計量経済 I：復習テスト 8

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2025 年 6 月 3 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を順に重ねて左上でホチキス止めし，中間テスト実施日（6 月 10 日の予定）に提出すること．

1. 2 変量データを $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ とする．y_i の x_i 上への定数項なしの古典的正規線形回帰モデルは
$$\{y_i\}|\{x_i\} \sim \mathrm{IN}\left(\beta x_i, \sigma^2\right)$$
σ^2 を既知として次の両側検定問題を考える．
$$H_0 : \beta = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta \neq c$$
   (a) β の OLS 推定量を b とすると
$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$
$\{x_i\}$ を所与として b の（条件付き）分布を求めなさい．

   (b) H_0 の下で $\mathrm{N}(0, 1)$ にしたがう検定統計量を与えなさい．

   (c) H_0 の下で $\chi^2(1)$ にしたがう検定統計量を与えなさい．

2. 前問と同じ回帰モデルを仮定し，σ^2 を未知として片側検定問題を考える．

（a）σ^2 の不偏推定量 s^2 を定義しなさい．

（b）s^2 の分布を与えなさい．

（c）検定統計量を与えなさい．

（d）検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい．

3. 前問と同じ回帰モデルを仮定し，σ^2 を未知として両側検定問題を考える．

（a）前問とは別の検定統計量を与えなさい．

（b）検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい．

解答例

1.（a）期待値の線形性と $(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)$ の独立性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(b|x_1, \dots, x_n) &= \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}|x_1, \dots, x_n\right) \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \,\mathrm{E}(y_i|x_1, \dots, x_n)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \,\mathrm{E}(y_i|x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \beta x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \frac{\beta \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \beta
\end{aligned}$$

線形変換の分散の公式と $(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)$ の独立性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(b|x_1, \dots, x_n) &= \mathrm{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}|x_1, \dots, x_n\right) \\
&= \frac{\mathrm{var}(\sum_{i=1}^n x_i y_i|x_1, \dots, x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{var}(x_i y_i|x_1, \dots, x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \,\mathrm{var}(y_i|x_1, \dots, x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \,\mathrm{var}(y_i|x_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma^2}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}
\end{aligned}$$

$\{x_i\}$ を所与として $\{y_i\}$ は正規分布だから，$\{y_i\}$ の線形変換である b も正規分布．したがって

$$b|\{x_i\} \sim \mathrm{N}\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

（b）前問の結果を標準化すると

$$\frac{b - \beta}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}}|\{x_i\} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

$\mathrm{N}(0, 1)$ は $\{x_i\}$ に依存しないので

$$\frac{b - \beta}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

$H_0 : \beta = c$ を代入すると，検定統計量は

$$Z := \frac{b - c}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(c) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ なら $Z^2 \sim \chi^2(1)$ なので，検定統計量は

$$\begin{aligned} Z^2 &= \frac{(b-c)^2}{\sigma^2/\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{(b-c)^2\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2} \end{aligned}$$

2. (a)

$$s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2$$

(b)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(c) 未知の σ^2 を推定量 s^2 に置き換えると，検定統計量は

$$t := \frac{b-c}{\sqrt{s^2/\sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(d) t 分布の定義より

$$t \sim \mathrm{t}(n-1)$$

3. (a) 両側検定なら t^2 を検定統計量としてもよい．すなわち別の検定統計量は

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{(b-c)^2}{s^2/\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{(b-c)^2\sum_{i=1}^n x_i^2}{s^2} \end{aligned}$$

(b) $t \sim \mathrm{t}(\nu)$ なら $t^2 \sim \mathrm{F}(1,\nu)$ なので

$$t^2 \sim \mathrm{F}(1, n-1)$$