第 9 回　構造変化の検定（2.1, 3.1, 3.2.2, 4.3.3）

村澤 康友

2022 年 11 月 29 日

今日のポイント

1. $\boldsymbol{y}$ の $\boldsymbol{X}$ 上への古典的正規線形回帰モデルは $\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{X\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n\right)$．$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を $\boldsymbol{b}$ とすると $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$．残差ベクトルを $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Xb}$ とすると，σ^2 の不偏推定量は $s^2 := \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)$．
2. $\boldsymbol{\beta}$ に対する r 個の制約 $\boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{c}$ の両側検定の F 検定統計量は $F := (\boldsymbol{Rb} - \boldsymbol{c})' \left[s^2 \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1} (\boldsymbol{Rb} - \boldsymbol{c})/r$．$H_0$ の下で $F \sim \mathrm{F}(r, n-k)$．
3. 2 標本の 2 つの回帰モデルの係数ベクトルの差の F 検定をチョウ検定という．チョウ検定は構造変化の検定にも使える．
4. 構造変化ダミーを使えば回帰係数の t 検定・F 検定として構造変化の検定を実行できる．

目次

1　回帰係数の F 検定

1.1　古典的正規線形回帰モデル（p. 47）

$(1+k)$ 変量データを $((y_1, \boldsymbol{x}_1), \dots, (y_n, \boldsymbol{x}_n))$ と表す．ただし $i = 1, \dots, n$ について

$$\boldsymbol{x}_i := \begin{pmatrix} x_{i,1} \\ \vdots \\ x_{i,k} \end{pmatrix}$$

y_i の $\boldsymbol{x}_i$ 上への線形回帰モデルは

$$\mathrm{E}(y_i|\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}$$

ただし

$$\boldsymbol{\beta} := \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

次のベクトルと行列を定義する．

$$\boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n' \end{bmatrix}$$

定義 1. $\boldsymbol{y}$ の $\boldsymbol{X}$ 上への**線形回帰モデル**は

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X\beta}$$

定義 2. $\boldsymbol{y}$ の $\boldsymbol{X}$ 上への**古典的線形回帰モデル**は

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X\beta}$$
$$\mathrm{var}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$$

定義 3. $\boldsymbol{y}$ の $\boldsymbol{X}$ 上への**古典的正規線形回帰モデル**は

$$\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{X\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n\right)$$

1.2 回帰係数の OLS 推定量（pp. 28, 48）

$\boldsymbol{\beta}$ の MM（= OLS）推定量を $\boldsymbol{b}$ とする．

補題 1.

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})) = \boldsymbol{0}$$

証明. 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})|\boldsymbol{x}_i)) \\
&= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}_i(\mathrm{E}(y_i|\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})) \\
&= \boldsymbol{0}
\end{aligned}$$

□

定理 1. $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ が正則なら

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

証明. 補題より $\boldsymbol{b}$ を与える積率条件は

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i y_i = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{b}$$

逆行列を用いて連立方程式を解くと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b} &= \left(\sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i'\right)^{-1} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i y_i \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}
\end{aligned}$$

□

定理 2.

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\beta}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X}) &= \mathrm{E}\left((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}\right) \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\,\mathrm{E}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X\beta} \\
&= \boldsymbol{\beta}
\end{aligned}$$

□

定理 3. 古典的線形回帰モデルなら

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

証明.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X}) &= \mathrm{var}\left((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}\right) \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\,\mathrm{var}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\sigma^2\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\
&= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\
&= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}
\end{aligned}$$

□

定理 4. 古典的正規線形回帰モデルなら

$$\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\right)$$

証明. $\boldsymbol{X}$ を所与として $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{y}$ の線形変換だから正規分布．平均と分散は既に見た． □

1.3 誤差分散の不偏推定量（p. 49）

残差ベクトルを $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Xb}$ とする．σ^2 の不偏推定量は

$$s^2 := \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n-k}$$

定理 5. 古典的正規線形回帰モデルなら

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2}|\boldsymbol{X} \sim \chi^2(n-k)$$

証明. 省略（大学院レベル）． □

定理 6. 古典的正規線形回帰モデルなら $\boldsymbol{X}$ を所与として $\boldsymbol{b}$ と s^2 は独立.

証明. 省略（大学院レベル）． □

1.4 F 検定（p. 52）

古典的正規線形回帰モデルを仮定する．$\boldsymbol{\beta}$ に対する r 個の制約の両側検定問題を考える．すなわち

$$H_0 : \boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{c} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{R\beta} \neq \boldsymbol{c}$$

ただし $\boldsymbol{R}$ は $r \times k$ 行列．$\boldsymbol{R} := \boldsymbol{I}_k$ なら $\boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{\beta}$.

補題 2.

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{Rb} - \boldsymbol{R\beta})'\left[\sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{Rb} - \boldsymbol{R\beta})|\boldsymbol{X} \\
&\sim \chi^2(r)
\end{aligned}$$

証明．すでに見たように

$$\boldsymbol{b}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\right)$$

したがって

$$\boldsymbol{Rb}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{R\beta}, \sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right)$$

標準化すると

$$\left[\sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1/2}(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{I}_r)$$

各成分の 2 乗和より結果が得られる． □

定理 7.

$$\frac{(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})'\left[s^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})}{r}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{F}(r, n-k)$$

証明．式変形すると

$$\begin{aligned}&\frac{(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})'\left[s^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})}{r}\\ &= \frac{(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})'\left[\sigma^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{R\beta})/r}{s^2/\sigma^2}\end{aligned}$$

補題より分子は $\chi^2(r)$ を r で割ったもの．すでに見たように

$$\frac{(n-k)s^2}{\sigma^2}|\boldsymbol{X} \sim \chi^2(n-k)$$

したがって分母は $\chi^2(n-k)$ を $n-k$ で割ったもの．$\boldsymbol{X}$ を所与として $\boldsymbol{b}$ と s^2 は独立なので分子と分母は独立． □

定義 4. $H_0 : \boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{c}$ を検定する F **検定統計量**は

$$F := \frac{(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{c})'\left[s^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{c})}{r}$$

定理 8. H_0 の下で

$$F \sim \mathrm{F}(r, n-k)$$

証明．前定理より明らか． □

2　チョウ検定

2.1　2 標本問題

大きさ n の $(1+k)$ 変量データ $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X})$ を大きさ n_1 の $(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{X}_1)$ と大きさ n_2 の $(\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{X}_2)$ に分割し，それぞれについて以下の古典的正規線形回帰モデルを仮定する．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1|\boldsymbol{X} &\sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{\beta}_1, \sigma_1^2\boldsymbol{I}_{n_1}\right)\\ \boldsymbol{y}_2|\boldsymbol{X} &\sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{\beta}_2, \sigma_2^2\boldsymbol{I}_{n_2}\right)\end{aligned}$$

ただし $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ とする．まとめて書くと

$$\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{X}_*\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\boldsymbol{I}_n\right)$$

ただし

$$\boldsymbol{X}_* := \begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} := \begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{pmatrix}$$

次の検定問題を考える．

$$H_0 : \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_2$$

$\boldsymbol{R} := [\boldsymbol{I}_k, -\boldsymbol{I}_k]$, $\boldsymbol{c} := \boldsymbol{0}$ とすると

$$H_0 : \boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{c} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{R\beta} \neq \boldsymbol{c}$$

2.2　F 検定

$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を $\boldsymbol{b}$，残差ベクトルを $\boldsymbol{e} := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}_*\boldsymbol{b}$ とする．σ^2 の不偏推定量は

$$s^2 := \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n-2k}$$

F 検定統計量は

$$\begin{aligned}F &:= \frac{(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{c})'\left[s^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}_*'\boldsymbol{X}_*)^{-1}\boldsymbol{R}'\right]^{-1}(\boldsymbol{Rb}-\boldsymbol{c})}{k}\\ &= \frac{(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2)'\left[(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}+(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\right]^{-1}(\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2)/k}{s^2}\end{aligned}$$

定理 9. H_0 の下で

$$F|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{F}(k, n-2k)$$

注 1．$\min\{n_1, n_2\} < k$ なら $\boldsymbol{b}$ は計算できない（ただし別の方法がある）．

2.3　チョウ検定（p. 80）

$H_0 : \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$ の下で

$$\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}_1, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n\right)$$

H_0 の下での $\boldsymbol{\beta}_1$ の OLS 推定量を $\boldsymbol{b}_{1*}$ とすると

$$\boldsymbol{b}_{1*} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

H_0 の下での残差ベクトルを $\boldsymbol{e}_* := \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}_{1*}$ とする．H_0 の制約のため $\boldsymbol{e}_*'\boldsymbol{e}_* \geq \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$.

定義 5. 2 標本の 2 つの回帰モデルの係数ベクトルの差の F 検定を**チョウ検定**という．

定義 6. **チョウ検定統計量**は

$$F := \frac{(\boldsymbol{e}_*'\boldsymbol{e}_* - \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e})/k}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-2k)}$$

定理 10. H_0 の下で

$$F \sim \mathrm{F}(k, n-2k)$$

証明. F の分母・分子を σ^2 で割ると

$$F := \frac{\left[(\boldsymbol{e}_*'\boldsymbol{e}_* - \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e})/\sigma^2\right]/k}{(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/\sigma^2)/(n-2k)}$$

H_0 の下で

$$\frac{\boldsymbol{e}_*'\boldsymbol{e}_*}{\sigma^2}|\boldsymbol{X} \sim \chi^2(n-k)$$

H_0, H_1 の下で

$$\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\sigma^2}|\boldsymbol{X} \sim \chi^2(n-2k)$$

$\boldsymbol{e}_*'\boldsymbol{e}_* - \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$ の独立性も証明できる．したがって H_0 の下で

$$\frac{\boldsymbol{e}_*'\boldsymbol{e}_* - \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\sigma^2}|\boldsymbol{X} \sim \chi^2(k)$$

F 分布の定義より H_0 の下で $F \sim \mathrm{F}(k, n-2k)$.　□

3　構造変化の検定

3.1　構造変化ダミー

オイル・ショックやバブル崩壊など大きなショックにより，ある時点を境に時系列（確率過程）の特性が大きく変化する場合がある．確率過程 $\{Y_t\}$ の平均が時点 T で変化する場合は

$$\mathrm{E}(Y_t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{for } t < T \\ \mu_1 & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

定義 7. 時系列（確率過程）の特性の予期せぬ変化を**構造変化**という．

定義 8. 時点 T の**構造変化ダミー**は

$$D_t := \begin{cases} 0 & \text{for } t < T \\ 1 & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

注 2. 構造変化ダミーを用いると

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y_t) &= (1 - D_t)\mu_0 + D_t\mu_1 \\ &= \mu_0 + (\mu_1 - \mu_0)D_t \end{aligned}$$

$(\mu_0, \mu_1 - \mu_0)$ は OLS で推定できる．

3.2　回帰モデル（p. 80）

X_t を説明変数，Y_t を被説明変数とし，Y_t の X_t 上への単回帰モデルを考える．時点 T で係数が変わる場合は

$$\mathrm{E}(Y_t|X_t) = \begin{cases} \alpha_0 + \beta_0 X_t & \text{for } t < T \\ \alpha_1 + \beta_1 X_t & \text{for } t \geq T \end{cases}$$

構造変化ダミーを用いると

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}(Y_t|X_t) \\ &= (1 - D_t)(\alpha_0 + \beta_0 X_t) + D_t(\alpha_1 + \beta_1 X_t) \\ &= (1 - D_t)\alpha_0 + D_t\alpha_1 + (1 - D_t)\beta_0 X_t + D_t\beta_1 X_t \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D_t + \beta_0 X_t + (\beta_1 - \beta_0)D_t X_t \end{aligned}$$

すなわち $D_t, X_t, D_t X_t$ を説明変数として構造変化前後の係数を推定できる．また各係数の構造変化の有無の t 検定や F 検定（チョウ検定）も可能.

注 3. 説明変数にラグ付き内生変数があると古典的正規線形回帰モデルにならず，t 検定や F 検定は厳密には正しくないが，近似的な検定として正当化できる．

例 1. 日本の 1 人当たり実質 GDP（季節調整済み対数系列）の線形トレンドの構造変化（図 1）．第 1 次オイル・ショック（1974 年第 1 四半期）とバブル崩壊（1991 年第 2 四半期）の構造変化ダミーを使用.

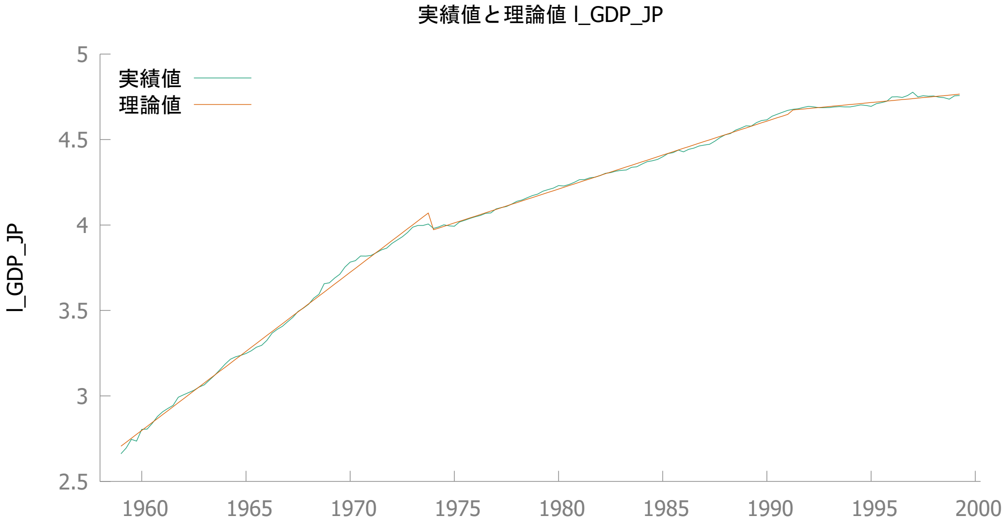

図 1　日本の 1 人当たり実質 GDP（季節調整済み対数系列）の線形トレンドの構造変化

4　今日のキーワード

線形回帰モデル，古典的線形回帰モデル，古典的正規線形回帰モデル，F 検定統計量，チョウ検定，チョウ検定統計量，構造変化，構造変化ダミー

5　次回までの準備

提出　宿題 9

復習　教科書第 2 章 1 節，第 3 章 1–2.2 節，第 4 章 3.3 節，復習テスト 9

予習　教科書第 7 章 1.3–1.6 節