計量経済 II：復習テスト 11

学籍番号___________________氏名___________________

2023 年 12 月 18 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を順に重ねて左上でホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 29 日の予定）に提出すること．

1. 次の行列の階数を調べたい．

$$\boldsymbol{A} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

(a) 各行が線形独立であることを示しなさい．

(b) 各列が線形従属であることを示しなさい．

(c) 列階数が 2 であることを示しなさい．

2. $\{x_t, y_t\}$ を共和分階数 2 の CI(1,1) とする．すなわち任意の t について

$$
\begin{aligned}
ax_t + by_t &= u_t \\
cx_t + dy_t &= v_t
\end{aligned}
$$

ただし $\{u_t, v_t\}$ は I(0) で $ad - bc \neq 0$．このとき $\{x_t, y_t\}$ が I(0) となることを示したい．$\{u_t, v_t\}$ の平均ベクトルを $\boldsymbol{\mu} := (\mu_u, \mu_v)'$，自己共分散行列関数を $\boldsymbol{\Gamma}(.)$ とする．ただし

$$
\boldsymbol{\Gamma}(.) := \begin{bmatrix} \gamma_{uu}(.) & \gamma_{uv}(.) \\ \gamma_{vu}(.) & \gamma_{vv}(.) \end{bmatrix}
$$

(a) 連立方程式を解いて (x_t, y_t) を (u_t, v_t) で表しなさい．

(b) 任意の α, β について $\{\alpha u_t + \beta v_t\}$ の平均を $\boldsymbol{\mu}$ で表しなさい．

(c) 任意の α, β について $\{\alpha u_t + \beta v_t\}$ の自己共分散関数を $\boldsymbol{\Gamma}(.)$ で表しなさい．

解答例

1. (a) 次式の解が $a = b = 0$ のみであることを示せばよい.

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

連立方程式は

$$\begin{aligned} a + 4b &= 0 \\ 2a + 5b &= 0 \\ 3a + 6b &= 0 \end{aligned}$$

第 1 式より $a = -4b$. これを他の 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} -8b + 5b &= 0 \\ -12b + 6b &= 0 \end{aligned}$$

したがって $b = 0$. 連立方程式より $b = 0$ なら $a = 0$.

(b) 次式の解が $a = b = c = 0$ 以外にも存在することを示せばよい.

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

連立方程式は

$$\begin{aligned} a + 2b + 3c &= 0 \\ 4a + 5b + 6c &= 0 \end{aligned}$$

第 1 式より $a = -2b - 3c$. これを第 2 式に代入すると

$$4(-2b - 3c) + 5b + 6c = 0$$

すなわち

$$-3b - 6c = 0$$

または

$$b + 2c = 0$$

したがって例えば $(a, b, c) = (1, -2, 1)$ も解となる.

(c) 例えば次式の解が $a = b = 0$ のみであることを示せばよい.

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$$

連立方程式は

$$\begin{aligned} a + 2b &= 0 \\ 4a + 5b &= 0 \end{aligned}$$

第 1 式より $a = -2b$. これを第 2 式に代入すると

$$-8b + 5b = 0$$

したがって $b = 0$. 連立方程式より $b = 0$ なら $a = 0$.

2.（a）連立方程式は

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

逆行列を使って解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} &= \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} du_t - bv_t \\ -cu_t + av_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned} x_t &= \frac{d}{ad-bc} u_t - \frac{b}{ad-bc} v_t \\ y_t &= -\frac{c}{ad-bc} u_t + \frac{a}{ad-bc} v_t \end{aligned}$$

（b）任意の t について

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\alpha u_t + \beta v_t) &= \alpha \,\mathrm{E}(u_t) + \beta \,\mathrm{E}(v_t) \\ &= \alpha\mu_u + \beta\mu_v \end{aligned}$$

（c）任意の t, s について

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}(\alpha u_t + \beta v_t, \alpha u_{t-s} + \beta v_{t-s}) \\ &= \alpha^2 \operatorname{cov}(u_t, u_{t-s}) + \alpha\beta \operatorname{cov}(u_t, v_{t-s}) + \alpha\beta \operatorname{cov}(v_t, u_{t-s}) + \beta^2 \operatorname{cov}(v_t, v_{t-s}) \\ &= \alpha^2 \gamma_{uu}(s) + \alpha\beta\gamma_{uv}(s) + \alpha\beta\gamma_{vu}(s) + \beta^2\gamma_{vv}(s) \end{aligned}$$