計量経済 II：中間試験

村澤 康友

2018 年 11 月 13 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) パラメトリックな分布
   (b) 標本和
   (c) 点推定
   (d) 信頼区間
2. （30 点）分布表を用いて以下の問いに答えなさい．
   (a) $X \sim \chi^2(10)$ とする．$\Pr[X \leq a] = .1$ となる a を求めなさい．
   (b) $Y \sim \mathrm{t}(20)$ とする．$\Pr[Y \leq b] = .2$ となる b を求めなさい．
   (c) $Z \sim \mathrm{F}(30, 40)$ とする．$\Pr[Z \leq c] = .05$ となる c を求めなさい．
3. （50 点）$\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本を $(X_1, \dots, X_n)$ とする．μ, σ^2 は未知とする．
   (a) 標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 s^2 を式で定義しなさい．
   (b) $\bar{X}$ の平均と分散を求めなさい．（要証明）
   (c) $\bar{X}$ と s^2 は，それぞれどのような分布をもつか？（証明不要）
   (d) $n = 20$ として μ の 95 %信頼区間を求めなさい．
   (e) $n = 30$ として σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 有限個の母数で表せる分布.
   (b) 標本 $(X_1, \ldots, X_n)$ の標本和は $T := X_1 + \cdots + X_n$.
   (c) 母数を一意に定める推定.
   (d) ある確率で母数を含む確率的な区間.
2. 分布表の読み方
   (a) $\Pr[X \leq a] = 1 - \Pr[X > a]$ より

$$\begin{aligned}\Pr[X > a] &= 1 - \Pr[X \leq a] \\ &= 1 - .1 \\ &= .9\end{aligned}$$

   χ^2 分布表より $X \sim \chi^2(10)$ なら $a = 4.86518$.

   (b) t 分布の対称性より

$$\begin{aligned}\Pr[Y \geq -b] &= \Pr[Y \leq b] \\ &= .2\end{aligned}$$

   t 分布表より $Y \sim \mathrm{t}(20)$ なら $-b = .860$. すなわち $b = -.860$.
   - 符号のミスは 5 点.

   (c) $Z < c \Longleftrightarrow 1/Z > 1/c$ より

$$\begin{aligned}\Pr\left[\frac{1}{Z} > \frac{1}{c}\right] &= \Pr[Z < c] \\ &= .05\end{aligned}$$

   $Z \sim \mathrm{F}(30, 40)$ なら $1/Z \sim \mathrm{F}(40, 30)$ なので F 分布表より $1/c = 1.792$. すなわち $c = 1/1.792$.
3. 正規母集団
   (a)

$$\begin{aligned}\bar{X} &:= \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \\ s^2 &:= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2\end{aligned}$$

   (b) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n)}{n} \\ &= \frac{\mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n)}{n} \\ &= \frac{\mu + \cdots + \mu}{n} \\ &= \mu\end{aligned}$$

$X_1, \ldots, X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}\left(\bar{X}\right) &= \operatorname{var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\operatorname{var}(X_1 + \cdots + X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\operatorname{var}(X_1) + \cdots + \operatorname{var}(X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

- 分散の導出で独立性を明記しなければ 2 点減.

（c）

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

（d）標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim \mathrm{t}(n-1)$$

t 分布表より $n = 20$ なら

$$\Pr\left[-2.093 \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/20}} \le 2.093\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[-2.093\sqrt{\frac{s^2}{20}} \le \bar{X} - \mu \le 2.093\sqrt{\frac{s^2}{20}}\right] = .95$$

または

$$\Pr\left[\bar{X} - 2.093\sqrt{\frac{s^2}{20}} \le \mu \le \bar{X} + 2.093\sqrt{\frac{s^2}{20}}\right] = .95$$

したがって μ の 95 %信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 2.093\sqrt{\frac{s^2}{20}}, \bar{X} + 2.093\sqrt{\frac{s^2}{20}}\right]$$

（e）χ^2 分布表より $n = 30$ なら

$$\Pr\left[16.0471 \le \frac{29s^2}{\sigma^2} \le 45.7223\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{45.7223} \le \frac{\sigma^2}{29s^2} \le \frac{1}{16.0471}\right] = .95$$

または

$$\Pr\left[\frac{29s^2}{45.7223} \le \sigma^2 \le \frac{29s^2}{16.0471}\right] = .95$$

したがって σ^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{29s^2}{45.7223}, \frac{29s^2}{16.0471}\right]$$