

経済統計：第1回中間試験

村澤 康友

2019年5月20日

注意：3問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいに与えるが、結果のみの解答は0点とする）。

1. (20点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各20字程度）。

- (a) ローレンツ曲線
- (b) 分割表
- (c) 試行
- (d) 確率質量関数

2. (50点) 確率変数 X は次の cdf をもつ。

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1 - 1/x^3 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) $\Pr[2 < X \leq 3]$ を求めなさい。
 - (b) X の pdf を求めなさい。
 - (c) $E(X)$ を求めなさい。
 - (d) $E(X^2)$ を求めなさい。
 - (e) $\text{var}(X)$ を求めなさい。
3. (30点) 確率変数 X は次の cdf をもつ。

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 - 1/e^x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

$Y := -\ln X$ と変換する。

- (a) X の pdf を求めなさい。
- (b) Y の cdf を求めなさい。
- (c) Y の pdf を求めなさい。

解答例

1. 確率・統計の基本用語

- (a) 横軸に累積相対度数, 縦軸に (その階級以下の観測値の総和) / (全観測値の総和) をとった折れ線グラフ.
- (b) 2 変量データの度数分布表.
- (c) 結果が偶然に支配される実験.
 - 「偶然」に類する言葉がなければ 0 点.
- (d) 任意の x に対して $\Pr[X = x]$ を与える関数.

2. 連続分布

- (a)

$$\begin{aligned}\Pr[2 < X \leq 3] &= \Pr[X \leq 3] - \Pr[X \leq 2] \\ &= F_X(3) - F_X(2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3^3}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \\ &= -\frac{1}{27} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{19}{216}\end{aligned}$$

- (b) 任意の $x > 1$ について

$$\begin{aligned}f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= 3x^{-4}\end{aligned}$$

したがって

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 3x^{-4} & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

- 正しい cdf の微分で 5 点.

- (c)

$$\begin{aligned}E(X) &:= \int_1^\infty x \cdot 3x^{-4} dx \\ &= 3 \int_1^\infty x^{-3} dx \\ &= 3 \left[-\frac{1}{2}x^{-2} \right] \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

- 正しい pdf に基づく期待値の定義で 5 点.

(d)

$$\begin{aligned} E(X^2) &:= \int_1^\infty x^2 \cdot 3x^{-4} dx \\ &= 3 \int_1^\infty x^{-2} dx \\ &= 3 [-x^{-1}] \\ &= 3 \end{aligned}$$

- 正しい pdf に基づく期待値の定義で 5 点.

(e)

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 3 - \frac{9}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- 分散の計算公式で 5 点.

3. 確率変数の変換

(a) 任意の $x > 0$ について

$$\begin{aligned} f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= e^{-x} \end{aligned}$$

したがって

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1/e^x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

- 正しい cdf の微分で 5 点.

(b) 任意の y について

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \leq y] \\ &= \Pr[-\ln X \leq y] \\ &= \Pr[\ln X \geq -y] \\ &= \Pr[X \geq e^{-y}] \\ &= 1 - \Pr[X < e^{-y}] \\ &= 1 - F_X(e^{-y}) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{e^{e^{-y}}}\right) \\ &= \frac{1}{e^{e^{-y}}} \\ &= e^{-e^{-y}} \end{aligned}$$

(c) 任意の y について

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= e^{-y} e^{-e^{-y}} \end{aligned}$$

- 正しい cdf の微分で 5 点.