経済統計：第 2 回中間試験

村澤 康友

2018 年 6 月 4 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) ベルヌーイ分布
   (b) 周辺確率密度関数
   (c) 条件つき確率質量関数
   (d) 漸近分布
2. （30 点）某大学の「統計入門」の試験は五択問題であり，25 問中 10 問以上の正答で合格となる．A 君は一度も授業に出席しておらず，問題文すら理解できないが，無作為に選択肢を選び，あわよくば合格しようと考えている．A 君の正答数を X とする．
   (a) X の確率質量関数を式で書きなさい．
   (b) X の平均と分散を求めなさい（ヒント：25 回の独立なベルヌーイ試行と考える）．
   (c) $\Pr[X \geq 10]$ の厳密な計算は面倒だが，正規分布で近似して求めることができる．標準正規分布表を利用して A 君が合格する確率を近似的に求めなさい．
3. （50 点）(X, Y) は次の同時累積分布関数をもつ．

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & \text{for } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

   (a) (X, Y) の同時確率密度関数を求めなさい．
   (b) X と Y の周辺確率密度関数を求めなさい．
   (c) X と Y の平均を求めなさい．
   (d) X と Y の分散を求めなさい．
   (e) X と Y の共分散を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) ベルヌーイ試行における成功を 1，失敗を 0 とした確率変数の分布.
       - 結果が 0 と 1 でなければ 2 点.
   (b) $f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y$.
   (c) $p_{X|Y}(x|Y=y) := p_{X,Y}(x,y)/p_Y(y)$.
   (d) n が大きいときの X_n の近似分布.
2. 2 項分布と正規分布
   (a) X の確率質量関数は

$$p_X(x) = \begin{cases} {}_{25}C_x(.2)^x(1-.2)^{25-x} & \text{for } x = 0, 1, \dots, 25 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

   (b) 第 i 問の正解／不正解を次の確率変数で表す.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{正解} \\ 0 & \text{不正解} \end{cases}$$

   $X_i \sim \mathrm{Bin}(1, .2)$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_i) &= .2 \\ \mathrm{var}(X_i) &= .2(1-.2) \\ &= .16 \end{aligned}$$

   $X = X_1 + \cdots + X_{25}$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_{25}) \\ &= \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_{25}) \\ &= 5 \end{aligned}$$

   また $X_1, \dots, X_{25}$ は独立なので

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_{25}) \\ &= \mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_{25}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

       - 平均で 5 点，分散で 5 点.
   (c) $X \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(5, 4)$ とすると

$$\begin{aligned} \Pr[X \geq 10] &= \Pr\left[\frac{X-5}{2} \geq \frac{10-5}{2}\right] \\ &\approx \Pr[Z \geq 2.5] \end{aligned}$$

   ただし $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$．標準正規分布表より $\Pr[Z \geq 2.5] \approx .0062097$.
       - 前問の解答と整合的なら OK.
       - 標準化で 5 点.
3. 2 変量分布

（a）(X, Y) の同時確率密度関数は

$$
\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x,y) \\
&= \begin{cases} x^{-1/2}y^{-1/2}/4 & \text{for } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
\end{aligned}
$$

（b）X の周辺確率密度関数は，任意の $x \in [0,1]$ について

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{x^{-1/2}y^{-1/2}}{4}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{x^{-1/2}}{4}\int_0^1 y^{-1/2}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{x^{-1/2}}{4}\left[2y^{1/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{x^{-1/2}}{2}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
f_X(x) = \begin{cases} x^{-1/2}/2 & \text{for } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
$$

同様に Y の周辺密度関数は

$$
f_Y(y) = \begin{cases} y^{-1/2}/2 & \text{for } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}
$$

- 前問の解答と整合的なら OK.

（c）X の平均は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^1 x\frac{x^{-1/2}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{1/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Y の平均も同じ．

- 前問の解答と整合的なら OK.

（d）X の 2 次の積率は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X^2\right) &= \int_0^1 x^2 \frac{x^{-1/2}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

X の分散は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \\
&= \frac{4}{45}
\end{aligned}
$$

Y の分散も同じ.

（e）X と Y は独立なので共分散は 0.