中級統計学：復習テスト 22

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2025 年 12 月 19 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 21〜26 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 27 日の予定）に提出すること．

1. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}$ とする．次の片側検定問題を考える．

$$H_0 : \mu = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > c$$

有意水準を 5 %とする．

(a) 検定統計量を与えなさい．

(b) 検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい．

(c) $n = 10$ として検定の棄却域を定めなさい．

(d) 検定統計量の値が 2.0 なら検定結果はどうなるか？

2. $\mathrm{N}\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$, $\mathrm{N}\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$ から独立に抽出した大きさ m, n の無作為標本の標本分散を s_X^2, s_Y^2 とする．次の片側検定問題を考える．

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$$

有意水準を 5 %とする．

（a）検定統計量を与えなさい．

（b）検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい．

（c）$m = 4,\ n = 6$ として検定の棄却域を定めなさい．

（d）検定統計量の値が 2.0 なら検定結果はどうなるか？

（e）p 値が 0.1 なら検定結果はどうなるか？

解答例

1. (a) $\bar{X}$ の標本分布は

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

標準化すると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim \mathrm{t}(n-1)$$

$H_0 : \mu = c$ を代入すると，検定統計量は

$$t := \frac{\bar{X}-c}{\sqrt{s^2/n}}$$

(b) H_0 の下で

$$t \sim \mathrm{t}(n-1)$$

(c) t 分布表より H_0 の下で

$$\Pr[t \geq 1.833] = 0.05$$

したがって棄却域は $[1.833, \infty)$.

(d) 2.0 は棄却域 $[1.833, \infty)$ に入るので H_0 を棄却して H_1 を採択.

2. (a) s_X^2, s_Y^2 の標本分布は

$$\frac{(m-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \sim \chi^2(m-1)$$
$$\frac{(n-1)s_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim \chi^2(n-1)$$

両者は独立だから

$$\frac{s_X^2/\sigma_X^2}{s_Y^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

すなわち

$$\frac{s_X^2/s_Y^2}{\sigma_X^2/\sigma_Y^2} \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ を代入すると，検定統計量は

$$F := \frac{s_X^2}{s_Y^2}$$

(b) H_0 の下で

$$F \sim \mathrm{F}(m-1, n-1)$$

(c) F 分布表より H_0 の下で

$$\Pr[F \geq 5.409] = 0.05$$

したがって棄却域は $[5.409, \infty)$.

(d) 2.0 は採択域 $(-\infty, 5.409)$ に入るので H_0 を採択.

(e) p 値＞有意水準より H_0 を採択.