計量経済 II：復習テスト 10

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 12 月 4 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 29 日の予定）に提出すること．

1. $\{y_t\}$ をドリフト付きランダム・ウォークとする．すなわち任意の t について

$$\Delta y_t = \delta + w_t$$
$$\{w_t\} \sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$$

$\{w_t\}$ は iid とする．

（a） $\mathrm{E}_t(y_{t+1})$ を求めなさい．

（b） $\mathrm{E}_t(y_{t+2})$ を求めなさい．

（c） $\mathrm{var}_t(y_{t+1})$ を求めなさい．

（d） $\mathrm{var}_t(y_{t+2})$ を求めなさい．

2. $\{y_t\}$ を定数項なしの AR$(p+1)$ とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} \phi(\mathrm{L})y_t &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right) \end{aligned}$$

ADF 検定の推定式は，任意の t について

$$\phi^*(\mathrm{L})\Delta y_t = -\phi(1)y_{t-1} + w_t$$

（a）$\phi(1)$ を $\phi_1, \ldots, \phi_{p+1}$ で表しなさい．

（b）$p=0$ として ADF 検定の推定式を ϕ を用いて表しなさい．

（c）$p=1$ として ADF 検定の推定式を ϕ_1, ϕ_2 を用いて表しなさい．

解答例

1. (a) 式変形すると，任意の t について

$$y_t = y_{t-1} + \delta + w_t$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{E}_t(y_t + \delta + w_{t+1}) \\
&= y_t + \delta + \mathrm{E}_t(w_{t+1}) \\
&= y_t + \delta + \mathrm{E}(w_{t+1}) \\
&= y_t + \delta
\end{aligned}$$

(b) 逐次代入すると

$$\begin{aligned}
y_{t+2} &= y_{t+1} + \delta + w_{t+2} \\
&= y_t + \delta + w_{t+1} + \delta + w_{t+2} \\
&= y_t + 2\delta + w_{t+1} + w_{t+2}
\end{aligned}$$

$\{w_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_t(y_{t+2}) &= \mathrm{E}_t(y_t + 2\delta + w_{t+1} + w_{t+2}) \\
&= y_t + 2\delta + \mathrm{E}_t(w_{t+1}) + \mathrm{E}_t(w_{t+2}) \\
&= y_t + 2\delta + \mathrm{E}(w_{t+1}) + \mathrm{E}(w_{t+2}) \\
&= y_t + 2\delta
\end{aligned}$$

(c) $\{w_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+1}) &= \mathrm{var}_t(y_t + \delta + w_{t+1}) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+1}) \\
&= \mathrm{var}(w_{t+1}) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

(d) $\{w_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_t(y_{t+2}) &= \mathrm{var}_t(y_t + 2\delta + w_{t+1} + w_{t+2}) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+1} + w_{t+2}) \\
&= \mathrm{var}_t(w_{t+1}) + \mathrm{var}_t(w_{t+2}) \\
&= \mathrm{var}(w_{t+1}) + \mathrm{var}(w_{t+2}) \\
&= 2\sigma^2
\end{aligned}$$

2. (a) $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi_1 \mathrm{L} - \cdots - \phi_{p+1} \mathrm{L}^{p+1}$ より

$$\phi(1) = 1 - \phi_1 - \cdots - \phi_{p+1}$$

(b) AR(1) は任意の t について

$$y_t = \phi y_{t-1} + w_t$$

両辺から y_{t-1} を引くと

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= (\phi - 1) y_{t-1} + w_t \\
&= -(1 - \phi) y_{t-1} + w_t
\end{aligned}$$

（c）AR(2) は任意の t について

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t$$

両辺から y_{t-1} を引くと

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= (\phi_1 - 1)y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + w_t \\
&= (\phi_1 + \phi_2 - 1)y_{t-1} - \phi_2(y_{t-1} - y_{t-2}) + w_t \\
&= -(1 - \phi_1 - \phi_2)y_{t-1} - \phi_2 \Delta y_{t-1} + w_t
\end{aligned}$$