

中級統計学：復習テスト 12

学籍番号_____氏名_____

2022 年 11 月 11 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～13 を（左上で）ホチキス止めし、第 2 回中間試験実施日（11 月 18 日の予定）にまとめて提出すること。

1. $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ とする。ただし

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} := \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

(a) $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ の同時 pdf を書きなさい。

(b) $\det(\boldsymbol{\Sigma})$ と $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ を求めなさい。

(c) $\sigma_{12} = 0$ なら x_1 と x_2 は独立であることを示しなさい。（ヒント：同時 pdf = 周辺 pdf の積，すなわち $f_{1,2}(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2)$ となることを示せばよい。）

2. (X, Y) を確率ベクトルとする.

(a) (1 変量分布の) mgf の定義を書きなさい.

(b) X と Y が独立なら $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$ となることを示しなさい.

3. $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ と $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ は独立とする.

(a) X, Y の mgf を書きなさい.

(b) $X + Y$ の mgf を求めなさい.

解答例

1. (a)

$$f(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-n/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

ただし $n := 2$.

(b)

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\Sigma}) &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 \\ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - \sigma_{12}^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) $\sigma_{12} = 0$ なら

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\Sigma}) &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 \\ \boldsymbol{\Sigma}^{-1} &= \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} \begin{bmatrix} \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &:= (2\pi)^{-1} (\sigma_1^2 \sigma_2^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}' \begin{bmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= (2\pi)^{-1} (\sigma_1^2 \sigma_2^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]\right) \\ &= (2\pi)^{-1/2} (\sigma_1^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) (2\pi)^{-1/2} (\sigma_2^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \\ &= f_1(x_1) f_2(x_2) \end{aligned}$$

ただし $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ は x_1, x_2 の周辺 pdf. 同時 pdf = 周辺 pdf の積なので x_1 と x_2 は独立.

2. (a) X の mgf は

$$M_X(t) := E(e^{tX})$$

(b) X と Y が独立なら

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &:= E(e^{t(X+Y)}) \\ &= E(e^{tX+tY}) \\ &= E(e^{tX} e^{tY}) \\ &= E(e^{tX}) E(e^{tY}) \\ &= M_X(t) M_Y(t) \end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \exp\left(\mu_X t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}\right) \\ M_Y(t) &= \exp\left(\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}M_{X+Y}(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\&= \exp\left(\mu_X t + \frac{\sigma_X^2 t^2}{2}\right) \exp\left(\mu_Y t + \frac{\sigma_Y^2 t^2}{2}\right) \\&= \exp\left((\mu_X + \mu_Y)t + \frac{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2) t^2}{2}\right)\end{aligned}$$