

第 11 回 共和分過程と共和分検定 (7.3)

村澤 康友

2022 年 12 月 13 日

今日のポイント

1. $\{y_t\}$ が $I(d)$ で $\{\alpha'y_t\}$ が $I(d-b)$ なら $\{y_t\}$ を (d, b) 次の共和分過程, α を共和分ベクトルといい, $CI(d, b)$ と書く.
2. 共和分する変数間の線形モデルを共和分回帰モデルという.
3. $T \rightarrow \infty$ で $1/\sqrt{T}$ より速く推定量が母数に確率収束する性質を超一貫性という. 共和分ベクトルの OLS 推定量は超一貫性をもつ.
4. 共和分回帰の残差の ADF 検定で共和分の有無を検定する手法を Engle-Granger の 2 段階法という.

目次

1	行列の階数	1
1.1	線形独立	1
1.2	階数	1
2	共和分	2
2.1	和分過程と長期均衡 (p. 140) . . .	2
2.2	共和分過程 (p. 140)	2
3	共和分回帰	2
3.1	共和分回帰モデル (p. 140)	2
3.2	OLS 推定量	2
4	Engle-Granger の共和分検定	5
4.1	共和分ベクトルが既知	5
4.2	共和分ベクトルが未知 (p. 140) . .	5

5	今日のキーワード	5
---	----------	---

6	次回までの準備	5
---	---------	---

1 行列の階数

1.1 線形独立

x_1, \dots, x_n をベクトル, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ をスカラーとする.

定義 1. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$ を x_1, \dots, x_n の線形結合という.

定義 2. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \mathbf{0}_n \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ なら x_1, \dots, x_n は線形独立という.

定義 3. $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = \mathbf{0}_n$ となる $\mathbf{0}_n$ 以外の $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)'$ が存在するなら x_1, \dots, x_n は線形従属という.

1.2 階数

A を $m \times n$ 行列とする.

定義 4. A の線形独立な行の数を A の行階数という.

定義 5. A の線形独立な列の数を A の列階数という.

定理 1. 行階数 = 列階数.

証明. 省略. □

定義 6. A の線形独立な行または列の数を A の階数という.

注 1. $\text{rk}(A)$ と書く.

2 共和分

2.1 和分過程と長期均衡 (p. 140)

経済理論や会計上の恒等式によって、しばしば経済時系列の間に長期均衡関係や一定の比率 (Great Ratios) が生じる。例えば

1. 予測値と実績値 (合理的期待仮説)
2. 所得と消費 (ライフ・サイクル=恒常所得仮説)
3. マクロの所得・消費・投資 (国民所得勘定)
4. 生産量・資本ストック・労働投入 (生産関数)
5. マネーストックと物価 (貨幣数量説)
6. 名目金利とインフレ率 (フィッシャー方程式)
7. 短期金利と長期金利 (金利の期間構造)
8. 現物価格と先物価格 (裁定取引)
9. 2 国の物価水準と為替レート (購買力平価説)

これらの時系列が $I(1)$ だと見せかけの回帰の可能性もあり、長期均衡関係の検証は注意を要する。

例 1. 1960 年～1982 年のアメリカのマクロの所得と消費の対数系列 (図 1)。

2.2 共和分過程 (p. 140)

$\{y_t\}$ を N 変量確率過程とする。

定義 7. $\{y_t\}$ が $I(d)$ で $\{\alpha'y_t\}$ が $I(d-b)$ なら $\{y_t\}$ を (d, b) 次の共和分過程, α を共和分ベクトルという。

注 2. $CI(d, b)$ と書く。 $CI(1, 1)$ が特に重要。

注 3. α が共和分ベクトルなら任意の $c \neq 0$ について $c\alpha$ も共和分ベクトル。通常は長さを 1 にするか特定の成分を 1 として基準化する。

注 4. 基準化しても共和分ベクトルは 1 つとは限らない。

定義 8. 線形独立な共和分ベクトルの数を共和分階数という。

定理 2. $\{y_t\}$ が $CI(1, 1)$ で共和分階数 = N なら $\{y_t\}$ は $I(0)$ 。

証明. 復習テスト。 □

3 共和分回帰

3.1 共和分回帰モデル (p. 140)

簡単化のため $\{x_t\}$ をランダム・ウォークとし, $\{y_t\}$ と $\{x_t\}$ に線形モデルを仮定する。すなわち任意の t について

$$\Delta x_t = u_t$$

$$y_t = \beta x_t + v_t$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \right\} \sim \text{WN}(\Sigma)$$

$-\beta x_t + y_t = v_t$ より $\beta \neq 0$ なら $\{x_t, y_t\}$ は $CI(1, 1)$ で共和分ベクトルは $(-\beta, 1)$ 。 β の推定を考える。

定理 3. $\{u_t, v_t\}$ が iid なら

$$\text{cov}(x_t, v_t) = \text{cov}(u_t, v_t)$$

証明. $E(v_t) = 0$ より

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_t, v_t) &= E(x_t v_t) \\ &= E((x_{t-1} + u_t) v_t) \\ &= E(x_{t-1} v_t) + E(u_t v_t) \\ &= E(x_{t-1} v_t) + \text{cov}(u_t, v_t) \end{aligned}$$

$\{u_t, v_t\}$ は iid なので、繰り返し期待値の法則より第 1 項は

$$\begin{aligned} E(x_{t-1} v_t) &= E(E(x_{t-1} v_t | x_{t-1})) \\ &= E(x_{t-1} E(v_t | x_{t-1})) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

注 5. したがって $\text{cov}(u_t, v_t) \neq 0$ なら説明変数と誤差項は相関をもつ。すなわち $E(y_t | x_t) \neq \beta x_t$ 。

定義 9. 共和分する変数間の線形モデルを共和分回帰モデルという。

注 6. 条件付き期待値を与えるモデルでなく、どの変数を従属変数としてもよい。

3.2 OLS 推定量

$x_0 := 0$ とすると、 $t \geq 1$ について

$$x_t = \sum_{s=1}^t u_s$$

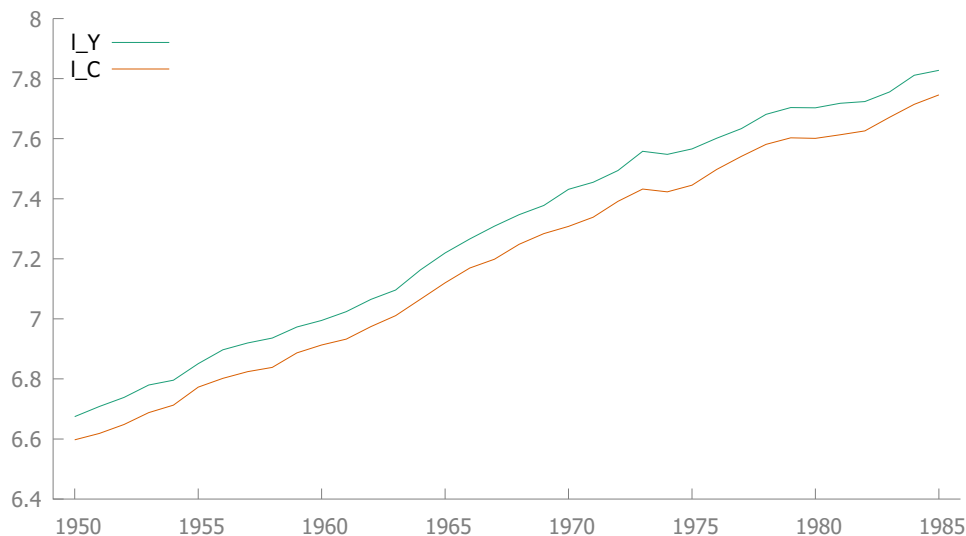


図1 1960年～1982年のアメリカのマクロの所得と消費の対数系列

長さ T の時系列が与えられたときの β の OLS 推定量を b_T とする。

定理 4. $T \rightarrow \infty$ で $T(b_T - \beta)$ は分布収束。

証明. OLS 推定量は

$$\begin{aligned} b_T &= \frac{\sum_{t=1}^T x_t y_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^T x_t (\beta x_t + v_t)}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{t=1}^T x_t v_t}{\sum_{t=1}^T x_t^2} \end{aligned}$$

したがって

$$T(b_T - \beta) = \frac{(1/T) \sum_{t=1}^T x_t v_t}{(1/T^2) \sum_{t=1}^T x_t^2}$$

分子・分母を変形すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t v_t &= \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{s=1}^t u_s \right) \frac{v_t}{\sqrt{T}} \\ \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T x_t^2 &= \sum_{t=1}^T \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{s=1}^t u_s \right)^2 \frac{1}{T} \end{aligned}$$

これらは 0 でない確率変数に分布収束する（詳細は略）。□

注 7. この例では $\beta = 0$ なら $\{y_t\}$ は $I(0)$ なので見せかけの回帰は生じない。

定義 10. $T \rightarrow \infty$ で $1/\sqrt{T}$ より速く推定量が母数に確率収束する性質を**超一貫性**という。

注 8. 通常回帰と共和分回帰で OLS 推定量の性質は大きく異なる。

収束の速度 通常回帰は $\sqrt{T}(b_T - \beta)$ が分布収束。共和分回帰は $T(b_T - \beta)$ が分布収束（超一貫性）。

説明変数と誤差項の相関 通常回帰は一貫性を失う（内生性バイアス）。共和分回帰は超一貫性を失わない。

$\beta = 0$ の場合 通常回帰は一貫性を失わない。見せかけの回帰なら共和分回帰は一貫性を失う。したがって t 値は無意味。

例 2. $CI(1, 1)$ の原系列の散布図（図 2）と階差系列の散布図（図 3）。

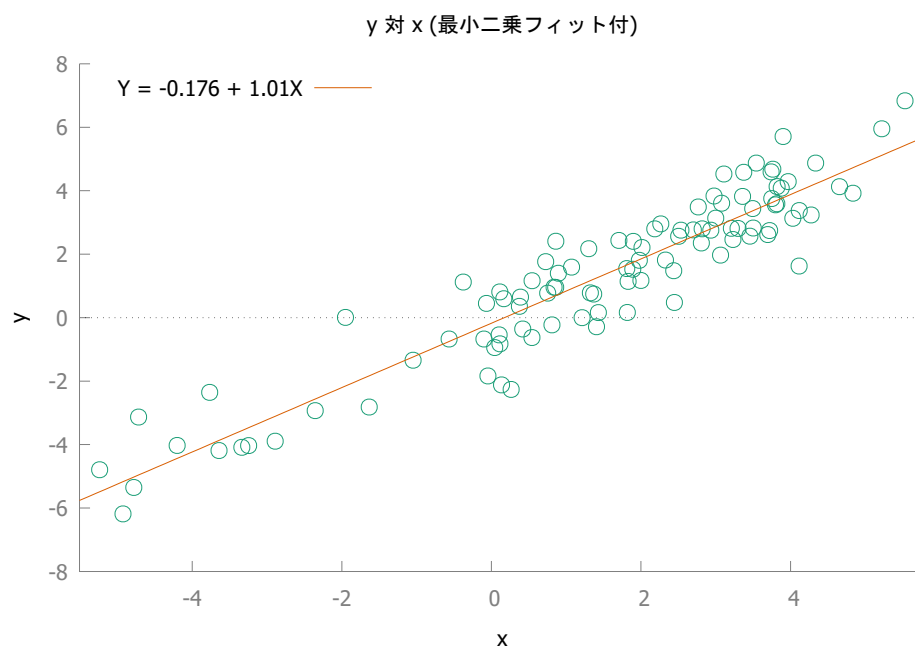


図2 CI(1,1) の原系列の散布図

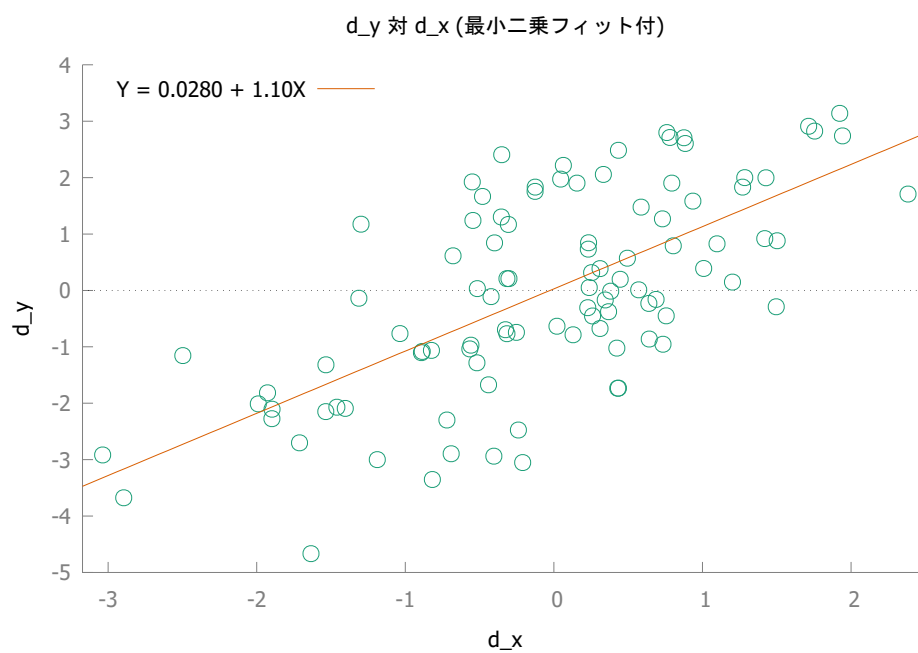


図3 CI(1,1) の階差系列の散布図

4 Engle–Granger の共和分検定

4.1 共和分ベクトルが既知

$\{y_t\}$ が $CI(1, 1)$ か否かを検定したい．共和分ベクトル α が既知なら $\{\alpha'y_t\}$ の単位根検定＝共和分検定．すなわち共和分検定問題は

$$H_0 : \{\alpha'y_t\} \sim I(1) \quad \text{vs} \quad H_1 : \{\alpha'y_t\} \sim I(0)$$

4.2 共和分ベクトルが未知 (p. 140)

α が未知なら OLS 推定値 $\hat{\alpha}$ を用いて $\{\hat{\alpha}'y_t\}$ の単位根検定を行う．

定義 11. 共和分回帰の残差の ADF 検定で共和分の有無を検定する手法を *Engle–Granger の 2 段階法* という．

注 9. 共和分ベクトルの推定誤差のため， τ 統計量の漸近分布は通常の ADF 検定と異なる．また共和分回帰の定数項・トレンドの有無により， τ 統計量の漸近分布は異なる．

注 10. 共和分回帰の従属変数の選択により残差が異なるので τ 統計量の値も異なる．

5 今日のキーワード

線形結合, 線形独立, 線形従属, 行階数, 列階数, 階数, (d, b) 次の共和分過程, 共和分ベクトル, 共和分階数, 共和分回帰モデル, 超一貫性, Engle–Granger の 2 段階法

6 次回までの準備

提出 宿題 11

復習 教科書第 7 章 3 節, 復習テスト 11

予習 教科書第 7 章 3–4 節