第 10 回　不均一分散（7.4–7.5）

村澤 康友

2024 年 6 月 18 日

今日のポイント

1. 回帰モデルで $\operatorname{var}(Y|X)$ が X に依存することを条件つき不均一分散という．
2. 条件つき不均一分散があるなら標準誤差の修正が必要．White の標準誤差は条件つき不均一分散があっても（なくても）漸近的に正しい．
3. Breusch–Pagan の検定や White の検定で条件つき不均一分散の有無を検定できる．

目次

1　不均一分散（p. 178）

(Y,X) を確率ベクトルとする．Y の X 上への古典的線形回帰モデルは

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X)&=\alpha+\beta X\\ \operatorname{var}(Y|X)&=\sigma^2\end{aligned}$$

すなわち古典的線形回帰モデルでは，$\mathrm{E}(Y|X)$ のみ X に依存し，$\operatorname{var}(Y|X)$ は X に依存しないと仮定する．

定義 1. $\operatorname{var}(Y|X)$ が X に依存せず，一定であることを**条件つき均一分散**という．

定義 2. $\operatorname{var}(Y|X)$ が X に依存することを**条件つき不均一分散**という．

2　標準誤差の修正

2.1　OLS 推定量の漸近分散（p. 180）

$((y_1,x_1),\dots,(y_n,x_n))$ を無作為標本とする．簡単化のため定数項なしの単回帰モデルで考える．すなわち

$$\begin{aligned}y_i&=\beta x_i+u_i\\ \mathrm{E}(u_i|x_i)&=0\end{aligned}$$

β の OLS 推定量を b_n とすると

$$b_n=\frac{\sum_{i=1}^n x_iy_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

定理 1.

$$\sqrt{n}(b_n-\beta)\xrightarrow{d}\mathrm{N}\left(0,\frac{\operatorname{var}(x_iu_i)}{\mathrm{E}(x_i^2)^2}\right)$$

証明. b_n の式に $y_i=\beta x_i+u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{\sum_{i=1}^n x_i(\beta x_i+u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\\ &=\beta+\frac{\sum_{i=1}^n x_iu_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\end{aligned}$$

式変形すると

$$\sqrt{n}(b_n-\beta)=\frac{(1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^n x_iu_i}{(1/n)\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

大数の法則より

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\mathrm{E}\left(x_i^2\right)$$

$\mathrm{E}(u_i|x_i)=0\Longrightarrow\mathrm{E}(x_iu_i)=0$ なので中心極限定理より

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}x_iu_i\xrightarrow{d}\mathrm{N}(0,\mathrm{var}(x_iu_i))$$

スルツキーの定理とクラーメルの定理より

$$\frac{(1/\sqrt{n})\sum_{i=1}^{n}x_iu_i}{(1/n)\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\xrightarrow{d}\mathrm{N}\left(0,\frac{\mathrm{var}(x_iu_i)}{\mathrm{E}(x_i^2)^2}\right)$$

□

注 1. $\mathrm{E}(u_i|x_i)=0\Longrightarrow\mathrm{E}(x_iu_i)=0$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(x_iu_i)&=\mathrm{E}\left((x_iu_i)^2\right)\\&=\mathrm{E}\left(x_i^2u_i^2\right)\end{aligned}$$

系 1. $\mathrm{var}(u_i|x_i)=\sigma^2$ なら

$$\sqrt{n}(b_n-\beta)\xrightarrow{d}\mathrm{N}\left(0,\frac{\sigma^2}{\mathrm{E}(x_i^2)}\right)$$

証明. 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(x_iu_i)&=\mathrm{E}\left(x_i^2u_i^2\right)\\&=\mathrm{E}\left(x_i^2\,\mathrm{E}\left(u_i^2|x_i\right)\right)\\&=\mathrm{E}\left(x_i^2\,\mathrm{var}(u_i|x_i)\right)\\&=\mathrm{E}\left(x_i^2\sigma^2\right)\\&=\sigma^2\,\mathrm{E}\left(x_i^2\right)\end{aligned}$$

したがって前定理の漸近分散は

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{var}(x_iu_i)}{\mathrm{E}(x_i^2)^2}&=\frac{\sigma^2\,\mathrm{E}\left(x_i^2\right)}{\mathrm{E}(x_i^2)^2}\\&=\frac{\sigma^2}{\mathrm{E}(x_i^2)}\end{aligned}$$

□

2.2 White の標準誤差（p. 180）

条件つき不均一分散の下で $\mathrm{var}(x_iu_i)=\mathrm{E}\left(x_i^2u_i^2\right)$ を推定したい．OLS 残差を e_i とすると

$$\begin{aligned}e_i&:=y_i-b_nx_i\\&=y_i-\beta x_i-(b_nx_i-\beta x_i)\\&=u_i-(b_n-\beta)x_i\end{aligned}$$

定義 3. $\mathrm{var}(x_iu_i)$ の *White* **の推定量**は

$$\widehat{\mathrm{var}}(x_iu_i):=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2e_i^2$$

定理 2.

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2e_i^2=\mathrm{E}\left(x_i^2u_i^2\right)$$

証明. e_i と u_i の関係式より

$$\begin{aligned}e_i^2&=[u_i-(b_n-\beta)x_i]^2\\&=u_i^2-2(b_n-\beta)x_iu_i+(b_n-\beta)^2x_i^2\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2e_i^2\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\left[u_i^2-2(b_n-\beta)x_iu_i+(b_n-\beta)^2x_i^2\right]\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2u_i^2-2(b_n-\beta)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^3u_i\\&\quad+(b_n-\beta)^2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^4\end{aligned}$$

$n\to\infty$ とすると，第 1 項は大数の法則より

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2u_i^2=\mathrm{E}\left(x_i^2u_i^2\right)$$

$\operatorname{plim}_{n\to\infty}b_n=\beta$ なのでスルツキーの定理より第 2 項と第 3 項は 0 に確率収束. □

注 2. したがって

$$\sqrt{n}(b_n-\beta)\overset{a}{\sim}\mathrm{N}\left(0,\frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}x_i^2e_i^2}{[(1/n)\sum_{i=1}^{n}x_i^2]^2}\right)$$

または

$$b_n\overset{a}{\sim}\mathrm{N}\left(\beta,\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2e_i^2}{(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^2}\right)$$

定義 4. White の推定量を用いた標準誤差を *White* **の標準誤差**という.

注 3. 条件つき不均一分散があっても（なくても）漸近的に正しい標準誤差.

3　不均一分散の検定

3.1　Breusch–Pagan の検定（p. 182）

$(1+k)$ 変量データを $((y_1,\boldsymbol{x}_1),\dots,(y_n,\boldsymbol{x}_n))$ とする．次のような y_i の $\boldsymbol{x}_i$ 上への条件つき不均一分散をもつ線形回帰モデルを仮定する．

$$\begin{aligned} y_i &= \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + u_i \\ \mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i) &= 0 \\ \mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i) &= \sigma^2 f(\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\gamma}) \end{aligned}$$

ただし $f(.)>0$，$f(0)=1$．また $\boldsymbol{\gamma}$ は $(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)$ に依存しない．条件つき不均一分散の検定問題は

$$H_0:\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0} \quad \text{vs} \quad H_1:\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を $\boldsymbol{b}$，OLS 残差を $e_i := y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{b}$ とする．H_0 の下での誤差分散の推定量は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e_i^2$$

定理 3. H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(u_i^2-\sigma^2|\boldsymbol{x}_i\right)=0$$

証明．$\mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i)=0$ より $\mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i)=\mathrm{E}\left(u_i^2|\boldsymbol{x}_i\right)$．したがって H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(u_i^2|\boldsymbol{x}_i\right)=\sigma^2$$

□

注 4. すなわち H_0 の下で $u_i^2-\sigma^2$ は $\boldsymbol{x}_i$ で予測できない．u_i を e_i，σ^2 を $\hat{\sigma}^2$ に置き換えると，H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(e_i^2-\hat{\sigma}^2|\boldsymbol{x}_i\right)\approx 0$$

これを回帰モデルとみなして「H_0：全ての回帰係数$=0$」を検定すればよい．ただし古典的正規線形回帰モデルでないので F 検定でなく漸近 χ^2 検定を用いる．

定義 5. $e_i^2-\hat{\sigma}^2$ の $\boldsymbol{x}_i$ 上への線形回帰モデルにおける「H_0：全ての回帰係数$=0$」の漸近 χ^2 検定を *Breusch–Pagan* **の検定**という．

注 5. 正確には Breusch–Pagan の検定の Koenker による改良版．

定理 4. *Breusch–Pagan* の検定統計量を LM とすると，H_0 の下で

$$LM \overset{a}{\sim} \chi^2(k)$$

証明．省略． □

3.2　White の検定（p. 183）

$(1+k)$ 変量データを $((y_1,\boldsymbol{x}_1),\dots,(y_n,\boldsymbol{x}_n))$ とする．y_i の $\boldsymbol{x}_i$ 上への線形回帰モデルは

$$\begin{aligned} y_i &= \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta} + u_i \\ \mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i) &= 0 \end{aligned}$$

条件つき不均一分散の検定問題は

$$\begin{aligned} &H_0:\mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i)=\sigma^2 \\ \text{vs}\quad &H_1:\mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i)=\sigma^2(\boldsymbol{x}_i) \end{aligned}$$

$\mathrm{E}(u_i|\boldsymbol{x}_i)=0 \Longrightarrow \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i)=\mathbf{0}$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(\boldsymbol{x}_i u_i) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i u_i(\boldsymbol{x}_i u_i)') \\ &= \mathrm{E}\left(u_i^2\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right) \end{aligned}$$

繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(u_i^2\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right) &= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(u_i^2\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'|\boldsymbol{x}_i\right)\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}\left(u_i^2|\boldsymbol{x}_i\right)\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{var}(u_i|\boldsymbol{x}_i)\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i') \end{aligned}$$

したがって条件つき不均一分散の検定問題は

$$\begin{aligned} &H_0:\mathrm{var}(\boldsymbol{x}_i u_i)=\sigma^2\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i') \\ \text{vs}\quad &H_1:\mathrm{var}(\boldsymbol{x}_i u_i)=\mathrm{E}\left(u_i^2\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right) \end{aligned}$$

以下の行列を定義する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_0 &:= \sigma^2\,\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i') \\ \boldsymbol{V}_1 &:= \mathrm{E}\left(u_i^2\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right) \end{aligned}$$

すると検定問題は

$$H_0:\boldsymbol{V}_0=\boldsymbol{V}_1 \quad \text{vs} \quad H_1:\boldsymbol{V}_0\neq\boldsymbol{V}_1$$

または

$$H_0:\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_0=\mathbf{O} \quad \text{vs} \quad H_1:\boldsymbol{V}_1-\boldsymbol{V}_0\neq\mathbf{O}$$

ここで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_0 &= \mathrm{E}\left(u_i^2 \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right) - \sigma^2 \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i') \\ &= \mathrm{E}\left(\left(u_i^2 - \sigma^2\right) \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i'\right)\end{aligned}$$

ただし

$$\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i' = \begin{bmatrix} x_{i,1}^2 & \dots & x_{i,1} x_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i,k} x_{i,1} & \dots & x_{i,k}^2 \end{bmatrix}$$

この $k \times k$ 行列は対角線を挟んで対称なので，異なる成分は $k(k+1)/2$ 個．これらを並べたベクトルを $\boldsymbol{z}_i := \mathrm{vech}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i')$ とする．ただし $\mathrm{vech}(.)$ は正方行列の下三角部分の成分を取り出して並べる関数．すると H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(\left(u_i^2 - \sigma^2\right) \boldsymbol{z}_i\right) = \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を $\boldsymbol{b}$，OLS 残差を $e_i := y_i - \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{b}$ とする．H_0 の下での誤差分散の推定量は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

定理 5. H_0 の下で

$$\mathrm{cov}\left(u_i^2 - \sigma^2, \boldsymbol{z}_i\right) = \boldsymbol{0}$$

証明. $\mathrm{E}(u_i | \boldsymbol{x}_i) = 0$ より $\mathrm{var}(u_i | \boldsymbol{x}_i) = \mathrm{E}\left(u_i^2 | \boldsymbol{x}_i\right)$．したがって H_0 の下で

$$\mathrm{E}\left(u_i^2 | \boldsymbol{x}_i\right) = \sigma^2$$

両辺の期待値をとると，繰り返し期待値の法則より

$$\mathrm{E}\left(u_i^2\right) = \sigma^2$$

したがって H_0 の下で

$$\mathrm{cov}\left(u_i^2 - \sigma^2, \boldsymbol{z}_i\right) = \mathrm{E}\left(\left(u_i^2 - \sigma^2\right) \boldsymbol{z}_i\right)$$

既に見た通り右辺は $\boldsymbol{0}$． □

注 6. u_i を e_i, σ^2 を $\hat{\sigma}^2$ に置き換えると，H_0 の下で

$$\mathrm{cov}\left(e_i^2 - \hat{\sigma}^2, \boldsymbol{z}_i\right) \approx 0$$

$e_i^2 - \hat{\sigma}^2$ の $\boldsymbol{z}_i$ 上への線形回帰モデルを考えると，H_0 の下で全ての回帰係数$= 0$．

定義 6. $e_i^2 - \hat{\sigma}^2$ の $\boldsymbol{z}_i := \mathrm{vech}(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_i')$ 上への線形回帰モデルにおける「H_0：全ての回帰係数$= 0$」の漸近 χ^2 検定を *White* **の検定**という．

注 7. e_i^2 の $\left(\hat{y}_i, \hat{y}_i^2\right)$ 上への線形回帰モデルとして実行する方法もあるが，あまり一般的ではない．

定理 6. *White* の検定統計量を W とすると，H_0 の下で

$$W \overset{a}{\sim} \chi^2\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)$$

証明. 省略. □

注 8. どのような不均一分散でも使えるが，自由度が大きいため検出力が低い．

4　今日のキーワード

条件つき均一分散，条件つき不均一分散，White の推定量，White の標準誤差，Breusch–Pagan の検定，White の検定

5　次回までの準備

提出　宿題 7

復習　教科書第 7 章 4–5 節，復習テスト 10

予習　教科書第 8 章