

計量分析 2：復習テスト 11

学籍番号_____氏名_____

2023 年 12 月 19 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～14 を左上でホチキス止めし、定期試験実施日（1 月 30 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 確率ベクトル (Y_1, Y_2, X) は次の連立方程式を満たす。

$$Y_1 = -\gamma Y_2 + U_1$$

$$Y_2 = \beta X + U_2$$

$$E\left(\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} | X\right) = \mathbf{0}$$

$$\text{var}\left(\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} | X\right) = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{bmatrix}$$

第 1 式の OLS 推定を考える。

- (a) $\text{cov}(Y_2, U_1)$ を求めなさい。

- (b) $\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = 0$ なら $\text{cov}(Y_2, U_1)$ はどうなるか？

2. $((y_1, x_1, z_1), \dots, (y_n, x_n, z_n))$ を無作為標本とする. y_i の x_i 上への定数項のない線形モデルは

$$y_i = \beta x_i + u_i$$
$$E(u_i) = 0$$

β の OLS 推定量を b_n とする.

(a) 次の命題を示しなさい.

$$E(x_i u_i) = 0 \iff \text{cov}(x_i, u_i) = 0$$

(b) $\text{cov}(x_i, u_i) \neq 0$ なら b_n が β の一致推定量でないことを示しなさい.

(c) 操作変数の定義を書きなさい.

(d) β の IV 推定量 $b_{\text{IV},n}$ を定義しなさい.

(e) $b_{\text{IV},n}$ が β の一致推定量であることを示しなさい.

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_2, U_1) &= \operatorname{cov}(\beta X + U_2, U_1) \\ &= \operatorname{cov}(\beta X, U_1) + \operatorname{cov}(U_2, U_1) \\ &= \beta \operatorname{cov}(X, U_1) + \sigma_{2,1}\end{aligned}$$

共分散の計算公式より

$$\operatorname{cov}(X, U_1) = E(XU_1) - E(X)E(U_1)$$

繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}E(XU_1) &= E(E(XU_1|X)) \\ &= E(X E(U_1|X)) \\ &= 0 \\ E(U_1) &= E(E(U_1|X)) \\ &= 0\end{aligned}$$

したがって $\operatorname{cov}(Y_2, U_1) = \sigma_{2,1}$.

(b) 前問の結果に $\sigma_{2,1} = 0$ を代入すると $\operatorname{cov}(Y_2, U_1) = 0$.

2. (a) 共分散の計算公式と $E(u_i) = 0$ より

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(x_i, u_i) &= E(x_i u_i) - E(x_i)E(u_i) \\ &= E(x_i u_i)\end{aligned}$$

したがって $E(x_i u_i) = 0 \iff \operatorname{cov}(x_i, u_i) = 0$.

(b) OLS 推定量は

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$y_i = \beta x_i + u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i(\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta + \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2}\end{aligned}$$

大数の法則より

$$\begin{aligned}\operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 &= E(x_i^2) \\ \operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i u_i &= E(x_i u_i)\end{aligned}$$

スルツキーの定理より

$$\operatorname{plim}_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta + \frac{E(x_i u_i)}{E(x_i^2)}$$

前問より $\operatorname{cov}(x_i, u_i) \neq 0$ なら $E(x_i u_i) \neq 0$ なので第2項 $\neq 0$.

(c) $E(z_i x_i) \neq 0$ で $E(z_i u_i) = 0$ なら z_i は β の推定の操作変数という.

(d)

$$b_{IV,n} := \frac{\sum_{i=1}^n z_i y_i}{\sum_{i=1}^n z_i x_i}$$

(e) $b_{IV,n}$ に $y_i = \beta x_i + u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned} b_{IV,n} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i (\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n z_i x_i} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n z_i u_i}{\sum_{i=1}^n z_i x_i} \\ &= \beta + \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n z_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n z_i x_i} \end{aligned}$$

大数の法則より

$$\begin{aligned} \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i x_i &= E(z_i x_i) \\ \text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i u_i &= E(z_i u_i) \end{aligned}$$

スルツキーの定理より

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} b_{IV,n} = \beta + \frac{E(z_i u_i)}{E(z_i x_i)}$$

IV の定義より $E(z_i u_i) = 0$ なので第 2 項 = 0.