

中級統計学：第2回中間試験

村澤 康友

2025年11月14日

注意：3問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいと与えるが、結果のみの解答は0点とする）。教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）。

- (20点) 以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい。
 - 独立かつ同一な n 回のベルヌーイ試行における成功回数の分布
 - $F_{X,Y}(x,y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$ と定義される $F_{X,Y}(\cdot, \cdot)$
 - $E((X - E(X))(Y - E(Y)))$
 - $\{X_n\}$ が任意の $\epsilon > 0$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[|X_n - c| < \epsilon] = 1$ となること
- (30点) $X \sim N(30, 1600)$ とする。標準正規分布表を利用して以下の確率を求めなさい。
 - $\Pr[X \leq 0]$
 - $\Pr[X \geq 80]$
 - $\Pr[40 \leq X \leq 60]$
- (50点) 2次元確率ベクトル (X, Y) は以下の同時分布に従う。

$X \backslash Y$	0	1
0	1/9	2/9
1	1/3	1/3

以下の問いに答えなさい。ただし分布は確率質量関数で表現しなくてもよい。

- X の周辺分布を求め、その平均と分散を計算しなさい
- Y の周辺分布を求め、その平均と分散を計算しなさい。
- $X + Y$ の分布を求め、その平均と分散を計算しなさい。
- XY の分布を求め、その平均と分散を計算しなさい。
- X と Y の共分散と相関係数を求めなさい。

解答例

1. 確率・統計の基本用語

(a) 2 項分布

- 「ベルヌーイ分布」は 1 点.

(b) 同時（累積）分布関数

- 「結合（累積）分布関数」も可.
- 「同時（累積）分布」のみは 1 点.
- 「同時（結合）」がなければ 0 点.
- 「同時確率分布（関数）」は 0 点.

(c) 共分散

(d) 確率収束

- $\{X_n\}$ は標本平均でないので, 「大数の法則」は誤り.

2. 正規分布の確率計算

(a) $(X - 30)/40 \sim N(0, 1)$ より

$$\begin{aligned}\Pr[X \leq 0] &= \Pr\left[\frac{X - 30}{40} \leq \frac{0 - 30}{40}\right] \\ &= \Pr\left[Z \leq -\frac{3}{4}\right] \\ &= \Pr\left[Z \geq \frac{3}{4}\right] \\ &= Q\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= .22663\end{aligned}$$

- $\Pr[Z \leq -3/4]$ で 2 点. $\Pr[Z \geq 3/4]$ で 4 点.
- 負や 1 を超える確率は 0 点. 以下同様.
- 思考過程が読み取れない解答は 0 点. 以下同様.

(b)

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 80] &= \Pr\left[\frac{X - 30}{40} \geq \frac{80 - 30}{40}\right] \\ &= \Pr\left[Z \geq \frac{5}{4}\right] \\ &= Q\left(\frac{5}{4}\right) \\ &= .10565\end{aligned}$$

- $\Pr[Z \geq 5/4]$ で 2 点.

(c)

$$\begin{aligned}\Pr[40 \leq X \leq 60] &= \Pr\left[\frac{40-30}{40} \leq \frac{X-30}{40} \leq \frac{60-30}{40}\right] \\ &= \Pr\left[\frac{1}{4} \leq Z \leq \frac{3}{4}\right] \\ &= \Pr\left[Z \geq \frac{1}{4}\right] - \Pr\left[Z > \frac{3}{4}\right] \\ &= Q\left(\frac{1}{4}\right) - Q\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= .40129 - .22663 \\ &= .17466\end{aligned}$$

- $\Pr[1/4 \leq Z \leq 3/4]$ で 2 点. $\Pr[Z \geq 1/4] - \Pr[Z > 3/4]$ で 4 点.

3. 2 変量離散分布

(a) X の周辺分布は

$$X = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 1/3 \\ 1 & \text{with pr. } 2/3 \end{cases}$$

平均と分散は

$$\begin{aligned}E(X) &:= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \\ E(X^2) &:= 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \\ \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

- 分布 3 点, 平均 3 点, 分散 4 点. 分散の計算公式で 1 点. 以下同様.
- 分布が誤りなら 0 点. 以下同様.

(b) Y の周辺分布は

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 4/9 \\ 1 & \text{with pr. } 5/9 \end{cases}$$

平均と分散は

$$\begin{aligned}
 E(Y) &:= 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{5}{9} \\
 &= \frac{5}{9} \\
 E(Y^2) &:= 0^2 \cdot \frac{4}{9} + 1^2 \cdot \frac{5}{9} \\
 &= \frac{5}{9} \\
 \text{var}(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\
 &= \frac{5}{9} - \left(\frac{5}{9}\right)^2 \\
 &= \frac{20}{81}
 \end{aligned}$$

(c) $X + Y$ の分布は

$$X + Y = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 1/9 \\ 1 & \text{with pr. } 5/9 \\ 2 & \text{with pr. } 1/3 \end{cases}$$

平均と分散は

$$\begin{aligned}
 E(X + Y) &:= 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{11}{9} \\
 E((X + Y)^2) &:= 0^2 \cdot \frac{1}{9} + 1^2 \cdot \frac{5}{9} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} \\
 &= \frac{17}{9} \\
 \text{var}(X + Y) &= E((X + Y)^2) - E(X + Y)^2 \\
 &= \frac{17}{9} - \left(\frac{11}{9}\right)^2 \\
 &= \frac{32}{81}
 \end{aligned}$$

(d) XY の分布は

$$XY = \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 2/3 \\ 1 & \text{with pr. } 1/3 \end{cases}$$

平均と分散は

$$\begin{aligned}E(XY) &:= 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\&= \frac{1}{3} \\E((XY)^2) &:= 0^2 \cdot \frac{2}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} \\&= \frac{1}{3} \\\text{var}(XY) &= E((XY)^2) - E(XY)^2 \\&= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\&= \frac{2}{9}\end{aligned}$$

(e) 共分散は

$$\begin{aligned}\text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\&= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} \\&= -\frac{1}{27}\end{aligned}$$

相関係数は

$$\begin{aligned}\text{corr}(X, Y) &= \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)}\sqrt{\text{var}(Y)}} \\&= \frac{-1/27}{\sqrt{2/9}\sqrt{20/81}} \\&= -\frac{1/27}{(\sqrt{2}/3)(\sqrt{20}/9)} \\&= -\frac{1}{\sqrt{40}}\end{aligned}$$

- 共分散 5 点，相関係数 5 点.
- 共分散と相関係数の計算公式で各 1 点.
- 約分しなければ 1 点減.