

計量経済 I：復習テスト 12

学籍番号 _____ 氏名 _____

2025 年 7 月 8 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～14 を順に重ねて左上でホチキス止めし、定期試験実施日（7 月 29 日の予定）にまとめて提出すること。

1. (Y_t, X_t) を時点 $t = 0, 1$ の確率ベクトルとし、処置群に対して時点 1 に処置を行う。処置群ダミーを D とすると、 Y_t の (D, X_t) 上への回帰モデルは

$$E(Y_0|D, X_0) = \alpha_0 + \beta X_0$$

$$E(Y_1|D, X_1) = \alpha_1 + \text{ATE} \cdot D + \beta X_1$$

ただし時点により切片が異なると仮定する。 $\{X_t\}$ が観測できないため、DID 法で ATE を推定したい。

(a) $E(Y_0|D)$ と $E(Y_1|D)$ を求めなさい。

(b) $t = 0, 1$ について $E(Y_t|D = 1) - E(Y_t|D = 0)$ を求めなさい。

(c) $E(Y_1|D = 1) - E(Y_1|D = 0)$ と $E(Y_0|D = 1) - E(Y_0|D = 0)$ の差（差分の差分）を求めなさい。

(d) DID 法で ATE を正しく推定できるための条件を与えなさい。

2. (Y_t, X_t, Z) を時点 $t = 0, 1$ の確率ベクトルする．ただし Z は一定とする． Y_t の (X_t, Z) 上への重回帰モデルは

$$Y_t = \alpha_t + \beta X_t + \gamma Z + U_t$$

$$E(U_t | X_t, Z) = 0$$

ただし時点により切片が異なると仮定する． Z が観測できないとして， β を推定したい．

- (a) $\bar{Y} := (Y_0 + Y_1)/2$, $\bar{X} := (X_0 + X_1)/2$, $\bar{U} := (U_0 + U_1)/2$ とする． \bar{Y} を \bar{X}, Z, \bar{U} で表しなさい．

- (b) $Y_t - \bar{Y}$ を $X_t - \bar{X}$ と $U_t - \bar{U}$ で表しなさい．

- (c) $\{X_t\}$ の強外生性の定義を与えなさい．

- (d) $\{X_t\}$ が強外生なら次の回帰モデルが得られることを示しなさい（平均差分法）．

$$E(Y_t - \bar{Y} | X_0, X_1) = \alpha_t - \bar{\alpha} + \beta(X_t - \bar{X})$$

解答例

1. (a) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}
 E(Y_0|D) &= E(E(Y_0|D, X_0)|D) \\
 &= E(\alpha_0 + \beta X_0|D) \\
 &= \alpha_0 + \beta E(X_0|D) \\
 E(Y_1|D) &= E(E(Y_1|D, X_1)|D) \\
 &= E(\alpha_1 + ATE \cdot D + \beta X_1|D) \\
 &= \alpha_1 + ATE \cdot D + \beta E(X_1|D)
 \end{aligned}$$

- (b) 前問より

$$\begin{aligned}
 E(Y_0|D=1) - E(Y_0|D=0) &= \alpha_0 + \beta E(X_0|D=1) - (\alpha_0 + \beta E(X_0|D=0)) \\
 &= \beta(E(X_0|D=1) - E(X_0|D=0)) \\
 E(Y_1|D=1) - E(Y_1|D=0) &= \alpha_1 + ATE + \beta E(X_1|D=1) - (\alpha_1 + \beta E(X_1|D=0)) \\
 &= ATE + \beta(E(X_1|D=1) - E(X_1|D=0))
 \end{aligned}$$

- (c) $\Delta X := X_1 - X_0$ とすると, 前問より

$$\begin{aligned}
 &E(Y_1|D=1) - E(Y_1|D=0) - (E(Y_0|D=1) - E(Y_0|D=0)) \\
 &= ATE + \beta(E(X_1|D=1) - E(X_1|D=0)) - \beta(E(X_0|D=1) - E(X_0|D=0)) \\
 &= ATE + \beta(E(X_1|D=1) - E(X_1|D=0) - E(X_0|D=1) + E(X_0|D=0)) \\
 &= ATE + \beta(E(X_1|D=1) - E(X_0|D=1) - E(X_1|D=0) + E(X_0|D=0)) \\
 &= ATE + \beta(E(X_1 - X_0|D=1) - E(X_1 - X_0|D=0)) \\
 &= ATE + \beta(E(\Delta X|D=1) - E(\Delta X|D=0))
 \end{aligned}$$

- (d) 前問より条件は $E(\Delta X|D=1) = E(\Delta X|D=0)$ (平行トレンドの仮定).

2. (a)

$$\begin{aligned}
 \bar{Y} &:= \frac{Y_0 + Y_1}{2} \\
 &= \frac{\alpha_0 + \beta X_0 + \gamma Z + U_0 + \alpha_1 + \beta X_1 + \gamma Z + U_1}{2} \\
 &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} + \frac{\beta(X_0 + X_1)}{2} + \frac{2\gamma Z}{2} + \frac{U_0 + U_1}{2} \\
 &= \bar{\alpha} + \beta \bar{X} + \gamma Z + \bar{U}
 \end{aligned}$$

ただし $\bar{\alpha} := (\alpha_0 + \alpha_1)/2$.

- (b) 前問より

$$\begin{aligned}
 Y_t - \bar{Y} &= \alpha_t + \beta X_t + \gamma Z + U_t - (\bar{\alpha} + \beta \bar{X} + \gamma Z + \bar{U}) \\
 &= \alpha_t - \bar{\alpha} + \beta (X_t - \bar{X}) + U_t - \bar{U}
 \end{aligned}$$

- (c) $t = 0, 1$ について $E(U_t|X_0, X_1) = 0$ なら $\{X_t\}$ は強外生という.

- (d)

$$\begin{aligned}
 E(Y_t - \bar{Y}|X_0, X_1) &= E(\alpha_t - \bar{\alpha} + \beta (X_t - \bar{X}) + U_t - \bar{U}|X_0, X_1) \\
 &= \alpha_t - \bar{\alpha} + \beta (X_t - \bar{X}) + E(U_t - \bar{U}|X_0, X_1)
 \end{aligned}$$

したがって $E(U_t - \bar{U} | X_0, X_1) = 0$ を示せばよい. $\{X_t\}$ は強外生なので

$$\begin{aligned} E(U_t - \bar{U} | X_0, X_1) &= E(U_t | X_0, X_1) - E(\bar{U} | X_0, X_1) \\ &= -E\left(\frac{U_0 + U_1}{2} | X_0, X_1\right) \\ &= -\frac{E(U_0 | X_0, X_1) + E(U_1 | X_0, X_1)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$