

中級統計学：後期定期試験

村澤 康友

2021 年 1 月 26 日

注意：3 問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが、結果のみの解答は 0 点とする）。教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）。

1. (20 点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）。
 - (a) 帰無仮説
 - (b) 有意水準
 - (c) 通常の最小 2 乗法 (OLS)
 - (d) ダミー変数
2. (30 点) ゴルトンは身長の遺伝を研究した。両親の平均身長と成人した子供の身長（女性の身長は 1.08 倍して男性に換算）の無作為標本を $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ とする（単位はインチ）。 $\ln y_i$ の $\ln x_i$ 上への古典的正規単回帰モデルは

$$\ln y_i | \ln x_i \sim N(\alpha + \beta \ln x_i, \sigma^2)$$

$\beta < 1$ となる現象を「平均への回帰」という。回帰分析の結果は次の通りであった。

$$\widehat{\ln \text{child}} = 1.49881 + 0.644298 \ln \text{parent}$$

$$T = 928 \quad \bar{R}^2 = 0.2062 \quad F(1, 926) = 241.84 \quad \hat{\sigma} = 0.033050$$

（丸括弧内は標準誤差）

- (a) 「子供の身長」の「両親の平均身長」に対する弾力性の OLS 推定値・標準誤差・t 値は幾らか？
(b) 「平均への回帰」の有無の検定問題を定式化しなさい。
(c) 「平均への回帰」の有無の検定統計量の値を求め、有意水準 5 % の検定を実行しなさい。
3. (50 点) Go To トラベル事業の 2020 年 8 月末までの利用者と非利用者で、9 月末までに発熱症状があつた人の割合を p_X, p_Y とする。 p_X と p_Y を比較したい。独立に抽出した大きさ n_X, n_Y の無作為標本で、発熱症状があつた人の割合を \hat{p}_X, \hat{p}_Y とする。
 - (a) 検定問題を定式化しなさい（問題意識を踏まえること）。
 - (b) 2 項母集団 $\text{Bin}(1, p_X), \text{Bin}(1, p_Y)$ の平均と分散を求めなさい。
 - (c) $\hat{p}_X, \hat{p}_Y, \hat{p}_X - \hat{p}_Y$ の漸近分布を求めなさい。
 - (d) 検定統計量を定義し、その H_0 の下での分布から有意水準 5 % の検定の棄却域を定めなさい。
 - (e) $n_X = 2500, n_Y = 6400, \hat{p}_X = .05, \hat{p}_Y = .04$ として検定統計量の値と漸近 p 値を求め、有意水準 5 % の検定を実行しなさい。

※数値例はフィクションです。この分析は Go To トラベル事業と発熱症状の相関関係の検証であり、結果を因果関係と解釈するのは誤りです。

解答例

1. 統計学の基本用語

- (a) とりあえず真と想定する仮説.
- (b) 許容する第1種の誤りの確率.
- (c) 残差2乗和を最小にするように回帰係数を定める方法.
- (d) あるカテゴリーに入るなら1, 入らないなら0とした変数.
• 0か1をとる変数に変換するのがポイントなので、「0か1をとる変数」のみは1点減.

2. 単回帰分析

- (a) OLS推定値は.644298, 標準誤差は.0414309, t値は $.644298/.0414309=15.55$.

- OLS推定値と標準誤差は各3点, t値は4点.
- t値 = OLS推定値 / 標準誤差としていればOK.

(b)

$$H_0 : \beta = 1 \ (\alpha, \sigma^2 \text{ は任意}) \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta < 1 \ (\alpha, \sigma^2 \text{ は任意})$$

(c) 検定統計量は

$$\begin{aligned} t &:= \frac{b - 1}{s} \\ &= \frac{.644298 - 1}{.0414309} \\ &\approx -8.5854 \end{aligned}$$

H_0 の下で $t \sim t(926)$ より (近似的な) 廃却域は $(-\infty, -1.645]$. 検定統計量が廃却域に入るので, H_0 を棄却して H_1 を採択. すなわち「平均への回帰」は存在する.

- 検定統計量で5点, 廃却域で5点.

3. 母比率の差の検定

(a)

$$H_0 : p_X = p_Y \quad \text{vs} \quad H_1 : p_X > p_Y$$

- 両側検定は2点.

(b) $\text{Bin}(1, p_X)$ の平均は

$$1 \cdot p_X + 0 \cdot (1 - p_X) = p_X$$

分散は

$$\begin{aligned} (1 - p_X)^2 \cdot p_X + (0 - p_X)^2 \cdot (1 - p_X) &= (1 - p_X)^2 p_X + p_X^2 (1 - p_X) \\ &= p_X (1 - p_X) \end{aligned}$$

同様に $\text{Bin}(1, p_Y)$ の平均は p_Y , 分散は $p_Y (1 - p_Y)$.

(c) \hat{p}_X, \hat{p}_Y の平均と分散は

$$\begin{aligned} E(\hat{p}_X) &= p_X \\ E(\hat{p}_Y) &= p_Y \\ \text{var}(\hat{p}_X) &= \frac{p_X (1 - p_X)}{n_X} \\ \text{var}(\hat{p}_Y) &= \frac{p_Y (1 - p_Y)}{n_Y} \end{aligned}$$

中心極限定理より

$$\begin{aligned}\hat{p}_X &\xrightarrow{a} N\left(p_X, \frac{p_X(1-p_X)}{n_X}\right) \\ \hat{p}_Y &\xrightarrow{a} N\left(p_Y, \frac{p_Y(1-p_Y)}{n_Y}\right)\end{aligned}$$

\hat{p}_X と \hat{p}_Y は独立なので

$$\hat{p}_X - \hat{p}_Y \xrightarrow{a} N\left(p_X - p_Y, \frac{p_X(1-p_X)}{n_X} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{n_Y}\right)$$

- \hat{p}_X, \hat{p}_Y は各 3 点, $\hat{p}_X - \hat{p}_Y$ は 4 点.

(d) 標準化すると

$$\frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y - (p_X - p_Y)}{\sqrt{p_X(1-p_X)/n_X + p_Y(1-p_Y)/n_Y}} \xrightarrow{a} N(0, 1)$$

$H_0 : p_X = p_Y$ を代入すると, 検定統計量は

$$Z := \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)/n_X + \hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)/n_Y}}$$

有意水準 5 % の片側検定の棄却域は, 標準正規分布表より $[1.645, \infty]$.

- 検定統計量で 5 点, 检定統計量で 5 点.

(e)

$$\begin{aligned}\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} &= \frac{(1/20)(1-1/20)}{2500} \\ &= \frac{(1/20)(19/20)}{50^2} \\ &= \frac{19}{1000^2} \\ \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y} &= \frac{(1/25)(1-1/25)}{6400} \\ &= \frac{(1/25)(24/25)}{80^2} \\ &= \frac{24}{25^2 80^2} \\ &= \frac{6}{25^2 40^2} \\ &= \frac{6}{1000^2}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y} &= \frac{19}{1000^2} + \frac{6}{1000^2} \\ &= \frac{25}{1000^2}\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y}} &= \frac{5}{1000} \\ &= \frac{1}{200}\end{aligned}$$

検定統計量は

$$\begin{aligned}Z &:= \frac{.05 - .04}{1/200} \\ &= 2\end{aligned}$$

漸近 p 値は .02275. したがって有意水準 5 %で H_0 を棄却する.

- 検定統計量と p 値は各 4 点, 検定は 2 点.