

第7回 多変量時系列モデルの定式化と推定 (7.4.1)

村澤 康友

2022 年 11 月 8 日

今日のポイント

1. 試行の結果によって値が決まる N 次元ベクトルの列を N 変量確率過程という.
2. $\text{cov}(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-s})$ を $\{\mathbf{y}_t\}$ の s 次の自己共分散行列という. $\{\mathbf{y}_t\}$ の自己共分散行列関数は, 任意の時点差 s について $\mathbf{\Gamma}(s) := \text{cov}(\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-s})$.
3. p 次の VAR 過程は, 任意の t について $\Phi(L)(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{w}_t$. ただし $\Phi(L)$ はラグ多項式で $\{\mathbf{w}_t\}$ は WN.
4. VAR モデルは各式を OLS 推定する. 共通のラグ次数 p はモデル選択基準 (AIC・SBIC・HQIC) で選ぶ.

目次

1	行列	1
1.1	行列とベクトル	1
1.2	ベクトルの内積	1
1.3	行列の演算	2
1.4	行列と連立 1 次方程式	2
1.5	正方行列	2
2	確率ベクトル	2
2.1	平均ベクトル	2
2.2	分散共分散行列	3
2.3	相関係数行列	3
2.4	相互共分散と相互相関	3
3	VAR 過程	3
3.1	多変量確率過程	3

3.2	共分散定常性	3
3.3	自己共分散行列と自己相関行列	3
3.4	VAR(1) 過程 (p. 143)	3
3.5	VAR(p) 過程 (p. 143)	4
4	VAR 予測	4
4.1	VAR モデルの推定 (p. 144)	4
4.2	次数選択	4
4.3	最適予測	4
4.4	1 期先予測	4
4.5	h 期先予測	4
5	今日のキーワード	5
6	次回までの準備	5

1 行列

1.1 行列とベクトル

定義 1. $m \times n$ 行列は

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

注 1. $\mathbf{A} := [a_{i,j}]$ とも書く.

定義 2. $1 \times n$ 行列を (n 次元) 行ベクトルという.

定義 3. $n \times 1$ 行列を (n 次元) 列ベクトルという.

1.2 ベクトルの内積

\mathbf{x}, \mathbf{y} を n 次元列ベクトルとする.

定義 4. \mathbf{x} と \mathbf{y} の内積は

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

注 2. $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{x}'\mathbf{y}$ とも書く.

1.3 行列の演算

\mathbf{A}, \mathbf{B} を行列とする.

定義 5. $m \times n$ 行列 \mathbf{A}, \mathbf{B} の各 (i, j) 成分について $a_{i,j} = b_{i,j}$ なら \mathbf{A} と \mathbf{B} は等しいという.

定義 6. $m \times n$ 行列 \mathbf{A}, \mathbf{B} の和は

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := [a_{i,j} + b_{i,j}]$$

定義 7. スカラー α と \mathbf{A} のスカラー積は

$$\alpha \mathbf{A} := [\alpha a_{i,j}]$$

定義 8. $l \times m$ 行列 \mathbf{A} と $m \times n$ 行列 \mathbf{B} の積は

$$\mathbf{AB} := [(a_{i,\cdot}, b_{\cdot,j})]$$

注 3. 一般に $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. そもそも $l \neq n$ なら \mathbf{BA} は定義できない.

定義 9. \mathbf{A} の転置は

$$\mathbf{A}' := [a_{j,i}]$$

定理 1.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})' &= \mathbf{A}' + \mathbf{B}' \\ (\mathbf{AB})' &= \mathbf{B}'\mathbf{A}' \end{aligned}$$

1.4 行列と連立 1 次方程式

n 個の未知変数 x_1, \dots, x_n をもつ m 本の連立 1 次方程式は

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

次の行列・ベクトルを定義する.

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

連立 1 次方程式は

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

1.5 正方行列

定義 10. $n \times n$ 行列を n 次正方行列という.

定義 11. (n 次) 単位行列は

$$\mathbf{I}_n := \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

2 確率ベクトル

2.1 平均ベクトル

\mathbf{x} を n 次元確率ベクトルとする.

定義 12. \mathbf{x} の平均ベクトルは

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \mathbf{E}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(x_n) \end{pmatrix}$$

定理 2 (期待値の線形性). 任意の $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ と $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ について

$$\mathbf{E}(\mathbf{Ax} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}$$

証明.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{Ax} + \mathbf{b}) &= \mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,\cdot} \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m,\cdot} \mathbf{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathbf{E} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,\cdot} \mathbf{x} + b_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m,\cdot} \mathbf{x} + b_m \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{a}_{1,\cdot} \mathbf{x} + b_1) \\ \vdots \\ \mathbf{E}(\mathbf{a}_{m,\cdot} \mathbf{x} + b_m) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,\cdot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) + b_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m,\cdot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) + b_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1,\cdot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m,\cdot} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \end{aligned}$$

□

2.2 分散共分散行列

定義 13. x の分散共分散行列は

$$\text{var}(x) := E((x - E(x))(x - E(x))')$$

注 4. $\text{var}(x)$ の (i, j) 成分は $\text{cov}(x_i, x_j)$.

定理 3. 任意の $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ と $b \in \mathbb{R}^m$ について

$$\text{var}(Ax + b) = A \text{var}(x) A'$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{var}(Ax + b) &:= E((Ax + b - E(Ax + b))(Ax + b - E(Ax + b))') \\ &= E((Ax - AE(x))(Ax - AE(x))') \\ &= E(A(x - E(x))[A(x - E(x))]') \\ &= E(A(x - E(x))(x - E(x))' A') \\ &= AE((x - E(x))(x - E(x))' A') \\ &= A \text{var}(x) A' \end{aligned}$$

□

2.3 相関係数行列

定義 14. 確率ベクトルの各変量を標準化することを確率ベクトルの標準化という.

定義 15. 標準化した確率ベクトルの分散共分散行列を相関係数行列という.

2.4 相互共分散と相互相関

x を m 次元確率ベクトル, y を n 次元確率ベクトルとする.

定義 16. x と y の相互共分散行列は

$$\text{cov}(x, y) := E((x - E(x))(y - E(y))')$$

定義 17. 標準化した確率ベクトルの相互共分散行列を相互相関行列という.

注 5. $\text{corr}(x, y)$ と書く.

3 VAR 過程

3.1 多変量確率過程

定義 18. 試行の結果によって値が決まる N 次元ベクトルの列を N 変量確率過程という.

注 6. すなわち $\{y_t\} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{N \times \infty}$. 確率変数・確率ベクトル・(1 変量) 確率過程と同様に, 起こりうる結果に対して確率を定義できる.

3.2 共分散定常性

$\{y_t\}$ を N 変量確率過程とする.

定義 19. 任意の時点 t と時点差 s について $E(y_t)$ と $\text{cov}(y_t, y_{t-s})$ が t に依存しないなら $\{y_t\}$ は共分散 (弱) 定常という.

注 7. $I(0)$ と書く.

3.3 自己共分散行列と自己相関行列

$\{y_t\}$ を N 変量 $I(0)$ 過程とする.

定義 20. $\text{cov}(y_t, y_{t-s})$ を $\{y_t\}$ の s 次の自己共分散行列という.

定義 21. $\text{corr}(y_t, y_{t-s})$ を $\{y_t\}$ の s 次の自己相関行列という.

定義 22. $\{y_t\}$ の自己共分散行列関数は, 任意の時点差 s について

$$\Gamma(s) := \text{cov}(y_t, y_{t-s})$$

定義 23. $\{y_t\}$ の自己相関行列関数は, 任意の時点差 s について

$$P(s) := \text{corr}(y_t, y_{t-s})$$

定義 24. ある $s \neq 0$ について $P(s) \neq \mathbf{O}$ であることを系列相関という.

定義 25. 平均 $\mathbf{0}$ で系列相関のない $I(0)$ 過程をホワイト・ノイズという.

注 8. 分散共分散行列が Σ なら $\text{WN}(\Sigma)$ と書く.

3.4 VAR(1) 過程 (p. 143)

定義 26. 1 次のベクトル AR (vector AR, VAR) 過程は, 任意の t について

$$\begin{aligned} \Phi(L)(y_t - \mu) &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\Sigma) \end{aligned}$$

ただし $\Phi(L) := I_N - \Phi L$.

注 9. VAR(1) と書く.

注 10. すなわち任意の t について

$$\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{w}_t$$

平均 $\mathbf{0}$ の 2 変量 VAR(1) 過程なら、任意の t について

$$\begin{pmatrix} y_{t,1} \\ y_{t,2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{t-1,1} \\ y_{t-1,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{t,1} \\ w_{t,2} \end{pmatrix}$$

すなわち

$$y_{t,1} = \phi_{1,1}y_{t-1,1} + \phi_{1,2}y_{t-1,2} + w_{t,1}$$

$$y_{t,2} = \phi_{2,1}y_{t-1,1} + \phi_{2,2}y_{t-1,2} + w_{t,2}$$

3.5 VAR(p) 過程 (p. 143)

定義 27. p 次の VAR 過程は、任意の t について

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}(L)(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) &= \mathbf{w}_t \\ \{\mathbf{w}_t\} &\sim \text{WN}(\boldsymbol{\Sigma}) \end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{\Phi}(L) := \mathbf{I}_N - \boldsymbol{\Phi}_1 L - \cdots - \boldsymbol{\Phi}_p L^p$.

注 11. VAR(p) と書く。

注 12. 以下のベクトルを定義する。

$$\mathbf{s}_t := \begin{pmatrix} \mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_t := \begin{pmatrix} \mathbf{w}_t \\ \mathbf{0}_{(p-1)N} \end{pmatrix}$$

$\{\mathbf{y}_t\}$ の VAR(p) モデルは $\{\mathbf{s}_t\}$ の VAR(1) モデルで表現できる。すなわち任意の t について

$$\mathbf{s}_t = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{s}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

ただし

$$\boldsymbol{\Phi} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \cdots & \boldsymbol{\Phi}_{p-1} & \boldsymbol{\Phi}_p \\ \mathbf{I}_{(p-1)N} & & & \mathbf{O}_{(p-1)N \times N} \end{bmatrix}$$

注 13. VARMA 過程にも拡張できるが、MA 部分の係数が一意に定まらず、推定も煩雑なのであまり使わない。

4 VAR 予測

4.1 VAR モデルの推定 (p. 144)

正規 VAR モデルの厳密な ML 推定は煩雑なので、条件つき ML 推定 (= 各式の OLS 推定) が普通。OLS 推定量は不偏でなく漸近有効でもないが、正規分布の仮定は不要。

4.2 次数選択

VAR モデルの次数 p はモデル選択基準 (AIC・SBIC・HQC) で選ぶ。通常は各式に同じ次数を仮定する。

4.3 最適予測

最適予測は損失関数に依存する。2 次の損失なら条件付き期待値が最適予測。

4.4 1 期先予測

簡単化のため $\{\mathbf{y}_t\}$ を定数項なしの VAR(1) 過程とする。すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t \\ \{\mathbf{w}_t\} &\sim \text{WN}(\boldsymbol{\Sigma}) \end{aligned}$$

簡単化のため母数は既知と仮定する。時点 t までの観測値を所与とした条件付き期待値を $E_t(\cdot)$ 、条件付き分散を $\text{var}_t(\cdot)$ と書く。

定理 4. $\{\mathbf{w}_t\}$ が iid なら任意の t について

$$E_t(\mathbf{y}_{t+1}) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t$$

証明.

$$\begin{aligned} E_t(\mathbf{y}_{t+1}) &= E_t(\boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t + \mathbf{w}_{t+1}) \\ &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t + E_t(\mathbf{w}_{t+1}) \\ &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t + E(\mathbf{w}_{t+1}) \\ &= \boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t \end{aligned}$$

□

定理 5. $\{\mathbf{w}_t\}$ が iid なら任意の t について

$$\text{var}_t(\mathbf{y}_{t+1}) = \boldsymbol{\Sigma}$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{var}_t(\mathbf{y}_{t+1}) &= \text{var}_t(\boldsymbol{\Phi} \mathbf{y}_t + \mathbf{w}_{t+1}) \\ &= \text{var}_t(\mathbf{w}_{t+1}) \\ &= \text{var}(\mathbf{w}_{t+1}) \\ &= \boldsymbol{\Sigma} \end{aligned}$$

□

4.5 h 期先予測

補題 1. 任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathbf{y}_{t+h} = \mathbf{w}_{t+h} + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{w}_{t+h-1} + \cdots + \boldsymbol{\Phi}^{h-1} \mathbf{w}_{t+1} + \boldsymbol{\Phi}^h \mathbf{y}_t$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_{t+h} &= \Phi \mathbf{y}_{t+h-1} + \mathbf{w}_{t+h} \\
&= \mathbf{w}_{t+h} + \Phi \mathbf{y}_{t+h-1} \\
&= \mathbf{w}_{t+h} + \Phi(\mathbf{w}_{t+h-1} + \Phi \mathbf{y}_{t+h-2}) \\
&= \mathbf{w}_{t+h} + \Phi \mathbf{w}_{t+h-1} + \Phi^2 \mathbf{y}_{t+h-2} \\
&= \dots \\
&= \mathbf{w}_{t+h} + \Phi \mathbf{w}_{t+h-1} + \dots \\
&\quad + \Phi^{h-1} \mathbf{w}_{t+1} + \Phi^h \mathbf{y}_t
\end{aligned}$$

□

定理 6. $\{\mathbf{w}_t\}$ が iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\mathbb{E}_t(\mathbf{y}_{t+h}) = \Phi^h \mathbf{y}_t$$

証明. 補題より

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t(\mathbf{y}_{t+h}) &= \mathbb{E}_t(\mathbf{w}_{t+h} + \Phi \mathbf{w}_{t+h-1} + \dots + \Phi^{h-1} \mathbf{w}_{t+1} + \Phi^h \mathbf{y}_t) \\
&= \mathbb{E}_t(\mathbf{w}_{t+h}) + \Phi \mathbb{E}_t(\mathbf{w}_{t+h-1}) + \dots \\
&\quad + \Phi^{h-1} \mathbb{E}_t(\mathbf{w}_{t+1}) + \Phi^h \mathbf{y}_t \\
&= \mathbb{E}(\mathbf{w}_{t+h}) + \Phi \mathbb{E}(\mathbf{w}_{t+h-1}) + \dots \\
&\quad + \Phi^{h-1} \mathbb{E}(\mathbf{w}_{t+1}) + \Phi^h \mathbf{y}_t \\
&= \Phi^h \mathbf{y}_t
\end{aligned}$$

□

定理 7. $\{\mathbf{w}_t\}$ が iid なら任意の t と $h \geq 1$ について

$$\text{var}_t(\mathbf{y}_{t+h}) = \Sigma + \Phi \Sigma \Phi' + \dots + \Phi^{h-1} \Sigma \Phi^{h-1'}$$

証明. 補題より

$$\begin{aligned}
\text{var}_t(\mathbf{y}_{t+h}) &= \text{var}_t(\mathbf{w}_{t+h} + \Phi \mathbf{w}_{t+h-1} + \dots + \Phi^{h-1} \mathbf{w}_{t+1} + \Phi^h \mathbf{y}_t) \\
&= \text{var}_t(\mathbf{w}_{t+h} + \Phi \mathbf{w}_{t+h-1} + \dots + \Phi^{h-1} \mathbf{w}_{t+1}) \\
&= \text{var}_t(\mathbf{w}_{t+h}) + \text{var}_t(\Phi \mathbf{w}_{t+h-1}) + \dots \\
&\quad + \text{var}_t(\Phi^{h-1} \mathbf{w}_{t+1}) \\
&= \text{var}_t(\mathbf{w}_{t+h}) + \Phi \text{var}_t(\mathbf{w}_{t+h-1}) \Phi' + \dots \\
&\quad + \Phi^{h-1} \text{var}_t(\mathbf{w}_{t+1}) \Phi^{h-1'} \\
&= \text{var}(\mathbf{w}_{t+h}) + \Phi \text{var}(\mathbf{w}_{t+h-1}) \Phi' + \dots \\
&\quad + \Phi^{h-1} \text{var}(\mathbf{w}_{t+1}) \Phi^{h-1'} \\
&= \Sigma + \Phi \Sigma \Phi' + \dots + \Phi^{h-1} \Sigma \Phi^{h-1'}
\end{aligned}$$

□

5 今日のキーワード

行列, 行ベクトル, 列ベクトル, 内積, (行列が) 等しい, (行列の) 和, スカラー積, (行列の) 積, 転置, 正方行列, 単位行列, 平均ベクトル, 分散共分散行列, 標準化, 相関係数行列, 相互共分散行列, 相互相関行列, N 変量確率過程, 共分散 (弱) 定常, 自己共分散行列, 自己相関行列, 自己共分散行列関数, 自己相関行列関数, 系列相関, ホワイト・ノイズ, ベクトル AR (VAR) 過程

6 次回までの準備

提出 宿題 7

復習 教科書第 7 章 4.1 節, 復習テスト 7

予習 教科書第 7 章 4.2–4.3 節