

中級統計学：復習テスト 11

学籍番号_____氏名_____

2022 年 11 月 8 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～13 を（左上で）ホチキス止めし、第 2 回中間試験実施日（11 月 18 日の予定）にまとめて提出すること。

1. (X, Y) を確率ベクトルとする。以下の公式を示しなさい。

(a)

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

(b)

$$\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y)$$

(c)

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

2. (X, Y) を確率ベクトルとする.

(a) X と Y の独立性の定義を書きなさい.

(b) X と Y は独立とする. このとき以下の式が成り立つことを示しなさい.

i.

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

ii.

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

iii.

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

解答例

1. (a) (X, Y) が連続なら

$$\begin{aligned}
 E(aX + bY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by)f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (axf_{X,Y}(x, y) + byf_{X,Y}(x, y)) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} axf_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} byf_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\
 &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\
 &= aE(X) + bE(Y)
 \end{aligned}$$

離散の場合も同様.

- (b) 前問の結果 (期待値の線形性) より

$$\begin{aligned}
 \text{var}(aX + bY) &:= E((aX + bY - E(aX + bY))^2) \\
 &= E([aX + bY - (aE(X) + bE(Y))])^2) \\
 &= E((aX - aE(X) + bY - bE(Y))^2) \\
 &= E([a(X - E(X)) + b(Y - E(Y))]^2) \\
 &= E(a^2(X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2(Y - E(Y))^2) \\
 &= a^2E((X - E(X))^2) + 2abE((X - E(X))(Y - E(Y))) + b^2E((Y - E(Y))^2) \\
 &= a^2\text{var}(X) + 2ab\text{cov}(X, Y) + b^2\text{var}(Y)
 \end{aligned}$$

- (c) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(X, Y) &:= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\
 &= E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)) \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y)
 \end{aligned}$$

2. (a) 任意の (x, y) について

$$f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$$

なら X と Y は独立という.

- (b) i. (X, Y) が連続なら

$$\begin{aligned}
 E(XY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) \, dx \right) yf_Y(y) \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y) \, dy \\
 &= E(X)E(Y)
 \end{aligned}$$

離散の場合も同様.

ii. 前問の結果より

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X) E(Y) \\ &= E(X) E(Y) - E(X) E(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

iii. 前問の結果より

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X + Y) &= \operatorname{var}(X) + 2 \operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{var}(Y) \\ &= \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)\end{aligned}$$