

# 中級統計学：第2回中間試験

村澤 康友

2024年11月12日

**注意：**3問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいと与えるが、結果のみの解答は0点とする）。教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）。

- (20点) 以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい。
  - 結果が2通りしかない試行
  - 確率密度関数が  $\phi(z) := (1/\sqrt{2\pi}) e^{-z^2/2}$  である分布
  - $f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$  と定義される  $f_X(\cdot)$
  - 独立な確率変数の和の分布を求めること
- (30点)  $Z \sim N(0,1)$ ,  $X := 2Z - 3$  とする。
  - 標準正規分布表を利用して  $\Pr[-1 < Z \leq 2]$  を求めなさい。
  - $X$  はどのような分布に従うか？
  - 標準正規分布表を利用して  $\Pr[0 < X \leq 2]$  を求めなさい。
- (50点) 2次元確率ベクトル  $(X,Y)$  は以下の同時分布に従う。

$X \backslash Y$	0	1
0	2/7	2/7
1	1/7	2/7

- $X, Y$  の周辺分布をそれぞれ求めなさい。
- $X, Y$  の平均と分散をそれぞれ求めなさい。
- $XY$  の平均と分散を求めなさい。
- $X$  と  $Y$  の共分散と相関係数を求めなさい。
- $2X - Y$  の平均と分散を求めなさい。

解答例

1. 確率・統計の基本用語

(a) ベルヌーイ試行

(b) 標準正規分布

- 「正規分布」のみは1点.

(c) 周辺確率密度関数

- 「周辺分布」は1点.

(d) 畳み込み

2. 正規分布の確率計算

(a)  $Z \sim N(0, 1)$  より

$$\begin{aligned}\Pr[-1 < Z \leq 2] &= \Pr[Z \leq 2] - \Pr[Z \leq -1] \\ &= (1 - \Pr[Z > 2]) - \Pr[Z \geq 1] \\ &= 1 - Q(2) - Q(1) \\ &= 1 - .022750 - .15866 \\ &= .81859\end{aligned}$$

- $\Pr[Z \leq 2] - \Pr[Z \leq -1]$  で2点.  $\Pr[Z > -1] - \Pr[Z > 2]$  も可.
- 負や1を超える確率は0点. 以下同様.

(b)

$$\begin{aligned}E(X) &= E(2Z - 3) \\ &= 2E(Z) - 3 \\ &= -3 \\ \text{var}(X) &= \text{var}(2Z - 3) \\ &= 4\text{var}(Z) \\ &= 4\end{aligned}$$

正規分布の線形変換は正規分布なので  $X \sim N(-3, 4)$ .

- 平均4点, 分散4点, 正規分布2点

(c)  $X \sim N(-3, 4)$  より

$$\begin{aligned}\Pr[0 < X \leq 2] &= \Pr\left[\frac{0 - (-3)}{2} < \frac{X - (-3)}{2} \leq \frac{2 - (-3)}{2}\right] \\ &= \Pr\left[\frac{3}{2} < Z \leq \frac{5}{2}\right] \\ &= \Pr\left[Z \leq \frac{5}{2}\right] - \Pr\left[Z \leq \frac{3}{2}\right] \\ &= \left(1 - \Pr\left[Z > \frac{5}{2}\right]\right) - \left(1 - \Pr\left[Z > \frac{3}{2}\right]\right) \\ &= Q(1.5) - Q(2.5) \\ &= .066807 - .0062097 \\ &= .0605973\end{aligned}$$

- $\Pr[3/2 < Z \leq 5/2]$  で2点.

- $\Pr[Z \leq 5/2] - \Pr[Z \leq 3/2]$  で 4 点,  $\Pr[Z > 3/2] - \Pr[Z > 5/2]$  も可.

### 3. 2 変量離散分布

(a)

$$X = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 4/7 \\ 1 & \text{with pr. } 3/7 \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 3/7 \\ 1 & \text{with pr. } 4/7 \end{cases}$$

(b)  $X$  の平均と分散は

$$\begin{aligned} E(X) &:= 0 \cdot \frac{4}{7} + 1 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \\ E(X^2) &:= 0^2 \cdot \frac{4}{7} + 1^2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \\ \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{3}{7} - \left(\frac{3}{7}\right)^2 \\ &= \frac{12}{49} \end{aligned}$$

$Y$  の平均と分散は

$$\begin{aligned} E(Y) &:= 0 \cdot \frac{3}{7} + 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \\ E(Y^2) &:= 0^2 \cdot \frac{3}{7} + 1^2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \\ \text{var}(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= \frac{4}{7} - \left(\frac{4}{7}\right)^2 \\ &= \frac{12}{49} \end{aligned}$$

- 平均各 2 点, 分散各 3 点.
- 分散の計算公式で各 1 点.

(c)  $XY$  の分布は

$$XY = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 5/7 \\ 1 & \text{with pr. } 2/7 \end{cases}$$

平均と分散は

$$\begin{aligned} E(XY) &:= 0 \cdot \frac{5}{7} + 1 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \\ E((XY)^2) &:= 0^2 \cdot \frac{5}{7} + 1^2 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \\ \text{var}(XY) &= E((XY)^2) - E(XY)^2 \\ &= \frac{2}{7} - \left(\frac{2}{7}\right)^2 \\ &= \frac{10}{49} \end{aligned}$$

- 平均 5 点, 分散 5 点.
- 分散の計算公式で 2 点.

(d) 共分散は

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= \frac{2}{7} - \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{49}\end{aligned}$$

相関係数は

$$\begin{aligned}\operatorname{corr}(X, Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Y)}} \\ &= \frac{2/49}{12/49} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

- 共分散 5 点, 相関係数 5 点.
- 共分散と相関係数の計算公式で各 1 点.

(e)

$$\begin{aligned}E(2X - Y) &= 2E(X) - E(Y) \\ &= 2 \cdot \frac{3}{7} - \frac{4}{7} \\ &= \frac{2}{7} \\ \operatorname{var}(2X - Y) &= 4\operatorname{var}(X) - 4\operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{var}(Y) \\ &= 4 \cdot \frac{12}{49} - 4 \cdot \frac{2}{49} + \frac{12}{49} \\ &= \frac{52}{49}\end{aligned}$$

- 平均 5 点, 分散 5 点.
- $E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y)$  で 2 点.
- $\operatorname{var}(2X - Y) = 4\operatorname{var}(X) - 4\operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{var}(Y)$  で 2 点.

(別解)  $2X - Y$  の分布は

$$2X - Y = \begin{cases} -1 & \text{with pr. } 2/7 \\ 0 & \text{with pr. } 2/7 \\ 1 & \text{with pr. } 1/7 \\ 2 & \text{with pr. } 2/7 \end{cases}$$

この平均と分散を (c) と同様に計算してもよい.