

# 第 11 回 多変量分布 (7.1–7.2)

村澤 康友

2022 年 11 月 8 日

## 今日のポイント

1.  $(X, Y)$  の同時 cdf は  $F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$ .  $X$  または  $Y$  のみの cdf を周辺 cdf という.  $(X, Y)$  の同時 pmf は  $p_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$ .  $X$  または  $Y$  のみの pmf を周辺 pmf という. 多重積分すると同時 cdf が得られる関数 (同時 cdf の交差偏導関数) を同時 pdf という.
2.  $g(X, Y)$  の期待値は  $\sum_x \sum_y g(x, y) p_{X,Y}(x, y)$  または  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$ .  $X$  と  $Y$  の共分散は  $\text{cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ . 標準化した確率変数の共分散を相関係数という.
3.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件付き pmf は  $p_{X|Y}(x|Y = y) := p_{X,Y}(x, y)/p_Y(y)$ , 条件付き pdf は  $f_{X|Y}(x|Y = y) := f_{X,Y}(x, y)/f_Y(y)$ .  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件付き期待値は  $E(X|Y = y) := \sum_x x p_{X|Y}(x|Y = y)$  または  $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y = y) dx$ .  $p_{X|Y}(x|Y = y) = p_X(x)$  または  $f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$  なら  $X$  と  $Y$  は独立という.

1.2	2 階偏微分 . . . . .	2
2	多変数関数の積分	2
2.1	累次積分 . . . . .	2
2.2	重積分 . . . . .	2
3	同時分布と周辺分布	2
3.1	累積分布関数 . . . . .	2
3.2	確率質量関数 (p. 134) . . . . .	2
3.3	確率密度関数 (p. 135) . . . . .	3
4	積率	5
4.1	期待値 . . . . .	5
4.2	共分散 (p. 136) . . . . .	5
4.3	相関係数 (p. 137) . . . . .	5
5	条件付き分布と確率変数の独立性	6
5.1	条件付き分布 (p. 141) . . . . .	6
5.2	確率変数の独立性 (p. 143) . . . . .	6
6	今日のキーワード	7
7	次回までの準備	7

## 1 多変数関数の微分

### 1.1 偏微分

2 変数関数  $z = f(x, y)$  において 1 つの変数のみに注目し, 他の変数を定数とみなした微分を考える.

**定義 1.**  $(x, y)$  における  $f(., .)$  の  $x$  に関する偏微分係数は

$$f_x(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

## 目次

1	多変数関数の微分	1
1.1	偏微分 . . . . .	1

**定義 2.**  $f_x(\cdot, \cdot)$  を  $f(\cdot)$  の  $x$  に関する偏導関数という。

注 1.  $D_x f(\cdot, \cdot)$ ,  $\partial f / \partial x(\cdot, \cdot)$  などとも表記する。

**定義 3.** 偏導関数を求めることを関数の偏微分という。

## 1.2 2階偏微分

**定義 4.** 偏導関数の偏導関数を2階偏導関数という。

注 2.  $f_{xx}(\cdot, \cdot)$ ,  $D_{xx}^2 f(\cdot, \cdot)$ ,  $\partial^2 f / \partial x^2(\cdot, \cdot)$  などと表記する。

**定義 5.**  $x$  に関する偏導関数  $f_x(\cdot, \cdot)$  の  $y$  に関する偏導関数を  $x$  と  $y$  に関する交差偏導関数という。

注 3.  $f_{xy}(\cdot, \cdot)$ ,  $D_{xy}^2 f(\cdot, \cdot)$ ,  $\partial^2 f / \partial x \partial y(\cdot, \cdot)$  などと表記する。

**定理 1** (ヤングの定理).  $f_{xy}(\cdot, \cdot)$ ,  $f_{yx}(\cdot, \cdot)$  が連続なら

$$f_{xy}(\cdot, \cdot) = f_{yx}(\cdot, \cdot)$$

## 2 多変数関数の積分

### 2.1 累次積分

2変数関数  $z = f(x, y)$  の矩形  $[a, b] \times [c, d]$  上の定積分を考える。このとき積分の順番は2通りある。

1.  $y$  を所与として  $f(\cdot, y)$  の区間  $[a, b]$  上の定積分は

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

$F(\cdot)$  の区間  $[c, d]$  上の定積分は

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

2.  $x$  を所与として  $f(x, \cdot)$  の区間  $[c, d]$  上の定積分は

$$G(x) := \int_c^d f(x, y) dy$$

$G(\cdot)$  の区間  $[a, b]$  上の定積分は

$$\int_a^b G(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

矩形  $[a, b] \times [c, d]$  上で  $f(\cdot, \cdot)$  が連続なら両者は等しい。すなわち

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

### 2.2 重積分

2つの累次積分が等しければ定積分は一意に定まる。すなわち

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

注 4. 矩形  $[a, b] \times [c, d]$  上で  $z = 0$  と  $z = f(x, y)$  に挟まれた領域の体積を表す。

## 3 同時分布と周辺分布

### 3.1 累積分布関数

$(X, Y)$  を確率ベクトルとする。

**定義 6.**  $(X, Y)$  の同時(結合) cdf は、任意の  $(x, y)$  について

$$F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$$

例 1.  $F_{X,Y}(\cdot, \cdot)$  のグラフの例 (図 1)。

**定義 7.**  $X$  の周辺 cdf は、任意の  $x$  について

$$F_X(x) := \Pr[X \leq x]$$

注 5. 同時 cdf と周辺 cdf の関係は

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \leq x] \\ &= \Pr[X \leq x, Y < \infty] \\ &= F_{X,Y}(x, \infty) \end{aligned}$$

### 3.2 確率質量関数 (p. 134)

$(X, Y)$  を離散確率ベクトルとする。

**定義 8.**  $(X, Y)$  の同時(結合) pmf は、任意の  $(x, y)$  について

$$p_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

**定義 9.**  $X$  の周辺 pmf は、任意の  $x$  について

$$p_X(x) := \Pr[X = x]$$

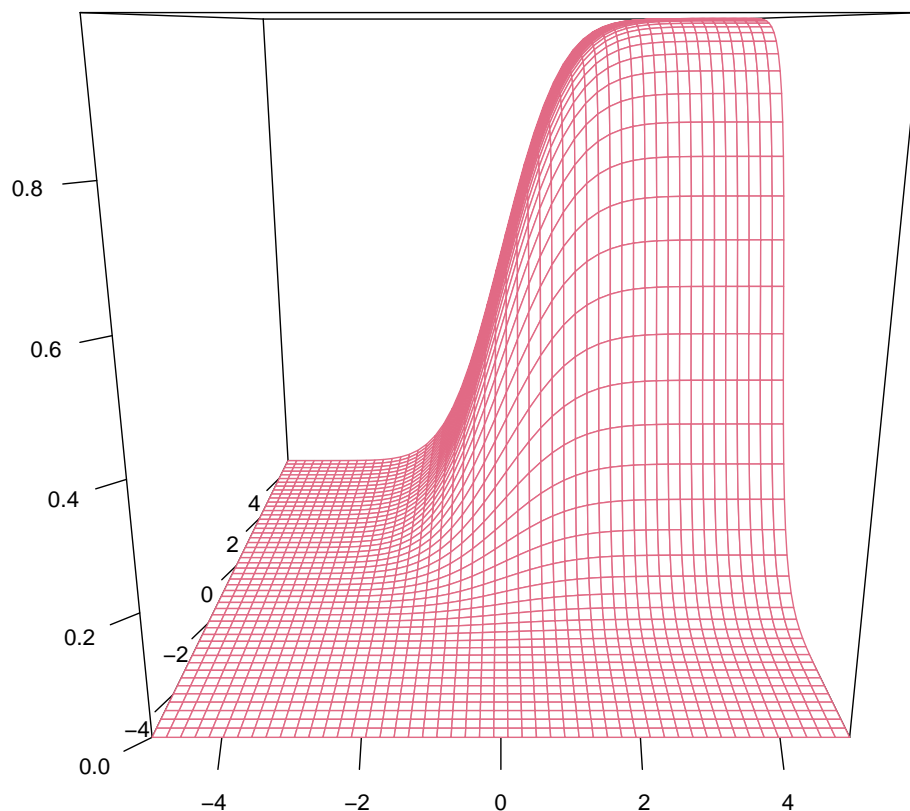


図1 2変量同時 cdf のグラフ

注 6. 同時 pmf と周辺 pmf の関係は

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$$

例 2. 2つのサイコロを投げたときの大きい目 ( $X$ ) と小さい目 ( $Y$ ) の同時分布 (表 1).

### 3.3 確率密度関数 (p. 135)

( $X, Y$ ) を連続確率ベクトルとする.

定義 10. 任意の  $(x, y)$  について

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) \, ds \, dt$$

となる  $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$  を ( $X, Y$ ) の同時 (結合) pdf という.

注 7. 任意の  $a, b, c, d$  について

$$\begin{aligned} \Pr[a < X \leq b, c < Y \leq d] \\ = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

注 8.  $F_{X,Y}(\cdot, \cdot)$  が微分可能なら

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x, y)$$

例 3.  $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$  のグラフの例 (図 2)

表1 2つのサイコロの大きい目 ( $X$ ) と小さい目 ( $Y$ ) の同時分布

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	計
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
計	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

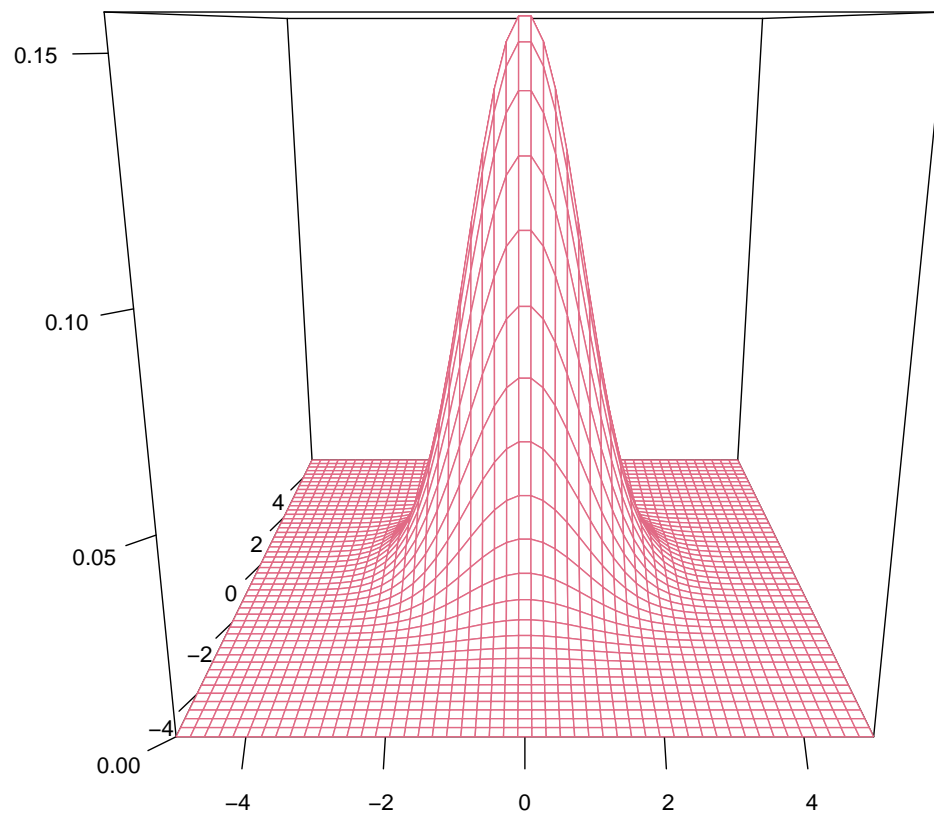


図2 2変量同時 pdf のグラフ

定義 11.  $X$  の周辺 pdf は, 任意の  $x$  について

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

## 4 積率

### 4.1 期待値

定義 12.  $g(X, Y)$  の期待値は

$$\begin{aligned} E(g(X, Y)) \\ := \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) p_{X,Y}(x, y) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy & (\text{連続}) \end{cases} \end{aligned}$$

定理 2 (期待値の線形性).

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

証明. 復習テスト.  $\square$

### 4.2 共分散 (p. 136)

定義 13.  $X$  と  $Y$  の共分散は

$$\text{cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

注 9.  $\sigma_{XY}$  と表す.

注 10.  $X$  が大きいと  $Y$  も大きいなら共分散は正,  
 $X$  が大きいと  $Y$  は小さいなら共分散は負.

定理 3.

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

証明. 復習テスト.  $\square$

補題 1.

$$\text{cov}(X, Y + Z) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z)$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y + Z) \\ &:= E((X - E(X))(Y + Z - E(Y + Z))) \\ &= E((X - E(X))(Y - E(Y) + Z - E(Z))) \\ &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &\quad + E((X - E(X))(Z - E(Z))) \\ &= \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z) \end{aligned}$$

$\square$

補題 2.

$$\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{cov}(aX, bY) &:= E((aX - E(aX))(bY - E(bY))) \\ &= E((aX - aE(X))(bY - bE(Y))) \\ &= E(a(X - E(X))b(Y - E(Y))) \\ &= ab E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= ab \text{cov}(X, Y) \end{aligned}$$

$\square$

定理 4.

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + bY) &= a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) \\ &\quad + b^2 \text{var}(Y) \end{aligned}$$

証明. 前 2 補題より

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + bY) \\ &= \text{cov}(aX + bY, aX + bY) \\ &= \text{cov}(aX + bY, aX) + \text{cov}(aX + bY, bY) \\ &= \text{cov}(aX, aX) + \text{cov}(bY, aX) \\ &\quad + \text{cov}(aX, bY) + \text{cov}(bY, bY) \\ &= a^2 \text{cov}(X, X) + ab \text{cov}(Y, X) \\ &\quad + ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{cov}(bY, bY) \\ &= a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y) \end{aligned}$$

$\square$

### 4.3 相関係数 (p. 137)

定義 14. 標準化した確率変数の共分散を相関係数という.

注 11. すなわち  $X$  と  $Y$  の相関係数は

$$\text{corr}(X, Y) := \text{cov}\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$\rho_{XY}$  と表す.

注 12.  $X$  と  $Y$  の関係の強さを表す.

定理 5.

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

証明.

$$\begin{aligned}\rho_{XY} &:= \text{cov} \left( \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \\ &= E \left( \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\end{aligned}$$

□

定義 15.  $\rho_{XY} = 0$  なら  $X$  と  $Y$  は無相関という.

定理 6 (コーシー=シュワルツの不等式).

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \text{var}(X)^{1/2} \text{var}(Y)^{1/2}$$

証明. 教科書 p. 138 参照.

□

系 1.

$$|\rho_{XY}| \leq 1$$

## 5 条件付き分布と確率変数の独立性

### 5.1 条件付き分布 (p. 141)

定義 16.  $Y \leq y$  が与えられたときの  $X$  の条件付き cdf は, 任意の  $x$  について

$$F_{X|Y}(x|Y \leq y) := \frac{F_{X,Y}(x, y)}{F_Y(y)}$$

注 13. 条件付き確率で定義する.

定義 17.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件付き pmf は, 任意の  $x$  について

$$p_{X|Y}(x|Y = y) := \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

定義 18.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件付き pdf は, 任意の  $x$  について

$$f_{X|Y}(x|Y = y) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

注 14. 条件付き確率と同様に定義する.

定義 19.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件付き期待値は

$$\begin{aligned}E(X|Y = y) &:= \begin{cases} \sum_x x p_{X|Y}(x|Y = y) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y = y) dx & (\text{連続}) \end{cases}\end{aligned}$$

定義 20.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件付き分散は

$$\text{var}(X|Y = y) := E((X - E(X|Y = y))^2|Y = y)$$

### 5.2 確率変数の独立性 (p. 143)

定義 21. 任意の  $(x, y)$  について

$$f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$$

なら  $X$  と  $Y$  は独立という.

注 15. 条件付き pdf の定義より

$$\begin{aligned}f_{X|Y}(x|Y = y) &= f_X(x) \\ \iff f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x)f_Y(y)\end{aligned}$$

定義 22. 任意の  $(x_1, \dots, x_n)$  について

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

なら  $X_1, \dots, X_n$  は独立という.

注 16. cdf で定義してもよい.

定理 7.  $X$  と  $Y$  が独立なら, 任意の  $f(\cdot)$  と  $g(\cdot)$  について

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$$

証明.  $(X, Y)$  が連続なら

$$\begin{aligned}E(f(X)g(Y)) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)f_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f_Y(y) dy \\ &= E(f(X))E(g(Y))\end{aligned}$$

離散の場合も同様.

□

**系 2.**  $X$  と  $Y$  が独立なら

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

注 17. すなわち独立なら無相関. 逆は必ずしも成立しない.

## 6 今日のキーワード

同時 cdf, 周辺 cdf, 同時 pmf, 周辺 pmf, 同時 pdf, 周辺 pdf, 期待値の線形性, 共分散, 確率変数の線形結合の分散, 相関係数, 条件付き cdf, 条件付き pmf, 条件付き pdf, 条件付き期待値, 条件付き分散, 確率変数の独立性, 独立と無相関

## 7 次回までの準備

**復習** 教科書第 7 章 1–2 節, 復習テスト 11

**予習** 教科書第 7 章 3–4 節