計量分析 2：復習テスト 6

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2022 年 11 月 10 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を（左上で）ホチキス止めし，中間試験実施日（12 月 1 日の予定）にまとめて提出すること．

1. 2 変量データを $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ とする．y_i の x_i 上への単回帰モデルは

$$\mathrm{E}(y_i|x_i) = \alpha + \beta x_i$$

回帰の誤差項は $u_i := y_i - \mathrm{E}(y_i|x_i)$．以下の式を証明しなさい．

(a)

$$\mathrm{E}(u_i|x_i) = 0$$

(b)

$$\mathrm{E}(u_i) = 0$$

(c)

$$\mathrm{E}(x_i u_i) = 0$$

(d)

$$\mathrm{cov}(x_i, u_i) = 0$$

(e)

$$\mathrm{cov}(x_i, y_i) = \beta \, \mathrm{var}(x_i)$$

2. 次の OLS 問題を考える．

$$\begin{aligned} \min_{a,b} \quad & \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2 \\ \text{and} \quad & a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

OLS 問題の解を (a^*, b^*)，OLS 残差を $e_i := y_i - a^* - b^* x_i$ とする．また $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ の標本平均を $(\bar{y}, \bar{x})$ とする．以下の式を証明しなさい．

(a)

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

(b)

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})e_i = 0$$

(c)

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = b^{*2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

解答例

1.（a）期待値の線形性より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(u_i|x_i) &= \mathrm{E}(y_i - \mathrm{E}(y_i|x_i)|x_i) \\
&= \mathrm{E}(y_i|x_i) - \mathrm{E}(y_i|x_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（b）繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(u_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(u_i|x_i)) \\
&= \mathrm{E}(0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（c）繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(x_i u_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(x_i u_i|x_i)) \\
&= \mathrm{E}(x_i \, \mathrm{E}(u_i|x_i)) \\
&= \mathrm{E}(0) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（d）前 2 問より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(x_i, u_i) &= \mathrm{E}(x_i u_i) - \mathrm{E}(x_i)\,\mathrm{E}(u_i) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

（e）前問より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(x_i, y_i) &:= \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))(y_i - \mathrm{E}(y_i))) \\
&= \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))(\mathrm{E}(y_i|x_i) + u_i - \mathrm{E}(\mathrm{E}(y_i|x_i) + u_i))) \\
&= \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))(\alpha + \beta x_i + u_i - \mathrm{E}(\alpha + \beta x_i + u_i))) \\
&= \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))[\alpha + \beta x_i + u_i - (\alpha + \beta\,\mathrm{E}(x_i) + \mathrm{E}(u_i))]) \\
&= \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))[\beta(x_i - \mathrm{E}(x_i)) + u_i - \mathrm{E}(u_i)]) \\
&= \mathrm{E}\left(\beta(x_i - \mathrm{E}(x_i))^2 + (x_i - \mathrm{E}(x_i))(u_i - \mathrm{E}(u_i))\right) \\
&= \beta\,\mathrm{E}\left((x_i - \mathrm{E}(x_i))^2\right) + \mathrm{E}((x_i - \mathrm{E}(x_i))(u_i - \mathrm{E}(u_i))) \\
&= \beta\,\mathrm{var}(x_i) + \mathrm{cov}(x_i, u_i) \\
&= \beta\,\mathrm{var}(x_i)
\end{aligned}
$$

2.（a）1 階の条件より

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(y_i - a^* - b^* x_i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^{n} x_i(y_i - a^* - b^* x_i) &= 0
\end{aligned}
$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

（b）

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})e_i &= \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - \bar{x}\sum_{i=1}^{n} e_i \\ &= 0\end{aligned}$$

（c） $y_i = a^* + b^* x_i + e_i$ より

$$\begin{aligned}\bar{y} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a^* + b^* x_i + e_i) \\ &= a^* + b^* \bar{x}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^{n}[b^*(x_i - \bar{x}) + e_i]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[{b^*}^2(x_i - \bar{x})^2 + 2b^*(x_i - \bar{x})e_i + e_i^2\right] \\ &= {b^*}^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2b^*\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})e_i + \sum_{i=1}^{n} e_i^2\end{aligned}$$

第 2 項は 0.