計量経済 II：復習テスト 5

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2022 年 10 月 25 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 22 日の予定）にまとめて提出すること．

1. 時系列 $(y_1, \dots, y_T)$ に定数項なしの正規 AR(1) モデルを仮定する．すなわち $t = 1, \dots, T$ について

$$
\begin{aligned}
y_t &= \phi y_{t-1} + w_t \\
\{w_t\} &\sim \mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

ただし $|\phi| < 1$.

(a) $\mathrm{E}(y_t)$ を求めなさい．

(b) $\mathrm{var}(y_t)$ を求めなさい．

(c) y_t の周辺 pdf を求めなさい．

2. 引き続き前問の状況を考える.

(a) $\mathrm{E}(y_t|y_{t-1},\ldots,y_1)$ を求めなさい.

(b) $\mathrm{var}(y_t|y_{t-1},\ldots,y_1)$ を求めなさい.

(c) $(y_{t-1},\ldots,y_1)$ を所与とした y_t の条件つき pdf を求めなさい.

(d) 予測誤差分解を用いて y_1 を所与とした $(y_2,\ldots,y_T)$ の条件つき同時 pdf を求めなさい.

解答例

1. （a）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_t) &= \mathrm{E}(\phi y_{t-1} + w_t) \\
&= \phi\,\mathrm{E}(y_{t-1}) + \mathrm{E}(w_t) \\
&= \phi\,\mathrm{E}(y_t) + \mathrm{E}(w_t) \\
&= \frac{\mathrm{E}(w_t)}{1-\phi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（b）

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(y_t) &= \operatorname{var}(\phi y_{t-1} + w_t) \\
&= \operatorname{var}(\phi y_{t-1}) + 2\operatorname{cov}(\phi y_{t-1}, w_t) + \operatorname{var}(w_t) \\
&= \phi^2 \operatorname{var}(y_{t-1}) + \sigma^2 \\
&= \phi^2 \operatorname{var}(y_t) + \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}
$$

（c）y_t は正規分布の線形変換なので，前 2 問より

$$
y_t \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}\right)
$$

pdf は任意の y について

$$
f(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2/(1-\phi^2)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2/(1-\phi^2)}\right)
$$

2. （a）$\{w_t\}$ は iid なので

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(y_t|y_{t-1},\dots,y_1) &= \mathrm{E}(\phi y_{t-1} + w_t|y_{t-1},\dots,y_1) \\
&= \phi y_{t-1} + \mathrm{E}(w_t|y_{t-1},\dots,y_1) \\
&= \phi y_{t-1} + \mathrm{E}(w_t) \\
&= \phi y_{t-1}
\end{aligned}
$$

（b）$\{w_t\}$ は iid なので

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(y_t|y_{t-1},\dots,y_1) &= \operatorname{var}(\phi y_{t-1} + w_t|y_{t-1},\dots,y_1) \\
&= \operatorname{var}(w_t|y_{t-1},\dots,y_1) \\
&= \operatorname{var}(w_t) \\
&= \sigma^2
\end{aligned}
$$

（c）y_t は正規分布の線形変換なので，前 2 問より

$$
y_t|y_{t-1},\dots,y_1 \sim \mathrm{N}\left(\phi y_{t-1}, \sigma^2\right)
$$

pdf は任意の y について

$$
f(y|y_{t-1},\dots,y_1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y-\phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2}\right)
$$

（d）予測誤差分解より

$$
\begin{aligned}
f(y_2, \ldots, y_T | y_1) &= f(y_T | y_{T-1}, \ldots, y_1) \cdots f(y_2 | y_1) \\
&= \prod_{t=2}^{T} f(y_t | y_{t-1}, \ldots, y_1) \\
&= \prod_{t=2}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma^2} \right)
\end{aligned}
$$