経済統計：前期第 1 回中間試験

村澤 康友

2011 年 5 月 11 日

注意： 3 問とも解答すること．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）記述統計学
   （b）母集団
   （c）事象
   （d）期待値
2. （30 点）丁半賭博を考える．2 つのサイコロの目の合計を X とする．「丁」に 1 枚賭けた場合の利得を Y とすると，
$$Y = \begin{cases} 1 & （X \text{ は偶数}） \\ -1 & （X \text{ は奇数}） \end{cases}.$$
   以下の問いに答えなさい．
   （a）X の確率関数を式とグラフで書きなさい．
   （b）Y の確率関数を式とグラフで書きなさい．
   （c）Y の期待値と分散を求めなさい．
3. （50 点）次の「3 囚人問題」を考える．

   > 3 人の囚人 A, B, C がいる．全員処刑の予定が 1 人だけ恩赦となった．誰が恩赦か囚人達はまだ知らない．結果を知っている看守に対し，囚人 A が「B と C のどちらかは必ず処刑なのだから，処刑される 1 人の名前を教えても，私に情報を与えることにはならないだろう．1 人を教えてくれないか」と頼んだ．看守は納得して「囚人 B は処刑される」と教えてやった．

   以下の通り事象を定義する．
   - 事象 A：囚人 A が恩赦
   - 事象 B：囚人 B が恩赦
   - 事象 C：囚人 C が恩赦
   - 事象 S：看守が「囚人 B は処刑」と言う

   本当に $P(A|S) = P(A)$ か確かめたい．以下の問いの答えなさい．
   （a）「ベイズの定理」により $P(A|S)$ を $P(S|A), P(S|B), P(S|C), P(A), P(B), P(C)$ で表しなさい．
   （b）$P(S|B), P(S|C)$ を求めなさい．
   （c）$(P(A), P(B), P(C)) = (1/3, 1/3, 1/3)$ とする．$P(S|A) = 1/2$ として $P(A|S)$ を求めなさい．
   （d）$(P(A), P(B), P(C)) = (1/4, 1/4, 1/2)$ とする．$P(S|A) = 1/2$ として $P(A|S)$ を求めなさい．
   （e）$(P(A), P(B), P(C)) = (1/4, 1/4, 1/2)$ とする．$P(A|S) = P(A)$ のとき $P(S|A)$ を求めなさい．

1. 確率・統計の基本用語

   (a) データ整理の手法の体系.
      - 「表やグラフにまとめること」は 2 点（他に「統計量を求めること」もある）.

   (b) 考察の対象全体.
      - 「調査の対象」は「標本」を指すので 0 点.

   (c) 標本空間の部分集合.
      - 「起こりうることがら」は定義でないので 0 点（教科書 p. 68, 69 参照）.

   (d) X の期待値は

$$\mathrm{E}(X) := \begin{cases} \sum_x x p_X(x) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x & \text{（連続）} \end{cases}.$$

      - 離散または連続のみでも OK.
      - 言葉なら「取り得る値に確率（密度）を掛けて足し合わせた（積分した）もの」.
      - 特定の分布の期待値は 2 点.

2. 離散分布の例

   (a)

$$X = \begin{cases} 2 & \text{with pr. } 1/36 \\ 3 & \text{with pr. } 2/36 \\ 4 & \text{with pr. } 3/36 \\ 5 & \text{with pr. } 4/36 \\ 6 & \text{with pr. } 5/36 \\ 7 & \text{with pr. } 6/36 \\ 8 & \text{with pr. } 5/36 \\ 9 & \text{with pr. } 4/36 \\ 10 & \text{with pr. } 3/36 \\ 11 & \text{with pr. } 2/36 \\ 12 & \text{with pr. } 1/36 \end{cases}.$$

   したがって

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/36 & \text{for } x = 2, 12 \\ 2/36 & \text{for } x = 3, 11 \\ 3/36 & \text{for } x = 4, 10 \\ 4/36 & \text{for } x = 5, 9 \\ 5/36 & \text{for } x = 6, 8 \\ 6/36 & \text{for } x = 7 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}.$$

   グラフは省略.
      - 式で 5 点，グラフで 5 点.
      - 確率 0 がなければ 1 点減.

   (b)

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } y = -1, 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}.$$

   グラフは省略.

- 式で 5 点，グラフで 5 点.
- 確率 0 がなければ 1 点減.

(c)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &:= -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0, \\ \mathrm{var}(Y) &:= (-1-0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (1-0)^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

- 期待値で 5 点，分散で 5 点.
- 前問の確率関数と整合的なら OK（確率関数でなければダメ).

3. ベイズの定理

(a)

$$\begin{aligned}P(A|S) &:= \frac{P(A \cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{P(S|A)P(A)}{P(S)} \\ &= \frac{P(S|A)P(A)}{P(S \cap A) + P(S \cap B) + P(S \cap C)} \\ &= \frac{P(S|A)P(A)}{P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C)}.\end{aligned}$$

- 「条件つき確率」で 3 点,「乗法定理」まで 5 点，S の分割まで 7 点.

(b) B が恩赦なら「B は処刑」と言わないので $B \cap S = \emptyset$. したがって

$$\begin{aligned}P(S|B) &:= \frac{P(S \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0}{P(B)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

C が恩赦なら「B は処刑」と言うので $C \subset S$. したがって

$$\begin{aligned}P(S|C) &:= \frac{P(S \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C)}{P(C)} \\ &= 1.\end{aligned}$$

- 各 5 点.
- 「条件つき確率」で各 2 点.

(c)

$$
\begin{aligned}
P(A|S) &= \frac{(1/2)(1/3)}{(1/2)(1/3)+0+1/3} \\
&= \frac{1/6}{1/6+1/3} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

- 間違った求め方は 0 点.

(d)

$$
\begin{aligned}
P(A|S) &= \frac{(1/2)(1/4)}{(1/2)(1/4)+0+1/2} \\
&= \frac{1/8}{1/8+1/2} \\
&= \frac{1}{5}.
\end{aligned}
$$

(e)

$$\frac{1}{4} = \frac{P(S|A)(1/4)}{P(S|A)(1/4)+0+1/2}.$$

したがって

$$\frac{P(S|A)}{4} + \frac{1}{2} = P(S|A),$$

または

$$\frac{3P(S|A)}{4} = \frac{1}{2},$$

または

$$P(S|A) = \frac{2}{3}.$$

※答案は返却します．採点や成績に関する質問にも応じます．**オフィスアワーの時間（月水木金の昼休み）に**研究室まで来てください.