第 5 回　条件付き確率と事象の独立性（4.5）

村澤 康友

2025 年 10 月 10 日

今日のポイント

1. B が起こったという条件の下での A の条件付き確率は $P(A|B) := P(A \cap B)/P(B)$.
2. $P(A|B) = P(A)$ なら A と B は独立という．$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ で定義してもよい.
3. 条件付き確率の定義からベイズの定理が導ける.

目次

1　条件付き確率（p. 81）

ある試行の事象を A, B とする.

定義 1. B が起こったという条件の下での A の**条件付き確率**は

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ただし $P(B) > 0$.

注 1. B を標本空間としたときの $A \cap B$ の確率.

例 1. つぼの中に A または B と書かれた 2 色の玉が以下のように入っている.

種類	個数
A の白玉	2
A の黒玉	1
B の白玉	1
B の黒玉	2
計	6

A を取り出す確率は

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{3}{6} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

白を取り出したという条件の下で，それが A である条件付き確率は

$$\begin{aligned} P(A|\text{白}) &:= \frac{P(A \cap \text{白})}{P(\text{白})} \\ &= \frac{2/6}{3/6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

定理 1 (乗法定理)**.**

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\ &= P(B|A)P(A) \end{aligned}$$

証明. 条件付き確率の定義より明らか.　□

2　事象の独立性（p. 83）

2.1　2 つの事象

定義 2. $P(A|B) = P(A)$ なら A と B は**独立**という.

注 2. B において $A \cap B$ が起こる確率と，Ω において A が起こる確率が等しい．そのため B が起こったという情報が，A が起こる確率に影響しない.

注 3. 乗法定理より，以下の 3 つは同値.

$$\begin{aligned} P(A|B) &= P(A) \\ P(B|A) &= P(B) \\ P(A \cap B) &= P(A)P(B) \end{aligned}$$

例 2. つぼの中に A または B と書かれた 2 色の玉が以下のように入っている.

種類	個数
A の白玉	2
A の黒玉	2
B の白玉	2
B の黒玉	2
計	8

A を取り出す確率は

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{4}{8} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

白を取り出したという条件の下で，それが A である条件付き確率は

$$\begin{aligned} P(A|\text{白}) &:= \frac{P(A \cap \text{白})}{P(\text{白})} \\ &= \frac{2/8}{4/8} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.2　3 つ以上の事象

ある試行の事象を A, B, C とする.

定義 3. 以下が成り立つとき A, B, C は**（相互に）独立**という.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ P(B \cap C) &= P(B)P(C) \\ P(A \cap C) &= P(A)P(C) \\ P(A \cap B \cap C) &= P(A)P(B)P(C) \end{aligned}$$

注 4. 4 つ以上の事象についても同様に定義する.

3　ベイズの定理（p. 84）

Ω の分割を $B_1, \ldots, B_n$ とする．すなわち $B_1, \ldots, B_n$ は排反で $B_1 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$. $B_1, \ldots, B_n$（原因）は異なる確率で事象 A（結果）をもたらす．A が起こったという条件の下で，$B_1, \ldots, B_n$ の条件付き確率を求める．以下の確率は分かっている.

- $P(B_i)$：各原因の確率
- $P(A|B_i)$：各原因の下での A の条件付き確率

定義 4. $P(B_i)$ を B_i の**事前確率**という.

定義 5. $P(B_i|A)$ を B_i の**事後確率**という.

定理 2 (全確率の定理)**.**

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

証明. $B_1, \ldots, B_n$ が排反なら $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_n$ も排反．したがって

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) \\ &= P(A \cap (B_1 \cup \cdots \cup B_n)) \\ &= P((A \cap B_1) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)) \\ &= P(A \cap B_1) + \cdots + P(A \cap B_n) \\ &= P(A|B_1)P(B_1) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n) \end{aligned}$$

□

定理 3 (ベイズの定理)**.**

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

証明. 乗法定理と全確率の定理より

$$
\begin{aligned}
P(B_i|A) &:= \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}
\end{aligned}
$$

□

例 3. 診断がガンである事象を A, 実際にガンである事象を B とする．以下の確率が分かっている．

$$
\begin{aligned}
P(B) &= .005 \\
P(A|B) &= .95 \\
P(A^c|B^c) &= .95
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)} \\
&= \frac{.95 \cdot .005}{.95 \cdot .005 + .05 \cdot .995} \\
&= \frac{.00475}{.0545} \\
&\approx .0872
\end{aligned}
$$

1000 人当たりの頻度で考えると分かりやすい．

例 4 (モンティ・ホール問題)**.** 3 つのドアの 1 つは「当たり」, 2 つは「はずれ」. 挑戦者が 1 つを選択した後, 司会者は残り 2 つから「はずれ」の方を開けて見せる（どちらも「はずれ」ならどちらかをランダムに選ぶ）. ここで挑戦者はドアを変更してもよい．挑戦者はドアを変更すべきか？

正解は「変更すべき」. 挑戦者がドア A を選び, 司会者がドア B を開けたとする．以下の通り事象を定義する．

- 事象 A：ドア A が当たり
- 事象 B：ドア B が当たり
- 事象 C：ドア C が当たり
- 事象 b：司会者がドア B を開ける

このとき

$$
\begin{aligned}
P(A|b) &:= \frac{P(A \cap b)}{P(b)} \\
&= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\
&= \frac{(1/2)(1/3)}{(1/2)(1/3) + 0 + 1/3} \\
&= \frac{1}{3} \\
P(C|b) &:= \frac{P(C \cap b)}{P(b)} \\
&= \frac{P(b|C)P(C)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)} \\
&= \frac{1/3}{(1/2)(1/3) + 0 + 1/3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

したがって A と b は独立だが, C と b は独立でない．

例 5 (3 囚人問題)**.** 3 人の囚人 A, B, C がいる．全員処刑の予定が 1 人だけ恩赦となった．誰が恩赦か囚人たちはまだ知らない．結果を知っている看守に対し, 囚人 A が「B と C のどちらかは必ず処刑なのだから, 処刑される 1 人の名前を教えても, 私に情報を与えることにはならないだろう．1 人を教えてくれないか」と頼んだ．看守は納得して「囚人 B は処刑される」と教えてやった．囚人 A は自分が恩赦の確率が 1/2 になったと喜んだ．囚人 A の認識は正しいか？

正解は「基本的に間違い」. 以下の通り事象を定義する．

- 事象 A：囚人 A が恩赦
- 事象 B：囚人 B が恩赦
- 事象 C：囚人 C が恩赦
- 事象 b：看守が「囚人 B は処刑」と言う

このとき

$$
\begin{aligned}
P(A|b) &:= \frac{P(A \cap b)}{P(b)} \\
&= \frac{P(b|A)P(A)}{P(b|A)P(A) + P(b|B)P(B) + P(b|C)P(C)}
\end{aligned}
$$

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$ なら（違うかもしれない）

$$\begin{aligned}
P(A|b) &= \frac{P(b|A)(1/3)}{P(b|A)(1/3) + 0 + 1/3} \\
&= \frac{P(b|A)}{P(b|A) + 1}
\end{aligned}$$

$P(b|A) = 1/2$ なら（違うかもしれない）

$$\begin{aligned}
P(A|b) &= \frac{1/2}{1/2 + 1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

したがって（追加的な仮定の下で）A と b は独立.

4　今日のキーワード

条件付き確率，乗法定理，独立性（2 つの事象，3 つの事象），事前確率，事後確率，全確率の定理，ベイズの定理

5　次回までの準備

復習　教科書第 4 章 5 節，復習テスト 5

予習　教科書第 5 章 1 節