

中級統計学：復習テスト 20

学籍番号_____氏名_____

2022 年 12 月 13 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 14～20 を（左上で）ホチキス止めし，第 3 回中間試験実施日（12 月 16 日の予定）にまとめて提出すること。

1. $N(\mu, \sigma^2)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を \bar{X} とする。

(a) \bar{X} の分布を求めなさい。

(b) σ^2 を既知として μ の 95 %信頼区間を求めなさい。

2. $N(\mu, \sigma^2)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本分散を s^2 とする。

(a) s^2 はどのような分布をもつか？（ヒント：変形が必要）

(b) $n = 10$ として σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい。

3. $N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ から独立に抽出した大きさ m, n の無作為標本の標本分散を s_X^2, s_Y^2 とする.

(a) s_X^2, s_Y^2 はどのような分布をもつか? (ヒント: 変形が必要)

(b) s_X^2/s_Y^2 はどのような分布をもつか? (ヒント: 同上)

(c) $m = 4, n = 6$ として σ_X^2/σ_Y^2 の 95 % 信頼区間を求めなさい.

解答例

1. (a)

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(b) 標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

標準正規分布表より

$$\Pr\left[-1.96 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq 1.96\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[-1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = .95$$

または

$$\Pr\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right] = .95$$

したがって μ の 95 %信頼区間は

$$\left[\bar{X} - 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}, \bar{X} + 1.96\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right]$$

2. (a)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(b) χ^2 分布表より

$$\Pr\left[2.70039 \leq \frac{9s^2}{\sigma^2} \leq 19.0228\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{1}{19.0228} \leq \frac{\sigma^2}{9s^2} \leq \frac{1}{2.70039}\right] = .95$$

または

$$\Pr\left[\frac{9s^2}{19.0228} \leq \sigma^2 \leq \frac{9s^2}{2.70039}\right] = .95$$

したがって σ^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{9}{19.0228}s^2, \frac{9}{2.70039}s^2\right]$$

3. (a)

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(b)

$$\frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

すなわち

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim F(m-1, n-1)$$

(c) F 分布表より

$$\Pr \left[\frac{1}{14.885} \leq \frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \leq 7.764 \right] = .95$$

すなわち

$$\Pr \left[\frac{1}{7.764} \leq \frac{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}{s_X^2/s_Y^2} \leq 14.885 \right] = .95$$

または

$$\Pr \left[\frac{1}{7.764} \frac{s_X^2}{s_Y^2} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq 14.885 \frac{s_X^2}{s_Y^2} \right] = .95$$

したがって σ_X^2/σ_Y^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{1}{7.764} \frac{s_X^2}{s_Y^2}, 14.885 \frac{s_X^2}{s_Y^2} \right]$$