第 13 回　因果推論とマッチング法（10）

村澤 康友

2023 年 7 月 11 日

今日のポイント

1. $\mathrm{E}(Y|X)=\mathrm{E}(Y)$ なら Y は X と平均独立という．$\mathrm{E}(Y|X,Z)=\mathrm{E}(Y|Z)$ なら Z を所与として Y は X と条件付き平均独立という．
2. 処置をする時としない時の潜在的な結果を (Y_1^*,Y_0^*) として，ルービン因果モデルは処置効果を $Y_1^*-Y_0^*$ と定義する．観測されない方の潜在的な結果を反実仮想という．
3. 結果を Y，処置ダミーを D とすると，Y に対する D の平均処置効果（ATE）は $\mathrm{ATE}:=\mathrm{E}(Y_1^*-Y_0^*)$．$Y_1^*,Y_0^*$ が D と平均独立なら $\mathrm{ATE}=\mathrm{E}(Y|D=1)-\mathrm{E}(Y|D=0)$（＝処置群と対照群の母平均の差）．
4. 処置効果の個体差を説明する共変量を X とすると，$X=x$ のときの条件付き ATE は $\mathrm{ATE}(x):=\mathrm{E}(Y_1^*-Y_0^*|X=x)$．$X$ を所与として Y_1^*,Y_0^* が D と条件付き平均独立なら $\mathrm{ATE}(x)=\mathrm{E}(Y|D=1,X=x)-\mathrm{E}(Y|D=0,X=x)$．
5. 処置群の各観測値に対し，共変量の値で対照群の観測値を対応させ，2 つの結果の差で ATE(.) を推定する手法をマッチング法という．$p(X):=\Pr[D=1|X]$ を傾向スコアという．傾向スコアを共変量としたマッチング法を傾向スコア・マッチングという．

目次

1 平均独立性

1.1 平均独立性

(Y,X,Z) を確率ベクトルとする．

定義 1. $\mathrm{E}(Y|X)=\mathrm{E}(Y)$ なら Y は X と**平均独立**という．

定理 1. X と Y が独立なら $\mathrm{E}(Y|X)=\mathrm{E}(Y)$ かつ $\mathrm{E}(X|Y)=\mathrm{E}(X)$.

証明. 復習テスト． □

定理 2. $\mathrm{E}(Y|X)=\mathrm{E}(Y)\Longrightarrow\mathrm{cov}(X,Y)=0$.

証明. 復習テスト. □

1.2　条件付き平均独立性（p. 242）

定義 2. $f_{X|Y,Z}(.|.,.) = f_{X|Z}(.|.)$ なら Z を所与として X と Y は**条件付き独立**という.

注 1. $f_{X,Y|Z}(.,.|.) = f_{X|Z}(.|.)f_{Y|Z}(.|.)$ で定義してもよい.

定義 3. $\mathrm{E}(Y|X,Z) = \mathrm{E}(Y|Z)$ なら Z を所与として Y は X と**条件付き平均独立**という.

定理 3. Z を所与として X と Y が条件付き独立なら $\mathrm{E}(Y|X,Z) = \mathrm{E}(Y|Z)$ かつ $\mathrm{E}(X|Y,Z) = \mathrm{E}(X|Z)$.

証明. 復習テスト. □

2　因果推論

2.1　ルービン因果モデル（p. 239）

処置ダミーを D, 処置をする時としない時の潜在的な結果を (Y_1^*, Y_0^*) とする．実際に観測するのは Y_1^*, Y_0^* のどちらか 1 つ．すなわち観測される結果は

$$
\begin{aligned}
Y &:= DY_1^* + (1-D)Y_0^* \\
&= Y_0^* + (Y_1^* - Y_0^*)D
\end{aligned}
$$

定義 4. ルービン因果モデル（潜在結果モデル）は Y に対する D の**処置効果**を $Y_1^* - Y_0^*$ と定義する.

注 2. D が Y を変化させるのでなく，(Y_1^*, Y_0^*) は決まっており，どちらを観測するかが D で決まると考える.

定義 5. 観測されない方の潜在的な結果を**反実仮想**という.

2.2　平均処置効果（ATE）（p. 239）

処置効果には個体差がある．平均処置効果を推定したい．処置群の母平均を $\mu_1 := \mathrm{E}(Y|D=1)$，対照群の母平均を $\mu_0 := \mathrm{E}(Y|D=0)$ とする.

定義 6. Y に対する D の**平均処置効果**（*Average Treatment Effect, ATE*）は

$$
\mathrm{ATE} := \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*)
$$

定理 4. Y_1^*, Y_0^* が D と平均独立なら

$$
\mathrm{ATE} = \mu_1 - \mu_0
$$

証明. $d = 0, 1$ について $\mathrm{E}(Y_d^*|D) = \mathrm{E}(Y_d^*)$ より

$$
\begin{aligned}
\mu_1 - \mu_0 &= \mathrm{E}(Y|D=1) - \mathrm{E}(Y|D=0) \\
&= \mathrm{E}(Y_1^*|D=1) - \mathrm{E}(Y_0^*|D=0) \\
&= \mathrm{E}(Y_1^*) - \mathrm{E}(Y_0^*) \\
&= \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*) \\
&= \mathrm{ATE}
\end{aligned}
$$

□

注 3. 処置が無作為なら条件は成立.

定義 7. 処置群に対する *ATE*（*ATE on the Treated, ATT*）は

$$
\mathrm{ATT} := \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|D=1)
$$

注 4. Y_1^*, Y_0^* が D と平均独立なら ATT=ATE.

注 5. 対照群に対する ATE も定義できるが関心度は低い.

定理 5. Y_0^* が D と平均独立なら

$$
\mathrm{ATT} = \mu_1 - \mu_0
$$

証明. $\mathrm{E}(Y_0^*|D) = \mathrm{E}(Y_0^*)$ より

$$
\begin{aligned}
\mu_1 - \mu_0 &= \mathrm{E}(Y|D=1) - \mathrm{E}(Y|D=0) \\
&= \mathrm{E}(Y_1^*|D=1) - \mathrm{E}(Y_0^*|D=0) \\
&= \mathrm{E}(Y_1^*|D=1) - \mathrm{E}(Y_0^*|D=1) \\
&\quad + \mathrm{E}(Y_0^*|D=1) - \mathrm{E}(Y_0^*|D=0) \\
&= \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|D=1) + \mathrm{E}(Y_0^*) - \mathrm{E}(Y_0^*) \\
&= \mathrm{ATT}
\end{aligned}
$$

□

注 6. Y_0^* が処置の有無に依存しなければ，処置の選択が処置効果に依存しても，$\mu_1 - \mu_0$ は ATT と解釈できる.

2.3　単回帰モデル

$\mu_1 - \mu_0$ は単回帰モデルで推定できる．$\mu_0^* := \mathrm{E}(Y_0^*)$ とする．

定理 6. Y_1^*, Y_0^* が D と平均独立なら

$$\mathrm{E}(Y|D) = \mu_0^* + \mathrm{ATE} \cdot D$$

証明. $d = 0, 1$ について $\mathrm{E}(Y_d^*|D) = \mathrm{E}(Y_d^*)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|D) &= \mathrm{E}(Y_0^* + (Y_1^* - Y_0^*)D|D) \\ &= \mathrm{E}(Y_0^*|D) + \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|D)D \\ &= \mathrm{E}(Y_0^*) + \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*)D \\ &= \mu_0^* + \mathrm{ATE} \cdot D\end{aligned}$$

□

定理 7. Y_0^* が D と平均独立なら

$$\mathrm{E}(Y|D) = \mu_0^* + \mathrm{ATT} \cdot D$$

証明. D はダミー変数なので

$$\mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|D)D = \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|D = 1)D$$

$\mathrm{E}(Y_0^*|D) = \mathrm{E}(Y_0^*)$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|D) &= \mathrm{E}(Y_0^* + (Y_1^* - Y_0^*)D|D) \\ &= \mathrm{E}(Y_0^*|D) + \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|D)D \\ &= \mathrm{E}(Y_0^*) + \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|D = 1)D \\ &= \mu_0^* + \mathrm{ATT} \cdot D\end{aligned}$$

□

3　マッチング法

3.1　条件付き ATE

処置効果の個体差を説明する共変量を X とする．

定義 8. $X = x$ のときの**条件付き** *ATE* は

$$\mathrm{ATE}(x) := \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|X = x)$$

注 7. 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{ATE} &:= \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|X)) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{ATE}(X))\end{aligned}$$

したがって ATE(.) から ATE も求まる．

定理 8. X を所与として Y_1^*, Y_0^* が D と条件付き平均独立なら

$$\mathrm{ATE}(X) = \mathrm{E}(Y|D = 1, X) - \mathrm{E}(Y|D = 0, X)$$

証明. $d = 0, 1$ について $\mathrm{E}(Y_d^*|D, X) = \mathrm{E}(Y_d^*|X)$ より

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(Y|D = 1, X) - \mathrm{E}(Y|D = 0, X) \\ &= \mathrm{E}(Y_1^*|D = 1, X) - \mathrm{E}(Y_0^*|D = 0, X) \\ &= \mathrm{E}(Y_1^*|X) - \mathrm{E}(Y_0^*|X) \\ &= \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|X) \\ &= \mathrm{ATE}(X)\end{aligned}$$

□

注 8. 処置が無作為でなくても，処置の選択を X で説明できれば条件は成立.

定義 9. $X = x$ のときの**条件付き** *ATT* は

$$\mathrm{ATT}(x) := \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|D = 1, X = x)$$

定理 9. X を所与として Y_0^* が D と条件付き平均独立なら

$$\mathrm{ATT}(X) = \mathrm{E}(Y|D = 1, X) - \mathrm{E}(Y|D = 0, X)$$

証明. $\mathrm{E}(Y_0^*|D, X) = \mathrm{E}(Y_0^*|X)$ より

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}(Y|D = 1, X) - \mathrm{E}(Y|D = 0, X) \\ &= \mathrm{E}(Y_1^*|D = 1, X) - \mathrm{E}(Y_0^*|D = 0, X) \\ &= \mathrm{E}(Y_1^*|D = 1, X) - \mathrm{E}(Y_0^*|D = 1, X) \\ &\quad + \mathrm{E}(Y_0^*|D = 1, X) - \mathrm{E}(Y_0^*|D = 0, X) \\ &= \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|D = 1, X) + \mathrm{E}(Y_0^*|X) - \mathrm{E}(Y_0^*|X) \\ &= \mathrm{ATT}(X)\end{aligned}$$

□

注 9. X を所与として Y_0^* が処置の有無に依存しなければ，処置の選択が処置効果に依存しても条件は成立.

3.2　重回帰モデル

前 2 定理より ATE(.)・ATT(.) は $\mathrm{E}(Y|D, X)$ から求まる．次の重回帰モデルを仮定する．

$$\mathrm{E}(Y|D, X) = \alpha + \beta D + \gamma X + \delta DX$$

このとき

$$\begin{aligned}\mathrm{ATE}(X) &= \mathrm{E}(Y|D=1,X)-\mathrm{E}(Y|D=0,X)\\ &= \alpha+\beta+\gamma X+\delta X-(\alpha+\gamma X)\\ &= \beta+\delta X\end{aligned}$$

ただし回帰モデルの定式化は誤りかもしれない．

3.3 マッチング法（p. 241）

定義 10. 処置群の各観測値に対し，共変量の値で対照群の観測値を対応させ，2 つの結果の差で条件付き ATE・ATT を推定する手法を**マッチング法**という．

定義 11. 処置群の各観測値に対し，共変量の値が等しい対照群の観測値を対応させるマッチング法を**完全マッチング**という．

注 10. $0<\Pr[D=1|X]<1$ なら処置群と対照群の母集団に共変量の値が等しい個体が存在する（共有サポートの仮定）．ただし標本には必ずしも存在しない．

定義 12. 処置群の各観測値に対し，共変量の値が最も近い対照群の観測値を対応させるマッチング法を**最近傍マッチング**という．

定義 13. 処置群の各観測値に対し，共変量の値が一定の距離内の対照群の観測値を対応させるマッチング法を**半径マッチング**という．

注 11. 共変量ベクトル間の距離は（ユークリッド距離でなく）共分散を考慮したマハラノビス距離で測るのが普通．

定義 14. 処置群の各観測値に対し，共変量の値の差に応じて重み付けした対照群の観測値を対応させるマッチング法を**カーネル・マッチング**という．

注 12. どの手法も共変量の数が増えるとマッチングが難しくなる．

3.4 傾向スコア・マッチング（p. 243）

共変量が多い場合は 1 つの変数に集約してマッチングする．

定義 15. $p(X):=\Pr[D=1|X]$ を**傾向スコア**という．

注 13. $p(.)$ は線形・非線形確率モデルで推定する．

定理 10. X を所与として (Y_1^*,Y_0^*) と D が条件付き独立なら，$p(X)$ を所与としても両者は条件付き独立．すなわち

$$\begin{aligned}&\Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,X]=\Pr[D=1|X]\\ &\implies \Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,p(X)]=\Pr[D=1|p(X)]\end{aligned}$$

証明. 復習テスト． □

系 1. X を所与として (Y_1^*,Y_0^*) と D が条件付き独立なら，$p(X)$ を所与として (Y_1^*,Y_0^*) は D と条件付き平均独立．すなわち

$$\begin{aligned}&\Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,X]=\Pr[D=1|X]\\ &\implies \mathrm{E}(Y_d^*|D,p(X))=\mathrm{E}(Y_d^*|p(X)),\ d=0,1\end{aligned}$$

注 14. したがって傾向スコアを共変量とした重回帰分析やマッチング法で ATE(.)・ATT(.) を推定できる．

定義 16. 傾向スコアを共変量としたマッチング法を**傾向スコア・マッチング**という．

4 今日のキーワード

平均独立, 条件付き独立, 条件付き平均独立, ルービン因果モデル（潜在結果モデル），処置効果，反実仮想，平均処置効果（ATE），処置群に対する ATE（ATT），条件付き ATE，条件付き ATT，マッチング法，完全マッチング，最近傍マッチング，半径マッチング，カーネル・マッチング，傾向スコア，傾向スコア・マッチング

5 次回までの準備

復習 教科書第 10 章，復習テスト 13

予習 教科書第 11 章