

# 経済統計：第 1 回中間試験

村澤 康友

2013 年 6 月 15 日

注意：3 問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいに与えるが、結果のみの解答は 0 点とする）。

1. (20 点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）。

- (a) 統計的推測
- (b) 標本
- (c) 標本点
- (d) 連続確率変数

2. (30 点) M 教授には子供が 3 人おり（事象  $A$ ）、息子がいる（事象  $B$ ）のは確かであるが、娘がいる（事象  $C$ ）かどうかは不明である。そこで M 教授に娘がいる条件つき確率  $P(C|A, B) := P(C|A \cap B)$  を考える。男女の生まれる確率は等しいと仮定して、以下の確率を順に求めなさい。

- (a)  $P(B|A)$
- (b)  $P(B \cap C|A)$
- (c)  $P(C|A, B)$

3. (50 点)  $X \sim U[0, 1]$  とする。すなわち任意の  $x$  について

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$

- (a)  $X$  の pdf を求め、式とグラフで表しなさい。
- (b)  $E(X) = 1/2$  となることを示しなさい。
- (c)  $E(X^2)$  を求めなさい。
- (d)  $\text{var}(X)$  を求めなさい。
- (e)  $Y := 2X - 1$  とする。 $E(Y)$  と  $\text{var}(Y)$  を求めなさい。

## 解答例

### 1. 統計学の基本用語

- (a) 一部の観察から全体について推測すること .
- (b) 母集団のうち実際に観察される部分 .
  - 「母集団から取り出す」のが重要 . 単に「観察したデータ」は 0 点 .
- (c) 試行において起こりうる結果 .
  - 「標本空間の要素」は定義でないので 0 点 .
  - 前問の「標本」と直接は関係ない点に注意 .
- (d) 連続な cdf をもつ確率変数 .
  - 「連続な確率変数」は定義でないので 0 点 .

### 2. 条件つき確率

(a)

$$\begin{aligned}P(B|A) &= 1 - P(B^c|A) \\&= 1 - \frac{1}{8} \\&= \frac{7}{8}.\end{aligned}$$

(b)  $B^c$  と  $C^c$  は排反なので

$$\begin{aligned}P(B \cap C|A) &= 1 - P((B \cap C)^c|A) \\&= 1 - P(B^c \cup C^c|A) \\&= 1 - P(B^c|A) - P(C^c|A) \\&= 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \\&= \frac{6}{8}.\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}P(C|A \cap B) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} \\&= \frac{P(B \cap C|A)P(A)}{P(B|A)P(A)} \\&= \frac{P(B \cap C|A)}{P(B|A)} \\&= \frac{6/8}{7/8} \\&= \frac{6}{7}.\end{aligned}$$

- $P(C|A \cap B) = P(B \cap C|A)/P(B|A)$  で 10 点 .

### 3. 連続分布の期待値計算

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } 0 \leq x \leq 1 . \\ 0 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$

グラフは省略 .

( b )

$$\begin{aligned} E(X) &:= \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \, dx + \int_0^1 x \cdot 1 \, dx + \int_1^{\infty} x \cdot 0 \, dx \\ &= \int_0^1 x \, dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- $\int_0^1 x \, dx$  で 10 点 .

( c )

$$\begin{aligned} E(X^2) &:= \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 \, dx + \int_0^1 x^2 \cdot 1 \, dx + \int_1^{\infty} x^2 \cdot 0 \, dx \\ &= \int_0^1 x^2 \, dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

( d )

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

- (b)(c) の答と整合的なら OK .

( e )

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2X - 1) \\ &= 2E(X) - 1 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \\ &= 0, \\ \text{var}(Y) &= \text{var}(2X - 1) \\ &= 4 \text{var}(X) \\ &= 4 \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$