

## 中級統計学：復習テスト 11

学籍番号\_\_\_\_\_氏名\_\_\_\_\_

2024 年 10 月 29 日

**注意：**すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～13 を順に重ねて左上でホチキス止めし、第 2 回中間試験実施日（11 月 12 日の予定）に提出すること。

1.  $(X, Y)$  を確率ベクトルとする。以下の公式を示しなさい。

(a)

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

(b)

$$\text{var}(aX + bY) = a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y)$$

(c)

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

2.  $(X, Y)$  を確率ベクトルとする.

(a)  $X$  と  $Y$  の独立性の定義を書きなさい.

(b)  $X$  と  $Y$  は独立とする. このとき以下の式が成り立つことを示しなさい.

i.

$$E(XY) = E(X) E(Y)$$

ii.

$$\text{cov}(X, Y) = 0$$

iii.

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$$

解答例

1. (a)  $(X, Y)$  が連続なら

$$\begin{aligned}
 E(aX + bY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by) f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax f_{X,Y}(x, y) + by f_{X,Y}(x, y)) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} ax f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} by f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\
 &= a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy + b \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\
 &= a E(X) + b E(Y)
 \end{aligned}$$

離散の場合も同様.

(b) 前問の結果 (期待値の線形性) より

$$\begin{aligned}
 \text{var}(aX + bY) &:= E((aX + bY - E(aX + bY))^2) \\
 &= E([aX + bY - (aE(X) + bE(Y))])^2) \\
 &= E((aX - aE(X) + bY - bE(Y))^2) \\
 &= E([a(X - E(X)) + b(Y - E(Y))]^2) \\
 &= E(a^2(X - E(X))^2 + 2ab(X - E(X))(Y - E(Y)) + b^2(Y - E(Y))^2) \\
 &= a^2 E((X - E(X))^2) + 2ab E((X - E(X))(Y - E(Y))) + b^2 E((Y - E(Y))^2) \\
 &= a^2 \text{var}(X) + 2ab \text{cov}(X, Y) + b^2 \text{var}(Y)
 \end{aligned}$$

(c)  $\mu_X := E(X)$ ,  $\mu_Y := E(Y)$  とすると, 期待値の線形性より

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(X, Y) &:= E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y)) \\
 &= E(XY - X\mu_Y - \mu_X Y + \mu_X \mu_Y) \\
 &= E(XY) - E(X)\mu_Y - \mu_X E(Y) + \mu_X \mu_Y \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
 &= E(XY) - E(X)E(Y)
 \end{aligned}$$

2. (a) 任意の  $(x, y)$  について

$$f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$$

なら  $X$  と  $Y$  は独立という.

(b) i.  $(X, Y)$  が連続なら

$$\begin{aligned}
 E(XY) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx \right) y f_Y(y) \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \, dx \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) \, dy \\
 &= E(X) E(Y)
 \end{aligned}$$

離散の場合も同様.

ii. 前問の結果より

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= E(XY) - E(X) E(Y) \\ &= E(X) E(Y) - E(X) E(Y) \\ &= 0\end{aligned}$$

iii. 前問の結果より

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X + Y) &= \operatorname{var}(X) + 2 \operatorname{cov}(X, Y) + \operatorname{var}(Y) \\ &= \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)\end{aligned}$$