中級統計学：復習テスト 17

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 11 月 25 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 14〜20 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 3 回中間試験実施日（12 月 10 日の予定）に提出すること．

1. $\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma^2\right), \mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma^2\right)$ から独立に抽出した無作為標本を $(X_1, \ldots, X_m), (Y_1, \ldots, Y_n)$ とする．
   (a) 標本平均 $\bar{X}, \bar{Y}$ の分布をそれぞれ求めなさい．

   (b) $\bar{X} - \bar{Y}$ の分布を求めなさい．

   (c) プールした標本分散 s^2 を式で定義しなさい．

   (d) $(m+n-2)s^2/\sigma^2$ はどのような分布をもつか？

   (e) $\left[\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)\right] / \sqrt{s^2(1/m + 1/n)}$ はどのような分布をもつか？

2. $\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ から独立に抽出した無作為標本を $(X_1, \ldots, X_m), (Y_1, \ldots, Y_n)$ とする．
（a）標本分散 s_X^2, s_Y^2 をそれぞれ式で定義しなさい（μ_X, μ_Y は未知）．

（b）$(m-1)s_X^2/\sigma_X^2, (n-1)s_Y^2/\sigma_Y^2$ はそれぞれどのような分布をもつか？

（c）$(s_X^2/s_Y^2)/(\sigma_X^2/\sigma_Y^2)$ はどのような分布をもつか？

3. $\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma^2\right), \mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma^2\right)$ から独立に抽出した大きさ $10, 15$ の無作為標本の標本分散をそれぞれ s_X^2, s_Y^2 とする．$s_X^2/s_Y^2 > 3$ の確率を F 分布表を利用して求めなさい．

解答例

1. (a)

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu_X, \frac{\sigma^2}{m}\right)$$
$$\bar{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(b) $\bar{X}$ と $\bar{Y}$ は独立なので

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(c)

$$s^2 := \frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\left(Y_j - \bar{Y}\right)^2\right]$$

(d)

$$\frac{(m+n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$$

(e)

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \sim \mathrm{t}(m+n-2)$$

2. (a)

$$s_X^2 := \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$
$$s_Y^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$$

(b)

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$
$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(c)

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

3.

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\frac{s_X^2}{s_Y^2} > 3\right] &= \Pr\left[\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma^2/\sigma^2} > \frac{3}{\sigma^2/\sigma^2}\right] \\
&= \Pr[\mathrm{F}(9, 14) > 3] \\
&\approx .03
\end{aligned}$$