

# 計量経済 II：期末試験

村澤 康友

2016 年 1 月 19 日

注意：3 問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいに与えるが、結果のみの解答は 0 点とする）。

1. (20 点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）。
  - (a) t 統計量
  - (b) 正規方程式
  - (c) 線形推定量
  - (d) 標準誤差
2. (30 点) 2 変量データを  $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$  とする。  $y_i$  の  $x_i$  上への定数項のない古典的正規線形回帰モデルは

$$y_i = \beta x_i + u_i$$
$$\{u_i\} \sim \text{IN}(0, \sigma^2)$$

$\beta$  を OLS で推定したい。

- (a) OLS 問題を書きなさい。
  - (b)  $\beta$  の OLS 推定量を求めなさい。
  - (c) OLS 推定量の分布を求めなさい。
3. (50 点) 某大学経済学部 2 回生の男女について、どちらが経済学の理解度のばらつきが大きいかを知りたい。そこで（復元）無作為抽出した男子 64 人、女子 32 人に対して試験を行い、次の結果を得た。

	平均点	(標本) 標準偏差
男子	50	28
女子	60	24

正規母集団を仮定し、母数と統計量の区別に注意して、以下の問いに答えなさい。

- (a) 検定問題を定式化しなさい（問題意識を踏まえること）。
- (b) 標本分散の比の分布を求めなさい。
- (c) 検定統計量を与えなさい。
- (d)  $H_0$  の下で検定統計量の分布を求め、有意水準 5 % の検定の棄却域を定めなさい。
- (e) 検定を実行し、結果を説明しなさい。

## 解答例

### 1. 統計学の基本用語

- (a)  $H_0$  の下で t 分布にしたがう検定統計量.
- (b) OLS 問題の 1 階の条件を整理した式.
- (c) 被説明変数の線形関数で表される推定量.
- (d) 推定量の標準偏差の推定値.

### 2. OLS

- (a) OLS 問題は

$$\min_b \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2$$

and  $b \in \mathbb{R}$

- (b) OLS 問題の 1 階の条件は

$$\sum_{i=1}^n (-x_i) 2(y_i - b^* x_i) = 0$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - b^* x_i) = 0$$

正規方程式は

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - b^* \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$$

OLS 推定量は

$$b^* = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- (c)  $\beta$  の OLS 推定量は

$$\begin{aligned} b &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i (\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
E(b) &= E\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\
&= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i E(u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \beta \\
\text{var}(b) &= \text{var}\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\
&= \text{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\
&= \frac{\text{var}(x_1 u_1) + \cdots + \text{var}(x_n u_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{x_1^2 \text{var}(u_1) + \cdots + x_n^2 \text{var}(u_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}
\end{aligned}$$

$b$  は  $(y_1, \dots, y_n)$  の線形変換だから正規分布. したがって

$$b \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

### 3. 2 標本問題

(a) 母平均を  $\mu_X, \mu_Y$ , 母分散を  $\sigma_X^2, \sigma_Y^2$  とすると

$$H_0 : \sigma_X^2 \geq \sigma_Y^2, \mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R} \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_X^2 < \sigma_Y^2, \mu_X, \mu_Y \in \mathbb{R}$$

(b) 標本の大きさを  $m, n$ , 標本分散を  $s_X^2, s_Y^2$  とすると

$$\begin{aligned}
\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} &\sim \chi^2(m-1) \\
\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} &\sim \chi^2(n-1) \\
\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} &\sim F(m-1, n-1)
\end{aligned}$$

$F(m-1, n-1)$  の cdf を  $F(\cdot)$  とすると, 任意の  $x$  について

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\frac{s_X^2}{s_Y^2} \leq x\right] &= \Pr\left[\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \leq \frac{x}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}\right] \\
&= F\left(\frac{x}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2}\right)
\end{aligned}$$

(c) 検定統計量は

$$F := \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

(d)  $H_0$  の下で  $F \sim F(63, 31)$ . F 分布表より  $F$  に関する棄却域は  $[1.726, \infty)$ .

(e) 検定統計量の値は

$$\begin{aligned} F &:= \frac{28^2}{24^2} \\ &= \frac{7^2}{6^2} \\ &= \frac{49}{36} \\ &\approx 1.361 \end{aligned}$$

$F < 1.726$  より有意水準 5 % で  $H_0$  は  $H_1$  に対して棄却されない. すなわち男子の方が理解度のばらつきが大きいとは言えない.