# 経済統計：前期第 2 回中間試験

村澤 康友

2009 年 6 月 8 日

**注意：** 3 問とも解答すること．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) （1 変量）正規分布
   (b) 同時累積分布関数
   (c) （確率変数の）独立性
   (d) 条件つき期待値
2. （30 点） $(X, Y)$ は次の同時累積分布関数をもつ．

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} xy/4 & \text{for } 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}.$$

   (a) $(X, Y)$ の同時密度関数を求めなさい．
   (b) $X$ の周辺密度関数と期待値を求めなさい．
   (c) $Y = y$ のときの $X$ の条件つき密度関数と条件つき期待値を求めなさい．
3. （50 点）1 口 10 万円で購入できる資産が 2 つある．資産 A からの収益を $X$ 万円，資産 B からの収益を $Y$ 万円とする．$(X, Y)$ は次の 2 変量正規分布に従うと仮定する．

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathrm{N}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 4 \end{bmatrix} \right).$$

   (a) 資産 A を 10 口購入したときの収益の分布と，収益がマイナスになる確率を求めなさい．
   (b) 資産 B を 10 口購入したときの収益の分布と，収益がマイナスになる確率を求めなさい．
   (c) 共分散 $\sigma_{XY}$ と相関係数 $\rho_{XY}$ の関係を示しなさい．
   (d) $\rho_{XY} = 0$ とする．資産 A を 8 口，資産 B を 2 口購入したときの収益の分布と，収益がマイナスになる確率を求めなさい．
   (e) $\rho_{XY} = -1$ とする．資産 A を 8 口，資産 B を 2 口購入したときの収益の分布と，収益がマイナスになる確率を求めなさい．

解答例

1. 確率の基本用語
   (a) pdf が
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right).$$
      - mgf で定義しても OK.
   (b) $(X, Y)$ の同時 cdf は
$$F_{X,Y}(x, y) := \Pr[X \le x, Y \le y].$$
      - $\Pr[X < x, Y < y]$ は 0 点.
      - $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$ は同時 pdf の定義なので 0 点.
   (c) 任意の $(x, y)$ について $f_{X|Y}(x|Y = y) = f_X(x)$ なら $X$ と $Y$ は独立.
      - $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ も OK.
      - cdf で定義しても OK.
      - 事象の独立性は 0 点.
      - 「何の影響も受けない」等は定義でないので 0 点.
   (d) $Y = y$ が与えられたときの $X$ の条件つき期待値は
$$\mathrm{E}(X|Y = y) := \begin{cases} \sum_x x p_{X|Y}(x|Y = y) & \text{（離散）} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y = y)\,\mathrm{d}x & \text{（連続）} \end{cases}.$$
      - 「一方の値を固定したときの期待値」等は定義でないので 0 点.
2. 2 変量一様分布
   (a) $(X, Y)$ の同時 pdf は
$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= \begin{cases} 1/4 & \text{for } 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}. \end{aligned}$$
   (b) $X$ の周辺 pdf は
$$\begin{aligned} f_X(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}y \\ &= \begin{cases} 1/2 & \text{for } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}. \end{aligned}$$
   $X$ の期待値は
$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_0^2 x\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$
      - 周辺 pdf で 5 点，期待値で 5 点.

- 期待値のみ正解は 0 点.

（c）$Y$ の周辺 pdf は

$$\begin{aligned} f_Y(y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} 1/2 & \text{for } 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}. \end{aligned}$$

$X$ の条件つき pdf は

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|Y=y) &:= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \begin{cases} 1/2 & \text{for } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}. \end{aligned}$$

$X$ の条件つき期待値は

$$\mathrm{E}(X|Y=y) = 1.$$

- $X$ と $Y$ は独立なので前問と同じ答になる.

3. 2 変量正規分布（資産選択への応用）

（a）$10X \sim \mathrm{N}(10, 100)$．したがって

$$\begin{aligned} \Pr[10X \le 0] &= \Pr\left[\frac{10X-10}{10} \le \frac{0-10}{10}\right] \\ &= \Pr\left[\frac{10X-10}{10} \le -1\right] \\ &= \Pr\left[\frac{10X-10}{10} \ge 1\right] \\ &= .15866. \end{aligned}$$

- 分布で 5 点，確率で 5 点.

（b）$10Y \sim \mathrm{N}(10, 400)$．したがって

$$\begin{aligned} \Pr[10Y \le 0] &= \Pr\left[\frac{10Y-10}{20} \le \frac{0-10}{20}\right] \\ &= \Pr\left[\frac{10Y-10}{20} \le -.5\right] \\ &= \Pr\left[\frac{10Y-10}{20} \ge .5\right] \\ &= .30854. \end{aligned}$$

（c）

$$\begin{aligned} \sigma_{XY} &= \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y \\ &= 2\rho_{XY}. \end{aligned}$$

- $\sigma_{XY} = \rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$ のみは 5 点（$\sigma_Y = 2$ が読み取れているか不明).

(d)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(8X+2Y) &= 64\operatorname{var}(X)+4\operatorname{var}(Y)\\
&= 64+16\\
&= 80.
\end{aligned}
$$

したがって $8X+2Y\sim \mathrm{N}(10,80)$．これより

$$
\begin{aligned}
\Pr[8X+2Y\le 0] &= \Pr\left[\frac{8X+2Y-10}{4\sqrt{5}}\le\frac{0-10}{4\sqrt{5}}\right]\\
&= \Pr\left[\frac{8X+2Y-10}{4\sqrt{5}}\le -\frac{\sqrt{5}}{2}\right]\\
&= \Pr\left[\frac{8X+2Y-10}{4\sqrt{5}}\ge \frac{\sqrt{5}}{2}\right]\\
&\approx \Pr\left[\frac{8X+2Y-10}{4\sqrt{5}}\ge 1.18\right]\\
&= .119
\end{aligned}
$$

- 分散投資でリスクが減る．

(e)

$$
\begin{aligned}
\operatorname{var}(8X+2Y) &= 64\operatorname{var}(X)+32\operatorname{cov}(X,Y)+4\operatorname{var}(Y)\\
&= 64-64+16\\
&= 16.
\end{aligned}
$$

したがって $8X+2Y\sim \mathrm{N}(10,16)$．これより

$$
\begin{aligned}
\Pr[8X+2Y\le 0] &= \Pr\left[\frac{8X+2Y-10}{4}\le\frac{0-10}{4}\right]\\
&= \Pr\left[\frac{8X+2Y-10}{4}\le -\frac{5}{2}\right]\\
&= \Pr\left[\frac{8X+2Y-10}{4}\ge \frac{5}{2}\right]\\
&= \Pr\left[\frac{8X+2Y-10}{4}\ge 2.5\right]\\
&= .0062097.
\end{aligned}
$$

- 負の相関をもつ資産への分散投資でさらにリスクが減る．

※答案は返却します．採点や成績に関する質問にも応じます．**オフィスアワーの時間（月水木金の昼休み）に**研究室まで来てください．