経済統計：期末試験

村澤 康友

2018 年 8 月 6 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 片側検定問題
   (b) χ^2 検定
   (c) 重回帰モデル
   (d) F 値
2. （30 点）回帰分析について，以下の問いに簡潔かつ正確に答えなさい．
   (a) 回帰の誤差と残差の違いは何か？
   (b) ガウス＝マルコフ定理は何を主張するか？
   (c) ある回帰係数の OLS 推定値は 3，標準誤差は 1 であった．t 値と両側 p 値を求めなさい（標準正規分布による近似でよい）．
3. （50 点）ある大学で祝日の授業実施を検討している．そこで無作為に抽出した 10 人の学生に意見を求めたところ 8 人が反対であった．祝日の授業実施に反対の学生の割合を p として，次の検定問題を考える．

$$H_0 : p = 0.5 \quad \text{vs} \quad H_1 : p > 0.5$$

   (a) （漸近検定）
      i. 無作為標本を $(X_1, \dots, X_n)$ とする．標本比率 $\bar{X}$ の漸近分布を導出しなさい．
      ii. H_0 の下で $\Pr\left[\bar{X} \geq 0.8\right]$ を求めなさい．
      iii. 有意水準 5 %の検定の結果はどうなるか？
   (b) （厳密な検定）
      i. 標本和 $S := X_1 + \cdots + X_n$ の（厳密な）分布を導出しなさい．
      ii. H_0 の下で $\Pr[S \geq 8]$ を求めなさい．
      iii. 有意水準 5 %の検定の結果はどうなるか？

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) $H_0 : \theta \leq \theta_0$ vs $H_1 : \theta > \theta_0$ または $H_0 : \theta \geq \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$.
      - 検定問題として書かなければ 0 点.
   (b) χ^2 統計量を用いる検定.
      - χ^2 統計量の定義は 2 点.
      - 「χ^2 分布（表）に基づく検定」は何が χ^2 分布か不明確なので 0 点.
      - 「母分散の検定」は定義でないので 0 点.
   (c) 定数項以外に説明変数が複数ある線形回帰モデル.
      - 回帰の説明のみは 1 点．線形回帰の説明のみは 2 点.
   (d) $H_0 : \beta = 0$ を検定する F 統計量の値.
      - 「$H_0 : \beta = 0$ を検定する」がなければ 1 点.
2. 回帰分析の基礎
   (a) 例えば単回帰モデルの場合，誤差は

$$\begin{aligned} u_i &:= y_i - \mathrm{E}(y_i|x_i) \\ &= y_i - \alpha - \beta x_i \end{aligned}$$

   ただし (α, β) は真の係数．残差は

$$e_i := y_i - a - bx_i$$

   ただし (a, b) は仮の係数.
      - 各 5 点.
   (b) 古典的線形回帰モデルの回帰係数の OLS 推定量は BLUE.
      - BLUE で 5 点.
   (c) t 値は 3．標準正規分布表より $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ なら

$$\begin{aligned} \Pr[|Z| \geq 3] &= 2 \Pr[Z \geq 3] \\ &= 2 \cdot .0013499 \\ &= .0026998 \end{aligned}$$

   したがって両側 p 値は.0026998.
      - 各 5 点.
3. 母比率の検定
   (a)（漸近検定）
      i. 中心極限定理より

$$\bar{X} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

         - $p = .5$ とした H_0 の下での分布は 5 点.
         - $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ は 5 点.

ii. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると

$$
\begin{aligned}
\Pr\left[\bar{X} \geq .8\right] &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - .5}{\sqrt{.5(1-.5)/10}} \geq \frac{.8 - .5}{\sqrt{.5(1-.5)/10}}\right] \\
&\approx \Pr\left[Z \geq .3\sqrt{40}\right] \\
&= \Pr\left[Z \geq \sqrt{3.6}\right] \\
&\approx \Pr[Z \geq 1.90] \\
&\approx .028717
\end{aligned}
$$

- 検定統計量（z 値）のみは 5 点.

iii. p 値≦有意水準より H_0 は棄却.

- 前問の p 値と整合的なら OK.
- 検定統計量と棄却域を用いても OK.
- 棄却域のみは 2 点.

(b)（厳密な検定）

i. $\mathrm{Bin}(n,p)$ の pmf は

$$
\Pr[S = s] = {}_nC_s p^s (1-p)^{n-s}
$$

ii.

$$
\begin{aligned}
\Pr[S = 8] &= {}_{10}C_8 (.5)^{10} \\
&= \frac{10 \cdot 9}{2} \frac{1}{2^{10}} \\
&= \frac{45}{1024} \\
\Pr[S = 9] &= {}_{10}C_9 (.5)^{10} \\
&= \frac{10}{1024} \\
\Pr[S = 10] &= {}_{10}C_{10} (.5)^{10} \\
&= \frac{1}{1024}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\Pr[S \geq 8] &= \frac{56}{1024} \\
&= \frac{7}{128} \\
&= .0546875
\end{aligned}
$$

iii. p 値＞有意水準より H_0 は採択.

- 前問の p 値と整合的なら OK.