経済統計：期末試験

村澤 康友

2019 年 8 月 5 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) F 検定 (b) 古典的線形回帰モデル (c) 線形推定量 (d) 総変動（TSS）
2. （30 点）次表は自作のサイコロを 60 回振った結果である．このサイコロが公正かどうかを調べたい．

出目	1	2	3	4	5	6	計
度数	13	11	9	10	9	8	60

   （a）このサイコロで $1,\dots,6$ が出る確率を $p_1,\dots,p_6$ とする．検定問題を定式化しなさい．
   （b）適合度検定統計量は H_0 の下でどのような分布に近似的に従うか？また有意水準 5% の検定の棄却域を定めなさい．
   （c）適合度検定統計量の値を求め，有意水準 5% の検定の結果を述べなさい．
3. （50 点）家計の消費支出に占める飲食費の割合をエンゲル係数という．所得とエンゲル係数の間の負の関係をエンゲルの法則という．所得とエンゲル係数の無作為標本を $((x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n))$ とする．y_i の $\ln x_i$ 上への単回帰モデルは

$$\mathrm{E}(y_i|\ln x_i)=\alpha+\beta\ln x_i$$

   回帰分析の結果は以下の通りであった．

```
モデル 1: 最小二乗法 (OLS), 観測: 1-235
従属変数: engel
                係数        標準誤差
  ---------------------------------
  const       1.24123      0.0867002
  l_income   -0.0862701    0.0127494
```

   β の OLS 推定量を b，その標準誤差を s とする．また $b\overset{a}{\sim}\mathrm{N}\left(\beta,s^2\right)$ とみなしてよい．
   （a）b の値は幾らか？ s の値は幾らか？
   （b）β の 95 %信頼区間を求めなさい．
   （c）β の t 値を求めなさい．
   （d）エンゲルの法則の検定問題を定式化しなさい．
   （e）有意水準 5 %の検定の棄却域を定め，検定の結果を述べなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) F 統計量を用いる検定.
   (b) 誤差項 $u_1, \dots, u_n$ が無相関で分散が均一な線形回帰モデル.
   (c) 被説明変数の線形関数で表される推定量.
   (d) $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$.
2. 適合度検定
   (a)
$$H_0: \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ \vdots \\ 1/6 \end{pmatrix} \quad \text{vs} \quad H_1: \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1/6 \\ \vdots \\ 1/6 \end{pmatrix}$$
      - H_0 のみは 5 点.
   (b) 適合度検定統計量は H_0 の下で $\chi^2 \overset{a}{\sim} \chi^2(5)$. 棄却域は $[11.0705, \infty)$.
      - 分布で 5 点，棄却域で 5 点.
      - χ^2 分布の自由度なしは 2 点.
   (c) 適合度検定統計量の値は
$$\begin{aligned} \chi^2 &:= \frac{(13-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} \\ &= \frac{9+1+1+0+1+4}{10} \\ &= \frac{16}{10} \end{aligned}$$
   χ^2 値が棄却域に入らないので H_0 は棄却されない. すなわちサイコロは不公正とは言えない.
      - 統計量の値で 5 点，検定結果で 5 点.
3. 回帰分析
   (a) $b = -.0862701$，$s = .0127494$.
   (b) $b \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(\beta, s^2)$ より
$$\frac{b-\beta}{s} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$
   したがって
$$\Pr\left[-1.96 \leq \frac{b-\beta}{s} \leq 1.96\right] \approx .95$$
   ここで
$$\begin{aligned} -1.96 \leq \frac{b-\beta}{s} \leq 1.96 &\iff -1.96s \leq b-\beta \leq 1.96s \\ &\iff b-1.96s \leq \beta \leq b+1.96s \end{aligned}$$
   したがって β の 95 %信頼区間は $[-.111389, -.0611513]$.

（c）

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{b}{s} \\
&= \frac{.0862701}{.0127494} \\
&\approx -6.767
\end{aligned}
$$

（d）

$$H_0 : \beta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta < 0$$

- H_1 がなければ 0 点．

（e）棄却域は $(-\infty, -1.645]$．t 値が棄却域に入るので H_0 を棄却して H_1 を採択．すなわちエンゲルの法則は成立する．