計量分析 2：復習テスト 5

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 10 月 24 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 をまとめて左上でホチキス止めし，中間試験実施日（11 月 28 日の予定）に提出すること．

1. 平均 μ，分散 σ^2 の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}_n$，標本分散を s_n^2 とする．
   (a) $\bar{X}_n$ が μ の不偏推定量であることを示しなさい．

   (b) $\bar{X}_n$ が μ の一致推定量であることを示しなさい（ヒント：大数の法則）．

   (c) $\bar{X}_n$ の分散を求めなさい．

   (d) $\bar{X}_n$ の漸近分布を求めなさい（ヒント：中心極限定理）．

   (e) s_n^2 が σ^2 の不偏推定量であることを示しなさい．

2. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を $\bar{X}$ とする．次の片側検定問題を考える．

$$H_0 : \mu = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > c$$

有意水準を 5 %とする．

(a) $\bar{X}$ の分布を求めなさい．

(b) 検定統計量を与えなさい．

(c) 検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい．

(d) $n = 10$ として検定の棄却域を定めなさい（必要な分布表は各自で入手すること）．

(e) 検定統計量の値が 2.0 なら検定結果はどうなるか？

(f) p 値が 0.1 なら検定結果はどうなるか？

解答例

1.（a）期待値の線形性より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\bar{X}_n\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1+\cdots+X_n)}{n} \\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_n)}{n} \\
&= \frac{\mu+\cdots+\mu}{n} \\
&= \mu
\end{aligned}$$

（b）（チェビシェフの）大数の弱法則より

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \bar{X}_n = \mu$$

（c）$X_1,\dots,X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(\bar{X}_n\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1+\cdots+X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1)+\cdots+\mathrm{var}(X_n)}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2+\cdots+\sigma^2}{n^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

（d）（リンドバーグ＝レヴィの）中心極限定理より

$$\bar{X}_n \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

（e）$\mathrm{E}\left(s_n^2\right)=\sigma^2$ を示すには，次式を示せばよい．

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}_n\right)^2\right) = (n-1)\sigma^2$$

ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}_n\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-\left(\bar{X}_n-\mu\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)\left(\bar{X}_n-\mu\right)+\left(\bar{X}_n-\mu\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\left(\bar{X}_n-\mu\right)+n\left(\bar{X}_n-\mu\right)^2
\end{aligned}$$

第 2 項は

$$
\begin{aligned}
-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\left(\bar{X}_n-\mu\right) &= -2\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right)\left(\bar{X}_n-\mu\right)\\
&= -2\left(n\bar{X}_n-n\mu\right)\left(\bar{X}_n-\mu\right)\\
&= -2n\left(\bar{X}_n-\mu\right)^2
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}_n\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2n\left(\bar{X}_n-\mu\right)^2+n\left(\bar{X}_n-\mu\right)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n\left(\bar{X}_n-\mu\right)^2
\end{aligned}
$$

期待値をとると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}_n\right)^2\right) &= \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n\left(\bar{X}_n-\mu\right)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left((X_i-\mu)^2\right)-n\,\mathrm{E}\left(\left(\bar{X}_n-\mu\right)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i)-n\,\mathrm{var}\left(\bar{X}_n\right)\\
&= n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\\
&= (n-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

両辺を $n-1$ で割ると $\mathrm{E}\left(s_n^2\right)=\sigma^2$.

2. (a) 前問の計算より $\bar{X}$ の平均は μ, 分散は σ^2/n. 正規分布の線形変換は正規分布なので

$$
\bar{X}\sim \mathrm{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)
$$

(b) 検定統計量は

$$
t := \frac{\bar{X}-c}{\sqrt{s^2/n}}
$$

(c) H_0 の下で

$$
t\sim \mathrm{t}(n-1)
$$

(d) t 分布表より H_0 の下で

$$
\Pr[t\geq 1.833]=.05
$$

したがって棄却域は $[1.833,\infty)$.

(e) t 統計量の値が棄却域に入るので H_0 は棄却.

(f) p 値＞有意水準なので H_0 は採択.