計量分析 2：復習テスト 14

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 1 月 23 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 30 日の予定）にまとめて提出すること．

1. 処置ダミーを D，処置あり／なしの潜在的な結果を Y_1^*, Y_0^*，観測される結果を Y，共変量を X とする．$d = 0, 1$ について $\mathrm{E}(Y_d^*|X) = r_d(X)$ とする．処置確率を $p(X) := \Pr[D = 1|X]$ とする．

   (a) $X = x$ のときの条件付き ATE を $r_0(.), r_1(.)$ で表しなさい．

   (b) X を所与として Y_1^*, Y_0^* は D と条件付き平均独立とする．$\mathrm{E}(Y|X)$ を $r_0(.), r_1(.), p(.)$ で表しなさい．

2. 前問と同じ状況を考える．ただし $d = 0, 1$ について $\mathrm{E}(Y_d^*|X) = \alpha_d + \beta_d X$ とする．

（a）条件つき ATE を X の関数で表しなさい．

（b）$d = 0, 1$ について $U_d := Y_d^* - \mathrm{E}(Y_d^*|X)$ とする．Y を D, X, U_0, U_1 で表しなさい．

（c）$\beta_0 = \beta_1 = \beta$，$U_0 = U_1 = U$ とする．Y を D, X, U で表しなさい．

（d）X を所与として Y_0^* は D と条件付き平均独立とする．$\mathrm{E}(U|D, X) = 0$ を示しなさい．

解答例

1.（a）

$$\begin{aligned}\mathrm{ATE}(x) &:= \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|X=x)\\ &= \mathrm{E}(Y_1^*|X=x) - \mathrm{E}(Y_0^*|X=x)\\ &= r_1(x) - r_0(x)\end{aligned}$$

（b）繰り返し期待値の法則と条件付き平均独立性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X) &= \mathrm{E}(DY_1^* + (1-D)Y_0^*|X)\\ &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(DY_1^* + (1-D)Y_0^*|D,X)|X)\\ &= \mathrm{E}(D\,\mathrm{E}(Y_1^*|D,X) + (1-D)\,\mathrm{E}(Y_0^*|D,X)|X)\\ &= \mathrm{E}(D\,\mathrm{E}(Y_1^*|X) + (1-D)\,\mathrm{E}(Y_0^*|X)|X)\\ &= \mathrm{E}(D|X)\,\mathrm{E}(Y_1^*|X) + (1-\mathrm{E}(D|X))\,\mathrm{E}(Y_0^*|X)\\ &= \Pr[D=1|X]r_1(X) + (1-\Pr[D=1|X])r_0(X)\\ &= p(X)r_1(X) + (1-p(X))r_0(X)\end{aligned}$$

2.（a）

$$\begin{aligned}\mathrm{ATE}(X) &:= \mathrm{E}(Y_1^* - Y_0^*|X)\\ &= \mathrm{E}(Y_1^*|X) - \mathrm{E}(Y_0^*|X)\\ &= \alpha_1 + \beta_1 X - (\alpha_0 + \beta_0 X)\\ &= \alpha_1 - \alpha_0 + (\beta_1 - \beta_0)X\end{aligned}$$

（b）

$$\begin{aligned}Y &:= DY_1^* + (1-D)Y_0^*\\ &= Y_0^* + D(Y_1^* - Y_0^*)\\ &= \alpha_0 + \beta_0 X + U_0 + D[\alpha_1 + \beta_1 X + U_1 - (\alpha_0 + \beta_0 X + U_0)]\\ &= \alpha_0 + \beta_0 X + U_0 + D[(\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0)X + U_1 - U_0]\\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D + \beta_0 X + (\beta_1 - \beta_0)DX + U_0 + D(U_1 - U_0)\end{aligned}$$

（c）前問より

$$Y = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D + \beta X + U$$

（d）条件付き平均独立性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(U|D,X) &= \mathrm{E}(Y_0^* - \mathrm{E}(Y_0^*|X)|D,X)\\ &= \mathrm{E}(Y_0^*|D,X) - \mathrm{E}(Y_0^*|X)\\ &= \mathrm{E}(Y_0^*|X) - \mathrm{E}(Y_0^*|X)\\ &= 0\end{aligned}$$