

## 計量分析 2：復習テスト 11

学籍番号\_\_\_\_\_氏名\_\_\_\_\_

2023 年 1 月 12 日

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～14 を（左上で）ホチキス止めし、定期試験実施日（1 月 26 日の予定）にまとめて提出すること。

1.  $(Y_t, X_t)$  を時点  $t = 0, 1$  の確率ベクトルとし、処置群に対して時点 1 に処置を行う。処置ダミーを  $D$  とすると、 $Y_t$  の  $(D, X_t)$  上への回帰モデルは

$$E(Y_0|D, X_0) = \alpha_0 + \beta X_0$$

$$E(Y_1|D, X_1) = \alpha_1 + \text{ATE} \cdot D + \beta X_1$$

ただし時点により切片が異なると仮定する。 $\{X_t\}$  が観測できないため、DID 法で ATE を推定したい。

(a)  $E(Y_0|D)$  と  $E(Y_1|D)$  を求めなさい。

(b)  $t = 0, 1$  について  $E(Y_t|D = 1) - E(Y_t|D = 0)$  を求めなさい。

(c)  $E(Y_1|D = 1) - E(Y_1|D = 0)$  と  $E(Y_0|D = 1) - E(Y_0|D = 0)$  の差を求めなさい。

(d) DID 法で ATE を正しく推定できるための条件を与えなさい。

2.  $(Y_t, X_t, Z)$  を時点  $t = 0, 1$  の確率ベクトルする．ただし  $Z$  は一定とする． $Y_t$  の  $(X_t, Z)$  上への重回帰モデルは

$$Y_t = \alpha_t + \beta X_t + \gamma Z + U_t$$

$$E(U_t | X_t, Z) = 0$$

ただし時点により切片が異なると仮定する． $Z$  が観測できないとして， $\beta$  を推定したい．

- (a)  $\bar{Y} := (Y_0 + Y_1)/2$ ,  $\bar{X} := (X_0 + X_1)/2$ ,  $\bar{U} := (U_0 + U_1)/2$  とする． $\bar{Y}$  を  $\bar{X}, Z, \bar{U}$  で表しなさい．

- (b)  $Y_t - \bar{Y}$  を  $X_t - \bar{X}$  と  $U_t - \bar{U}$  で表しなさい．

- (c)  $\{X_t\}$  の強外生性の定義を与えなさい．

- (d)  $\{X_t\}$  が強外生なら次の回帰モデルが得られることを示しなさい．

$$E(Y_t - \bar{Y} | X_0, X_1) = \alpha_t - \bar{\alpha} + \beta(X_t - \bar{X})$$

解答例

1. (a) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}E(Y_0|D) &= E(E(Y_0|D, X_0)|D) \\&= E(\alpha_0 + \beta X_0|D) \\&= \alpha_0 + \beta E(X_0|D) \\E(Y_1|D) &= E(E(Y_1|D, X_1)|D) \\&= E(\alpha_1 + \text{ATE} \cdot D + \beta X_1|D) \\&= \alpha_1 + \text{ATE} \cdot D + \beta E(X_1|D)\end{aligned}$$

(b) 前問より

$$\begin{aligned}E(Y_0|D=1) - E(Y_0|D=0) &= \alpha_0 + \beta E(X_0|D=1) - (\alpha_0 + \beta E(X_0|D=0)) \\&= \beta(E(X_0|D=1) - E(X_0|D=0)) \\E(Y_1|D=1) - E(Y_1|D=0) &= \alpha_1 + \text{ATE} + \beta E(X_1|D=1) - (\alpha_1 + \beta E(X_1|D=0)) \\&= \text{ATE} + \beta(E(X_1|D=1) - E(X_1|D=0))\end{aligned}$$

(c) 前問より

$$\begin{aligned}E(Y_1|D=1) - E(Y_1|D=0) - (E(Y_0|D=1) - E(Y_0|D=0)) \\&= \text{ATE} + \beta(E(X_1|D=1) - E(X_1|D=0)) - \beta(E(X_0|D=1) - E(X_0|D=0)) \\&= \text{ATE} + \beta(E(\Delta X|D=1) - E(\Delta X|D=0))\end{aligned}$$

ただし  $\Delta X := X_1 - X_0$ .

(d) 前問より条件は  $E(\Delta X|D=1) = E(\Delta X|D=0)$ .

2. (a)

$$\begin{aligned}\bar{Y} &:= \frac{Y_0 + Y_1}{2} \\&= \frac{\alpha_0 + \beta X_0 + \gamma Z + U_0 + \alpha_1 + \beta X_1 + \gamma Z + U_1}{2} \\&= \bar{\alpha} + \beta \bar{X} + \gamma Z + \bar{U}\end{aligned}$$

ただし  $\bar{\alpha} := (\alpha_0 + \alpha_1)/2$ .

(b) 前問より

$$\begin{aligned}Y_t - \bar{Y} &= \alpha_t + \beta X_t + \gamma Z + U_t - (\bar{\alpha} + \beta \bar{X} + \gamma Z + \bar{U}) \\&= \alpha_t - \bar{\alpha} + \beta (X_t - \bar{X}) + U_t - \bar{U}\end{aligned}$$

(c)  $t = 0, 1$  について  $E(U_t|X_0, X_1) = 0$  なら  $\{X_t\}$  は強外生という.

(d)

$$\begin{aligned}E(Y_t - \bar{Y}|X_0, X_1) &= E(\alpha_t - \bar{\alpha} + \beta (X_t - \bar{X}) + U_t - \bar{U}|X_0, X_1) \\&= \alpha_t - \bar{\alpha} + \beta (X_t - \bar{X}) + E(U_t - \bar{U}|X_0, X_1)\end{aligned}$$

したがって  $E(U_t - \bar{U} | X_0, X_1) = 0$  を示せばよい.  $\{X_t\}$  は強外生なので

$$\begin{aligned} E(U_t - \bar{U} | X_0, X_1) &= E(U_t | X_0, X_1) - E(\bar{U} | X_0, X_1) \\ &= E\left(\frac{U_0 + U_1}{2} | X_0, X_1\right) \\ &= \frac{E(U_0 | X_0, X_1) + E(U_1 | X_0, X_1)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$