経済統計：第 2 回中間試験

村澤 康友

2017 年 5 月 29 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1.（20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 幾何分布
   (b) 条件つき分散
   (c)（確率変数の）独立性
   (d) 分布収束
2.（30 点）
   (a) ベルヌーイ試行から負の 2 項分布 $\mathrm{NB}(r, p)$ を定義し，その確率関数を導きなさい．
   (b) ポアソン分布 $\mathrm{Poi}(\lambda)$ の確率関数は

$$p(x) := \begin{cases} \lambda^x \mathrm{e}^{-\lambda}/x! & \text{for } x = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

   y 時間での成功回数 X が $\mathrm{Poi}(\lambda y)$ にしたがうなら，初成功までの待ち時間 Y は指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$ にしたがう．この関係を用いて $\mathrm{Exp}(\lambda)$ の累積分布関数と確率密度関数を導きなさい．
   (c) $X \sim \mathrm{N}(1, 4)$ とする．標準正規分布表を利用して $\Pr[|X| \geq 3]$ を求めなさい．
3.（50 点）(X, Y) は次の同時累積分布関数をもつ．

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} x^2 y^2 & \text{for } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

   (a) (X, Y) の同時密度関数を求めなさい．
   (b) X と Y の周辺密度関数を求めなさい．
   (c) X と Y の平均を求めなさい．
   (d) X と Y の分散を求めなさい．
   (e) X と Y の共分散を求めなさい．

解答例

1. 確率の基本用語
   (a) 独立かつ同一なベルヌーイ試行における初成功までの失敗回数の分布.
   (b) $\operatorname{var}(X|Y=y) := \mathrm{E}\left((X-\mathrm{E}(X|Y=y))^2|Y=y\right)$.
      - 「条件つき分布の分散」は 1 点（その定義が必要).
   (c) 任意の (x,y) について $f_{X|Y}(x|Y=y)=f_X(x)$ なら X と Y は独立.
   (d) $\{X_n\}$ に対応する cdf の列を $\{F_n(.)\}$ とする．$F(.)$ の任意の連続点 x で
   $$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$
   なら $\{X_n\}$ は $F(.)$ に分布収束.
2. 1 変量分布の例
   (a) 定義は「独立かつ同一なベルヌーイ試行において r 回成功するまでの失敗回数の分布」. 確率関数は
   $$p(x) = \begin{cases} {}_{r+x-1}C_x p^r(1-p)^x & \text{for } x=0,1,\dots \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$
   (b) X の確率関数は
   $$p_X(x) := \begin{cases} (\lambda y)^x \mathrm{e}^{-\lambda y}/x! & \text{for } x=0,1,\dots \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$
   Y の累積分布関数は
   $$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y\le y] \\ &= 1-\Pr[Y>y] \\ &= 1-\Pr[X=0] \\ &= 1-\mathrm{e}^{-\lambda y} \end{aligned}$$
   Y の確率密度関数は
   $$\begin{aligned} f(x) &= F'(y) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } y\le 0 \\ \lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} & \text{for } y>0 \end{cases} \end{aligned}$$
   (c)
   $$\Pr[|X|\ge 3] = \Pr[X\le -3] + \Pr[X\ge 3]$$
   ここで
   $$\begin{aligned} \Pr[X\le -3] &= \Pr\left[\frac{X-1}{2}\le\frac{-3-1}{2}\right] \\ &= \Phi(-2) \\ &= Q(2) \\ &= .022750 \\ \Pr[X\ge 3] &= \Pr\left[\frac{X-1}{2}\ge\frac{3-1}{2}\right] \\ &= Q(1) \\ &= .15866 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\Pr[|X| \geq 3] &= .022750 + .15866 \\ &= .18141\end{aligned}$$

3. 2 変量分布

（a）(X, Y) の同時密度関数は

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(x,y) \\ &= \begin{cases} 4xy & \text{for } 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}\end{aligned}$$

（b）X の周辺密度関数は

$$\begin{aligned}f_X(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 4xy\,\mathrm{d}y \\ &= 4x \int_0^1 y\,\mathrm{d}y \\ &= 4x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 2x\end{aligned}$$

同様に Y の周辺密度関数は

$$f_Y(y) = 2y$$

（c）X の平均は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X) &= \int_0^1 x(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Y の平均も同じ．

（d）X の 2 次の積率は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(X^2\right) &= \int_0^1 x^2(2x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

X の分散は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} \\
&= \frac{1}{18}
\end{aligned}
$$

Y の分散も同じ.

（e）X と Y は独立なので共分散は 0.