中級統計学：復習テスト 10

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 10 月 25 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜13 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 2 回中間試験実施日（11 月 12 日の予定）に提出すること．

1. $U \sim \mathrm{U}[a,b]$ とする．
   (a) $\mathrm{E}(U)$ を求めなさい．

   (b) $\mathrm{E}\left(U^2\right)$ を求めなさい．

   (c) $\mathrm{var}(U)$ を求めなさい．

2. $X \sim \mathrm{N}(1,9)$ とする．標準正規分布表を利用して以下の確率を求めなさい．

(a) $\Pr[X \leq 0]$

(b) $\Pr[1 < X \leq 2]$

(c) $\Pr[X > 3]$

(d) $\Pr[-4 < X \leq 5]$

(e) $\Pr[|X| \geq 6]$

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(U) &:= \int_{-\infty}^{a} u \cdot 0 \,\mathrm{d}u + \int_{a}^{b} u \cdot \frac{1}{b-a} \,\mathrm{d}u + \int_{b}^{\infty} u \cdot 0 \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b \\
&= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \\
&= \frac{a+b}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(U^2\right) &:= \int_{-\infty}^{a} u^2 \cdot 0 \,\mathrm{d}u + \int_{a}^{b} u^2 \cdot \frac{1}{b-a} \,\mathrm{d}u + \int_{b}^{\infty} u^2 \cdot 0 \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{b-a} \left[\frac{u^3}{3}\right]_a^b \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(U) &= \mathrm{E}\left(U^2\right) - \mathrm{E}(U)^2 \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{4a^2+4ab+4b^2}{12} - \frac{3a^2+6ab+3b^2}{12} \\
&= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} \\
&= \frac{(a-b)^2}{12}
\end{aligned}$$

2. $Q(.) := 1 - \Phi(.)$ とする．教科書の標準正規分布表は $Q(.)$ の値を記載している．$\Phi(.)$ や $\Phi(.) - .5$ の値を記載する場合もあるので要注意．

(a)

$$\begin{aligned}
\Pr[X \leq 0] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \leq \frac{0-1}{3}\right] \\
&= \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \\
&= Q\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= .37070
\end{aligned}$$

(b)

$$\Pr[1 < X \leq 2] = \Pr[X \leq 2] - \Pr[X \leq 1]$$

ここで

$$\begin{aligned}\Pr[X \le 2] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \le \frac{2-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - Q\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= 1 - .37070 \\ &= .62930 \\ \Pr[X \le 1] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \le \frac{1-1}{3}\right] \\ &= \Phi(0) \\ &= .5\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\Pr[1 < X \le 2] &= .62930 - .5 \\ &= .12930\end{aligned}$$

（c）

$$\begin{aligned}\Pr[X > 3] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} > \frac{3-1}{3}\right] \\ &= Q\left(\frac{2}{3}\right) \\ &= .25143\end{aligned}$$

（d）

$$\Pr[-4 < X \le 5] = \Pr[X \le 5] - \Pr[X \le -4]$$

ここで

$$\begin{aligned}\Pr[X \le 5] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \le \frac{5-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= 1 - Q\left(\frac{4}{3}\right) \\ &= 1 - .091759 \\ &= .908241 \\ \Pr[X \le -4] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \le \frac{-4-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= Q\left(\frac{5}{3}\right) \\ &= .047460\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\Pr[-4 < X \leq 5] &= .908241 - .047460 \\ &= .860781\end{aligned}$$

(e)

$$\Pr[|X| \geq 6] = \Pr[X \leq -6] + \Pr[X \geq 6]$$

ここで

$$\begin{aligned}\Pr[X \leq -6] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \leq \frac{-6-1}{3}\right] \\ &= \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) \\ &= Q\left(\frac{7}{3}\right) \\ &= .0099031 \\ \Pr[X \geq 6] &= \Pr\left[\frac{X-1}{3} \geq \frac{6-1}{3}\right] \\ &= Q\left(\frac{5}{3}\right) \\ &= .047460\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\Pr[|X| \geq 6] &= .0099031 + .047460 \\ &= .0573631\end{aligned}$$