計量経済 I：復習テスト 3

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 4 月 25 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（6 月 6 日の予定）にまとめて提出すること．

1. 次の確率変数を考える．

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

   (a) X の累積分布関数を式とグラフで表しなさい．

   (b) X の確率質量関数を式とグラフで表しなさい．

2. 次の確率変数を考える．

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1-p \end{cases}$$

   (a) $\mathrm{E}(X)$ を求めなさい．

   (b) $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ を求めなさい．

   (c) $\mathrm{var}(X)$ を求めなさい．

3. 確率変数 X について以下の公式が成り立つことを示しなさい.

（a）線形変換の期待値（期待値の線形性）

$$\mathrm{E}(aX+b) = a\,\mathrm{E}(X) + b$$

（b）線形変換の分散

$$\mathrm{var}(aX+b) = a^2\,\mathrm{var}(X)$$

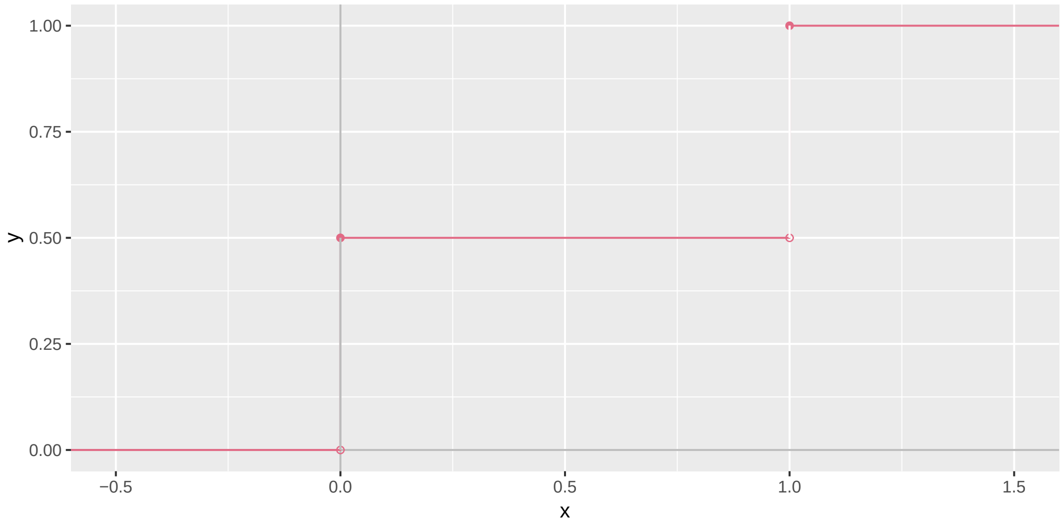
（c）分散の計算公式

$$\mathrm{var}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$$

解答例

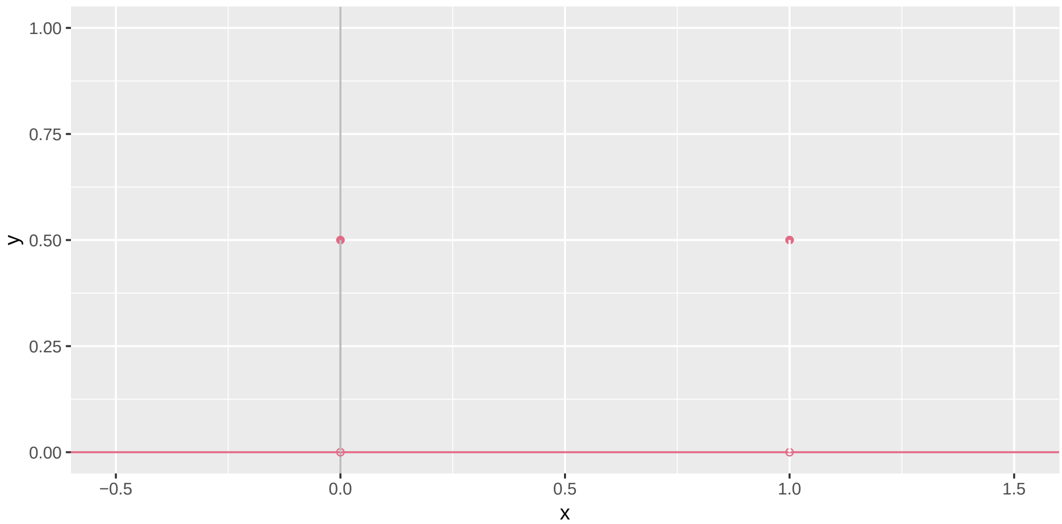
1.（a）

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1/2 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } 1 \leq x \end{cases}$$



（b）

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } x = 0, 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



2.（a）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X^2\right) &:= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) \\ &= p\end{aligned}$$

(c) $\mathrm{E}(X) = p$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &:= (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\ &= p(1-p)[(1-p)+p] \\ &= p(1-p)\end{aligned}$$

3. (a) X が離散なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(aX+b) &:= \sum_x (ax+b)p_X(x) \\ &= \sum_x (axp_X(x) + bp_X(x)) \\ &= \sum_x axp_X(x) + \sum_x bp_X(x) \\ &= a\sum_x xp_X(x) + b\sum_x p_X(x) \\ &= a\,\mathrm{E}(X) + b\end{aligned}$$

X が連続なら

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(aX+b) &:= \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (axf_X(x) + bf_X(x))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} axf_X(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} bf_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x + b\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x \\ &= a\,\mathrm{E}(X) + b\end{aligned}$$

(b) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(aX+b) &:= \mathrm{E}\left((aX+b-\mathrm{E}(aX+b))^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left([aX+b-(a\,\mathrm{E}(X)+b)]^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left([a(X-\mathrm{E}(X))]^2\right) \\ &= \mathrm{E}\left(a^2(X-\mathrm{E}(X))^2\right) \\ &= a^2\,\mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X))^2\right) \\ &= a^2\,\mathrm{var}(X)\end{aligned}$$

（c）期待値の線形性より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &:= \mathrm{E}\left((X - \mu_X)^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right) - 2\mu_X \,\mathrm{E}(X) + \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 \\
&= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mu_X^2
\end{aligned}
$$