第 4 回　ARMA 過程（7.2.1）

村澤 康友

2022 年 10 月 18 日

今日のポイント

1. 任意の t について $\mathrm{L}y_t := y_{t-1}$ なら L をラグ演算子という．ラグ演算子の多項式をラグ多項式という．
2. p 次の自己回帰（AR）過程は，任意の t について $\phi(\mathrm{L})(y_t-\mu) = w_t$，ただし $\phi(\mathrm{L})$ はラグ多項式で $\{w_t\}$ は WN．Yule–Walker 方程式は AR 係数と ACF の関係を与える．
3. q 次の移動平均（MA）過程は，任意の t について $y_t = \mu + \theta(\mathrm{L})w_t$，ただし $\theta(\mathrm{L})$ はラグ多項式で $\{w_t\}$ は WN．共分散定常過程は $\mathrm{MA}(\infty)$ で表現できる（Wold 分解）．$\mathrm{AR}(\infty)$ で表現できる MA 過程を反転可能という．
4. (p,q) 次の自己回帰移動平均（ARMA）過程は，任意の t について $\phi(\mathrm{L})(y_t-\mu) = \theta(\mathrm{L})w_t$．

目次

1　漸化式とラグ演算子

1.1　漸化式

$\{y_t\},\{w_t\}$ を数列とする．

定義 1. $\{y_t\}$ の p **階漸化式**は，任意の $t \geq 1$ について

$$y_t = f(y_{t-1},\dots,y_{t-p},w_t)$$

注 1. 初期値 $y_0,\dots,y_{-(p-1)}$ と非斉次項 $\{w_t\}$ で $\{y_t\}$ が一意に定まる．

定義 2. $\{y_t\}$ の p **階線形漸化式**は，任意の $t \geq 1$ について

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

1.2　ラグ演算子

定義 3. 任意の t について $\mathrm{L}y_t := y_{t-1}$ なら L を**ラグ演算子**という．

定義 4. ラグ演算子の多項式を**ラグ多項式**という．

注 2. p 次のラグ多項式は

$$\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi_1\mathrm{L} - \cdots - \phi_p\mathrm{L}^p$$

任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})y_t &= (1 - \phi_1\mathrm{L} - \cdots - \phi_p\mathrm{L}^p)\, y_t \\ &= y_t - \phi_1\mathrm{L}y_t - \cdots - \phi_p\mathrm{L}^p y_t \\ &= y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p}\end{aligned}$$

したがって $\{y_t\}$ の p 階線形漸化式は，任意の $t \geq 1$ について

$$\phi(\mathrm{L})y_t = w_t$$

2　AR 過程

2.1　AR(1) 過程（p. 135）

$\{y_t\}$ を確率過程とする．

定義 5. 1 次の**自己回帰**（*autoregressive, AR*）**過程**は，任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)\end{aligned}$$

ただし $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi\mathrm{L}$.

注 3. AR(1) と書く．

注 4. すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + w_t$$

または

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + w_t$$

ただし $c := (1 - \phi)\mu$.

例 1. $\mu := 0$，$\phi := 0.9$ の AR(1) のコレログラム (図 1).

定理 1. $\{y_t\}$ が AR(1) で $|\phi| < 1$ なら任意の t について

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu$$

証明. 逐次代入により，任意の t について

$$\begin{aligned}y_t - \mu &= \phi(y_{t-1} - \mu) + w_t \\ &= \phi[\phi(y_{t-2} - \mu) + w_{t-1}] + w_t \\ &= \dots \\ &= w_t + \phi w_{t-1} + \phi^2 w_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s w_{t-s}\end{aligned}$$

これは $|\phi| < 1$ なら収束．両辺の期待値をとると，任意の t について $\mathrm{E}(w_t) = 0$ なので

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(y_t - \mu) &= \mathrm{E}\left(\sum_{s=0}^{\infty} \phi^s w_{t-s}\right) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \phi^s\, \mathrm{E}(w_{t-s}) \\ &= 0\end{aligned}$$

すなわち $\mathrm{E}(y_t - \mu) = 0$ より $\mathrm{E}(y_t) = \mu$.　□

2.2　AR(p) 過程（p. 135）

定義 6. p 次の *AR* **過程**は，任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)\end{aligned}$$

ただし $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi_1\mathrm{L} - \cdots - \phi_p\mathrm{L}^p$.

注 5. AR(p) と書く．

注 6. すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + w_t$$

または

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t$$

ただし $c := (1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)\mu$.

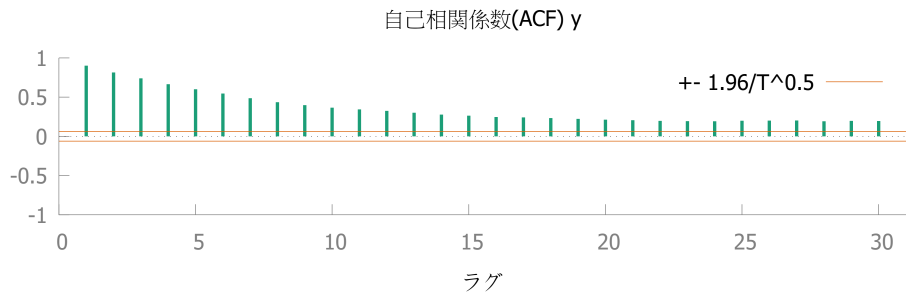
2.3　共分散定常性

$\{y_t\}$ を AR(p) とする．

定理 2. p 次方程式 $\phi(z) = 0$ の p 個の根がすべて絶対値で *1* より大きいことが，AR(p) が共分散定常であるための必要十分条件.

証明. 省略（大学院レベル）．　□

例 2. $p := 1$ なら $\phi(z) := 1 - \phi z$ より $\phi(z) = 0$ の根は $z = 1/\phi$．したがって $|z| > 1 \iff |\phi| < 1$.



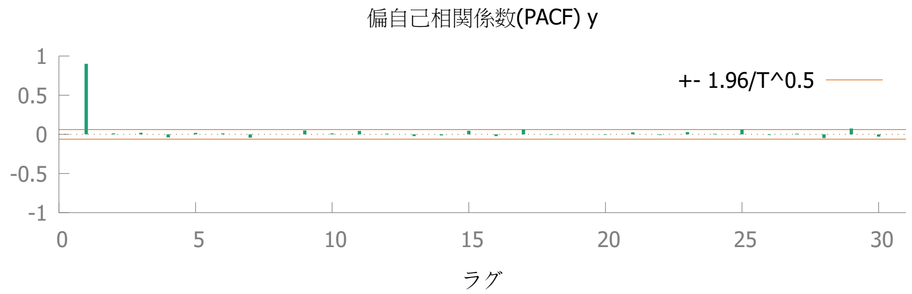


図 1　$\mu := 0,\ \phi := 0.9$ の AR(1) のコレログラム

2.4　自己共分散

$\{y_t\}$ を自己共分散関数 $\gamma(.)$ の共分散定常な AR(p) とする．

補題 1. 任意の t と $s \geq 1$ について

$$\mathrm{cov}(y_{t-s}, w_t) = 0$$

証明. 逐次代入により，任意の t について

$$\begin{aligned}
&y_t - \mu \\
&= \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + w_t \\
&= \phi_1[\phi_1(y_{t-2} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p-1} - \mu) + w_{t-1}] \\
&\quad + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + w_t \\
&= \dots \\
&= w_t + \phi_1 w_{t-1} + \cdots
\end{aligned}$$

任意の t と $s \neq 0$ について $\mathrm{cov}(w_t, w_{t-s}) = 0$ なので，$s \geq 1$ について

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(y_{t-s}, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(w_{t-s} + \phi_1 w_{t-s-1} + \cdots, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(w_{t-s}, w_t) + \phi_1 \mathrm{cov}(w_{t-s-1}, w_t) + \cdots \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

補題 2. 任意の t について

$$\mathrm{cov}(y_t, w_t) = \sigma^2$$

証明. 任意の t について $\mathrm{var}(w_t) = \sigma^2$ なので，前補題より

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(y_t, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, w_t) \\
&= \mathrm{cov}(\phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, w_t) \\
&= \phi_1 \mathrm{cov}(y_{t-1}, w_t) + \cdots + \phi_p \mathrm{cov}(y_{t-p}, w_t) \\
&\quad + \mathrm{var}(w_t) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

□

定理 3.

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \phi_1\gamma(1) + \cdots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2 \\
\gamma(1) &= \phi_1\gamma(0) + \cdots + \phi_p\gamma(p-1) \\
&\ \vdots \\
\gamma(p) &= \phi_1\gamma(p-1) + \cdots + \phi_p\gamma(0) \\
\gamma(s) &= \phi_1\gamma(s-1) + \cdots + \phi_p\gamma(s-p), \quad s \geq p+1
\end{aligned}$$

証明. 前補題より

$$\begin{aligned}\gamma(0) &:= \operatorname{var}(y_t)\\ &= \operatorname{cov}(y_t, y_t)\\ &= \operatorname{cov}(y_t, c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t)\\ &= \operatorname{cov}(y_t, \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t)\\ &= \phi_1 \operatorname{cov}(y_t, y_{t-1}) + \cdots + \phi_p \operatorname{cov}(y_t, y_{t-p})\\ &\quad + \operatorname{cov}(y_t, w_t)\\ &= \phi_1\gamma(1) + \cdots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2\end{aligned}$$

前々補題より

$$\begin{aligned}\gamma(1) &:= \operatorname{cov}(y_t, y_{t-1})\\ &= \operatorname{cov}(c + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, y_{t-1})\\ &= \operatorname{cov}(\phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + w_t, y_{t-1})\\ &= \phi_1 \operatorname{cov}(y_{t-1}, y_{t-1}) + \cdots\\ &\quad + \phi_p \operatorname{cov}(y_{t-p}, y_{t-1}) + \operatorname{cov}(w_t, y_{t-1})\\ &= \phi_1\gamma(0) + \cdots + \phi_p\gamma(p-1)\end{aligned}$$

$\gamma(2)$ 以降も同様. □

2.5 自己相関

$\{y_t\}$ の ACF を $\rho(.)$ とする.

定理 4 (Yule–Walker 方程式)**.**

$$\begin{aligned}\rho(1) &= \phi_1\rho(0) + \cdots + \phi_p\rho(p-1)\\ &\ \vdots\\ \rho(p) &= \phi_1\rho(p-1) + \cdots + \phi_p\rho(0)\end{aligned}$$

証明. $s \geq 0$ について $\rho(s) = \gamma(s)/\gamma(0)$ なので, 前定理より結果が得られる. □

注 7. $(\phi_1, \ldots, \phi_p)$ と $\rho(1), \ldots, \rho(p)$ の関係を与える連立方程式.

系 1. $s \geq p+1$ について

$$\rho(s) = \phi_1\rho(s-1) + \cdots + \phi_p\rho(s-p)$$

証明. 前定理と同じ. □

注 8. すなわち $\{\rho(s)\}$ は初期値 $\rho(1), \ldots, \rho(p)$ の p 階線形漸化式.

2.6 偏自己相関

$\{y_t\}$ の PACF を $\alpha(.)$ とする.

定理 5. $\{y_t\}$ が AR(p) なら $s \geq p+1$ について $\alpha(s) = 0$.

証明. AR(p) は $p+1$ 次以上の AR 係数が 0 の AR(∞). 偏回帰係数=0 $\Longleftrightarrow$ 偏相関係数=0 より AR 係数が 0 なら $\alpha(s) = 0$. □

3 MA 過程

3.1 MA(1) 過程（p. 135）

定義 7. 1 次の**移動平均**（*moving average, MA*）**過程**は, 任意の t について

$$\begin{aligned}y_t &= \mu + \theta(\mathrm{L})w_t\\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)\end{aligned}$$

ただし $\theta(\mathrm{L}) := 1 - \theta\mathrm{L}$.

注 9. MA(1) と書く.

注 10. すなわち任意の t について

$$y_t = \mu + w_t - \theta w_{t-1}$$

例 3. $\mu := 0$, $\theta := 0.9$ の MA(1) のコレログラム（図 2）と $\mu := 0$, $\theta := -0.9$ の MA(1) のコレログラム（図 3）.

3.2 MA(q) 過程（p. 135）

定義 8. q 次の *MA* **過程**は, 任意の t について

$$\begin{aligned}y_t &= \mu + \theta(\mathrm{L})w_t\\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)\end{aligned}$$

ただし $\theta(\mathrm{L}) := 1 - \theta_1\mathrm{L} - \cdots - \theta_q\mathrm{L}^q$.

注 11. MA(q) と書く.

注 12. すなわち任意の t について

$$y_t = \mu + w_t - \theta_1 w_{t-1} - \cdots - \theta_q w_{t-q}$$

定理 6. $\{y_t\}$ が MA(q) なら任意の t について

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu$$

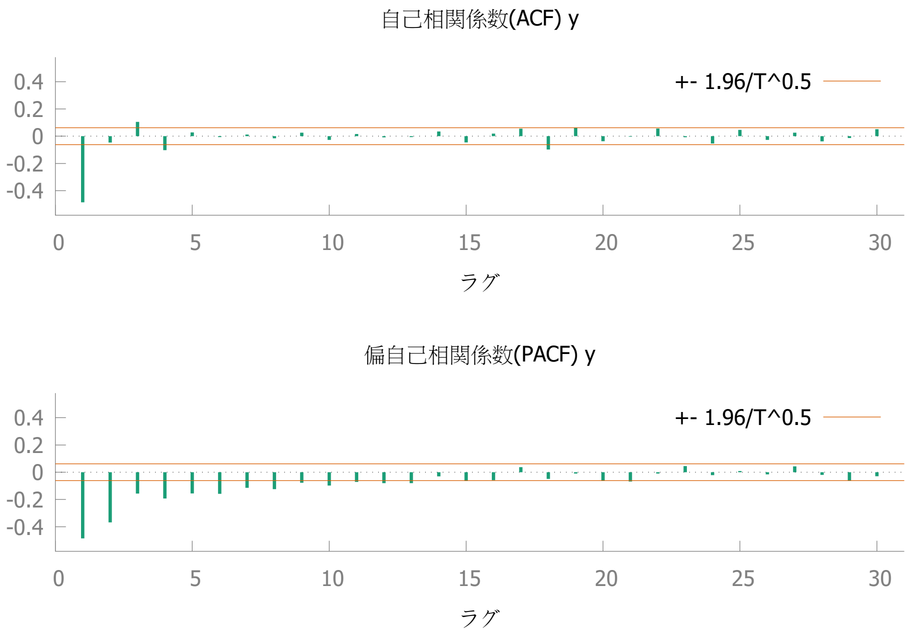


図 2　$\mu := 0,\ \ \theta := 0.9$ の MA(1) のコレログラム

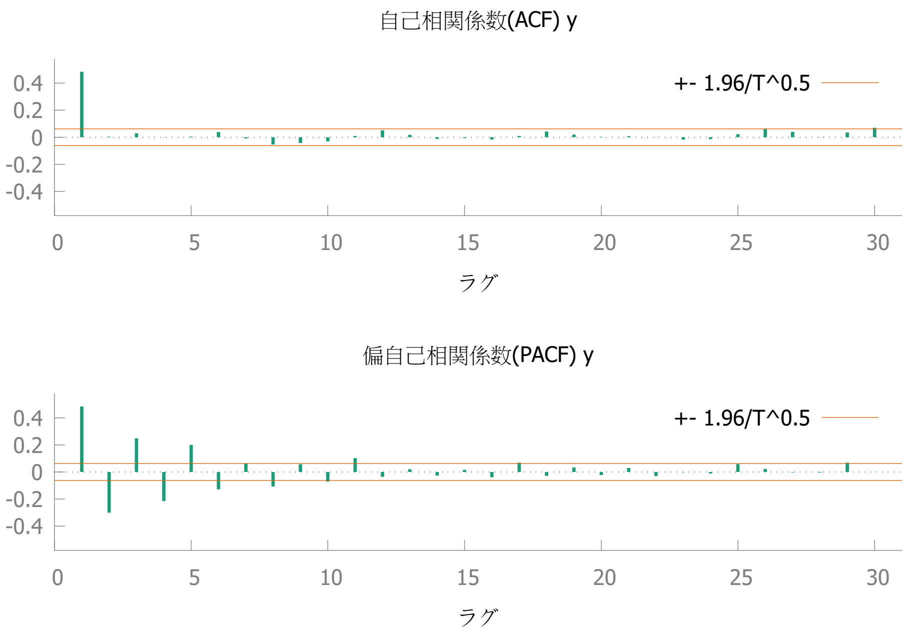


図 3　$\mu := 0,\ \ \theta := -0.9$ の MA(1) のコレログラム

証明. 任意の t について $\mathrm{E}(w_t)=0$ なので

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}(y_t)\\
&=\mathrm{E}(\mu+w_t-\theta_1 w_{t-1}-\cdots-\theta_q w_{t-q})\\
&=\mu+\mathrm{E}(w_t)-\theta_1\mathrm{E}(w_{t-1})-\cdots-\theta_q\mathrm{E}(w_{t-q})\\
&=\mu
\end{aligned}
$$

□

3.3 Wold 分解（p. 135）

定理 7 (Wold 分解)**.** $\{y_t\}$ が平均 *0* で共分散定常なら，任意の t について

$$
y_t=d_t+\sum_{s=0}^{\infty}\psi_s w_{t-s}
$$

ただし $\{d_t\}$ は決定的，$\{w_t\}$ はホワイト・ノイズで $\{d_t\}$ と無相関.

証明. 省略（大学院レベル）. □

系 2. 純粋に非決定的な共分散定常過程は $\mathrm{MA}(\infty)$ として表現できる.

3.4 自己共分散

$\{y_t\}$ を自己共分散関数 $\gamma(.)$ の $\mathrm{MA}(q)$ とする.

補題 3. 任意の t について

$$
\mathrm{var}(y_t)=\left(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2\right)\sigma^2
$$

証明. 任意の t について $\mathrm{var}(w_t)=\sigma^2$ かつ $s\neq 0$ について $\mathrm{cov}(w_t,w_{t-s})=0$ なので

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{var}(y_t)\\
&=\mathrm{var}(\mu+w_t-\theta_1 w_{t-1}-\cdots-\theta_q w_{t-q})\\
&=\mathrm{var}(w_t-\theta_1 w_{t-1}-\cdots-\theta_q w_{t-q})\\
&=\mathrm{var}(w_t)+\theta_1^2\mathrm{var}(w_{t-1})+\cdots+\theta_q^2\mathrm{var}(w_{t-q})\\
&=\left(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2\right)\sigma^2
\end{aligned}
$$

□

補題 4. $\{y_t\}$ が $\mathrm{MA}(q)$ なら任意の t と $s=1,\dots,q$ について

$$
\mathrm{cov}(y_t,y_{t-s})=(-\theta_s+\theta_{s+1}\theta_1+\cdots+\theta_q\theta_{q-s})\sigma^2
$$

証明. 任意の t について $\mathrm{var}(w_t)=\sigma^2$ かつ $s\neq 0$ について $\mathrm{cov}(w_t,w_{t-s})=0$ なので

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(y_t,y_{t-1})\\
&=\mathrm{cov}(\mu+w_t-\theta_1 w_{t-1}-\cdots-\theta_q w_{t-q},\\
&\quad \mu+w_{t-1}-\theta_1 w_{t-2}-\cdots-\theta_q w_{t-1-q})\\
&=\mathrm{cov}(w_t-\theta_1 w_{t-1}-\cdots-\theta_q w_{t-q},\\
&\quad w_{t-1}-\theta_1 w_{t-2}-\cdots-\theta_q w_{t-1-q})\\
&=\mathrm{cov}(w_t,w_{t-1}-\theta_1 w_{t-2}-\cdots-\theta_q w_{t-1-q})\\
&\quad -\theta_1\mathrm{cov}(w_{t-1},w_{t-1}-\theta_1 w_{t-2}-\cdots-\theta_q w_{t-1-q})\\
&\quad -\cdots\\
&\quad -\theta_q\mathrm{cov}(w_{t-q},w_{t-1}-\theta_1 w_{t-2}-\cdots-\theta_q w_{t-1-q})\\
&=-\theta_1\mathrm{var}(w_{t-1})+\theta_2\theta_1\mathrm{var}(w_{t-2})+\cdots\\
&\quad +\theta_q\theta_{q-1}\mathrm{var}(w_{t-q})\\
&=(-\theta_1+\theta_2\theta_1+\cdots+\theta_q\theta_{q-1})\sigma^2
\end{aligned}
$$

$s=2,\dots,q$ についても同様. □

補題 5. $\{y_t\}$ が $\mathrm{MA}(q)$ なら任意の t と $s\geq q+1$ について

$$
\mathrm{cov}(y_t,y_{t-s})=0
$$

証明. 任意の t と $s\neq 0$ について $\mathrm{cov}(w_t,w_{t-s})=0$ なので，$s\geq q+1$ より

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cov}(y_t,y_{t-s})\\
&=\mathrm{cov}(\mu+w_t-\theta_1 w_{t-1}-\cdots-\theta_q w_{t-q},\\
&\quad \mu+w_{t-s}-\theta_1 w_{t-s-1}-\cdots-\theta_q w_{t-s-q})\\
&=\mathrm{cov}(w_t-\theta_1 w_{t-1}-\cdots-\theta_q w_{t-q},\\
&\quad w_{t-s}-\theta_1 w_{t-s-1}-\cdots-\theta_q w_{t-s-q})\\
&=\mathrm{cov}(w_t,w_{t-s}-\theta_1 w_{t-s-1}-\cdots-\theta_q w_{t-s-q})\\
&\quad -\theta_1\mathrm{cov}(w_{t-1},w_{t-s}-\theta_1 w_{t-s-1}-\cdots-\theta_q w_{t-s-q})\\
&\quad -\cdots\\
&\quad -\theta_q\mathrm{cov}(w_{t-q},w_{t-s}-\theta_1 w_{t-s-1}-\cdots-\theta_q w_{t-s-q})\\
&=0
\end{aligned}
$$

□

定理 8. $\mathrm{MA}(q)$ の自己共分散関数は

$$
\begin{aligned}
\gamma(0)&=\left(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2\right)\sigma^2\\
\gamma(1)&=(-\theta_1+\theta_2\theta_1+\cdots+\theta_q\theta_{q-1})\sigma^2\\
&\ \vdots\\
\gamma(q)&=-\theta_q\sigma^2\\
\gamma(s)&=0,\quad s\geq q+1
\end{aligned}
$$

証明. 前 3 補題より結果が得られる. □

3.5 自己相関

$\{y_t\}$ の ACF を $\rho(.)$ とする.

系 3.

$$
\begin{aligned}
\rho(1) &= \frac{-\theta_1+\theta_2\theta_1+\cdots+\theta_q\theta_{q-1}}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2} \\
&\vdots \\
\rho(q) &= \frac{-\theta_q}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2} \\
\rho(s) &= 0, \quad s \geq q+1
\end{aligned}
$$

証明. $s \geq 0$ について $\rho(s)=\gamma(s)/\gamma(0)$ なので，前定理より結果が得られる. □

3.6 反転可能性

定理 9. 次の *2* つの MA(1) は同じ自己共分散関数をもつ.

1. 任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu + w_t - \theta w_{t-1} \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

2. 任意の t について

$$
\begin{aligned}
y_t^* &= \mu + w_t^* - \theta^{-1} w_{t-1}^* \\
\{w_t^*\} &\sim \mathrm{WN}\left(\theta^2\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

証明. 前者の自己共分散関数は

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) &= \left(1+\theta^2\right)\sigma^2 \\
\gamma(1) &= -\theta\sigma^2 \\
\gamma(s) &= 0, \quad s \geq 2
\end{aligned}
$$

θ を θ^{-1} に，σ^2 を $\theta^2\sigma^2$ に置き換えると

$$
\begin{aligned}
\gamma^*(0) &= \left(1+\theta^{-2}\right)\theta^2\sigma^2 \\
&= \left(1+\theta^2\right)\sigma^2 \\
\gamma^*(1) &= -\theta^{-1}\theta^2\sigma^2 \\
&= -\theta\sigma^2 \\
\gamma^*(s) &= 0, \quad s \geq 2
\end{aligned}
$$

したがって $\gamma(.)=\gamma^*(.)$. □

定理 10. $|\theta|<1$ なら MA(1) は AR(∞) で表現できる.

証明. 逐次代入により，任意の t について

$$
\begin{aligned}
w_t &= y_t - \mu + \theta w_{t-1} \\
&= y_t - \mu + \theta(y_{t-1} - \mu + \theta w_{t-2}) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \theta^s (y_{t-s} - \mu)
\end{aligned}
$$

すなわち任意の t について

$$
y_t - \mu = -\sum_{s=1}^{\infty} \theta^s (y_{t-s} - \mu) + w_t
$$

右辺の収束の必要十分条件は $|\theta|<1$. □

定義 9. AR(∞) で表現できる MA 過程を**反転可能**という.

定理 11. q 次方程式 $\theta(z)=0$ の q 個の根がすべて絶対値で *1* より大きいことが，MA(q) が反転可能であるための必要十分条件.

証明. 省略（大学院レベル）. □

3.7 偏自己相関

$\{y_t\}$ の PACF を $\alpha(.)$ とする.

定理 12. $\{y_t\}$ が反転可能なら一般に $\alpha(s) \neq 0$.

証明. 反転可能な MA 過程は AR(∞) で表現できる. 偏回帰係数=0 $\iff$ 偏相関係数=0 より AR 係数が 0 でない限り $\alpha(s) \neq 0$. □

4 ARMA 過程

4.1 ARMA(1, 1) 過程（p. 136）

定義 10. $(1,1)$ 次の**自己回帰移動平均**（*autoregressive moving average, ARMA*）**過程**は，任意の t について

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) &= \theta(\mathrm{L}) w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

ただし $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi\mathrm{L}$，$\theta(\mathrm{L}) := 1 - \theta\mathrm{L}$.

注 13. ARMA$(1,1)$ と書く．

注 14. すなわち任意の t について

$$y_t - \mu = \phi(y_{t-1} - \mu) + w_t - \theta w_{t-1}$$

または

$$y_t = c + \phi y_{t-1} + w_t - \theta w_{t-1}$$

ただし $c := (1-\phi)\mu$.

注 15. $\phi = \theta$ なら両辺を $\phi(\mathrm{L}) = \theta(\mathrm{L})$ で割ると，任意の t について

$$y_t - \mu = w_t$$

例 4. $\mu := 0$, $\phi := 0.9$, $\theta := 0.9$ の ARMA(1,1) のコレログラム (図 4) と $\mu := 0$, $\phi := 0.9$, $\theta := -0.9$ の ARMA(1,1) のコレログラム（図 5).

4.2 ARMA(p,q) 過程（p. 136）

定義 11. (p,q) 次の *ARMA* **過程**は，任意の t について

$$\begin{aligned} \phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) &= \theta(\mathrm{L}) w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right) \end{aligned}$$

ただし $\phi(\mathrm{L}) := 1 - \phi_1 \mathrm{L} - \cdots - \phi_p \mathrm{L}^p$, $\theta(\mathrm{L}) := 1 - \theta_1 \mathrm{L} - \cdots - \theta_q \mathrm{L}^q$.

注 16. ARMA(p,q) と書く．

5 今日のキーワード

漸化式，線形漸化式，ラグ演算子，ラグ多項式，自己回帰（AR）過程，Yule–Walker 方程式，移動平均（MA）過程，Wold 分解，反転可能性，自己回帰移動平均（ARMA）過程

6 次回までの準備

提出 宿題 4

復習 教科書第 7 章 2.1 節，復習テスト 4

予習 教科書第 7 章 1.3, 2.2–2.3 節

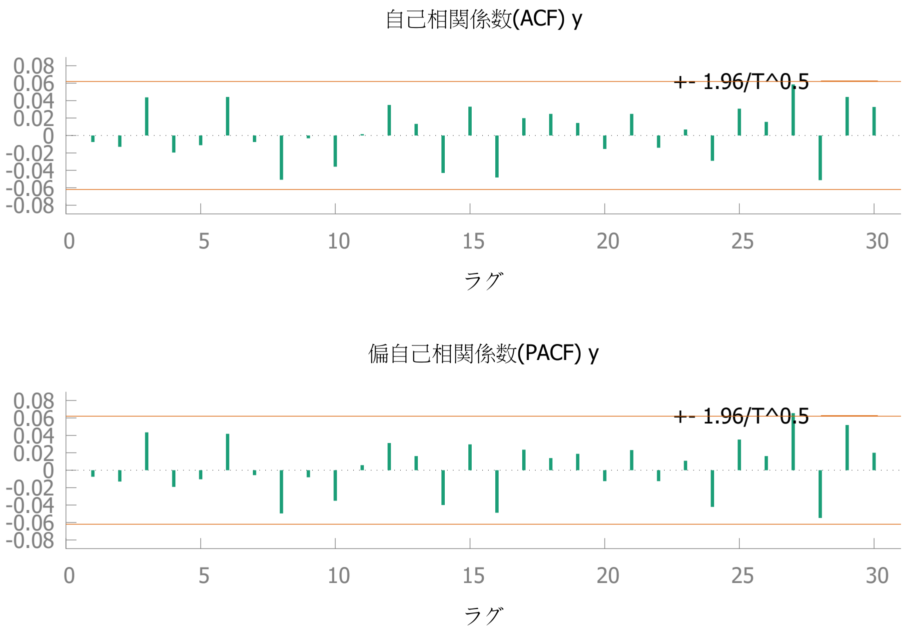


図 4　$\mu := 0,\ \phi := 0.9,\ \theta := 0.9$ の ARMA(1,1) のコレログラム

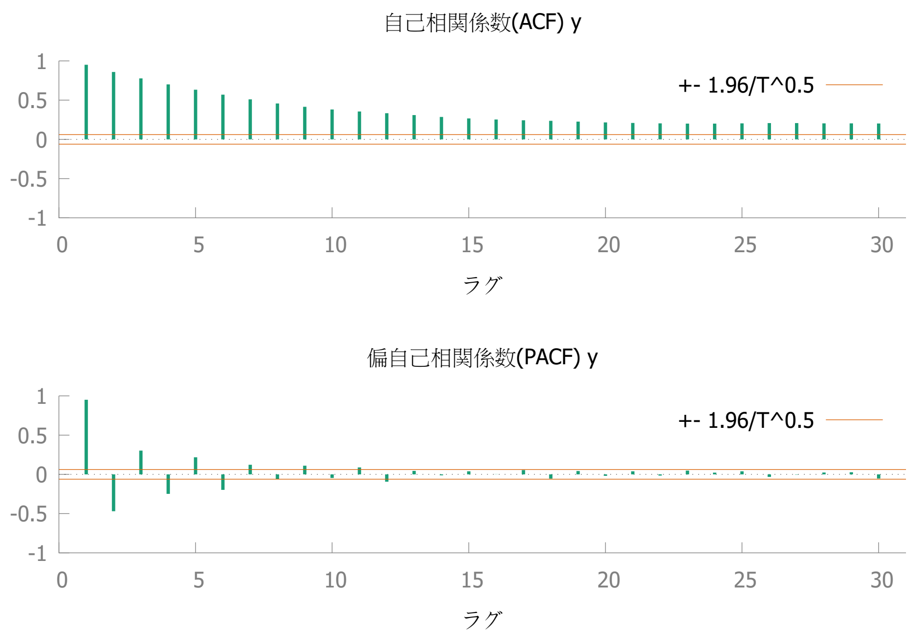


図 5　$\mu := 0,\ \phi := 0.9,\ \theta := -0.9$ の ARMA(1,1) のコレログラム