

第 6 回 確率変数と確率分布 (5.1)

村澤 康友

2025 年 10 月 14 日

今日のポイント

1. 試行の結果によって値が決まる変数を確率変数という。確率変数の分布を確率分布という。
2. 任意の x に対して $\Pr[X \leq x]$ を与える関数を X の累積分布関数 (cdf), $\Pr[X = x]$ を与える関数を X の確率質量関数 (pmf) という。
3. 積分すると累積分布関数が得られる関数 (累積分布関数の導関数) を確率密度関数 (pdf) という。

目次

1	1 変数関数の微分	1
1.1	微分	1
1.2	微分の演算	1
1.3	微分の公式	2
2	確率変数 (p. 87)	2
3	確率分布	2
3.1	累積分布関数 (p. 92)	2
3.2	離散分布の確率質量関数 (p. 90) . .	3
3.3	連続分布の確率密度関数 (p. 90) . .	4
4	今日のキーワード	5
5	次回までの準備	5

1 1 変数関数の微分

1.1 微分

滑らかな関数 $y = f(x)$ の接線の傾きを考える。

定義 1. $f(\cdot)$ の x における微分係数は

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

定義 2. $f'(\cdot)$ を $f(\cdot)$ の導関数という。

注 1. $Df(\cdot)$, $df/dx(\cdot)$, dy/dx などとも表記する。

定義 3. 導関数を求めることを関数の微分という。

1.2 微分の演算

定理 1 (関数の定数倍).

$$\phi(\cdot) := af(\cdot) \implies \phi'(\cdot) = af'(\cdot)$$

定理 2 (関数の和).

$$\phi(\cdot) := f(\cdot) + g(\cdot) \implies \phi'(\cdot) = f'(\cdot) + g'(\cdot)$$

定理 3 (関数の積).

$$\phi(\cdot) := f(\cdot)g(\cdot) \implies \phi'(\cdot) = f'(\cdot)g(\cdot) + f(\cdot)g'(\cdot)$$

定理 4 (関数の商).

$$\phi(\cdot) := \frac{f(\cdot)}{g(\cdot)} \implies \phi'(\cdot) = \frac{f'(\cdot)g(\cdot) - f(\cdot)g'(\cdot)}{g(\cdot)^2}$$

定理 5 (合成関数).

$$\phi(\cdot) := f(g(\cdot)) \implies \phi'(\cdot) = g'(\cdot)f'(g(\cdot))$$

注 2. すなわち $z = g(x)$, $y = f(z) = f(g(x))$ とすると

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{dy}{dz}$$

定理 6 (逆関数).

$$\phi(\cdot) := f^{-1}(\cdot) \implies \phi'(\cdot) = \frac{1}{f'(\phi(\cdot))}$$

注 3. すなわち

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

1.3 微分の公式

定義 4. 次式を満たす e をネイピア数という.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

定理 7 (指数関数).

$$f(x) := e^x \implies f'(x) = e^x$$

定理 8 (対数関数).

$$f(x) := \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x}$$

定理 9 (べき関数). 任意の整数 n について

$$f(x) := x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$$

系 1. $x > 0$ なら任意の実数 n について

$$f(x) := x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$$

注 4. $x \leq 0$ だと x^n は実数とは限らない. 例えば $0^{-1} = \infty$, $(-1)^{1/2} = i$.

2 確率変数 (p. 87)

定義 5. 試行の結果によって値が決まる変数を確率変数という.

例 1. コイントスに対して

$$X := \begin{cases} 1 & \text{(表)} \\ 0 & \text{(裏)} \end{cases}$$

とすれば X は確率変数.

定義 6. 確率変数の分布を確率分布という.

注 5. 度数分布と似た概念.

3 確率分布

3.1 累積分布関数 (p. 92)

確率変数 X の確率分布を表現する.

定義 7. 任意の x に対して $\Pr[X \leq x]$ を与える関数を X の累積分布関数 (cumulative distribution function, cdf) という.

注 6. $F_X(\cdot)$ で表す. すなわち

$$F_X(x) := \Pr[X \leq x]$$

注 7. 弱い不等号 \leq で定義する.

注 8. 度数分布の累積相対度数に相当.

例 2. X をサイコロの目の数とすると

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/6 \\ \vdots \\ 6 & \text{with pr. } 1/6 \end{cases}$$

X の cdf は

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1/6 & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ \vdots \\ 5/6 & \text{for } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{for } x \geq 6 \end{cases}$$

$F_X(\cdot)$ のグラフは図 1 の通り.

$F_X(\cdot)$ は以下の性質をもつ.

定理 10 (増加関数).

$$x_1 < x_2 \implies F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

証明. $x_1 < x_2$ なら

$$\begin{aligned} F_X(x_2) &:= \Pr[X \leq x_2] \\ &= \Pr[X \leq x_1] + \Pr[x_1 < X \leq x_2] \\ &\geq \Pr[X \leq x_1] \\ &= F_X(x_1) \end{aligned}$$

□

定理 11.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

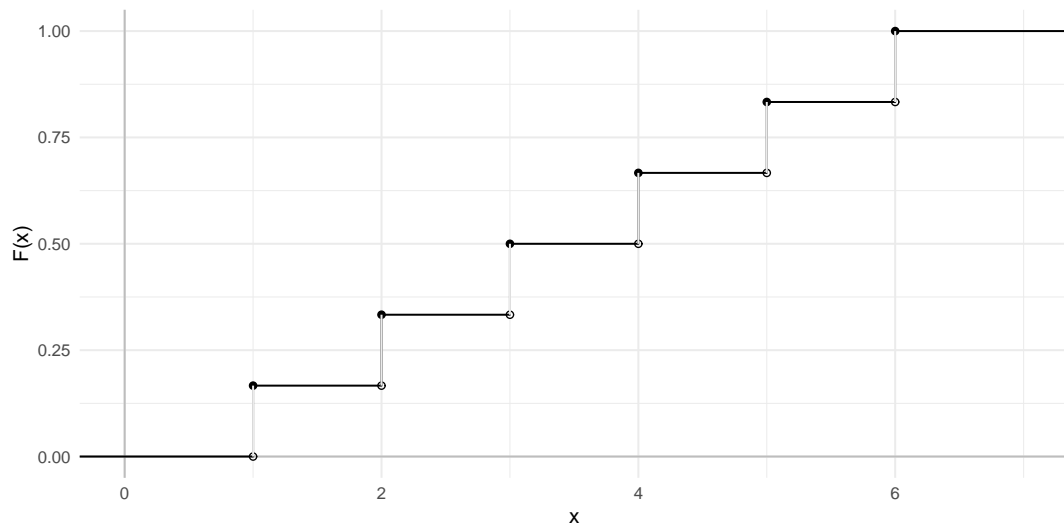


図1 サイコロの目の cdf

証明. 省略.

定理 12 (右連続). 任意の x_0 において

$$\lim_{x \downarrow x_0} F_X(x) = F_X(x_0)$$

証明. 省略.

注 9. 左連続とは限らない.

注 10. 逆に以上の性質をもつ $F(\cdot)$ は cdf. 例えば

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{for } x > 1 \end{cases} \quad (\text{一様分布})$$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1 - 1/x & \text{for } x \geq 1 \end{cases} \quad (\text{パレート分布})$$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 - 1/e^x & \text{for } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{指数分布})$$

$$F(x) := \frac{e^x}{1 + e^x} \quad (\text{ロジスティック分布})$$

それぞれのグラフは図2の通り.

3.2 離散分布の確率質量関数 (p. 90)

定義 8. 取りうる値の集合が可算である確率変数を **離散確率変数** という.

定義 9. 離散確率変数の確率分布を **離散分布** という.

□ **定義 10.** 任意の x に対して $\Pr[X = x]$ を与える関数を X の **確率質量関数** (probability mass function, pmf) という.

注 11. $p_X(\cdot)$ で表す. すなわち

$$p_X(x) := \Pr[X = x]$$

注 12. 度数分布の相対度数に相当.

注 13. cdf の定義より

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \leq x] \\ &= \sum_{x' \leq x} \Pr[X = x'] \\ &= \sum_{x' \leq x} p_X(x') \end{aligned}$$

また

$$\sum_x p_X(x) = 1$$

逆にこれを満たす非負の $p(\cdot)$ は pmf.

例 3. X をサイコロの目の数とすると, X の pmf は

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{for } x = 1, \dots, 6 \\ 0 & \text{for } x \neq 1, \dots, 6 \end{cases}$$

$p_X(\cdot)$ のグラフは図3の通り.

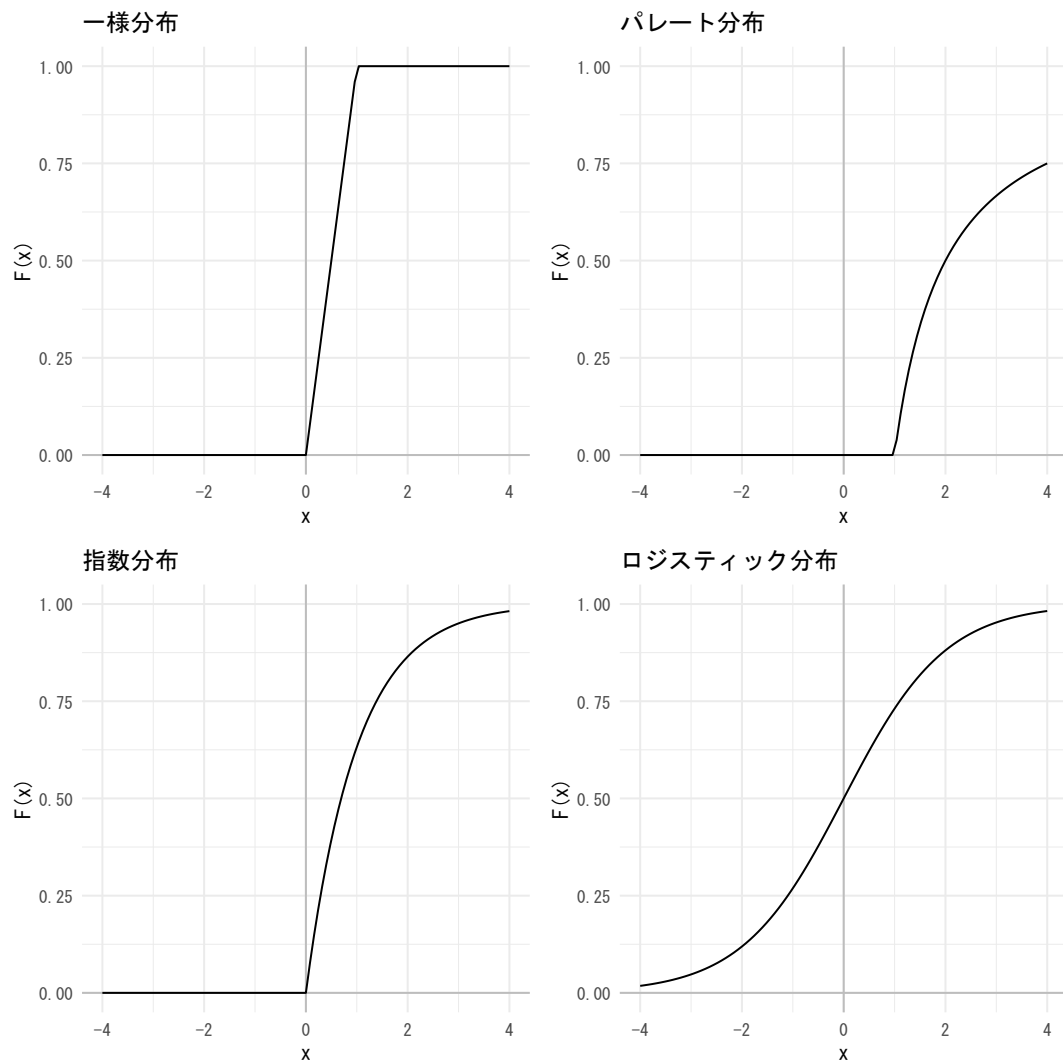


図2 cdfの例

3.3 連続分布の確率密度関数 (p. 90)

ルーレットの円周は非可算無限個の点から成る。この場合、個々の点で止まる確率は0（無限小）なので、pmfは役に立たない。

定義 11. 連続な cdf をもつ確率変数を**連続確率変数**という。

定義 12. 連続確率変数の確率分布を**連続分布**という。

定義 13. 任意の x について

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

となる $f_X(\cdot)$ を X の**確率密度関数** (*probability density function, pdf*) という。

注 14. 任意の a, b について

$$\Pr[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx$$

図4を参照。また

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

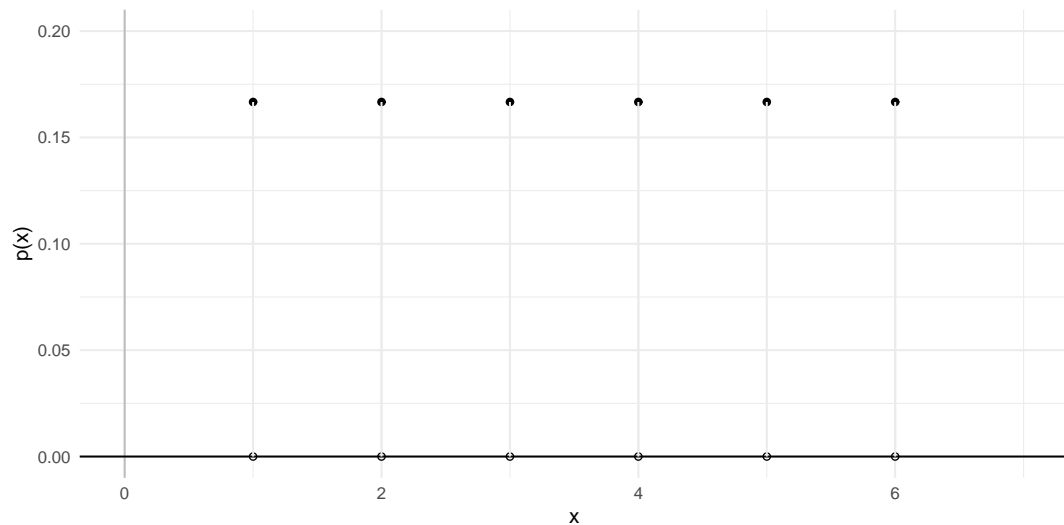


図3 サイコロの目の pmf

逆にこれを満たす非負の $f(\cdot)$ は pdf.

なら対応する pdf は

注 15. $F_X(\cdot)$ が微分可能なら, 微分積分学の基本定理より

$$f_X(x) := F'_X(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1/x^2 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1/e^x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$$

例 4. 例えば cdf が

それぞれのグラフは図5の通り.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1 - 1/x & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 - 1/e^x & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) := \frac{e^x}{1 + e^x}$$

4 今日のキーワード

確率変数, 確率分布, 累積分布関数 (cdf), 離散確率変数, 離散分布, 確率質量関数 (pmf), 連続確率変数, 連続分布, 確率密度関数 (pdf)

5 次回までの準備

復習 教科書第5章1節, 復習テスト6

予習 教科書第5章2-3節

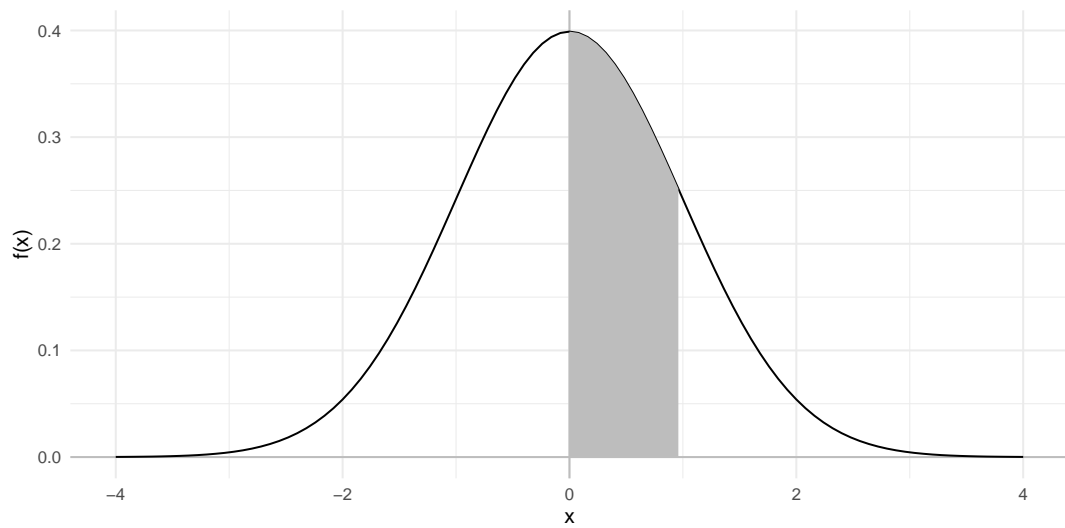


図 4 pdf による確率の評価

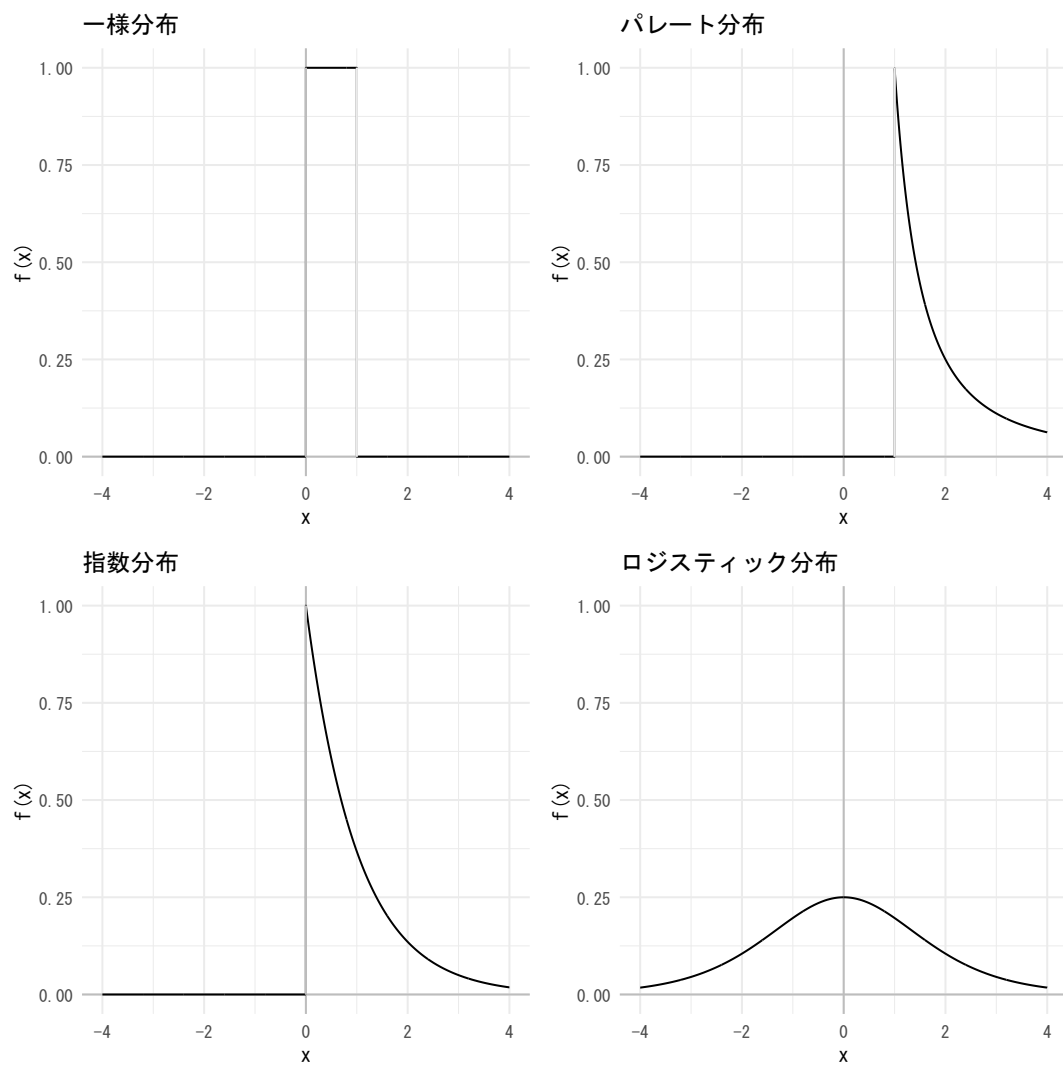


図5 pdf の例