経済統計：第 2 回中間試験

村澤 康友

2015 年 6 月 8 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1.（20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）2 項分布
   （b）周辺密度関数
   （c）相関係数
   （d）（確率変数の）独立性
2.（30 点）
   （a）$X \sim \mathrm{N}(1, 9)$ とする．$\Pr[|X| \leq 2]$ を標準正規分布表を利用して求めなさい．
   （b）区間 $[0, 2]$ 上の一様分布の cdf と pdf を式で書きなさい．
   （c）ベルヌーイ確率変数の 3 次の積率を求めなさい．
3.（50 点）2 次元確率ベクトル (X, Y) は以下の同時分布をもつ．

$X \backslash Y$	0	1
0	1/4	1/4
1	1/3	1/6

   （a）X と Y の周辺分布をそれぞれ求めなさい．
   （b）X と Y の期待値をそれぞれ求めなさい．
   （c）X と Y の分散をそれぞれ求めなさい．
   （d）XY の分布を求めなさい．
   （e）X と Y の共分散を求めなさい．

解答例

1. 確率の基本用語
   (a) 独立かつ同一な n 回のベルヌーイ試行における成功回数の分布.
      - 確率関数で定義しても OK（ただし書き間違いは 0 点）.
      - 「成功回数」がなければ 0 点.
      - 2 項定理は 0 点.
   (b) 任意の x について $f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$. ただし $f_{X,Y}(.,.)$ は同時密度関数.
   (c) 標準化した確率変数の共分散.
      - $\sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y)$ でも OK.
   (d) 任意の (x,y) について $f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x)$ なら X と Y は独立.
      - $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ も OK.
      - cdf で定義しても OK.
      - 事象の独立性は 0 点.
      - 「何の影響も受けない」等は定義でないので 0 点.
2. 確率分布の基礎
   (a)

$$
\begin{aligned}
\Pr[|X| \le 2] &= \Pr[-2 \le X \le 2] \\
&= \Pr\left[-1 \le \frac{X-1}{3} \le \frac{1}{3}\right] \\
&= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) - \Phi(-1) \\
&= 1 - Q\left(\frac{1}{3}\right) - Q(1) \\
&= 1 - .3707 - .15866 \\
&= .47064
\end{aligned}
$$

      - $\Pr[-2 \le X \le 2]$ で 2 点.
      - $\Pr[-1 \le (X-1)/3 \le 1/3]$ で 5 点.
   (b) 任意の u について

$$
F_U(u) := \begin{cases} 0 & \text{for } u < 0 \\ u/2 & \text{for } 0 \le u \le 2 \\ 1 & \text{for } u > 2 \end{cases}
$$

$$
f_U(u) := \begin{cases} 1/2 & \text{for } 0 \le u \le 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
$$

   (c) ベルヌーイ確率変数は

$$
X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}
$$

$X^3 = X$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X^3\right) &= \mathrm{E}(X) \\ &= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) \\ &= p \end{aligned}$$

- 3 次の積率の定義で 5 点.

3. 最も単純な 2 変量分布

（a）

$$\begin{aligned} X &= \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases} \\ Y &= \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 5/12 \\ 0 & \text{with pr. } 7/12 \end{cases} \end{aligned}$$

（b）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ \mathrm{E}(Y) &:= 1 \cdot \frac{5}{12} + 0 \cdot \frac{7}{12} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

（c）簡単な求め方は

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= \mathrm{E}(X)(1-\mathrm{E}(X)) \\ &= \frac{1}{4} \\ \operatorname{var}(Y) &= \mathrm{E}(Y)(1-\mathrm{E}(Y)) \\ &= \frac{35}{144} \end{aligned}$$

同時分布または周辺分布から定義通りに求めてもよい.

（d）

$$XY = \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/6 \\ 0 & \text{with pr. } 5/6 \end{cases}$$

（e）簡単な求め方は

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{12} \\ &= -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

同時分布または周辺分布から定義通りに求めてもよい.