経済統計：第1回中間試験

村澤 康友

2017年5月8日

注意：3問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は0点とする）．

1. （20点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各20字程度）．
   (a) 変動係数
   (b) 見かけ上の相関
   (c) 排反事象
   (d) 歪度
2. （30点）ジョーカーを除くトランプ52枚から1枚抜き出す．残り51枚から無作為に3枚抜き出すと3枚ともダイヤであった．
   (a) 最初に抜き出した1枚がダイヤであったとき，次に抜き出した3枚がすべてダイヤである確率を求めなさい．
   (b) 最初に抜き出した1枚がダイヤでなかったとき，次に抜き出した3枚がすべてダイヤである確率を求めなさい．
   (c) 後で抜き出した3枚がすべてダイヤであったとき，最初に抜き出した1枚がダイヤである確率を求めなさい．
3. （50点）将棋の振り駒は5枚の駒（「歩兵」）を投げて表（「歩」）と裏（「と」）のどちらの枚数が多いかで先後を決める方法である．振り駒における表の枚数を数える試行を考える．
   (a) 標本空間を書きなさい．
   (b) 事象は全部で幾つあるか？

   各駒は相互に独立に等確率で表か裏になると仮定する．表の枚数を X とする．

   (c) X の pdf を式とグラフで書きなさい．
   (d) X の cdf を式とグラフで書きなさい．
   (e) X の平均と分散を求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 標準偏差／平均
   (b) 因果関係のない相関
   (c) 事象 A, B が $A \cap B = \emptyset$ であること
   (d) 3 次の標準化積率
2. ベイズの定理
   (a) 最初に抜き出した 1 枚がダイヤである事象を A，次に抜き出した 3 枚がすべてダイヤである事象を B とする．残り 51 枚のうちダイヤは 12 枚だから

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{{}_{12}C_3}{{}_{51}C_3} \\
&= \frac{12!/(9!3!)}{51!/(48!3!)} \\
&= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{51 \cdot 50 \cdot 49} \left(= \frac{4 \cdot 11}{17 \cdot 5 \cdot 49} = \frac{44}{4165} \right)
\end{aligned}
$$

   (b) 残り 51 枚のうちダイヤは 13 枚だから

$$
\begin{aligned}
P(B|A^c) &= \frac{{}_{13}C_3}{{}_{51}C_3} \\
&= \frac{13!/(10!3!)}{51!/(48!3!)} \\
&= \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{51 \cdot 50 \cdot 49} \left(= \frac{13 \cdot 2 \cdot 11}{17 \cdot 25 \cdot 49} = \frac{286}{20825} \right)
\end{aligned}
$$

   (c) 条件つき確率の定義より

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &:= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)} \\
&= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} \\
&= \frac{(12 \cdot 11 \cdot 10/51 \cdot 50 \cdot 49)(1/4)}{(12 \cdot 11 \cdot 10/51 \cdot 50 \cdot 49)(1/4) + (13 \cdot 12 \cdot 11/51 \cdot 50 \cdot 49)(3/4)} \\
&= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 10 + 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 3} \\
&= \frac{10}{10 + 13 \cdot 3} \\
&= \frac{10}{49}
\end{aligned}
$$

   - 条件つき確率の定義で 2 点.
   - 最初に抜き出した 3 枚がすべてダイヤであったとき，次に抜き出した 1 枚がダイヤである確率と考えてもよい.
3. 離散分布
   (a) $\Omega := \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

- {} がなければ 5 点.

（b）$2^6 = 64$

（c）

$$X := \begin{cases} 0 & \text{with pr. } 1/32 \\ 1 & \text{with pr. } 5/32 \\ 2 & \text{with pr. } 10/32 \\ 3 & \text{with pr. } 10/32 \\ 4 & \text{with pr. } 5/32 \\ 5 & \text{with pr. } 1/32 \end{cases}$$

より

$$p_X(x) := \begin{cases} 1/32 & \text{for } x = 0, 5 \\ 5/32 & \text{for } x = 1, 4 \\ 10/32 & \text{for } x = 2, 3 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

グラフは省略.

（d）

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1/32 & \text{for } 0 \le x < 1 \\ 6/32 & \text{for } 1 \le x < 2 \\ 16/32 & \text{for } 2 \le x < 3 \\ 26/32 & \text{for } 3 \le x < 4 \\ 31/32 & \text{for } 4 \le x < 5 \\ 1 & \text{for } x \ge 5 \end{cases}$$

グラフは省略.

（e）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{10}{32} + 3 \cdot \frac{10}{32} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} \\ &= \frac{5 + 20 + 30 + 20 + 5}{32} \\ &= \frac{80}{32} \\ &= \frac{5}{2} \\ \mathrm{var}(X) &:= \left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{32} + \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{32} + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{10}{32} \\ &\quad + \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{10}{32} + \left(4 - \frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{5}{32} + \left(5 - \frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{32} \\ &:= \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{32} + \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{32} + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{32} + \frac{1}{4} \cdot \frac{10}{32} + \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{32} + \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{32} \\ &= \frac{25 + 45 + 10 + 10 + 45 + 25}{4 \cdot 32} \\ &= \frac{160}{4 \cdot 32} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$