中級統計学：復習テスト 13

学籍番号____________________氏名____________________

2024 年 11 月 8 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜13 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 2 回中間試験実施日（11 月 12 日の予定）に提出すること．

1. $\{X_i\}$ は平均 μ，分散 σ^2 の独立かつ同一な分布をもつ．

   (a) $(X_1, \dots, X_n)$ の標本平均 $\bar{X}$ を式で定義しなさい．

   (b) $\bar{X}$ の平均（期待値）を求めなさい．

   (c) $\bar{X}$ の分散を求めなさい．

   (d) $\bar{X}$ の漸近分布を求めなさい．

2. $\{U_i\}$ は独立に $\mathrm{U}[0,1]$ にしたがう．$(U_1,\ldots,U_{12})$ の標本平均を $\bar{U}$ とする．

（a）U_i の期待値を求めなさい（教科書 pp. 95–96〈例〉参照）．

（b）U_i の 2 次の積率を求めなさい（教科書 p. 98〈例〉参照）．

（c）U_i の分散を求めなさい．

（d）$\bar{U}$ の期待値を求めなさい．

（e）$\bar{U}$ の分散を求めなさい．

（f）$\bar{U}$ の漸近分布を求めなさい．（注：$\mathrm{N}(0,1)$ ではない．）

解答例

1. (a)

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

(b) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_n)}{n} \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n)}{n} \\
&= \frac{\mu + \cdots + \mu}{n} \\
&= \mu
\end{aligned}$$

(c) $X_1, \ldots, X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

(d) 中心極限定理より

$$\bar{X} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

2. (a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(U) &= \int_0^1 u \, \mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(U^2\right) &= \int_0^1 u^2 \, \mathrm{d}u \\
&= \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

（c）

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(U) &= \mathrm{E}\left(U^2\right) - \mathrm{E}(U)^2 \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

（d）期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\bar{U}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{U_1 + \cdots + U_{12}}{12}\right) \\ &= \frac{\mathrm{E}(U_1) + \cdots + \mathrm{E}(U_{12})}{12} \\ &= \frac{1/2 + \cdots + 1/2}{12} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

（e）$U_1, \ldots, U_{12}$ は独立なので

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\left(\bar{U}\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{U_1 + \cdots + U_{12}}{12}\right) \\ &= \frac{\mathrm{var}(U_1 + \cdots + U_{12})}{12^2} \\ &= \frac{\mathrm{var}(U_1) + \cdots + \mathrm{var}(U_{12})}{12^2} \\ &= \frac{1/12 + \cdots + 1/12}{12^2} \\ &= \frac{1}{144}\end{aligned}$$

（f）中心極限定理より

$$\bar{U} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{144}\right)$$