

# 第7回 期待値と積率 (5.2–5.3)

村澤 康友

2025 年 10 月 17 日

## 今日のポイント

1. 確率変数  $X$  の期待値は，離散なら  $E(X) := \sum_x xp_X(x)$ ，連続なら  $E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx$ .
2. 確率変数の特徴は積率で表せる． $X$  の  $k$  次の積率は  $E(X^k)$ ，中心積率は  $E((X - \mu_X)^k)$ ，標準化積率は  $E([(X - \mu_X)/\sigma_X]^k)$ ．1 次の積率を平均，2 次の中心積率を分散，3 次の標準化積率を歪度，4 次の標準化積率を尖度という．
3.  $X$  の積率母関数 (mgf) は  $M_X(t) := E(e^{tX})$ ．mgf の  $k$  階導関数を  $t = 0$  で評価すると  $k$  次の積率が得られる．

## 目次

|     |                     |   |
|-----|---------------------|---|
| 1   | 1 変数関数の積分           | 1 |
| 1.1 | 不定積分                | 1 |
| 1.2 | 定積分                 | 1 |
| 1.3 | 積分の演算               | 1 |
| 1.4 | 積分の公式               | 2 |
| 2   | 期待値                 | 2 |
| 2.1 | 期待値 (p. 95)         | 2 |
| 2.2 | 確率変数の関数の期待値 (p. 95) | 2 |
| 2.3 | 期待値の線形性 (p. 96)     | 2 |
| 3   | 積率                  | 2 |
| 3.1 | 積率 (p. 102)         | 2 |
| 3.2 | 中心積率 (p. 102)       | 2 |
| 3.3 | 標準化積率 (p. 102)      | 3 |

|   |                |   |
|---|----------------|---|
| 4 | 積率母関数 (p. 103) | 4 |
| 5 | 今日のキーワード       | 5 |
| 6 | 次回までの準備        | 5 |

## 1 1 変数関数の積分

### 1.1 不定積分

**定義 1.**  $F'(\cdot) = f(\cdot)$  となる  $F(\cdot)$  を  $f(\cdot)$  の原始関数という．

注 1. 任意の定数  $C$  について  $F^*(\cdot) := F(\cdot) + C$  も  $f(\cdot)$  の原始関数．

**定義 2.** 原始関数を求めることを関数の不定積分という．

注 2.  $f(\cdot)$  の不定積分を  $\int f(x) dx$  と書く．すなわち

$$\int f(x) dx := F(x) + C$$

ただし  $C$  は任意の積分定数．

### 1.2 定積分

**定義 3.** 区間  $[a, b]$  上の  $f(\cdot)$  の定積分は

$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a)$$

注 3. 積分定数が消えるので定積分は一意．

注 4.  $y = 0$ ,  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  で囲まれた領域の面積を表す．

### 1.3 積分の演算

**定理 1** (関数の定数倍)．

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx + C$$

注 5. 定積分なら

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

定理 2 (関数の和).

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx + C$$

注 6. 定積分なら

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

## 1.4 積分の公式

定理 3 (べき関数).  $n \neq -1$  なら

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

定理 4.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

定理 5 (指数関数).

$$\int e^x dx = e^x + C$$

## 2 期待値

### 2.1 期待値 (p. 95)

$X$  を確率変数とする.

定義 4.  $X$  の期待値は

$$E(X) := \begin{cases} \sum_x xp_X(x) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx & (\text{連続}) \end{cases}$$

注 7. pmf・pdf を重みとした加重平均.

例 1. 次の確率変数を考える.

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$

$X$  の期待値は

$$\begin{aligned} E(X) &:= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) \\ &= p \end{aligned}$$

### 2.2 確率変数の関数の期待値 (p. 95)

定義 5.  $g(X)$  の期待値は

$$E(g(X)) := \begin{cases} \sum_x g(x)p_X(x) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x) dx & (\text{連続}) \end{cases}$$

### 2.3 期待値の線形性 (p. 96)

定理 6 (期待値の線形性). 任意の  $a, b$  について

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

証明.  $X$  が連続なら

$$\begin{aligned} E(aX + b) &:= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f_X(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

離散の場合も同様. □

注 8. より一般的に  $(X, Y)$  の 2 変量分布について

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

2 変量分布は第 7 章で扱う.

## 3 積率

### 3.1 積率 (p. 102)

定義 6.  $X$  の  $k$  次の積率 (モーメント) は

$$\mu_{X,k} := E(X^k)$$

定義 7. 1 次の積率を平均という.

注 9.  $\mu_X$  と表す.

注 10. 確率変数の平均は期待値であり, データの (算術) 平均とは異なる.

### 3.2 中心積率 (p. 102)

定義 8.  $X$  の  $k$  次の中心積率は

$$\mu'_{X,k} := E((X - \mu_X)^k)$$

定義 9. 2 次の中心積率を分散という.

注 11.  $\text{var}(X)$  と書く. すなわち

$$\text{var}(X) := E((X - \mu_X)^2)$$

定義 10. 分散の平方根を標準偏差という.

注 12.  $\sigma_X$  と表す.

**例 2.** 次の確率変数を考える.

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$

$\mu_X = p$  より  $X$  の分散は

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &:= (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

**定理 7.**

$$\text{var}(X) = E(X^2) - \mu_X^2$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &:= E((X - \mu_X)^2) \\ &= E(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu_X E(X) + \mu_X^2 \\ &= E(X^2) - \mu_X^2 \end{aligned}$$

□

**補題 1.** 任意の  $a$  について

$$\text{var}(aX) = a^2 \text{var}(X)$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{var}(aX) &:= E((aX - E(aX))^2) \\ &= E((aX - aE(X))^2) \\ &= E([a(X - E(X))]^2) \\ &= E(a^2(X - E(X))^2) \\ &= a^2 E((X - E(X))^2) \\ &= a^2 \text{var}(X) \end{aligned}$$

□

**補題 2.** 任意の  $b$  について

$$\text{var}(X + b) = \text{var}(X)$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{var}(X + b) &:= E((X + b - E(X + b))^2) \\ &= E([X + b - (E(X) + b)]^2) \\ &= E((X - E(X))^2) \\ &= \text{var}(X) \end{aligned}$$

□

**定理 8.** 任意の  $a, b$  について

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

証明. 前 2 補題より

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + b) &= \text{var}(aX) \\ &= a^2 \text{var}(X) \end{aligned}$$

□

### 3.3 標準化積率 (p. 102)

**定義 11.** 確率変数から平均を引き標準偏差で割る変換を**標準化**という.

注 13. 式で表すと

$$Z := \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

$E(Z) = 0$ ,  $\text{var}(Z) = 1$  となる.

□

**定義 12.**  $X$  の  $k$  次の標準化積率は

$$\alpha_{X,k} := E\left(\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^k\right)$$

**定義 13.** 3 次の標準化積率を**歪度**という.

注 14. すなわち

$$\alpha_{X,3} := E\left(\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^3\right)$$

pdf が対称なら  $\alpha_{X,3} = 0$ .

□

**例 3.** 右に歪んだ分布 (図 1)

**定義 14.** 4 次の標準化積率を**尖度**という.

注 15. すなわち

$$\alpha_{X,4} := E\left(\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\right)^4\right)$$

正規分布なら  $\alpha_{X,4} = 3$ . これを基準に (過剰) 尖度を  $\alpha_{X,4} - 3$  と定義することもある.

**例 4.** 正規分布より尖った分布 (図 2).

□



図1 右に歪んだ分布（ガンベル分布）

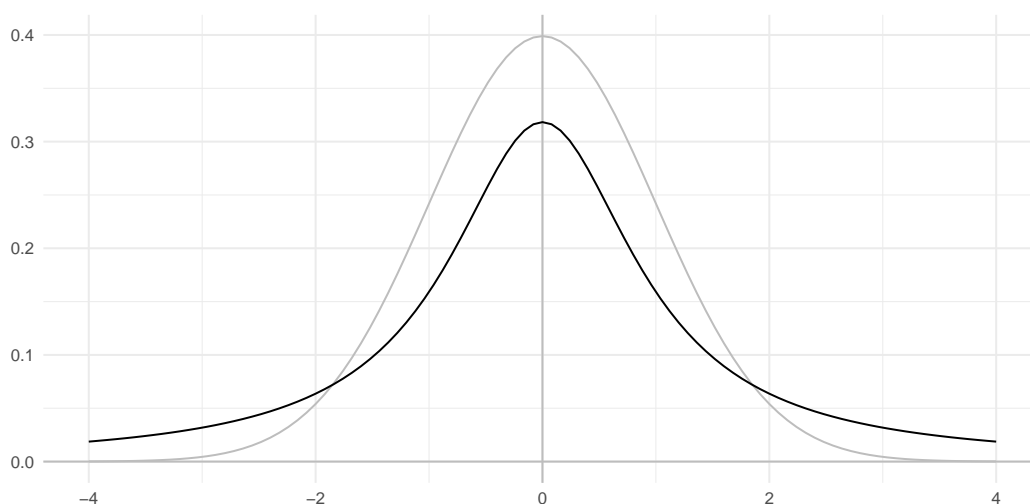


図2 正規分布より尖った分布（コーシー分布）

#### 4 積率母関数 (p. 103)

**定義 15.**  $X$  の積率母関数 (*moment generating function, mgf*) は

$$M_X(t) := E(e^{tX})$$

注 16. 積分でなく微分で積率が求まる.

注 17. cdf・pmf/pdf と 1 対 1 対応するので確率分布の 3 つ目の表現と言える.

**定理 9.** 任意の  $k$  について

$$\frac{d^k M_X}{dt^k}(0) = E(X^k)$$

証明. 任意の  $k$  について

$$\begin{aligned} \frac{d^k M_X}{dt^k}(t) &= \frac{d^k}{dt^k} E(e^{tX}) \\ &= E\left(\frac{d^k}{dt^k} e^{tX}\right) \\ &= E(X^k e^{tX}) \end{aligned}$$

$t = 0$  なら  $E(X^k)$ . □

**例 5.** 次の確率変数を考える.

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1 - p \end{cases}$$

$X$  の mgf は

$$\begin{aligned} M_X(t) &:= E(e^{tX}) \\ &= e^{t \cdot 1} \cdot p + e^{t \cdot 0} \cdot (1 - p) \\ &= pe^t + 1 - p \end{aligned}$$

微分すると

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= pe^t \\ M''_X(t) &= pe^t \end{aligned}$$

1・2 次の積率は

$$\begin{aligned} E(X) &= M'_X(0) \\ &= p \\ E(X^2) &= M''_X(0) \\ &= p \end{aligned}$$

分散は

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

## 5 今日のキーワード

期待値, 平均, 積率 (モーメント), 中心積率, 分散, 標準偏差, 標準化, 標準化積率, 歪度, 尖度, 積率母関数 (mgf)

## 6 次回までの準備

**復習** 教科書第 5 章 2-3 節, 復習テスト 7

**予習** 教科書第 5 章 4-5 節