経済統計：前期第 1 回中間試験

村澤 康友

2009 年 5 月 13 日

注意：3 問とも解答すること．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a)（事象の）独立性
   (b) 確率変数
   (c)（連続分布の）密度関数
   (d)（確率変数の）分散
2. （30 点）「交通安全白書（平成 20 年）」によると，平成 19 年の日本の自動車乗車中の交通事故死者数は 2,013 人，同負傷者数は 641,907 人であった．また死傷者（死者または負傷者）中のシートベルト着用率は 89.1 %，死者中のシートベルト着用率は 46.6 %であった．すなわち交通事故におけるシートベルト着用の事象を A，交通事故死の事象を B とすると，

$$
\begin{aligned}
P(A) &= .891, \\
P(B) &= \frac{2013}{2013 + 641907} \approx .00313, \\
P(A|B) &= .466.
\end{aligned}
$$

   以下の確率を求めなさい．
   (a) $P(A \cap B)$
   (b) $P(B|A)$（シートベルト着用者の致死率）
   (c) $P(B|A^c)$（シートベルト非着用者の致死率）
3. （50 点）2 つのサイコロの目の差の絶対値を X とする．
   (a) X の確率関数を式とグラフで書きなさい．
   (b) X の累積分布関数を式とグラフで書きなさい．
   (c) $\mathrm{E}(X)$ を求めなさい．
   (d) $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ を求めなさい．
   (e) $\mathrm{var}(X)$ を求めなさい．

解答例

1. 確率の基本用語
   (a) $P(A|B) = P(A)$ なら A と B は独立.
      - $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ でも OK.
      - 「A が起こる確率が B に無関係」は OK.
      - 「A と B が無関係に起こる」は 0 点.

      例：白と黒のサイコロを投げる．A は「白が奇数」，B は「白と黒の合計が奇数」とする．B が起こる状況（黒が奇数か偶数か）は A の結果に依存しており，無関係に起こるわけではない.
   (b) 試行の結果によって値が決まる変数.
      - 「確率的に値が決まる変数」でも OK.
   (c) 任意の x について $\Pr[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ となる $f_X(.)$.
      - 任意の a, b について $\Pr[a < X \le b] = \int_{a}^{b} f_X(t)\,\mathrm{d}t$ でも OK.
      - $f_X(.) := F'_X(.)$ でも OK.
      - 「$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,\mathrm{d}t = 1$ を満たす非負の $f_X(.)$」でも OK.
   (d) 2 次の中心積率.
      - 式で表すなら $\mathrm{var}(X) := \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$.
      - $\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$ は定義でないので 0 点.
      - データの分散は 0 点.
2. ベイズの定理
   (a)

$$
\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\
&\approx .466 \cdot .00313 \\
&\approx .00146.
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\
&\approx \frac{.00146}{.891} \\
&\approx .00164.
\end{aligned}
$$

   (c)

$$
\begin{aligned}
P(B|A^c) &= \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} \\
&= \frac{P(A^c|B)P(B)}{P(A^c)} \\
&= \frac{(1 - P(A|B))P(B)}{1 - P(A)} \\
&\approx \frac{.534 \cdot .00313}{.109} \\
&\approx .0153.
\end{aligned}
$$

3. 離散分布の例

(a)

$$X = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 6/36 \\ 1 & \text{with pr. } 10/36 \\ 2 & \text{with pr. } 8/36 \\ 3 & \text{with pr. } 6/36 \\ 4 & \text{with pr. } 4/36 \\ 5 & \text{with pr. } 2/36 \end{cases}.$$

したがって

$$p_X(x) = \begin{cases} 5/18 & \text{for } x = 1 \\ 4/18 & \text{for } x = 2 \\ 3/18 & \text{for } x = 0, 3 \\ 2/18 & \text{for } x = 4 \\ 1/18 & \text{for } x = 5 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}.$$

グラフは省略.

- 式で 5 点，グラフで 5 点.
- 今回は確率 0 の範囲を無視しても可とする.

(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 3/18 & \text{for } x \in [0, 1) \\ 8/18 & \text{for } x \in [1, 2) \\ 12/18 & \text{for } x \in [2, 3) \\ 15/18 & \text{for } x \in [3, 4) \\ 17/18 & \text{for } x \in [4, 5) \\ 1 & \text{for } x \geq 5 \end{cases}.$$

グラフは省略.

- 式で 5 点，グラフで 5 点.
- 前問の pdf と整合的な cdf なら可とする.

(c)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= 0 \cdot \frac{3}{18} + 1 \cdot \frac{5}{18} + 2 \cdot \frac{4}{18} + 3 \cdot \frac{3}{18} + 4 \cdot \frac{2}{18} + 5 \cdot \frac{1}{18} \\ &= \frac{5 + 8 + 9 + 8 + 5}{18} \\ &= \frac{35}{18}. \end{aligned}$$

（d）

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X^2\right) &= 0^2 \cdot \frac{3}{18} + 1^2 \cdot \frac{5}{18} + 2^2 \cdot \frac{4}{18} + 3^2 \cdot \frac{3}{18} + 4^2 \cdot \frac{2}{18} + 5^2 \cdot \frac{1}{18} \\
&= \frac{5 + 16 + 27 + 32 + 25}{18} \\
&= \frac{105}{18} \\
&= \frac{35}{6}.
\end{aligned}$$

（e）

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \frac{35}{6} - \left(\frac{35}{18}\right)^2 \\
&= \frac{35 \cdot 54 - 35^2}{324} \\
&= \frac{35 \cdot 19}{324} \\
&\approx 2.05.
\end{aligned}$$

※計算ミスは 1 点減とし，その後は整合性が保たれていれば減点しない．ただし有り得ない数値の解答は 0 点とする（$[0, 1]$ を超える確率，負の分散など）．

※答案は返却します．採点や成績に関する質問にも応じます．**オフィスアワーの時間（月水木金の昼休み）に**研究室まで来てください．