

第 16 回 正規母集団 (10.1–10.4)

村澤 康友

2024 年 11 月 22 日

今日のポイント

1. $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本 (X_1, \dots, X_n) の標本平均・標本分散の分布を求める.
2. $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$ が独立のとき, $Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$.
3. 標本分散 s^2 の分布は $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.
4. $Z \sim N(0, 1)$ と $X \sim \chi^2(n)$ が独立のとき, $Z/\sqrt{X/n} \sim t(n)$.
5. 標本平均 \bar{X} の分布は $(\bar{X} - \mu)/\sqrt{s^2/n} \sim t(n-1)$.

目次

1	正規分布 (p. 120, p. 194)	1
2	標本分散	2
2.1	χ^2 分布 (p. 199)	2
2.2	母平均が既知の場合	2
2.3	母平均が未知の場合 (p. 198)	2
3	標本平均	3
3.1	t 分布 (p. 202)	3
3.2	母分散が既知の場合 (p. 197)	3
3.3	母分散が未知の場合 (p. 201)	4
4	今日のキーワード	5
5	次回までの準備	5

1 正規分布 (p. 120, p. 194)

定義 1. 正規 (ガウス) 分布の pdf は

$$f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

注 1. $N(\mu, \sigma^2)$ と書く.

定義 2. $N(0, 1)$ を標準正規分布という.

注 2. $N(0, 1)$ の cdf を $\Phi(\cdot)$, pdf を $\phi(\cdot)$ で表す. すなわち

$$\begin{aligned}\phi(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \\ \Phi(x) &:= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz\end{aligned}$$

定理 1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ なら

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

証明. mgf を用いる. □

系 1. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ なら

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

証明. 前の定理で $a := 1/\sigma$, $b := -\mu/\sigma$ とする. □

注 3. したがって X の累積確率は標準正規分布表から求まる. すなわち

$$\begin{aligned}F_X(x) &:= \Pr[X \leq x] \\ &= \Pr\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

ただし $\Phi(\cdot)$ でなく $Q(\cdot) := 1 - \Phi(\cdot)$ の表の場合も多い。

2 標本分散

2.1 χ^2 分布 (p. 199)

定義 3. $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$ が独立のとき, $Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ の分布を **自由度 n の χ^2 分布** という。

注 4. $\chi^2(n)$ と書く。

注 5. 累積確率は χ^2 分布表を参照。

例 1. $\chi^2(n)$ の pdf の例は図 1 の通り。

定理 2. $X \sim \chi^2(n)$ なら

$$E(X) = n$$

証明. $X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$ とすると

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \\ &= E(Z_1^2) + \dots + E(Z_n^2) \\ &= \text{var}(Z_1) + \dots + \text{var}(Z_n) \\ &= n \end{aligned}$$

□

2.2 母平均が既知の場合

$N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本を (X_1, \dots, X_n) とする。 μ が既知なら標本分散は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

定理 3.

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

証明.

$$\begin{aligned} \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \\ &= \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma} \right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma} \right)^2 \end{aligned}$$

各項は独立な $N(0, 1)$ の 2 乗。

□

注 6. $\hat{\sigma}^2$ の累積確率は χ^2 分布表から次のように求める。

$$\begin{aligned} \Pr[\hat{\sigma}^2 \leq x] &= \Pr\left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \frac{nx}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr\left[\chi^2(n) \leq \frac{nx}{\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

例 2. $\sigma^2 = 1$ とする。 $n = 10$ なら $\hat{\sigma}^2 > 2$ の確率は

$$\begin{aligned} \Pr[\hat{\sigma}^2 > 2] &= \Pr\left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > \frac{2n}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr[\chi^2(10) > 20] \\ &\approx .03 \end{aligned}$$

2.3 母平均が未知の場合 (p. 198)

μ が未知なら標本分散は

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

定理 4.

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

証明. 省略 (難しい)。

□

注 7. 母平均が既知の場合と同様に書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \\ &= \left(\frac{X_1 - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \end{aligned}$$

各項は独立でなく $N(0, 1)$ の 2 乗でもない。

注 8. s^2 の累積確率は χ^2 分布表から次のように求める。

$$\begin{aligned} \Pr[s^2 \leq x] &= \Pr\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)x}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr\left[\chi^2(n-1) \leq \frac{(n-1)x}{\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

例 3. $\sigma^2 = 1$ とする。 $n = 10$ なら $s^2 > 2$ の確率は

$$\begin{aligned} \Pr[s^2 > 2] &= \Pr\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \frac{2(n-1)}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr[\chi^2(9) > 18] \\ &\approx .04 \end{aligned}$$

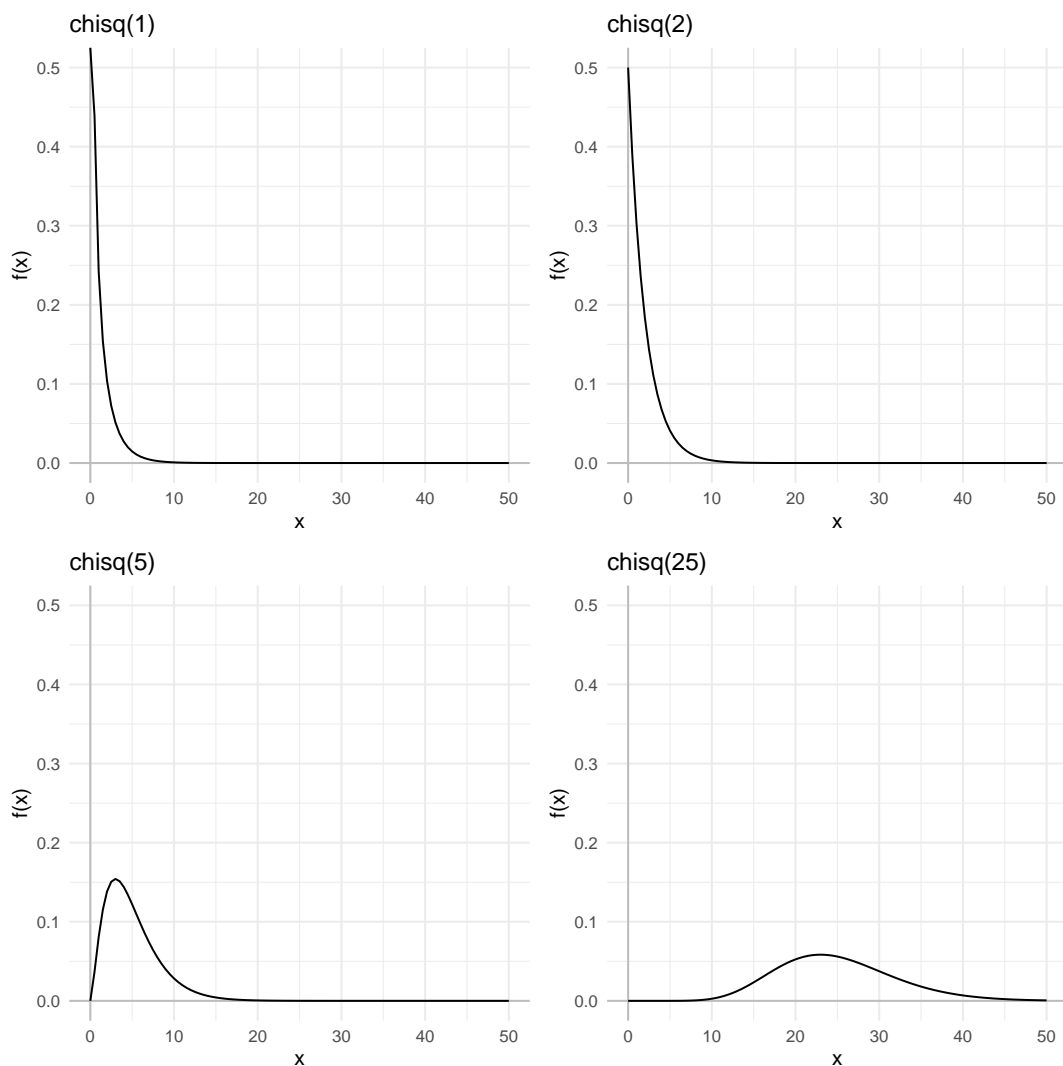


図1 $\chi^2(n)$ の pdf の例

3 標本平均

3.1 t 分布 (p. 202)

定義 4. $Z \sim N(0, 1)$ と $X \sim \chi^2(n)$ が独立のとき, $Z/\sqrt{X/n}$ の分布を **自由度 n の t 分布** という.

注 9. $t(n)$ と書く.

注 10. 累積確率は t 分布表を参照.

注 11. $t(1)$ はコーシー分布, $t(\infty)$ は $N(0, 1)$.

例 4. $t(n)$ の pdf の例は図 2 の通り.

3.2 母分散が既知の場合 (p. 197)

$N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本を (X_1, \dots, X_n) とする.

定理 5.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

証明. 正規分布の線形変換は正規分布. 平均と分散の計算は省略. \square

系 2.

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

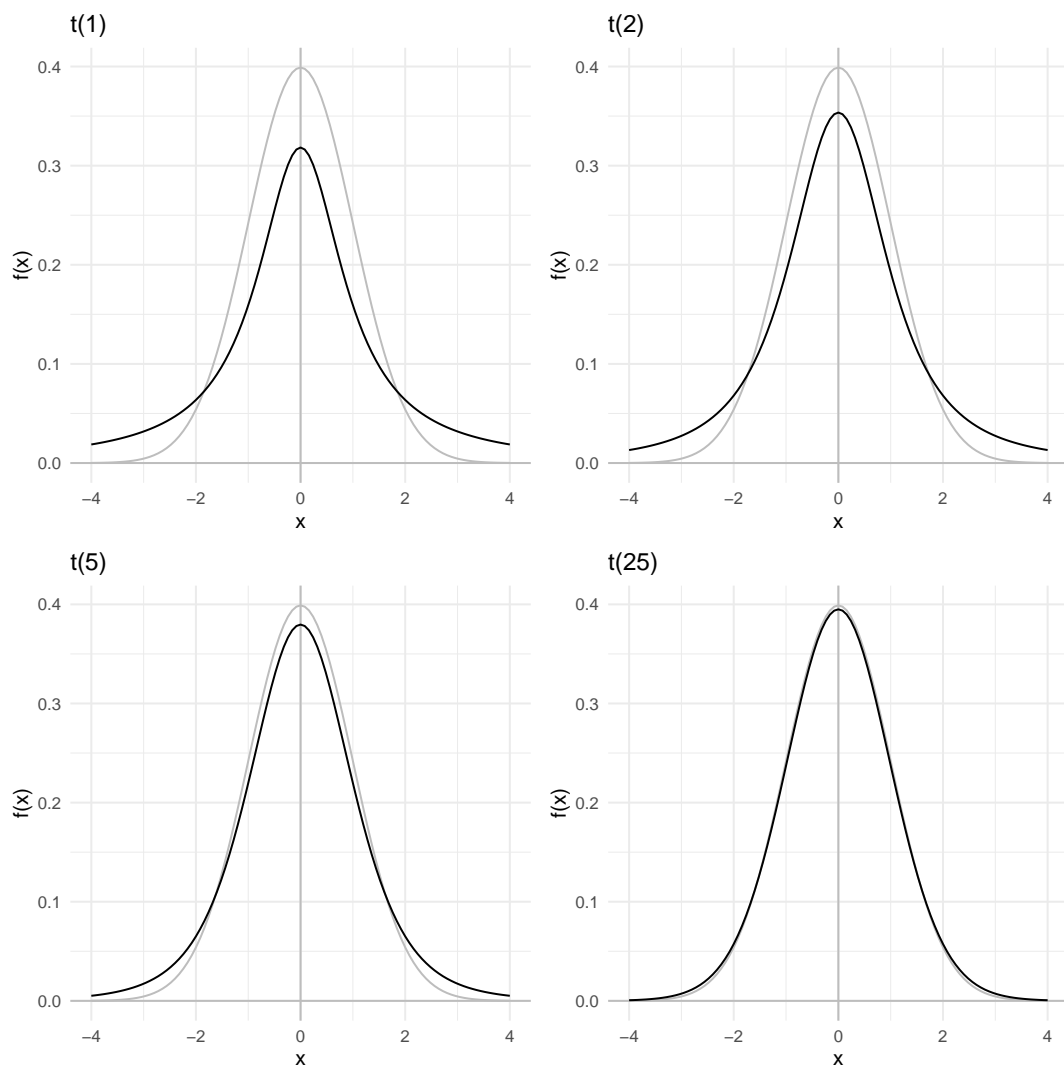


図2 $t(n)$ の pdf の例

証明. 正規分布の線形変換は正規分布. 標準化で平均 0, 分散 1 となる. \square

注 12. \bar{X} の累積確率は標準正規分布表から次のように求める.

$$\begin{aligned} \Pr[\bar{X} \leq x] &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq \frac{x - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right) \end{aligned}$$

例 5. $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ とする. $n = 9$ なら $\bar{X} > 1$

の確率は

$$\begin{aligned} \Pr[\bar{X} > 1] &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{1 - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right] \\ &= Q(3) \\ &= .0013499 \end{aligned}$$

3.3 母分散が未知の場合 (p. 201)

母分散が未知なら σ^2 を s^2 で置き換える.

定理 6.

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1)$$

証明. 変形すると

$$\begin{aligned}\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} &= \frac{(\bar{X} - \mu) / \sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{s^2/n} / \sqrt{\sigma^2/n}} \\ &= \frac{(\bar{X} - \mu) / \sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{[(n-1)s^2/\sigma^2]/(n-1)}}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} &\sim N(0, 1) \\ \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n-1)\end{aligned}$$

分子と分母の独立性も証明できる (省略). \square

注 13. \bar{X} の累積確率は t 分布表から次のように求める.

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{X} \leq x] &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq \frac{x - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\right] \\ &= \Pr\left[t(n-1) \leq \frac{x - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\right]\end{aligned}$$

例 6. $\mu = 0$ とする. $n = 9$, $s^2 = 1$ なら $\bar{X} > 1$ の確率は

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{X} > 1] &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} > \frac{1 - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\right] \\ &= \Pr[t(8) > 3] \\ &\approx .008\end{aligned}$$

4 今日のキーワード

正規分布, 標準正規分布, 正規分布の標準化, 標準正規分布表, 自由度 n の χ^2 分布, χ^2 分布表, 標本分散の分布 (母平均が既知, 母平均が未知), 標本平均の分布 (母分散が既知), 自由度 n の t 分布, t 分布表, 標本平均の分布 (母分散が未知)

5 次回までの準備

復習 教科書第 10 章 1-4 節, 復習テスト 16

予習 教科書第 10 章 5 節