経済統計：第 3 回中間試験

村澤 康友

2019 年 7 月 8 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 無作為標本
   (b) 尤度
   (c) 積率（モーメント）法
   (d) 最小分散不偏推定量
2. （30 点）幾何分布 $\mathrm{NB}(1,p)$ の確率質量関数は

$$p_X(x)=\begin{cases}p(1-p)^x & \text{for } x=0,1,\dots\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

   $\mathrm{NB}(1,p)$ から抽出した大きさ n の無作為標本を $(X_1,\dots,X_n)$ とする．
   (a) $(X_1,\dots,X_n)=(x_1,\dots,x_n)$ の確率を求めなさい．
   (b) $(X_1,\dots,X_n)=(x_1,\dots,x_n)$ を観測したときの p の対数尤度関数を書きなさい．
   (c) p の ML 推定値を求め，ML 推定量を標本平均 $\bar{X}$ を用いて表しなさい．
3. （50 点）$\mathrm{N}\left(\mu_X,\sigma_X^2\right)$，$\mathrm{N}\left(\mu_Y,\sigma_Y^2\right)$ から独立に抽出した無作為標本を $(X_1,\dots,X_m)$，$(Y_1,\dots,Y_n)$ とする．μ_X,μ_Y は既知とする．
   (a) 標本分散 $\hat{\sigma}_X^2,\hat{\sigma}_Y^2$ を式で定義しなさい．
   (b) $\hat{\sigma}_X^2,\hat{\sigma}_Y^2$ の分布をそれぞれ求めなさい．
   (c) $\hat{\sigma}_X^2/\hat{\sigma}_Y^2$ の分布を求めなさい．
   (d) $m=6$，$n=4$ として σ_X^2/σ_Y^2 の 90 %信頼区間を求めなさい．
   (e) $m=60$，$n=40$ として σ_X^2/σ_Y^2 の 98 %信頼区間を求めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 無作為抽出した標本.
   (b) ある母数の下で標本の実現値を観測する確率（密度）を，その母数の尤度という.
   (c) 母数と積率の関係を表す式で，積率を標本積率に置き換えて求めた解を母数の推定値とする手法.
      - 「母数と積率の関係を表す式で」がなければ 0 点（「解」の意味が不明).
   (d) 不偏推定量の中で分散が最小の推定量.
2. 最尤法
   (a)

$$\begin{aligned}\Pr[(X_1,\dots,X_n)=(x_1,\dots,x_n)] &= \Pr[X_1=x_1]\cdots\Pr[X_n=x_n]\\ &= p(1-p)^{x_1}\cdots p(1-p)^{x_n}\\ &= p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i}\end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned}\ell(p;x_1,\dots,x_n) &= \ln p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i}\\ &= n\ln p+\sum_{i=1}^n x_i\ln(1-p)\end{aligned}$$

   (c) 尤度最大化の 1 階の条件は

$$\frac{n}{p^*}-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-p^*}=0$$

すなわち

$$n(1-p^*)=p^*\sum_{i=1}^n x_i$$

または

$$n-np^*=p^*\sum_{i=1}^n x_i$$

したがって

$$\begin{aligned}p^* &= \frac{n}{n+\sum_{i=1}^n x_i}\\ &= \frac{1}{1+(1/n)\sum_{i=1}^n x_i}\\ &= \frac{1}{1+\bar{x}}\end{aligned}$$

p の ML 推定量は

$$\hat{p}=\frac{1}{1+\bar{X}}$$

3. 母分散の比の区間推定

(a)

$$\hat{\sigma}_X^2 := \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \mu_X)^2$$
$$\hat{\sigma}_Y^2 := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}(Y_j - \mu_Y)^2$$

(b)

$$\frac{m\hat{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m)$$
$$\frac{n\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n)$$

(c)

$$\frac{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m, n)$$

すなわち

$$\frac{\hat{\sigma}_X^2/\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m, n)$$

(d) F 分布表より，$m = 6$，$n = 4$ なら

$$\Pr\left[\frac{1}{4.534} \le \frac{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2} \le 6.163\right] = .9$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{4.534} \le \frac{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2} \le 6.163 &\iff \frac{1}{6.163} \le \frac{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2} \le 4.534 \\ &\iff \frac{1}{6.163}\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2} \le \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \le 4.534\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}\end{aligned}$$

したがって σ_X^2/σ_Y^2 の 90 %信頼区間は

$$\left[\frac{1}{6.163}\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}, 4.534\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}\right]$$

(e) F 分布表より，$m = 60$，$n = 40$ なら

$$\Pr\left[\frac{1}{1.936} \le \frac{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2} \le 2.019\right] = .98$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.936} \le \frac{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2} \le 2.019 &\iff \frac{1}{2.019} \le \frac{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2}{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2} \le 1.936 \\ &\iff \frac{1}{2.019}\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2} \le \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \le 1.936\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}\end{aligned}$$

したがって σ_X^2/σ_Y^2 の 98 %信頼区間は

$$\left[\frac{1}{2.019}\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}, 1.936\frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}\right]$$