第 13 回　ARCH・GARCH 過程

村澤 康友

2023 年 1 月 10 日

今日のポイント

1. 確率過程（特に金融時系列）の標準偏差をボラティリティという．$\mathrm{var}(Y|X)$ が X に依存することを条件つき不均一分散という．ボラティリティの変動を自己回帰条件付き不均一分散としてモデル化する．
2. ARCH(q) 過程は任意の t について $w_t = \sigma_t z_t$ として $\sigma_t^2 = c + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q w_{t-q}^2$．ただし $\{z_t\}$ は IID(0,1) で $c > 0$，$\alpha_1, \ldots, \alpha_q \geq 0$．$\{w_t\}$ が I(0) なら $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q < 1$．$\{w_t\}$ が ARCH(q) なら $\left\{w_t^2\right\}$ は AR(q)．
3. GARCH(p, q) 過程は任意の t について $w_t = \sigma_t z_t$ として $\sigma_t^2 = c + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q w_{t-q}^2$．ただし $\{z_t\}$ は IID(0,1) で $c > 0$，$\beta_1, \ldots, \beta_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_q \geq 0$．$\{w_t\}$ が I(0) なら $\beta_1 + \cdots + \beta_p + \alpha_1 + \cdots + \alpha_q < 1$．$\{w_t\}$ が GARCH(p, q) なら $\left\{w_t^2\right\}$ は ARMA($\max\{p, q\}, p$)．
4. ラグ次数はモデル選択基準で選んでもよいが，無条件に GARCH(1,1) を仮定することが多い．

目次

1　ボラティリティ　1
- 1.1　金融時系列 1
- 1.2　不均一分散 2

2　ARCH 過程　2
- 2.1　ARCH 過程 2
- 2.2　自己回帰条件付き不均一分散 2
- 2.3　共分散定常性 4
- 2.4　ARCH 過程と AR 過程 4

3　GARCH 過程　5
- 3.1　GARCH 過程 5
- 3.2　自己回帰条件付き不均一分散 5
- 3.3　共分散定常性 5
- 3.4　GARCH 過程と ARMA 過程 6

4　モデルの定式化と推定　6
- 4.1　ラグ次数の選択 6
- 4.2　条件付き ML 推定 6

5　今日のキーワード　6

6　次回までの準備　6

1　ボラティリティ

1.1　金融時系列

$\{y_t\}$ を株価の対数階差系列（＝収益率）とする．株式市場が効率的なら将来の株価の超過収益率は予測できない．すなわち任意の t について

$$\mathrm{E}_t(y_{t+1}) = \mu$$

ただし μ は安全利子率＋リスク・プレミアム．

補題 1. 任意の t について

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu$$

証明. 繰り返し期待値の法則より，任意の t につ

いて

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(y_t) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}_{t-1}(y_t)) \\ &= \mathrm{E}(\mu) \\ &= \mu\end{aligned}$$

□

定理 1. 任意の $s \geq 1$ について

$$\mathrm{cov}(y_t, y_{t-s}) = 0$$

証明. 補題と繰り返し期待値の法則より，任意の $s \geq 1$ について

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(y_t, y_{t-s}) &:= \mathrm{E}((y_t - \mathrm{E}(y_t))(y_{t-s} - \mathrm{E}(y_{t-s}))) \\ &= \mathrm{E}((y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu)) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{E}_{t-1}((y_t - \mu)(y_{t-s} - \mu))) \\ &= \mathrm{E}((\mathrm{E}_{t-1}(y_t) - \mu)(y_{t-s} - \mu)) \\ &= \mathrm{E}((\mu - \mu)(y_{t-s} - \mu)) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

注 1. $\{y_t\}$ は系列無相関だが iid とは限らない．例えば $\{y_t^2\}$ は系列相関をもつかもしれない．

例 1. NYSE 総合指数（週次）の対数階差のコレログラム（図 1）と対数階差の 2 乗のコレログラム（図 2）．

定義 1. 確率過程（特に金融時系列）の標準偏差を**ボラティリティ**という．

注 2. 金融資産のリスクを表す．市場が効率的なら収益率は予測できないが，ボラティリティの変動は予測できることが多い．

1.2 不均一分散

(Y, X) を確率ベクトルとする．Y の X 上への古典的線形回帰モデルは

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X) &= \alpha + \beta X \\ \mathrm{var}(Y|X) &= \sigma^2\end{aligned}$$

すなわち古典的線形回帰モデルでは $\mathrm{E}(Y|X)$ のみ X に依存し，$\mathrm{var}(Y|X)$ は X に依存しないと仮定する．

定義 2. $\mathrm{var}(Y|X)$ が X に依存せず，一定であることを**条件つき均一分散**という．

定義 3. $\mathrm{var}(Y|X)$ が X に依存することを**条件つき不均一分散**という．

2 ARCH 過程

2.1 ARCH 過程

$\{y_t\}$ を ARMA 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{L})(y_t - \mu) &= \theta(\mathrm{L}) w_t \\ \{w_t\} &\sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)\end{aligned}$$

$\mathrm{var}_{t-1}(y_t) = \mathrm{var}_{t-1}(w_t)$ の変動を表したい．

定義 4. q 次の**自己回帰条件付き不均一分散**（*AR conditional heteroskedasticity, ARCH*）**過程**は，任意の t について

$$\begin{aligned}w_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= c + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q w_{t-q}^2 \\ \{z_t\} &\sim \mathrm{IID}(0,1)\end{aligned}$$

ただし $c > 0$，$\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$．

注 3. $\mathrm{ARCH}(q)$ と書く．

注 4. $c > 0$，$\alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$ より任意の t について $\sigma_t^2 > 0$．

注 5. 時点 $t-1$ で σ_t^2 は既知．

2.2 自己回帰条件付き不均一分散

$\{w_t\}$ を $\mathrm{ARCH}(q)$ とする．

補題 2. 任意の t について

$$\mathrm{E}_{t-1}(w_t) = 0$$

証明. 時点 $t-1$ で σ_t^2 は既知，$\{z_t\}$ は $\mathrm{IID}(0,1)$ なので，任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{t-1}(w_t) &= \mathrm{E}_{t-1}(\sigma_t z_t) \\ &= \sigma_t \mathrm{E}_{t-1}(z_t) \\ &= \sigma_t \mathrm{E}(z_t) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

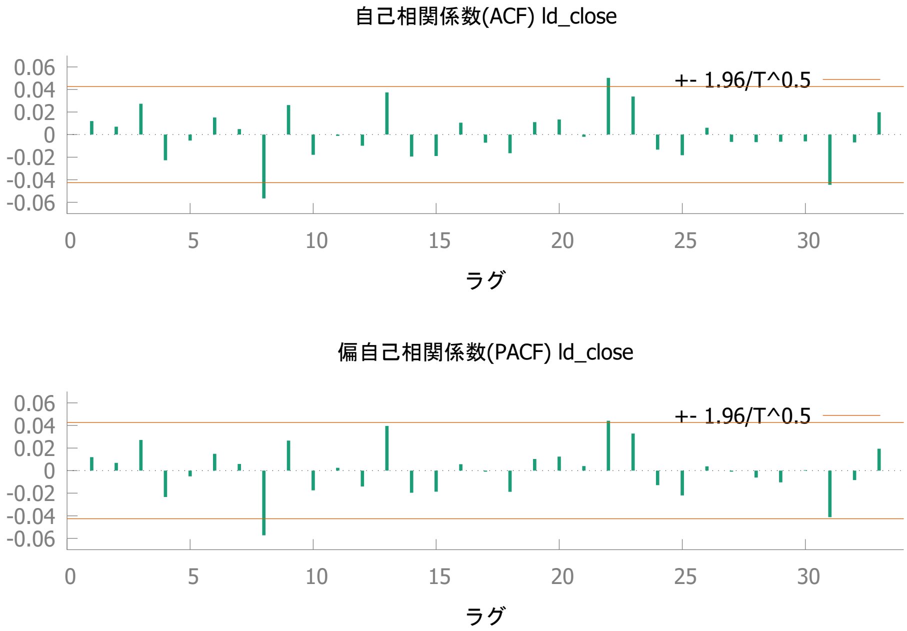

図 1　NYSE 総合指数（週次）の対数階差のコレログラム

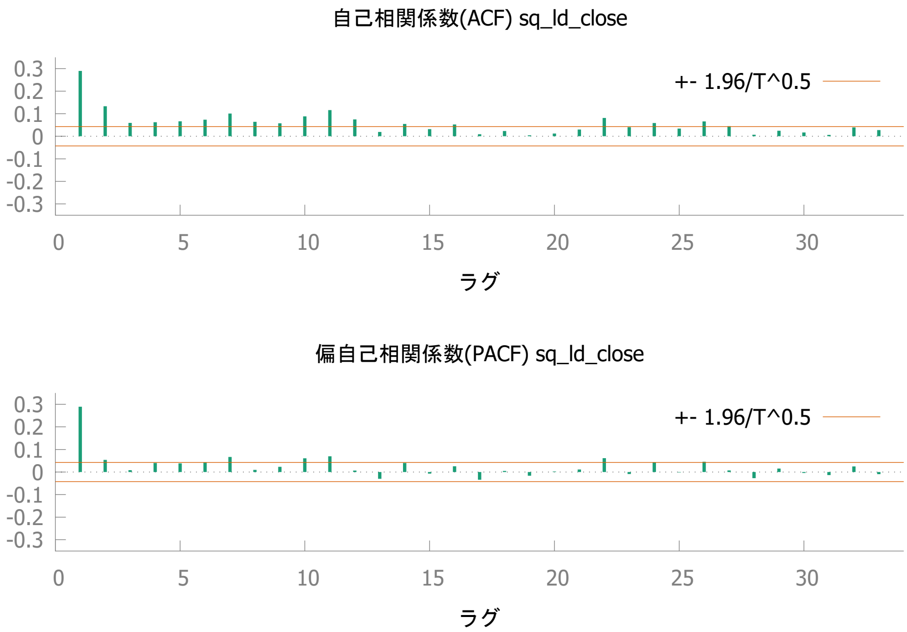

図 2　NYSE 総合指数（週次）の対数階差の 2 乗のコレログラム

定理 2. 任意の t について

$$\mathrm{var}_{t-1}(w_t) = \sigma_t^2$$

証明. 補題より，任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{var}_{t-1}(w_t) &= \mathrm{E}_{t-1}\left(w_t^2\right) \\ &= \mathrm{E}_{t-1}\left(\sigma_t^2 z_t^2\right) \\ &= \sigma_t^2\,\mathrm{E}_{t-1}\left(z_t^2\right) \\ &= \sigma_t^2\,\mathrm{E}\left(z_t^2\right) \\ &= \sigma_t^2\,\mathrm{var}(z_t) \\ &= \sigma_t^2\end{aligned}$$

□

注 6. すなわち任意の t について

$$\mathrm{var}_{t-1}(w_t) = c + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q w_{t-q}^2$$

これは q 次の自己回帰条件付き不均一分散.

2.3 共分散定常性

$\{w_t\}$ が I(0) であるためには $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \geq 0$ に制約が必要.

補題 3. 任意の t について

$$\mathrm{E}(w_t) = 0$$

証明. 前補題と繰り返し期待値の法則より，任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(w_t) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}_{t-1}(w_t)) \\ &= 0\end{aligned}$$

□

補題 4. 任意の t について

$$\mathrm{var}(w_t) = \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right)$$

証明. 補題と繰り返し期待値の法則より，任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(w_t) &= \mathrm{E}\left(w_t^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}_{t-1}\left(w_t^2\right)\right) \\ &= \mathrm{E}(\mathrm{var}_{t-1}(w_t)) \\ &= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right)\end{aligned}$$

□

定理 3. $\{w_t\}$ が *I(0)* なら

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_q < 1$$

証明. 補題より，任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(w_t) &= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left(c + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q w_{t-q}^2\right) \\ &= c + \alpha_1\,\mathrm{E}\left(w_{t-1}^2\right) + \cdots + \alpha_q\,\mathrm{E}\left(w_{t-q}^2\right) \\ &= c + \alpha_1\,\mathrm{var}(w_{t-1}) + \cdots + \alpha_q\,\mathrm{var}(w_{t-q}) \\ &= c + \alpha_1\,\mathrm{var}(w_t) + \cdots + \alpha_q\,\mathrm{var}(w_t) \\ &= c + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_q)\,\mathrm{var}(w_t)\end{aligned}$$

すなわち

$$(1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_q)\,\mathrm{var}(w_t) = c$$

$\mathrm{var}(w_t), c > 0$ より

$$1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_q > 0$$

□

2.4 ARCH 過程と AR 過程

任意の t について $v_t := w_t^2 - \sigma_t^2$ とすると

$$\begin{aligned}w_t^2 &\equiv \sigma_t^2 + v_t \\ &= c + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q w_{t-q}^2 + v_t\end{aligned}$$

$\{v_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\left\{w_t^2\right\}$ は $\mathrm{AR}(q)$.

補題 5. 任意の t について

$$\mathrm{E}_{t-1}(v_t) = 0$$

証明. 任意の t について

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{t-1}(v_t) &= \mathrm{E}_{t-1}\left(w_t^2 - \sigma_t^2\right) \\ &= \mathrm{E}_{t-1}\left(w_t^2\right) - \sigma_t^2 \\ &= \mathrm{var}_{t-1}(w_t) - \sigma_t^2 \\ &= \sigma_t^2 - \sigma_t^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

□

系 1. 任意の t について

$$\mathrm{E}(v_t) = 0$$

証明. 繰り返し期待値の法則より，任意の t について

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(v_t) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}_{t-1}(v_t)) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

系 2. 任意の t と $s \geq 1$ について

$$
\mathrm{cov}(v_t, v_{t-s}) = 0
$$

証明. 繰り返し期待値の法則より, 任意の t と $s \geq 1$ について

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(v_t, v_{t-s}) &= \mathrm{E}(v_t v_{t-s}) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}_{t-1}(v_t v_{t-s})) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}_{t-1}(v_t) v_{t-s}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

□

注 7. $\mathrm{E}\left(w_t^4\right) < \infty$ なら $\mathrm{var}(v_t) < \infty$ となり $\{v_t\}$ はホワイト・ノイズ．詳細は略.

3 GARCH 過程

3.1 GARCH 過程

定義 5. (p,q) 次の**一般化** *ARCH*（*generalized ARCH, GARCH*）**過程**は，任意の t について

$$
\begin{aligned}
w_t &= \sigma_t z_t \\
\sigma_t^2 &= c + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 \\
&\quad + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q w_{t-q}^2 \\
\{z_t\} &\sim \mathrm{IID}(0,1)
\end{aligned}
$$

ただし $c > 0,\ \beta_1, \dots, \beta_p, \alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$.

注 8. $\mathrm{GARCH}(p,q)$ と書く.

注 9. $c > 0,\ \beta_1, \dots, \beta_p, \alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$ より任意の t について $\sigma_t^2 > 0$.

注 10. σ_t^2 は時点 $t-1$ で既知.

3.2 自己回帰条件付き不均一分散

簡単化のため $\{w_t\}$ を $\mathrm{GARCH}(1,1)$ とする．逐次代入より任意の t について

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{var}_{t-1}(w_t) \\
&= \sigma_t^2 \\
&= c + \beta \sigma_{t-1}^2 + \alpha w_{t-1}^2 \\
&= c + \beta\left(c + \beta \sigma_{t-2}^2 + \alpha w_{t-2}^2\right) + \alpha w_{t-1}^2 \\
&= \dots \\
&= \left(1 + \beta + \beta^2 + \cdots\right) c \\
&\quad + \alpha\left(w_{t-1}^2 + \beta w_{t-2}^2 + \beta^2 w_{t-3}^2 + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

これは無限次の自己回帰条件付き不均一分散.

3.3 共分散定常性

$\{w_t\}$ を $\mathrm{GARCH}(p,q)$ とする．$\{w_t\}$ が I(0) であるためには $\beta_1, \dots, \beta_p, \alpha_1, \dots, \alpha_q \geq 0$ に制約が必要.

定理 4. $\{w_t\}$ が *I(0)* なら

$$
\beta_1 + \cdots + \beta_p + \alpha_1 + \cdots + \alpha_q < 1
$$

証明. 任意の t について

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{var}(w_t) \\
&= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right) \\
&= c + \beta_1 \mathrm{E}\left(\sigma_{t-1}^2\right) + \cdots + \beta_p \mathrm{E}\left(\sigma_{t-p}^2\right) \\
&\quad + \alpha_1 \mathrm{E}\left(w_{t-1}^2\right) + \cdots + \alpha_q \mathrm{E}\left(w_{t-q}^2\right) \\
&= c + \beta_1 \mathrm{var}(w_{t-1}) + \cdots + \beta_p \mathrm{var}(w_{t-p}) \\
&\quad + \alpha_1 \mathrm{var}(w_{t-1}) + \cdots + \alpha_q \mathrm{var}(w_{t-q}) \\
&= c + \beta_1 \mathrm{var}(w_t) + \cdots + \beta_p \mathrm{var}(w_t) \\
&\quad + \alpha_1 \mathrm{var}(w_t) + \cdots + \alpha_q \mathrm{var}(w_t) \\
&= c + (\beta_1 + \cdots + \beta_p + \alpha_1 + \cdots + \alpha_q) \mathrm{var}(w_t)
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
(1 - \beta_1 - \cdots - \beta_p - \alpha_1 - \cdots - \alpha_q) \mathrm{var}(w_t) = c
$$

$\mathrm{var}(w_t), c > 0$ より

$$
1 - \beta_1 - \cdots - \beta_p - \alpha_1 - \cdots - \alpha_q > 0
$$

□

3.4　GARCH 過程と ARMA 過程

任意の t について $v_t := w_t^2 - \sigma_t^2$ とする．

定理 5. $\{w_t\}$ が GARCH(p,q) で $\{v_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\{w_t^2\}$ は ARMA$(\max\{p,q\},p)$.

証明. $r := \max\{p,q\}$ とすると，任意の t について

$$\begin{aligned}
w_t^2 &\equiv \sigma_t^2 + v_t \\
&= c + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p\sigma_{t-p}^2 \\
&\quad + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q w_{t-q}^2 + v_t \\
&= c + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p\sigma_{t-p}^2 \\
&\quad + \alpha_1 w_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_r w_{t-r}^2 + v_t \\
&= c + (\alpha_1+\beta_1)w_{t-1}^2 + \cdots + (\alpha_r+\beta_r)w_{t-r}^2 \\
&\quad + v_t - \beta_1\left(w_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2\right) - \cdots \\
&\quad - \beta_p\left(w_{t-p}^2 - \sigma_{t-p}^2\right) \\
&= c + (\alpha_1+\beta_1)w_{t-1}^2 + \cdots + (\alpha_r+\beta_r)w_{t-r}^2 \\
&\quad + v_t - \beta_1 v_{t-1} - \cdots - \beta_p v_{t-p}
\end{aligned}$$

□

4　モデルの定式化と推定

4.1　ラグ次数の選択

ラグ次数はモデル選択基準で選んでもよいが，無条件に GARCH(1,1) を仮定することが多い．

4.2　条件付き ML 推定

ARCH・GARCH モデルの厳密な ML 推定は煩雑なので，条件つき ML 推定が普通．また係数に対する制約を考慮する必要がある．詳細は略．

5　今日のキーワード

ボラティリティ，条件つき均一分散，条件つき不均一分散，自己回帰条件付き不均一分散（ARCH）過程，一般化 ARCH（GARCH）過程

6　次回までの準備

提出　宿題 13

復習　復習テスト 13

予習　特になし