経済統計：第 3 回中間試験

村澤 康友

2017 年 7 月 3 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 標本抽出
   (b) 2 標本問題
   (c) 推定
   (d) 有限標本（小標本）特性
2. （30 点）無作為標本の標本平均・標本分散について以下の問いに答えなさい．ただしすべての母数は未知とする．
   (a)「標本平均の平均は母平均に等しい」ことを証明しなさい．
   (b)「標本分散の平均は母分散に等しい」ことを証明しなさい．
   (c)「標本平均は母平均の最も良い推定量である」と言う場合の「最も良い」とはどういう意味か？
3. （50 点）F 大生の通学時間の母集団分布を $\mathrm{N}(50, 100)$ とする．無作為に選んだ F 大生 25 人の通学時間を $(X_1, \dots, X_{25})$ とする．
   (a) 標本和 $X_1 + \cdots + X_{25}$ の分布を求めなさい．
   (b) 標本平均 $\bar{X}$ の分布を求めなさい．
   (c)（母平均を未知とした）標本分散 s^2 の分布を示しなさい（証明不要）．
   (d) $\Pr\left[\left|\bar{X} - 50\right| \le c\right] = .95$ となる c を求めなさい．
   (e) $\Pr\left[a < s^2 \le b\right] = .95$ となる a, b を求めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 母集団から標本を取り出すこと.
      - 「全体」から「一部」を取り出す意味であれば OK.
      - 「母集団（全体)」と「標本（一部)」のどちらか一方のみは 2 点.
   (b) 標本を用いて 2 つの母集団を比較する問題.
      - 比較の対象が母集団でなければ 0 点.
   (c) 標本から母数を定めること.
      - 「標本から」と「母数を定める」の両方がなければ 0 点.
   (d) 推定量の厳密な分布に関する性質.
      - 「推定量の性質」と明記しなければ 0 点.
2. 標本平均・標本分散の有限標本特性
   (a) 母平均を μ，標本平均を $\bar{X}$ とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)\\ &= \frac{\mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_n)}{n}\\ &= \frac{\mu+\cdots+\mu}{n}\\ &= \mu\end{aligned}$$

      - 標本平均の定義で 5 点.
   (b) 標本分散は

$$s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$$

   母分散を σ^2 として次式を示せばよい.

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right) = (n-1)\sigma^2$$

   ここで

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)-\left(\bar{X}-\mu\right)\right]^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\mu)^2-2(X_i-\mu)\left(\bar{X}-\mu\right)+\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-2\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)\left(\bar{X}-\mu\right)+n\left(\bar{X}-\mu\right)^2\\ &= \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n\left(\bar{X}-\mu\right)^2\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left((X_i-\mu)^2\right)-n\,\mathrm{E}\left(\left(\bar{X}-\mu\right)^2\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i)-n\,\mathrm{var}\left(\bar{X}\right)\\
&= n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\\
&= (n-1)\sigma^2
\end{aligned}$$

- 標本分散の定義で 5 点.

（c）正規母集団なら不偏推定量の中で分散が最小.

- 「正規母集団なら漸近正規推定量の中で漸近分散が最小（漸近有効）」でも OK.
- 「正規母集団なら」がなければ 5 点減.

3. 標本平均・標本分散の標本分布

（a）

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_1+\cdots+X_{25}) &= \mathrm{E}(X_1)+\cdots+\mathrm{E}(X_{25})\\
&= 25\cdot 50\\
&= 1250\\
\mathrm{var}(X_1+\cdots+X_{25}) &= \mathrm{var}(X_1)+\cdots+\mathrm{var}(X_{25})\\
&= 25\cdot 100\\
&= 2500
\end{aligned}$$

したがって $X_1+\cdots+X_{25}\sim\mathrm{N}(1250,2500)$.

- 平均・分散のみは 5 点.

（b）

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1+\cdots+X_{25}}{25}\right)\\
&= \frac{\mathrm{E}(X_1+\cdots+X_{25})}{25}\\
&= \frac{1250}{25}\\
&= 50\\
\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1+\cdots+X_{25}}{25}\right)\\
&= \frac{\mathrm{var}(X_1+\cdots+X_{25})}{625}\\
&= \frac{2500}{625}\\
&= 4
\end{aligned}$$

したがって $\bar{X}\sim\mathrm{N}(50,4)$.

（c）一般に $(n-1)s^2/\sigma^2\sim\chi^2(n-1)$ より

$$\frac{24s^2}{100}\sim\chi^2(24)$$

- $(n-1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$ で 5 点.

（d）

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\left|\bar{X}-50\right| \le c\right] &= \Pr\left[-c \le \bar{X}-50 \le c\right] \\
&= \Pr\left[-\frac{c}{2} \le \frac{\bar{X}-50}{2} \le \frac{c}{2}\right] \\
&= .95
\end{aligned}$$

したがって

$$Q\left(\frac{c}{2}\right) = .025$$

標準正規分布表より

$$\frac{c}{2} \approx 1.96$$

したがって $c \approx 3.92$.

（e）$(24/100)s^2 \sim \chi^2(24)$ なので χ^2 分布表より

$$\Pr\left[12.4012 < \frac{24s^2}{100} \le 39.3641\right] = .95$$

または

$$\Pr\left[\frac{1240.12}{24} < s^2 \le \frac{3936.41}{24}\right] = .95$$

したがって $(a,b) = (51.67, 164.02)$.