

中級統計学：復習テスト 7

学籍番号_____氏名_____

2024 年 10 月 11 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 1～8 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 1 回中間試験実施日（10 月 18 日の予定）に提出すること。

1. 次の確率変数を考える。

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1 - p \end{cases}$$

- (a) $E(X)$ を求めなさい。

- (b) $E(X^2)$ を求めなさい。

- (c) $\text{var}(X)$ を求めなさい。

2. 確率変数 X について以下の公式が成り立つことを示しなさい. (ヒント: 復習テスト 2 で似た公式を示した.)

(a)

$$E(aX + b) = a E(X) + b$$

(b)

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

(c)

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &:= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X^2) &:= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$

(c) $\mathrm{E}(X) = p$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &:= (1 - p)^2 \cdot p + (0 - p)^2 \cdot (1 - p) \\ &= p(1 - p)^2 + p^2(1 - p) \\ &= p(1 - p) \end{aligned}$$

2. (a) X が離散なら

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(aX + b) &:= \sum_x (ax + b)p_X(x) \\ &= \sum_x (axp_X(x) + bp_X(x)) \\ &= \sum_x axp_X(x) + \sum_x bp_X(x) \\ &= a \sum_x xp_X(x) + b \sum_x p_X(x) \\ &= a \mathrm{E}(X) + b \end{aligned}$$

X が連続なら

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(aX + b) &:= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f_X(x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (axf_X(x) + bf_X(x)) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} axf_X(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf_X(x) \, dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) \, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, dx \\ &= a \mathrm{E}(X) + b \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(aX + b) &:= \mathrm{E}((aX + b - \mathrm{E}(aX + b))^2) \\ &= \mathrm{E}([aX + b - (a\mathrm{E}(X) + b)]^2) \\ &= \mathrm{E}([a(X - \mathrm{E}(X))]^2) \\ &= \mathrm{E}(a^2(X - \mathrm{E}(X))^2) \\ &= a^2 \mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2) \\ &= a^2 \mathrm{var}(X) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &:= \text{E} \left((X - \mu_X)^2 \right) \\ &= \text{E} \left(X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2 \right) \\ &= \text{E} \left(X^2 \right) - 2\mu_X \text{E}(X) + \mu_X^2 \\ &= \text{E} \left(X^2 \right) - \mu_X^2\end{aligned}$$