

計量経済 I : 中間試験

村澤 康友

2017 年 6 月 6 日

注意 : 3 問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいに与えるが、結果のみの解答は 0 点とする）。

1. (20 点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）。

- (a) (データ・確率変数の) 標準化
- (b) (事象の) 独立性
- (c) 累積分布関数
- (d) 積率母関数

2. (30 点) X は次の累積分布関数をもつ。

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1 - 1/x^2 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) $\Pr[2 < X \leq 3]$ を求めなさい。
 - (b) X の確率密度関数を求めなさい。
 - (c) $E(X)$ を求めなさい。
3. (50 点) 2 枚の（公正な）コインを投げて出た表の枚数を X とする。
- (a) X の確率関数を式とグラフで書きなさい。
 - (b) X の累積分布関数を式とグラフで書きなさい。
 - (c) $E(X)$ を求めなさい。
 - (d) $E(X^2)$ を求めなさい。
 - (e) $\text{var}(X)$ を求めなさい。

解答例

1. 確率・統計の基本用語

(a) 変量の値から平均を引く, 標準偏差で割る変換.

- 式で書くな $z_i := (x_i - \mu)/\sigma$ または $Z := (X - \mu)/\sigma$.
- 「平均 0, 分散 1 に揃える」は手続きが不明確なので 2 点.

(b) $P(A|B) = P(A)$ なら A と B は独立.

- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ でも OK.
- 「 A と B が独立なら $P(A|B) = P(A)$ 」は定義でなく定理と読めるので 1 点減.
- 言葉で書くな「 A の確率が B が起こったかどうか依存しない」または「 A と B が同時に起こる確率が, それぞれの確率の積に等しい」.

(c) 任意の x に対して $\Pr[X \leq x]$ を与える関数.

- 式で書くな $F_X(x) := \Pr[X \leq x]$.
- 累積 (相対) 度数はダメ.

(d) 任意の t に対して $E(e^{tX})$ を与える関数.

- 式で書くな $M_X(t) := E(e^{tX})$.

2. 連続分布

(a)

$$\begin{aligned}\Pr[2 < X \leq 3] &= \Pr[X \leq 3] - \Pr[X \leq 2] \\ &= F_X(3) - F_X(2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \\ &= \frac{8}{9} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{5}{36}\end{aligned}$$

- $F_X(3), F_X(2)$ で 5 点.

(b)

$$\begin{aligned}f_X(x) &= F'_X(x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 2x^{-3} & \text{for } x \geq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

- $F'(x)$ で 5 点.

(c)

$$\begin{aligned}E(X) &:= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_1^{\infty} x \cdot 2x^{-3} dx \\ &= 2 \int_1^{\infty} x^{-2} dx \\ &= 2 [-x^{-1}]_1^{\infty} \\ &= 2\end{aligned}$$

- 積分を解く直前までで 5 点.
- 前問の pdf と整合的なら OK.

3. 離散分布

(a)

$$p_X(x) := \begin{cases} 1/2 & \text{for } x = 1 \\ 1/4 & \text{for } x = 0, 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

グラフは省略.

- 式で 5 点, グラフで 5 点.

(b)

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1/4 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{for } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

グラフは省略.

- 式で 5 点, グラフで 5 点.

(c)

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- $E(X^2) - E(X)^2$ で 5 点.
- 前 2 問の答と整合的なら OK.