第 22 回　平均と分散の検定（12.2, 12.4）

村澤 康友

2025 年 12 月 19 日

今日のポイント

1. 正規母集団の母平均・母分散，正規母集団の 2 標本問題の母平均の差・母分散の比，ベルヌーイ母集団の母比率，ベルヌーイ母集団の 2 標本問題の母比率の差の検定の棄却域を求める．
2. H_0 の下で t 分布・χ^2 分布・F 分布にしたがう検定統計量を，それぞれ t 統計量・χ^2 統計量・F 統計量という．それらを用いる検定を t 検定・χ^2 検定・F 検定という．
3. H_0 の下で検定統計量が実現値以上になる確率を p 値（有意確率）という．p 値≦有意水準なら H_0 を棄却する．

目次

1　正規母集団

1.1　母平均の検定（p. 240）

1.1.1　母分散が既知

母集団分布を $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ とする．ただし σ^2 は既知とする．次の片側検定問題を考える．

$$H_0 : \mu = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > c$$

有意水準を 5 %とする．大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}$ とすると

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

$H_0 : \mu = c$ を代入すると，検定統計量は

$$Z := \frac{\bar{X} - c}{\sqrt{\sigma^2/n}}$$

H_0 の下で

$$Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] = 0.05$$

したがって棄却域は $[1.65, \infty)$．

注 1. 棄却域は H_1 に依存する．

- $H_1 : \mu > c$ なら棄却域は $[1.65, \infty)$
- $H_1 : \mu < c$ なら棄却域は $(-\infty, -1.65]$
- $H_1 : \mu \neq c$ なら棄却域は $(-\infty, -1.96] \cup [1.96, \infty)$

例えば $Z=1.8$ なら $H_0: \mu=c$ は $H_1: \mu>c$ に対しては棄却されるが $H_1: \mu \neq c$ に対しては棄却されない．図 1 を参照.

1.1.2　母分散が未知

標本分散を s^2 とする．σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim \mathrm{t}(n-1)$$

$H_0: \mu=c$ を代入すると，検定統計量は

$$t := \frac{\bar{X}-c}{\sqrt{s^2/n}}$$

H_0 の下で

$$t \sim \mathrm{t}(n-1)$$

t 分布表より H_0 の下で，例えば $n=10$ なら

$$\Pr[t \geq 1.833] = 0.05$$

したがって棄却域は $[1.833, \infty)$.

定義 1. H_0 の下で t 分布にしたがう検定統計量を t **統計量**という.

定義 2. t 統計量を用いる検定を t **検定**という.

1.2　母分散の検定（p. 242）

1.2.1　母平均が既知

母集団分布を $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ とする．ただし μ は既知とする．次の片側検定問題を考える.

$$H_0: \sigma^2=c \quad \text{vs} \quad H_1: \sigma^2>c$$

有意水準を 5 %とする．無作為標本 $(X_1, \ldots, X_n)$ の標本分散は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i-\mu)^2$$

このとき

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

$H_0: \sigma^2=c$ を代入すると，検定統計量は

$$\chi^2 := \frac{n\hat{\sigma}^2}{c}$$

H_0 の下で

$$\chi^2 \sim \chi^2(n)$$

χ^2 分布表より H_0 の下で，例えば $n=10$ なら

$$\Pr\left[\chi^2 \geq 18.3070\right] = 0.05$$

したがって棄却域は $[18.3070, \infty)$.

定義 3. H_0 の下で χ^2 分布にしたがう検定統計量を χ^2 **統計量**という.

定義 4. χ^2 統計量を用いる検定を χ^2 **検定**という.

1.2.2　母平均が未知

μ が未知なら標本分散は

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

このとき

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$H_0: \sigma^2=c$ を代入すると，検定統計量は

$$\chi^2 := \frac{(n-1)s^2}{c}$$

H_0 の下で

$$\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$$

χ^2 分布表より H_0 の下で，例えば $n=10$ なら

$$\Pr\left[\chi^2 \geq 16.9190\right] = 0.05$$

したがって棄却域は $[16.9190, \infty)$.

1.3　母平均の差の検定（p. 242）

1.3.1　母分散が既知

母集団分布を $\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ とする．ただし σ_X^2, σ_Y^2 は既知とする．次の片側検定問題を考える.

$$H_0: \mu_X=\mu_Y \quad \text{vs} \quad H_1: \mu_X>\mu_Y$$

有意水準を 5 %とする．各母集団から独立に抽出した大きさ m, n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}, \bar{Y}$ とすると

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{m}\right)$$
$$\bar{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

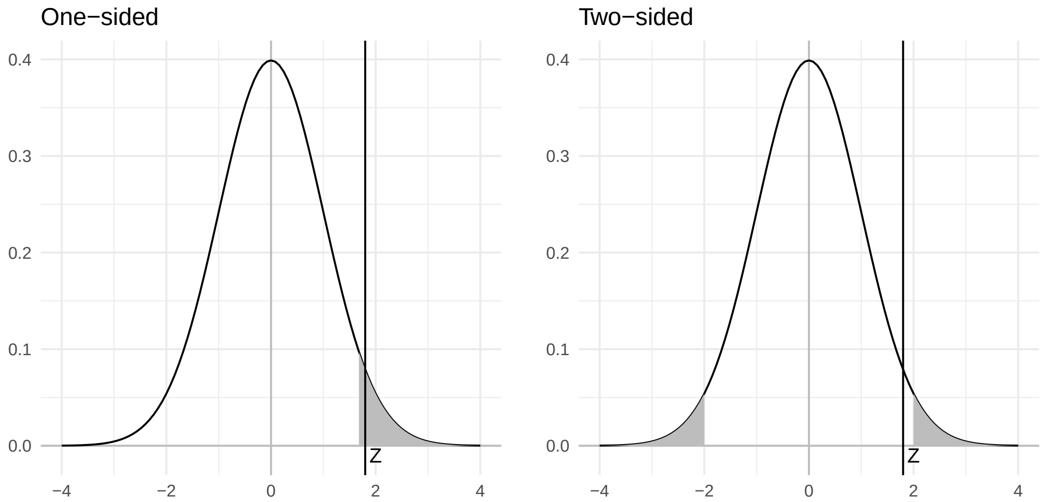

図 1　片側検定と両側検定の棄却域

両者は独立だから

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim \mathrm{N}\left(\mu_X-\mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m}+\frac{\sigma_Y^2}{n}\right)$$

標準化すると

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

$H_0: \mu_X=\mu_Y$ を代入すると，検定統計量は

$$Z := \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\sigma_X^2/m+\sigma_Y^2/n}}$$

H_0 の下で

$$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] = 0.05$$

したがって棄却域は $[1.65, \infty)$.

1.3.2　母分散が未知で等しい場合

$\sigma_X^2=\sigma_Y^2=\sigma^2$ なら

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{\sigma^2(1/m+1/n)}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

プールした標本分散を s^2 とする．σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{s^2(1/m+1/n)}} \sim \mathrm{t}(m+n-2)$$

$H_0: \mu_X=\mu_Y$ を代入すると，検定統計量は

$$t := \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{s^2(1/m+1/n)}}$$

H_0 の下で

$$t \sim \mathrm{t}(m+n-2)$$

t 分布表より H_0 の下で，例えば $m=4$，$n=6$ なら

$$\Pr[t \geq 1.860] = 0.05$$

したがって棄却域は $[1.860, \infty)$.

1.3.3　母分散が未知で異なる場合

$\sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$ なら近似的な検定を用いる．標本分散を s_X^2, s_Y^2 とすると，大数の法則と中心極限定理より

$$\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{\sqrt{s_X^2/m+s_Y^2/n}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

$H_0: \mu_X=\mu_Y$ を代入すると，検定統計量は

$$Z := \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{s_X^2/m+s_Y^2/n}}$$

H_0 の下で

$$Z \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] \approx 0.05$$

したがって近似的な棄却域は $[1.65, \infty)$.

1.4　母分散の比の検定（p. 244）

1.4.1　母平均が既知

母集団分布を $\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right), \mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ とする．ただし μ_X, μ_Y は既知とする．次の片側検定問題を考える．

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$$

有意水準を 5 %とする．各母集団から独立に抽出した大きさ m, n の無作為標本の標本分散を $\hat{\sigma}_X^2, \hat{\sigma}_Y^2$ とすると

$$\frac{m\hat{\sigma}_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m)$$
$$\frac{n\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n)$$

両者は独立だから

$$\frac{\hat{\sigma}_X^2/\sigma_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m, n)$$

すなわち

$$\frac{\hat{\sigma}_X^2/\hat{\sigma}_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m, n)$$

$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ を代入すると，検定統計量は

$$F := \frac{\hat{\sigma}_X^2}{\hat{\sigma}_Y^2}$$

H_0 の下で

$$F \sim \mathrm{F}(m, n)$$

F 分布表より H_0 の下で，例えば $m = 4$，$n = 6$ なら

$$\Pr[F \geq 4.534] = 0.05$$

したがって棄却域は $[4.534, \infty)$．

定義 5. H_0 の下で F 分布にしたがう検定統計量を F **統計量**という．

定義 6. F 統計量を用いる検定を F **検定**という．

1.4.2　母平均が未知

標本分散を s_X^2, s_Y^2 とすると

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$
$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

両者は独立だから

$$\frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

すなわち

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ を代入すると，検定統計量は

$$F := \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

H_0 の下で

$$F \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

F 分布表より H_0 の下で，例えば $m = 4$，$n = 6$ なら

$$\Pr[F \geq 5.409] = 0.05$$

したがって棄却域は $[5.409, \infty)$．

2　ベルヌーイ母集団

2.1　母比率の検定（p. 250）

母集団分布を $\mathrm{Bin}(1, p)$ とする．次の片側検定問題を考える．

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : p > p_0$$

有意水準を 5 %とする．$\mathrm{Bin}(1, p)$ の平均は p，分散は $p(1-p)$．大きさ n の無作為標本の標本平均（＝標本比率）を $\hat{p}$ とすると，中心極限定理より

$$\hat{p} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

標準化すると

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0, 1)$$

$H_0 : p = p_0$ を代入すると，検定統計量は

$$Z := \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

H_0 の下で

$$Z \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0, 1)$$

標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] \approx 0.05$$

したがって近似的な棄却域は $[1.65, \infty)$．

例 1. ある番組の視聴率について有意水準 5 %で次の片側検定を行う．

$$H_0 : p \leq 0.1 \quad \text{vs} \quad H_1 : p > 0.1$$

100 世帯を対象に視聴率を調査したら 13 %の視聴率であった．検定統計量の値は

$$\begin{aligned} Z &:= \frac{0.13 - 0.1}{\sqrt{0.1(1-0.1)/100}} \\ &= \frac{0.03}{\sqrt{0.09/100}} \\ &= 1 < 1.65 \end{aligned}$$

したがって H_0 は棄却されない．

2.2 母比率の差の検定

母集団分布を $\mathrm{Bin}(1, p_X), \mathrm{Bin}(1, p_Y)$ とする．次の片側検定問題を考える．

$$H_0 : p_X = p_Y \quad \text{vs} \quad H_1 : p_X > p_Y$$

有意水準を 5 %とする．各母集団から独立に抽出した大きさ m, n の無作為標本の標本比率を $\hat{p}_X, \hat{p}_Y$ とすると，中心極限定理より

$$\begin{aligned} \hat{p}_X &\overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(p_X, \frac{p_X(1-p_X)}{m}\right) \\ \hat{p}_Y &\overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(p_Y, \frac{p_Y(1-p_Y)}{n}\right) \end{aligned}$$

両者は独立だから

$$\hat{p}_X - \hat{p}_Y \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(p_X - p_Y, \frac{p_X(1-p_X)}{m} + \frac{p_Y(1-p_Y)}{n}\right)$$

標準化すると

$$\frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y - (p_X - p_Y)}{\sqrt{p_X(1-p_X)/m + p_Y(1-p_Y)/n}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

または

$$\frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y - (p_X - p_Y)}{\sqrt{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)/m + \hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)/n}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

$H_0 : p_X = p_Y$ を代入すると，検定統計量は

$$Z := \frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)/m + \hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)/n}}$$

H_0 の下で

$$Z \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] \approx 0.05$$

したがって近似的な棄却域は $[1.65, \infty)$．

3 p 値

定義 7. H_0 の下で検定統計量が実現値以上になる確率を p **値（有意確率）**という．

注 2. p 値が有意水準以下なら H_0 を棄却する．

例 2. 有意水準 α の検定を考える．検定統計量を T，棄却域を $[t_\alpha, \infty)$，T の実現値を t とすると，

$$\begin{aligned} t \geq t_\alpha &\iff \Pr[T \geq t | H_0] \leq \Pr[T \geq t_\alpha | H_0] \\ &\iff p \leq \alpha \end{aligned}$$

したがって $p \leq \alpha$ なら H_0 は棄却（図 2）．

4 今日のキーワード

母平均の検定（母分散が既知・未知），t 統計量，t 検定，母分散の検定（母平均が既知・未知），χ^2 統計量，χ^2 検定，母平均の差の検定（母分散が既知・未知），母分散の比の検定（母平均が既知・未知），F 統計量，F 検定，母比率の検定，p 値（有意確率）

5 次回までの準備

提出 宿題 6
復習 教科書第 12 章 2, 4 節，復習テスト 22
予習 教科書第 12 章 3 節

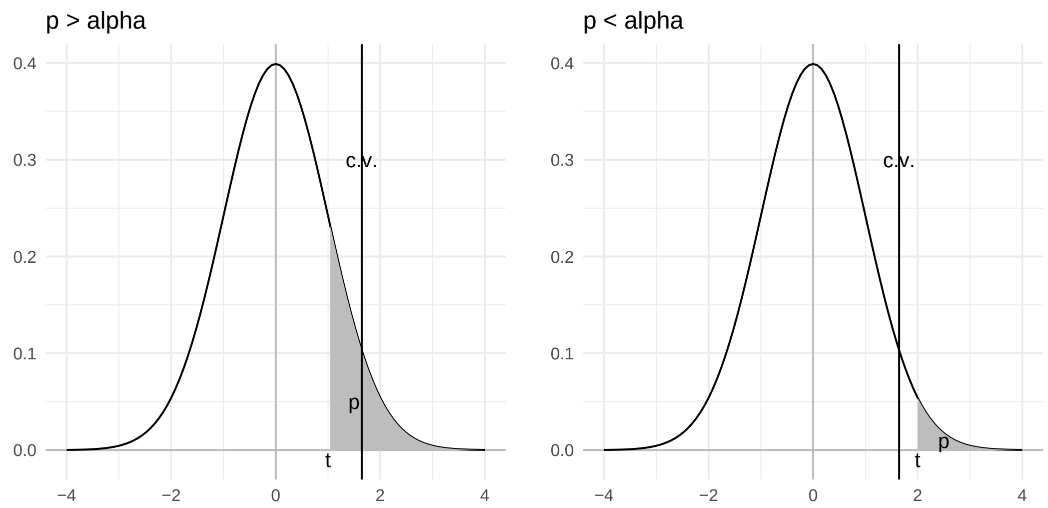

図 2　検定統計量と p 値