.

□

3.2 変量効果モデル (p. 232)

無作為抽出なら個別効果は確率変数.

定義 10. 確率的な個別効果を変量効果という.

定義 11. $(y_{i,1}, \dots, y_{i,T})$ の \mathbf{x}_i 上への変量効果モデルは

$$\begin{aligned} y_{i,1} &= \alpha + \beta x_{i,1} + c_i + w_{i,1} \\ &\vdots \\ y_{i,T} &= \alpha + \beta x_{i,T} + c_i + w_{i,T} \end{aligned}$$

ただし c_i は個体 i の変量効果で

$$\begin{aligned} E(c_i | \mathbf{x}_i) &= 0 \\ \text{var}(c_i | \mathbf{x}_i) &= \sigma_c^2 \\ E(w_{i,t} | \mathbf{x}_i) &= 0, \quad t = 1, \dots, T \\ \text{var}(w_{i,t} | \mathbf{x}_i) &= \sigma_w^2, \quad t = 1, \dots, T \\ \text{cov}(c_i, w_{i,t} | \mathbf{x}_i) &= 0, \quad t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

注 10. $E(c_i | \mathbf{x}_i) = 0$ より欠落変数バイアスは生じない. したがって変量効果モデルは OLS でも推定できる (ただし BLUE ではない).

注 11. $E(c_i | \mathbf{x}_i) \neq 0$ なら固定効果モデルを用いる.

3.3 Hausman 検定 (p. 234)

$\hat{\theta}_n, \tilde{\theta}_n$ を θ の推定量とする. ただし

- $\hat{\theta}_n$ は H_0 の下で漸近有効, H_1 の下で一致性なし
- $\tilde{\theta}_n$ は H_0, H_1 の下で一致性あり

このとき $\hat{\theta}_n - \tilde{\theta}_n$ は H_0 の下でのみ 0 に確率収束.

定義 12. (Durbin-Wu-)Hausman 検定統計量は

$$D_n := \frac{(\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n)^2}{\text{var}(\tilde{\theta}_n) - \text{var}(\hat{\theta}_n)}$$

注 12. θ がベクトルなら

$$D_n := (\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n)' (\text{var}(\tilde{\theta}_n) - \text{var}(\hat{\theta}_n))^{-1} (\tilde{\theta}_n - \hat{\theta}_n)$$

定理 6. H_0 の下で

$$D_n \xrightarrow{d} \chi^2(k)$$

ただし k は θ の次元.

証明. 省略 (大学院レベル).

□

注 13. Hausman 検定は様々な状況に応用できる.

例 3 (固定効果と変量効果). パネル・データの個別効果について次の検定問題を考える.

$$H_0 : \text{変量効果} \quad \text{vs} \quad H_1 : \text{固定効果}$$

正規分布を仮定すると

- 変量効果モデルの回帰係数の一般化最小 2 乗 (GLS) 推定量は H_0 の下で漸近有効, H_1 の下で一致性なし
- 固定効果モデルの回帰係数の OLS 推定量は H_0, H_1 の下で一致性あり

例 4 (説明変数と誤差項の相関). 線形モデルの説明変数と誤差項の相関について次の検定問題を考

える.

H_0 : 相関なし vs H_1 : 相関あり

正規分布を仮定すると

- 係数の OLS 推定量は H_0 の下で漸近有効, H_1 の下で一致性なし
- 係数の IV 推定量は H_0, H_1 の下で一致性あり

4 今日のキーワード

自己選択, 平行トレンドの仮定, 差分の差分(DID)法, DID 推定量, 自然実験, 個別効果, 強外生, 固定効果, 固定効果モデル, 変量効果, 変量効果モデル, Hausman 検定統計量

5 次回までの準備

提出 宿題 9

復習 教科書第 9 章, 復習テスト 12

予習 教科書第 10 章