計量経済 I：復習テスト 11

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2025 年 7 月 1 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（7 月 29 日の予定）にまとめて提出すること．

1. 確率ベクトル (Y_1, Y_2, X) は次の連立方程式を満たす．

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= -\gamma Y_2 + U_1 \\
Y_2 &= \beta X + U_2 \\
\mathrm{E}\left(\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} | X \right) &= \mathbf{0} \\
\mathrm{var}\left(\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} | X \right) &= \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

第 1 式の OLS 推定を考える．

（a）$\mathrm{cov}(Y_2, U_1)$ を求めなさい．

（b）$\sigma_{1,2} = \sigma_{2,1} = 0$ なら $\mathrm{cov}(Y_2, U_1)$ はどうなるか？

2. $((y_1, x_1, z_1), \ldots, (y_n, x_n, z_n))$ を無作為標本とする．y_i の x_i 上への定数項なしの線形モデルは

$$
\begin{aligned}
y_i &= \beta x_i + u_i \\
\mathrm{E}(u_i) &= 0
\end{aligned}
$$

β の OLS 推定量を b_n とする．

（a）次の命題を示しなさい．

$$\mathrm{E}(x_i u_i) = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{cov}(x_i, u_i) = 0$$

（b）$\mathrm{cov}(x_i, u_i) \neq 0$ なら b_n が β の一致推定量でないことを示しなさい．

（c）操作変数の定義を書きなさい．

（d）β の IV 推定量 $b_{\mathrm{IV},n}$ を定義しなさい．

（e）$b_{\mathrm{IV},n}$ が β の一致推定量であることを示しなさい．

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_2, U_1) &= \operatorname{cov}(\beta X + U_2, U_1)\\ &= \operatorname{cov}(\beta X, U_1) + \operatorname{cov}(U_2, U_1)\\ &= \beta \operatorname{cov}(X, U_1) + \sigma_{2,1}\end{aligned}$$

共分散の計算公式より

$$\operatorname{cov}(X, U_1) = \mathrm{E}(XU_1) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(U_1)$$

繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(XU_1) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(XU_1|X))\\ &= \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}(U_1|X))\\ &= 0\\ \mathrm{E}(U_1) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(U_1|X))\\ &= 0\end{aligned}$$

したがって $\operatorname{cov}(Y_2, U_1) = \sigma_{2,1}$.

(b) 前問の結果に $\sigma_{2,1} = 0$ を代入すると $\operatorname{cov}(Y_2, U_1) = 0$.

2. (a) 共分散の計算公式と $\mathrm{E}(u_i) = 0$ より

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(x_i, u_i) &= \mathrm{E}(x_i u_i) - \mathrm{E}(x_i)\,\mathrm{E}(u_i)\\ &= \mathrm{E}(x_i u_i)\end{aligned}$$

したがって $\mathrm{E}(x_i u_i) = 0 \iff \operatorname{cov}(x_i, u_i) = 0$.

(b) OLS 推定量は

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$y_i = \beta x_i + u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i(\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\\ &= \beta + \frac{(1/n)\sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n)\sum_{i=1}^n x_i^2}\end{aligned}$$

大数の法則より

$$\begin{aligned}\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 &= \mathrm{E}\left(x_i^2\right)\\ \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i u_i &= \mathrm{E}(x_i u_i)\end{aligned}$$

スルツキーの定理より

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} b_n = \beta + \frac{\mathrm{E}(x_i u_i)}{\mathrm{E}\left(x_i^2\right)}$$

前問より $\operatorname{cov}(x_i, u_i) \neq 0$ なら $\mathrm{E}(x_i u_i) \neq 0$ なので第 2 項$\neq 0$.

(c) $\mathrm{E}(z_i x_i) \neq 0$ で $\mathrm{E}(z_i u_i) = 0$ なら z_i は β の推定の操作変数という．

(d)

$$b_{\mathrm{IV},n} := \frac{\sum_{i=1}^n z_i y_i}{\sum_{i=1}^n z_i x_i}$$

(e) $b_{\mathrm{IV},n}$ に $y_i = \beta x_i + u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned} b_{\mathrm{IV},n} &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i(\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n z_i x_i} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n z_i u_i}{\sum_{i=1}^n z_i x_i} \\ &= \beta + \frac{(1/n)\sum_{i=1}^n z_i u_i}{(1/n)\sum_{i=1}^n z_i x_i} \end{aligned}$$

大数の法則より

$$\begin{aligned} \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i x_i &= \mathrm{E}(z_i x_i) \\ \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n z_i u_i &= \mathrm{E}(z_i u_i) \end{aligned}$$

スルツキーの定理より

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} b_{\mathrm{IV},n} = \beta + \frac{\mathrm{E}(z_i u_i)}{\mathrm{E}(z_i x_i)}$$

IV の定義より $\mathrm{E}(z_i u_i) = 0$ なので第 2 項$= 0$.