中級統計学：復習テスト 18

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 11 月 29 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 14〜20 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 3 回中間試験実施日（12 月 10 日の予定）に提出すること．

1. $\mathrm{Bin}(1, p)$ から抽出した無作為標本を $(X_1, \dots, X_n)$ とする．
   (a) $(X_1, \dots, X_n) = \boldsymbol{x}$ の確率を求めなさい．

   (b) $(X_1, \dots, X_n) = \boldsymbol{x}$ を観測したときの p の尤度関数を書きなさい．

   (c) $(X_1, \dots, X_n) = \boldsymbol{x}$ を観測したときの p の対数尤度関数を書きなさい．

   (d)（対数）尤度最大化の 1 階の条件を導きなさい．

   (e) p の ML 推定値と ML 推定量を求めなさい．

2. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した無作為標本を $(X_1, \ldots, X_n)$ とする.

(a) $(X_1, \ldots, X_n) = \boldsymbol{x}$ の確率密度を書きなさい.

(b) $(X_1, \ldots, X_n) = \boldsymbol{x}$ を観測したときの $\left(\mu, \sigma^2\right)$ の尤度関数を書きなさい.

(c) $(X_1, \ldots, X_n) = \boldsymbol{x}$ を観測したときの $\left(\mu, \sigma^2\right)$ の対数尤度関数を書きなさい.

(d)（対数）尤度最大化の 1 階の条件を導きなさい.

(e) $\left(\mu, \sigma^2\right)$ の ML 推定値と ML 推定量を求めなさい.

解答例

1. (a) $X_1, \ldots, X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}
\Pr[(X_1, \ldots, X_n) = \boldsymbol{x}] &= \Pr[(X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)] \\
&= \Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] \\
&= \Pr[X_1 = x_1] \cdots \Pr[X_n = x_n] \\
&= p^{x_1}(1-p)^{1-x_1} \cdots p^{x_n}(1-p)^{1-x_n} \\
&= p^{x_1+\cdots+x_n}(1-p)^{(1-x_1)+\cdots+(1-x_n)} \\
&= p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}
\end{aligned}$$

(b)

$$L(p; \boldsymbol{x}) = p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$$

(c)

$$\ell(p; \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) \ln(1-p)$$

(d) 1 階の条件は

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^*} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p^*} = 0$$

すなわち

$$(1-p^*) \sum_{i=1}^n x_i - p^* \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right) = 0$$

(e) ML 推定値は

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

ML 推定量は

$$\hat{p} = \bar{X}$$

2. (a) $X_1, \ldots, X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}
f_{X_1,\ldots,X_n}\left(\boldsymbol{x}; \mu, \sigma^2\right) &= f_{X_1,\ldots,X_n}\left(x_1, \ldots, x_n; \mu, \sigma^2\right) \\
&= f_{X_1}\left(x_1; \mu, \sigma^2\right) \cdots f_{X_n}\left(x_n; \mu, \sigma^2\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdots \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2} - \cdots - \frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= (2\pi)^{-n/2}\left(\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$L\left(\mu, \sigma^2; \boldsymbol{x}\right) = (2\pi)^{-n/2}\left(\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

(c)

$$\ell\left(\mu, \sigma^2; \boldsymbol{x}\right) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2$$

（d）1 階の条件は

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma^{2*}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu^*) = 0 \\
-\frac{n}{2\sigma^{2*}} + \frac{1}{2\sigma^{2*2}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu^*)^2 = 0
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu^*) = 0 \\
-n\sigma^{2*} + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu^*)^2 = 0
\end{aligned}
$$

（e）ML 推定値は

$$
\begin{aligned}
\mu^* &= \bar{x} \\
\sigma^{2*} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2
\end{aligned}
$$

ML 推定量は

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu} &= \bar{X} \\
\hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2
\end{aligned}
$$