計量経済 II：復習テスト 1

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2022 年 9 月 27 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 22 日の予定）にまとめて提出すること．

1. $(X_1, X_2, X_3) := (100, 101, 102)$ とする．以下を求めなさい（計算機使用可）．

   (a) 階差：$\Delta X_2, \Delta X_3$

   (b) 変化率：$\Delta X_2/X_1, \Delta X_3/X_2$

   (c) 対数：$\ln X_1, \ln X_2, \ln X_3$

   (d) 対数階差：$\Delta \ln X_2, \Delta \ln X_3$

2. 関数 $f(x)$ は 3 回微分可能とする．$x = a$ の近傍で $f(x)$ を近似した 3 次関数を $g(x)$ とする．すなわち

$$g(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

(a) $g'(x), g''(x), g'''(x)$ を求めなさい．

(b) $g(a), g'(a), g''(a), g'''(a)$ を求めなさい．

(c) $x = 0$ の近傍で $f(x) := \mathrm{e}^x$ を近似した 3 次関数を $g(x)$ とする．$g(x)$ を求めなさい．

(d) $x = 0$ の近傍で $f(x) := \mathrm{e}^x$ を近似した n 次関数を $g_n(x)$ とする．$n \to \infty$ として e^x を無限次の多項式で表しなさい（これを e^x のマクローリン展開という）．

解答例

1. (a) $\Delta X_2 = 101 - 100 = 1$, $\Delta X_3 = 102 - 101 = 1$

   (b) $\Delta X_2 / X_1 = 1/100 = 0.01$, $\Delta X_3 / X_2 = 1/101 \approx 0.0099$

   (c) $\ln X_1 \approx 4.60517$, $\ln X_2 \approx 4.61512$, $\ln X_3 = 4.62497$

   (d) $\Delta \ln X_2 \approx 0.00995$, $\Delta \ln X_3 \approx 0.00985$

2. (a)

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
g''(x) &= f''(a) + f'''(a)(x-a) \\
g'''(x) &= f'''(a)
\end{aligned}
$$

   (b)

$$
\begin{aligned}
g(a) &= f(a) \\
g'(a) &= f'(a) \\
g''(a) &= f''(a) \\
g'''(a) &= f'''(a)
\end{aligned}
$$

   ※すなわち $g(.)$ は $x = a$ において 3 階微分係数まで $f(.)$ と等しい.

   (c) $f(x) = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \mathrm{e}^x$ より $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$. したがって

$$
g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}
$$

   (d) 前問と同様に考えれば

$$
g_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}
$$

   $n \to \infty$ とすると

$$
\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots
$$

   ※したがってネイピア数 e は

$$
\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \approx 2.718
$$