第 16 回　正規母集団（10.1–10.4）

村澤 康友

2022 年 11 月 29 日

今日のポイント

1. $\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ からの無作為標本 $(X_1,\dots,X_n)$ の標本平均・標本分散の分布を求める．
2. $Z_1,\dots,Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ が独立のとき，$Z_1^2+\cdots+Z_n^2 \sim \chi^2(n)$．
3. 標本分散 s^2 の分布は $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$．
4. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ と $X \sim \chi^2(n)$ が独立のとき，$Z/\sqrt{X/n} \sim \mathrm{t}(n)$．
5. 標本平均 $\bar{X}$ の分布は $\left(\bar{X}-\mu\right)/\sqrt{s^2/n} \sim \mathrm{t}(n-1)$．

目次

1　正規分布（p. 120, p. 194）

定義 1. **正規（ガウス）分布**の pdf は

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

注 1. $\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ と書く．

定義 2. $\mathrm{N}(0,1)$ を**標準正規分布**という．

注 2. $\mathrm{N}(0,1)$ の cdf を $\Phi(.)$，pdf を $\phi(.)$ で表す．すなわち

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$
$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-z^2/2}\,\mathrm{d}z$$

定理 1. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ なら

$$aX+b \sim \mathrm{N}\left(a\mu+b,a^2\sigma^2\right)$$

証明. mgf を用いる． □

系 1. $X \sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ なら

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

証明. 前の定理で $a := 1/\sigma$，$b := -\mu/\sigma$ とする． □

注 3. したがって X の累積確率は標準正規分布表から求まる．すなわち

$$\begin{aligned}F_X(x) &:= \Pr[X \le x] \\ &= \Pr\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

ただし $\Phi(.)$ でなく $Q(.) := 1 - \Phi(.)$ の表の場合も多い．

2　標本分散

2.1　χ^2 分布（p. 199）

定義 3. $Z_1, \dots, Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ が独立のとき $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ の分布を**自由度** n **の** χ^2 **分布**という．

注 4. $\chi^2(n)$ と書く．

注 5. 累積確率は χ^2 分布表を参照．

例 1. $\chi^2(n)$ の pdf の例は図 1 の通り．

定理 2. $X \sim \chi^2(n)$ なら

$$\mathrm{E}(X) = n$$

証明. $X = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ とすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}\left(Z_1^2 + \cdots + Z_n^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(Z_1^2\right) + \cdots + \mathrm{E}\left(Z_n^2\right) \\
&= \mathrm{var}(Z_1) + \cdots + \mathrm{var}(Z_n) \\
&= n
\end{aligned}$$

□

2.2　母平均が既知の場合

$\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ からの無作為標本を $(X_1, \dots, X_n)$ とする．μ が既知なら標本分散は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

定理 3.

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

証明.

$$\begin{aligned}
\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \\
&= \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2
\end{aligned}$$

各項は独立な $\mathrm{N}(0,1)$ の 2 乗． □

注 6. $\hat{\sigma}^2$ の累積確率は χ^2 分布表から次のように求める．

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\hat{\sigma}^2 \le x\right] &= \Pr\left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \frac{nx}{\sigma^2}\right] \\
&= \Pr\left[\chi^2(n) \le \frac{nx}{\sigma^2}\right]
\end{aligned}$$

例 2. $\sigma^2 = 1$ とする．$n = 10$ のとき $\hat{\sigma}^2 > 2$ の確率は

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\hat{\sigma}^2 > 2\right] &= \Pr\left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > \frac{2n}{\sigma^2}\right] \\
&= \Pr\left[\chi^2(10) > 20\right] \\
&\approx .03
\end{aligned}$$

2.3　母平均が未知の場合（p. 198）

μ が未知なら標本分散は

$$s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

定理 4.

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

証明. 省略（難しい）． □

注 7. 母平均が既知の場合と同様に書き換えると

$$\begin{aligned}
\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{\sigma^2} \\
&= \left(\frac{X_1 - \bar{X}}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \bar{X}}{\sigma}\right)^2
\end{aligned}$$

各項は独立でなく $\mathrm{N}(0,1)$ の 2 乗でもない．

注 8. s^2 の累積確率は χ^2 分布表から次のように求める．

$$\begin{aligned}
\Pr\left[s^2 \le x\right] &= \Pr\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \le \frac{(n-1)x}{\sigma^2}\right] \\
&= \Pr\left[\chi^2(n-1) \le \frac{(n-1)x}{\sigma^2}\right]
\end{aligned}$$

例 3. $\sigma^2 = 1$ とする．$n = 10$ のとき $s^2 > 2$ の確率は

$$\begin{aligned}
\Pr\left[s^2 > 2\right] &= \Pr\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \frac{2(n-1)}{\sigma^2}\right] \\
&= \Pr\left[\chi^2(9) > 18\right] \\
&\approx .04
\end{aligned}$$

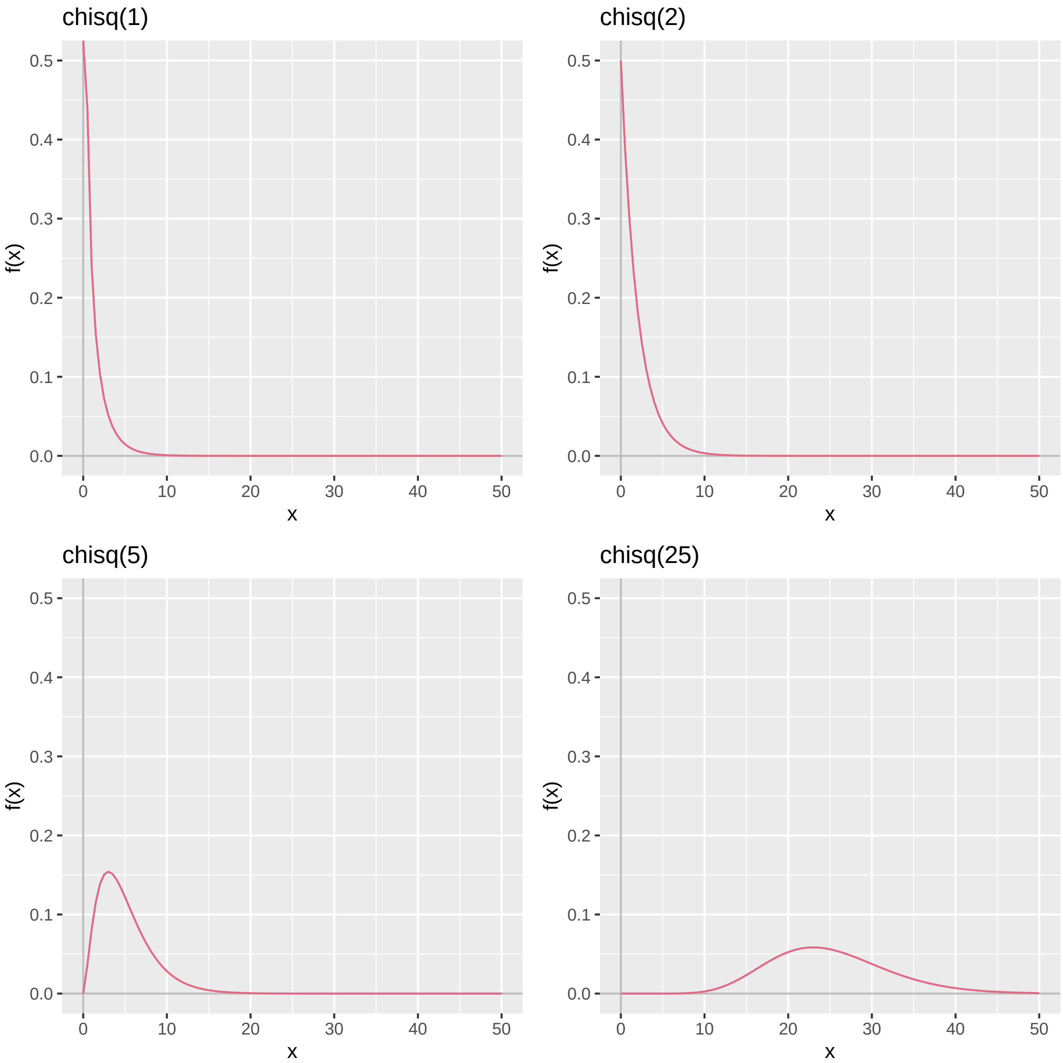

図 1　$\chi^2(n)$ の pdf の例

3　標本平均

3.1　t 分布（p. 202）

定義 4. $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ と $X \sim \chi^2(n)$ が独立のとき $Z/\sqrt{X/n}$ の分布を**自由度 n の t 分布**という.

注 9. $\mathrm{t}(n)$ と書く.

注 10. 累積確率は t 分布表を参照.

注 11. $\mathrm{t}(1)$ はコーシー分布, $\mathrm{t}(\infty)$ は $\mathrm{N}(0,1)$.

例 4. $\mathrm{t}(n)$ の pdf の例は図 2 の通り.

3.2　母分散が既知の場合（p. 197）

$\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ からの無作為標本を $(X_1, \ldots, X_n)$ とする.

定理 5.

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

証明. 正規分布の線形変換は正規分布. 平均と分散の計算は省略. □

系 2.

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

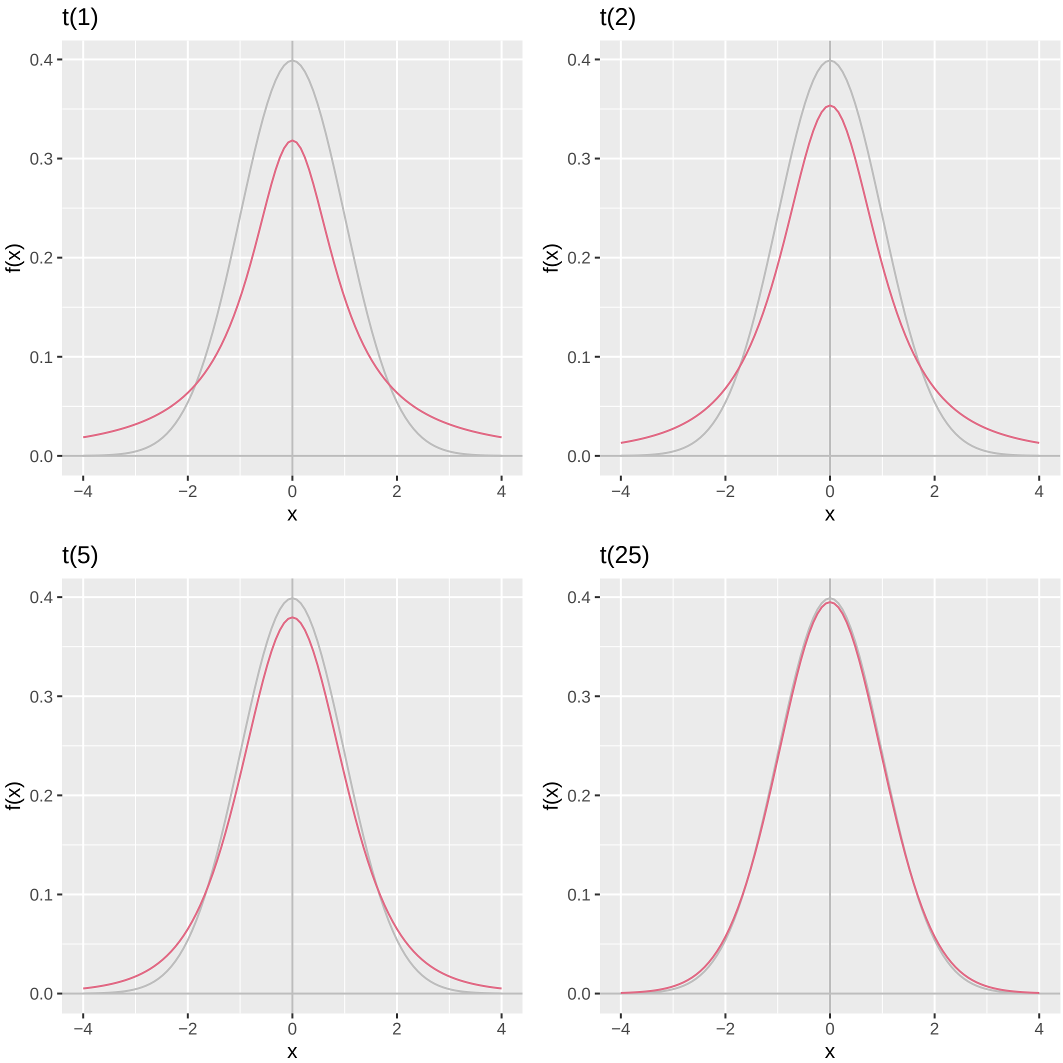

図 2　t(n) の pdf の例

証明．正規分布の線形変換は正規分布．標準化で平均 0，分散 1 となる．　□

注 12．$\bar{X}$ の累積確率は標準正規分布表から次のように求める．

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bar{X} \le x\right] &= \Pr\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \le \frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right)\end{aligned}$$

例 5． $\mu = 0$，$\sigma^2 = 1$ とする．$n = 9$ のとき $\bar{X} > 1$ の確率は

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bar{X} > 1\right] &= \Pr\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{1-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right] \\ &= Q(3) \\ &= .0013499\end{aligned}$$

3.3　母分散が未知の場合（p. 201）

母分散が未知なら σ^2 を s^2 で置き換える．

定理 6.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim \mathrm{t}(n-1)$$

証明．変形すると

$$\begin{aligned}\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} &= \frac{\left(\bar{X}-\mu\right)/\sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{s^2/n}/\sqrt{\sigma^2/n}} \\ &= \frac{\left(\bar{X}-\mu\right)/\sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{[(n-1)s^2/\sigma^2]/(n-1)}}\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} &\sim \mathrm{N}(0,1) \\ \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n-1)\end{aligned}$$

分子と分母の独立性も証明できる（省略）． □

注 13. $\bar{X}$ の累積確率は t 分布表から次のように求める．

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bar{X} \le x\right] &= \Pr\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \le \frac{x-\mu}{\sqrt{s^2/n}}\right] \\ &= \Pr\left[\mathrm{t}(n-1) \le \frac{x-\mu}{\sqrt{s^2/n}}\right]\end{aligned}$$

例 6. $\mu = 0$ とする．$n = 9$，$s^2 = 1$ のとき $\bar{X} > 1$ の確率は

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bar{X} > 1\right] &= \Pr\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} > \frac{1-\mu}{\sqrt{s^2/n}}\right] \\ &= \Pr[\mathrm{t}(8) > 3] \\ &\approx .008\end{aligned}$$

4　今日のキーワード

正規分布，標準正規分布，正規分布の標準化，標準正規分布表，自由度 n の χ^2 分布，χ^2 分布表，標本分散の分布（母平均が既知，母平均が未知），標本平均の分布（母分散が既知），自由度 n の t 分布，t 分布表，標本平均の分布（母分散が未知）

5　次回までの準備

復習　教科書第 10 章 1–4 節，復習テスト 16

予習　教科書第 10 章 5 節