

中級統計学：復習テスト 16

学籍番号_____ 氏名_____

2025 年 11 月 25 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 14~20 を順に重ねて左上でホチキス止めし、第 3 回中間試験実施日（12 月 12 日の予定）に提出すること。

1. $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本を (X_1, \dots, X_n) とする。 μ は既知とする。

(a) 標本分散 $\hat{\sigma}^2$ を式で定義しなさい。

(b) $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$ となることを示しなさい。

(c) $\sigma^2 = 1$ とする。 $n = 10$ のとき $\hat{\sigma}^2 > 2$ の確率を χ^2 分布表を利用して求めなさい。

2. $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本を (X_1, \dots, X_n) とする. μ, σ^2 は未知とする.

(a) 標本平均 \bar{X} を式で定義しなさい.

(b) 標本分散 s^2 を式で定義しなさい.

(c) $(n - 1)s^2/\sigma^2$ はどのような分布をもつか?

(d) $(\bar{X} - \mu) / \sqrt{s^2/n}$ はどのような分布をもつか?

(e) $\mu = 0$ とする. $n = 9, s^2 = 1$ のとき $\bar{X} > 1$ の確率を t 分布表を利用して求めなさい.

解答例

1. (a)

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

(b) $Z_i := (X_i - \mu)/\sigma$ とするとき

$$\begin{aligned}\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \\ &= \left(\frac{X_1 - \mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \\ &= Z_1^2 + \cdots + Z_n^2\end{aligned}$$

$Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$ は独立なので、 $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$.

(c)

$$\begin{aligned}\Pr[\hat{\sigma}^2 > 2] &= \Pr\left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > \frac{2n}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr[\chi^2(10) > 20] \\ &\approx .03\end{aligned}$$

2. (a)

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

(b)

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

(c)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(d)

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1)$$

(e)

$$\begin{aligned}\Pr[\bar{X} > 1] &= \Pr\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} > \frac{1 - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\right] \\ &= \Pr[t(8) > 3] \\ &\approx .008\end{aligned}$$