経済統計：第 3 回中間試験

村澤 康友

2015 年 7 月 13 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 統計量
   (b) χ^2 分布
   (c) t 分布
   (d) F 分布
2. （30 点）府大生の平均通学時間を調べたい．そこで無作為に選んだ府大生 5 人に通学時間を尋ねたところ，20 分・40 分・50 分・60 分・80 分という回答が得られた．
   (a) 標本平均と標本分散を求めなさい．
   (b) 標本平均の分散の推定値を求めなさい．
   (c) 正規母集団を仮定して平均通学時間の 90 %信頼区間を求めなさい．
3. （50 点）無作為標本を用いた母平均・母分散の推定について以下の問いに答えなさい．
   (a) 標本平均が母平均の不偏推定量であることを示しなさい．
   (b) 標本分散が母分散の不偏推定量であることを示しなさい．
   さらに正規母集団を仮定して以下の問いに答えなさい．
   (c) 標本平均の標本分布を求めなさい．
   (d) 標本分散の標本分布を書きなさい（証明不要）．
   (e) 標本平均が母平均の漸近有効推定量である理由を説明しなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 標本の関数.
   (b) $Z_1, \dots, Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ が独立のときの $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$ の分布.
   (c) $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ と $X \sim \chi^2(n)$ が独立のときの $Z/\sqrt{X/n}$ の分布.
   (d) $U \sim \chi^2(m)$ と $V \sim \chi^2(n)$ が独立のときの $(U/m)/(V/n)$ の分布.
2. 母平均の区間推定
   (a) 標本平均は

$$\begin{aligned}\bar{X} &:= \frac{20+40+50+60+80}{5} \\ &= 50\end{aligned}$$

標本分散は

$$\begin{aligned}s^2 &:= \frac{(20-50)^2+(40-50)^2+(50-50)^2+(60-50)^2+(80-50)^2}{4} \\ &= \frac{900+100+0+100+900}{4} \\ &= 500\end{aligned}$$

   - 不偏分散でなければダメ.

   (b)（無作為標本の）標本平均の分散は

$$\begin{aligned}\operatorname{var}\left(\bar{X}\right) &= \operatorname{var}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right) \\ &= \frac{\operatorname{var}(X_1+\cdots+X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\operatorname{var}(X_1)+\cdots+\operatorname{var}(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

推定値は

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{n} &= \frac{500}{5} \\ &= 100\end{aligned}$$

   - 前問の s^2 と整合的なら OK.

   (c)（無作為標本の）標本平均の分布は

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

標準化すると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim \mathrm{t}(n-1)$$

t 分布表より $n=5$ なら

$$\Pr\left[-2.132<\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}}<2.132\right]=.9$$

または

$$\Pr\left[-2.132\sqrt{\frac{s^2}{n}}<\bar{X}-\mu<2.132\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right]=.9$$

または

$$\Pr\left[\bar{X}-2.132\sqrt{\frac{s^2}{n}}<\mu<\bar{X}+2.132\sqrt{\frac{s^2}{n}}\right]=.9$$

前問の結果を代入すると，90 %信頼区間は $(28.68, 71.32)$.

- 前問の s^2/n と整合的なら OK.
- t 分布の自由度の誤り，t 分布表の読み違いは 0 点.

3. 母平均・母分散の点推定

（a）母平均を μ，標本平均を $\bar{X}$ とすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\bar{X}\right)&=\mathrm{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\\
&=\frac{\mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_n)}{n}\\
&=\frac{\mu+\cdots+\mu}{n}\\
&=\mu
\end{aligned}$$

（b）標本分散は

$$s^2:=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

母分散を σ^2 として次式を示せばよい.

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right)=(n-1)\sigma^2$$

ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2&=\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-\left(\bar{X}-\mu\right)\right]^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)\left(\bar{X}-\mu\right)+\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right]\\
&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\left(\bar{X}-\mu\right)+n\left(\bar{X}-\mu\right)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n\left(\bar{X}-\mu\right)^2
\end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left((X_i-\mu)^2\right)-n\,\mathrm{E}\left(\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i)-n\,\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) \\
&= n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n} \\
&= (n-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$

（c）正規母集団からの無作為標本なので

$$
X_1,\dots,X_n \sim \mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)
$$

$X_1,\dots,X_n$ の線形変換なので

$$
\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)
$$

- 結果のみは 5 点（正規分布となる理由の説明が必要）.

（d）

$$
\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)
$$

（e）正規母集団からの無作為標本の標本平均は母平均の ML 推定量であり，ML 推定量は一般に漸近有効だから.