経済統計：第 1 回中間試験

村澤 康友

2018 年 5 月 14 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，<u>結果のみの解答は 0 点とする</u>）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）標本
   （b）標本空間
   （c）離散確率変数
   （d）標準化積率
2. （30 点）ある競技のドーピング検査について，以下のことが分かっている．
   - 競技者がドーピングをする確率は 1%
   - ドーピングをした場合，検査結果が陽性になる確率は 99%
   - ドーピングをしなかった場合，検査結果が陰性になる確率は 99%

   検査結果が陽性の事象を A，実際にドーピングをした事象を B とする．検査結果が陽性のとき，実際にドーピングをした確率 $P(B|A)$ を求めたい．
   （a）「乗法定理」を用いて $P(A \cap B)$ を求めなさい．
   （b）「全確率の定理」を用いて $P(A)$ を求めなさい．
   （c）「ベイズの定理」を用いて $P(B|A)$ を求めなさい．
3. （50 点）$X \sim \mathrm{U}[0,1]$ とする．すなわち任意の x について

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$

   $Y = \sqrt{X}$ とする．
   （a）Y の cdf を求め，式とグラフで表しなさい．
   （b）Y の pdf を求め，式とグラフで表しなさい．
   （c）$\mathrm{E}(Y)$ を求めなさい．
   （d）$\mathrm{E}\left(Y^2\right)$ を求めなさい．
   （e）$\mathrm{var}(Y)$ を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 母集団のうち実際に観察される部分.
       - 「母集団」がなければ 0 点.
   (b) 試行において起こりうる結果（標本点）の集合.
       - 標本点の定義のみは 2 点.
       - 「事象」は標本空間の部分集合として定義されるので，標本空間の定義に「事象」を用いたら 0 点.
   (c) 取りうる値の集合が可算である確率変数.
       - 「離散」の定義がなければ 0 点.
       - 離散確率変数の cdf は離散でなく，cdf が連続でなくても離散確率変数とは限らないので，「離散な cdf をもつ確率変数」「連続でない cdf をもつ確率変数」は 0 点.
   (d) $\mathrm{E}\left([(X-\mu_X)/\sigma_X]^k\right)$.
       - 「標準化した確率変数の積率」でも OK.
       - 「標準化した積率」は 0 点.
2. 条件つき確率
   (a) 乗法定理より

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\ &= .99 \cdot .01 \\ &= .0099 \end{aligned}$$

       - 乗法定理で 5 点.
   (b) 全確率の定理より

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \\ &= .99 \cdot .01 + .01 \cdot .99 \\ &= .0198 \end{aligned}$$

       - 全確率の定理で 5 点.
   (c) ベイズの定理より

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{.0099}{.0198} \\ &= .5 \end{aligned}$$

       - ベイズの定理で 5 点.
3. 1 変量分布の例

（a）任意の y について

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \leq y] \\ &= \Pr\left[\sqrt{X} \leq y\right] \\ &= \Pr\left[X \leq y^2\right] \\ &= F_X\left(y^2\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ y^2 & \text{for } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{for } 1 < y \end{cases} \end{aligned}$$

グラフは省略.

- 式で 5 点，グラフで 5 点.

（b）任意の y について

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) \\ &= \begin{cases} 2y & \text{for } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \end{aligned}$$

グラフは省略.

- 式で 5 点，グラフで 5 点.

（c）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y \cdot 2y\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y \\ &= 2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

（d）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(Y^2\right) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y^2 \cdot 2y\,\mathrm{d}y \\ &= 2\int_0^1 y^3\,\mathrm{d}y \\ &= 2\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2$ で 5 点.