

第 12 回 ベクトル誤差修正モデル (VECM)

村澤 康友

2022 年 12 月 20 日

今日のポイント

1. CI(1,1) 過程は VECM で表現できる (グリーンジャーの表現定理).
2. VAR モデルを VECM に変換する際は, 定数項とトレンドの扱いに注意. また共和分行列の識別に制約が必要.
3. 予測が目的なら VECM のラグ次数と共和分階数はモデル選択基準で選ぶ.
4. インパルス応答関数が目的なら VECM より VAR モデルの方が共和分階数の定式化の誤りを避けられる.
5. H_0 と H_1 の下での母数の尤度の比を尤度比という. 尤度比を用いる検定を尤度比 (LR) 検定という. 共和分階数の LR 検定を Johansen の共和分検定という. トレース検定と最大固有値検定は H_1 の共和分階数が異なる.

2.4	ラグ次数と共和分階数の選択	3
2.5	インパルス応答関数	4

3	Johansen の共和分検定	4
3.1	尤度比 (LR) 検定	4
3.2	トレース検定	4
3.3	最大固有値検定	4
4	今日のキーワード	4
5	次回までの準備	4

1 共和分と VECM

1.1 VAR モデル

$\{y_t\}$ を N 変量確率過程とし, 簡単化のため定数項なしの VAR(p) モデルを仮定する. すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(L)y_t &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\Sigma)\end{aligned}$$

ただし $\Phi(L)$ は p 次のラグ多項式行列.

補題 1.

$$\Phi(L) = \Phi(1)L + \Phi^*(L)(1 - L)$$

ただし $\Phi^*(L)$ は $p - 1$ 次のラグ多項式行列.

証明. $\Phi(L)$ の第 (i, j) 成分 $\phi_{i,j}(L)$ を式変形すると

$$\phi_{i,j}(L) = \phi_{i,j}(1)L + \phi_{i,j}(L) - \phi_{i,j}(1)L$$

$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z$ は $z = 1$ で 0 なので, 因数分解より任意の z について

$$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z = \phi_{i,j}^*(z)(1 - z)$$

目次

1	共和分と VECM	1
1.1	VAR モデル	1
1.2	I(1) 過程	2
1.3	CI(1,1) 過程	2
1.4	VECM	2
2	VECM の定式化と推定	2
2.1	定数項とトレンド	2
2.2	共和分行列の識別	3
2.3	条件付き ML 推定	3

ただし $\phi_{i,j}^*(\cdot)$ は $p-1$ 次の多項式. したがって

$$\phi_{i,j}(\mathbf{L}) = \phi_{i,j}(1)\mathbf{L} + \phi_{i,j}^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})$$

□

1.2 I(1) 過程

$\{\mathbf{y}_t\}$ を I(1) とする.

定理 1. 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

証明. 前補題より, 任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{L})\mathbf{y}_t &= [\Phi(1)\mathbf{L} + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})]\mathbf{y}_t \\ &= \Phi(1)\mathbf{L}\mathbf{y}_t + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})\mathbf{y}_t \\ &= \Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t\end{aligned}$$

VAR モデルに代入すると, 任意の t について

$$\Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{w}_t$$

□

注 1. すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{y}_t &= -\Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \Phi_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \cdots \\ &\quad + \Phi_{p-1}^*\Delta\mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{w}_t\end{aligned}$$

これは ADF 検定の推定式の変量版. 左辺は I(0) なので, 以下の 2 つのどちらかが成立.

1. $\Phi(1) = \mathbf{O}_{N \times N}$ (共和分なし)
2. $\{\Phi(1)\mathbf{y}_t\}$ は I(0) (共和分あり)

1.3 CI(1,1) 過程

$\{\mathbf{y}_t\}$ を共和分階数 r の CI(1,1) とする.

定義 1. 線形独立な共和分ベクトルを各列に並べた行列を共和分行列という.

定理 2 (グレンジャーの表現定理). 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Lambda\Gamma'\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

ただし Γ は $N \times r$ の共和分行列, Λ は $N \times r$ の係数行列.

証明. 前定理より, 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

$\{\mathbf{y}_t\}$ は I(1) なので左辺は I(0). 共和分より $\{\Gamma'\mathbf{y}_t\}$ が I(0) なので, 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Lambda\Gamma'\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

□

系 1.

$$\text{rk}(\Phi(1)) = r$$

証明. $\Phi(1) = \Lambda\Gamma'$ より $\Phi(1)$ の各列は Λ の各列の線形結合. □

1.4 VECM

定義 2. VAR(p) モデルのベクトル誤差修正モデル (vector error correction model, VECM) による表現は, 任意の t について

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{y}_t &= -\Lambda\Gamma'\mathbf{y}_{t-1} + \Phi_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \cdots \\ &\quad + \Phi_{p-1}^*\Delta\mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{w}_t\end{aligned}$$

注 2. 長期均衡の誤差 $\Gamma'\mathbf{y}_{t-1}$ を係数 Λ だけ修正する方向に $\Delta\mathbf{y}_t$ が変化する.

注 3. $\{\mathbf{y}_t\}$ の VAR(p) モデルなので, $p-1$ 次の項 $\Delta\mathbf{y}_{t-p+1} := \mathbf{y}_{t-p+1} - \mathbf{y}_{t-p}$ までしか含まない.

2 VECM の定式化と推定

2.1 定数項とトレンド

2.1.1 定数項あり・トレンドなし

定数項ありの VAR モデルは, 任意の t について

$$\Phi(\mathbf{L})(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{w}_t$$

定理 3. VECM 表現は, 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Lambda(\Gamma'\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{w}_t$$

ただし $\boldsymbol{\alpha} := \Gamma'\boldsymbol{\mu}$.

証明. $\Phi(\mathbf{L}) = \Phi(1)\mathbf{L} + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})$ より任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{L})(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) &= [\Phi(1)\mathbf{L} + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})](\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \Phi(1)\mathbf{L}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \Phi(1)(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t\end{aligned}$$

VAR モデルに代入すると、任意の t について

$$\Phi(1)(y_{t-1} - \mu) + \Phi^*(L)\Delta y_t = w_t$$

$\Phi(1) = \Lambda\Gamma'$ より任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi^*(L)\Delta y_t &= -\Phi(1)(y_{t-1} - \mu) + w_t \\ &= -\Lambda\Gamma'(y_{t-1} - \mu) + w_t \\ &= -\Lambda(\Gamma'y_{t-1} - \Gamma'\mu) + w_t \\ &= -\Lambda(\Gamma'y_{t-1} - \alpha) + w_t\end{aligned}$$

□

注 4. 共和分回帰に定数項が入る．展開すると、任意の t について

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = \Lambda\alpha - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t$$

α は $r \times 1$ なので、 $\Lambda\alpha$ は制約付きの定数項となる．制約のない定数項をもつ VECM は、任意の t について

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = c - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t$$

したがって $\{\Delta y_t\}$ がドリフト項をもつので $\{y_t\}$ はトレンドをもつ（矛盾）．

2.1.2 定数項あり・トレンドあり

定数項・トレンドありの VAR モデルは、任意の t について

$$\Phi(L)(y_t - \mu - \delta t) = w_t$$

定理 4. VECM 表現は、任意の t について

$$\Phi^*(L)(\Delta y_t - \delta) = -\Lambda[\Gamma'y_{t-1} - \alpha - \beta(t-1)] + w_t$$

ただし $\alpha := \Gamma'\mu$, $\beta := \Gamma'\delta$.

証明. $\Phi(L) = \Phi(1)L + \Phi^*(L)(1-L)$ より任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(L)(y_t - \mu - \delta t) &= [\Phi(1)L + \Phi^*(L)(1-L)](y_t - \mu - \delta t) \\ &= \Phi(1)L(y_t - \mu - \delta t) \\ &\quad + \Phi^*(L)(1-L)(y_t - \mu - \delta t) \\ &= \Phi(1)[y_{t-1} - \mu - \delta(t-1)] + \Phi^*(L)(\Delta y_t - \delta)\end{aligned}$$

VAR モデルに代入すると、任意の t について

$$\Phi(1)[y_{t-1} - \mu - \delta(t-1)] + \Phi^*(L)(\Delta y_t - \delta) = w_t$$

$\Phi(1) = \Lambda\Gamma'$ より任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi^*(L)(\Delta y_t - \delta) &= -\Phi(1)[y_{t-1} - \mu - \delta(t-1)] + w_t \\ &= -\Lambda\Gamma'[y_{t-1} - \mu - \delta(t-1)] + w_t \\ &= -\Lambda[\Gamma'y_{t-1} - \Gamma'\mu - \Gamma'\delta(t-1)] + w_t \\ &= -\Lambda[\Gamma'y_{t-1} - \alpha - \beta(t-1)] + w_t\end{aligned}$$

□

注 5. 共和分回帰に定数項とトレンドが入る．展開して整理すると、任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi^*(L)\Delta y_t &= \Phi^*(1)\delta + \Lambda\alpha + \Lambda\beta(t-1) - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t \\ &= \Phi^*(1)\delta + \Lambda(\alpha - \beta) + \Lambda\beta t - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t\end{aligned}$$

β は $r \times 1$ なので、 $\Lambda\beta t$ は制約付きのトレンドとなる（定数項は δ で調整されるので制約なし）．制約のないトレンドをもつ VECM は、任意の t について

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = c + dt - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t$$

したがって $\{\Delta y_t\}$ がトレンドをもつので $\{y_t\}$ は 2 次のトレンドをもつ（矛盾）．

2.2 共和分行列の識別

$\Phi(\cdot)$ は識別可能だが、 $\Phi(1) = \Lambda\Gamma'$ から Λ, Γ は定まらない． Γ を識別する制約は 2 通りある．

1. $\Gamma'\Gamma = I_r$ （共和分ベクトルは長さ 1 で互いに直交）
2. $\Gamma := [I_r, \Gamma_2']'$ （共和分回帰で最初の r 個の変数を被説明変数、他を説明変数とする）

ただし前者は符号が定まらず、後者は共和分回帰の被説明変数の選択が恣意的になる．

2.3 条件付き ML 推定

正規 VECM の厳密な ML 推定は煩雑なので、条件付き ML 推定が普通．詳細は略．

2.4 ラグ次数と共和分階数の選択

VAR モデルの次数 p はモデル選択基準（AIC・SBIC・HQC）で選ぶ．予測が目的なら共和分階数もモデル選択基準で選んでよい．

2.5 インパルス応答関数

$\{y_t\}$ のインパルス応答関数は、VECM を VAR 表現に戻して計算する。ただし予測が目的でなければ VECM にせず、初めから VAR モデルを推定する方が共和分階数の定式化の誤りを避けられる。

3 Johansen の共和分検定

3.1 尤度比 (LR) 検定

母数を θ 、標本を (y_1, \dots, y_T) とする。次の検定問題を考える。

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

母数が θ のときの (y_1, \dots, y_T) の同時 pdf を $p(\cdot; \theta)$ とする。 θ の尤度は

$$L(\theta) := p(y_1, \dots, y_T; \theta)$$

定義 3. $L(\theta_0)/L(\theta_1)$ を θ_0 と θ_1 の**尤度比** (*likelihood ratio, LR*) という。

定義 4. 尤度比を用いる検定を**尤度比 (LR) 検定**という。

定義 5. $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ の LR 検定統計量は

$$LR := -2 \ln \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}$$

注 6. $L(\theta_1) \gg L(\theta_0) > 0$ すなわち LR 検定統計量が十分に大きければ H_0 を棄却。

定義 6. 共和分階数の LR 検定を *Johansen の共和分検定* という。

注 7. H_1 の違いにより 2 種類の検定がある。

3.2 トレース検定

$\{y_t\}$ を共和分階数 r の N 変量正規 VAR 過程とする。次の検定問題を考える。

$$H_0 : r = r_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : r = N$$

H_0 の下で LR 検定統計量は、ある確率行列のトレース (対角成分の和) に分布収束する。

定義 7. $H_0 : r = r_0$ vs $H_1 : r = N$ の LR 検定を**トレース検定**という。

注 8. 定数項・トレンドの有無で LR 検定統計量の漸近分布は異なる。

3.3 最大固有値検定

次の検定問題を考える。

$$H_0 : r = r_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : r = r_0 + 1$$

H_0 の下で LR 検定統計量は、ある確率行列の最大固有値に分布収束する。

定義 8. $H_0 : r = r_0$ vs $H_1 : r = r_0 + 1$ の LR 検定を**最大固有値検定**という。

注 9. 定数項・トレンドの有無で LR 検定統計量の漸近分布は異なる。

4 今日のキーワード

共和分行列、グレンジャーの表現定理、ベクトル誤差修正モデル (VECM)、尤度比、尤度比 (LR) 検定、LR 検定統計量、Johansen の共和分検定、トレース検定、最大固有値検定

5 次回までの準備

提出 宿題 12

復習 復習テスト 12

予習 特になし