

計量経済 I：復習テスト 8

学籍番号 _____ 氏名 _____

2023 年 5 月 30 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1～8 を（左上で）ホチキス止めし、中間試験実施日（6 月 6 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 2 変量データを $((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ とする。 y_i の x_i 上への定数項のない古典的正規線形回帰モデルは

$$\{y_i\}|\{x_i\} \sim \text{IN}(\beta x_i, \sigma^2)$$

σ^2 を既知として次の両側検定問題を考える。

$$H_0 : \beta = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta \neq c$$

- (a) β の OLS 推定量を b とすると

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

$\{x_i\}$ を所与として b の（条件付き）分布を求めなさい。

- (b) H_0 の下で $N(0, 1)$ にしたがう検定統計量を与えなさい。

- (c) H_0 の下で $\chi^2(1)$ にしたがう検定統計量を与えなさい。

2. 前問と同じ回帰モデルを仮定し、 σ^2 を未知として片側検定問題を考える.

(a) σ^2 の不偏推定量 s^2 を定義しなさい.

(b) s^2 の分布を与えなさい.

(c) 検定統計量を与えなさい.

(d) 検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい.

3. 前問と同じ回帰モデルを仮定し、 σ^2 を未知として両側検定問題を考える.

(a) 前問とは別の検定統計量を与えなさい.

(b) 検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい.

解答例

1. (a) 期待値の線形性と x_1, \dots, x_n の独立性より

$$\begin{aligned}
 E(b|x_1, \dots, x_n) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} | x_1, \dots, x_n\right) \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i E(y_i | x_1, \dots, x_n)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i E(y_i | x_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i \beta x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
 &= \frac{\beta \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
 &= \beta
 \end{aligned}$$

線形変換の分散の公式と $(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)$ の独立性より

$$\begin{aligned}
 \text{var}(b|x_1, \dots, x_n) &= \text{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} | x_1, \dots, x_n\right) \\
 &= \frac{\text{var}(\sum_{i=1}^n x_i y_i | x_1, \dots, x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n \text{var}(x_i y_i | x_1, \dots, x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \text{var}(y_i | x_1, \dots, x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \text{var}(y_i | x_i)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}
 \end{aligned}$$

$\{x_i\}$ を所与として $\{y_i\}$ は正規分布だから、 $\{y_i\}$ の線形変換である b も正規分布。したがって

$$b|\{x_i\} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

- (b) 前問の結果を標準化すると

$$\frac{b - \beta}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}} | \{x_i\} \sim N(0, 1)$$

$N(0, 1)$ は $\{x_i\}$ に依存しないので

$$\frac{b - \beta}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}} \sim N(0, 1)$$

$H_0: \beta = c$ を代入すると、検定統計量は

$$Z := \frac{b - c}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(c) $Z \sim N(0, 1)$ なら $Z^2 \sim \chi^2(1)$ なので, 検定統計量は

$$Z^2 = \frac{(b - c)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{\sigma^2}$$

2. (a)

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - bx_i)^2$$

(b)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(c) 未知の σ^2 を推定量 s^2 に置き換えると, 検定統計量は

$$t := \frac{b - c}{\sqrt{s^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(d) t 分布の定義より

$$t \sim t(n-1)$$

3. (a) 両側検定なら t^2 を検定統計量としてもよい. すなわち別の検定統計量は

$$t^2 = \frac{(b - c)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{s^2}$$

(b) $t \sim t(\nu)$ なら $t^2 \sim F(1, \nu)$ なので

$$t^2 \sim F(1, n-1)$$