

第 17 回 2 標本問題 (10.5)

村澤 康友

2024 年 11 月 25 日

今日のポイント

1. 標本を用いて 2 つの母集団を比較する問題を 2 標本問題という.
2. $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ から独立に抽出した無作為標本 $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$ の標本平均の差 $\bar{X} - \bar{Y}$, 標本分散の比 s_X^2/s_Y^2 の分布を求める.
3. $\bar{X} - \bar{Y}$ の分布は $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ なら $[\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)] / \sqrt{s^2(1/m + 1/n)} \sim t(m+n-2)$. ただし s^2 はプールした標本分散. $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ なら厳密な分布は求まらない.
4. $U \sim \chi^2(m)$ と $V \sim \chi^2(n)$ が独立のとき, $(U/m)/(V/n) \sim F(m, n)$.
5. s_X^2/s_Y^2 の分布は $(s_X^2/s_Y^2) / (\sigma_X^2/\sigma_Y^2) \sim F(m-1, n-1)$.

目次

1	2 標本問題 (p. 204)	1
2	標本平均の差	1
2.1	母分散が既知の場合 (p. 205) . . .	1
2.2	母分散が未知で等しい場合 (p. 205)	2
2.3	母分散が未知で異なる場合 (p. 206)	3
3	標本分散の比	3
3.1	F 分布 (p. 207)	3
3.2	母平均が既知の場合	3
3.3	母平均が未知の場合 (p. 208) . . .	3

4	今日のキーワード	5
5	次回までの準備	5

1 2 標本問題 (p. 204)

母集団分布 $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ から独立に抽出した無作為標本を $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$ とする. μ_X と μ_Y の比較なら標本平均の差 $\bar{X} - \bar{Y}$, σ_X^2 と σ_Y^2 の比較なら標本分散の比 s_X^2/s_Y^2 を用いる. ただし標本分布を考慮する必要がある.

定義 1. 標本を用いて 2 つの母集団を比較する問題を 2 標本問題という.

例 1. 男女別の成績の分布の比較.

2 標本平均の差

2.1 母分散が既知の場合 (p. 205)

母集団分布を $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ とする. μ_X と μ_Y を比較したい. 各母集団から独立に抽出した無作為標本を $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$, 標本平均を \bar{X}, \bar{Y} とする.

定理 1.

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

証明. 標本平均の分布は

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{m}\right)$$

$$\bar{Y} \sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

\bar{X} と \bar{Y} は独立だから

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

系 1.

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}} \sim N(0, 1)$$

注 1. $\bar{X} - \bar{Y}$ の累積確率は標準正規分布表から次のように求める.

$$\begin{aligned} \Pr[\bar{X} - \bar{Y} \leq c] \\ &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}} \leq \frac{c - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{c - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}}\right) \end{aligned}$$

注 2. $\mu_X = \mu_Y$ なら

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}} \sim N(0, 1)$$

例 2 (p. 205). 男子と女子の身長之母集団分布を, それぞれ $N(172.3, 30)$, $N(160.2, 25)$ とする. 独立に抽出した男子 10 人, 女子 15 人の無作為標本の標本平均をそれぞれ \bar{X} , \bar{Y} とすると

$$\begin{aligned} \bar{X} &\sim N\left(172.3, \frac{30}{10}\right) \\ \bar{Y} &\sim N\left(160.2, \frac{25}{15}\right) \end{aligned}$$

\bar{X} と \bar{Y} は独立だから

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(12.1, \frac{14}{3}\right)$$

標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - 12.1}{\sqrt{14/3}} \sim N(0, 1)$$

2.2 母分散が未知で等しい場合 (p. 205)

$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ とすると

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}} \sim N(0, 1)$$

定義 2. (X_1, \dots, X_m) と (Y_1, \dots, Y_n) をプールした標本分散は

$$s^2 := \frac{1}{m+n-2} \left[\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \right]$$

□ 補題 1. $X \sim \chi^2(m)$ と $Y \sim \chi^2(n)$ が独立なら

$$X + Y \sim \chi^2(m+n)$$

証明. $Z_1, \dots, Z_{m+n} \sim N(0, 1)$ を独立とすると, χ^2 分布の定義より

$$\begin{aligned} X &:= Z_1^2 + \dots + Z_m^2 \\ Y &:= Z_{m+1}^2 + \dots + Z_{m+n}^2 \end{aligned}$$

したがって

$$X + Y = Z_1^2 + \dots + Z_{m+n}^2$$

χ^2 分布の定義より $X + Y \sim \chi^2(m+n)$. □

定理 2.

$$\frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$

証明. 標本分散を s_X^2, s_Y^2 とすると

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

ただし $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$. 両者は独立なので, 前補題より

$$\begin{aligned} &\frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{(m-1)s_X^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma^2} \\ &\sim \chi^2(m+n-2) \end{aligned}$$

□

定理 3.

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \sim t(m+n-2)$$

証明. 式変形すると

$$\begin{aligned} &\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \\ &= \frac{[\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)] / \sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}}{\sqrt{s^2/\sigma^2}} \\ &= \frac{[\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)] / \sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}}{\sqrt{[(m+n-2)s^2/\sigma^2]/(m+n-2)}} \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$

分子と分母の独立性も証明できる（省略）。 \square

注 3. $\bar{X} - \bar{Y}$ の累積確率は t 分布表から次のように求める。

$$\Pr[\bar{X} - \bar{Y} \leq c]$$

$$= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \leq \frac{c - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}}\right]$$

$$= \Pr\left[t(m+n-2) \leq \frac{c - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}}\right]$$

注 4. $\mu_X = \mu_Y$ なら

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \sim t(m+n-2)$$

2.3 母分散が未知で異なる場合 (p. 206)

$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ だと σ_X^2, σ_Y^2 に分布が依存しない統計量を作れない。ただし大数の法則と中心極限定理より

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s_X^2/m + s_Y^2/n}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$$

もっとよい近似もある（ウェルチの近似）。

3 標本分散の比

3.1 F 分布 (p. 207)

定義 3. $U \sim \chi^2(m)$ と $V \sim \chi^2(n)$ が独立のとき、 $(U/m)/(V/n)$ の分布を **自由度 (m, n) の F 分布** と言う。

注 5. $F(m, n)$ と書く。

注 6. 累積確率は F 分布表を参照。

注 7. $X \sim F(m, n)$ なら $1/X \sim F(n, m)$ 。

注 8. $t \sim t(n)$ なら $t^2 \sim F(1, n)$ 。

例 3. F 分布の pdf の例は図 1 の通り。

3.2 母平均が既知の場合

母集団分布を $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ とする。 σ_X^2 と σ_Y^2 を比較したい。各母集団から独立に抽出した無作為標本を $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$ 、標本分散を $\hat{\sigma}_X^2, \hat{\sigma}_Y^2$ とする。

定理 4.

$$\frac{\hat{\sigma}_X^2/\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim F(m, n)$$

証明. 標本分散の分布は

$$\frac{m\hat{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m)$$

$$\frac{n\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n)$$

両者は独立なので

$$\frac{\hat{\sigma}_X^2/\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} = \frac{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2}$$

$$= \frac{(m\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2)/m}{(n\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2)/n}$$

$$\sim F(m, n)$$

\square

3.3 母平均が未知の場合 (p. 208)

標本分散を s_X^2, s_Y^2 とする。

定理 5.

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

証明. 標本分散の分布は

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

両者は独立なので

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} = \frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2}$$

$$= \frac{[(m-1)s_X^2/\sigma_X^2]/(m-1)}{[(n-1)s_Y^2/\sigma_Y^2]/(n-1)}$$

$$\sim F(m-1, n-1)$$

\square

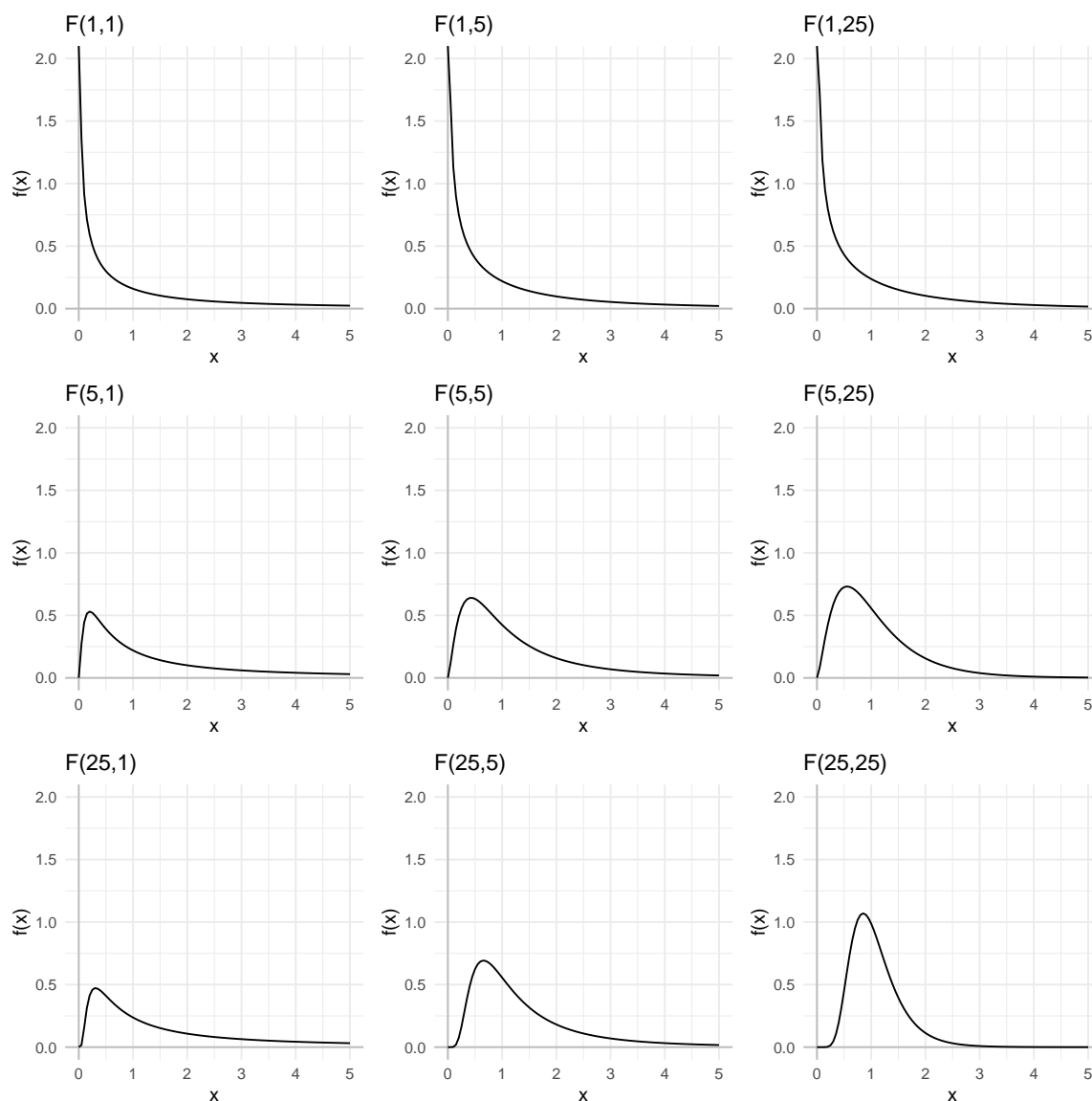


図1 F分布の pdf の例

注 9. s_X^2/s_Y^2 の累積確率は F 分布表から次のように求める.

$$\begin{aligned} \Pr \left[\frac{s_X^2}{s_Y^2} \leq c \right] &= \Pr \left[\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \leq \frac{c}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \right] \\ &= \Pr \left[F(m-1, n-1) \leq \frac{c}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \right] \end{aligned}$$

注 10. $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ なら

$$\frac{s_X^2}{s_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

例 4 (p. 209). $N(\mu_X, \sigma^2), N(\mu_Y, \sigma^2)$ から独立に抽出した大きさ 10, 15 の無作為標本の標本分散をそれぞれ s_X^2, s_Y^2 とする (母分散は等しい). $s_X^2/s_Y^2 > 3$ の確率は

$$\begin{aligned} \Pr \left[\frac{s_X^2}{s_Y^2} > 3 \right] &= \Pr[F(9, 14) > 3] \\ &\approx .03 \end{aligned}$$

4 今日のキーワード

2 標本問題, プールした標本分散, χ^2 分布の再生性, 標本平均の差の分布 (母分散が既知・未知で等しい・未知で異なる), F 分布, 標本分散の比の分布 (母平均が既知・未知)

5 次回までの準備

提出 宿題 5

復習 教科書第 10 章 5 節, 復習テスト 17

予習 教科書第 11 章 1-2, 4 節