計量分析 2：復習テスト 13

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 1 月 19 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を（左上で）ホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 26 日の予定）にまとめて提出すること．

1. (X, Y, Z) を確率ベクトルとする．以下を示しなさい．

   (a) X と Y は独立 $\Longrightarrow X$ は Y と平均独立

   (b) X は Y と平均独立 $\Longrightarrow X$ と Y は無相関

   (c) Z を所与として X と Y は条件付き独立 $\Longrightarrow Z$ を所与として X は Y と条件付き平均独立

2. 処置ダミーを D，処置をする時としない時の潜在的な結果を (Y_1^*, Y_0^*)，共変量を X，傾向スコアを $p(X) := \Pr[D = 1|X]$ とする．X を所与として (Y_1^*, Y_0^*) と D が条件付き独立なら，$p(X)$ を所与としても両者は条件付き独立であることを示したい．すなわち

$$\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, X] = \Pr[D = 1|X] \Longrightarrow \Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \Pr[D = 1|p(X)]$$

以下を順に示しなさい．

(a)

$$\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, X] = \Pr[D = 1|X] \Longrightarrow \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, X) = p(X)$$

(b)

$$\mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, X) = p(X) \Longrightarrow \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) = p(X)$$

(c)

$$\mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) = p(X) \Longrightarrow \Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \Pr[D = 1|p(X)]$$

解答例

1.（a）独立性の定義より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X|Y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{E}(X)
\end{aligned}
$$

（b）繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(XY|Y)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(X|Y)Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(X)Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（c）条件付き独立性の定義より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X|Y,Z) &:= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y,Z}(x|y,z)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Z}(x|z)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{E}(X|Z)
\end{aligned}
$$

2.（a）期待値の定義より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, X) &:= 1 \cdot \Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, X] + 0 \cdot \Pr[D=0|Y_1^*, Y_0^*, X] \\
&= \Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, X] \\
&= \Pr[D=1|X] \\
&= p(X)
\end{aligned}
$$

（b）繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, X)|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\
&= \mathrm{E}(p(X)|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\
&= p(X)
\end{aligned}
$$

（c）前問より

$$
\begin{aligned}
\Pr[D=1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] &= \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) \\
&= p(X)
\end{aligned}
$$

繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\Pr[D = 1|p(X)] &= \mathrm{E}(D|p(X)) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(D|X)|p(X)) \\
&= \mathrm{E}(\Pr[D = 1|X]|p(X)) \\
&= \mathrm{E}(p(X)|p(X)) \\
&= p(X)
\end{aligned}
$$