第 15 回　統計量の標本分布（9.2.2–9.4）

村澤 康友

2022 年 11 月 25 日

今日のポイント

1. 無作為標本 $(X_1,\dots,X_n)$ の標本和・標本平均・標本分散の分布を求める．
2. 標本和 $T := X_1 + \dots + X_n$ の平均は $n\,\mathrm{E}(X_i)$，分散は $n\,\mathrm{var}(X_i)$．母集団分布が再生的なら標本和も同じ型の分布．
3. 標本平均 $\bar{X} := (X_1 + \dots + X_n)/n$ の平均は $\mathrm{E}(X_i)$，分散は $\mathrm{var}(X_i)/n$．母集団分布が再生的なら標本和の分布から標本平均の分布も求まる．
4. 標本分散 $s^2 := \sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2/(n-1)$ の平均は $\mathrm{var}(X_i)$．
5. 有限母集団から非復元抽出した無作為標本の標本平均の分散は修正が必要．

目次

1 標本和（p. 186）

1.1 平均と分散

平均 μ，分散 σ^2 の母集団分布から抽出した無作為標本を $(X_1,\dots,X_n)$ とする．

定義 1. $(X_1,\dots,X_n)$ の**標本和**は

$$T := X_1 + \dots + X_n$$

定理 1.

$$\mathrm{E}(T) = n\mu$$

証明. 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(T) &= \mathrm{E}(X_1 + \dots + X_n)\\ &= \mathrm{E}(X_1) + \dots + \mathrm{E}(X_n)\\ &= n\mu\end{aligned}$$

□

定理 2. 復元抽出または無限母集団なら

$$\mathrm{var}(T) = n\sigma^2$$

証明. $X_1,\dots,X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(T) &= \mathrm{var}(X_1 + \dots + X_n)\\ &= \mathrm{var}(X_1) + \dots + \mathrm{var}(X_n)\\ &= n\sigma^2\end{aligned}$$

□

1.2 分布

母集団分布が再生的なら標本和の分布は簡単に求まる．

定理 3. $(X_1,\dots,X_n)$ が $\mathrm{Bin}(1,p)$ からの無作為標本なら

$$T \sim \mathrm{Bin}(n,p)$$

証明. $X_1,\dots,X_n \sim \mathrm{Bin}(1,p)$ かつ iid より，T は成功確率 p の独立かつ同一な n 回のベルヌーイ試行における成功回数. □

注 1. n が大きいと累積確率の計算が面倒.

例 1. ある政策（例えば女性・女系天皇）に賛成する有権者の割合を p とする．母集団分布は $\mathrm{Bin}(1,p)$. n 人に調査したときの賛成の数を T とすると $T \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

定理 4. $(X_1,\dots,X_n)$ が $\mathrm{Poi}(\lambda)$ からの無作為標本なら

$$T \sim \mathrm{Poi}(n\lambda)$$

証明. ポアソン分布の再生性より $X_1+\cdots+X_n$ もポアソン分布. □

注 2. 再生性は mgf を用いて証明できる.

定理 5. $(X_1,\dots,X_n)$ が $\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ からの無作為標本なら

$$T \sim \mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

証明. 正規分布の再生性より $X_1+\cdots+X_n$ も正規分布. □

2 標本平均（p. 183）

2.1 平均と分散

定義 2. $(X_1,\dots,X_n)$ の**標本平均**は

$$\bar{X} := \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$$

定理 6.

$$\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) = \mu$$

証明. 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1+\cdots+X_n)}{n} \\
&= \frac{n\mu}{n} \\
&= \mu
\end{aligned}$$

□

定理 7. 復元抽出または無限母集団なら

$$\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$$

証明. $X_1,\dots,X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1+\cdots+X_n)}{n^2} \\
&= \frac{n\sigma^2}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

□

2.2 分布

標本平均の分布は標本和の分布から求まる．例えば cdf は

$$\begin{aligned}
F_{\bar{X}}(x) &:= \Pr\left[\bar{X} \le x\right] \\
&= \Pr[T \le nx] \\
&= F_T(nx)
\end{aligned}$$

3 標本分散

3.1 母平均が既知の場合

μ は既知とする.

定義 3. $(X_1,\dots,X_n)$ の**標本分散**は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$$

定義 4. 標本分散の正の平方根を**標本標準偏差**という.

定理 8.

$$\mathrm{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2$$

証明. 期待値の線形性より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left((X_i-\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

□

3.2 母平均が未知の場合（p. 184）

μ は未知とする.

定義 5. $(X_1,\dots,X_n)$ の**標本分散**は

$$
s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2
$$

定理 9.

$$
\mathrm{E}\left(s^2\right) = \sigma^2
$$

証明. 次式を示せばよい.

$$
\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right) = (n-1)\sigma^2
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-\left(\bar{X}-\mu\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)\left(\bar{X}-\mu\right)+\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\left(\bar{X}-\mu\right)+n\left(\bar{X}-\mu\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n\left(\bar{X}-\mu\right)^2
\end{aligned}
$$

期待値をとると

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left((X_i-\mu)^2\right)-n\,\mathrm{E}\left(\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i)-n\,\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) \\
&= n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n} \\
&= n\sigma^2-\sigma^2 \\
&= (n-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

□

4 有限母集団修正（p. 190）

有限母集団 $(x_1,\dots,x_N)$ から非復元抽出した無作為標本を $(X_1,\dots,X_n)$ とする.

定理 10.

$$
\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}
$$

証明. 省略. □

定義 6. $(N-n)/(N-1)$ を**有限母集団修正**という.

注 3. N が大きければ 1 に近づく.

5 今日のキーワード

標本和, 標本平均, 標本分散（母平均が既知）, 標本分散（母平均が未知）, 標本標準偏差, 有限母集団修正

6 次回までの準備

復習 教科書第 9 章 2.2–4 節, 復習テスト 15

予習 教科書第 10 章 1–4 節