計量経済 I：前期試験

村澤 康友

2017 年 7 月 25 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 負の 2 項分布
   (b) （1 変量）正規分布
   (c) 相関係数
   (d) 条件つき期待値
2. （30 点）$X \sim \mathrm{N}(0,1)$ と $Y \sim \mathrm{N}(-2,3)$ は独立とする．
   (a) $Z := X - Y$ の分布を求めなさい．
   (b) $\Pr[4 < Z \leq 5]$ を標準正規分布表を利用して求めなさい．
   (c) $\mathrm{cov}(X,Z)$ を求めなさい．
3. （50 点）某大学の「経済学入門」の試験は○×問題であり，25 問中 6 割以上の正答で合格となる．A 君は一度も授業に出席しておらず，問題文すら理解できないが，コイントス（または鉛筆ころがし）で○×を選び，あわよくば合格しようと考えている．A 君の正答数を X とする．
   (a) X はどのような分布をするか？分布の名称と母数（分布の形を決める数値）で答えなさい．
   (b) X の確率関数を式で書きなさい．
   (c) X の平均と分散を求めなさい（ヒント：25 回の独立なベルヌーイ試行と考える）．
   (d) $\Pr[X \geq 15]$ の厳密な計算は面倒だが，正規分布で近似して求めることができる．標準正規分布表を利用して A 君が合格する確率を近似的に求めなさい．
   (e) 出題数を 100 問として A 君が合格する確率を近似的に求めなさい．

解答例

1. 確率・統計の基本用語
   (a) 独立かつ同一なベルヌーイ試行における r 回成功までの失敗回数の分布.
      - 「独立かつ同一なベルヌーイ試行」「r 回成功までの」がなければ 0 点.
      - 2 項分布の定義は 0 点.
      - 幾何分布の定義は 2 点減.
   (b) pdf が
   $$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$
   (c) 標準化した確率変数の共分散.
      - $\sigma_{XY}/(\sigma_X\sigma_Y)$ でも OK.
   (d) $Y = y$ が与えられたときの X の条件つき期待値は
   $$\mathrm{E}(X|Y=y) := \begin{cases} \sum_x x p_{X|Y}(x|Y=y) & \text{(離散)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|Y=y)\,\mathrm{d}x & \text{(連続)} \end{cases}$$

2. 正規分布
   (a) 期待値の線形性より
   $$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z) &= \mathrm{E}(X-Y) \\ &= \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(Y) \\ &= 0 - (-2) \\ &= 2 \end{aligned}$$
   X と Y は独立なので
   $$\begin{aligned} \mathrm{var}(Z) &= \mathrm{var}(X-Y) \\ &= \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) \\ &= 1 + 3 \\ &= 4 \end{aligned}$$
   正規分布の線形変換は正規分布なので $Z \sim \mathrm{N}(2,4)$.
      - 平均で 3 点，分散で 3 点，分布で 4 点.
   (b) 標準正規分布表より
   $$\begin{aligned} \Pr[4 < Z \le 5] &= \Pr\left[\frac{4-2}{2} < \frac{Z-2}{2} \le \frac{5-2}{2}\right] \\ &= \Pr\left[1 < \frac{Z-2}{2} \le 1.5\right] \\ &= Q(1) - Q(1.5) \\ &\approx .15866 - .066807 \\ &= .098153 \end{aligned}$$

（c）X と Y は独立なので

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Z) &= \operatorname{cov}(X, X-Y)\\
&= \operatorname{var}(X) - \operatorname{cov}(X,Y)\\
&= \operatorname{var}(X)\\
&= 1
\end{aligned}$$

3. 2 項分布と正規分布

（a）$X \sim \mathrm{Bin}(25, 1/2)$.

- 「2 項分布」で 5 点，母数で 5 点.

（b）X の確率関数は

$$p_X(x) = \begin{cases} {}_{25}C_x/2^{25} & \text{for } x = 0,1,\dots,25 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

（c）第 i 問の正解／不正解を次の確率変数で表す.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{正解} \\ 0 & \text{不正解} \end{cases}$$

$X_i \sim \mathrm{Bin}(1, 1/2)$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_i) &= \frac{1}{2}\\
\operatorname{var}(X_i) &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$X = X_1 + \cdots + X_{25}$ より

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_{25})\\
&= \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_{25})\\
&= \frac{25}{2}\\
&= 12.5
\end{aligned}$$

また $X_1, \dots, X_{25}$ は独立なので

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(X) &= \operatorname{var}(X_1 + \cdots + X_{25})\\
&= \operatorname{var}(X_1) + \cdots + \operatorname{var}(X_{25})\\
&= \frac{25}{4}\\
&= 6.25
\end{aligned}$$

- 平均で 5 点，分散で 5 点.

（d）$X \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(12.5, 6.25)$ とすると

$$\begin{aligned}
\Pr[X \ge 15] &= \Pr\left[\frac{X-12.5}{2.5} \ge \frac{15-12.5}{2.5}\right]\\
&\approx \Pr[Z \ge 1]
\end{aligned}$$

ただし $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$．標準正規分布表より $\Pr[Z \ge 1] \approx .15866$.

（e）$X \sim \mathrm{Bin}(100, 1/2)$ なら

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \mathrm{E}(X_1 + \cdots + X_{100}) \\
&= \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_{100}) \\
&= \frac{100}{2} \\
&= 50 \\
\mathrm{var}(X) &= \mathrm{var}(X_1 + \cdots + X_{100}) \\
&= \mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_{100}) \\
&= \frac{100}{4} \\
&= 25
\end{aligned}$$

$X \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(50, 25)$ とすると

$$\begin{aligned}
\Pr[X \geq 60] &= \Pr\left[\frac{X - 50}{5} \geq \frac{60 - 50}{5}\right] \\
&\approx \Pr[Z \geq 2]
\end{aligned}$$

ただし $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$．標準正規分布表より $\Pr[Z \geq 2] \approx .022750$.