計量分析 2：復習テスト 8

学籍番号____________________氏名____________________

2023 年 11 月 14 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 をまとめて左上でホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 28 日の予定）に提出すること．

1. 2 変量データを $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ とする．y_i の x_i 上への定数項のない古典的正規線形回帰モデルは

$$\{y_i\}|\{x_i\} \sim \mathrm{IN}\left(\beta x_i, \sigma^2\right)$$

σ^2 を既知として次の両側検定問題を考える．

$$H_0 : \beta = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta \neq c$$

(a) β の OLS 推定量を b とすると

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$\{x_i\}$ を所与として b の（条件付き）分布を求めなさい．

(b) H_0 の下で $\mathrm{N}(0, 1)$ にしたがう検定統計量を与えなさい．

(c) H_0 の下で $\chi^2(1)$ にしたがう検定統計量を与えなさい．

2. 前問と同じ回帰モデルを仮定し，σ^2 を未知として片側検定問題を考える．

（a）σ^2 の不偏推定量 s^2 を定義しなさい．

（b）s^2 の分布を与えなさい．

（c）検定統計量を与えなさい．

（d）検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい．

3. 前問と同じ回帰モデルを仮定し，σ^2 を未知として両側検定問題を考える．

（a）前問とは別の検定統計量を与えなさい．

（b）検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい．

解答例

1. (a) 期待値の線形性と $x_1,\dots,x_n$ の独立性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(b|x_1,\dots,x_n) &= \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}|x_1,\dots,x_n\right)\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \,\mathrm{E}(y_i|x_1,\dots,x_n)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \,\mathrm{E}(y_i|x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \beta x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\\ &= \frac{\beta\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\\ &= \beta\end{aligned}$$

線形変換の分散の公式と $(y_1,x_1),\dots,(y_n,x_n)$ の独立性より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(b|x_1,\dots,x_n) &= \mathrm{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}|x_1,\dots,x_n\right)\\ &= \frac{\mathrm{var}(\sum_{i=1}^n x_i y_i|x_1,\dots,x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{var}(x_i y_i|x_1,\dots,x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2\,\mathrm{var}(y_i|x_1,\dots,x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2\,\mathrm{var}(y_i|x_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2\sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2}\\ &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\end{aligned}$$

$\{x_i\}$ を所与として $\{y_i\}$ は正規分布だから，$\{y_i\}$ の線形変換である b も正規分布．したがって

$$b|\{x_i\} \sim \mathrm{N}\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

(b) 前問の結果を標準化すると

$$\frac{b-\beta}{\sqrt{\sigma^2/\sum_{i=1}^n x_i^2}}|\{x_i\} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$\mathrm{N}(0,1)$ は $\{x_i\}$ に依存しないので

$$\frac{b-\beta}{\sqrt{\sigma^2/\sum_{i=1}^n x_i^2}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$H_0:\beta=c$ を代入すると，検定統計量は

$$Z := \frac{b-c}{\sqrt{\sigma^2/\sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(c) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ なら $Z^2 \sim \chi^2(1)$ なので，検定統計量は

$$Z^2 = \frac{(b-c)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2}$$

2. (a)

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2$$

(b)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(c) 未知の σ^2 を推定量 s^2 に置き換えると，検定統計量は

$$t := \frac{b-c}{\sqrt{s^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(d) t 分布の定義より

$$t \sim \mathrm{t}(n-1)$$

3. (a) 両側検定なら t^2 を検定統計量としてもよい．すなわち別の検定統計量は

$$t^2 = \frac{(b-c)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{s^2}$$

(b) $t \sim \mathrm{t}(\nu)$ なら $t^2 \sim \mathrm{F}(1,\nu)$ なので

$$t^2 \sim \mathrm{F}(1, n-1)$$