中級統計学：復習テスト 3

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2025 年 10 月 3 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 1 回中間試験実施日（10 月 24 日の予定）に提出すること．

1. 1 変量データ $(x_1, \dots, x_n)$ の平均を μ，分散を σ^2 とする．

(a) σ^2 の定義を式で書きなさい．

(b) σ^2 が次のようにも書けることを示しなさい．

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mu^2$$

注：$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 := x_1^2 + \cdots + x_n^2$

2. 2 変量データ $((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ の平均を μ_x, μ_y，分散を σ_x^2, σ_y^2，共分散を σ_{xy}，相関係数を ρ_{xy} とする．

(a) σ_{xy} の定義を式で書きなさい．

(b) σ_{xy} が次のようにも書けることを示しなさい．

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \mu_x \mu_y$$

注：$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$

(c) ρ_{xy} の定義を式で書きなさい．

(d) ρ_{xy} が次のように書けることを示しなさい．

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

解答例

1. (a)

$$\sigma^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left[\left(x_1^2 - 2x_1\mu + \mu^2\right) + \cdots + \left(x_n^2 - 2x_n\mu + \mu^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\left(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 2x_1\mu - \cdots - 2x_n\mu + \mu^2 + \cdots + \mu^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}2x_i\mu + \sum_{i=1}^{n}\mu^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_i\mu + n\mu^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\mu + \mu^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\mu + \mu^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \mu^2
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\sigma_{xy} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xy} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - x_i\mu_y - \mu_x y_i + \mu_x\mu_y) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\mu_y - \mu_x\sum_{i=1}^{n} y_i + n\mu_x\mu_y\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\mu_y - \mu_x\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i + \mu_x\mu_y \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \mu_x\mu_y
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\rho_{xy} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y}
\end{aligned}
$$

(d)

$$
\begin{aligned}
\rho_{xy} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x}\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \\
&= \frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \\
&= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}
\end{aligned}
$$