第 12 回　ベクトル誤差修正モデル（VECM）

村澤 康友

2022 年 12 月 20 日

今日のポイント

1. $\mathrm{CI}(1,1)$ 過程は VECM で表現できる（グレンジャーの表現定理）.
2. VAR モデルを VECM に変換する際は，定数項とトレンドの扱いに注意．また共和分行列の識別に制約が必要.
3. 予測が目的なら VECM のラグ次数と共和分階数はモデル選択基準で選ぶ.
4. インパルス応答関数が目的なら VECM より VAR モデルの方が共和分階数の定式化の誤りを避けられる.
5. H_0 と H_1 の下での母数の尤度の比を尤度比という．尤度比を用いる検定を尤度比（LR）検定という．共和分階数の LR 検定を Johansen の共和分検定という．トレース検定と最大固有値検定は H_1 の共和分階数が異なる.

目次

1 共和分と VECM

1.1 VAR モデル

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ を N 変量確率過程とし，簡単化のため定数項なしの $\mathrm{VAR}(p)$ モデルを仮定する．すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{w}_t \\ \{\boldsymbol{w}_t\} &\sim \mathrm{WN}(\boldsymbol{\Sigma})\end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})$ は p 次のラグ多項式行列.

補題 1.

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L}) = \boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L} + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})$$

ただし $\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})$ は $p-1$ 次のラグ多項式行列.

証明. $\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})$ の第 (i,j) 成分 $\phi_{i,j}(\mathrm{L})$ を式変形すると

$$\phi_{i,j}(\mathrm{L}) = \phi_{i,j}(1)\mathrm{L} + \phi_{i,j}(\mathrm{L}) - \phi_{i,j}(1)\mathrm{L}$$

$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z$ は $z=1$ で 0 なので，因数分解より任意の z について

$$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z = \phi^*_{i,j}(z)(1-z)$$

ただし $\phi^*_{i,j}(.)$ は $p-1$ 次の多項式．したがって

$$\phi_{i,j}(\mathrm{L}) = \phi_{i,j}(1)\mathrm{L} + \phi^*_{i,j}(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})$$

□

1.2　I(1) 過程

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ を I(1) とする．

定理 1. 任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t = -\boldsymbol{\Phi}(1)\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t$$

証明．前補題より，任意の t について

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})\boldsymbol{y}_t &= [\boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L} + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})]\boldsymbol{y}_t \\ &= \boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L}\boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})\boldsymbol{y}_t \\ &= \boldsymbol{\Phi}(1)\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t\end{aligned}$$

VAR モデルに代入すると，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}(1)\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{w}_t$$

□

注 1. すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{y}_t = -\boldsymbol{\Phi}(1)\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^*_1\Delta\boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots \\ + \boldsymbol{\Phi}^*_{p-1}\Delta\boldsymbol{y}_{t-p+1} + \boldsymbol{w}_t\end{aligned}$$

これは ADF 検定の推定式の多変量版．左辺は I(0) なので，以下の 2 つのどちらかが成立．

1. $\boldsymbol{\Phi}(1) = \mathbf{O}_{N\times N}$（共和分なし）
2. $\{\boldsymbol{\Phi}(1)\boldsymbol{y}_t\}$ は I(0)（共和分あり）

1.3　CI(1, 1) 過程

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ を共和分階数 r の CI(1, 1) とする．

定義 1. 線形独立な共和分ベクトルを各列に並べた行列を**共和分行列**という．

定理 2 (グレンジャーの表現定理)**.** 任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t = -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t$$

ただし $\boldsymbol{\Gamma}$ は $N\times r$ の共和分行列，$\boldsymbol{\Lambda}$ は $N\times r$ の係数行列．

証明．前定理より，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t = -\boldsymbol{\Phi}(1)\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t$$

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ は I(1) なので左辺は I(0)．共和分より $\{\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_t\}$ が I(0) なので，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t = -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{w}_t$$

□

系 1.

$$\mathrm{rk}(\boldsymbol{\Phi}(1)) = r$$

証明．$\boldsymbol{\Phi}(1) = \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'$ より $\boldsymbol{\Phi}(1)$ の各列は $\boldsymbol{\Lambda}$ の各列の線形結合．□

1.4　VECM

定義 2. VAR(p) モデルの**ベクトル誤差修正モデル**（*vector error correction model, VECM*）による表現は，任意の t について

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{y}_t = -\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^*_1\Delta\boldsymbol{y}_{t-1} + \cdots \\ + \boldsymbol{\Phi}^*_{p-1}\Delta\boldsymbol{y}_{t-p+1} + \boldsymbol{w}_t\end{aligned}$$

注 2. 長期均衡の誤差 $\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}$ を係数 $\boldsymbol{\Lambda}$ だけ修正する方向に $\Delta\boldsymbol{y}_t$ が変化する．

注 3. $\{\boldsymbol{y}_t\}$ の VAR(p) モデルなので，$p-1$ 次の項 $\Delta\boldsymbol{y}_{t-p+1} := \boldsymbol{y}_{t-p+1} - \boldsymbol{y}_{t-p}$ までしか含まない．

2　VECM の定式化と推定

2.1　定数項とトレンド

2.1.1　定数項あり・トレンドなし

定数項ありの VAR モデルは，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{w}_t$$

定理 3. *VECM 表現は，任意の t について*

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t = -\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{w}_t$$

ただし $\boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\mu}$.

証明．$\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L}) = \boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L} + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})$ より任意の t について

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}) \\ &= [\boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L} + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})](\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L}(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(1)(\boldsymbol{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t\end{aligned}$$

VAR モデルに代入すると，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}(1)(\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu})+\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{w}_t$$

$\boldsymbol{\Phi}(1)=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'$ より任意の t について

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t&=-\boldsymbol{\Phi}(1)(\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu})+\boldsymbol{w}_t\\&=-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'(\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu})+\boldsymbol{w}_t\\&=-\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{w}_t\end{aligned}$$

□

注 4. 共和分回帰に定数項が入る．展開すると，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}+\boldsymbol{w}_t$$

$\boldsymbol{\beta}$ は $r\times 1$ なので，$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\beta}$ は**制約付きの定数項**となる．**制約のない定数項**をもつ VECM は，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}+\boldsymbol{w}_t$$

したがって $\{\boldsymbol{y}_t\}$ はトレンドをもつ（矛盾）．

2.1.2 定数項あり・トレンドあり

定数項・トレンドありの VAR モデルは，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu}t)=\boldsymbol{w}_t$$

定理 4. *VECM* 表現は，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\mu})=-\boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\delta}(t-1)]+\boldsymbol{w}_t$$

ただし $\boldsymbol{\beta}:=\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\delta}:=\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\mu}$.

証明. $\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})=\boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L}+\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})$ より任意の t について

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}(\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu}t)\\&=[\boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L}+\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})](\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu}t)\\&=\boldsymbol{\Phi}(1)\mathrm{L}(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu}t)\\&\quad+\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(1-\mathrm{L})(\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu}t)\\&=\boldsymbol{\Phi}(1)[\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu}(t-1)]+\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\mu})\end{aligned}$$

VAR モデルに代入すると，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}(1)[\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu}(t-1)]+\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\mu})=\boldsymbol{w}_t$$

$\boldsymbol{\Phi}(1)=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'$ より任意の t について

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})(\Delta\boldsymbol{y}_t-\boldsymbol{\mu})\\&=-\boldsymbol{\Phi}(1)[\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu}(t-1)]+\boldsymbol{w}_t\\&=-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'[\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\mu}(t-1)]+\boldsymbol{w}_t\\&=-\boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\delta}(t-1)]+\boldsymbol{w}_t\end{aligned}$$

□

注 5. 共和分回帰に定数項とトレンドが入る．展開すると，任意の t について

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t\\&=\boldsymbol{\Phi}^*(1)\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\delta}(t-1)-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}+\boldsymbol{w}_t\\&=\boldsymbol{\Phi}^*(1)\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\delta})+\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\delta}t-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}+\boldsymbol{w}_t\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\delta}$ は $r\times 1$ なので，$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\delta}t$ は**制約付きのトレンド**となる（定数項は $\boldsymbol{\mu}$ で調整されるので制約なし）．**制約のないトレンド**をもつ VECM は，任意の t について

$$\boldsymbol{\Phi}^*(\mathrm{L})\Delta\boldsymbol{y}_t=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}t-\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{y}_{t-1}+\boldsymbol{w}_t$$

したがって $\{\Delta\boldsymbol{y}_t\}$ がトレンドをもつので $\{\boldsymbol{y}_t\}$ は 2 次のトレンドをもつ（矛盾）．

2.2 共和分行列の識別

$\boldsymbol{\Phi}(.)$ は識別可能だが，$\boldsymbol{\Phi}(1)=\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}'$ から $\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Gamma}$ は定まらない．$\boldsymbol{\Gamma}$ を識別する制約は 2 通りある．

1. $\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}_r$ （共和分ベクトルは長さ 1 で互いに直交）
2. $\boldsymbol{\Gamma}:=[\boldsymbol{I}_r,\boldsymbol{\Gamma}_2']'$ （共和分回帰で最初の r 個の変数を被説明変数，他を説明変数とする）

ただし前者は符号が定まらず，後者は共和分回帰の被説明変数の選択が恣意的になる．

2.3 条件付き ML 推定

正規 VECM の厳密な ML 推定は煩雑なので，条件つき ML 推定が普通．詳細は略．

2.4 ラグ次数と共和分階数の選択

VAR モデルの次数 p はモデル選択基準（AIC・SBIC・HQC）で選ぶ．予測が目的なら共和分階数もモデル選択基準で選んでよい．

2.5　インパルス応答関数

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ のインパルス応答関数は，VECM を VAR 表現に戻して計算する．ただし予測が目的でなければ VECM にせず，初めから VAR モデルを推定する方が共和分階数の定式化の誤りを避けられる．

3　Johansen の共和分検定

3.1　尤度比（LR）検定

母数を θ，標本を $(y_1,\dots,y_T)$ とする．次の検定問題を考える．

$$H_0:\theta=\theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1:\theta=\theta_1$$

母数が θ のときの $(y_1,\dots,y_T)$ の同時 pdf を $p(.;\theta)$ とする．θ の尤度は

$$L(\theta):=p(y_1,\dots,y_T;\theta)$$

定義 3. $L(\theta_0)/L(\theta_1)$ を θ_0 と θ_1 の**尤度比**（*likelihood ratio, LR*）という．

定義 4. 尤度比を用いる検定を**尤度比**（*LR*）**検定**という．

定義 5. $H_0:\theta=\theta_0$ vs $H_1:\theta=\theta_1$ の *LR* **検定統計量**は

$$LR:=-2\ln\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}$$

注 6. $L(\theta_1)\gg L(\theta_0)>0$ すなわち LR 検定統計量が十分に大きければ H_0 を棄却.

定義 6. 共和分階数の LR 検定を *Johansen* **の共和分検定**という．

注 7. H_1 の違いにより 2 種類の検定がある．

3.2　トレース検定

$\{\boldsymbol{y}_t\}$ を共和分階数 r の N 変量正規 VAR 過程とする．次の検定問題を考える．

$$H_0:r=r_0 \quad \text{vs} \quad H_1:r=N$$

H_0 の下で LR 検定統計量は，ある確率行列のトレース（対角成分の和）に分布収束する．

定義 7. $H_0:r=r_0$ vs $H_1:r=N$ の LR 検定を**トレース検定**という．

注 8. 定数項・トレンドの有無で LR 検定統計量の漸近分布は異なる．

3.3　最大固有値検定

次の検定問題を考える．

$$H_0:r=r_0 \quad \text{vs} \quad H_1:r=r_0+1$$

H_0 の下で LR 検定統計量は，ある確率行列の最大固有値に分布収束する．

定義 8. $H_0:r=r_0$ vs $H_1:r=r_0+1$ の LR 検定を**最大固有値検定**という．

注 9. 定数項・トレンドの有無で LR 検定統計量の漸近分布は異なる．

4　今日のキーワード

共和分行列，グレンジャーの表現定理，ベクトル誤差修正モデル（VECM），尤度比，尤度比（LR）検定，LR 検定統計量，Johansen の共和分検定，トレース検定，最大固有値検定

5　次回までの準備

提出　宿題 12

復習　復習テスト 12

予習　特になし