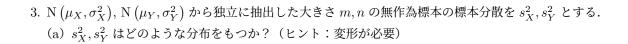
中級統計学:復習テスト 20

2024年12月6日

注意:すべての質問に解答しなければ提出とは認めない.正答に修正した上で,復習テスト 14〜20 を順に 重ねて左上でホチキス止めし,第 3 回中間試験実施日(12 月 10 日の予定)に提出すること.
1. N $\left(\mu,\sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $ar{X}$ とする. (a) $ar{X}$ の分布を求めなさい.
(b) σ^2 を既知として μ の 95 %信頼区間を求めなさい.
2. N $\left(\mu,\sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本分散を s^2 とする. (a) s^2 はどのような分布をもつか?(ヒント:変形が必要)

(b) n=10 として σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい.



(b) s_X^2/s_Y^2 はどのような分布をもつか?(ヒント:同上)

(c) $m=4,\ n=6$ として σ_X^2/σ_Y^2 の 95 %信頼区間を求めなさい.

解答例

1. (a) 期待値の線形性より

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{E(X_1 + \dots + X_n)}{n}$$

$$= \frac{E(X_1) + \dots + E(X_n)}{n}$$

$$= \frac{\mu + \dots + \mu}{n}$$

$$= \mu$$

 X_1, \ldots, X_n は独立なので

$$\operatorname{var}(\bar{X}) = \operatorname{var}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{var}(X_1 + \dots + X_n)}{n^2}$$

$$= \frac{\operatorname{var}(X_1) + \dots + \operatorname{var}(X_n)}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2 + \dots + \sigma^2}{n^2}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

正規分布の線形変換は正規分布なので

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(b) 標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

標準正規分布表より

$$\Pr\left[-1.96 \le \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \le 1.96\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \bar{X} - \mu \le 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = 0.95$$

または

$$\Pr\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \le \mu \le \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = 0.95$$

したがって μ の 95 %信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(b)
$$\chi^2$$
 分布表より

$$\Pr\left[2.70039 \le \frac{9s^2}{\sigma^2} \le 19.0228\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{19.0228} \le \frac{\sigma^2}{9s^2} \le \frac{1}{2.70039}\right] = 0.95$$

または

$$\Pr\left[\frac{9s^2}{19.0228} \le \sigma^2 \le \frac{9s^2}{2.70039}\right] = 0.95$$

したがって σ^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{9}{19.0228}s^2, \frac{9}{2.70039}s^2\right]$$

3. (a)

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$
$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

すなわち

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim \mathcal{F}(m-1, n-1)$$

(c) F 分布表より

$$\Pr\left[\frac{1}{14.885} \le \frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \le 7.764\right] = 0.95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{7.764} \le \frac{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}{s_Y^2/s_Y^2} \le 14.885\right] = 0.95$$

または

$$\Pr\left[\frac{1}{7.764} \frac{s_X^2}{s_Y^2} \le \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \le 14.885 \frac{s_X^2}{s_Y^2}\right] = 0.95$$

したがって σ_X^2/σ_Y^2 の $95\,\%$ 信頼区間は

$$\left[\frac{1}{7.764} \frac{s_X^2}{s_Y^2}, 14.885 \frac{s_X^2}{s_Y^2}\right]$$