経済統計：前期第 2 回中間試験

村澤 康友

2011 年 6 月 6 日

注意：3 問とも解答すること．

1. (20 点) 以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) ベルヌーイ試行
   (b) 相関係数
   (c) 条件つき分散
   (d) 確率収束
2. (30 点) サイコロを転がして出た目の枚数のコインを投げる実験を考える．サイコロの目を X，コインの「表」の枚数を Y とする．以下の問いに答えなさい．
   (a) (X, Y) の同時確率関数を次の表の形で書きなさい．

$X\backslash Y$	0	1	2	3	4	5	6
1							
2							
3							
4							
5							
6							

   (b) Y の周辺確率関数を式とグラフで書きなさい．
   (c) $Y = 3$ のときの X の条件つき確率関数を式とグラフで書きなさい．
3. (50 点) 某大学の「経済学入門」の試験は○×問題であり，100 問中 6 割以上の正答で合格となる．A 君は一度も授業に出席しておらず，問題文すら理解できないが，コイントス（または鉛筆ころがし）で○×を選び，あわよくば合格しようと考えている．A 君の正答数を X とする．
   (a) X はどのような分布をするか？分布の名称と母数（分布の形を決める数値）で答えなさい．
   (b) X の確率関数を式で書きなさい．
   (c) X の平均と分散を求めなさい（ヒント：100 回の独立なベルヌーイ試行と考える）．
   (d) $\Pr[X \geq 60]$ の厳密な計算は難しいが，正規分布で近似して求めることができる．標準正規分布表を利用して A 君が合格する確率を近似的に求めなさい．
   (e) 出題数を 25 問として A 君が合格する確率を近似的に求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 結果が 2 通りしかない試行.
   (b) 標準化した確率変数の共分散.
       - $\sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y)$ でも OK.
   (c) $Y=y$ が与えられたときの X の条件つき分散は
$$\operatorname{var}(X|Y=y) := \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X|Y=y))^2|Y=y\right).$$
       - 「条件つき分布の分散」でも OK.
   (d) 任意の $\epsilon>0$ について
$$\lim_{n\to\infty}\Pr[|X_n-c|<\epsilon]=1$$
   なら $\{X_n\}$ は c に確率収束.
       - 「大数の法則」はダメ.
2. 多変量分布
   (a) (X,Y) の同時確率関数は

$X\backslash Y$	0	1	2	3	4	5	6
1	1/12	1/12	0	0	0	0	0
2	1/24	2/24	1/24	0	0	0	0
3	1/48	3/48	3/48	1/48	0	0	0
4	1/96	4/96	6/96	4/96	1/96	0	0
5	1/192	5/192	10/192	10/192	5/192	1/192	0
6	1/384	6/384	15/384	20/384	15/384	6/384	1/384

   または

$X\backslash Y$	0	1	2	3	4	5	6
1	1/12	1/12	0	0	0	0	0
2	1/24	1/12	1/24	0	0	0	0
3	1/48	1/16	1/16	1/48	0	0	0
4	1/96	1/24	1/16	1/24	1/96	0	0
5	1/192	5/192	5/96	5/96	5/192	1/192	0
6	1/384	1/64	5/128	5/96	5/128	1/64	1/384

       - 同時確率でなければ 0 点.
   (b) Y の周辺確率関数は
$$p_Y(y)=\begin{cases}21/128 & \text{for } y=0\\ 5/16 & \text{for } y=1\\ 33/128 & \text{for } y=2\\ 1/6 & \text{for } y=3\\ 29/384 & \text{for } y=4\\ 1/48 & \text{for } y=5\\ 1/384 & \text{for } y=6\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}.$$

なお $y = 1, \dots, 6$ について

$$
\begin{aligned}
p_Y(y) &:= \Pr[Y = y] \\
&= \sum_{x=1}^{6} \Pr[X = x, Y = y] \\
&= \sum_{x=1}^{6} \Pr[Y = y|X = x] \Pr[X = x] \\
&= \sum_{x=1}^{6} {}_xC_y \left(\frac{1}{2}\right)^y \left(\frac{1}{2}\right)^{x-y} \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6} \sum_{x=1}^{6} \frac{{}_xC_y}{2^x}.
\end{aligned}
$$

グラフは省略.

- 式で 5 点，グラフで 5 点.
- 前問の解答と整合的なら OK.

(c) $Y = 3$ のときの X の条件つき確率関数は

$$
p_{X|Y}(x|Y = 3) = \begin{cases} 1/8 & \text{for } x = 3 \\ 1/4 & \text{for } x = 4 \\ 5/16 & \text{for } x = 5 \\ 5/16 & \text{for } x = 6 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}.
$$

なお $x = 3, \dots, 6$ について

$$
\begin{aligned}
p_{X|Y}(x|Y = 3) &:= \frac{\Pr[X = x, Y = 3]}{\Pr[Y = 3]} \\
&= \frac{\Pr[Y = 3|X = x] \Pr[X = x]}{\Pr[Y = 3]} \\
&= \frac{{}_xC_3 (1/2)^3 (1/2)^{x-3} (1/6)}{1/6} \\
&= \frac{{}_xC_3}{2^x}.
\end{aligned}
$$

グラフは省略.

- 式で 5 点，グラフで 5 点.
- この問題では $\Pr[X = x] = \Pr[Y = 3]$ なので，たまたま $\Pr[X = x|Y = 3] = \Pr[Y = 3|X = x]$ となっています．一般には $\Pr[X = x|Y = 3] \neq \Pr[Y = 3|X = x]$ なので，間違ったやり方（右辺）で正解を得た方はご注意下さい.

3. 2 項分布と正規分布

(a) $X \sim \mathrm{Bin}(100, 1/2)$.

- 「2 項分布」で 5 点，母数で 5 点.

(b) X の確率関数は

$$
p_X(x) = \begin{cases} {}_{100}C_x / 2^{100} & \text{for } x = 0, \dots, 100 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}.
$$

（c）第 i 問の正解／不正解を次の確率変数で表す．

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{正解} \\ 0 & \text{不正解} \end{cases}.$$

$X_i \sim \mathrm{Bin}(1, 1/2)$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_i) &= \frac{1}{2}, \\ \mathrm{var}(X_i) &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

$X = X_1 + \cdots + X_{100}$ より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_{100}) \\ &= \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_{100}) \\ &= \frac{100}{2} \\ &= 50. \end{aligned}$$

また $X_1, \dots, X_{100}$ は独立なので

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_{100}) \\ &= \mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_{100}) \\ &= \frac{100}{4} \\ &= 25. \end{aligned}$$

- 平均で 5 点，分散で 5 点．

（d）$X \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(50, 25)$ とすると

$$\begin{aligned} \Pr[X \geq 60] &= \Pr\left[\frac{X - 50}{5} \geq \frac{60 - 50}{5}\right] \\ &\approx \Pr[Z \geq 2]. \end{aligned}$$

ただし $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$．標準正規分布表より $\Pr[Z \geq 2] \approx .022750$.

- 前問の解答と整合的なら OK．

（e）$X \sim \mathrm{Bin}(25, 1/2)$ なら

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_{25}) \\ &= \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_{25}) \\ &= \frac{25}{2} \\ &= 12.5, \\ \mathrm{var}(X) &= \mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_{25}) \\ &= \mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_{25}) \\ &= \frac{25}{4} \\ &= 6.25. \end{aligned}$$

$X \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(12.5, 6.25)$ とすると

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 15] &= \Pr\left[\frac{X - 12.5}{2.5} \geq \frac{15 - 12.5}{2.5}\right] \\ &\approx \Pr[Z \geq 1],\end{aligned}$$

ただし $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$．標準正規分布表より $\Pr[Z \geq 1] \approx .15866$.

※答案は返却します．採点や成績に関する質問にも応じます．**オフィスアワーの時間（月水木金の昼休み）に**研究室まで来てください．