経済統計：第 1 回中間試験

村澤 康友

2016 年 5 月 9 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   （a）標本空間
   （b）条件つき確率
   （c）累積分布関数
   （d）積率
2. （30 点）
   （a）確率を公理によって定義しなさい．
   （b）X は次の cdf をもつ．
   $$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 1 \\ 1 - 1/x & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$
   $\Pr[2 < X \leq 3]$ を求めなさい．
   （c）$\mathrm{U}[0,1]$ の積率母関数を求めなさい．ただし $\mathrm{U}[0,1]$ は区間 $[0,1]$ 上の一様分布を表す．
3. （50 点）$X \sim \mathrm{U}[0,1]$ とする．すなわち任意の x について
   $$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{for } 1 < x \end{cases}$$
   $Y = X^2$ とする．
   （a）Y の cdf を求め，式とグラフで表しなさい．
   （b）Y の pdf を求め，式とグラフで表しなさい．
   （c）$\mathrm{E}(Y)$ を求めなさい．
   （d）$\mathrm{E}\left(Y^2\right)$ を求めなさい．
   （e）$\mathrm{var}(Y)$ を求めなさい．

解答例

1. 確率の基本用語
   (a) 試行において起こりうる結果（標本点）全体の集合.
   (b) 事象 B が起こったという条件の下での事象 A の条件つき確率は
   $$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
   (c) 任意の x に対して $\Pr[X \leq x]$ を与える関数.
   (d) X の k 次の積率は $\mu_{X,k} := \mathrm{E}\left(X^k\right)$.
2. 確率の基礎
   (a) 事象に対して定義され，以下の公理を満たす関数 $P(.)$ を確率という.
      i. $0 \leq P(.) \leq 1$
      ii. $P(\Omega) = 1$
      iii. （σ 加法性）$A_1, A_2, \dots$ が排反なら
      $$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$
      - 「事象に対して定義」で 2 点
      - 「$0 \leq P(.) \leq 1$」で 2 点
      - 「$P(\Omega) = 1$」で 2 点
      - 「σ 加法性」の説明で 4 点（「σ 加法性」のみは 2 点）
   (b)
   $$\begin{aligned}\Pr[2 < X \leq 3] &= \Pr[X \leq 3] - \Pr[X \leq 2] \\ &= F_X(3) - F_X(2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$
   (c) $U \sim \mathrm{U}[0,1]$ とすると
   $$\begin{aligned}M_U(t) &:= \mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tU}\right) \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{tu}\,\mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{\mathrm{e}^{tu}}{t}\right]_0^1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t}\end{aligned}$$
3. 1 変量分布の例

（a）任意の y について

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \le y] \\ &= \Pr\left[X^2 \le y\right] \\ &= \Pr\left[X \le y^{1/2}\right] \\ &= F_X\left(y^{1/2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ y^{1/2} & \text{for } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{for } 1 < y \end{cases} \end{aligned}$$

グラフは省略.

（b）任意の y について

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F_Y'(y) \\ &= \begin{cases} y^{-1/2}/2 & \text{for } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \end{aligned}$$

グラフは省略.

- (a) の解答と整合的なら OK.
- x の関数で書いたら 5 点.
- 左右の引数が異なるのは 0 点.
- 全範囲で積分して 1 でなければ 0 点.

（c）

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y \frac{y^{-1/2}}{2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \frac{y^{1/2}}{2}\,\mathrm{d}y \\ &= \left[\frac{y^{3/2}}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- (b) の解答と整合的なら OK.
- $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ で求めても OK.

（d）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(Y^2\right) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 y^2 \frac{y^{-1/2}}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{y^{3/2}}{2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{5} y^{5/2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

- (b) の解答と整合的なら OK.
- $\mathrm{E}\left(X^4\right)$ で求めても OK.

（e）

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(Y) &= \mathrm{E}\left(Y^2\right) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\
&= \frac{1}{5} - \frac{1}{9} \\
&= \frac{4}{45}
\end{aligned}
$$

- (c)(d) の解答と整合的なら OK.
- $\mathrm{var}\left(X^2\right)$ で求めても OK.
- 負の分散は 0 点.