経済統計：第 2 回中間試験

村澤 康友

2016 年 5 月 30 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 離散一様分布
   (b) 同時確率関数
   (c) 条件つき確率関数
   (d) 標本平均
2. （30 点）
   (a) $X, Y \sim \mathrm{N}(1,2)$ は独立とする．$X - Y$ の分布を求めなさい．
   (b) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とする．$\Pr\left[Z^2 \leq 4\right]$ を標準正規分布表を利用して求めなさい．
   (c) $X \sim \mathrm{N}(50,100)$ とする．$\Pr[X > 70]$ を標準正規分布表を利用して求めなさい．
3. （50 点）赤いサイコロの目を X，青いサイコロの目を Y とする．2 つの目の合計を Z とする．
   (a) X, Y の確率関数をそれぞれ式で書きなさい．
   (b) X, Y の平均と分散をそれぞれ求めなさい．
   (c) Z の確率関数を式で書きなさい．
   (d) Z の平均と分散を求めなさい．
   (e) $X = 3$ のときの Z の条件つき確率関数を式で書きなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) $\{1,\dots,N\}$ 上の離散一様分布の確率関数は
$$p_X(x) := \begin{cases} 1/N & \text{for } x = 1,\dots,N \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$
   (b) (X,Y) の同時確率関数は
$$p_{X,Y}(x,y) := \Pr[X=x, Y=y]$$
      - 「同時に起こる確率を与える関数」は同時累積分布関数と区別できないので 0 点.

   (c) $Y=y$ が与えられたときの X の条件つき確率関数は
$$p_{X|Y}(x|Y=y) := \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$
      - 「条件をつけた確率を与える関数」は確率の求め方が不明なので 0 点.

   (d) $(X_1,\dots,X_n)$ の標本平均は
$$\bar{X}_n := \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$$
      - 「標本の平均」は「標本の期待値」の意味になるので 0 点.

2. 正規分布
   (a)
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X-Y) &= \mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(Y) \\ &= 0 \\ \mathrm{var}(X-Y) &= \mathrm{var}(X+(-Y)) \\ &= \mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(-Y) \\ &= \mathrm{var}(X)+(-1)^2\,\mathrm{var}(Y) \\ &= 4 \end{aligned}$$
   したがって正規分布の再生性より $X-Y \sim \mathrm{N}(0,4)$.

   (b)
$$\begin{aligned} \Pr\left[Z^2 \le 4\right] &= \Pr[-2 \le Z \le 2] \\ &= \Phi(2)-\Phi(-2) \\ &= (1-Q(2))-Q(2) \\ &= (1-.02275)-.02275 \\ &= .9545 \end{aligned}$$
      - $\Pr[-2 \le Z \le 2]$ までで 2 点.
      - $\Phi(2)-\Phi(-2)$ までで 5 点.

   (c) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ とすると
$$\begin{aligned} \Pr[X>70] &= \Pr\left[\frac{X-50}{10} > \frac{70-50}{10}\right] \\ &= \Pr[Z>2] \\ &= .022750 \end{aligned}$$

- 標準化して 5 点.

3. 多変量離散分布の例

（a）X の確率関数は

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{for } x = 1, \dots, 6 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Y についても同様.

- 確率関数でなければ 0 点.

（b）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{x=1}^{6} x \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1 + \cdots + 6}{6} \\ &= 3.5 \\ \operatorname{var}(X) &= \sum_{x=1}^{6} (x - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{(1-3.5)^2 + \cdots + (6-3.5)^2}{6} \\ &= \frac{2\left(2.5^2 + 1.5^2 + .5^2\right)}{6} \\ &= \frac{6.25 + 2.25 + .25}{3} \\ &= \frac{8.75}{3} \end{aligned}$$

Y についても同様.

（c）Z の確率関数は

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1/36 & \text{for } z = 2, 12 \\ 2/36 & \text{for } z = 3, 11 \\ 3/36 & \text{for } z = 4, 10 \\ 4/36 & \text{for } z = 5, 9 \\ 5/36 & \text{for } z = 6, 8 \\ 6/36 & \text{for } z = 7 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- 確率関数でなければ 5 点.

（d）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}(X + Y) \\ &= \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y) \\ &= 7 \\ \operatorname{var}(Z) &= \operatorname{var}(X + Y) \\ &= \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y) \\ &= \frac{17.5}{3} \end{aligned}$$

- 定義から計算しても OK.
- $\mathrm{E}(Z) = (2 + \cdots + 12)/11 = 7$ は考え方が間違いなので 0 点.

(e) Z の条件つき確率関数は

$$p_{Z|X=3}(z) = \begin{cases} 1/6 & \text{for } z = 4, \ldots, 9 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- 確率関数でなければ 5 点.