

## 計量経済 II：復習テスト 8

学籍番号\_\_\_\_\_氏名\_\_\_\_\_

2023 年 11 月 13 日

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1～8 を左上でホチキス止めし、中間試験実施日（11 月 20 日の予定）にまとめて提出すること。

1. (対称行列のコレスキー分解) 以下の行列を定義する。

$$\boldsymbol{\Sigma} := \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{L} := \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix}$$

ただし  $\boldsymbol{\Sigma}$  は対称で正定値とする。

- (a)  $\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'$  を計算しなさい。

- (b)  $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'$  とする。 $\boldsymbol{\Sigma}$  の各成分を  $\boldsymbol{L}$  の成分で表しなさい。

- (c)  $l_{11}, l_{22} > 0$  とする。 $\boldsymbol{L}$  の各成分を  $\boldsymbol{\Sigma}$  の成分で表しなさい。

2.  $\{\mathbf{y}_t\}$  を平均  $\mathbf{0}$  の共分散定常な  $N$  変量 VAR(1) 過程とする. すなわち任意の  $t$  について

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_t &= \Phi \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t \\ \{\mathbf{w}_t\} &\sim \text{WN}(\Sigma)\end{aligned}$$

$\Sigma = \mathbf{L}\mathbf{L}'$  とコレスキー分解し,  $\mathbf{z}_t := \mathbf{L}^{-1}\mathbf{w}_t$  とする.

(a)  $\text{var}(\mathbf{z}_t) = \mathbf{I}_N$  を示しなさい.

(b) VAR(1) を反転して  $\{\mathbf{y}_t\}$  を  $\{\mathbf{w}_t\}$  で表現しなさい.

(c)  $\{\mathbf{y}_t\}$  を  $\{\mathbf{z}_t\}$  で表現しなさい.

(d)  $\{\mathbf{y}_t\}$  の  $\mathbf{z}_t$  に対する第 0 期のインパルス応答  $\mathbf{L}\mathbf{z}_t$  の各成分を書きなさい.

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\mathbf{L}' &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} \\ 0 & l_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} \\ l_{21}l_{11} & l_{21}^2 + l_{22}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= l_{11}^2 \\ \sigma_{12} &= l_{11}l_{21} \\ \sigma_{21} &= l_{21}l_{11} \\ \sigma_2^2 &= l_{21}^2 + l_{22}^2\end{aligned}$$

(c)  $l_{11} > 0$  なので前問の第 1 式より

$$l_{11} = \sigma_1$$

これを第 2, 3 式に代入すると

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \sigma_1 l_{21} \\ \sigma_{21} &= l_{21} \sigma_1\end{aligned}$$

したがって

$$l_{21} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1} = \frac{\sigma_{21}}{\sigma_1}$$

これを第 4 式に代入すると

$$\sigma_2^2 = \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} + l_{22}^2$$

したがって  $l_{22} > 0$  より

$$l_{22} = \sqrt{\sigma_2^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\text{var}(\mathbf{z}_t) &= \text{var}(\mathbf{L}^{-1}\mathbf{w}_t) \\ &= \mathbf{L}^{-1} \text{var}(\mathbf{w}_t) \mathbf{L}^{-1'} \\ &= \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{L}^{-1'} \\ &= \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{L}' \mathbf{L}^{-1'} \\ &= \mathbf{L}' \mathbf{L}^{-1'} \\ &= (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{L})' \\ &= \mathbf{I}_N\end{aligned}$$

※以下の 2 つの公式を使用している (第 7 回講義メモ参照).

$$\begin{aligned}\text{var}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}) &= \mathbf{A} \text{var}(\mathbf{x}) \mathbf{A}' \\ (\mathbf{AB})' &= \mathbf{B}' \mathbf{A}'\end{aligned}$$

(b) 逐次代入により, 任意の  $t$  について

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_t &= \Phi \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t \\
&= \mathbf{w}_t + \Phi \mathbf{y}_{t-1} \\
&= \mathbf{w}_t + \Phi(\mathbf{w}_{t-1} + \Phi \mathbf{y}_{t-2}) \\
&= \mathbf{w}_t + \Phi \mathbf{w}_{t-1} + \Phi^2 \mathbf{y}_{t-2} \\
&= \dots \\
&= \mathbf{w}_t + \Phi \mathbf{w}_{t-1} + \Phi^2 \mathbf{w}_{t-2} + \dots
\end{aligned}$$

(c)  $\mathbf{w}_t = \mathbf{L} \mathbf{z}_t$  を代入すると, 任意の  $t$  について

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{L} \mathbf{z}_t + \Phi \mathbf{L} \mathbf{z}_{t-1} + \Phi^2 \mathbf{L} \mathbf{z}_{t-2} + \dots$$

(d)

$$\begin{aligned}
\mathbf{L} \mathbf{z}_t &= \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \dots & l_{NN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_{t,1} \\ z_{t,2} \\ \vdots \\ z_{t,N} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} l_{11} z_{t,1} \\ l_{21} z_{t,1} + l_{22} z_{t,2} \\ \vdots \\ l_{N1} z_{t,1} + l_{N2} z_{t,2} + \dots + l_{NN} z_{t,N} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$