

計量分析 2：復習テスト 10

学籍番号_____氏名_____

2023 年 12 月 12 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～14 を左上でホチキス止めし、定期試験実施日（1 月 30 日の予定）にまとめて提出すること。

1. $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ を無作為標本とする。 y_i の x_i 上への定数項のない単回帰モデルは

$$\begin{aligned} y_i &= \beta x_i + u_i \\ E(u_i | x_i) &= 0 \end{aligned}$$

β の OLS 推定量を b_n , OLS 残差を e_i とする。

- (a) $\sqrt{n}(b_n - \beta)$ が次のように表現できることを示しなさい。

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) = \frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- (b) $\sqrt{n}(b_n - \beta)$ の分布が次の正規分布で近似できる理由を説明しなさい。

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{\text{var}(x_i u_i)}{E(x_i^2)^2}\right)$$

- (c) 次式を示しなさい。

$$\text{var}(x_i u_i) = E(x_i^2 u_i^2)$$

- (d) $\text{var}(x_i u_i)$ の White の推定量を与えなさい。

2. $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ を無作為標本とする．次のような y_i の x_i 上への条件つき不均一分散をもつ単回帰モデルを仮定する．

$$\begin{aligned}y_i &= \alpha + \beta x_i + u_i \\E(u_i|x_i) &= 0 \\ \text{var}(u_i|x_i) &= \sigma^2 \exp(\gamma x_i)\end{aligned}$$

- (a) 条件つき不均一分散の検定問題を定式化しなさい．

- (b) 次式を示しなさい．

$$\text{var}(u_i|x_i) = E(u_i^2|x_i)$$

- (c) H_0 の下で次式を示しなさい．

$$E(u_i^2 - \sigma^2|x_i) = 0$$

- (d) Breusch-Pagan による条件つき不均一分散の検定方法を直感的に説明しなさい．

解答例

1. (a) β の OLS 推定量は

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$y_i = \beta x_i + u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i (\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (\beta x_i^2 + x_i u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\beta \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

式変形すると

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) = \frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(b) 大数の法則より分母は

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = E(x_i^2)$$

$E(u_i | x_i) = 0 \implies E(x_i u_i) = 0$ なので中心極限定理より分子は

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i u_i \xrightarrow{d} N(0, \text{var}(x_i u_i))$$

極限において正規分布の線形変換となっているので

$$\frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\text{var}(x_i u_i)}{E(x_i^2)^2}\right)$$

この極限分布で $\sqrt{n}(b_n - \beta)$ の分布を近似する.

(c) 分散の計算公式より

$$\begin{aligned} \text{var}(x_i u_i) &= E((x_i u_i)^2) - E(x_i u_i)^2 \\ &= E(x_i^2 u_i^2) - E(x_i u_i)^2 \end{aligned}$$

繰り返し期待値の法則より第2項は

$$\begin{aligned} E(x_i u_i) &= E(E(x_i u_i | x_i)) \\ &= E(x_i E(u_i | x_i)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(d) $\text{var}(x_i u_i)$ の White の推定量は

$$\hat{\text{var}}(x_i u_i) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2$$

2. (a) 条件つき不均一分散の検定問題は

$$H_0 : \gamma = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \gamma \neq 0$$

(b) $E(u_i|x_i) = 0$ より

$$\begin{aligned} \text{var}(u_i|x_i) &:= E((u_i - E(u_i|x_i))^2|x_i) \\ &= E(u_i^2|x_i) \end{aligned}$$

(c) 前問より

$$E(u_i^2|x_i) = \sigma^2 \exp(\gamma x_i)$$

H_0 の下で

$$E(u_i^2|x_i) = \sigma^2$$

すなわち

$$E(u_i^2 - \sigma^2|x_i) = 0$$

(d) 前問より $u_i^2 - \sigma^2$ の x_i 上への回帰の回帰係数は H_0 の下で 0. (α, β) の OLS 推定量を (a, b) , OLS 残差を $e_i := y_i - a - bx_i$, H_0 の下での誤差分散の推定量を $\hat{\sigma}^2 := (1/n) \sum_{i=1}^n e_i^2$ とする. Breusch-Pagan の検定では $u_i^2 - \sigma^2$ の代わりに $e_i^2 - \hat{\sigma}^2$ を x_i に回帰して回帰係数が 0 かどうかを検定する.