第 4 回　確率（4.1–4.4）

村澤 康友

2025 年 10 月 7 日

これまでの復習

統計学の 2 つのアプローチ

記述統計学　データの整理

統計的推測　標本から母集団について推測
→抽出される標本により結果が変わる
→信頼度の評価が必要

今日のポイント

1. 試行において起こりうる結果を標本点，標本点全体の集合を標本空間，標本空間の部分集合を事象という．
2. 事象に対して定義され，確率の公理を満たす関数を確率という．
3. 確率の公理から確率の性質が導かれる．

目次

1　標本空間と事象（p. 68）

1.1　標本空間（p. 69）

定義 1. 結果が偶然に支配される実験を**試行**という．

例 1. コイントス，サイコロ，電球の寿命，明日の天気.

定義 2. 試行において起こりうる結果を**標本点**という．

定義 3. 標本点全体の集合を**標本空間**という．

例 2. コイントスなら $\{H,T\}$，サイコロなら $\{1,\dots,6\}$，電球の寿命なら $(0,\infty)$.

注 1. 標本点を ω, 標本空間を Ω で表すことが多い．

1.2　事象（p. 69）

定義 4. 標本空間の部分集合を**事象**という．

例 3. コイントスの事象は $\emptyset,\{H\},\{T\},\Omega$.

定義 5. 空集合の事象を**空事象**という．

定義 6. 標本空間全体の事象を**全事象**という．

定義 7. ただ 1 つの標本点から成る事象を**根元事象**という．

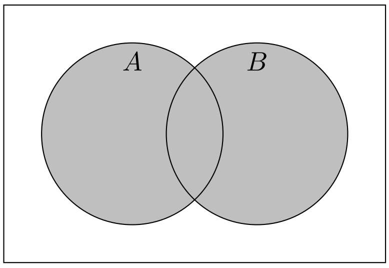
定義 8. 複数の標本点から成る事象を**複合事象**という．

1.3　集合算（p. 73）

ある試行の事象を A,B,C とする．

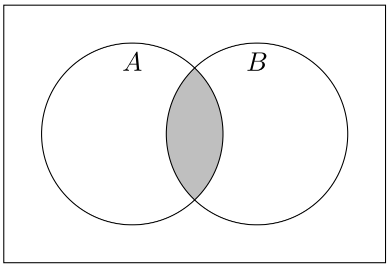
定義 9. $A\cup B$ を A と B の**和事象**という．

注 2. ベン図で表すと



定義 10. $A \cap B$ を A と B の**積事象**という．

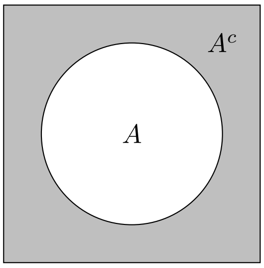
注 3. ベン図で表すと



定義 11. $A \cap B = \emptyset$ なら A と B は**排反**という．

定義 12. A^c を A の**余事象**という．

注 4. ベン図で表すと



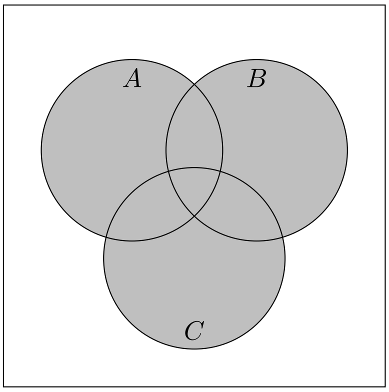
定理 1 (交換法則)**.**

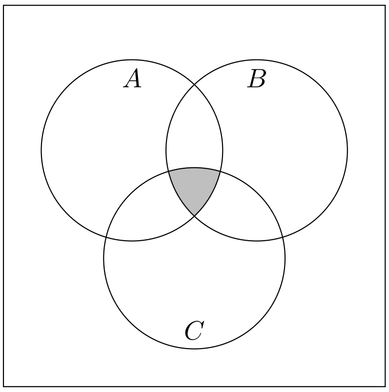
$$
\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A \\
A \cap B &= B \cap A
\end{aligned}
$$

定理 2 (結合法則)**.**

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C)
\end{aligned}
$$

注 5. ベン図で表すと





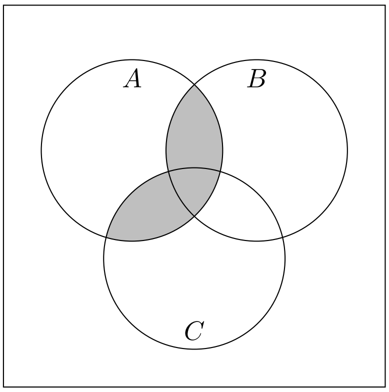
定理 3 (分配法則)**.**

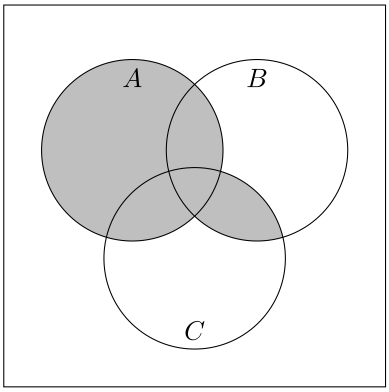
$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

注 6. 数の場合は

$$
\begin{aligned}
a \times (b + c) &= (a \times b) + (a \times c) \\
a + (b \times c) &\neq (a + b) \times (a + c)
\end{aligned}
$$

注 7. ベン図で表すと

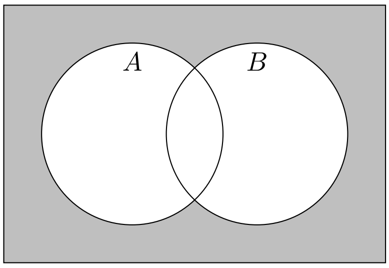


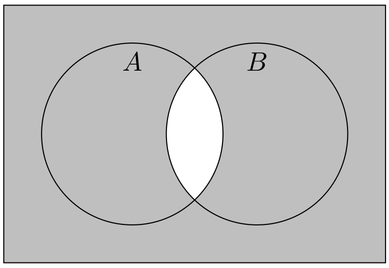


定理 4 (ド・モルガンの法則)**.**

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c
\end{aligned}
$$

注 8. 「A または B」でない$=$ A でなく，かつ B でない．「A かつ B」でない$=$ A でないか，または B でない．ベン図で表すと





2　確率（p. 75）

2.1　確率の公理（p. 78）

定義 13. 事象に対して定義され，以下の公理を満たす関数 $P(.)$ を**確率**という．

1. $0 \le P(.) \le 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. （σ 加法性）$A_1, A_2, \ldots$ が排反なら

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

注 9. 面積・体積・個数などと同じく，集合（事象）の「大きさ」の測度と理解してよい．ただし全体の「大きさ」を 1 と基準化する点が異なる．

例 4. 公正なコイントスなら

$$P(A) := \begin{cases} 0 & \text{for } A = \emptyset \\ 1/2 & \text{for } A = \{H\}, \{T\} \\ 1 & \text{for } A = \Omega \end{cases}$$

2.2　確率の性質（p. 80）

定理 5.

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

証明. A と A^c は排反だから

$$
\begin{aligned}
P(A) + P(A^c) &= P(A \cup A^c) \\
&= P(\Omega) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

定理 6.

$$P(\emptyset) = 0$$

証明. $A = A \cup \emptyset$ であり，A と $\emptyset$ は排反だから

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cup \emptyset) \\
&= P(A) + P(\emptyset)
\end{aligned}
$$

両辺から $P(A)$ を引けば結果が得られる． □

定理 7.

$$A \subset B \Longrightarrow P(A) \le P(B)$$

証明. $A \subset B$ より

$$B = A \cup (A^c \cap B)$$

A と $A^c \cap B$ は排反だから

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A \cup (A^c \cap B)) \\
&= P(A) + P(A^c \cap B) \\
&\ge P(A)
\end{aligned}
$$

□

定理 8 (加法定理)**.**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

証明．ベン図より

$$\begin{aligned}A\cup B&=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)\\A&=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)\\B&=(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\end{aligned}$$

$A\cap B$，$A\cap B^c$，$A^c\cap B$ は排反だから

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)\\P(A)&=P(A\cap B)+P(A\cap B^c)\\P(B)&=P(A\cap B)+P(A^c\cap B)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&P(A)+P(B)\\&=2P(A\cap B)+P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)\\&=P(A\cap B)+P(A\cup B)\end{aligned}$$

式変形より結果が得られる． □

3　今日のキーワード

試行，標本点，標本空間，事象（空事象，全事象，根元事象，複合事象，和事象，積事象，排反事象，余事象），集合算の法則（交換法則，結合法則，分配法則，ド・モルガンの法則），確率の公理，σ 加法性，加法定理

4　次回までの準備

復習　教科書第 4 章 1–4 節，復習テスト 4
予習　教科書第 4 章 5 節