中級統計学：復習テスト 21

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2025 年 12 月 16 日

注意： すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 21〜26 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 27 日の予定）に提出すること．

1. 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 統計的仮説

   (b) 検定

   (c) 帰無仮説

   (d) 第 1 種の誤り

   (e) 有意水準

   (f) 検定統計量

   (g) 棄却域

2. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}$ とする．σ^2 を既知として次の検定問題を考える．

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = 1$$

(a) $\bar{X}$ の分布を求めなさい．

(b) 検定統計量を与えなさい．

(c) 検定統計量の H_0 の下での分布を導きなさい．

(d) 有意水準 5 %の検定の棄却域を定めなさい．

(e) 検定統計量の H_1 の下での分布を導きなさい．

解答例

1. (a) 母集団分布に関する仮説
   (b) 統計的仮説の真偽を標本から判定すること
   (c) とりあえず真と想定する仮説
   (d) H_0 が真なのに H_0 を棄却する誤り
   (e) 許容する第 1 種の誤りの確率
   (f) 検定に用いる統計量
   (g) 標本（検定統計量）の値域で H_0 を棄却する領域
2. (a) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\\ &= \frac{\mathrm{E}(X_1+\cdots+X_n)}{n}\\ &= \frac{\mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_n)}{n}\\ &= \frac{\mu+\cdots+\mu}{n}\\ &= \mu\end{aligned}$$

   $X_1,\ldots,X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\\ &= \frac{\mathrm{var}(X_1+\cdots+X_n)}{n^2}\\ &= \frac{\mathrm{var}(X_1)+\cdots+\mathrm{var}(X_n)}{n^2}\\ &= \frac{\sigma^2+\cdots+\sigma^2}{n^2}\\ &= \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

   正規分布の線形変換は正規分布なので

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

   (b) 標準化すると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

   $H_0 : \mu = 0$ を代入すると，検定統計量は

$$Z := \frac{\bar{X}}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

   (c) H_0 の下で

$$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

（d）標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] = 0.05$$

したがって棄却域は $[1.65, \infty)$.

（e）H_1 の下で

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\bar{X} - 1 + 1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \\ &= \frac{\bar{X} - 1}{\sqrt{\sigma^2/n}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \\ &\sim \mathrm{N}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}}, 1\right) \end{aligned}$$