計量経済 II：中間試験

村澤 康友

2015 年 11 月 17 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1.（20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 標本
   (b) 標本分布
   (c) 推定量
   (d) 尤度
2.（50 点）K 大生の（試験前の）1 日当たり勉強時間の母集団分布を $\mathrm{N}(5,4)$ とする．無作為に選んだ K 大生 10 人の勉強時間を $(X_1,\dots,X_{10})$ とする．
   (a) 標本和 $X_1+\dots+X_{10}$ の分布を求めなさい．
   (b) 標本平均 $\bar{X}$ の分布を求めなさい．
   (c)（母平均を未知とした）標本分散 s^2 の分布を示しなさい（証明不要）．
   (d) $\Pr\left[|\bar{X}-5|\le c\right]=.95$ となる c を求めなさい．
   (e) $\Pr\left[a<s^2\le b\right]=.95$ となる a,b を求めなさい．
3.（30 点）$\mathrm{Bin}(1,p)$ から抽出した大きさ n の無作為標本を $X:=(X_1,\dots,X_n)$ とする．
   (a) $X=x$ の確率を求めなさい．
   (b) $X=x$ を観測したときの p の対数尤度関数を書きなさい．
   (c) p の ML 推定量を求めなさい（導出の過程を示すこと）．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 母集団のうち実際に観察される部分.
       - 「母集団の一部」がなければ 0 点.
   (b) 確率的な標本抽出にともなう統計量の分布.
       - 「統計量」がなければ 0 点.
   (c) 推定に用いる統計量.
   (d) ある母数の下で標本の実現値を観測する確率（密度）.
       - 「（母数の）尤もらしさ」は定義でないので 0 点.
2. 標本平均・標本分散の標本分布
   (a)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_1+\cdots+X_{10}) &= \mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_{10}) \\
&= 10\cdot 5 \\
&= 50 \\
\mathrm{var}(X_1+\cdots+X_{10}) &= \mathrm{var}(X_1)+\cdots+\mathrm{var}(X_{10}) \\
&= 10\cdot 4 \\
&= 40
\end{aligned}
$$

   したがって $X_1+\cdots+X_{10}\sim \mathrm{N}(50,40)$.
   - 平均・分散のみは 5 点.
   - $\mathrm{N}\left(n\mu, n\sigma^2\right)$ は 5 点.

   (b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_{10}}{10}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1+\cdots+X_{10})}{10} \\
&= \frac{50}{10} \\
&= 5 \\
\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1+\cdots+X_{10}}{10}\right) \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1+\cdots+X_{10})}{100} \\
&= \frac{40}{100} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}
$$

   したがって $\bar{X}\sim \mathrm{N}(5,2/5)$.
   - 平均・分散のみは 5 点.
   - $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ は 5 点.

   (c) 一般に $(n-1)s^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$ より

$$
\frac{9s^2}{4}\sim\chi^2(9)
$$

- $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ で 5 点.

（d）

$$\begin{aligned}
\Pr\left[|\bar{X}-5| \le c\right] &= \Pr\left[-c \le \bar{X}-5 \le c\right] \\
&= \Pr\left[-\frac{c}{\sqrt{2/5}} \le \frac{\bar{X}-5}{\sqrt{2/5}} \le \frac{c}{\sqrt{2/5}}\right] \\
&= .95
\end{aligned}$$

したがって

$$Q\left(\frac{c}{\sqrt{2/5}}\right) = .025$$

標準正規分布表より

$$\frac{c}{\sqrt{2/5}} \approx 1.96$$

したがって

$$\begin{aligned}
c &\approx 1.96\sqrt{\frac{2}{5}} \\
&\approx 1.24
\end{aligned}$$

- 標準化で 5 点.

（e）$(9/4)s^2 \sim \chi^2(9)$ なので χ^2 分布表より

$$\Pr\left[2.70039 < \frac{9s^2}{4} \le 19.0228\right] = .95$$

または

$$\Pr\left[2.70039 \cdot \frac{4}{9} < s^2 \le 19.0228 \cdot \frac{4}{9}\right] = .95$$

したがって $(a,b) = (1.200, 8.455)$.

- 分布表の読み取りで 5 点.

3. 母比率の ML 推定

（a）

$$\begin{aligned}
\Pr[X=x] &= \Pr[(X_1,\dots,X_n) = (x_1,\dots,x_n)] \\
&= \Pr[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] \\
&= \Pr[X_1 = x_1] \cdots \Pr[X_n = x_n] \\
&= p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}
\end{aligned}$$

- $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ は 0 点（$X \ne X_1 + \cdots + X_n$）.

（b）

$$\ell(p; x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i\right)\ln(1-p)$$

（c）最大化の 1 階の条件は

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p^*} - \frac{n-\sum_{i=1}^n x_i}{1-p^*} = 0$$

すなわち

$$(1-p^*)\sum_{i=1}^{n} x_i - p^*\left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)=0$$

したがって

$$p^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$