

計量経済 I：復習テスト 5

学籍番号 _____ 氏名 _____

2025 年 5 月 13 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で、復習テスト 1～8 を順に重ねて左上でホチキス止めし、中間テスト実施日（6 月 10 日の予定）に提出すること。

1. 平均 μ , 分散 σ^2 の母集団から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を \bar{X}_n , 標本分散を s_n^2 とする。

(a) \bar{X}_n が μ の不偏推定量であることを示しなさい。

(b) \bar{X}_n が μ の一致推定量であることを示しなさい（ヒント：大数の法則）。

(c) \bar{X}_n の分散を求めなさい。

(d) \bar{X}_n の漸近分布を求めなさい（ヒント：中心極限定理）。

(e) s_n^2 が σ^2 の不偏推定量であることを示しなさい。

2. $N(\mu, \sigma^2)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を \bar{X} とする. 次の片側検定問題を考える.

$$H_0 : \mu = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu > c$$

有意水準を 5 % とする.

(a) \bar{X} の分布を求めなさい.

(b) 検定統計量を与えなさい.

(c) 検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい.

(d) $n = 10$ として検定の棄却域を定めなさい (必要な分布表は各自で入手すること).

(e) 検定統計量の値が 2.0 なら検定結果はどうなるか?

(f) p 値が 0.1 なら検定結果はどうなるか?

解答例

1. (a) 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} E(\bar{X}_n) &= E\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{E(X_1 + \cdots + X_n)}{n} \\ &= \frac{E(X_1) + \cdots + E(X_n)}{n} \\ &= \frac{\mu + \cdots + \mu}{n} \\ &= \mu \end{aligned}$$

(b) (チェビシェフの) 大数の弱法則より

$$\text{plim}_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu$$

(c) X_1, \dots, X_n は独立なので

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{X}_n) &= \text{var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{\text{var}(X_1 + \cdots + X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\text{var}(X_1) + \cdots + \text{var}(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} \\ &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

(d) (リンドバーグ=レヴィの) 中心極限定理より

$$\bar{X}_n \stackrel{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(e) $E(s_n^2) = \sigma^2$ を示すには、次式を示せばよい.

$$E\left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2\right) = (n-1)\sigma^2$$

ここで

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 &= \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu) - (\bar{X}_n - \mu)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [(X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)(\bar{X}_n - \mu) + (\bar{X}_n - \mu)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)(\bar{X}_n - \mu) + n(\bar{X}_n - \mu)^2 \end{aligned}$$

第 2 項は

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) (\bar{X}_n - \mu) &= -2 \left(\sum_{i=1}^n X_i - n\mu \right) (\bar{X}_n - \mu) \\ &= -2 (n\bar{X}_n - n\mu) (\bar{X}_n - \mu) \\ &= -2n (\bar{X}_n - \mu)^2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - 2n (\bar{X}_n - \mu)^2 + n (\bar{X}_n - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n (\bar{X}_n - \mu)^2 \end{aligned}$$

期待値をとると

$$\begin{aligned} E \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \right) &= E \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n (\bar{X}_n - \mu)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n E ((X_i - \mu)^2) - n E ((\bar{X}_n - \mu)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \text{var}(X_i) - n \text{var}(\bar{X}_n) \\ &= n\sigma^2 - n \frac{\sigma^2}{n} \\ &= (n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

両辺を $n-1$ で割ると $E(s_n^2) = \sigma^2$.

2. (a) 前問 (a)(c) より \bar{X} の平均は μ , 分散は σ^2/n . 正規分布の線形変換は正規分布なので

$$\bar{X} \sim N \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

(b) 前問の結果を標準化すると

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1)$$

$H_0 : \mu = c$ を代入すると, 検定統計量は

$$t := \frac{\bar{X} - c}{\sqrt{s^2/n}}$$

(c) H_0 の下で

$$t \sim t(n-1)$$

(d) 前問より $n = 10$ なら H_0 の下で $t \sim t(9)$. t 分布表より

$$\Pr[t \geq 1.833] = .05$$

したがって棄却域は $[1.833, \infty)$.

(e) t 統計量の値が 2.0 なら前問の棄却域に入るので H_0 は棄却.

(f) p 値が 0.1 なら有意水準 0.05 を上回るので H_0 は採択.