

計量経済 I：復習テスト 2

学籍番号 _____ 氏名 _____

2023 年 4 月 18 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1～8 を（左上で）ホチキス止めし、中間試験実施日（6 月 6 日の予定）にまとめて提出すること。

1. データを (x_1, \dots, x_n) とする。

(a) $y_i := ax_i + b$ と一次変換すると、

$$\mu_y = a\mu_x + b$$

$$\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$$

となることを示しなさい。ただし μ_x, μ_y は平均、 σ_x^2, σ_y^2 は分散を表す。

(b) 上の結果を利用して、 $z_i := (x_i - \mu_x)/\sigma_x$ と標準化すると、平均が 0、分散が 1 となることを示しなさい。

2. 1 変量データ (x_1, \dots, x_n) の平均を μ , 分散を σ^2 とする.

(a) σ^2 の定義を式で書きなさい.

(b) σ^2 が次のようにも書けることを示しなさい.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2$$

3. 2 変量データ $((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n))$ の平均を μ_x, μ_y , 分散を σ_x^2, σ_y^2 , 共分散を σ_{xy} , 相関係数を ρ_{xy} とする.

(a) σ_{xy} の定義を式で書きなさい.

(b) σ_{xy} が次のようにも書けることを示しなさい.

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \mu_x \mu_y$$

(c) ρ_{xy} の定義を式で書きなさい.

(d) ρ_{xy} が次のように書けることを示しなさい.

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\mu_y &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \\&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n ax_i + \sum_{i=1}^n b \right) \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ax_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b \\&= a \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + b \\&= a\mu_x + b \\ \sigma_y^2 &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \mu_y)^2 \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(ax_i + b) - (a\mu_x + b)]^2 \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [a(x_i - \mu_x)]^2 \\&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a^2(x_i - \mu_x)^2 \\&= a^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)^2 \\&= a^2 \sigma_x^2\end{aligned}$$

(b) $z_i := (x_i - \mu_x)/\sigma_x = (1/\sigma_x)x_i - \mu_x/\sigma_x$ と書けるから, $a = 1/\sigma_x$, $b = -\mu_x/\sigma_x$ と置くと,

$$\begin{aligned}\mu_z &= a\mu_x + b \\&= \frac{1}{\sigma_x} \mu_x - \frac{\mu_x}{\sigma_x} \\&= 0 \\ \sigma_z^2 &= a^2 \sigma_x^2 \\&= \left(\frac{1}{\sigma_x} \right)^2 \sigma_x^2 \\&= 1\end{aligned}$$

2. (a)

$$\sigma^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n 2x_i\mu + \sum_{i=1}^n \mu^2 \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2x_i\mu + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \mu^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2
\end{aligned}$$

3. (a)

$$\sigma_{xy} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i - x_i \mu_y - \mu_x y_i + \mu_x \mu_y) \\
&= \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \mu_y - \sum_{i=1}^n \mu_x y_i + \sum_{i=1}^n \mu_x \mu_y \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \mu_y - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_x y_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu_x \mu_y \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mu_y - \mu_x \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i + \mu_x \mu_y \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \mu_x \mu_y - \mu_x \mu_y + \mu_x \mu_y \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \mu_x \mu_y
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\rho_{xy} &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \\ &= \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} \\ &= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\end{aligned}$$