経済統計：第 3 回中間試験

村澤 康友

2013 年 12 月 7 日

注意： 3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）母平均
   （b）標本分散
   （c）漸近分散
   （d）信頼域
2. （30 点）サッカーの試合の得（失）点数がポアソン分布に従うならば，キックオフから最初の得点までの時間は指数分布に従う．指数分布の cdf は $x > 0$ について
   $$F(x) := 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$
   n 試合分の初得点までの時間データ $(X_1, \dots, X_n)$ から母数 λ を推定したい．ただし無得点の試合は無かったと仮定する．
   （a）指数分布の pdf を求めなさい．
   （b）$X_1, \dots, X_n$ を iid と仮定して，$(X_1, \dots, X_n)$ の同時 pdf を書きなさい．
   （c）$(X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)$ を観測したときの λ の対数尤度関数を書きなさい．それを用いて λ の ML 推定量を求めなさい．
3. （50 点）連続テレビ小説「あまちゃん」の平均視聴率は，関東で 20%，関西で 15% だそうである．関東・関西の母集団における視聴率を p_X, p_Y，視聴率調査における大きさ n_X, n_Y の無作為標本の平均視聴率（＝標本平均）を $\hat{p}_X, \hat{p}_Y$ とする．
   （a）2 項母集団 $\mathrm{Bin}(1, p_X), \mathrm{Bin}(1, p_Y)$ の平均と分散を求めなさい．
   （b）$\hat{p}_X, \hat{p}_Y$ の漸近分布を求めなさい．
   （c）$\hat{p}_X - \hat{p}_Y$ の漸近分布を求めなさい．
   （d）$p_X - p_Y$ の 95% 信頼区間を近似的に求めなさい．
   （e）$n_X = n_Y = 625$ として 95% 信頼区間を近似的に計算し，それが $p_X - p_Y = 0$ を含むかどうか調べなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 母集団分布の平均.
      - 「母集団における（ある変数の）平均」でも OK.
      - 平均（＝期待値）は分布に対して定義するので「母集団の平均」は 0 点．例えば「日本人の所得の（分布の）平均」は分かるが「日本人の平均」は意味不明.
   (b) 標本 $(X_1,\dots,X_n)$ の標本分散は
   $$s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2.$$
      - 母平均が未知の場合のみで OK．母平均が既知の場合のみは 1 点減.
   (c) 漸近分布の分散.
   (d) ある確率で母数を含む確率的な領域.
2. ML 推定
   (a) 指数分布の pdf は，$x>0$ について
   $$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) \\ &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}. \end{aligned}$$
      - $f(x)=F'(x)$ で 5 点.
   (b) $(X_1,\dots,X_n)$ の同時 pdf は，任意の $x_1,\dots,x_n>0$ について
   $$\begin{aligned} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) &= f(x_1)\cdots f(x_n) \\ &= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x_1}\cdots\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x_n} \\ &= \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda(x_1+\cdots+x_n)}. \end{aligned}$$
      - 前問の pdf と整合的なら OK.
   (c) 対数尤度関数は
   $$\ell(\lambda;x_1,\dots,x_n) = n\ln\lambda - \lambda(x_1+\cdots+x_n).$$
   1 階の条件は
   $$\frac{n}{\lambda^*} - (x_1+\cdots+x_n) = 0.$$
   これを解くと
   $$\lambda^* = \frac{n}{x_1+\cdots+x_n}.$$
   したがって λ の ML 推定量は
   $$\hat{\lambda} = \frac{n}{X_1+\cdots+X_n}.$$
      - 対数尤度関数で 5 点，ML 推定量で 5 点.
      - 前問の同時 pdf と整合的なら OK.
3. 母比率の差の信頼区間

(a) $\mathrm{Bin}(1, p_X)$ の平均は

$$1 \cdot p_X + 0 \cdot (1 - p_X) = p_X,$$

分散は

$$\begin{aligned}(1-p_X)^2 \cdot p_X + (0-p_X)^2 \cdot (1-p_X) &= (1-p_X)^2 p_X + p_X^2(1-p_X) \\ &= p_X(1-p_X).\end{aligned}$$

$\mathrm{Bin}(1, p_Y)$ についても同様.

- 平均で 5 点, 分散で 5 点.
- 母平均・母分散でなければダメ.「求めさない」と「推定しなさい」は違う.

(b)

$$\begin{aligned}\hat{p}_X &\overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(p_X, \frac{p_X(1-p_X)}{n_X}\right), \\ \hat{p}_Y &\overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(p_Y, \frac{p_Y(1-p_Y)}{n_Y}\right).\end{aligned}$$

(c)

$$\hat{p}_X - \hat{p}_Y \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(p_X - p_Y, \frac{p_X(1-p_X)}{n_X} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{n_Y}\right).$$

- 前問の解答と整合的なら OK.

(d)

$$\frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y - (p_X - p_Y)}{\sqrt{p_X(1-p_X)/n_X + p_Y(1-p_Y)/n_Y}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1),$$

または

$$\frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y - (p_X - p_Y)}{\sqrt{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)/n_X + \hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)/n_Y}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1).$$

したがって

$$\Pr\left[-1.96 \le \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y - (p_X - p_Y)}{\sqrt{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)/n_X + \hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)/n_Y}} \le 1.96\right] \approx .95.$$

95% 信頼区間の上限・下限は

$$\hat{p}_X - \hat{p}_Y \pm 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y}}.$$

- 標準化で 2 点.
- 標準化統計量の 95 %区間までで 5 点.

(e)

$$\begin{aligned}\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} &= \frac{.2(1-.2)}{625} \\ &= \frac{.16}{625}, \\ \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y} &= \frac{.15(1-.15)}{625} \\ &= \frac{.1275}{625}.\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y} = \frac{.2875}{625},$$

すなわち

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y}} &\approx \frac{.5362}{25} \\ &= .02145.\end{aligned}$$

95% 信頼区間は

$$[.05 - 1.96 \cdot .02145, .05 + 1.96 \cdot .02145] \approx [.008, 092].$$

したがって 0 を含まない.

- 代入する数値を明記していれば OK.

※答案は返却します. 採点や成績に関する質問にも応じます. **オフィスアワーの時間(月昼休み・水 *3* 限)に**研究室まで来てください.