

## 第4回 多変量分布と統計的推測に必要な分布 (3.3, 3.5)

村澤 康友

2023年5月2日

### 今日のポイント

1.  $(X, Y)$  の同時 cdf は  $F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$ .  $X$  または  $Y$  のみの cdf を周辺 cdf という.  $(X, Y)$  の同時 pmf は  $p_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$ .  $X$  または  $Y$  のみの pmf を周辺 pmf という. 多重積分すると同時 cdf が得られる関数 (同時 cdf の交差偏導関数) を同時 pdf という.
2.  $g(X, Y)$  の期待値は, 離散なら  $\sum_x \sum_y g(x, y) p_{X,Y}(x, y)$ , 連続なら  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$ .  $X$  と  $Y$  の共分散は  $\text{cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$ . 標準化した確率変数の共分散を相関係数という.
3.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件つき pdf は  $f_{X|Y}(x|Y = y) := f_{X,Y}(x, y)/f_Y(y)$ .  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件つき期待値は  $\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y = y) dx$ .  $f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$  なら  $X$  と  $Y$  は独立という.
4. 測定誤差は正規分布にしたがう. 正規分布の線形変換も正規分布であり, 標準化した正規分布を標準正規分布という.
5.  $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$  が独立のとき,  $Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$ .  $Z \sim N(0, 1)$  と  $X \sim \chi^2(n)$  が独立のとき,  $Z/\sqrt{X/n} \sim t(n)$ .  $U \sim \chi^2(m)$  と  $V \sim \chi^2(n)$  が独立のとき,  $(U/m)/(V/n) \sim F(m, n)$ .

### 目次

1	同時分布と周辺分布	1
1.1	累積分布関数 . . . . .	1
1.2	確率質量関数 (p. 50) . . . . .	2
1.3	確率密度関数 . . . . .	2
2	積率	2
2.1	期待値 . . . . .	2
2.2	共分散 (p. 50) . . . . .	2
2.3	相関係数 (p. 51) . . . . .	2
3	条件つき分布と確率変数の独立性	3
3.1	条件つき分布 (p. 54) . . . . .	3
3.2	確率変数の独立性 (p. 52) . . . . .	3
4	統計的推測に必要な分布	4
4.1	正規分布 (p. 64) . . . . .	4
4.2	$\chi^2$ 分布 (p. 67) . . . . .	4
4.3	t 分布 (p. 69) . . . . .	5
4.4	F 分布 (p. 70) . . . . .	5
5	今日のキーワード	5
6	次回までの準備	5

### 1 同時分布と周辺分布

#### 1.1 累積分布関数

$(X, Y)$  を確率ベクトルとする.

**定義 1.**  $(X, Y)$  の同時 (結合) cdf は, 任意の  $(x, y)$  について

$$F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \leq x, Y \leq y]$$

**定義 2.**  $X$  の周辺 cdf は, 任意の  $x$  について

$$F_X(x) := \Pr[X \leq x]$$

注 1. 同時 cdf と周辺 cdf の関係は

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \leq x] \\ &= \Pr[X \leq x, Y < \infty] \\ &= F_{X,Y}(x, \infty) \end{aligned}$$

### 1.2 確率質量関数 (p. 50)

$(X, Y)$  を離散確率ベクトルとする.

**定義 3.**  $(X, Y)$  の同時 (結合) pmf は, 任意の  $(x, y)$  について

$$p_{X,Y}(x, y) := \Pr[X = x, Y = y]$$

**定義 4.**  $X$  の周辺 pmf は, 任意の  $x$  について

$$p_X(x) := \Pr[X = x]$$

注 2. 同時 pmf と周辺 pmf の関係は

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$$

### 1.3 確率密度関数

$(X, Y)$  を連続確率ベクトルとする.

**定義 5.** 任意の  $(x, y)$  について

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) \, ds \, dt$$

となる  $f_{X,Y}(\cdot, \cdot)$  を  $(X, Y)$  の同時 (結合) pdf という.

注 3. 任意の  $a, b, c, d$  について

$$\begin{aligned} \Pr[a < X \leq b, c < Y \leq d] \\ &= \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \end{aligned}$$

注 4.  $F_{X,Y}(\cdot, \cdot)$  が微分可能なら

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x, y)$$

**定義 6.**  $X$  の周辺 pdf は, 任意の  $x$  について

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, dy$$

## 2 積率

### 2.1 期待値

**定義 7.**  $g(X, Y)$  の期待値は

$$\begin{aligned} E(g(X, Y)) \\ &:= \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x, y) p_{X,Y}(x, y) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy & (\text{連続}) \end{cases} \end{aligned}$$

**定理 1** (期待値の線形性).

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

証明. 復習テスト. □

### 2.2 共分散 (p. 50)

**定義 8.**  $X$  と  $Y$  の共分散は

$$\text{cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

注 5.  $\sigma_{XY}$  と表す.

注 6.  $X$  が大きいと  $Y$  も大きいなら共分散は正,  $X$  が大きいと  $Y$  は小さいなら共分散は負.

**定理 2.**

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

証明. 復習テスト. □

**定理 3.**

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + bY) &= a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) \\ &\quad + b^2 \text{var}(Y) \end{aligned}$$

証明. 復習テスト. □

### 2.3 相関係数 (p. 51)

**定義 9.** 確率変数から平均を引き標準偏差で割る変換を標準化という.

注 7. 式で表すと

$$Z := \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

$E(Z) = 0$ ,  $\text{var}(Z) = 1$  となる.

**定義 10.** 標準化した確率変数の共分散を相関係数という.

注 8.  $X$  と  $Y$  の関係の強さを表す.

注 9.  $\rho_{XY}$  と表す. すなわち

$$\begin{aligned}\rho_{XY} &:= \text{cov}\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X}, \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= E\left(\frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}\end{aligned}$$

定義 11.  $\rho_{XY} = 0$  なら  $X$  と  $Y$  は無相関という.

定理 4 (コーシー=シュワルツの不等式).

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \text{var}(X)^{1/2} \text{var}(Y)^{1/2}$$

証明. 省略. □

系 1.

$$|\rho_{XY}| \leq 1$$

### 3 条件つき分布と確率変数の独立性

#### 3.1 条件つき分布 (p. 54)

定義 12.  $Y \leq y$  が与えられたときの  $X$  の条件つき cdf は, 任意の  $x$  について

$$F_{X|Y}(x|Y \leq y) := \frac{F_{X,Y}(x, y)}{F_Y(y)}$$

注 10. 条件つき確率で定義する.

定義 13.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件つき pmf は, 任意の  $x$  について

$$p_{X|Y}(x|Y = y) := \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

定義 14.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件つき pdf は, 任意の  $x$  について

$$f_{X|Y}(x|Y = y) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$$

注 11. 条件つき確率と同様に定義する.

定義 15.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件つき期待値は

$$\begin{aligned}E(X|Y = y) &:= \begin{cases} \sum_x x p_{X|Y}(x|Y = y) & (\text{離散}) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y = y) dx & (\text{連続}) \end{cases}\end{aligned}$$

定義 16.  $Y = y$  が与えられたときの  $X$  の条件つき分散は

$$\text{var}(X|Y = y) := E((X - E(X|Y = y))^2|Y = y)$$

定理 5 (繰り返し期待値の法則).

$$E(E(X|Y)) = E(X)$$

証明.

$$\begin{aligned}E(E(X|Y)) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} dx f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= E(X)\end{aligned}$$

□

#### 3.2 確率変数の独立性 (p. 52)

定義 17. 任意の  $(x, y)$  について

$$f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$$

なら  $X$  と  $Y$  は独立という.

注 12. 条件つき pdf の定義より

$$\begin{aligned}f_{X|Y}(x|Y = y) &= f_X(x) \\ \iff f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x) f_Y(y)\end{aligned}$$

定義 18. 任意の  $(x_1, \dots, x_n)$  について

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

なら  $X_1, \dots, X_n$  は独立という.

注 13. cdf で定義してもよい.

定理 6.  $X$  と  $Y$  が独立なら, 任意の  $f(\cdot)$  と  $g(\cdot)$  について

$$E(f(X)g(Y)) = E(f(X))E(g(Y))$$

証明.  $(X, Y)$  が連続なら

$$\begin{aligned} E(f(X)g(Y)) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)f_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f_Y(y) dy \\ &= E(f(X))E(g(Y)) \end{aligned}$$

離散の場合も同様.

系 2.  $X$  と  $Y$  が独立なら

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

証明. 復習テスト.

注 14. すなわち独立なら無相関. 逆は必ずしも成立しない.

## 4 統計的推測に必要な分布

### 4.1 正規分布 (p. 64)

定義 19. 正規分布の pdf は

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

注 15.  $N(\mu, \sigma^2)$  と書く.

例 1. 測定誤差, 標本平均 (中心極限定理).

定義 20.  $N(0, 1)$  を標準正規分布という.

注 16.  $N(0, 1)$  の cdf を  $\Phi(\cdot)$ , pdf を  $\phi(\cdot)$  で表す.  
すなわち

$$\begin{aligned} \phi(x) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \\ \Phi(x) &:= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \end{aligned}$$

例 2.  $N(0, 1)$  の cdf と pdf は図 1 の通り.

定理 7.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  なら

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu \\ \text{var}(X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

証明. 省略.

定理 8.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  なら

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

証明. 省略.

系 3.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  なら

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

証明. 前の定理で  $a := 1/\sigma$ ,  $b := -\mu/\sigma$  とする.

注 17. したがって  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  の累積確率は標準正規分布表から求まる. すなわち

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \leq x] \\ &= \Pr\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

ただし  $\Phi(\cdot)$  でなく  $Q(\cdot) := 1 - \Phi(\cdot)$  の表の場合も多い.

例 3.  $X \sim N(1, 9)$  について  $\Pr[X \leq 2]$  を求める.  
 $(X - 1)/3 \sim N(0, 1)$  より

$$\begin{aligned} \Pr[X \leq 2] &= \Pr\left[\frac{X - 1}{3} \leq \frac{2 - 1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - Q\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - .3707 \\ &= .6293 \end{aligned}$$

### 4.2 $\chi^2$ 分布 (p. 67)

定義 21.  $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$  が独立のとき  $Z_1^2 + \dots + Z_n^2$  の分布を自由度  $n$  の  $\chi^2$  分布という.

注 18.  $\chi^2(n)$  と書く.

注 19. 累積確率は  $\chi^2$  分布表を参照.

例 4.  $\chi^2(n)$  の pdf の例は図 2 の通り.

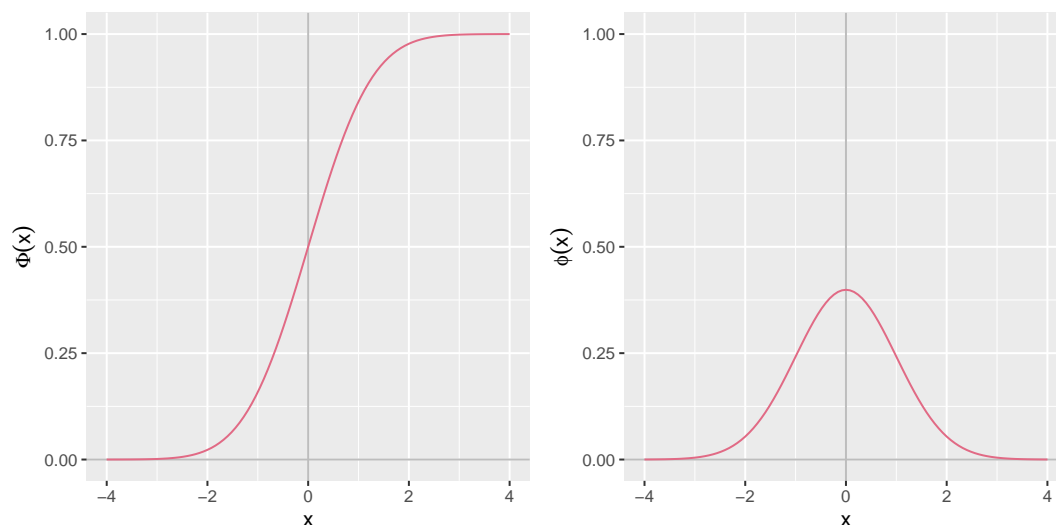


図1  $N(0,1)$  の cdf と pdf

**定理 9.**  $X \sim \chi^2(n)$  なら

$$E(X) = n$$

証明.  $X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$  とすると

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \\ &= E(Z_1^2) + \dots + E(Z_n^2) \\ &= \text{var}(Z_1) + \dots + \text{var}(Z_n) \\ &= n \end{aligned}$$

□

#### 4.3 t 分布 (p. 69)

**定義 22.**  $Z \sim N(0,1)$  と  $X \sim \chi^2(n)$  が独立のとき  $Z/\sqrt{X/n}$  の分布を **自由度  $n$  の  $t$  分布** という.

注 20.  $t(n)$  と書く.

注 21. 累積確率は  $t$  分布表を参照.

注 22.  $t(1)$  はコーシー分布,  $t(\infty)$  は  $N(0,1)$ .

**例 5.**  $t(n)$  の pdf の例は図 3 の通り.

#### 4.4 F 分布 (p. 70)

**定義 23.**  $U \sim \chi^2(m)$  と  $V \sim \chi^2(n)$  が独立のとき  $(U/m)/(V/n)$  の分布を **自由度  $(m,n)$  の  $F$  分布** という.

注 23.  $F(m,n)$  と書く.

注 24. 累積確率は  $F$  分布表を参照.

注 25.  $X \sim F(m,n)$  なら  $1/X \sim F(n,m)$ .

注 26.  $t \sim t(n)$  なら  $t^2 \sim F(1,n)$ .

**例 6.**  $F$  分布の pdf の例は図 4 の通り.

## 5 今日のキーワード

同時 (結合) cdf, 周辺 cdf, 同時 (結合) pmf, 周辺 pmf, 同時 (結合) pdf, 周辺 pdf, 期待値, 共分散, 標準化, 相関係数, 無相関, 条件つき cdf, 条件つき pmf, 条件つき pdf, 条件つき期待値, 条件つき分散, 繰り返し期待値の法則, 独立, 正規分布, 標準正規分布,  $\chi^2$  分布,  $t$  分布,  $F$  分布

## 6 次回までの準備

**提出** 宿題 2

**復習** 教科書第 3 章 3, 5 節, 復習テスト 4

**予習** 教科書第 4 章

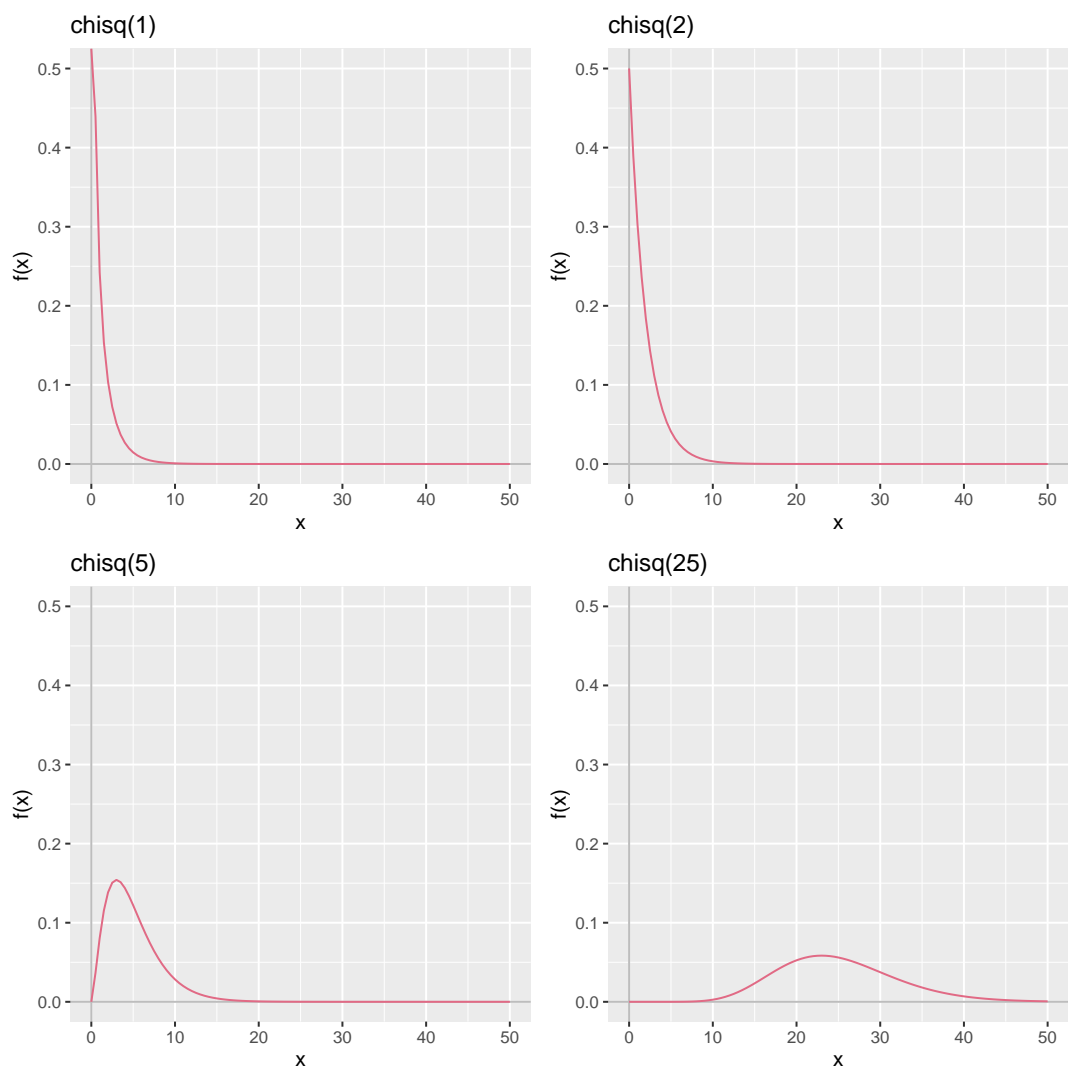


図2  $\chi^2(n)$  の pdf の例

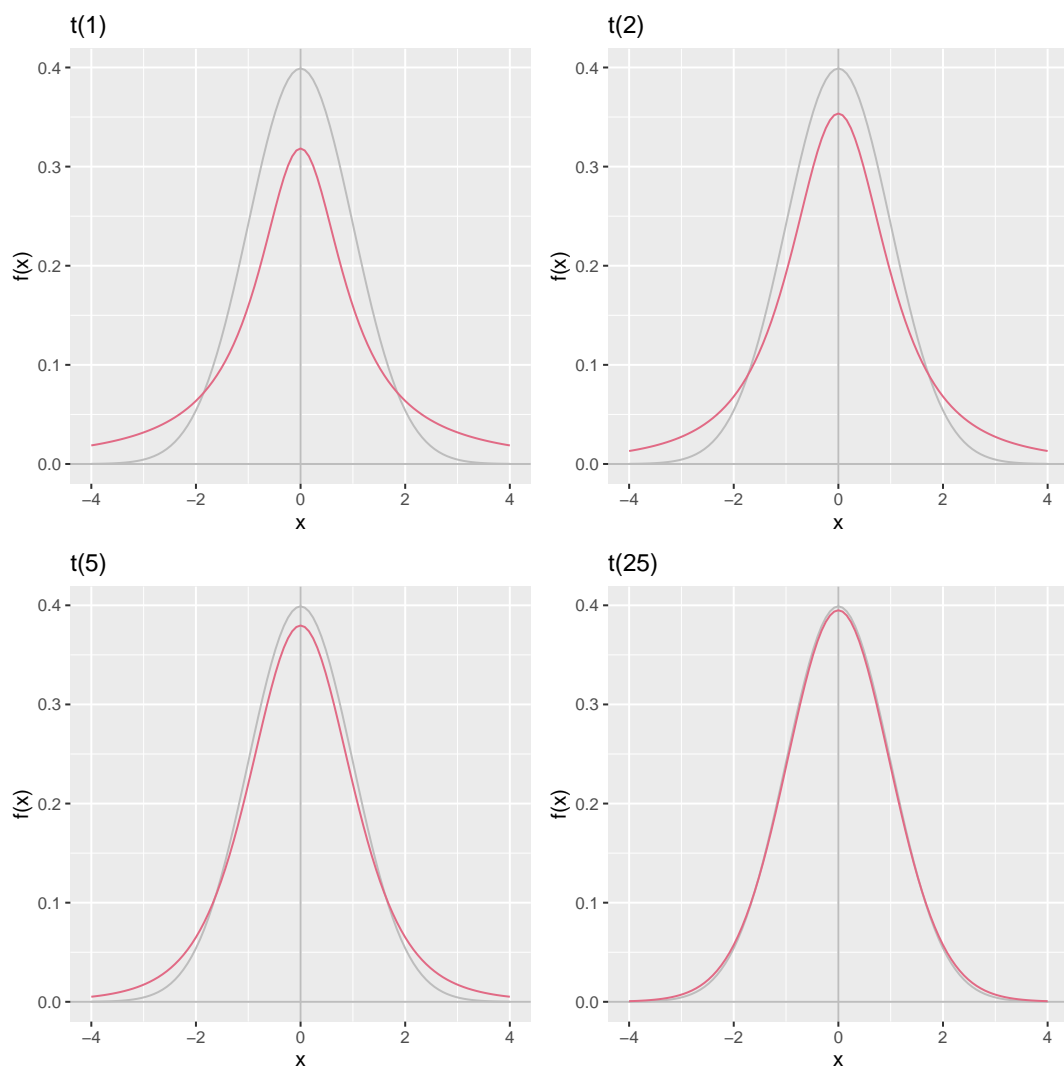


図3  $t(n)$  の pdf の例

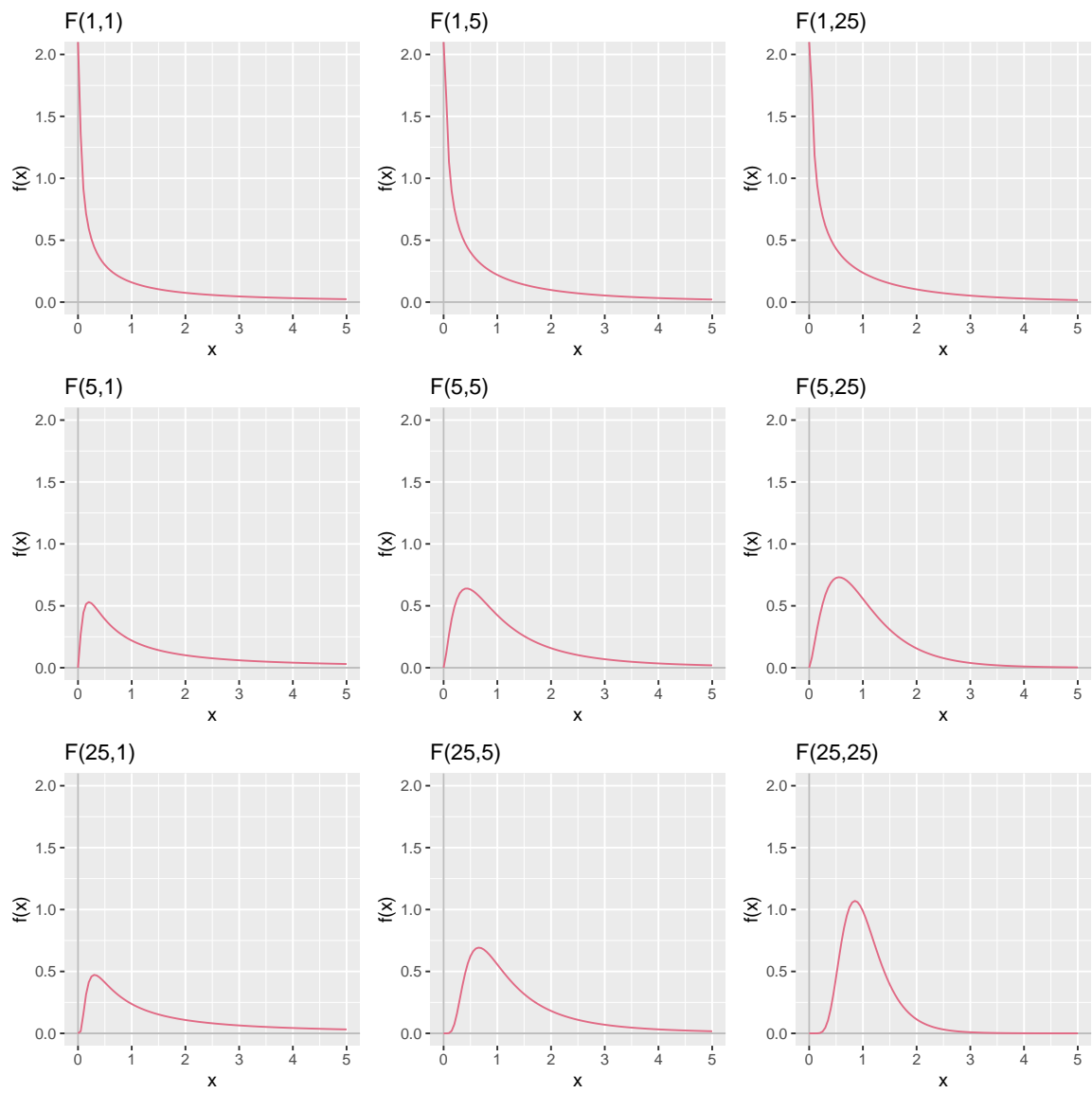


図4 F 分布の pdf の例