

第 12 回 ベクトル誤差修正モデル (VECM)

村澤 康友

2022 年 12 月 20 日

今日のポイント

1. CI(1, 1) 過程は VECM で表現できる (グリーンジャーの表現定理).
2. VAR モデルを VECM に変換する際は, 定数項とトレンドの扱いに注意. また共和分行列の識別に制約が必要.
3. 予測が目的なら VECM のラグ次数と共和分階数はモデル選択基準で選ぶ.
4. インパルス応答関数が目的なら VECM より VAR モデルの方が共和分階数の定式化の誤りを避けられる.
5. H_0 と H_1 の下での母数の尤度の比を尤度比という. 尤度比を用いる検定を尤度比 (LR) 検定という. 共和分階数の LR 検定を Johansen の共和分検定という. トレース検定と最大固有値検定は H_1 の共和分階数が異なる.

2.4	ラグ次数と共和分階数の選択	3
2.5	インパルス応答関数	4

3	Johansen の共和分検定	4
3.1	尤度比 (LR) 検定	4
3.2	トレース検定	4
3.3	最大固有値検定	4
4	今日のキーワード	4
5	次回までの準備	4

1 共和分と VECM

1.1 VAR モデル

$\{y_t\}$ を N 変量確率過程とし, 簡単化のため定数項なしの VAR(p) モデルを仮定する. すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(L)y_t &= w_t \\ \{w_t\} &\sim \text{WN}(\Sigma)\end{aligned}$$

ただし $\Phi(L)$ は p 次のラグ多項式行列.

補題 1.

$$\Phi(L) = \Phi(1)L + \Phi^*(L)(1 - L)$$

ただし $\Phi^*(L)$ は $p - 1$ 次のラグ多項式行列.

証明. $\Phi(L)$ の第 (i, j) 成分 $\phi_{i,j}(L)$ を式変形すると

$$\phi_{i,j}(L) = \phi_{i,j}(1)L + \phi_{i,j}(L) - \phi_{i,j}(1)L$$

$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z$ は $z = 1$ で 0 なので, 因数分解より任意の z について

$$\phi_{i,j}(z) - \phi_{i,j}(1)z = \phi_{i,j}^*(z)(1 - z)$$

目次

1	共和分と VECM	1
1.1	VAR モデル	1
1.2	I(1) 過程	2
1.3	CI(1, 1) 過程	2
1.4	VECM	2
2	VECM の定式化と推定	2
2.1	定数項とトレンド	2
2.2	共和分行列の識別	3
2.3	条件付き ML 推定	3

ただし $\phi_{i,j}^*(\cdot)$ は $p-1$ 次の多項式. したがって

$$\phi_{i,j}(\mathbf{L}) = \phi_{i,j}(1)\mathbf{L} + \phi_{i,j}^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})$$

□

1.2 I(1) 過程

$\{\mathbf{y}_t\}$ を I(1) とする.

定理 1. 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

証明. 前補題より, 任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{L})\mathbf{y}_t &= [\Phi(1)\mathbf{L} + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})]\mathbf{y}_t \\ &= \Phi(1)\mathbf{L}\mathbf{y}_t + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})\mathbf{y}_t \\ &= \Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t\end{aligned}$$

VAR モデルに代入すると, 任意の t について

$$\Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{w}_t$$

□

注 1. すなわち任意の t について

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{y}_t &= -\Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \Phi_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \cdots \\ &\quad + \Phi_{p-1}^*\Delta\mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{w}_t\end{aligned}$$

これは ADF 検定の推定式の変量版. 左辺は I(0) なので, 以下の 2 つのどちらかが成立.

1. $\Phi(1) = \mathbf{O}_{N \times N}$ (共和分なし)
2. $\{\Phi(1)\mathbf{y}_t\}$ は I(0) (共和分あり)

1.3 CI(1,1) 過程

$\{\mathbf{y}_t\}$ を共和分階数 r の CI(1,1) とする.

定義 1. 線形独立な共和分ベクトルを各列に並べた行列を**共和分行列**という.

定理 2 (グレンジャーの表現定理). 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Lambda\Gamma'\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

ただし Γ は $N \times r$ の共和分行列, Λ は $N \times r$ の係数行列.

証明. 前定理より, 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Phi(1)\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

$\{\mathbf{y}_t\}$ は I(1) なので左辺は I(0). 共和分より $\{\Gamma'\mathbf{y}_t\}$ が I(0) なので, 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Lambda\Gamma'\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

□

系 1.

$$\text{rk}(\Phi(1)) = r$$

証明. $\Phi(1) = \Lambda\Gamma'$ より $\Phi(1)$ の各列は Λ の各列の線形結合. □

1.4 VECM

定義 2. VAR(p) モデルのベクトル誤差修正モデル (*vector error correction model, VECM*) による表現は, 任意の t について

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{y}_t &= -\Lambda\Gamma'\mathbf{y}_{t-1} + \Phi_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \cdots \\ &\quad + \Phi_{p-1}^*\Delta\mathbf{y}_{t-p+1} + \mathbf{w}_t\end{aligned}$$

注 2. 長期均衡の誤差 $\Gamma'\mathbf{y}_{t-1}$ を係数 Λ だけ修正する方向に $\Delta\mathbf{y}_t$ が変化する.

注 3. $\{\mathbf{y}_t\}$ の VAR(p) モデルなので, $p-1$ 次の項 $\Delta\mathbf{y}_{t-p+1} := \mathbf{y}_{t-p+1} - \mathbf{y}_{t-p}$ までしか含まない.

2 VECM の定式化と推定

2.1 定数項とトレンド

2.1.1 定数項あり・トレンドなし

定数項ありの VAR モデルは, 任意の t について

$$\Phi(\mathbf{L})(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{w}_t$$

定理 3. VECM 表現は, 任意の t について

$$\Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t = -\Lambda(\Gamma'\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{w}_t$$

ただし $\boldsymbol{\beta} := \Gamma'\boldsymbol{\mu}$.

証明. $\Phi(\mathbf{L}) = \Phi(1)\mathbf{L} + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})$ より任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{L})(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) &= [\Phi(1)\mathbf{L} + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})](\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \Phi(1)\mathbf{L}(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) + \Phi^*(\mathbf{L})(1 - \mathbf{L})(\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}) \\ &= \Phi(1)(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \Phi^*(\mathbf{L})\Delta\mathbf{y}_t\end{aligned}$$

VAR モデルに代入すると、任意の t について

$$\Phi(1)(y_{t-1} - \mu) + \Phi^*(L)\Delta y_t = w_t$$

$\Phi(1) = \Lambda\Gamma'$ より任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi^*(L)\Delta y_t &= -\Phi(1)(y_{t-1} - \mu) + w_t \\ &= -\Lambda\Gamma'(y_{t-1} - \mu) + w_t \\ &= -\Lambda(\Gamma'y_{t-1} - \beta) + w_t\end{aligned}$$

□

注 4. 共和分回帰に定数項が入る．展開すると、任意の t について

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = \Lambda\beta - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t$$

β は $r \times 1$ なので、 $\Lambda\beta$ は制約付きの定数項となる．制約のない定数項をもつ VECM は、任意の t について

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = c - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t$$

したがって $\{y_t\}$ はトレンドをもつ（矛盾）．

2.1.2 定数項あり・トレンドあり

定数項・トレンドありの VAR モデルは、任意の t について

$$\Phi(L)(y_t - \alpha - \mu t) = w_t$$

定理 4. VECM 表現は、任意の t について

$$\Phi^*(L)(\Delta y_t - \mu) = -\Lambda[\Gamma'y_{t-1} - \beta - \delta(t-1)] + w_t$$

ただし $\beta := \Gamma'\alpha$, $\delta := \Gamma'\mu$.

証明. $\Phi(L) = \Phi(1)L + \Phi^*(L)(1-L)$ より任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi(L)(y_t - \alpha - \mu t) &= [\Phi(1)L + \Phi^*(L)(1-L)](y_t - \alpha - \mu t) \\ &= \Phi(1)L(y_t - \alpha - \mu t) \\ &\quad + \Phi^*(L)(1-L)(y_t - \alpha - \mu t) \\ &= \Phi(1)[y_{t-1} - \alpha - \mu(t-1)] + \Phi^*(L)(\Delta y_t - \mu)\end{aligned}$$

VAR モデルに代入すると、任意の t について

$$\Phi(1)[y_{t-1} - \alpha - \mu(t-1)] + \Phi^*(L)(\Delta y_t - \mu) = w_t$$

$\Phi(1) = \Lambda\Gamma'$ より任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi^*(L)(\Delta y_t - \mu) &= -\Phi(1)[y_{t-1} - \alpha - \mu(t-1)] + w_t \\ &= -\Lambda\Gamma'[y_{t-1} - \alpha - \mu(t-1)] + w_t \\ &= -\Lambda[\Gamma'y_{t-1} - \beta - \delta(t-1)] + w_t\end{aligned}$$

□

注 5. 共和分回帰に定数項とトレンドが入る．展開すると、任意の t について

$$\begin{aligned}\Phi^*(L)\Delta y_t &= \Phi^*(1)\mu + \Lambda\beta + \Lambda\delta(t-1) - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t \\ &= \Phi^*(1)\mu + \Lambda(\beta - \delta) + \Lambda\delta t - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t\end{aligned}$$

δ は $r \times 1$ なので、 $\Lambda\delta t$ は制約付きのトレンドとなる（定数項は μ で調整されるので制約なし）．制約のないトレンドをもつ VECM は、任意の t について

$$\Phi^*(L)\Delta y_t = c + dt - \Lambda\Gamma'y_{t-1} + w_t$$

したがって $\{\Delta y_t\}$ がトレンドをもつので $\{y_t\}$ は 2 次のトレンドをもつ（矛盾）．

2.2 共和分行列の識別

$\Phi(\cdot)$ は識別可能だが、 $\Phi(1) = \Lambda\Gamma'$ から Λ, Γ は定まらない． Γ を識別する制約は 2 通りある．

1. $\Gamma'\Gamma = I_r$ （共和分ベクトルは長さ 1 で互いに直交）
2. $\Gamma := [I_r, \Gamma_2']'$ （共和分回帰で最初の r 個の変数を被説明変数、他を説明変数とする）

ただし前者は符号が定まらず、後者は共和分回帰の被説明変数の選択が恣意的になる．

2.3 条件付き ML 推定

正規 VECM の厳密な ML 推定は煩雑なので、条件付き ML 推定が普通．詳細は略．

2.4 ラグ次数と共和分階数の選択

VAR モデルの次数 p はモデル選択基準（AIC・SBIC・HQC）で選ぶ．予測が目的なら共和分階数もモデル選択基準で選んでよい．

2.5 インパルス応答関数

$\{y_t\}$ のインパルス応答関数は、VECM を VAR 表現に戻して計算する。ただし予測が目的でなければ VECM にせず、初めから VAR モデルを推定する方が共和分階数の定式化の誤りを避けられる。

3 Johansen の共和分検定

3.1 尤度比 (LR) 検定

母数を θ , 標本を (y_1, \dots, y_T) とする。次の検定問題を考える。

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \theta = \theta_1$$

母数が θ のときの (y_1, \dots, y_T) の同時 pdf を $p(\cdot; \theta)$ とする。 θ の尤度は

$$L(\theta) := p(y_1, \dots, y_T; \theta)$$

定義 3. $L(\theta_0)/L(\theta_1)$ を θ_0 と θ_1 の**尤度比** (*likelihood ratio, LR*) という。

定義 4. 尤度比を用いる検定を**尤度比 (LR) 検定**という。

定義 5. $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ の LR 検定統計量は

$$LR := -2 \ln \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}$$

注 6. $L(\theta_1) \gg L(\theta_0) > 0$ すなわち LR 検定統計量が十分に大きければ H_0 を棄却。

定義 6. 共和分階数の LR 検定を *Johansen の共和分検定* という。

注 7. H_1 の違いにより 2 種類の検定がある。

3.2 トレース検定

$\{y_t\}$ を共和分階数 r の N 変量正規 VAR 過程とする。次の検定問題を考える。

$$H_0 : r = r_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : r = N$$

H_0 の下で LR 検定統計量は、ある確率行列のトレース (対角成分の和) に分布収束する。

定義 7. $H_0 : r = r_0$ vs $H_1 : r = N$ の LR 検定を**トレース検定**という。

注 8. 定数項・トレンドの有無で LR 検定統計量の漸近分布は異なる。

3.3 最大固有値検定

次の検定問題を考える。

$$H_0 : r = r_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : r = r_0 + 1$$

H_0 の下で LR 検定統計量は、ある確率行列の最大固有値に分布収束する。

定義 8. $H_0 : r = r_0$ vs $H_1 : r = r_0 + 1$ の LR 検定を**最大固有値検定**という。

注 9. 定数項・トレンドの有無で LR 検定統計量の漸近分布は異なる。

4 今日のキーワード

共和分行列, グレンジャーの表現定理, ベクトル誤差修正モデル (VECM), 尤度比, 尤度比 (LR) 検定, LR 検定統計量, Johansen の共和分検定, トレース検定, 最大固有値検定

5 次回までの準備

提出 宿題 12

復習 復習テスト 12

予習 特になし