第 3 回　定常過程（4.2.1, 7.1.1–7.1.2, A.2）

村澤 康友

2022 年 10 月 11 日

今日のポイント

1. 任意の時点 $(t_1,\dots,t_n)$ と時点差 s について $F_{Y_{t_1},\dots,Y_{t_n}}(.) = F_{Y_{t_1+s},\dots,Y_{t_n+s}}(.)$ なら $\{Y_t\}$ は（強）定常という．$\bar{Y}_T$ が Y_1 と $T \to \infty$ で漸近的に独立なら $\{Y_t\}$ はエルゴード的という．$\{Y_t\}$ が定常・エルゴード的で $\mathrm{E}(Y_1)$ が存在するなら時間方向の標本平均 $\bar{Y}_T$ で $\mathrm{E}(Y_1)$ を一致推定できる．
2. 任意の時点 t と時点差 s について $\mathrm{E}(Y_t)$ と $\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ が t に依存しないなら $\{Y_t\}$ は共分散（弱）定常という．$\gamma(s) := \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ を自己共分散関数，$\rho(s) := \mathrm{corr}(Y_t, Y_{t-s})$ を自己相関関数（ACF）という．ある $s \neq 0$ について $\rho(s) \neq 0$ であることを系列相関という．平均 0 で系列相関のない共分散定常過程をホワイト・ノイズという．
3. 平均 μ，自己共分散関数 $\gamma(.)$ の共分散定常過程の標本平均の平均は μ，分散は $(1/T)\sum_{s=-(T-1)}^{T-1}[(T-|s|)/T]\gamma(s)$.
4. $\{Y_t\}$ の標本自己共分散関数は $\hat{\gamma}_T(s) := (1/T)\sum_{t=s+1}^{T}\left(Y_t - \bar{Y}_T\right)\left(Y_{t-s} - \bar{Y}_T\right)$, 標本自己相関関数は $\hat{\rho}_T(s) := \hat{\gamma}_T(s)/\hat{\gamma}_T(0)$. 標本自己相関関数の棒グラフをコレログラムという．$\{Y_t\}$ が iid で分散が有限なら $s \geq 1$ について $\hat{\rho}_T(s) \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0, 1/T)$.

目次

1　定常性

1.1　（強）定常性

確率変数列 $\{Y_t\}$ の実現値を $(y_1,\dots,y_T)$ とする．y_T から Y_{T+1} を予測するには以下の 2 つの条件が必要．

1. (Y_t, Y_{t+1}) の同時分布は時間を通じて不変．
2. $(y_1,\dots,y_T)$ から (Y_t, Y_{t+1}) の同時分布を推定できる．

定義 1. 任意の時点 $(t_1, \dots, t_n)$ と時点差 s について $F_{Y_{t_1},\dots,Y_{t_n}}(.) = F_{Y_{t_1+s},\dots,Y_{t_n+s}}(.)$ なら $\{Y_t\}$ は**（強）定常**という．

注 1. すなわち $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ の同時分布は時間を通じて不変．

1.2 エルゴード性

$\{Y_t\}$ を定常過程とし，$(Y_1, \dots, Y_T)$ の標本平均を $\bar{Y}_T$ とする．すなわち

$$\bar{Y}_T := \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t$$

定義 2. $\bar{Y}_T$ が Y_1 と $T \to \infty$ で漸近的に独立なら $\{Y_t\}$ は**エルゴード的**という．

定理 1 (エルゴード定理)**.** $\{Y_t\}$ が定常・エルゴード的で $\mathrm{E}(Y_1)$ が存在するなら

$$\Pr\left[\lim_{T\to\infty} \bar{Y}_T = \mathrm{E}(Y_1)\right] = 1$$

証明. 省略（大学院レベル）. □

注 2. 確率 1 で収束 $\Longrightarrow$ 確率収束．したがって時間方向の標本平均 $\bar{Y}_T$ で $\mathrm{E}(Y_1)$ を一致推定できる．

1.3 共分散（弱）定常性（p. 125）

定義 3. 任意の時点 t と時点差 s について $\mathrm{E}(Y_t)$ と $\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ が t に依存しないなら $\{Y_t\}$ は**共分散（弱）定常**という．

注 3. 定常でも（共）分散が存在するとは限らない．分散が存在すれば，定常 $\Longrightarrow$ 共分散定常．

1.4 正規（ガウス）性

定義 4. 任意の時点 $(t_1, \dots, t_n)$ について $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ が同時正規分布にしたがうなら $\{Y_t\}$ は**正規（ガウス）過程**という．

注 4. 正規過程なら定常 $\Longleftrightarrow$ 共分散定常．

2 共分散定常過程

2.1 自己共分散（p. 125）

$\{Y_t\}$ を共分散定常過程とする．

定義 5. $\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ を $\{Y_t\}$ の s **次の自己共分散**という．

定義 6. $\{Y_t\}$ の**自己共分散関数**は，任意の時点差 s について

$$\gamma(s) := \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})$$

定理 2. 任意の時点差 s について

$$\gamma(-s) = \gamma(s)$$

証明. $\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ は時点 t に依存しないので

$$\begin{aligned}\gamma(-s) &:= \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t+s}) \\ &= \mathrm{cov}(Y_{t+s}, Y_t) \\ &= \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s}) \\ &= \gamma(s)\end{aligned}$$

□

注 5. したがって $s \geq 0$ のみ考えればよい．

2.2 自己相関（p. 126）

定義 7. $\mathrm{corr}(Y_t, Y_{t-s})$ を $\{Y_t\}$ の s **次の自己相関係数**という．

定義 8. $\{Y_t\}$ の**自己相関関数**（*Autocorrelation function, ACF*）は，任意の時点差 s について

$$\rho(s) := \mathrm{corr}(Y_t, Y_{t-s})$$

定理 3. 任意の時点差 s について

$$\rho(s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}$$

証明. $\mathrm{var}(Y_t)$ は時点 t に依存しないので

$$\begin{aligned}\rho(s) &:= \mathrm{corr}(Y_t, Y_{t-s}) \\ &= \frac{\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})}{\sqrt{\mathrm{var}(Y_t)}\sqrt{\mathrm{var}(Y_{t-s})}} \\ &= \frac{\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})}{\mathrm{var}(Y_t)} \\ &= \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}\end{aligned}$$

□

定理 4. 任意の時点差 s について

$$\rho(-s) = \rho(s)$$

証明. 前 2 定理より

$$\begin{aligned}\rho(-s) &= \frac{\gamma(-s)}{\gamma(0)} \\ &= \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)} \\ &= \rho(s)\end{aligned}$$

□

2.3 系列相関とホワイト・ノイズ（p. 72, p. 125）

定義 9. ある $s \neq 0$ について $\rho(s) \neq 0$ であることを**系列相関**という.

定義 10. 平均 0 で系列相関のない共分散定常過程を**ホワイト・ノイズ**という.

注 6. 分散が σ^2 なら $\mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ と書く.

2.4 偏自己相関（p. 126）

Y_t の $(Y_{t-1},\dots,Y_{t-s})$ 上への重回帰モデルは

$$\mathrm{E}(Y_t|Y_{t-1},\dots,Y_{t-s}) = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_s Y_{t-s}$$

偏回帰係数 β_s は，$Y_{t-1},\dots,Y_{t-s+1}$ を通じた間接的な影響を取り除いた Y_{t-s} の Y_t への直接的な限界効果を表す．β_s は残差回帰で得られる．すなわち Y_t の $(Y_{t-1},\dots,Y_{t-s+1})$ 上への回帰残差を Y_{t-s} の $(Y_{t-1},\dots,Y_{t-s+1})$ 上への回帰残差に回帰すればよい.

定義 11. $Y_{t-1},\dots,Y_{t-s+1}$ を通じた間接的な影響を取り除いた Y_t と Y_{t-s} の直接的な相関係数を $\{Y_t\}$ の s **次の偏自己相関係数**という.

注 7. Y_t の $(Y_{t-1},\dots,Y_{t-s+1})$ 上への回帰残差と Y_{t-s} の $(Y_{t-1},\dots,Y_{t-s+1})$ 上への回帰残差の相関係数として得られる.

定義 12. 任意の時点差 s に対して s 次の偏自己相関係数を与える関数を**偏自己相関関数**（*partial autocorrelation function, PACF*）という.

3 標本平均

3.1 有限標本特性（p. 196）

$\{Y_t\}$ を平均 μ，自己共分散関数 $\gamma(.)$ の共分散定常過程とし，$(Y_1,\dots,Y_T)$ の標本平均を $\bar{Y}_T$ とする.

定理 5.

$$\mathrm{E}\left(\bar{Y}_T\right) = \mu$$

証明.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\bar{Y}_T\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_t\right) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{E}(Y_t) \\ &= \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mu \\ &= \mu\end{aligned}$$

□

補題 1.

$$\mathrm{var}(Y_1 + \dots + Y_T) = \sum_{s=-(T-1)}^{T-1}(T-|s|)\gamma(s)$$

証明.

$$\begin{aligned}&\mathrm{var}(Y_1 + \dots + Y_T) \\ &= \mathrm{var}(Y_1) + \mathrm{cov}(Y_1, Y_2) + \cdots \\ &\quad + \mathrm{cov}(Y_T, Y_{T-1}) + \mathrm{var}(Y_T) \\ &= T\gamma(0) + (T-1)(\gamma(1) + \gamma(-1)) + \cdots \\ &\quad + (\gamma(T-1) + \gamma(-(T-1))) \\ &= \sum_{s=-(T-1)}^{T-1}(T-|s|)\gamma(s)\end{aligned}$$

□

定理 6.

$$\mathrm{var}\left(\bar{Y}_T\right) = \frac{1}{T}\sum_{s=-(T-1)}^{T-1}\frac{T-|s|}{T}\gamma(s)$$

証明.

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left(\bar{Y}_T\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_T}{T}\right) \\ &= \frac{\mathrm{var}(Y_1 + \dots + Y_T)}{T^2}\end{aligned}$$

補題の結果を分子に代入すればよい. □

注 8. $\gamma(-s) = \gamma(s)$ より

$$\mathrm{var}\left(\bar{Y}_T\right) = \frac{1}{T}\left(\gamma(0) + 2\sum_{s=1}^{T-1}\frac{T-s}{T}\gamma(s)\right)$$

系 1. $\{Y_t\} \sim \mathrm{WN}\left(\sigma^2\right)$ なら

$$\operatorname{var}\left(\bar{Y}_T\right) = \frac{\sigma^2}{T}$$

定理 7. $\{Y_t\}$ が正規過程なら

$$\bar{Y}_T \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{1}{T}\sum_{s=-(T-1)}^{T-1}\frac{T-|s|}{T}\gamma(s)\right)$$

証明. 正規分布の線形変換は正規分布. □

3.2　漸近特性（p. 196）

$\{Y_t\}$ を定常・エルゴード的とする.

定理 8.

$$\operatorname*{plim}_{T\to\infty}\bar{Y}_T = \mu$$

証明. エルゴード定理の系として得られる. □

補題 2.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\operatorname{var}(Y_1+\cdots+Y_T)}{T} = \sum_{s=-\infty}^{\infty}\gamma(s)$$

証明. 前補題より

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\frac{\operatorname{var}(Y_1+\cdots+Y_T)}{T} \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{s=-(T-1)}^{T-1}(T-|s|)\gamma(s) \\
&= \lim_{T\to\infty}\sum_{s=-(T-1)}^{T-1}\frac{T-|s|}{T}\gamma(s) \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty}\gamma(s)
\end{aligned}$$

□

注 9. したがって

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\operatorname{var}\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}(Y_t-\mu)\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\operatorname{var}\left(\sum_{t=1}^{T}(Y_t-\mu)\right) \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{\operatorname{var}((Y_1-\mu)+\cdots+(Y_T-\mu))}{T} \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{\operatorname{var}(Y_1+\cdots+Y_T)}{T} \\
&= \sum_{s=-\infty}^{\infty}\gamma(s)
\end{aligned}$$

定理 9 (中心極限定理)**.** $\sum_{s=-\infty}^{\infty}\gamma(s) < \infty$ なら（若干の追加的な条件の下で）

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}(Y_t-\mu) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \sum_{s=-\infty}^{\infty}\gamma(s)\right)$$

証明. 省略（大学院レベル）. □

注 10. したがって

$$\bar{Y}_T \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(\mu, \frac{1}{T}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\gamma(s)\right)$$

または

$$\bar{Y}_T \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(\mu, \frac{1}{T}\sum_{s=-(T-1)}^{T-1}\frac{T-|s|}{T}\gamma(s)\right)$$

4　コレログラム

4.1　標本自己共分散

定義 13. $\{Y_t\}$ の**標本自己共分散関数**は，任意の時点差 s について

$$\hat{\gamma}_T(s) := \frac{1}{T}\sum_{t=s+1}^{T}\left(Y_t-\bar{Y}_T\right)\left(Y_{t-s}-\bar{Y}_T\right)$$

注 11. $T-s$ や $T-s-1$ でなく T で割るのが普通.

4.2　標本自己相関（p. 126）

定義 14. $\{Y_t\}$ の**標本自己相関関数**は，任意の時点差 s について

$$\hat{\rho}_T(s) := \frac{\hat{\gamma}_T(s)}{\hat{\gamma}_T(0)}$$

定義 15. 標本自己相関関数の棒グラフを**コレログラム**という.

補題 3. $\{Y_t\}$ が iid で平均が既知かつ分散が有限なら $s \geq 1$ について

$$\sqrt{T}\hat{\gamma}_T(s) \xrightarrow{d} \mathrm{N}\left(0, \gamma(0)^2\right)$$

証明. 平均が既知なので

$$\hat{\gamma}_T(s) := \frac{1}{T}\sum_{t=s+1}^{T}(Y_t-\mu)(Y_{t-s}-\mu)$$

$\{Y_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}((Y_t-\mu)(Y_{t-s}-\mu))\\&=\mathrm{E}(Y_t-\mu)\,\mathrm{E}(Y_{t-s}-\mu)\\&=0\\&\mathrm{var}((Y_t-\mu)(Y_{t-s}-\mu))\\&=\mathrm{E}\left((Y_t-\mu)^2(Y_{t-s}-\mu)^2\right)\\&=\mathrm{E}\left((Y_t-\mu)^2\right)\mathrm{E}\left((Y_{t-s}-\mu)^2\right)\\&=\mathrm{var}(Y_t)\,\mathrm{var}(Y_{t-s})\\&=\gamma(0)^2\end{aligned}$$

また $r\geq 1$ について

$$\begin{aligned}&\mathrm{cov}((Y_t-\mu)(Y_{t-s}-\mu),(Y_{t-r}-\mu)(Y_{t-s-r}-\mu))\\&=\mathrm{E}((Y_t-\mu)(Y_{t-s}-\mu)(Y_{t-r}-\mu)(Y_{t-s-r}-\mu))\\&=\mathrm{E}(Y_t-\mu)\,\mathrm{E}((Y_{t-s}-\mu)(Y_{t-r}-\mu))\\&\quad\mathrm{E}(Y_{t-s-r}-\mu)\\&=0\end{aligned}$$

したがって $\{(Y_t-\mu)(Y_{t-s}-\mu)\}\sim\mathrm{WN}\left(\gamma(0)^2\right)$ なので，中心極限定理より

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}(Y_t-\mu)(Y_{t-s}-\mu)\xrightarrow{d}\mathrm{N}\left(0,\gamma(0)^2\right)$$

□

注 12. 平均が未知でも成立.

定理 10. $\{Y_t\}$ が *iid* で分散が有限なら $s\geq 1$ について

$$\sqrt{T}\hat{\rho}_T(s)\xrightarrow{d}\mathrm{N}(0,1)$$

証明. 補題より

$$\sqrt{T}\frac{\hat{\gamma}_T(s)}{\gamma(0)}\xrightarrow{d}\mathrm{N}(0,1)$$

$\operatorname{plim}_{T\to\infty}\hat{\gamma}_T(0)=\gamma(0)$ より

$$\sqrt{T}\frac{\hat{\gamma}_T(s)}{\hat{\gamma}_T(0)}\xrightarrow{d}\mathrm{N}(0,1)$$

□

注 13. したがって

$$\hat{\rho}_T(s)\overset{a}{\sim}\mathrm{N}\left(0,\frac{1}{T}\right)$$

$s\geq 1$ として次の両側検定を考える.

$$H_0:\rho(s)=0\quad\text{vs}\quad H_1:\rho(s)\neq 0$$

このとき $|\hat{\rho}_T(s)|\geq 1.96/\sqrt{T}$ なら有意水準 5% で H_0 を棄却.

例 1. NYSE 総合指数の対数階差系列のコレログラム（図 1）.

5 今日のキーワード

（強）定常，エルゴード的，共分散（弱）定常，正規（ガウス）過程，自己共分散，自己共分散関数，自己相関係数，自己相関関数（ACF），系列相関，ホワイト・ノイズ，偏自己相関係数，偏自己相関関数（PACF），標本自己共分散関数，標本自己相関関数，コレログラム

6 次回までの準備

提出 宿題 3

復習 教科書第 4 章 2.1 節，第 7 章 1.1–1.2 節，補論 A.2 節，復習テスト 3

予習 教科書第 7 章 2.1 節

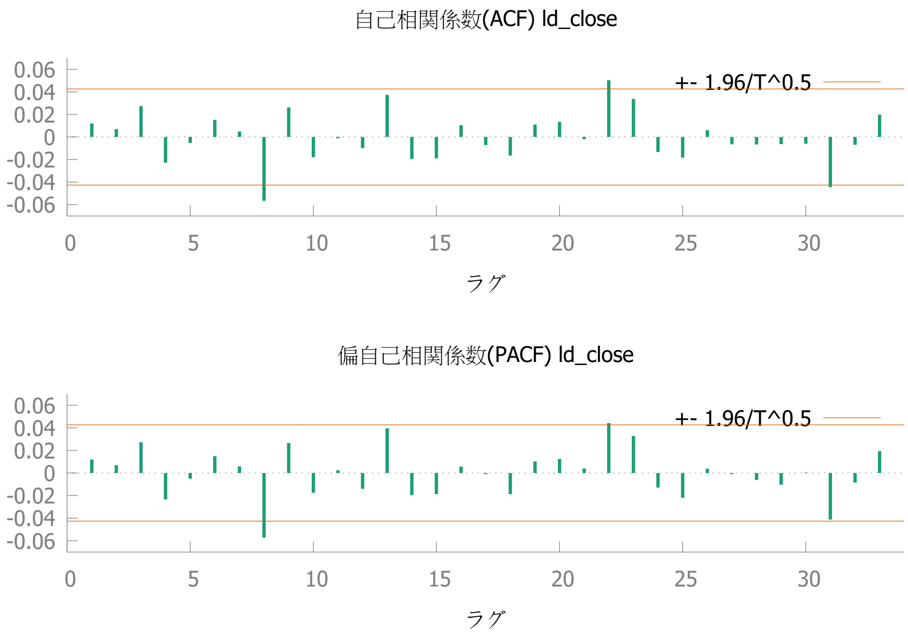

図 1　NYSE 総合指数の対数階差系列のコレログラム