

# 経済統計：第2回中間試験

村澤 康友

2019年6月10日

注意：3問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいに与えるが、結果のみの解答は0点とする）。

1. (20点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各20字程度）。
  - (a) 同時累積分布関数
  - (b)  $n$  変量正規分布（ただし  $n > 2$  とする）
  - (c) 分散共分散行列
  - (d) 分布（法則）収束
2. (30点)  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$  を独立とし、 $X := Z_1 + Z_2$ ,  $Y := 2Z_1 + 3Z_2$  とする。
  - (a)  $X, Y$  の分布を求めなさい。
  - (b)  $\text{cov}(X, Y)$  を求めなさい。
  - (c) 標準正規分布表を利用して  $\Pr[|X + Y| < 1]$  を求めなさい。
3. (50点)  $(X, Y)$  は次の同時累積分布関数をもつ。

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (x-1)(y-1)/xy & \text{for } x, y \geq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- (a)  $X$  と  $Y$  の周辺累積分布関数を求めなさい。
- (b)  $\Pr[X \leq 3, Y \leq 4]$  を求めなさい。
- (c)  $\Pr[X \leq 3, Y > 4]$  を求めなさい。
- (d)  $\Pr[X > 3, Y \leq 4]$  を求めなさい。
- (e)  $\Pr[X > 3, Y > 4]$  を求めなさい。

## 解答例

### 1. 確率の基本用語

(a)  $F_{X,Y}(x,y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$ .

(b)  $n$  変量正規分布の同時 pdf は, 任意の  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  について

$$f(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-n/2} \det(\boldsymbol{\Sigma})^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)$$

ただし  $\boldsymbol{\Sigma}$  は対称行列.

(c)  $\text{var}(\mathbf{x}) := \text{E}((\mathbf{x} - \text{E}(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \text{E}(\mathbf{x}))')$ .

- 「分散と共分散を並べたもの」は並べ方を明示しなければ 0 点.

(d)  $\{X_n\}$  に対応する cdf の列を  $\{F_n(\cdot)\}$  とする.  $F(\cdot)$  の任意の連続点  $x$  で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

なら  $\{X_n\}$  は  $F(\cdot)$  に分布 (法則) 収束.

- 「任意の (連続) 点  $x$  で」がなければ 2 点.

### 2. 正規分布

(a)  $X \sim N(0, 2)$ ,  $Y \sim N(0, 13)$ .

- 各 5 点.
- 平均・分散のみは各 2 点.

(b)  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$  は独立なので

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \text{cov}(Z_1 + Z_2, 2Z_1 + 3Z_2) \\ &= \text{cov}(Z_1, 2Z_1) + \text{cov}(Z_2, 3Z_2) \\ &= 2 + 3 \\ &= 5 \end{aligned}$$

(c)  $X + Y = 3Z_1 + 4Z_2 \sim N(0, 25)$  より

$$\begin{aligned} \Pr[|X + Y| < 1] &= \Pr[-1 < X + Y < 1] \\ &= \Pr\left[-\frac{1}{5} < \frac{X + Y}{5} < \frac{1}{5}\right] \\ &= \Phi(.2) - \Phi(-.2) \\ &= 1 - 2Q(.2) \\ &= 1 - 2 \cdot .42074 \\ &= 1 - .84148 \\ &= .15852 \end{aligned}$$

- 標準化で 5 点.

### 3. 2 変量分布

(a)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \lim_{y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(y-1)}{xy} \\ &= \frac{x-1}{x} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y-1}{y} \\ &= \frac{x-1}{x} \end{aligned}$$

同様に

$$F_Y(y) = \frac{y-1}{y}$$

(b)

$$\begin{aligned} \Pr[X \leq 3, Y \leq 4] &= \frac{(3-1)(4-1)}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \Pr[X \leq 3, Y > 4] &= \Pr[X \leq 3] - \Pr[X \leq 3, Y \leq 4] \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \Pr[X > 3, Y \leq 4] &= \Pr[Y \leq 4] - \Pr[X \leq 3, Y \leq 4] \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \Pr[X > 3, Y > 4] &= \Pr[X > 3] - \Pr[X > 3, Y \leq 4] \\ &= 1 - \Pr[X \leq 3] - \Pr[X > 3, Y \leq 4] \\ &= 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$