

# 第 14 回 母集団と標本 (9.1–9.2.1)

村澤 康友

2024 年 11 月 15 日

## 今日のポイント

1. 標本から母集団分布について推測することを統計的推測という.
2. 復元抽出した無作為標本の各個体を確率変数で表すと, それらは独立かつ同一に (iid) 母集団分布にしたがう.
3. 母集団分布の特性を表す定数を母数, 標本の関数を統計量という.
4. 確率的な標本抽出にともなう統計量の分布を標本分布という.
5. 統計量の標本分布から母数について推測するのが統計的推測.

## 目次

1	記述統計学と推測統計学 (p. 175)	1
2	母集団と標本	1
2.1	母集団と標本 (p. 176) . . . . .	1
2.2	母集団分布 (p. 178) . . . . .	1
2.3	標本抽出 (p. 176) . . . . .	2
3	母数と統計量	2
3.1	母数 (p. 179) . . . . .	2
3.2	統計量 (p. 182) . . . . .	3
3.3	標本分布 (p. 183) . . . . .	3
3.4	標本平均 (p. 183) . . . . .	3
4	今日のキーワード	3
5	次回までの準備	3

## 1 記述統計学と推測統計学 (p. 175)

**定義 1.** ある全体について知るための方法論の体系を**統計学**という.

注 1. 元来は国 (state) の状態 (state) について知るのが目的であった.

**定義 2.** データ整理の手法の体系を**記述統計学**という.

注 2. 大量観察による法則の発見を目的とする.

**定義 3.** 一部の観察から全体について推測することを**統計的推測**という.

注 3. 一部を見て全体を語るには注意が必要.

**定義 4.** 統計的推測の理論体系を**推測統計学**という.

## 2 母集団と標本

### 2.1 母集団と標本 (p. 176)

**定義 5.** 考察の対象全体を**母集団**という.

**例 1.** 日本国民の有権者全体, 日本のテレビ所有世帯全体.

**定義 6.** 母集団のうち実際に観察される部分を**標本**という.

注 4. 「標本から母集団について推測」するのが統計的推測.

### 2.2 母集団分布 (p. 178)

**定義 7.** 母集団における各個体の属性値の分布を**母集団分布**という.

注 5. 度数分布や確率分布で表される.

注 6. 「標本から母集団分布について推測」するのが統計的推測.

**定義 8.** 有限個の個体から成る母集団を**有限母集団**という.

注 7. 母集団分布は度数分布で表される.

**定義 9.** 無限個の個体から成る仮説的な母集団を**無限 (仮説) 母集団**という.

注 8. 適当な確率分布を母集団分布として仮定する.

### 2.3 標本抽出 (p. 176)

**定義 10.** 母集団から標本を取り出すことを**標本抽出**という.

**定義 11.** 標本に含まれる個体の数を**標本の大きさ**という.

注 9.  $n$  個の個体を含む標本は, 大きさ  $n$  の 1 つの標本であり,  $n$  個の標本ではない.

**定義 12.** 取り出した個体を母集団に戻しながら繰り返す抽出を**復元抽出**という.

注 10. 同じ個体を 2 回以上取り出すことがある. ただし無限母集団ではその確率は 0.

**定義 13.** 取り出した個体を母集団に戻さずに繰り返す抽出を**非復元抽出**という.

注 11. 標本をまとめて一度に取り出すのは非復元抽出.

注 12. 無限母集団では復元抽出と非復元抽出に実質的な違いはない.

**定義 14.** どの個体の組合せも等確率で取り出される抽出を**(単純) 無作為抽出**という.

注 13. 無作為抽出した個体を確率変数で表すと, その確率分布は母集団分布と等しい.

**定義 15.** 無作為抽出した標本を**無作為標本**という.

注 14. 復元抽出した無作為標本の各個体を確率変

数で表すと, それらは**独立かつ同一に** (*independent and identically distributed, iid*) 母集団分布にしたがう.

注 15. 「統計学入門」では復元抽出した無作為標本を想定する.

**例 2.** 母集団を  $(x_1, \dots, x_5)$  とする. ただし

$$\begin{aligned} x_1 &:= 175, & x_2 &:= 170, & x_3 &:= 169, \\ x_4 &:= 165, & x_5 &:= 164 \end{aligned}$$

母集団分布の pmf は

$$p(x) := \begin{cases} 1/5 & \text{for } x = 164, 165, 169, 170, 175 \\ 0 & \text{for } x \neq 164, 165, 169, 170, 175 \end{cases}$$

母集団から無作為抽出した個体を  $X$  とすると,

$$X = \begin{cases} 164 & \text{with pr. } 1/5 \\ 165 & \text{with pr. } 1/5 \\ 169 & \text{with pr. } 1/5 \\ 170 & \text{with pr. } 1/5 \\ 175 & \text{with pr. } 1/5 \end{cases}$$

$X$  の pmf は  $p(\cdot)$ .

## 3 母数と統計量

### 3.1 母数 (p. 179)

**定義 16.** 確率分布の特性を表す定数を**母数** (パラメーター) という.

注 16. 「標本から母数について推測」するのが統計的推測.

**例 3.** 平均, 分散.

**定義 17.** 母集団分布の平均を**母平均**という.

**定義 18.** 母集団分布の分散を**母分散**という.

**定義 19.** 有限個の母数で表せる分布を**パラメトリックな分布**という.

注 17. 母数を知れば母集団分布が完全に分かる.

**例 4.**  $\text{Bin}(n, p)$ ,  $\text{Poi}(\lambda)$ ,  $N(\mu, \sigma^2)$ .

**定義 20.** 有限個の母数で表せない分布をノンパラメトリックな分布という.

注 18. 母集団分布が完全に分からなくても, 代表的な母数 (母平均・母分散) を知ることは重要.

### 3.2 統計量 (p. 182)

**定義 21.** 標本の関数を統計量という.

注 19. 母集団分布や母数の推測に用いる.

**例 5.** 標本の平均・分散.

### 3.3 標本分布 (p. 183)

**定義 22.** 確率的な標本抽出にともなう統計量の分布を標本分布という.

注 20. 「統計量の標本分布から母数について推測」するのが統計的推測.

### 3.4 標本平均 (p. 183)

$(X_1, \dots, X_n)$  を標本とする.

**定義 23.**  $(X_1, \dots, X_n)$  の標本平均は

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

注 21. 母平均とは異なる.

**定理 1.**  $(X_1, \dots, X_n)$  が平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の母集団分布からの無作為標本なら

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= \mu \\ \text{var}(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

証明. 復習テスト. □

注 22. 母平均, 母分散との関係に注意.

**定理 2.**  $(X_1, \dots, X_n)$  が  $N(\mu, \sigma^2)$  からの無作為標本なら

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

証明. 復習テスト. □

注 23. この結果を利用して  $\mu$  について推測する.

**定理 3.**  $(X_1, \dots, X_n)$  が平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の母集団分布からの無作為標本なら

$$\bar{X} \stackrel{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

証明. 中心極限定理. □

注 24. この結果を利用して  $\mu$  について近似的に推測する.

## 4 今日のキーワード

統計学, 記述統計学, 推測統計学, 統計的推測, 母集団, 標本, 母集団分布, 有限母集団, 無限 (仮説) 母集団, 標本抽出, 標本の大きさ, 復元抽出, 非復元抽出, (単純) 無作為抽出, 無作為標本, iid, 母数 (パラメーター), 母平均, 母分散, パラメトリックな分布, ノンパラメトリックな分布, 統計量, 標本分布, 標本平均

## 5 次回までの準備

**復習** 教科書第 9 章 1-2.1 節, 復習テスト 14

**予習** 教科書第 9 章 2.2-4 節