

中級統計学：復習テスト 15

学籍番号_____氏名_____

2022 年 11 月 25 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 14～20 を（左上で）ホチキス止めし，第 3 回中間試験実施日（12 月 16 日の予定）にまとめて提出すること。

1. 母集団分布を $\text{Bin}(1, p)$ とする。母集団から無作為抽出した標本を (X_1, \dots, X_n) とする。

(a) 標本和を式で定義しなさい。

(b) 標本和の pmf を求めなさい。

(c) 標本平均を式で定義しなさい。

(d) 標本平均の pmf を求めなさい。

2. 平均 μ , 分散 σ^2 の母集団から無作為抽出した標本を (X_1, \dots, X_n) とする.

(a) μ は既知とする.

i. 標本分散 $\hat{\sigma}^2$ を式で定義しなさい.

ii. $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ となることを示しなさい.

(b) μ は未知とする.

i. 標本分散 s^2 を式で定義しなさい.

ii. $E(s^2) = \sigma^2$ となることを示しなさい.

解答例

1. (a)

$$T := X_1 + \cdots + X_n$$

(b) $T \sim \text{Bin}(n, p)$ なので

$$p_T(t) = \begin{cases} {}_n C_t p^t (1-p)^{n-t} & \text{for } t = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

(c)

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

(d)

$$\begin{aligned} p_{\bar{X}}(x) &:= \Pr [\bar{X} = x] \\ &= \Pr [T = nx] \\ &= p_T(nx) \\ &= \begin{cases} {}_n C_{nx} p^{nx} (1-p)^{n-nx} & \text{for } x = 0, 1/n, 2/n, \dots, 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \end{aligned}$$

2. (a) i.

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

ii. 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\hat{\sigma}^2) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((X_i - \mu)^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

(b) i.

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

ii. 次式を示せばよい.

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right) = (n-1)\sigma^2$$

ここで

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 &= \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu)]^2 \\&= \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + (\bar{X} - \mu)^2] \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) (\bar{X} - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2(n\bar{X} - n\mu)(\bar{X} - \mu) + n(\bar{X} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2n(\bar{X} - \mu)^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 \\&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2\end{aligned}$$

期待値をとると

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} ((X_i - \mu)^2) - n \mathbb{E} ((\bar{X} - \mu)^2) \\&= \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) - n \text{var}(\bar{X}) \\&= n\sigma^2 - n \frac{\sigma^2}{n} \\&= (n-1)\sigma^2\end{aligned}$$