

第3回 定常過程 (2.1.3, 2.3.1, 4.2, 7.2)

村澤 康友

2023 年 10 月 9 日

今日のポイント

1. 任意の時点 (t_1, \dots, t_n) と時点差 s について $F_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}(\cdot) = F_{Y_{t_1+s}, \dots, Y_{t_n+s}}(\cdot)$ なら $\{Y_t\}$ は(強)定常という. \bar{Y}_T が $T \rightarrow \infty$ で漸近的に Y_1 と独立なら $\{Y_t\}$ はエルゴード的という. $\{Y_t\}$ が定常・エルゴード的で $E(Y_1)$ が存在するなら時間方向の標本平均 \bar{Y}_T で $E(Y_1)$ を一致推定できる.
2. 任意の時点 t と時点差 s について $E(Y_t)$ と $\text{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ が t に依存しないなら $\{Y_t\}$ は共分散(弱)定常という. $\gamma(s) := \text{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ を自己共分散関数, $\rho(s) := \text{corr}(Y_t, Y_{t-s})$ を自己相関関数(ACF)という. ある $s \neq 0$ について $\rho(s) \neq 0$ であることを系列相関という. 平均 0 で系列相関のない共分散定常過程をホワイト・ノイズという.
3. 平均 μ , 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ の共分散定常過程の標本平均の平均は μ , 分散は $(1/T) \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} [(T-|s|)/T] \gamma(s)$.
4. $\{Y_t\}$ の標本自己共分散関数は $\hat{\gamma}_T(s) := (1/T) \sum_{t=s+1}^T (Y_t - \bar{Y}_T)(Y_{t-s} - \bar{Y}_T)$, 標本自己相関関数は $\hat{\rho}_T(s) := \hat{\gamma}_T(s)/\hat{\gamma}_T(0)$. 標本自己相関関数の棒グラフをコレログラムという. $\{Y_t\}$ が iid で分散が有限なら $s \geq 1$ について $\hat{\rho}_T(s) \overset{a}{\sim} N(0, 1/T)$.

1.1	(強) 定常性	1
1.2	エルゴード性	2
1.3	共分散(弱) 定常性 (p. 215)	2
1.4	正規(ガウス) 性	2
2	共分散定常過程	2
2.1	自己共分散 (p. 215)	2
2.2	自己相関 (p. 216)	2
2.3	系列相関とホワイト・ノイズ (p. 122, p. 216)	3
2.4	偏自己相関 (p. 217)	3
3	標本平均	3
3.1	有限標本特性 (p. 38)	3
3.2	漸近特性 (p. 48)	4
4	コレログラム	4
4.1	標本自己共分散 (p. 217)	4
4.2	標本自己相関 (p. 217)	4
5	今日のキーワード	5
6	次回までの準備	5

1 定常性

1.1 (強) 定常性

確率変数列 $\{Y_t\}$ の観測値を (y_1, \dots, y_T) とする. y_T から Y_{T+1} を予測するには以下の 2 つの条件が必要.

1. (Y_t, Y_{t+1}) の同時分布は時間を通じて不変.
2. (y_1, \dots, y_T) から (Y_t, Y_{t+1}) の同時分布を推定できる.

目次

1	定常性	1
---	-----	---

定義 1. 任意の時点 (t_1, \dots, t_n) と時点差 s について $F_{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}}(\cdot) = F_{Y_{t_1+s}, \dots, Y_{t_n+s}}(\cdot)$ なら $\{Y_t\}$ は (強) 定常という.

注 1. すなわち $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ の同時分布は時間を通じて不変.

1.2 エルゴード性

$\{Y_t\}$ を定常過程とし, (Y_1, \dots, Y_T) の標本平均を \bar{Y}_T とする. すなわち

$$\bar{Y}_T := \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t$$

定義 2. \bar{Y}_T が $T \rightarrow \infty$ で漸近的に Y_1 と独立なら $\{Y_t\}$ はエルゴード的という.

定理 1 (エルゴード定理). $\{Y_t\}$ が定常・エルゴード的で $E(Y_1)$ が存在するなら

$$\Pr \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{Y}_T = E(Y_1) \right] = 1$$

証明. 省略 (大学院レベル). □

注 2. 確率 1 で収束 \implies 確率収束. したがって時間方向の標本平均 \bar{Y}_T で $E(Y_1)$ を一致推定できる.

1.3 共分散 (弱) 定常性 (p. 215)

定義 3. 任意の時点 t と時点差 s について $E(Y_t)$ と $\text{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ が t に依存しないなら $\{Y_t\}$ は共分散 (弱) 定常という.

注 3. 定常でも (共) 分散が存在するとは限らない. 分散が存在すれば, 定常 \implies 共分散定常.

1.4 正規 (ガウス) 性

定義 4. 任意の時点 (t_1, \dots, t_n) について $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ が同時正規分布にしたがうなら $\{Y_t\}$ は正規 (ガウス) 過程という.

注 4. 正規過程なら定常 \iff 共分散定常.

2 共分散定常過程

2.1 自己共分散 (p. 215)

$\{Y_t\}$ を共分散定常過程とする.

定義 5. $\text{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ を $\{Y_t\}$ の s 次の自己共分散という.

定義 6. $\{Y_t\}$ の自己共分散関数は, 任意の時点差 s について

$$\gamma(s) := \text{cov}(Y_t, Y_{t-s})$$

定理 2. 任意の時点差 s について

$$\gamma(-s) = \gamma(s)$$

証明. $\text{cov}(Y_t, Y_{t-s})$ は時点 t に依存しないので

$$\begin{aligned} \gamma(-s) &:= \text{cov}(Y_t, Y_{t+s}) \\ &= \text{cov}(Y_{t+s}, Y_t) \\ &= \text{cov}(Y_t, Y_{t-s}) \\ &= \gamma(s) \end{aligned}$$

□

注 5. したがって $s \geq 0$ のみ考えればよい.

2.2 自己相関 (p. 216)

定義 7. $\text{corr}(Y_t, Y_{t-s})$ を $\{Y_t\}$ の s 次の自己相関係数という.

定義 8. $\{Y_t\}$ の自己相関関数 (Autocorrelation function, ACF) は, 任意の時点差 s について

$$\rho(s) := \text{corr}(Y_t, Y_{t-s})$$

定理 3. 任意の時点差 s について

$$\rho(s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}$$

証明. $\text{var}(Y_t)$ は時点 t に依存しないので

$$\begin{aligned} \rho(s) &:= \text{corr}(Y_t, Y_{t-s}) \\ &= \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-s})}{\sqrt{\text{var}(Y_t)} \sqrt{\text{var}(Y_{t-s})}} \\ &= \frac{\text{cov}(Y_t, Y_{t-s})}{\text{var}(Y_t)} \\ &= \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)} \end{aligned}$$

□

定理 4. 任意の時点差 s について

$$\rho(-s) = \rho(s)$$

証明. 前 2 定理より

$$\begin{aligned}\rho(-s) &= \frac{\gamma(-s)}{\gamma(0)} \\ &= \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)} \\ &= \rho(s)\end{aligned}$$

□

2.3 系列相関とホワイト・ノイズ (p. 122, p. 216)

定義 9. ある $s \neq 0$ について $\rho(s) \neq 0$ であることを系列相関という.

定義 10. 平均 0 で系列相関のない共分散定常過程をホワイト・ノイズという.

注 6. 分散が σ^2 なら $WN(\sigma^2)$ と書く.

2.4 偏自己相関 (p. 217)

Y_t の $(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s})$ 上への重回帰モデルは

$$E(Y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s}) = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_s Y_{t-s}$$

偏回帰係数 β_s は $(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s+1})$ を通じた間接的な影響を取り除いた Y_{t-s} の Y_t への直接的な限界効果を表す. β_s は残差回帰で得られる. すなわち Y_t の $(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s+1})$ 上への回帰残差を Y_{t-s} の $(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s+1})$ 上への回帰残差に回帰すればよい.

定義 11. $Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s+1}$ を通じた間接的な影響を取り除いた Y_t と Y_{t-s} の直接的な相関係数を $\{Y_t\}$ の s 次の偏自己相関係数という.

注 7. Y_t の $(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s+1})$ 上への回帰残差と Y_{t-s} の $(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-s+1})$ 上への回帰残差の相関係数として得られる.

定義 12. 任意の時点差 s に対して s 次の偏自己相関係数を与える関数を偏自己相関関数 (*partial autocorrelation function, PACF*) という.

3 標本平均

3.1 有限標本特性 (p. 38)

$\{Y_t\}$ を平均 μ , 自己共分散関数 $\gamma(\cdot)$ の共分散定常過程とし, (Y_1, \dots, Y_T) の標本平均を \bar{Y}_T とする.

定理 5.

$$E(\bar{Y}_T) = \mu$$

証明.

$$\begin{aligned}E(\bar{Y}_T) &= E\left(\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Y_t\right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T E(Y_t) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mu \\ &= \mu\end{aligned}$$

□

補題 1.

$$\text{var}(Y_1 + \dots + Y_T) = \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} (T - |s|) \gamma(s)$$

証明.

$$\begin{aligned}\text{var}(Y_1 + \dots + Y_T) &= \text{var}(Y_1) + \text{cov}(Y_1, Y_2) + \dots \\ &\quad + \text{cov}(Y_T, Y_{T-1}) + \text{var}(Y_T) \\ &= T\gamma(0) + (T-1)(\gamma(1) + \gamma(-1)) + \dots \\ &\quad + (\gamma(T-1) + \gamma(-(T-1))) \\ &= \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} (T - |s|) \gamma(s)\end{aligned}$$

□

定理 6.

$$\text{var}(\bar{Y}_T) = \frac{1}{T} \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} \frac{T - |s|}{T} \gamma(s)$$

証明.

$$\begin{aligned}\text{var}(\bar{Y}_T) &= \text{var}\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_T}{T}\right) \\ &= \frac{\text{var}(Y_1 + \dots + Y_T)}{T^2}\end{aligned}$$

補題の結果を分子に代入すればよい.

□

注 8. $\gamma(-s) = \gamma(s)$ より

$$\text{var}(\bar{Y}_T) = \frac{1}{T} \left(\gamma(0) + 2 \sum_{s=1}^{T-1} \frac{T-s}{T} \gamma(s) \right)$$

系 1. $\{Y_t\} \sim \text{WN}(\sigma^2)$ なら

$$\text{var}(\bar{Y}_T) = \frac{\sigma^2}{T}$$

定理 7. $\{Y_t\}$ が正規過程なら

$$\bar{Y}_T \sim N\left(\mu, \frac{1}{T} \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} \frac{T-|s|}{T} \gamma(s)\right)$$

証明. 正規分布の線形変換は正規分布. \square

3.2 漸近特性 (p. 48)

$\{Y_t\}$ を定常・エルゴード的とする.

定理 8.

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \bar{Y}_T = \mu$$

証明. エルゴード定理の系として得られる. \square

補題 2.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{var}(Y_1 + \cdots + Y_T)}{T} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma(s)$$

証明. 前補題より

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{var}(Y_1 + \cdots + Y_T)}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} (T-|s|) \gamma(s) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} \frac{T-|s|}{T} \gamma(s) \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma(s) \end{aligned}$$

注 9. したがって

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \text{var} \left(\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (Y_t - \mu) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \text{var} \left(\sum_{t=1}^T (Y_t - \mu) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{var}((Y_1 - \mu) + \cdots + (Y_T - \mu))}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\text{var}(Y_1 + \cdots + Y_T)}{T} \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma(s) \end{aligned}$$

定理 9 (中心極限定理). $\sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma(s) < \infty$ なら
(若干の追加的な条件の下で)

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (Y_t - \mu) \xrightarrow{d} N\left(0, \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma(s)\right)$$

証明. 省略 (大学院レベル). \square

注 10. したがって

$$\bar{Y}_T \stackrel{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{1}{T} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma(s)\right)$$

または

$$\bar{Y}_T \stackrel{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{1}{T} \sum_{s=-(T-1)}^{T-1} \frac{T-|s|}{T} \gamma(s)\right)$$

4 コレログラム

4.1 標本自己共分散 (p. 217)

定義 13. $\{Y_t\}$ の標本自己共分散関数は, 任意の時点差 s について

$$\hat{\gamma}_T(s) := \frac{1}{T} \sum_{t=s+1}^T (Y_t - \bar{Y}_T)(Y_{t-s} - \bar{Y}_T)$$

注 11. $T-s$ や $T-s-1$ でなく T で割るのが普通.

4.2 標本自己相関 (p. 217)

定義 14. $\{Y_t\}$ の標本自己相関関数は, 任意の時点差 s について

$$\hat{\rho}_T(s) := \frac{\hat{\gamma}_T(s)}{\hat{\gamma}_T(0)}$$

定義 15. 標本自己相関関数の棒グラフをコレログラムという.

補題 3. $\{Y_t\}$ が iid で平均が既知かつ分散が有限なら $s \geq 1$ について

$$\sqrt{T} \hat{\gamma}_T(s) \xrightarrow{d} N(0, \gamma(0)^2)$$

証明. 平均が既知なので

$$\hat{\gamma}_T(s) := \frac{1}{T} \sum_{t=s+1}^T (Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)$$

$\{Y_t\}$ は iid なので

$$\begin{aligned} & E((Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)) \\ &= E(Y_t - \mu) E(Y_{t-s} - \mu) \\ &= 0 \\ & \text{var}((Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)) \\ &= E((Y_t - \mu)^2(Y_{t-s} - \mu)^2) \\ &= E((Y_t - \mu)^2) E((Y_{t-s} - \mu)^2) \\ &= \text{var}(Y_t) \text{var}(Y_{t-s}) \\ &= \gamma(0)^2 \end{aligned}$$

また $r \geq 1$ について

$$\begin{aligned} & \text{cov}((Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu), (Y_{t-r} - \mu)(Y_{t-s-r} - \mu)) \\ &= E((Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)(Y_{t-r} - \mu)(Y_{t-s-r} - \mu)) \\ &= E(Y_t - \mu) E((Y_{t-s} - \mu)(Y_{t-r} - \mu)) \\ & \quad E(Y_{t-s-r} - \mu) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって $\{(Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu)\} \sim \text{WN}(\gamma(0)^2)$ なので、中心極限定理より

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T (Y_t - \mu)(Y_{t-s} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \gamma(0)^2)$$

□

注 12. 平均が未知でも成立.

定理 10. $\{Y_t\}$ が iid で分散が有限なら $s \geq 1$ について

$$\sqrt{T} \hat{\rho}_T(s) \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

証明. 補題より

$$\sqrt{T} \frac{\hat{\gamma}_T(s)}{\gamma(0)} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \hat{\gamma}_T(0) = \gamma(0)$ より

$$\sqrt{T} \frac{\hat{\gamma}_T(s)}{\hat{\gamma}_T(0)} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

□

注 13. したがって

$$\hat{\rho}_T(s) \overset{a}{\sim} N\left(0, \frac{1}{T}\right)$$

$s \geq 1$ として次の両側検定を考える.

$$H_0 : \rho(s) = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \rho(s) \neq 0$$

このとき $|\hat{\rho}_T(s)| \geq 1.96/\sqrt{T}$ なら有意水準 5% で H_0 を棄却.

例 1. NYSE 総合指数の対数階差系列のコレログラム (図 1).

5 今日のキーワード

(強) 定常, エルゴード的, 共分散 (弱) 定常, 正規 (ガウス) 過程, 自己共分散, 自己共分散関数, 自己相関係数, 自己相関関数 (ACF), 系列相関, ホワイト・ノイズ, 偏自己相関係数, 偏自己相関関数 (PACF), 標本自己共分散関数, 標本自己相関関数, コレログラム

6 次回までの準備

提出 宿題 3

復習 教科書第 2 章 1.3 節, 第 2 章 3.1 節, 第 4 章 2 節, 第 7 章 2 節, 復習テスト 3

予習 教科書第 7 章 3.1 節

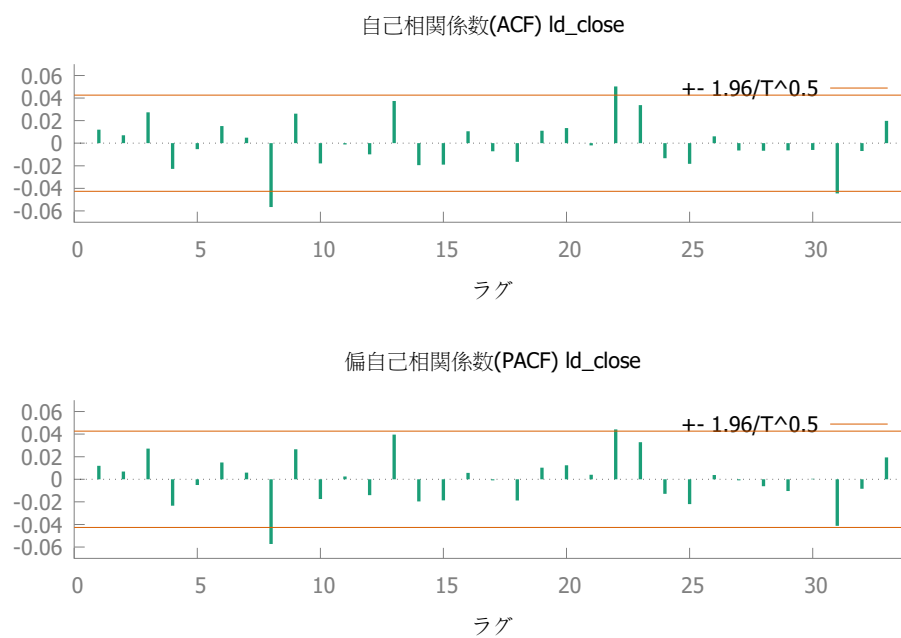


図1 NYSE 総合指数の対数階差系列のコレログラム