

計量分析 2：復習テスト 4

学籍番号_____氏名_____

2023 年 10 月 17 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 1～8 をまとめて左上でホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 28 日の予定）に提出すること。

1. (X, Y) を確率ベクトルとする。以下の公式を示しなさい。

(a) 線形変換の期待値（期待値の線形性）

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

(b) 線形変換の分散

$$\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y)$$

(c) 共分散の計算公式

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

2. (X, Y) を確率ベクトルとする. 以下の命題を証明しなさい.

(a) 繰返し期待値の法則

$$E(E(X|Y)) = E(X)$$

(b)

$$E(X|Y) = 0 \implies E(XY) = 0$$

(c)

$$E(X|Y) = 0 \implies \text{cov}(X, Y) = 0$$

3. X と Y は独立とする. このとき以下の式が成り立つことを示しなさい.

(a)

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

(b)

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

(c)

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

解答例

1. (a) (X, Y) が離散なら

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &:= \sum_x \sum_y (ax + by)p_{X,Y}(x, y) \\ &= \sum_x \sum_y (axp_{X,Y}(x, y) + byp_{X,Y}(x, y)) \\ &= \sum_x \sum_y axp_{X,Y}(x, y) + \sum_x \sum_y byp_{X,Y}(x, y) \\ &= a \sum_x \sum_y xp_{X,Y}(x, y) + b \sum_x \sum_y yp_{X,Y}(x, y) \\ &= aE(X) + bE(Y) \end{aligned}$$

(X, Y) が連続なら

$$\begin{aligned} E(aX + bY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by)f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (axf_{X,Y}(x, y) + byf_{X,Y}(x, y)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} axf_{X,Y}(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} byf_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf_{X,Y}(x, y) dx dy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= aE(X) + bE(Y) \end{aligned}$$

※離散・連続のどちらか一方でよい.

(b) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} \text{var}(aX + bY) &:= E((aX + bY - E(aX + bY))^2) \\ &= E([aX + bY - (aE(X) + bE(Y))]^2) \\ &= E([a(X - E(X)) + b(Y - E(Y))]^2) \\ &= E(a^2(X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2(Y - E(Y))^2) \\ &= a^2 E((X - E(X))^2) + 2ab E((X - E(X))(Y - E(Y))) + b^2 E((Y - E(Y))^2) \\ &= a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y) \end{aligned}$$

(c) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &:= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

※ $\mu_X := E(X)$, $\mu_Y := E(Y)$ として計算すると分かりやすい.

2. (a) 条件付き期待値と条件付き分布の定義より, (X, Y) が離散なら

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &:= \sum_x \left(\sum_y x p_{X|Y}(x|y) \right) p_Y(y) \\ &= \sum_x \sum_y x \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} p_Y(y) \\ &= \sum_x \sum_y x p_{X,Y}(x,y) \\ &= E(X) \end{aligned}$$

(X, Y) が連続なら

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx \right) f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= E(X) \end{aligned}$$

※離散・連続のどちらか一方でよい.

- (b) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} E(XY) &= E(E(XY|Y)) \\ &= E(E(X|Y)Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- (c) 共分散の計算公式より

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) E(Y)$$

前問より第 1 項は 0. 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X|Y)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって第 2 項も 0.

3. (a) 独立性の定義より, (X, Y) が離散なら

$$\begin{aligned} E(XY) &:= \sum_x \sum_y xy p_{X,Y}(x,y) \\ &= \sum_x \sum_y xy p_X(x) p_Y(y) \\ &= \sum_x x p_X(x) \sum_y y p_Y(y) \\ &= E(X) E(Y) \end{aligned}$$

(X, Y) が連続なら

$$\begin{aligned} E(XY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) \, dx \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx \right) y f_Y(y) \, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \, dy \\ &= E(X) E(Y) \end{aligned}$$

※離散・連続のどちらか一方でよい.

(b) 共分散の計算公式と前問の結果より

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X) E(Y) \\ &= E(X) E(Y) - E(X) E(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(c) 線形変換の分散の公式と前問の結果より

$$\begin{aligned} \text{var}(X + Y) &= \text{var}(X) + 2 \text{cov}(X, Y) + \text{var}(Y) \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) \end{aligned}$$