

第 10 回 不均一分散 (7.4–7.5)

村澤 康友

2025 年 6 月 24 日

今日のポイント

1. 回帰モデルで $\text{var}(Y|X)$ が X に依存することを条件つき不均一分散という.
2. 条件つき不均一分散があるなら標準誤差の修正が必要. White の標準誤差は条件つき不均一分散があっても (なくても) 漸近的に正しい.
3. Breusch–Pagan の検定や White の検定で条件つき不均一分散の有無を検定できる.

目次

1	不均一分散 (p. 178)	1
2	標準誤差の修正	1
2.1	OLS 推定量の漸近分散 (p. 180) . .	1
2.2	White の標準誤差 (p. 180)	2
3	不均一分散の検定	3
3.1	Breusch–Pagan の検定 (p. 182) .	3
3.2	White の検定 (p. 183)	3
4	今日のキーワード	4
5	次回までの準備	4

1 不均一分散 (p. 178)

(Y, X) を確率ベクトルとする. Y の X 上への古典的線形回帰モデルは

$$\begin{aligned} E(Y|X) &= \alpha + \beta X \\ \text{var}(Y|X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

すなわち古典的線形回帰モデルでは, $E(Y|X)$ のみ X に依存し, $\text{var}(Y|X)$ は X に依存しないと仮定する.

定義 1. $\text{var}(Y|X)$ が X に依存せず, 一定であることを条件つき均一分散という.

定義 2. $\text{var}(Y|X)$ が X に依存することを条件つき不均一分散という.

2 標準誤差の修正

2.1 OLS 推定量の漸近分散 (p. 180)

$((y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n))$ を無作為標本とする. 簡単化のため定数項なしの単回帰モデルで考える. すなわち

$$\begin{aligned} y_i &= \beta x_i + u_i \\ E(u_i|x_i) &= 0 \end{aligned}$$

β の OLS 推定量を b_n とすると

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

定理 1.

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\text{var}(x_i u_i)}{E(x_i^2)^2}\right)$$

証明. b_n の式に $y_i = \beta x_i + u_i$ を代入すると

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i(\beta x_i + u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

式変形すると

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) = \frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

大数の法則より

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = E(x_i^2)$$

$E(u_i|x_i) = 0 \implies E(x_i u_i) = 0$ なので中心極限定理より

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n x_i u_i \xrightarrow{d} N(0, \text{var}(x_i u_i))$$

スルツキーの定理とクラメルの定理より

$$\frac{(1/\sqrt{n}) \sum_{i=1}^n x_i u_i}{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2} \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\text{var}(x_i u_i)}{E(x_i^2)^2}\right)$$

□

注 1. $E(u_i|x_i) = 0 \implies E(x_i u_i) = 0$ より

$$\begin{aligned} \text{var}(x_i u_i) &= E((x_i u_i)^2) \\ &= E(x_i^2 u_i^2) \end{aligned}$$

系 1. $\text{var}(u_i|x_i) = \sigma^2$ なら

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{\sigma^2}{E(x_i^2)}\right)$$

証明. 繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} \text{var}(x_i u_i) &= E(x_i^2 u_i^2) \\ &= E(x_i^2 E(u_i^2|x_i)) \\ &= E(x_i^2 \text{var}(u_i|x_i)) \\ &= E(x_i^2 \sigma^2) \\ &= \sigma^2 E(x_i^2) \end{aligned}$$

したがって前定理の漸近分散は

$$\begin{aligned} \frac{\text{var}(x_i u_i)}{E(x_i^2)^2} &= \frac{\sigma^2 E(x_i^2)}{E(x_i^2)^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{E(x_i^2)} \end{aligned}$$

□

2.2 White の標準誤差 (p. 180)

条件つき不均一分散の下で $\text{var}(x_i u_i) = E(x_i^2 u_i^2)$ を推定したい. OLS 残差を e_i とすると

$$\begin{aligned} e_i &:= y_i - b_n x_i \\ &= y_i - \beta x_i - (b_n x_i - \beta x_i) \\ &= u_i - (b_n - \beta) x_i \end{aligned}$$

定義 3. $\text{var}(x_i u_i)$ の White の推定量は

$$\hat{\text{var}}(x_i u_i) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2$$

定理 2.

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2 = E(x_i^2 u_i^2)$$

証明. e_i と u_i の関係式より

$$\begin{aligned} e_i^2 &= [u_i - (b_n - \beta)x_i]^2 \\ &= u_i^2 - 2(b_n - \beta)x_i u_i + (b_n - \beta)^2 x_i^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 [u_i^2 - 2(b_n - \beta)x_i u_i + (b_n - \beta)^2 x_i^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^2 - 2(b_n - \beta) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3 u_i \\ &\quad + (b_n - \beta)^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ とすると, 第 1 項は大数の法則より

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 u_i^2 = E(x_i^2 u_i^2)$$

$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ なのでスルツキーの定理より第 2 項と第 3 項は 0 に確率収束. □

注 2. したがって

$$\sqrt{n}(b_n - \beta) \stackrel{a}{\sim} N\left(0, \frac{(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2}{[(1/n) \sum_{i=1}^n x_i^2]^2}\right)$$

または

$$b_n \stackrel{a}{\sim} N\left(\beta, \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 e_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2}\right)$$

定義 4. White の推定量を用いた標準誤差を White の標準誤差という.

注 3. 条件つき不均一分散があっても (なくても) 漸近的に正しい標準誤差.

3 不均一分散の検定

3.1 Breusch-Pagan の検定 (p. 182)

$(1+k)$ 変量データを $((y_1, \mathbf{x}_1), \dots, (y_n, \mathbf{x}_n))$ とする. 次のような y_i の \mathbf{x}_i 上への条件つき不均一分散をもつ線形回帰モデルを仮定する.

$$\begin{aligned} y_i &= \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + u_i \\ E(u_i | \mathbf{x}_i) &= 0 \\ \text{var}(u_i | \mathbf{x}_i) &= \sigma^2 f(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\gamma}) \end{aligned}$$

ただし $f(\cdot) > 0$, $f(0) = 1$. また $\boldsymbol{\gamma}$ は $(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$ に依存しない. 条件つき不均一分散の検定問題は

$$H_0 : \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad \text{vs} \quad H_1 : \boldsymbol{\gamma} \neq \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定量を \mathbf{b} , OLS 残差を $e_i := y_i - \mathbf{x}_i' \mathbf{b}$ とする. H_0 の下での誤差分散の推定量は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2$$

定理 3. H_0 の下で

$$E(u_i^2 - \sigma^2 | \mathbf{x}_i) = 0$$

証明. $E(u_i | \mathbf{x}_i) = 0$ より $\text{var}(u_i | \mathbf{x}_i) = E(u_i^2 | \mathbf{x}_i)$. したがって H_0 の下で

$$E(u_i^2 | \mathbf{x}_i) = \sigma^2$$

□

注 4. すなわち H_0 の下で $u_i^2 - \sigma^2$ は \mathbf{x}_i で予測できない. u_i を e_i , σ^2 を $\hat{\sigma}^2$ に置き換えると, H_0 の下で

$$E(e_i^2 - \hat{\sigma}^2 | \mathbf{x}_i) \approx 0$$

これを回帰モデルとみなして「 H_0 : 全ての回帰係数 = 0」を検定すればよい. ただし古典的の正規線形回帰モデルでないので F 検定でなく漸近 χ^2 検定を用いる.

定義 5. $e_i^2 - \hat{\sigma}^2$ の \mathbf{x}_i 上への線形回帰モデルにおける「 H_0 : 全ての回帰係数 = 0」の漸近 χ^2 検定を *Breusch-Pagan の検定* という.

注 5. 正確には Breusch-Pagan の検定の Koenker による改良版.

定理 4. *Breusch-Pagan* の検定統計量を LM とすると, H_0 の下で

$$LM \stackrel{a}{\sim} \chi^2(k)$$

証明. 省略.

□

3.2 White の検定 (p. 183)

$(1+k)$ 変量データを $((y_1, \mathbf{x}_1), \dots, (y_n, \mathbf{x}_n))$ とする. y_i の \mathbf{x}_i 上への線形回帰モデルは

$$\begin{aligned} y_i &= \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + u_i \\ E(u_i | \mathbf{x}_i) &= 0 \end{aligned}$$

条件つき不均一分散の検定問題は

$$\begin{aligned} H_0 : \text{var}(u_i | \mathbf{x}_i) &= \sigma^2 \\ \text{vs} \quad H_1 : \text{var}(u_i | \mathbf{x}_i) &= \sigma^2(\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

$E(u_i | \mathbf{x}_i) = 0 \implies E(\mathbf{x}_i u_i) = \mathbf{0}$ より

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathbf{x}_i u_i) &= E(\mathbf{x}_i u_i (\mathbf{x}_i u_i)') \\ &= E(u_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') \end{aligned}$$

繰り返し期待値の法則より

$$\begin{aligned} E(u_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') &= E(E(u_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' | \mathbf{x}_i)) \\ &= E(E(u_i^2 | \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') \\ &= E(\text{var}(u_i | \mathbf{x}_i) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') \end{aligned}$$

したがって条件つき不均一分散の検定問題は

$$\begin{aligned} H_0 : \text{var}(\mathbf{x}_i u_i) &= \sigma^2 E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') \\ \text{vs} \quad H_1 : \text{var}(\mathbf{x}_i u_i) &= E(u_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') \end{aligned}$$

以下の行列を定義する.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &:= \sigma^2 E(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') \\ \mathbf{V}_1 &:= E(u_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') \end{aligned}$$

すると検定問題は

$$H_0 : \mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_1 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mathbf{V}_0 \neq \mathbf{V}_1$$

または

$$H_0 : \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 = \mathbf{0} \quad \text{vs} \quad H_1 : \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 \neq \mathbf{0}$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0 &= \mathbf{E}(u_i^2 \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') - \sigma^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') \\ &= \mathbf{E}((u_i^2 - \sigma^2) \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i') \end{aligned}$$

ただし

$$\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' = \begin{bmatrix} x_{i,1}^2 & \cdots & x_{i,1}x_{i,k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i,k}x_{i,1} & \cdots & x_{i,k}^2 \end{bmatrix}$$

この $k \times k$ 行列は対角線を挟んで対称なので、異なる成分は $k(k+1)/2$ 個。これらを並べたベクトルを $\mathbf{z}_i := \text{vech}(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$ とする。ただし $\text{vech}(\cdot)$ は正方向行列の下三角部分の成分を取り出して並べる関数。すると H_0 の下で

$$\mathbf{E}((u_i^2 - \sigma^2) \mathbf{z}_i) = \mathbf{0}$$

β の OLS 推定量を \mathbf{b} , OLS 残差を $e_i := y_i - \mathbf{x}_i' \mathbf{b}$ とする。 H_0 の下での誤差分散の推定量は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i^2$$

定理 5. H_0 の下で

$$\text{cov}(u_i^2 - \sigma^2, \mathbf{z}_i) = \mathbf{0}$$

証明. $\mathbf{E}(u_i | \mathbf{x}_i) = 0$ より $\text{var}(u_i | \mathbf{x}_i) = \mathbf{E}(u_i^2 | \mathbf{x}_i)$.
したがって H_0 の下で

$$\mathbf{E}(u_i^2 | \mathbf{x}_i) = \sigma^2$$

両辺の期待値をとると、繰り返し期待値の法則より

$$\mathbf{E}(u_i^2) = \sigma^2$$

したがって H_0 の下で

$$\text{cov}(u_i^2 - \sigma^2, \mathbf{z}_i) = \mathbf{E}((u_i^2 - \sigma^2) \mathbf{z}_i)$$

既に見た通り右辺は $\mathbf{0}$. □

注 6. u_i を e_i , σ^2 を $\hat{\sigma}^2$ に置き換えると、 H_0 の下で

$$\text{cov}(e_i^2 - \hat{\sigma}^2, \mathbf{z}_i) \approx \mathbf{0}$$

$e_i^2 - \hat{\sigma}^2$ の \mathbf{z}_i 上への線形回帰モデルを考えると、 H_0 の下で全ての回帰係数 = 0.

定義 6. $e_i^2 - \hat{\sigma}^2$ の $\mathbf{z}_i := \text{vech}(\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i')$ 上への線形回帰モデルにおける「 H_0 : 全ての回帰係数 = 0」の漸近 χ^2 検定を **White の検定** という。

注 7. e_i^2 の (\hat{y}_i, \hat{y}_i^2) 上への線形回帰モデルとして実行する方法もあるが、あまり一般的でない。

定理 6. White の検定統計量を W とすると、 H_0 の下で

$$W \overset{a}{\sim} \chi^2 \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)$$

証明. 省略. □

注 8. どのような不均一分散でも使えるが、自由度が大きいため検出力が低い。

4 今日のキーワード

条件つき均一分散, 条件つき不均一分散, White の推定量, White の標準誤差, Breusch-Pagan の検定, White の検定

5 次回までの準備

提出 宿題 7

復習 教科書第 7 章 4-5 節, 復習テスト 10

予習 教科書第 8 章