計量経済 II：後期定期試験

村澤 康友

2019 年 1 月 29 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 統計的仮説
   (b) 有意水準
   (c) p 値
   (d) 回帰
2. （30 点）
   (a)「国民（有権者）の過半数は憲法改正を支持している」という仮説を確かめたい．検定問題を定式化しなさい．
   (b) 検定統計量の p 値が 0.30 だったとする．有意水準 5 %の検定の結果を判定しなさい．
   (c) 回帰の誤差と残差の違いを説明しなさい．
3. （50 点）K 大生の（1 日平均）勉強時間の分布を男女で比較したい．以下の通り記号を定義する．

	男子	女子
母集団分布	$\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$	$\mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$
標本	$(X_1, \ldots, X_m)$	$(Y_1, \ldots, Y_n)$
標本平均	$\bar{X}$	$\bar{Y}$
標本分散	s_X^2	s_Y^2

   すべての母数は未知とし，無作為標本を仮定する．
   (a) 次の検定問題を考える．
   $$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$
      i. 検定統計量を定義し，その H_0 の下での分布を求めなさい．
      ii. $m = n = 10$ として有意水準 5 %の検定の棄却域を定めなさい．
   (b) 前問で H_0 が採択されたとする．そこで $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$ と仮定して次の検定問題を考える．
   $$H_0 : \mu_X = \mu_Y \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_X < \mu_Y$$
      i. $\bar{X} - \bar{Y}$ の分布を求めなさい．
      ii. 検定統計量を定義し，その H_0 の下での分布を求めなさい．
      iii. $m = n = 10$ として有意水準 5 %の検定の棄却域を定めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 母集団分布に関する仮説.
   (b) 許容する第 1 種の誤りの確率.
   (c) H_0 の下で検定統計量が実現値以上になる確率.
   (d) $\mathrm{E}(Y|X)$ を求めること.
2. 統計学の基礎知識
   (a) 母集団における支持率を p として

$$H_0 : p = .5 \quad \text{vs} \quad H_1 : p > .5$$

   - 両側検定問題は 2 点.
   - 対立仮説に等号を入れたら 0 点.

   (b) p 値＞有意水準なので H_0 は採択.
   (c) 説明変数を x，被説明変数を y，回帰係数を β，その推定値を b とすると，誤差は $u := y - \beta x$，残差は $e := y - bx$.
3. 2 標本の検定
   (a) 分散の比の検定
      i.

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$
$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

両者は独立だから

$$\frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

検定統計量は

$$F := \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

H_0 の下で

$$F \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

      ii. H_0 の下で $F, 1/F \sim \mathrm{F}(9,9)$．F 分布表より

$$\Pr[F \geq 4.026] = .025$$
$$\Pr\left[\frac{1}{F} \geq 4.026\right] = .025$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{4.026} \leq F \leq 4.026\right] = .05$$

したがって棄却域は $[0, 1/4.026] \cup [4.026, \infty)$.

   (b) 平均の差の検定

i.

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu_X, \frac{\sigma^2}{m}\right)$$
$$\bar{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

両者は独立だから

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)\right)$$

ii. 標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\sigma^2(1/m + 1/n)}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

プールした標本分散を s^2 とすると，

$$\begin{aligned} s^2 &:= \frac{1}{m+n-2}\left(\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n}(Y_j - \bar{Y})^2\right) \\ &= \frac{(m-1)s_X^2 + (n-1)s_Y^2}{m+n-2} \end{aligned}$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}} \sim \mathrm{t}(m+n-2)$$

検定統計量は

$$t := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s^2(1/m + 1/n)}}$$

H_0 の下で

$$t \sim \mathrm{t}(m+n-2)$$

iii. H_0 の下で $t \sim \mathrm{t}(18)$．t 分布表より

$$\Pr[t \leq -1.734] = .05$$

したがって棄却域は $(-\infty, -1.734]$.