計量経済 I：復習テスト 7

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2025 年 5 月 27 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を順に重ねて左上でホチキス止めし，中間テスト実施日（6 月 10 日の予定）に提出すること．

1. $(1+k)$ 変量データを $\{(y_i, x_{i,1}, \dots, x_{i,k})\}_{i=1}^n$ とする．y_i の $(x_{i,1}, \dots, x_{i,k})$ 上への重回帰モデルは

$$\mathrm{E}(y_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) = \beta_1 x_{i,1} + \cdots + \beta_k x_{i,k}$$

回帰の誤差項は $u_i := y_i - \mathrm{E}(y_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k})$．以下の式を証明しなさい．

(a)

$$\mathrm{E}(u_i | x_{i,1}, \dots, x_{i,k}) = 0$$

(b)

$$\mathrm{E}(u_i) = 0$$

(c)

$$\mathrm{E}(x_{i,1} u_i) = \cdots = \mathrm{E}(x_{i,k} u_i) = 0$$

2. 前問と同じ重回帰モデルを考える．$(\beta_1, \dots, \beta_k)$ の MM（= OLS）推定量を $(b_1, \dots, b_k)$，y_i の回帰予測を $\hat{y}_i$，OLS 残差を e_i とする．

(a) $(b_1, \dots, b_k)$ を定義しなさい．

(b) $\hat{y}_i$ と e_i を定義しなさい．

(c) 次式を示しなさい．

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,1} e_i = \cdots = \sum_{i=1}^{n} x_{i,k} e_i = 0$$

(d) 次式を示しなさい．

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i e_i = 0$$

解答例

1.（a）期待値の線形性より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(u_i|x_{i,1},\dots,x_{i,k}) &= \mathrm{E}(y_i - \mathrm{E}(y_i|x_{i,1},\dots,x_{i,k})|x_{i,1},\dots,x_{i,k}) \\ &= \mathrm{E}(y_i|x_{i,1},\dots,x_{i,k}) - \mathrm{E}(y_i|x_{i,1},\dots,x_{i,k}) \\ &= 0\end{aligned}$$

（b）繰り返し期待値の法則と前問より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(u_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(u_i|x_{i,1},\dots,x_{i,k})) \\ &= \mathrm{E}(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

（c）繰り返し期待値の法則，期待値の線形性と前々問より

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(x_{i,1}u_i) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(x_{i,1}u_i|x_{i,1},\dots,x_{i,k})) \\ &= \mathrm{E}(x_{i,1}\,\mathrm{E}(u_i|x_{i,1},\dots,x_{i,k})) \\ &= \mathrm{E}(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

$\mathrm{E}(x_{i,2}u_i),\dots,\mathrm{E}(x_{i,k}u_i)$ も同様.

2.（a）$(b_1,\dots,b_k)$ は次の連立方程式の解：

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,1}(y_i - b_1x_{i,1} - \cdots - b_kx_{i,k}) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}(y_i - b_1x_{i,1} - \cdots - b_kx_{i,k}) &= 0\end{aligned}$$

（b）

$$\begin{aligned}\hat{y}_i &:= b_1x_{i,1} + \cdots + b_kx_{i,k} \\ e_i &:= y_i - \hat{y}_i \\ &= y_i - b_1x_{i,1} - \cdots - b_kx_{i,k}\end{aligned}$$

（c）前 2 問より

$$\begin{gathered}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,1}e_i = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i,k}e_i = 0\end{gathered}$$

したがって

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,1}e_i = \cdots = \sum_{i=1}^{n} x_{i,k}e_i = 0$$

（d）$\hat{y}_i := b_1 x_{i,1} + \cdots + b_k x_{i,k}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i e_i &= \sum_{i=1}^{n} (b_1 x_{i,1} + \cdots + b_k x_{i,k}) e_i \\ &= b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{i,1} e_i + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{i,k} e_i\end{aligned}$$

前問より各項は 0.