

計量分析 2：復習テスト 6

学籍番号 _____ 氏名 _____

2023 年 10 月 31 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1～8 をまとめて左上でホチキス止めし、中間試験実施日（11 月 28 日の予定）に提出すること。

1. 2 変量データを $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ とする。 y_i の x_i 上への単回帰モデルは

$$E(y_i|x_i) = \alpha + \beta x_i$$

回帰の誤差項は $u_i := y_i - E(y_i|x_i)$ 。以下の式を証明しなさい。

(a)

$$E(u_i|x_i) = 0$$

(b)

$$E(u_i) = 0$$

(c)

$$E(x_i u_i) = 0$$

(d)

$$\text{cov}(x_i, u_i) = 0$$

(e)

$$\text{cov}(x_i, y_i) = \beta \text{var}(x_i)$$

2. $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ の標本平均を (\bar{y}, \bar{x}) とする. 次の OLS 問題を考える.

$$\begin{aligned} \min_{a,b} \quad & \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 \\ \text{and} \quad & a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

OLS 問題の解を (a^*, b^*) , 回帰予測を $\hat{y}_i := a^* + b^*x_i$, 回帰残差を $e_i := y_i - \hat{y}_i$ とする.

(a) 総変動 (TSS), 回帰変動 (ESS), 残差変動 (RSS) をそれぞれ定義しなさい.

(b) 以下の式を証明しなさい.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n e_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i e_i &= 0 \end{aligned}$$

(c) $\bar{y} = a^* + b^*\bar{x}$ が成り立つことを示しなさい.

(d) $\text{TSS} = \text{ESS} + \text{RSS}$ が成り立つことを示しなさい.

解答例

1. (a) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} E(u_i|x_i) &= E(y_i - E(y_i|x_i)|x_i) \\ &= E(y_i|x_i) - E(y_i|x_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) 繰り返し期待値の法則と前問より

$$\begin{aligned} E(u_i) &= E(E(u_i|x_i)) \\ &= E(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) 繰り返し期待値の法則と前々問より

$$\begin{aligned} E(x_i u_i) &= E(E(x_i u_i|x_i)) \\ &= E(x_i E(u_i|x_i)) \\ &= E(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(d) 共分散の計算公式と前 2 問より

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_i, u_i) &= E(x_i u_i) - E(x_i) E(u_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(e) $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ より

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_i, y_i) &= \text{cov}(x_i, \alpha + \beta x_i + u_i) \\ &= \text{cov}(x_i, \alpha) + \text{cov}(x_i, \beta x_i) + \text{cov}(x_i, u_i) \end{aligned}$$

α は定数なので第 1 項は 0. 前問より第 3 項は 0. したがって

$$\begin{aligned} \text{cov}(x_i, y_i) &= \text{cov}(x_i, \beta x_i) \\ &= \beta \text{cov}(x_i, x_i) \\ &= \beta \text{var}(x_i) \end{aligned}$$

2. (a)

$$\text{TSS} := \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$\text{ESS} := \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$\text{RSS} := \sum_{i=1}^n e_i^2$$

(b) OLS 問題の 1 階の条件より

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a^* - b^* x_i) = 0$$
$$\sum_{i=1}^n x_i (y_i - a^* - b^* x_i) = 0$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0$$
$$\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$$

(c) 前問より

$$\begin{aligned}\bar{y} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i + e_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a^* + b^* x_i + e_i) \\ &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a^* + \sum_{i=1}^n b^* x_i + \sum_{i=1}^n e_i \right) \\ &= \frac{1}{n} \left(na^* + b^* \sum_{i=1}^n x_i \right) \\ &= a^* + b^* \bar{x}\end{aligned}$$

(d) 総変動は

$$\begin{aligned}\text{TSS} &:= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i + e_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{y}) + e_i]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2(\hat{y}_i - \bar{y})e_i + e_i^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + 2 \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})e_i + \sum_{i=1}^n e_i^2\end{aligned}$$

前 2 問より

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y}) e_i &= \sum_{i=1}^n [(a^* + b^* x_i) - (a^* + b^* \bar{x})] e_i \\ &= b^* \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) e_i \\ &= b^* \sum_{i=1}^n x_i e_i - b^* \bar{x} \sum_{i=1}^n e_i \\ &= 0\end{aligned}$$