中級統計学：復習テスト 8

学籍番号____________________氏名____________________

2022 年 10 月 21 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，第 1 回中間試験実施日（10 月 25 日の予定）にまとめて提出すること．

1. 確率変数 X について以下の不等式が成り立つことを示しなさい．

   (a)（マルコフの不等式）任意の $c > 0$ について

$$\Pr[|X| \geq c] \leq \frac{\mathrm{E}(|X|)}{c}$$

   (b)（チェビシェフの不等式）任意の $c > 0$ について

$$\Pr[|X - \mu_X| \geq c] \leq \frac{\sigma_X^2}{c^2}$$

2. 次の離散確率変数を考える.

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

$Y := 2X$ とする.

(a) Y の pmf を式とグラフで表しなさい.

(b) Y の cdf を式とグラフで表しなさい.

3. 連続確率変数 X は次の cdf をもつ.

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$

$Y := 2X$ とする.

(a) Y の cdf を式とグラフで表しなさい.

(b) Y の pdf を式とグラフで表しなさい.

解答例

1.（a）X が連続なら

$$
\begin{aligned}
c\,\Pr[|X| \geq c] &= c \int_{|x| \geq c} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x| \geq c} c f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{|x| \geq c} |x| f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{E}(|X|)
\end{aligned}
$$

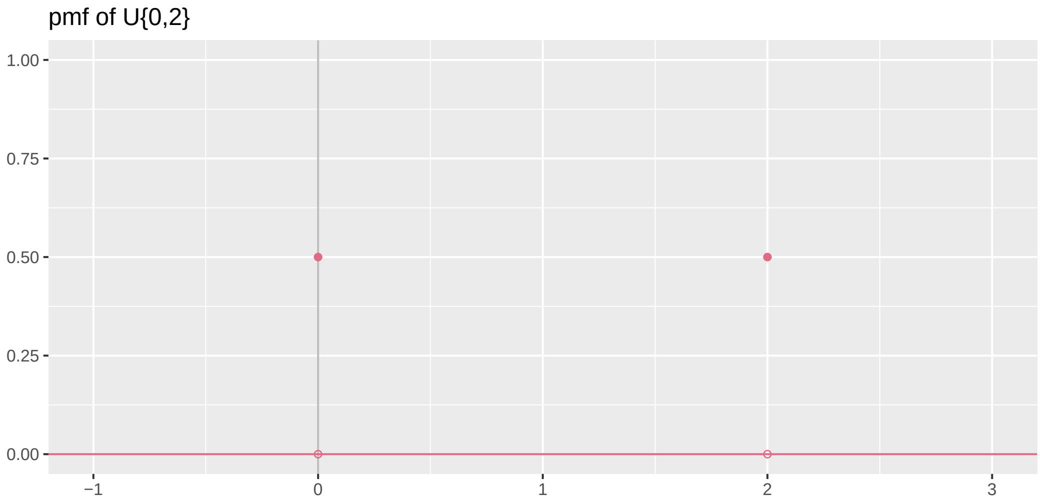
離散の場合も同様.

（b）マルコフの不等式より

$$
\begin{aligned}
\Pr[|X-\mu_X| \geq c] &= \Pr\left[|X-\mu_X|^2 \geq c^2\right] \\
&\leq \frac{\mathrm{E}\left(|X-\mu_X|^2\right)}{c^2} \\
&= \frac{\mathrm{var}(X)}{c^2}
\end{aligned}
$$

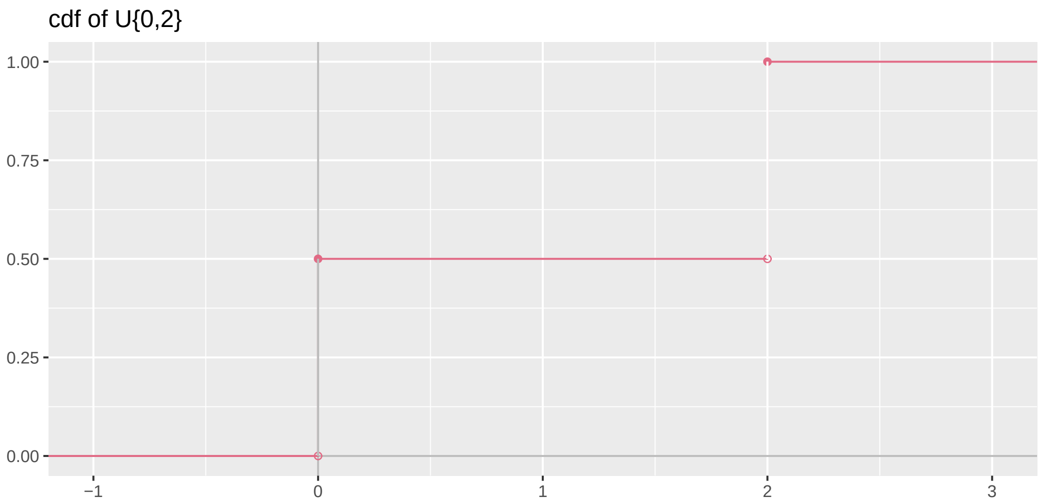
2. (a)

$$p_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } y = 0, 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



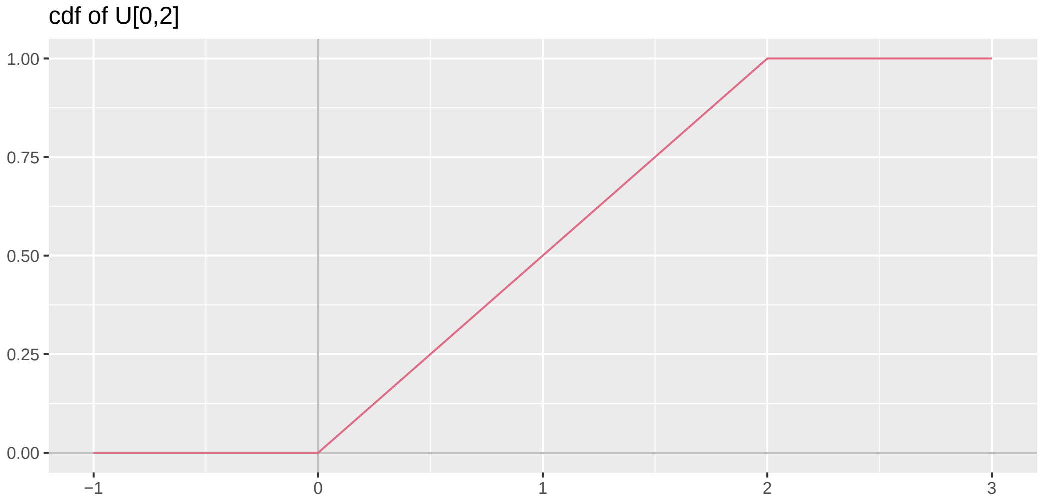
(b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ 1/2 & \text{for } 0 \leq y < 2 \\ 1 & \text{for } 2 \leq y \end{cases}$$



3. (a)

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &:= \Pr[Y \le y] \\
&= \Pr[2X \le y] \\
&= \Pr\left[X \le \frac{y}{2}\right] \\
&= F_X\left(\frac{y}{2}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ y/2 & \text{for } 0 \le y \le 2 \\ 1 & \text{for } 2 < y \end{cases}
\end{aligned}$$



(b)

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$