

第4回 確率 (4.1–4.4)

村澤 康友

2025 年 10 月 6 日

これまでの復習

統計学の 2 つのアプローチ

記述統計学 データの整理

統計的推測 標本から母集団について推測

→抽出される標本により結果が変わる

→信頼度の評価が必要

今日のポイント

1. 試行において起こりうる結果を標本点, 標本点全体の集合を標本空間, 標本空間の部分集合を事象という.
2. 事象に対して定義され, 確率の公理を満たす関数を確率という.
3. 確率の公理から確率の性質が導かれる.

目次

1	標本空間と事象 (p. 68)	1
1.1	標本空間 (p. 69)	1
1.2	事象 (p. 69)	1
1.3	集合算 (p. 73)	1
2	確率 (p. 75)	3
2.1	確率の公理 (p. 78)	3
2.2	確率の性質 (p. 80)	3
3	今日のキーワード	4
4	次回までの準備	4

1 標本空間と事象 (p. 68)

1.1 標本空間 (p. 69)

定義 1. 結果が偶然に支配される実験を試行という.

例 1. コイントス, サイコロ, 電球の寿命, 明日の天気.

定義 2. 試行において起こりうる結果を標本点という.

定義 3. 標本点全体の集合を標本空間という.

例 2. コイントスなら $\{H, T\}$, サイコロなら $\{1, \dots, 6\}$, 電球の寿命なら $(0, \infty)$.

注 1. 標本点を ω , 標本空間を Ω で表すことが多い.

1.2 事象 (p. 69)

定義 4. 標本空間の部分集合を事象という.

例 3. コイントスの事象は $\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega$.

定義 5. 空集合の事象を空事象という.

定義 6. 標本空間全体の事象を全事象という.

定義 7. ただ 1 つの標本点から成る事象を根元事象という.

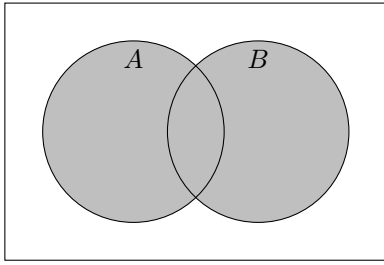
定義 8. 複数の標本点から成る事象を複合事象という.

1.3 集合算 (p. 73)

ある試行の事象を A, B, C とする.

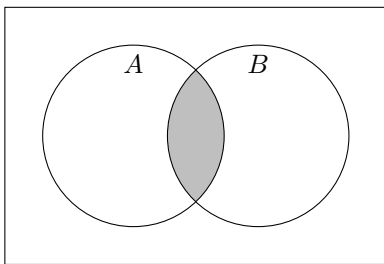
定義 9. $A \cup B$ を A と B の和事象という.

注 2. ベン図で表すと



定義 10. $A \cap B$ を A と B の積事象という.

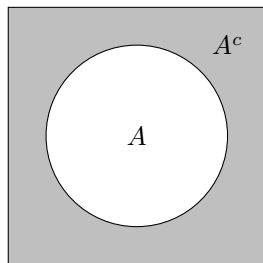
注 3. ベン図で表すと



定義 11. $A \cap B = \emptyset$ なら A と B は排反という.

定義 12. A^c を A の余事象という.

注 4. ベン図で表すと



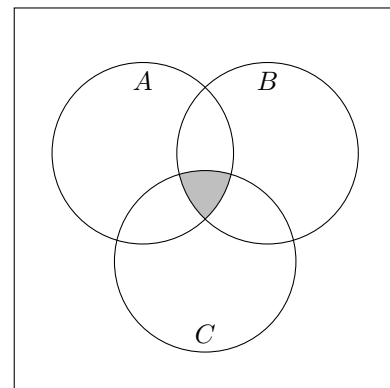
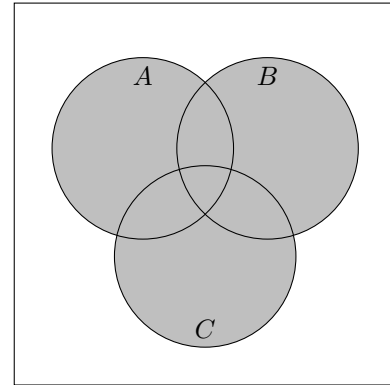
定理 1 (交換法則).

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

定理 2 (結合法則).

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

注 5. ベン図で表すと



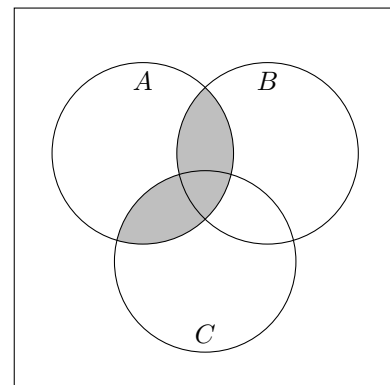
定理 3 (分配法則).

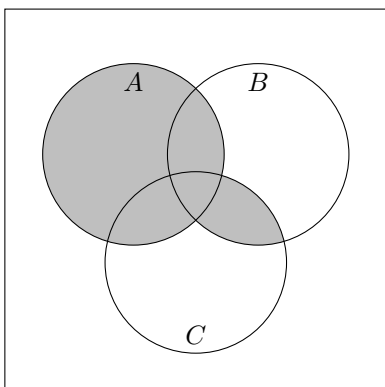
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

注 6. 数の場合は

$$\begin{aligned} a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c) \\ a + (b \times c) &\neq (a + b) \times (a + c) \end{aligned}$$

注 7. ベン図で表すと



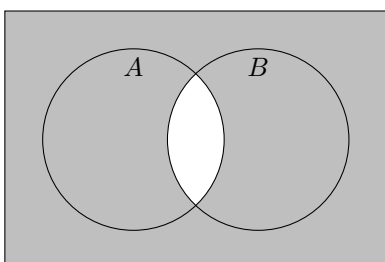
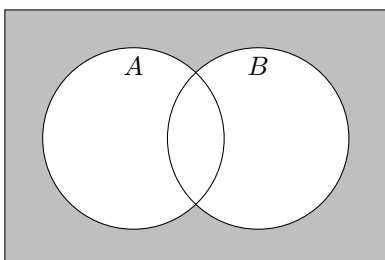


定理 4 (ド・モルガンの法則).

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

注 8. 「 A または B 」でない = A でなく, かつ B でない. 「 A かつ B 」でない = A でないか, または B でない. ベン図で表すと



2 確率 (p. 75)

2.1 確率の公理 (p. 78)

定義 13. 事象に対して定義され, 以下の公理を満たす関数 $P(\cdot)$ を確率という.

$$1. 0 \leq P(\cdot) \leq 1$$

$$2. P(\Omega) = 1$$

3. (σ 加法性) A_1, A_2, \dots が排反なら

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

注 9. 面積・体積・個数などと同じく, 集合 (事象) の「大きさ」の測度と理解してよい. ただし全体の「大きさ」を 1 と基準化する点が異なる.

例 4. 公正なコイントスなら

$$P(A) := \begin{cases} 0 & \text{for } A = \emptyset \\ 1/2 & \text{for } A = \{H\}, \{T\} \\ 1 & \text{for } A = \Omega \end{cases}$$

2.2 確率の性質 (p. 80)

定理 5.

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

証明. A と A^c は排反だから

$$\begin{aligned} P(A) + P(A^c) &= P(A \cup A^c) \\ &= P(\Omega) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

定理 6.

$$P(\emptyset) = 0$$

証明. $A = A \cup \emptyset$ であり, A と \emptyset は排反だから

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cup \emptyset) \\ &= P(A) + P(\emptyset) \end{aligned}$$

両辺から $P(A)$ を引けば結果が得られる.

□

定理 7.

$$A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$$

証明. $A \subset B$ より

$$B = A \cup (A^c \cap B)$$

A と $A^c \cap B$ は排反だから

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup (A^c \cap B)) \\ &= P(A) + P(A^c \cap B) \\ &\geq P(A) \end{aligned}$$

□

定理 8 (加法定理).

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

証明. ベン図より

$$A \cup B = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$$

$$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$$

$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

$A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ は排反だから

$$P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

したがって

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &= 2P(A \cap B) + P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) \\ &= P(A \cap B) + P(A \cup B) \end{aligned}$$

式変形より結果が得られる.

□

3 今日のキーワード

試行, 標本点, 標本空間, 事象 (空事象, 全事象, 根元事象, 複合事象, 和事象, 積事象, 排反事象, 余事象), 集合算の法則 (交換法則, 結合法則, 分配法則, ド・モルガンの法則), 確率の公理, σ 加法性, 加法定理

4 次回までの準備

復習 教科書第 4 章 1–4 節, 復習テスト 4

予習 教科書第 4 章 5 節