

計量分析 2：復習テスト 14

学籍番号_____氏名_____

2023 年 1 月 21 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 9～14 を（左上で）ホチキス止めし、定期試験実施日（1 月 26 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 処置ダミーを D , 処置をする時としない時の潜在的な結果を (Y_1^*, Y_0^*) , 観測される結果を Y , 共変量を X とする. $d = 0, 1$ について $E(Y_d^*|X) = r_d(X)$ とする. 処置確率を $p(X) := \Pr[D = 1|X]$ とする.
(a) $X = x$ のときの条件付き ATE を $r_0(\cdot), r_1(\cdot)$ で表しなさい.

- (b) X を所与として Y_1^*, Y_0^* は D と条件付き平均独立とする. $E(Y|X)$ を $r_0(\cdot), r_1(\cdot), p(\cdot)$ で表しなさい.

2. 処置ダミーを D , 処置をする時としない時の潜在的な結果を (Y_1^*, Y_0^*) , 観測される結果を Y , 共変量を X とする. $d = 0, 1$ について $E(Y_d^*|X) = \alpha_d + \beta_d X$, $U_d := Y_d^* - E(Y_d^*|X)$ とする.

(a) 条件つき ATE を X の関数で表しなさい.

(b) Y を D, X, U_0, U_1 で表しなさい.

(c) $\beta_0 = \beta_1 = \beta$, $U_0 = U_1 = U$ とする. Y を D, X, U で表しなさい. また処置効果 $Y_1^* - Y_0^*$ を求めなさい.

解答例

1. (a)

$$\begin{aligned}\text{ATE}(x) &:= E(Y_1^* - Y_0^* | X = x) \\ &= E(Y_1^* | X = x) - E(Y_0^* | X = x) \\ &= r_1(x) - r_0(x)\end{aligned}$$

(b) 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned}E(Y|X) &= E(DY_1^* + (1-D)Y_0^* | X) \\ &= E(E(DY_1^* + (1-D)Y_0^* | D, X) | X) \\ &= E(D E(Y_1^* | D, X) + (1-D) E(Y_0^* | D, X) | X) \\ &= E(D E(Y_1^* | X) + (1-D) E(Y_0^* | X) | X) \\ &= E(D|X) E(Y_1^* | X) + (1 - E(D|X)) E(Y_0^* | X) \\ &= \Pr[D = 1|X]r_1(X) + (1 - \Pr[D = 1|X])r_0(X) \\ &= p(X)r_1(X) + (1 - p(X))r_0(X)\end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned}\text{ATE}(X) &:= E(Y_1^* - Y_0^* | X) \\ &= E(Y_1^* | X) - E(Y_0^* | X) \\ &= \alpha_1 + \beta_1 X - (\alpha_0 + \beta_0 X) \\ &= \alpha_1 - \alpha_0 + (\beta_1 - \beta_0)X\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}Y &:= DY_1^* + (1-D)Y_0^* \\ &= Y_0^* + D(Y_1^* - Y_0^*) \\ &= \alpha_0 + \beta_0 X + U_0 + D[\alpha_1 + \beta_1 X + U_1 - (\alpha_0 + \beta_0 X + U_0)] \\ &= \alpha_0 + \beta_0 X + U_0 + D[(\alpha_1 - \alpha_0) + (\beta_1 - \beta_0)X + U_1 - U_0] \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D + \beta_0 X + (\beta_1 - \beta_0)DX + U_0 + D(U_1 - U_0)\end{aligned}$$

(c) 前問より

$$Y = \alpha_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)D + \beta X + U$$

処置効果は

$$\begin{aligned}Y_1^* - Y_0^* &= \alpha_1 + \beta X + U - (\alpha_0 + \beta X + U) \\ &= \alpha_1 - \alpha_0\end{aligned}$$