

## 第 23 回 適合度検定 (12.3–12.4)

村澤 康友

2023 年 1 月 6 日

### 今日のポイント

1. 母集団分布に対する標本の適合度を検定する.
2. 分布の範囲を  $k$  階級に分割したときの母比率の両側検定を  $\chi^2$  適合度検定という. 2 階級ならベルヌーイ母集団の母比率の両側検定となる.
3.  $\chi^2$  適合度検定を応用して 2 変量の独立性を検定できる.

### 目次

1	母比率の検定	1
1.1	片側検定 . . . . .	1
1.2	両側検定 (p. 250) . . . . .	1
2	適合度検定	2
2.1	適合度検定問題 (p. 245) . . . . .	2
2.2	ピアソンの $\chi^2$ 適合度検定 (p. 246)	2
2.3	独立性の $\chi^2$ 検定 (p. 248) . . . . .	3
3	今日のキーワード	4
4	次回までの準備	4

### 1 母比率の検定

#### 1.1 片側検定

母集団分布を  $\text{Bin}(1, p)$  とする. 次の片側検定問題を考える.

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p > p_0$$

有意水準を 5 % とする.  $\text{Bin}(1, p)$  の平均は  $p$ , 分散は  $p(1-p)$ . 大きさ  $n$  の無作為標本の標本比率 (= 標本平均) を  $\hat{p}$  とすると, 中心極限定理より

$$\hat{p} \stackrel{a}{\sim} N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

標準化すると

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

検定統計量は

$$Z := \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

$H_0$  の下で

$$Z \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

標準正規分布表より  $H_0$  の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] \approx .05$$

したがって近似的な棄却域は  $[1.65, \infty)$ .

#### 1.2 両側検定 (p. 250)

次の両側検定問題を考える.

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p \neq p_0$$

有意水準を 5 % とする. 標準正規分布表より  $H_0$  の下で

$$\Pr[|Z| \geq 1.96] \approx .05$$

したがって近似的な棄却域は  $(-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$ .

注 1.  $Z^2$  を検定統計量としてもよい. すなわち

$$Z^2 = \frac{n(\hat{p} - p_0)^2}{p_0(1-p_0)}$$

$H_0$  の下で

$$Z^2 \stackrel{a}{\sim} \chi^2(1)$$

$\chi^2$  分布表より  $H_0$  の下で

$$\Pr[Z^2 \geq 3.84146] \approx .05$$

したがって近似的な棄却域は  $[3.84146, \infty)$ . もちろん  $1.96^2 \approx 3.84146$  で両検定は同等.

## 2 適合度検定

### 2.1 適合度検定問題 (p. 245)

母集団分布の cdf を  $F(\cdot)$  とする (ノンパラメトリックでもよい).

**定義 1.** 母集団分布に対する標本の適合度の検定を **適合度検定** という.

注 2. 適合度検定問題は

$$H_0 : F(\cdot) = F_0(\cdot) \quad \text{vs} \quad H_1 : F(\cdot) \neq F_0(\cdot)$$

$k$  階級に分割して分布を表すと

階級	$F(\cdot)$	$F_0(\cdot)$
1	$p_1$	$p_{0,1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k$	$p_k$	$p_{0,k}$
計	1	1

次の適合度検定問題を考える (元の問題と同等ではない).

$$H_0 : \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{0,1} \\ \vdots \\ p_{0,k-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{vs } H_1 : \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{k-1} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} p_{0,1} \\ \vdots \\ p_{0,k-1} \end{pmatrix}$$

未知母数は  $k-1$  個.  $k=2$  なら母比率の両側検定.  $k \geq 3$  なら多次元母数の両側検定となる.

**例 1.**  $U[0, 1]$  と  $N(0, 1)$  の標本 (100 個の乱数) の適合度 (図 1).

### 2.2 ピアソンの $\chi^2$ 適合度検定 (p. 246)

大きさ  $n$  の無作為標本における第  $j$  階級の度数を  $N_j$  とする.

**定義 2.** ピアソンの  $\chi^2$  適合度検定統計量は

$$\chi^2 := \sum_{j=1}^k \frac{(N_j - np_{0,j})^2}{np_{0,j}}$$

注 3.  $N_j$  を観測度数,  $np_{0,j}$  を期待度数という.

注 4. 第  $j$  階級の相対度数を  $\hat{p}_j := N_j/n$  とすると,

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_{j=1}^k \frac{(n\hat{p}_j - np_{0,j})^2}{np_{0,j}} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{n(\hat{p}_j - p_{0,j})^2}{p_{0,j}} \end{aligned}$$

$k=2$  なら

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{n(\hat{p}_1 - p_{0,1})^2}{p_{0,1}} + \frac{n(\hat{p}_2 - p_{0,2})^2}{p_{0,2}} \\ &= \frac{n(\hat{p}_1 - p_{0,1})^2}{p_{0,1}} + \frac{n[(1 - \hat{p}_1) - (1 - p_{0,1})]^2}{1 - p_{0,1}} \\ &= \frac{n(\hat{p}_1 - p_{0,1})^2}{p_{0,1}} + \frac{n(\hat{p}_1 - p_{0,1})^2}{1 - p_{0,1}} \\ &= \frac{(1 - p_{0,1})n(\hat{p}_1 - p_{0,1})^2 + p_{0,1}n(\hat{p}_1 - p_{0,1})^2}{p_{0,1}(1 - p_{0,1})} \\ &= \frac{n(\hat{p}_1 - p_{0,1})^2}{p_{0,1}(1 - p_{0,1})} \end{aligned}$$

すなわち母比率の検定統計量と一致する.

**定理 1.**  $H_0$  の下で

$$\chi^2 \stackrel{a}{\sim} \chi^2(k-1)$$

証明. 「統計学入門」の水準を超えるので略.  $\square$

**例 2** (p. 245, メンデルの法則). えんどう豆の形質の遺伝に関する実験結果:

階級	$N_j$	$\hat{p}_j$	$p_{0,j}$
黄・丸	315	.5665	.5625
黄・しわ	101	.1817	.1875
緑・丸	108	.1942	.1875
緑・しわ	32	.0576	.0625
計	556	1	1

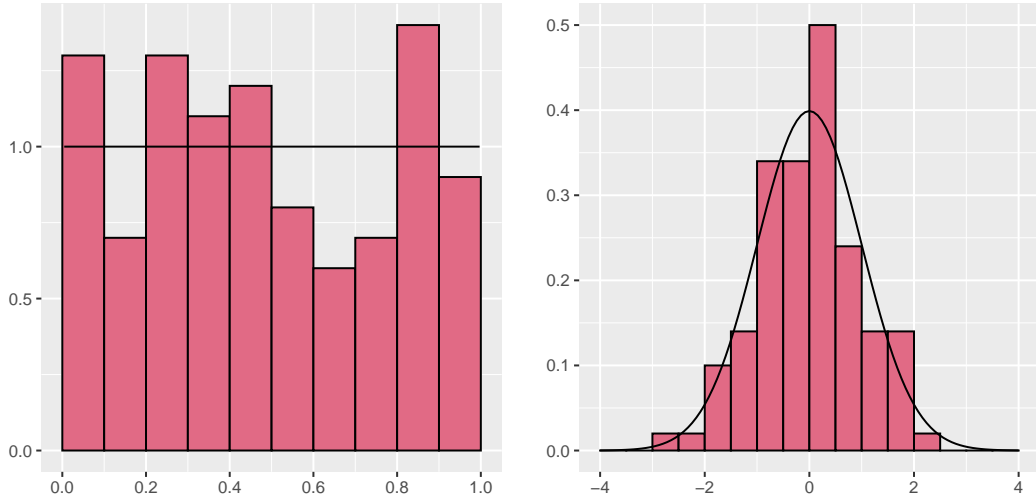


図1 U[0, 1] と N(0, 1) の標本 (100 個の乱数) の適合度

適合度検定問題は

$$H_0 : \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{0,1} \\ p_{0,2} \\ p_{0,3} \end{pmatrix} \\ \text{vs } H_1 : \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} p_{0,1} \\ p_{0,2} \\ p_{0,3} \end{pmatrix}$$

有意水準を 5 % とする.  $H_0$  の下で

$$\chi^2 \sim \chi^2(3)$$

$\chi^2$  分布表より  $H_0$  の下で

$$\Pr[\chi^2 \geq 7.81473] \approx .05$$

したがって近似的な棄却域は  $[7.81473, \infty)$ .  $\chi^2 = .47$  となるので  $H_0$  は棄却されない (ただし捏造の疑いあり?).

### 2.3 独立性の $\chi^2$ 検定 (p. 248)

2 変量母集団分布を  $F_{X,Y}(\cdot, \cdot)$ , その周辺分布を  $F_X(\cdot), F_Y(\cdot)$  とする. 独立性の検定問題は

$$H_0 : F_{X,Y}(\cdot, \cdot) = F_X(\cdot)F_Y(\cdot) \\ \text{vs } H_1 : F_{X,Y}(\cdot, \cdot) \neq F_X(\cdot)F_Y(\cdot)$$

$k \times l$  分割表で分布を表すと

階級	1	...	$l$	計
1	$p_{1,1}$	...	$p_{1,l}$	$p_{1,\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$k$	$p_{k,1}$	...	$p_{k,l}$	$p_{k,\cdot}$
計	$p_{\cdot,1}$	...	$p_{\cdot,l}$	1

次の適合度検定問題を考える (元の問題と同等ではない).

$$H_0 : \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,l-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k-1,1} & \cdots & p_{k-1,l-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} p_{1,\cdot,1} & \cdots & p_{1,\cdot,l-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k-1,\cdot,1} & \cdots & p_{k-1,\cdot,l-1} \end{bmatrix} \\ \text{vs } H_1 : \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,l-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k-1,1} & \cdots & p_{k-1,l-1} \end{bmatrix} \\ \neq \begin{bmatrix} p_{1,\cdot,1} & \cdots & p_{1,\cdot,l-1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k-1,\cdot,1} & \cdots & p_{k-1,\cdot,l-1} \end{bmatrix}$$

未知母数は  $(k-1)(l-1)$  個. 大きさ  $n$  の無作為標本における相対度数を  $\hat{p}_{i,j}, \hat{p}_{i,\cdot}, \hat{p}_{\cdot,j}$  などとする.

定義 3. 独立性の  $\chi^2$  検定統計量は

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \frac{n(\hat{p}_{i,j} - \hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j})^2}{\hat{p}_{i.}\hat{p}_{.j}}$$

定理 2.  $H_0$  の下で

$$\chi^2 \stackrel{a}{\sim} \chi^2((k-1)(l-1))$$

証明. 「統計学入門」の水準を超えるので略.  $\square$

例 3 (pp. 248-250). 2 つの試験の成績 ( $n = 42$ )

成績	A	B	C	計
A	.10	.05	.07	.21
B	.19	.10	.14	.43
C	.14	.07	.14	.36
計	.43	.21	.36	1.00

独立なら

成績	A	B	C	計
A	.09	.05	.08	.21
B	.18	.09	.15	.43
C	.15	.08	.13	.36
計	.43	.21	.36	1.00

独立性の検定問題は

$$H_0 : \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{1.,p.,1} & p_{1.,p.,2} \\ p_{2.,p.,1} & p_{2.,p.,2} \end{bmatrix}$$

$$\text{vs } H_1 : \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} p_{1.,p.,1} & p_{1.,p.,2} \\ p_{2.,p.,1} & p_{2.,p.,2} \end{bmatrix}$$

有意水準を 5 % とする.  $H_0$  の下で

$$\chi^2 \sim \chi^2(4)$$

$\chi^2$  分布表より  $H_0$  の下で

$$\Pr[\chi^2 \geq 9.48773] \approx .05$$

したがって近似的な棄却域は  $[9.48773, \infty)$ .  $\chi^2 = .19$  となるので  $H_0$  は棄却されない (ただし捏造の疑いあり?).

例 4. 男女の相性は血液型で決まるとの俗説がある. その真偽を科学的に検証したい. そこで無作為に選んだ 117 組の夫婦の血液型を調べたところ, 次表の結果が得られた (数値は百分率を四捨五入).

夫\妻	A	O	B	AB	計
A	.15	.14	.06	.07	.41
O	.10	.07	.10	.03	.30
B	.08	.09	.04	.01	.22
AB	.04	.00	.03	.00	.07
計	.37	.30	.23	.10	1.00

独立なら

夫\妻	A	O	B	AB	計
A	.1517	.1230	.0943	.0410	.41
O	.1110	.0900	.0690	.0300	.30
B	.0814	.0660	.0506	.0220	.22
AB	.0259	.0210	.0161	.0070	.07
計	.37	.30	.23	.10	1.00

有意水準を 5 % とする.  $H_0$  の下で

$$\chi^2 \sim \chi^2(9)$$

$\chi^2$  分布表より  $H_0$  の下で

$$\Pr[\chi^2 \geq 16.919] \approx .05$$

したがって近似的な棄却域は  $[16.919, \infty)$ .  $\chi^2 = 14.2309624$  となるので  $H_0$  は棄却されない.

### 3 今日のキーワード

母比率の片側検定, 母比率の両側検定, 適合度検定, ピアソンの  $\chi^2$  適合度検定, 観測度数, 期待度数, 独立性の  $\chi^2$  検定

### 4 次回までの準備

復習 教科書第 12 章 3-4 節, 復習テスト 23

予習 教科書第 3 章 4 節, 第 13 章 1-2.1 節