

経済統計：期末試験

村澤 康友

2015 年 8 月 3 日

注意：3 問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいと与えるが、結果のみの解答は 0 点とする）。

- （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）。
 - 複合仮説
 - 有意水準
 - 単回帰モデル
 - t 値
- （30 点）大きさ n の 1 変量データを (x_1, \dots, x_n) とする。 $\mu := E(x_i)$ を OLS で推定したい。
 - OLS 問題を書きなさい。
 - μ の OLS 推定量を求めなさい。
 - OLS 残差の和が 0 となることを示しなさい。
- （50 点）某大学経済学部 2 回生の男女について、どちらが平均的に経済学をよく理解しているかを知りたい。そこで（復元）無作為抽出した男子 64 人、女子 32 人に対して試験を行い、次の結果を得た。

	平均点	（標本）標準偏差
男子	50	28
女子	60	24

母数と統計量の区別に注意して、以下の問いに答えなさい。

- 検定問題を定式化しなさい（問題意識を踏まえること）。
- 平均点の差の漸近分布を求めなさい。
- 検定統計量を与えなさい。
- H_0 の下で検定統計量の漸近分布を求め、有意水準 5 % の検定の棄却域を定めなさい。
- 検定を実行し、結果を説明しなさい。

解答例

1. 統計学の基本用語

- (a) 複数の分布を許容する仮説.
- (b) 許容する第 1 種の誤りの確率.
 - 「許容する」がなければ 2 点 (第 1 種の誤りの確率は検定の「サイズ」という).
- (c) 定数項以外に説明変数が 1 つしかない線形回帰モデル.
- (d) $H_0: \beta = 0$ を検定する t 統計量の値.
 - 「 $H_0: \beta = 0$ を検定する」がなければダメ.
 - $b/\text{s.e.}(b)$ は定義でないので 0 点.

2. OLS

- (a)

$$\min_m \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$$

and $m \in \mathbb{R}$

- (b) 1 階の条件は

$$\sum_{i=1}^n (-2)(x_i - m^*) = 0$$

正規方程式は

$$\sum_{i=1}^n x_i - nm^* = 0$$

したがって

$$m^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- 正規方程式で 5 点.
- (c) OLS 残差は $e_i := x_i - m^*$. したがって

$$\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n (x_i - m^*)$$

正規方程式より右辺は 0.

- OLS 残差で 5 点.
 - OLS 残差を示さなければ 0 点.
- ### 3. 2 標本問題
- (a) 母平均を μ_X, μ_Y , 母分散を σ_X^2, σ_Y^2 とすると

$$H_0: \mu_X \geq \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2 > 0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu_X < \mu_Y, \sigma_X^2, \sigma_Y^2 > 0$$

- $\sigma_X^2, \sigma_Y^2 > 0$ はなくても OK.
- H_0 は等号でもよい.
- H_1 の不等号は逆向きでもよい.
- 両側検定は 5 点.

- 2 種類の不等号の混同は 0 点.

(b) 標本の大きさを m, n , 標本平均を \bar{X}, \bar{Y} とすると

$$\begin{aligned}\bar{X} &\stackrel{a}{\sim} N\left(\mu_X, \frac{\sigma_X^2}{m}\right) \\ \bar{Y} &\stackrel{a}{\sim} N\left(\mu_Y, \frac{\sigma_Y^2}{n}\right) \\ \bar{X} - \bar{Y} &\stackrel{a}{\sim} N\left(\mu_X - \mu_Y, \frac{\sigma_X^2}{m} + \frac{\sigma_Y^2}{n}\right)\end{aligned}$$

- 母数と統計量の混同は 0 点.

(c) 標本分散を s_X^2, s_Y^2 とすると, 検定統計量は

$$Z := \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s_X^2/m + s_Y^2/n}}$$

- 標準化のみは 5 点.

(d) $Z \sim N(0, 1)$ より Z に関する棄却域は $(-\infty, -1.65]$.

- H_1 の不等号が逆向きなら棄却域は $[1.65, \infty)$.
- 漸近分布で 5 点, 棄却域で 5 点.

(e) 標本平均の差の分散の推定値は

$$\begin{aligned}\frac{s_X^2}{m} + \frac{s_Y^2}{n} &= \frac{28^2}{64} + \frac{24^2}{32} \\ &= \frac{784 + 2 \cdot 576}{64} \\ &= \frac{1936}{64} \\ &= \frac{121}{4}\end{aligned}$$

検定統計量の値は

$$\begin{aligned}Z &:= \frac{50 - 60}{\sqrt{121/4}} \\ &= -\frac{10}{11/2} \\ &\approx -1.82\end{aligned}$$

$Z \leq -1.64$ より有意水準 5 % で H_0 は H_1 に対して棄却される. すなわち女子の方が平均的によく理解していると結論できる.

- 検定統計量で 5 点, 解釈で 5 点.