計量経済 II：復習テスト 13

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 1 月 10 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を（左上で）ホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 24 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $\{w_t\}$ を ARCH(1) 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} w_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= c + \alpha w_{t-1}^2 \\ \{z_t\} &\sim \mathrm{IID}(0,1) \end{aligned}$$

ただし $c > 0$，$\alpha \geq 0$.

(a) $\mathrm{E}_{t-1}(w_t)$ を求めなさい．

(b) $\mathrm{var}_{t-1}(w_t)$ を w_{t-1} で表しなさい．

(c) $\mathrm{E}(w_t)$ を求めなさい．

(d) $\mathrm{var}(w_t)$ を $\mathrm{var}(w_{t-1})$ で表しなさい．

2. $\{w_t\}$ を GARCH(1,1) 過程とする．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned} w_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \{z_t\} &\sim \mathrm{IID}(0,1) \end{aligned}$$

ただし $c > 0,\ \alpha, \beta \geq 0$.

（a） $\mathrm{var}_{t-1}(w_t)$ を $w_{t-1}, w_{t-2}, \ldots$ で表しなさい.

（b） $\mathrm{var}(w_t)$ を $\mathrm{var}(w_{t-1})$ で表しなさい.

（c） 任意の t について $v_t := w_t^2 - \sigma_t^2$ とする．$\{v_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\left\{w_t^2\right\}$ は ARMA(1,1) であることを示しなさい.

解答例

1. (a) 時点 $t-1$ で σ_t^2 は既知であり，$\{z_t\}$ は $\mathrm{IID}(0,1)$ なので，任意の t について

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{t-1}(w_t) &= \mathrm{E}_{t-1}(\sigma_t z_t) \\
&= \sigma_t \, \mathrm{E}_{t-1}(z_t) \\
&= \sigma_t \, \mathrm{E}(z_t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) 前問より任意の t について

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_{t-1}(w_t) &= \mathrm{E}_{t-1}\left(w_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}_{t-1}\left(\sigma_t^2 z_t^2\right) \\
&= \sigma_t^2 \, \mathrm{E}_{t-1}\left(z_t^2\right) \\
&= \sigma_t^2 \, \mathrm{E}\left(z_t^2\right) \\
&= \sigma_t^2 \, \mathrm{var}(z_t) \\
&= \sigma_t^2 \\
&= c + \alpha w_{t-1}^2
\end{aligned}$$

(c) 前々問と繰り返し期待値の法則より，任意の t について

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(w_t) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}_{t-1}(w_t)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(d) 前問と繰り返し期待値の法則より，任意の t について

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(w_t) &= \mathrm{E}\left(w_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}_{t-1}\left(w_t^2\right)\right) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{var}_{t-1}(w_t)) \\
&= \mathrm{E}\left(c + \alpha w_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha \, \mathrm{E}\left(w_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha_1 \, \mathrm{var}(w_{t-1})
\end{aligned}$$

2. (a) 逐次代入より任意の t について

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}_{t-1}(w_t) &= \sigma_t^2 \\
&= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\
&= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta\left(c + \alpha w_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2\right) \\
&= \dots \\
&= \left(1 + \beta + \beta^2 + \cdots\right) c + \alpha\left(w_{t-1}^2 + \beta w_{t-2}^2 + \beta^2 w_{t-3}^2 + \cdots\right)
\end{aligned}$$

（b）任意の t について

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(w_t) &= \mathrm{E}\left(w_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\mathrm{E}_{t-1}\left(w_t^2\right)\right) \\
&= \mathrm{E}(\operatorname{var}_{t-1}(w_t)) \\
&= \mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha \, \mathrm{E}\left(w_{t-1}^2\right) + \beta \, \mathrm{E}\left(\sigma_{t-1}^2\right) \\
&= c + \alpha \operatorname{var}(w_{t-1}) + \beta \operatorname{var}(w_{t-1}) \\
&= c + (\alpha + \beta) \operatorname{var}(w_{t-1})
\end{aligned}$$

（c）任意の t について

$$\begin{aligned}
w_t^2 &\equiv \sigma_t^2 + v_t \\
&= c + \alpha w_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 + v_t \\
&= c + (\alpha + \beta) w_{t-1}^2 - \beta \left(w_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2\right) + v_t \\
&= c + (\alpha + \beta) w_{t-1}^2 + v_t - \beta v_{t-1}
\end{aligned}$$

したがって $\{v_t\}$ がホワイト・ノイズなら $\left\{w_t^2\right\}$ は ARMA(1,1).