

中級統計学：定期試験

村澤 康友

2023 年 1 月 24 日

注意：3 問とも解答すること。結果より思考過程を重視するので、途中計算等も必ず書くこと（部分点は大きいと与えるが、結果のみの解答は 0 点とする）。教科書のみ参照してよい（他の講義資料・ノートは持込不可）。

- (20 点) 以下で定義される統計学の専門用語をそれぞれ書きなさい。
 - とりあえず真と想定する仮説
 - OLS 問題の 1 階の条件を整理した式
 - 推定量の標準偏差の推定値
 - ある条件に該当するなら 1, 該当しないなら 0 とした変数
- (30 点) 教育の収益率（修学年数が 1 年増えることによる年収の増加率）を推定したい。そこで無作為標本を用いて年収（対数値）を修学年数で説明する単回帰分析を行い、次の結果を得た。

$$\widehat{\text{lincome}} = 4.38520 + 0.0651801 \text{yeduc}$$

(0.10031) (0.0071735)

$$T = 4327 \quad \bar{R}^2 = 0.0185 \quad F(1, 4325) = 82.559 \quad \hat{\sigma} = 0.88683$$

(丸括弧内は標準誤差)

- 教育の収益率の OLS 推定値を単位も含めて正確に答えなさい。
 - 教育の収益率の t 値を求めなさい。
 - 教育の収益率の 95 % 信頼区間を求めなさい（漸近分布で近似してよい）。
- (50 点) $N(\mu, \sigma^2)$ から抽出した大きさ n の無作為標本の標本平均を \bar{X} , 標本分散を s^2 とする。次の両側検定問題を考える。

$$H_0 : \mu = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq 0$$

有意水準を 5 % とする。

- \bar{X} の分布を求めなさい。
- t 検定統計量を与えなさい。
- $n = 20$ として t 検定の棄却域を定めなさい。
- F 検定統計量 $F := n\bar{X}^2/s^2$ を用いてもよい。F は H_0 の下でどのような分布をもつか？
- $n = 20$ として F 検定の棄却域を定めなさい。

解答例

1. 統計学の基本用語

- (a) 帰無仮説
- (b) 正規方程式
- (c) 標準誤差
- (d) ダミー変数

2. 単回帰分析

- (a) 6.51801%.
 - 0.0651801 は 5 点.
- (b) $t = 0.0651801/0.00717354 \approx 9.086$.
- (c) 教育の収益率を β , β の OLS 推定量を b , b の標準誤差を s とすると

$$\frac{b - \beta}{s} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$$

したがって

$$\Pr \left[-1.96 \leq \frac{b - \beta}{s} \leq 1.96 \right] \approx .95$$

または

$$\Pr[-1.96s \leq b - \beta \leq 1.96s] \approx .95$$

または

$$\Pr[b - 1.96s \leq \beta \leq b + 1.96s] \approx .95$$

$b = 0.0651801$, $s = 0.00717354$ より β の 95 % 信頼区間は $[0.0511162, 0.0792439]$, すなわち $[5.1\%, 7.9\%]$.

3. 母平均の検定

- (a)

$$\bar{X} \sim N \left(\mu, \frac{\sigma^2}{n} \right)$$

- 分散を s^2/n としたら 0 点.

- (b) t 検定統計量は

$$t := \frac{\bar{X}}{\sqrt{s^2/n}}$$

- $(\bar{X} - c) / \sqrt{s^2/n}$ は 5 点. $(\bar{X} - \mu) / \sqrt{s^2/n}$ や $\bar{X} / \sqrt{\sigma^2/n}$ は統計量でないので 0 点.

- (c) H_0 の下で $t \sim t(19)$ なので, t 分布表より

$$\Pr[|t| \geq 2.093] = .05$$

したがって棄却域は $(-\infty, -2.093] \cup [2.093, \infty)$.

- $t(19)$ で 2 点.

- (d) H_0 の下で $F = t^2 \sim F(1, 19)$.

- (e) F 分布表より

$$\Pr[F \geq 4.381] = .05$$

したがって棄却域は $[4.381, \infty)$.