

中級統計学：復習テスト 8

学籍番号_____氏名_____

2025 年 10 月 21 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない。正答に修正した上で，復習テスト 1～8 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 1 回中間試験実施日（10 月 24 日の予定）に提出すること。

1. 確率変数 X について以下の不等式が成り立つことを示しなさい。

(a) (マルコフの不等式) 任意の $c > 0$ について

$$\Pr[|X| \geq c] \leq \frac{E(|X|)}{c}$$

(b) (チェビシェフの不等式) 任意の $c > 0$ について

$$\Pr[|X - \mu_X| \geq c] \leq \frac{\sigma_X^2}{c^2}$$

2. 次の離散確率変数を考える.

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

$Y := 2X$ とする.

(a) Y の pmf を式とグラフで表しなさい.

(b) Y の cdf を式とグラフで表しなさい.

3. 連続確率変数 X は次の cdf をもつ.

$$F_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ x & \text{for } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{for } x > 1 \end{cases}$$

$Y := 2X$ とする.

(a) Y の cdf を式とグラフで表しなさい.

(b) Y の pdf を式とグラフで表しなさい.

解答例

1. (a) X が連続なら

$$\begin{aligned} c \Pr[|X| \geq c] &= c \int_{|x| \geq c} f_X(x) \, dx \\ &= \int_{|x| \geq c} c f_X(x) \, dx \\ &\leq \int_{|x| \geq c} |x| f_X(x) \, dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) \, dx \\ &= E(|X|) \end{aligned}$$

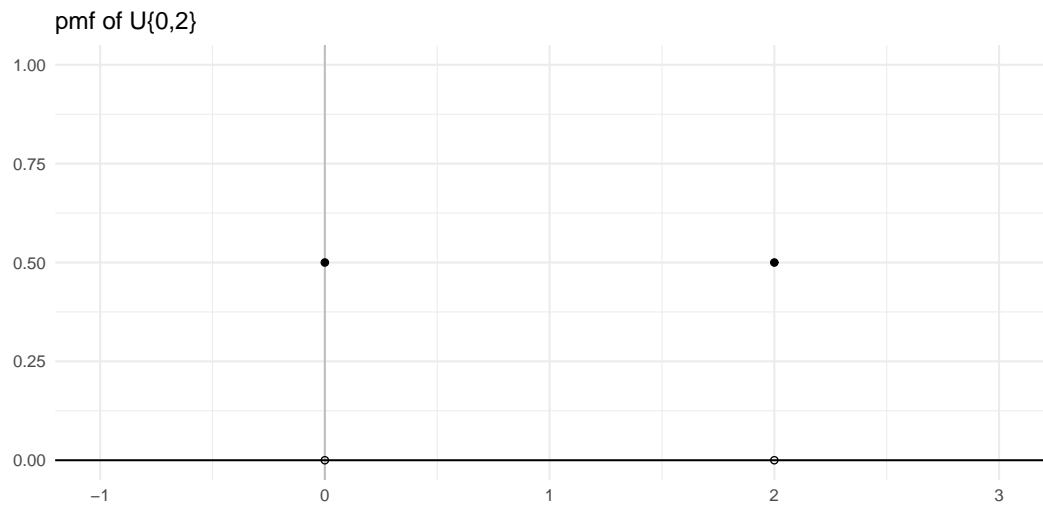
離散の場合も同様.

- (b) マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr[|X - \mu_X| \geq c] &= \Pr[|X - \mu_X|^2 \geq c^2] \\ &\leq \frac{E(|X - \mu_X|^2)}{c^2} \\ &= \frac{\text{var}(X)}{c^2} \end{aligned}$$

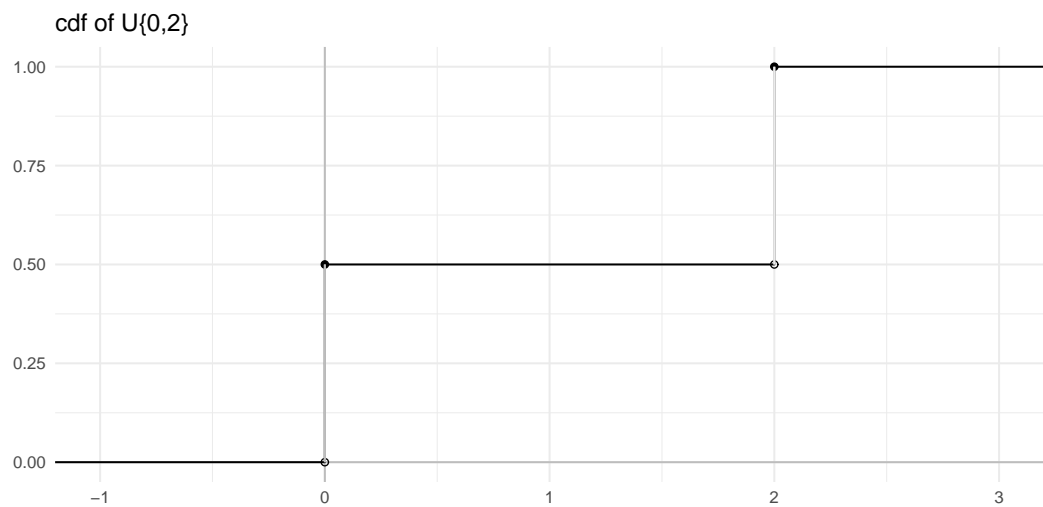
2. (a)

$$\begin{aligned}
 p_Y(y) &:= \Pr[Y = y] \\
 &= \Pr[2X = y] \\
 &= \Pr\left[X = \frac{y}{2}\right] \\
 &= p_X\left(\frac{y}{2}\right) \\
 &= \begin{cases} 1/2 & \text{for } y = 0, 2 \\ 0 & \text{for } y \neq 0, 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$



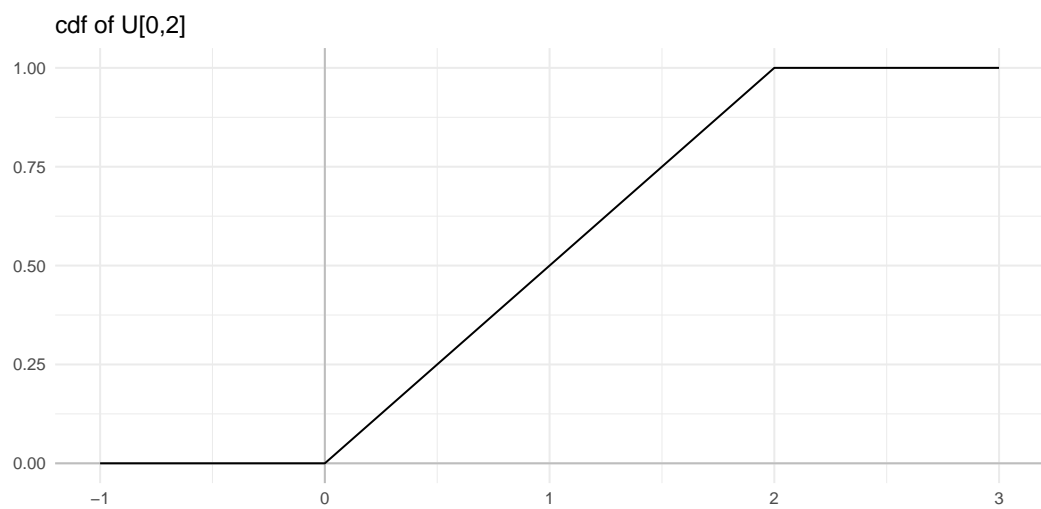
(b)

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ 1/2 & \text{for } 0 \leq y < 2 \\ 1 & \text{for } y \geq 2 \end{cases}$$



3. (a)

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \leq y] \\ &= \Pr[2X \leq y] \\ &= \Pr\left[X \leq \frac{y}{2}\right] \\ &= F_X\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{for } y < 0 \\ y/2 & \text{for } 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & \text{for } y > 2 \end{cases} \end{aligned}$$



(b)

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 1/2 & \text{for } y \in [0, 2] \\ 0 & \text{for } y \notin [0, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

