

中級統計学：復習テスト 21

学籍番号_____氏名_____

2024 年 12 月 13 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 21～26 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 21 日の予定）に提出すること。

1. 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）。

(a) 統計的仮説

(b) 検定

(c) 帰無仮説

(d) 第 1 種の誤り

(e) 有意水準

(f) 検定統計量

(g) 棄却域

2. $N(\mu, \sigma^2)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を \bar{X} とする. σ^2 を既知として次の検定問題を考える.

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu = 1$$

(a) \bar{X} の分布を求めなさい.

(b) 検定統計量を与えなさい.

(c) 検定統計量の H_0 の下での分布を導きなさい.

(d) 有意水準 5 % の検定の棄却域を定めなさい.

(e) 検定統計量の H_1 の下での分布を導きなさい.

解答例

1. (a) 母集団分布に関する仮説
(b) 統計的仮説の真偽を標本から判定すること
(c) とりあえず真と想定する仮説
(d) H_0 が真なのに H_0 を棄却する誤り
(e) 許容する第 1 種の誤りの確率
(f) 検定に用いる統計量
(g) 標本 (検定統計量) の値域で H_0 を棄却する領域
2. (a) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} E(\bar{X}) &= E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{E(X_1 + \cdots + X_n)}{n} \\ &= \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n} \\ &= \frac{\mu + \cdots + \mu}{n} \\ &= \mu \end{aligned}$$

X_1, \dots, X_n は独立なので

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{X}) &= \text{var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{\text{var}(X_1 + \cdots + X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\text{var}(X_1) + \cdots + \text{var}(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

正規分布の線形変換は正規分布なので

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(b)

$$Z := \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

(c) H_0 の下で

$$Z \sim N(0, 1)$$

(d) 標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] = .05$$

したがって棄却域は $[1.65, \infty)$.

(e) H_1 の下で

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\bar{X} - 1 + 1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \\ &= \frac{\bar{X} - 1}{\sqrt{\sigma^2/n}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}} \\ &\sim N\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2/n}}, 1\right) \end{aligned}$$