

## 計量分析 2：復習テスト 3

学籍番号\_\_\_\_\_氏名\_\_\_\_\_

2023 年 10 月 10 日

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1～8 をまとめて左上でホチキス止めし、中間試験実施日（11 月 28 日の予定）に提出すること。

1. 次の確率変数を考える。

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

- (a)  $X$  の累積分布関数を式とグラフで表しなさい。

- (b)  $X$  の確率質量関数を式とグラフで表しなさい。

2. 次の確率変数を考える。

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } p \\ 0 & \text{with pr. } 1 - p \end{cases}$$

- (a)  $E(X)$  を求めなさい。

- (b)  $E(X^2)$  を求めなさい。

- (c)  $\text{var}(X)$  を求めなさい。

3. 確率変数  $X$  について以下の公式が成り立つことを示しなさい.

(a) 線形変換の期待値 (期待値の線形性)

$$E(aX + b) = a E(X) + b$$

(b) 線形変換の分散

$$\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$$

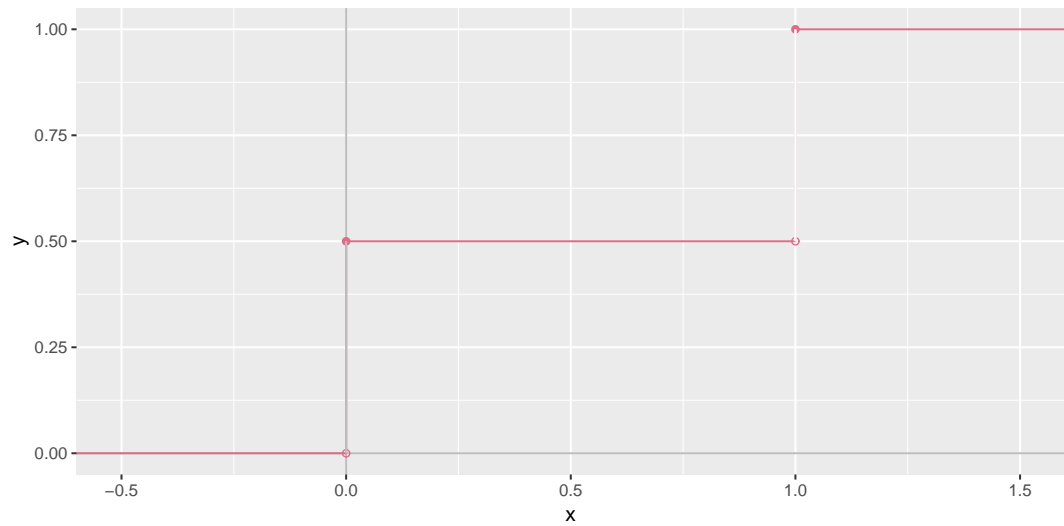
(c) 分散の計算公式

$$\text{var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

解答例

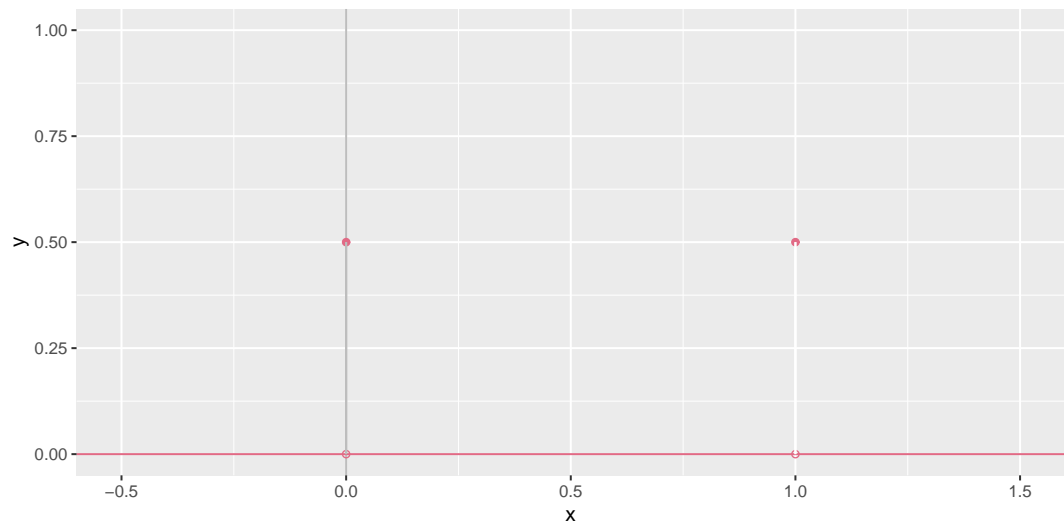
1. (a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1/2 & \text{for } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{for } 1 \leq x \end{cases}$$



(b)

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } x = 0, 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



2. (a)

$$\begin{aligned} E(X) &:= 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) \\ &= p \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &:= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) \\ &= p \end{aligned}$$

(c)  $\mathbb{E}(X) = p$  より

$$\begin{aligned} \text{var}(X) &:= (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) \\ &= p(1-p)^2 + p^2(1-p) \\ &= p(1-p)[(1-p) + p] \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

3. (a)  $X$  が離散なら

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + b) &:= \sum_x (ax + b)p_X(x) \\ &= \sum_x (axp_X(x) + bp_X(x)) \\ &= \sum_x axp_X(x) + \sum_x bp_X(x) \\ &= a \sum_x xp_X(x) + b \sum_x p_X(x) \\ &= a\mathbb{E}(X) + b \end{aligned}$$

$X$  が連続なら

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(aX + b) &:= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f_X(x) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (axf_X(x) + bf_X(x)) \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} axf_X(x) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf_X(x) \, dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) \, dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, dx \\ &= a\mathbb{E}(X) + b \end{aligned}$$

(b) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + b) &:= \mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2) \\ &= \mathbb{E}([aX + b - (a\mathbb{E}(X) + b)]^2) \\ &= \mathbb{E}([a(X - \mathbb{E}(X))]^2) \\ &= \mathbb{E}(a^2(X - \mathbb{E}(X))^2) \\ &= a^2 \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\ &= a^2 \text{var}(X) \end{aligned}$$

(c) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &:= \mathrm{E} \left( (X - \mu_X)^2 \right) \\ &= \mathrm{E} \left( X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2 \right) \\ &= \mathrm{E} \left( X^2 \right) - 2\mu_X \mathrm{E}(X) + \mu_X^2 \\ &= \mathrm{E} \left( X^2 \right) - 2\mu_X^2 + \mu_X^2 \\ &= \mathrm{E} \left( X^2 \right) - \mu_X^2\end{aligned}$$