

第 11 回 多変量分布 (7.1–7.2)

村澤 康友

2025 年 11 月 4 日

今日のポイント

1. (X, Y) の同時 cdf は $F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$. X または Y のみの cdf を周辺 cdf という. (X, Y) の同時 pmf は $p_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$. X または Y のみの pmf を周辺 pmf という. 多重積分すると同時 cdf が得られる関数 (同時 cdf の交差偏導関数) を同時 pdf という.
2. $g(X, Y)$ の期待値は, (X, Y) が離散なら $\sum_x \sum_y g(x, y)p_{X,Y}(x, y)$, 連続なら $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{X,Y}(x, y) dx dy$. X と Y の共分散は $\text{cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$. 標準化した確率変数の共分散を相関係数という.
3. $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き pmf は $p_{X|Y}(x|Y = y) := p_{X,Y}(x, y)/p_Y(y)$, 条件付き pdf は $f_{X|Y}(x|Y = y) := f_{X,Y}(x, y)/f_Y(y)$. $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き期待値 $E(X|Y = y)$ は, X が離散なら $\sum_x xp_{X|Y}(x|Y = y)$, 連続なら $\int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|Y = y) dx$. $p_{X|Y}(x|Y = y) = p_X(x)$ または $f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$ なら X と Y は独立という.

1.2	2 階偏微分	2
2	多変数関数の積分	2
2.1	累次積分	2
2.2	重積分	2
3	同時分布と周辺分布	2
3.1	累積分布関数	2
3.2	確率質量関数 (p. 134)	2
3.3	確率密度関数 (p. 135)	3
4	積率	5
4.1	期待値	5
4.2	共分散 (p. 136)	5
4.3	相関係数 (p. 137)	5
5	条件付き分布と確率変数の独立性	6
5.1	条件付き分布 (p. 141)	6
5.2	確率変数の独立性 (p. 143)	6
6	今日のキーワード	7
7	次回までの準備	7

1 多変数関数の微分

1.1 偏微分

2 変数関数 $z = f(x, y)$ において, 1 つの独立変数のみに注目し, 他の独立変数を定数とみなした微分を考える.

定義 1. (x, y) における $f(., .)$ の x に関する偏微分係数は

$$f_x(x, y) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

目次

1	多変数関数の微分	1
1.1	偏微分	1

定義 2. $f_x(\cdot, \cdot)$ を $f(\cdot, \cdot)$ の x に関する偏導関数という。

注 1. $D_x f(\cdot, \cdot)$, $\partial f / \partial x(\cdot, \cdot)$ などとも表記する。

定義 3. 偏導関数を求めることを関数の偏微分という。

1.2 2階偏微分

定義 4. 偏導関数の偏導関数を2階偏導関数という。

注 2. $f_{xx}(\cdot, \cdot)$, $D_{xx}^2 f(\cdot, \cdot)$, $\partial^2 f / \partial x^2(\cdot, \cdot)$ などと表記する。

定義 5. x に関する偏導関数 $f_x(\cdot, \cdot)$ の y に関する偏導関数を x と y に関する交差偏導関数という。

注 3. $f_{xy}(\cdot, \cdot)$, $D_{xy}^2 f(\cdot, \cdot)$, $\partial^2 f / \partial x \partial y(\cdot, \cdot)$ などと表記する。

定理 1 (ヤングの定理). $f_{xy}(\cdot, \cdot)$, $f_{yx}(\cdot, \cdot)$ が連続なら

$$f_{xy}(\cdot, \cdot) = f_{yx}(\cdot, \cdot)$$

2 多変数関数の積分

2.1 累次積分

2変数関数 $z = f(x, y)$ の矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上の定積分を考える。このとき積分の順番は2通りある。

1. y を所与として $f(\cdot, y)$ の区間 $[a, b]$ 上の定積分は

$$F(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

$F(\cdot)$ の区間 $[c, d]$ 上の定積分は

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

2. x を所与として $f(x, \cdot)$ の区間 $[c, d]$ 上の定積分は

$$G(x) := \int_c^d f(x, y) dy$$

$G(\cdot)$ の区間 $[a, b]$ 上の定積分は

$$\int_a^b G(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上で $f(\cdot, \cdot)$ が連続なら両者は等しい。すなわち

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

2.2 重積分

2つの累次積分が等しければ定積分は一意に定まる。すなわち

$$\begin{aligned} \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(x, y) dx dy &= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

注 4. 矩形 $[a, b] \times [c, d]$ 上で $z = 0$ と $z = f(x, y)$ に挟まれた領域の体積を表す。

3 同時分布と周辺分布

3.1 累積分布関数

(X, Y) を確率ベクトルとする。

定義 6. (X, Y) の同時(結合) cdf は、任意の (x, y) について

$$F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$$

例 1. $F_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ のグラフの例 (図 1)。

定義 7. X の周辺 cdf は、任意の x について

$$F_X(x) := \Pr[X \leq x]$$

注 5. 同時 cdf と周辺 cdf の関係は

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \leq x] \\ &= \Pr[X \leq x, Y < \infty] \\ &= F_{X,Y}(x, \infty) \end{aligned}$$

3.2 確率質量関数 (p. 134)

(X, Y) を離散確率ベクトルとする。

定義 8. (X, Y) の同時(結合) pmf は、任意の (x, y) について

$$p_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

定義 9. X の周辺 pmf は、任意の x について

$$p_X(x) := \Pr[X = x]$$

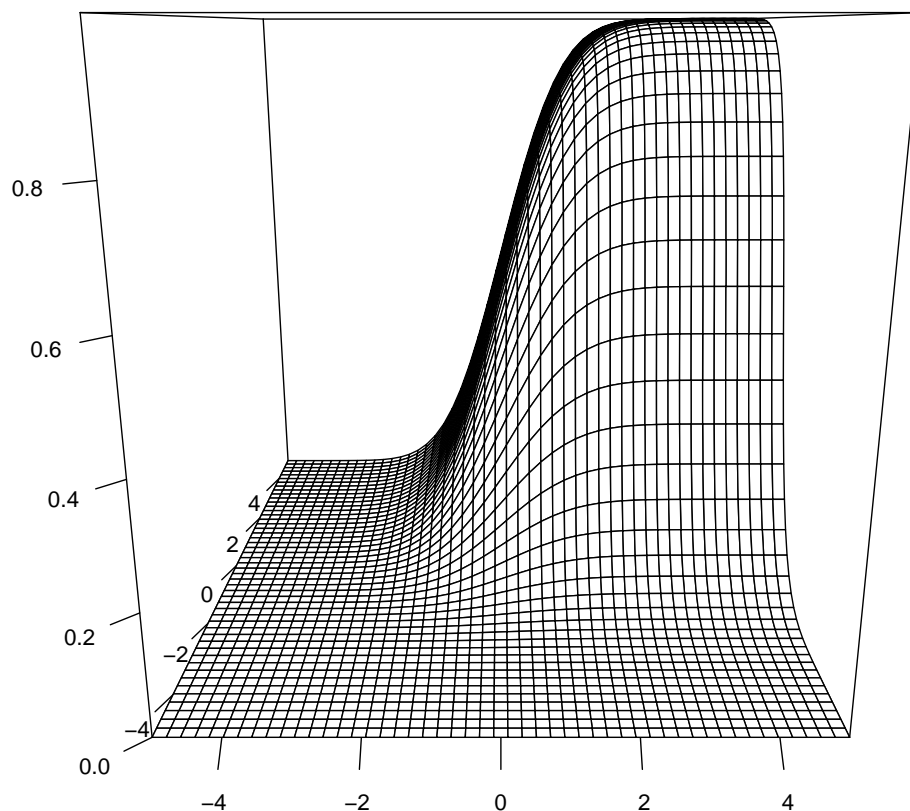


図1 2変量同時 cdf のグラフ

注 6. 同時 pmf と周辺 pmf の関係は

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$$

例 2. 2つのサイコロを投げたときの大きい目 (X) と小さい目 (Y) の同時分布 (表 1).

3.3 確率密度関数 (p. 135)

(X, Y) を連続確率ベクトルとする.

定義 10. 任意の (x, y) について

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) \, ds \, dt$$

となる $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ を (X, Y) の同時 (結合) pdf という.

注 7. 任意の a, b, c, d について

$$\begin{aligned} \Pr[a < X \leq b, c < Y \leq d] \\ = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

注 8. $F_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ が微分可能なら

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x, y)$$

例 3. $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ のグラフの例 (図 2)

表1 2つのサイコロの大きい目 (X) と小さい目 (Y) の同時分布

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6	計
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
計	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

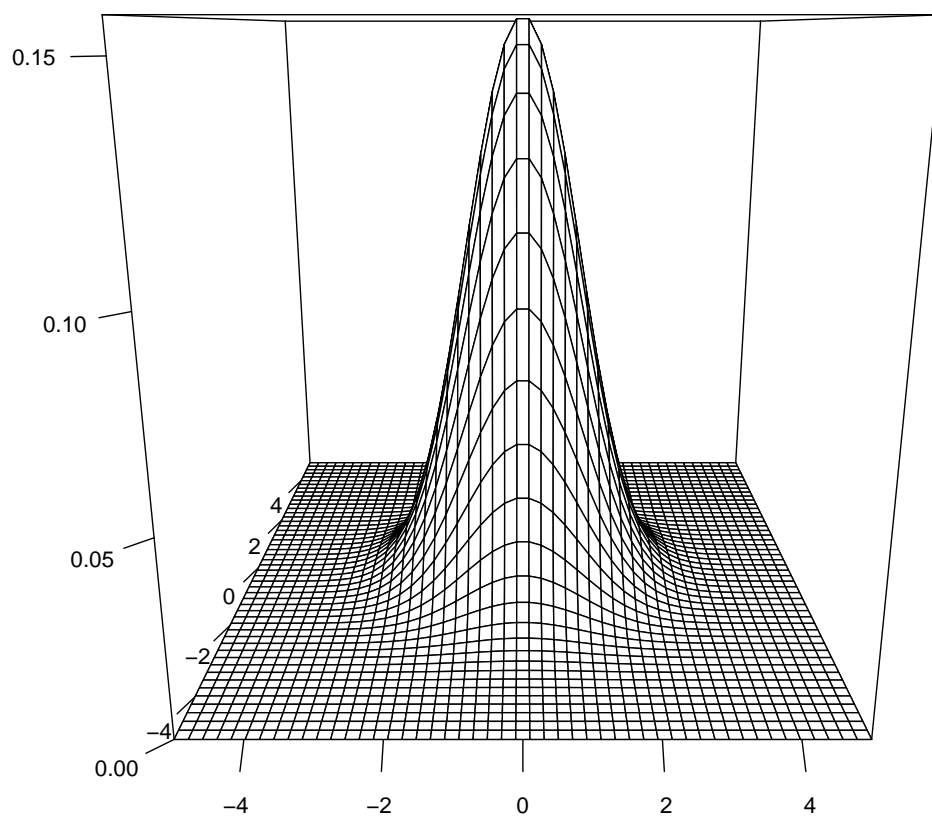


図2 2変量同時 pdf のグラフ

定義 11. X の周辺 pdf は, 任意の x について

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

4 積率

4.1 期待値

定義 12. $g(X, Y)$ の期待値は

$$\begin{aligned} E(g(X, Y)) \\ := \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) p_{X,Y}(x, y) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy & (\text{連続}) \end{cases} \end{aligned}$$

定理 2 (期待値の線形性).

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

証明. 復習テスト. \square

4.2 共分散 (p. 136)

定義 13. X と Y の共分散は

$$\text{cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

注 9. σ_{XY} と表す.

注 10. X が大きいと Y も大きいなら共分散は正,
 X が大きいと Y は小さいなら共分散は負.

定理 3.

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

証明. 復習テスト. \square

補題 1.

$$\text{cov}(X, Y + Z) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z)$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y + Z) \\ &:= E((X - E(X))(Y + Z - E(Y + Z))) \\ &= E((X - E(X))(Y - E(Y) + Z - E(Z))) \\ &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &\quad + E((X - E(X))(Z - E(Z))) \\ &= \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z) \end{aligned}$$

\square

補題 2.

$$\text{cov}(aX, bY) = ab \text{cov}(X, Y)$$

証明.

$$\begin{aligned} \text{cov}(aX, bY) &:= E((aX - E(aX))(bY - E(bY))) \\ &= E((aX - aE(X))(bY - bE(Y))) \\ &= E(a(X - E(X))b(Y - E(Y))) \\ &= ab E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= ab \text{cov}(X, Y) \end{aligned}$$

\square

定理 4.

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + bY) &= a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) \\ &\quad + b^2 \text{var}(Y) \end{aligned}$$

証明. 前 2 補題より

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + bY) \\ &= \text{cov}(aX + bY, aX + bY) \\ &= \text{cov}(aX + bY, aX) + \text{cov}(aX + bY, bY) \\ &= \text{cov}(aX, aX) + \text{cov}(bY, aX) \\ &\quad + \text{cov}(aX, bY) + \text{cov}(bY, bY) \\ &= a^2 \text{cov}(X, X) + ab \text{cov}(Y, X) \\ &\quad + ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{cov}(Y, Y) \\ &= a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y) \end{aligned}$$

\square

4.3 相関係数 (p. 137)

定義 14. 標準化した確率変数の共分散を相関係数という.

注 11. すなわち X と Y の相関係数は

$$\text{corr}(X, Y) := \text{cov}\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

注 12. ρ_{XY} と表す.

注 13. X と Y の関係の強さを表す.

定理 5.

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

証明.

$$\begin{aligned}\rho_{XY} &:= \text{cov} \left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \\ &= E \left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\end{aligned}$$

□

定義 15. $\rho_{XY} = 0$ なら X と Y は無相関という.

定理 6 (コーシー=シュワルツの不等式).

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \text{var}(X)^{1/2} \text{var}(Y)^{1/2}$$

証明. 教科書 p. 138 参照.

□

系 1.

$$|\rho_{XY}| \leq 1$$

5 条件付き分布と確率変数の独立性

5.1 条件付き分布 (p. 141)

定義 16. $Y \leq y$ が与えられたときの X の条件付き cdf は, 任意の x について

$$F_{X|Y}(x|Y \leq y) := \frac{F_{X,Y}(x, y)}{F_Y(y)}$$

注 14. 条件付き確率で定義する.

定義 17. $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き pmf は, 任意の x について

$$p_{X|Y}(x|Y = y) := \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

定義 18. $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き pdf は, 任意の x について

$$f_{X|Y}(x|Y = y) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

注 15. 条件付き確率と同様に定義する.

定義 19. $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き期待値は

$$\begin{aligned}E(X|Y = y) &:= \begin{cases} \sum_x x p_{X|Y}(x|Y = y) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y = y) dx & (\text{連続}) \end{cases}\end{aligned}$$

定義 20. $Y = y$ が与えられたときの X の条件付き分散は

$$\text{var}(X|Y = y) := E((X - E(X|Y = y))^2|Y = y)$$

5.2 確率変数の独立性 (p. 143)

定義 21. 任意の (x, y) について

$$f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$$

なら X と Y は独立という.

注 16. 条件付き pdf の定義より

$$\begin{aligned}f_{X|Y}(x|Y = y) &= f_X(x) \\ \iff f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x)f_Y(y)\end{aligned}$$

定義 22. 任意の (x_1, \dots, x_n) について

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

なら X_1, \dots, X_n は独立という.

注 17. cdf で定義してもよい.

定理 7. X と Y が独立なら, 任意の $f(\cdot)$ と $g(\cdot)$ について

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$$

証明. (X, Y) が連続なら

$$\begin{aligned}E(f(X)g(Y)) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)f_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f_Y(y) dy \\ &= E(f(X))E(g(Y))\end{aligned}$$

離散の場合も同様.

□

系 2. X と Y が独立なら

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

注 18. すなわち独立なら無相関. 逆は必ずしも成立しない.

6 今日のキーワード

同時 cdf, 周辺 cdf, 同時 pmf, 周辺 pmf, 同時 pdf, 周辺 pdf, 期待値の線形性, 共分散, 確率変数の線形結合の分散, 相関係数, 条件付き cdf, 条件付き pmf, 条件付き pdf, 条件付き期待値, 条件付き分散, 確率変数の独立性, 独立と無相関

7 次回までの準備

復習 教科書第 7 章 1–2 節, 復習テスト 11

予習 教科書第 7 章 3–4 節