

経済統計：第2回中間試験

村澤 康友

2013 年 10 月 5 日

注意：3 問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいと与えるが、結果のみの解答は 0 点とする）。

1. (20 点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）。

- (a) ベルヌーイ分布
- (b) (確率変数の) 共分散
- (c) 条件つき確率密度関数
- (d) 漸近分布

2. (30 点) 将棋の先手・後手を決める「振り駒」では、5 枚の駒を投げて表の枚数が 3 枚以上なら上座が先手、2 枚以下なら下座が先手となる。表の枚数を X とする。また 1 枚の駒を投げて表が出る確率を p とする（将棋の駒の表と裏には異なる文字が彫ってあるため $p = 1/2$ とは限らない）。

- (a) X はどのような分布に従うか？分布の名称と母数で答えなさい。
- (b) X の pdf を書きなさい。
- (c) $p = 1/3$ とする。上座が先手となる確率を求めなさい。

3. (50 点) ある学力テストにおける英語の得点を X 、数学の得点を Y とする。 (X, Y) は次の 2 変量正規分布に従うとする。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 60 \\ 50 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 100 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{YX} & 225 \end{bmatrix} \right).$$

また $X + Y$ の分散は 400 であったとする。

- (a) 2 科目合計点の分布を求めなさい。
- (b) 2 科目平均点の分布を求めなさい。
- (c) 英語と数学の得点の共分散と相関係数を求めなさい。
- (d) A 君の得点は英語が 55 点、数学が 60 点であった。A 君の英語・数学・2 科目合計の標準化得点をそれぞれ求めなさい。
- (e) 受験者は全部で 1 万人であった。標準正規分布表を用いて A 君の英語・数学・2 科目合計の順位をそれぞれ予想しなさい（できるだけ正確に求めること）。

解答例

1. 確率の基本用語

(a) (ベルヌーイ試行における) 成功を 1, 失敗を 0 とした確率変数の分布.

- 「結果が 0 か 1」がなければ 0 点.
- $\text{Bin}(1, p)$ は定義でないので 0 点.

(b) X と Y の共分散は

$$\text{cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

- $E(XY) - E(X)E(Y)$ は定義でないので 0 点.

(c) $Y = y$ が与えられたときの X の条件つき確率密度関数は

$$f_{X|Y}(x|Y=y) := \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

- 条件つき確率は 2 点.

(d) $\{X_n\}$ において n が大きいときの X_n の近似分布.

2. 2 項分布の応用

(a) $\text{Bin}(5, p)$

- 「2 項分布」で 5 点, 母数 (試行回数と成功確率) で 5 点.

(b)

$$p_X(x) = \begin{cases} {}_5C_x p^x (1-p)^{5-x} & \text{for } x = 0, \dots, 5 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}.$$

- 式で表さなければ 0 点.

(c)

$$\begin{aligned} p_X(3) &= {}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{5!}{3!2!} \frac{2^2}{3^5} \\ &= 10 \frac{4}{243} \\ &= \frac{40}{243}, \\ p_X(4) &= {}_5C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \\ &= \frac{5!}{4!1!} \frac{2}{3^5} \\ &= 5 \frac{2}{243} \\ &= \frac{10}{243}, \\ p_X(5) &= {}_5C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \\ &= \frac{5!}{5!0!} \frac{1}{3^5} \\ &= \frac{1}{243}. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 3] &= p_X(3) + p_X(4) + p_X(5) \\ &= \frac{51}{243} \\ &= \frac{17}{81}.\end{aligned}$$

3. 2 変量正規分布の応用

(a) $X + Y \sim N(110, 400)$

(b) $(X + Y)/2 \sim N(55, 100)$

(c)

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + 2\text{cov}(X, Y) + \text{var}(Y),$$

すなわち

$$400 = 100 + 2\text{cov}(X, Y) + 225.$$

したがって

$$\text{cov}(X, Y) = 37.5.$$

相関係数は

$$\begin{aligned}\rho_{XY} &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= \frac{37.5}{10 \cdot 15} \\ &= \frac{75}{300} \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

(d) 英語の標準化得点は

$$\begin{aligned}z_X &= \frac{55 - 60}{\sqrt{100}} \\ &= -\frac{5}{10} \\ &= -.5.\end{aligned}$$

数学の標準化得点は

$$\begin{aligned}z_Y &= \frac{60 - 50}{\sqrt{225}} \\ &= \frac{10}{15} \\ &\approx .67.\end{aligned}$$

2 科目合計の標準化得点は

$$\begin{aligned}z_{X+Y} &= \frac{115 - 110}{\sqrt{400}} \\ &= \frac{5}{20} \\ &= .25.\end{aligned}$$

- 各 3 点 . 3 つ正解で 10 点 .

(e) 標準正規分布表より

$$\Pr[Z \geq -.5] = .69146,$$

$$\Pr[Z \geq .67] = .25143,$$

$$\Pr[Z \geq .25] = .40129.$$

したがって英語は 6914 ~ 5 位 , 数学は 2514 ~ 5 位 , 2 科目合計は 4012 ~ 3 位と予想される .

- 各 3 点 . 3 つ正解で 10 点 .
- 前問の解答と整合的なら OK .

答案は返却します . 採点や成績に関する質問にも応じます . オフィスアワーの時間 (月昼休み ・ 水 3 限) に研究室まで来てください .