

中級統計学：復習テスト 5

学籍番号_____氏名_____

2024 年 10 月 4 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 1～8 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 1 回中間試験実施日（10 月 18 日の予定）に提出すること。

1. ある試行の事象を A, B とする。以下を示しなさい。

(a)

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$$

(b)

$$P(A|B) = P(A) \iff P(B|A) = P(B)$$

ヒント：“ \implies ” と “ \impliedby ” を示す。

2. ある試行の事象を A, B, C とする.

(a) A, B, C の独立性を定義しなさい (注: 条件は 4 つある).

(b) 次式を示しなさい.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

ヒント: 右辺の条件つき確率の定義をそれぞれ書いてみるとよい.

解答例

1. (a) 条件つき確率の定義より

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(B|A) := \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

すなわち乗法定理より

$$P(A|B)P(B) = P(A \cap B)$$
$$P(B|A)P(A) = P(B \cap A)$$

$A \cap B = B \cap A$ より右辺同士が等しいので左辺同士も等しい.

- (b)

$$P(A|B) = P(A) \iff \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$
$$\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$\iff \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$
$$\iff P(B|A) = P(B)$$

2. (a) 以下が成り立つとき A, B, C は (相互に) 独立という.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$$

- (b) 条件つき確率の定義より

$$P(A|B \cap C)P(B|C)P(C) = \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} P(C)$$
$$= P(A \cap B \cap C)$$