計量経済 I：前期試験

村澤 康友

2019 年 7 月 30 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) ベルヌーイ試行
   (b) ポアソン分布
   (c) （2 変量分布における）周辺累積分布関数
   (d) 確率収束
2. （30 点）
   (a) $X, Y \sim \mathrm{Bin}(2, .5)$ は独立とする．$Z := X + Y$ の分布を求め，$\Pr[Z \geq 3]$ を計算しなさい．
   (b) $X \sim \mathrm{N}(1, 9)$ とする．$\Pr[|X| \geq 2]$ を標準正規分布表を利用して計算しなさい．
   (c) $X \sim \mathrm{N}(1, 2)$ と $Y \sim \mathrm{N}(2, 2)$ は独立とする．$X - Y$ の分布を求め，$\Pr[X - Y \geq 3]$ を標準正規分布表を利用して計算しなさい．
3. （50 点）2 次元確率ベクトル (X, Y) は以下の同時分布をもつ．

$X \backslash Y$	0	1
0	1/4	1/4
1	1/3	1/6

   (a) Y の周辺確率質量関数を求めなさい．
   (b) Y の期待値と分散を求めなさい．
   (c) $X = 0, 1$ のときの Y の条件つき確率質量関数をそれぞれ求めなさい．
   (d) $X = 0, 1$ のときの Y の条件つき期待値をそれぞれ求めなさい．
   (e) $X = 0, 1$ のときの Y の条件つき分散をそれぞれ求めなさい．

解答例

1. 確率の基本用語

   (a) 結果が 2 通り（成功／失敗）しかない試行.

   (b) 次の pmf をもつ分布.

$$p(x) := \begin{cases} \lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}/x! & \text{for } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

   - 「for $x = 0, 1, 2, \ldots$」がなければ 2 点減.

   (c) (X, Y) の 2 変量分布における X の周辺 cdf は，任意の x について

$$F_X(x) := \Pr[X \le x]$$

   Y についても同様.

   (d) 任意の $\epsilon > 0$ について

$$\lim_{n \to \infty} \Pr[|X_n - c| < \epsilon] = 1$$

   なら $\{X_n\}$ は c に確率収束するという.

   - 「任意の $\epsilon > 0$ について」がなければ 0 点.

2. 1 変量分布の確率計算

   (a) 2 項分布の再生性より $Z \sim \mathrm{Bin}(4, .5)$．したがって

$$\begin{aligned} \Pr[Z \ge 3] &= \Pr[Z = 3] + \Pr[Z = 4] \\ &= \binom{4}{3} .5^3 (1 - .5)^1 + \binom{4}{4} .5^4 (1 - .5)^0 \\ &= \frac{4}{16} + \frac{1}{16} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

   - $Z \sim \mathrm{Bin}(4, .5)$ で 5 点.

   (b) $Z := (X - 1)/3$ とすると $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$ だから

$$\begin{aligned} \Pr[|X| \ge 2] &= \Pr[X \le -2] + \Pr[X \ge 2] \\ &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \le \frac{-2-1}{3}\right] + \Pr\left[\frac{X-1}{3} \ge \frac{2-1}{3}\right] \\ &= \Pr[Z \le -1] + \Pr\left[Z \ge \frac{1}{3}\right] \\ &= \Pr[Z \ge 1] + \Pr\left[Z \ge \frac{1}{3}\right] \\ &= .15866 + .37070 \\ &= .52936 \end{aligned}$$

   - $\Pr[|X| \ge 2] = \Pr[X \le -2] + \Pr[X \ge 2]$ で 2 点.
   - $\Pr[X \le -2], \Pr[X \ge 2]$ を正しく求めて各 4 点.

（c）正規分布の再生性より $X-Y \sim \mathrm{N}(-1,4)$．$Z:=[X-Y-(-1)]/2$ とすると $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ だから

$$\begin{aligned}\Pr[X-Y \geq 3] &= \Pr\left[\frac{X-Y-(-1)}{2} \geq \frac{3-(-1)}{2}\right] \\ &= \Pr[Z \geq 2] \\ &= .022750\end{aligned}$$

- $X-Y \sim \mathrm{N}(-1,4)$ で 5 点.

3. 最も単純な 2 変量分布

（a）

$$p_Y(y) := \begin{cases} 7/12 & \text{for } y=0 \\ 5/12 & \text{for } y=1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

（b）

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y) &:= 0 \cdot \frac{7}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12} \\ &= \frac{5}{12} \\ \operatorname{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\ &= \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(Y)^2 \\ &= \mathrm{E}(Y)(1-\mathrm{E}(Y)) \\ &= \frac{35}{144}\end{aligned}$$

（c）

$$\begin{aligned}p_{Y|X}(y|X=0) &:= \begin{cases} 1/2 & \text{for } y=0 \\ 1/2 & \text{for } y=1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \\ p_{Y|X}(y|X=1) &:= \begin{cases} 2/3 & \text{for } y=0 \\ 1/3 & \text{for } y=1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}\end{aligned}$$

（d）

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y|X=0) &:= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \\ \mathrm{E}(Y|X=1) &:= 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(e)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(Y|X=0) &= \mathrm{E}(Y|X=0)(1-\mathrm{E}(Y|X=0)) \\
&= \frac{1}{4} \\
\mathrm{var}(Y|X=1) &= \mathrm{E}(Y|X=1)(1-\mathrm{E}(Y|X=1)) \\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}
$$