

# 第 17 回 2 標本問題 (10.5)

村澤 康友

2022 年 12 月 2 日

## 今日のポイント

1. 標本を用いて 2 つの母集団を比較する問題を 2 標本問題という.
2.  $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  から独立に抽出した無作為標本  $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$  の標本平均の差  $\bar{X} - \bar{Y}$ , 標本分散の比  $s_X^2/s_Y^2$  の分布を求める.
3.  $\bar{X} - \bar{Y}$  の分布は  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$  なら  $[\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)] / \sqrt{s^2(1/m + 1/n)} \sim t(m+n-2)$ . ただし  $s^2$  はプールした標本分散.  $\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$  なら厳密な分布は求まらない.
4.  $U \sim \chi^2(m)$  と  $V \sim \chi^2(n)$  が独立のとき,  $(U/m)/(V/n) \sim F(m, n)$ .
5.  $s_X^2/s_Y^2$  の分布は  $(s_X^2/s_Y^2) / (\sigma_X^2/\sigma_Y^2) \sim F(m-1, n-1)$ .

## 目次

1	2 標本問題 (p. 204)	1
2	標本平均の差	1
2.1	母分散が既知の場合 (p. 205) . . .	1
2.2	母分散が未知で等しい場合 (p. 205)	2
2.3	母分散が未知で異なる場合 (p. 206)	3
3	標本分散の比	3
3.1	F 分布 (p. 207) . . . . .	3
3.2	母平均が既知の場合 . . . . .	3
3.3	母平均が未知の場合 (p. 208) . . .	3

4	今日のキーワード	5
5	次回までの準備	5

## 1 2 標本問題 (p. 204)

母集団分布  $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  から独立に抽出した無作為標本を  $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$  とする.  $\mu_X$  と  $\mu_Y$  を比較するなら標本平均の差  $\bar{X} - \bar{Y}$ ,  $\sigma_X^2$  と  $\sigma_Y^2$  を比較するなら標本分散の比  $s_X^2/s_Y^2$  を見ればよい. ただし標本分布を考慮する必要がある.

**定義 1.** 標本を用いて 2 つの母集団を比較する問題を 2 標本問題という.

**例 1.** 男女別の成績の分布の比較.

## 2 標本平均の差

### 2.1 母分散が既知の場合 (p. 205)

母集団分布を  $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  とする.  $\mu_X$  と  $\mu_Y$  を比較したい. 各母集団から独立に抽出した無作為標本を  $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$ , 標本平均を  $\bar{X}, \bar{Y}$  とする.

**定理 1.**

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

証明. 標本平均の分布は

$$\begin{aligned}\bar{X} &\sim N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{m}\right) \\ \bar{Y} &\sim N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)\end{aligned}$$

$\bar{X}$  と  $\bar{Y}$  は独立だから

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

□

系 1.

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}} \sim N(0, 1)$$

注 1.  $\bar{X} - \bar{Y}$  の累積確率は標準正規分布表から次のように求める.

$$\begin{aligned} \Pr[\bar{X} - \bar{Y} \leq c] \\ &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}} \leq \frac{c - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{c - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}}\right) \end{aligned}$$

注 2.  $\mu_X = \mu_Y$  なら

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_X^2/m + \sigma_Y^2/n}} \sim N(0, 1)$$

例 2 (p. 205). 男子と女子の身長之母集団分布を, それぞれ  $N(172.3, 30)$ ,  $N(160.2, 25)$  とする. 独立に抽出した男子 10 人, 女子 15 人の無作為標本の標本平均をそれぞれ  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$  とすると

$$\begin{aligned} \bar{X} &\sim N\left(172.3, \frac{30}{10}\right) \\ \bar{Y} &\sim N\left(160.2, \frac{25}{15}\right) \end{aligned}$$

$\bar{X}$  と  $\bar{Y}$  は独立だから

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(12.1, \frac{14}{3}\right)$$

標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - 12.1}{\sqrt{14/3}} \sim N(0, 1)$$

2.2 母分散が未知で等しい場合 (p. 205)

$\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$  とする. 標本分散を  $s_X^2, s_Y^2$  とする.

定義 2.  $(X_1, \dots, X_m)$  と  $(Y_1, \dots, Y_n)$  をプールした標本分散は

$$s^2 := \frac{1}{m+n-2} \left[ \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2 \right]$$

注 3.  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$  なら

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}} \sim N(0, 1)$$

$\sigma^2$  が未知なら  $s^2$  に置き換える.

補題 1.  $X \sim \chi^2(m)$  と  $Y \sim \chi^2(n)$  が独立なら

$$X + Y \sim \chi^2(m+n)$$

証明.  $Z_1, \dots, Z_{m+n} \sim N(0, 1)$  を独立とすると,  $\chi^2$  分布の定義より

$$\begin{aligned} X &:= Z_1^2 + \dots + Z_m^2 \\ Y &:= Z_{m+1}^2 + \dots + Z_{m+n}^2 \end{aligned}$$

したがって

$$X + Y = Z_1^2 + \dots + Z_{m+n}^2$$

□

定理 2.

$$\frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$

証明. 標本分散の分布は

$$\begin{aligned} \frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} &\sim \chi^2(m-1) \\ \frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} &\sim \chi^2(n-1) \end{aligned}$$

両者は独立なので

$$\begin{aligned} &\frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + \frac{\sum_{j=1}^n (Y_j - \bar{Y})^2}{\sigma^2} \\ &= \frac{(m-1)s_X^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma^2} \\ &\sim \chi^2(m+n-2) \end{aligned}$$

□

定理 3.

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \sim t(m + n - 2)$$

証明. 変形すると

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \\ &= \frac{[\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)] / \sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}}{\sqrt{s^2/\sigma^2}} \\ &= \frac{[\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)] / \sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}}{\sqrt{[(m+n-2)s^2/\sigma^2]/(m+n-2)}} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}} \sim N(0, 1) \\ & \frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2) \end{aligned}$$

分子と分母の独立性も証明できる (省略).  $\square$

注 4.  $\bar{X} - \bar{Y}$  の累積確率は  $t$  分布表から次のように求める.

$$\begin{aligned} & \Pr[\bar{X} - \bar{Y} \leq c] \\ &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \leq \frac{c - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}}\right] \\ &= \Pr\left[t(m+n-2) \leq \frac{c - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}}\right] \end{aligned}$$

注 5.  $\mu_X = \mu_Y$  なら

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \sim t(m+n-2)$$

### 2.3 母分散が未知で異なる場合 (p. 206)

未知の  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$  に分布が依存しない統計量を作れない. ただし大数の法則と中心極限定理より

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s_X^2/m + s_Y^2/n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

もっとよい近似もある (ウェルチの近似).

## 3 標本分散の比

### 3.1 F 分布 (p. 207)

定義 3.  $U \sim \chi^2(m)$  と  $V \sim \chi^2(n)$  が独立のとき  $(U/m)/(V/n)$  の分布を自由度  $(m, n)$  の  $F$  分布という.

注 6.  $F(m, n)$  と書く.

注 7. 累積確率は  $F$  分布表を参照.

注 8.  $X \sim F(m, n)$  なら  $1/X \sim F(n, m)$ .

注 9.  $t \sim t(n)$  なら  $t^2 \sim F(1, n)$ .

例 3.  $F$  分布の pdf の例は図 1 の通り.

### 3.2 母平均が既知の場合

母集団分布を  $N(\mu_X, \sigma_X^2), N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$  とする.  $\sigma_X^2$  と  $\sigma_Y^2$  を比較したい. 各母集団から独立に抽出した無作為標本を  $(X_1, \dots, X_m), (Y_1, \dots, Y_n)$ , 標本分散を  $\hat{\sigma}_X^2, \hat{\sigma}_Y^2$  とする.

定理 4.

$$\frac{\hat{\sigma}_X^2/\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim F(m, n)$$

証明. 標本分散の分布は

$$\begin{aligned} & \frac{m\hat{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m) \\ & \frac{n\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n) \end{aligned}$$

両者は独立なので

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{\sigma}_X^2/\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} = \frac{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2} \\ &= \frac{(m\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2)/m}{(n\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2)/n} \\ &\sim F(m, n) \end{aligned}$$

$\square$

### 3.3 母平均が未知の場合 (p. 208)

標本分散を  $s_X^2, s_Y^2$  とする.

定理 5.

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

証明. 標本分散の分布は

$$\begin{aligned} & \frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1) \\ & \frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1) \end{aligned}$$

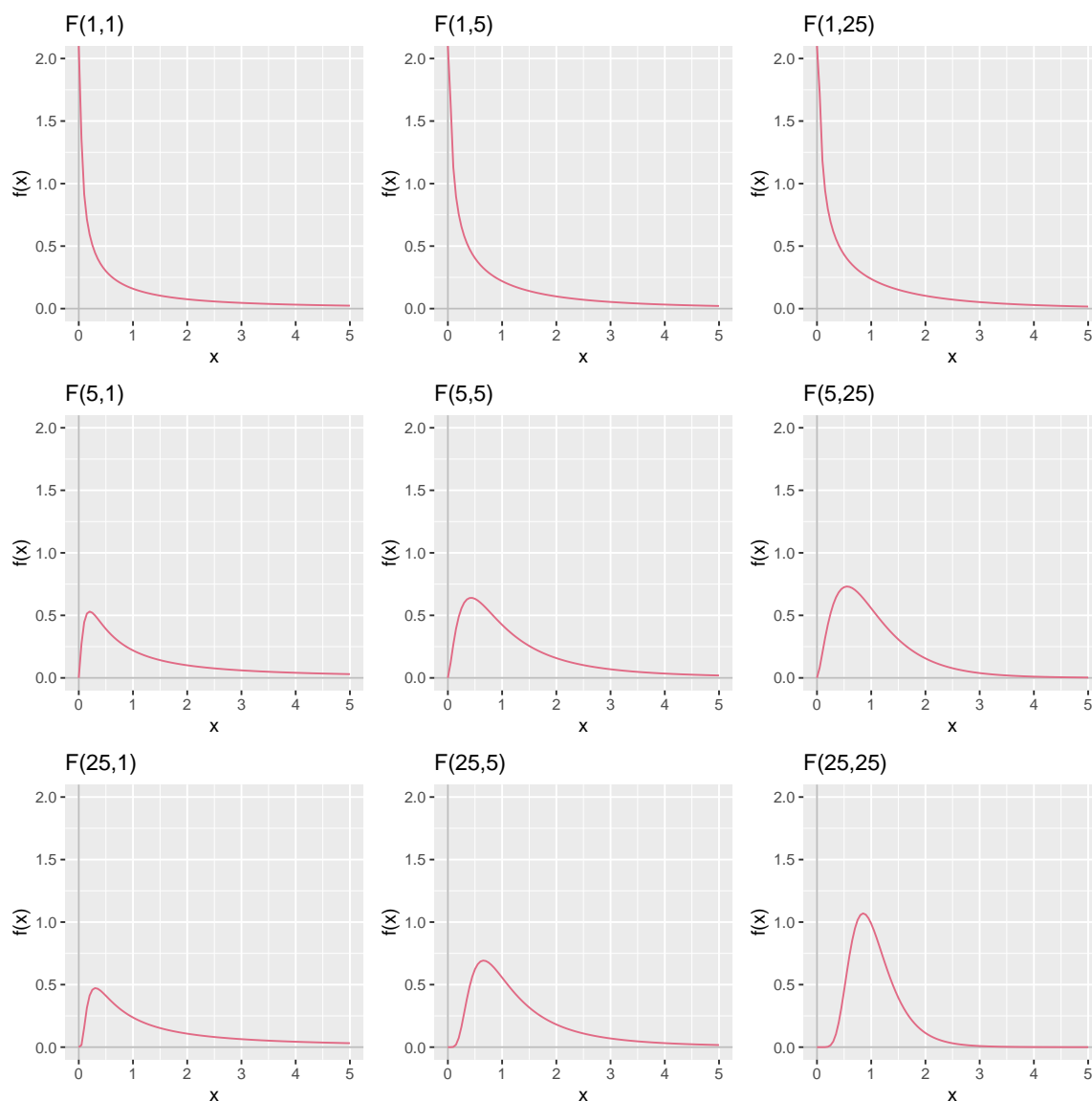


図1 F 分布の pdf の例

両者は独立なので

$$\begin{aligned} \frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} &= \frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \\ &= \frac{[(m-1)s_X^2/\sigma_X^2]/(m-1)}{[(n-1)s_Y^2/\sigma_Y^2]/(n-1)} \\ &\sim F(m-1, n-1) \end{aligned}$$

注 10.  $s_X^2/s_Y^2$  の累積確率は F 分布表から次のよう

に求める.

$$\begin{aligned} \Pr \left[ \frac{s_X^2}{s_Y^2} \leq c \right] &= \Pr \left[ \frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \leq \frac{c}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \right] \\ &= \Pr \left[ F(m-1, n-1) \leq \frac{c}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \right] \end{aligned}$$

注 11.  $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$  なら

$$\frac{s_X^2}{s_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

例 4 (p. 209).  $N(\mu_X, \sigma^2), N(\mu_Y, \sigma^2)$  から独立に抽出した大きさ 10, 15 の無作為標本の標本分

□

散をそれぞれ  $s_X^2, s_Y^2$  とする (母分散は等しい).  
 $s_X^2/s_Y^2 > 3$  の確率は

$$\Pr \left[ \frac{s_X^2}{s_Y^2} > 3 \right] = \Pr[F(9, 14) > 3] \\ \approx .03$$

#### 4 今日のキーワード

2 標本問題, プールした標本分散,  $\chi^2$  分布の再生性, 標本平均の差の分布 (母分散が既知・未知で等しい・未知で異なる), F 分布, 標本分散の比の分布 (母平均が既知・未知)

#### 5 次回までの準備

**提出** 宿題 5

**復習** 教科書第 10 章 5 節, 復習テスト 17

**予習** 教科書第 11 章 1-2, 4 節