第 10 回　代表的な連続分布（6.6–6.7）

村澤 康友

2024 年 10 月 25 日

今日のポイント

1. pdf の値が均一な分布を一様分布という．
2. ポアソン分布にしがたう現象が初めて起こるまでの待ち時間の分布を指数分布という．
3. 測定誤差は正規分布にしたがう．正規分布の線形変換も正規分布であり，標準化した正規分布を標準正規分布という．正規分布の cdf は積分を含むので，標準正規分布表を用いて確率を計算する．

目次

1　一様分布（p. 127）

定義 1. $[a,b]$ 上の**一様分布**の pdf は

$$f(x) := \begin{cases} 1/(b-a) & \text{for } x \in [a,b] \\ 0 & \text{for } x \notin [a,b] \end{cases}$$

注 1. $\mathrm{U}[a,b]$ と書く．

注 2. cdf は

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < a \\ (x-a)/(b-a) & \text{for } x \in [a,b] \\ 1 & \text{for } x > b \end{cases}$$

例 1. ルーレット．

例 2. $\mathrm{U}[0,1]$ の cdf と pdf は図 1 の通り．

定理 1. $U \sim \mathrm{U}[a,b]$ なら

$$\mathrm{E}(U) = \frac{a+b}{2}$$
$$\mathrm{var}(U) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

証明．平均は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(U) &= \int_a^b u \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2}\end{aligned}$$

2 次の積率は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(U^2\right) &= \int_a^b u^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^3}{3}\right]_a^b \\ &= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3}\end{aligned}$$

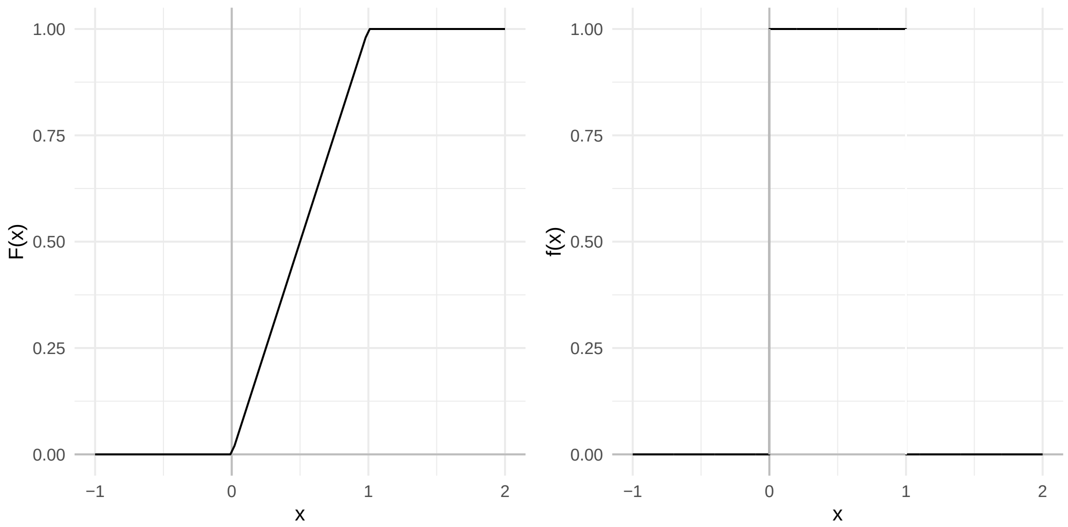

図 1　U[0, 1] の cdf と pdf

分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(U) &= \mathrm{E}\left(U^2\right) - \mathrm{E}(U)^2 \\ &= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} \\ &= \frac{(a-b)^2}{12}\end{aligned}$$

□

2　指数分布（p. 123）

単位時間当たりの成功回数の分布を $\mathrm{Poi}(\lambda)$ とする．y 時間での成功回数を X とすると $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda y)$．初成功までの待ち時間を Y とすると

$$\begin{aligned}\Pr[Y \le y] &= 1 - \Pr[Y > y] \\ &= 1 - \Pr[X = 0] \\ &= 1 - p_X(0) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\end{aligned}$$

定義 2. 指数分布の cdf は

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

注 3. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ と書く．

注 4. pdf は

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \le 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{for } x > 0 \end{cases}$$

例 3. Exp(1) の cdf と pdf は図 2 の通り．

定理 2. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ \mathrm{var}(X) &= \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

証明. mgf を用いるのが簡単．教科書 p. 104 参照．

□

3　正規分布

3.1　標準正規分布（p. 121）

定義 3. 標準正規分布の pdf は

$$\phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}$$

注 5. $\mathrm{N}(0, 1)$ と書く．

注 6. $\mathrm{N}(0, 1)$ の cdf は $\Phi(.)$，pdf は $\phi(.)$ で表す．すなわち

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2} \,\mathrm{d}z$$

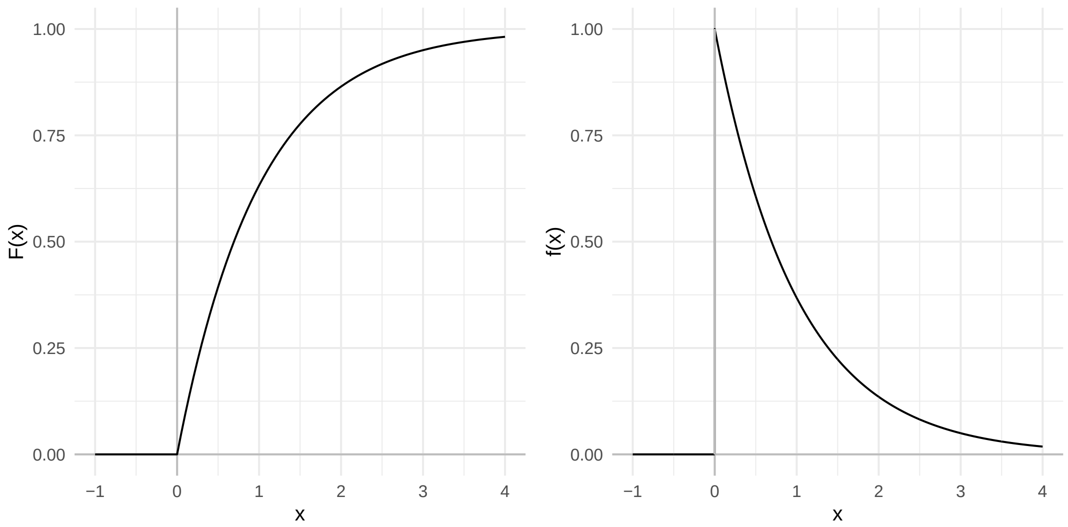

図 2　Exp(1) の cdf と pdf

例 4. N(0, 1) の cdf と pdf は図 3 の通り．

補題 1. 任意の t について

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z-t)\,\mathrm{d}z = 1$$

証明. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると，$X := t + Z$ の cdf は

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\ &= \Pr[t + Z \le x] \\ &= \Pr[Z \le x - t] \\ &= \Phi(x - t) \end{aligned}$$

X の pdf は

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F_X'(x) \\ &= \phi(x-t) \end{aligned}$$

pdf の性質より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t)\,\mathrm{d}x = 1$$

□

定理 3. N(0, 1) の *mgf* は

$$M(t) = \mathrm{e}^{t^2/2}$$

証明. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると，mgf の定義より

$$\begin{aligned} M_Z(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tZ}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tz}\phi(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tz}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(z-t)^2/2+t^2/2}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z-t)\mathrm{e}^{t^2/2}\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z-t)\,\mathrm{d}z\mathrm{e}^{t^2/2} \end{aligned}$$

前補題より結果が得られる．□

系 1. N(0, 1) の平均は 0，分散は 1．

証明. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると，前定理より

$$\begin{aligned} M_Z'(t) &= t\mathrm{e}^{t^2/2} \\ M_Z''(t) &= \mathrm{e}^{t^2/2} + t^2\mathrm{e}^{t^2/2} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= M_Z'(0) \\ &= 0 \\ \mathrm{E}\left(Z^2\right) &= M_Z''(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

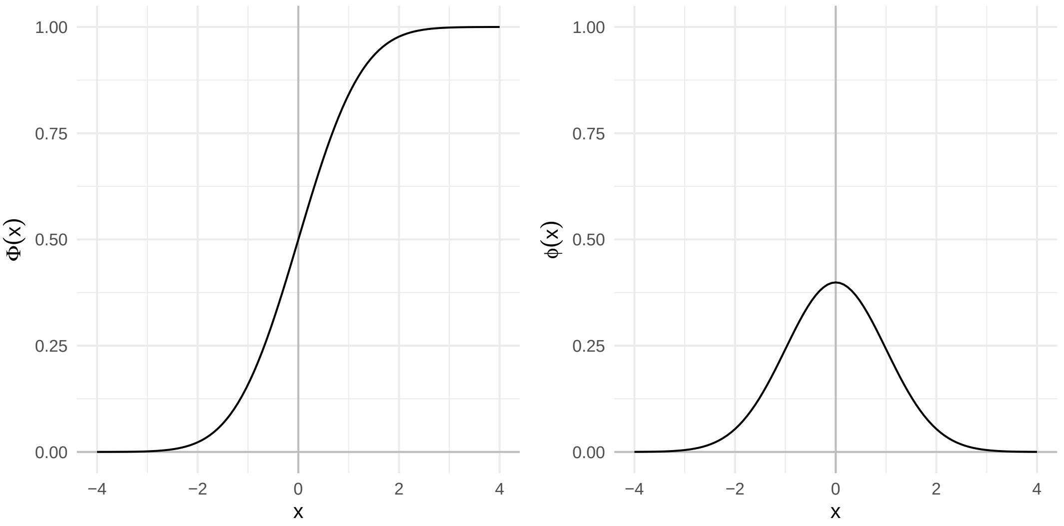

図 3　$\mathrm{N}(0,1)$ の cdf と pdf

分散の計算公式より

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(Z) &= \mathrm{E}\left(Z^2\right) - \mathrm{E}(Z)^2 \\ &= 1\end{aligned}$$

□

3.2　正規分布（p. 120）

$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, $X := \mu + \sigma Z$ とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(\mu + \sigma Z) \\ &= \mu + \sigma\,\mathrm{E}(Z) \\ &= \mu \\ \operatorname{var}(X) &= \operatorname{var}(\mu + \sigma Z) \\ &= \sigma^2 \operatorname{var}(Z) \\ &= \sigma^2\end{aligned}$$

$\sigma > 0$ とすると，X の cdf は

$$\begin{aligned}F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\ &= \Pr[\mu + \sigma Z \le x] \\ &= \Pr\left[Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

X の pdf は

$$\begin{aligned}f_X(x) &= F_X'(x) \\ &= \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

定義 4. 正規（ガウス）分布の pdf は

$$f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

注 7. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ と書く．

例 5. 測定誤差，標本平均（中心極限定理）．

定理 4. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ の *mgf* は

$$M(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$$

証明. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$, $X := \mu + \sigma Z$ とすると，mgf の定義より

$$\begin{aligned}M_X(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(\mu+\sigma Z)}\right) \\ &= \mathrm{e}^{t\mu}\,\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t\sigma Z}\right) \\ &= \mathrm{e}^{t\mu} M_Z(t\sigma) \\ &= \mathrm{e}^{t\mu}\mathrm{e}^{(t\sigma)^2/2} \\ &= \mathrm{e}^{\mu t + \sigma^2 t^2/2}\end{aligned}$$

□

定理 5. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ なら

$$aX + b \sim \mathrm{N}\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$$

証明．$aX+b$ の mgf は

$$\begin{aligned} M_{aX+b}(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{t(aX+b)}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{atX}\right)\mathrm{e}^{bt} \\ &= M_X(at)\mathrm{e}^{bt} \\ &= \exp\left(\mu(at)+\frac{\sigma^2(at)^2}{2}\right)\mathrm{e}^{bt} \\ &= \exp\left((a\mu+b)t+\frac{a^2\sigma^2t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

これは $\mathrm{N}\left(a\mu+b, a^2\sigma^2\right)$ の mgf. □

系 2. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ なら

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

証明．前定理で $a := 1/\sigma$，$b := -\mu/\sigma$ とする． □

注 8. したがって $X \sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ の累積確率は標準正規分布表から求まる．すなわち

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\ &= \Pr\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

ただし $\Phi(.)$ でなく $Q(.) := 1-\Phi(.)$ の表の場合も多い．

例 6. $X \sim \mathrm{N}(1,9)$ について $\Pr[X \le 2]$ を求める．$(X-1)/3 \sim \mathrm{N}(0,1)$ より

$$\begin{aligned} \Pr[X \le 2] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \le \frac{2-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 1-Q\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 1-.3707 \\ &= .6293 \end{aligned}$$

4　今日のキーワード

一様分布，指数分布，正規分布，標準正規分布，正規分布の標準化，標準正規分布表

5　次回までの準備

提出　宿題 3

復習　教科書第 6 章 6–7 節，復習テスト 10

予習　教科書第 7 章 1–2 節