

## 計量経済 I：復習テスト 14

学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

2023 年 7 月 18 日

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～14 を（左上で）ホチキス止めし、定期試験実施日（7 月 25 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 処置ダミーを  $D$ ，処置をする時としない時の潜在的な結果を  $Y_1^*, Y_0^*$ ，観測される結果を  $Y$ ，共変量を  $X$  とする． $d = 0, 1$  について  $E(Y_d^*|X) = r_d(X)$  とする．処置確率を  $p(X) := \Pr[D = 1|X]$  とする．
  - (a)  $X = x$  のときの条件付き ATE を  $r_0(\cdot), r_1(\cdot)$  で表しなさい．

- (b)  $X$  を所与として  $Y_1^*, Y_0^*$  は  $D$  と条件付き平均独立とする． $E(Y|X)$  を  $r_0(\cdot), r_1(\cdot), p(\cdot)$  で表しなさい．

2. 前問と同じ状況を考える. ただし  $d = 0, 1$  について  $E(Y_d^*|X) = \alpha_d + \beta_d X$  とする.

(a) 条件つき ATE を  $X$  の関数で表しなさい.

(b)  $d = 0, 1$  について  $U_d := Y_d^* - E(Y_d^*|X)$  とする.  $Y$  を  $D, X, U_0, U_1$  で表しなさい.

(c)  $\beta_0 = \beta_1 = \beta$ ,  $U_0 = U_1 = U$  とする.  $Y$  を  $D, X, U$  で表しなさい.

(d)  $X$  を所与として  $Y_0^*$  は  $D$  と条件付き平均独立とする.  $E(U|D, X) = 0$  を示しなさい.

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\text{ATE}(x) &:= E(Y_1^* - Y_0^* | X = x) \\ &= E(Y_1^* | X = x) - E(Y_0^* | X = x) \\ &= r_1(x) - r_0(x)\end{aligned}$$

(b) 繰り返し期待値の法則と条件付き平均独立性より

$$\begin{aligned}E(Y|X) &= E(DY_1^* + (1-D)Y_0^* | X) \\ &= E(E(DY_1^* + (1-D)Y_0^* | D, X) | X) \\ &= E(D E(Y_1^* | D, X) + (1-D) E(Y_0^* | D, X) | X) \\ &= E(D E(Y_1^* | X) + (1-D) E(Y_0^* | X) | X) \\ &= E(D|X) E(Y_1^* | X) + (1 - E(D|X)) E(Y_0^* | X) \\ &= \Pr[D = 1|X]r_1(X) + (1 - \Pr[D = 1|X])r_0(X) \\ &= p(X)r_1(X) + (1 - p(X))r_0(X)\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\text{ATE}(X) &:= E(Y_1^* - Y_0^* | X) \\ &= E(Y_1^* | X) - E(Y_0^* | X) \\ &= \alpha_1 + \beta_1 X - (\alpha_0 + \beta_0 X) \\ &= \alpha_1 - \alpha_0 + (\beta_1 - \beta_0)X\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}Y &:= DY_1^* + (1-D)Y_0^* \\ &= Y_0^* + D(Y_1^* - Y_0^*) \\ &= \alpha_0 + \beta_0 X + U_0 + D[\alpha_1 + \beta_1 X + U_1 - (\alpha_0 + \beta_0 X + U_0)] \\ &= \alpha_0 + \beta_0 X + U_0 + D[(\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0)X + U_1 - U_0] \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D + \beta_0 X + (\beta_1 - \beta_0)DX + U_0 + D(U_1 - U_0)\end{aligned}$$

(c) 前問より

$$Y = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D + \beta_0 X + U$$

(d) 条件付き平均独立性より

$$\begin{aligned}E(U|D, X) &= E(Y_0^* - E(Y_0^* | X) | D, X) \\ &= E(Y_0^* | D, X) - E(Y_0^* | X) \\ &= E(Y_0^* | X) - E(Y_0^* | X) \\ &= 0\end{aligned}$$