計量経済 I：中間試験

村澤 康友

2015 年 6 月 9 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，<u>結果のみの解答は 0 点とする</u>）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 統計学
   (b) ヒストグラム
   (c) （データ・確率変数の）標準化
   (d) 確率
2. （30 点）ある地域で乳がん検診に参加する 40 歳から 50 歳までの自覚症状のない女性について，以下のことがわかっている．
   - 40 歳から 50 歳までの自覚症状のない女性が乳がんである確率は 0.8%
   - 乳がんである場合，検査結果が陽性になる確率は 90%
   - 乳がんでない場合，検査結果が陽性になる確率は 7%

   検査結果が陽性の事象を A，実際に乳がんである事象を B とする．検査結果が陽性の場合，実際に乳がんである確率 $P(B|A)$ を求めたい．
   (a)「乗法定理」を用いて $P(A \cap B)$ を求めなさい．
   (b)「全確率の定理」を用いて $P(A)$ を求めなさい．
   (c)「ベイズの定理」を用いて $P(B|A)$ を求めなさい．
3. （50 点）確率変数 X は確率 1/4 で -2，確率 3/4 で 2 の値をとる．
   (a) X の確率関数を式とグラフで書きなさい．
   (b) X の累積分布関数を式とグラフで書きなさい．
   (c) $\mathrm{E}(X)$ を求めなさい．
   (d) $\mathrm{E}\left(X^2\right)$ を求めなさい．
   (e) $\mathrm{var}(X)$ を求めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) ある全体について知るための方法論の体系.
      - 「全体」に相当する語句がなければ 0 点.
      - 記述統計学・推測統計学に限定した定義は 0 点.
   (b) 横軸に値をとり，各階級の（相対）度数を柱の面積で表したグラフ.
      - 「横軸に値」がなければ 2 点.
      - 「度数＝柱の面積」がなければ 0 点.
      - 「柱状グラフ」のみは 0 点.
   (c) 変量の値から平均を引き，標準偏差で割る変換.
   (d) 事象に対して定義され，以下の公理を満たす関数 $P(.)$.
      i. $0 \leq P(.) \leq 1$
      ii. $P(\Omega) = 1$
      iii. $A_1, A_2, \ldots$ が排反なら $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
      - 「公理」で 2 点.
      - 公理で定義しなければ 0 点.
2. 条件つき確率
   (a) 乗法定理より

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\ &= .9 \cdot .008 \\ &= .0072 \end{aligned}$$

      - $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$ で 5 点.
      - $P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$ は本問では役立たないので 0 点.
   (b) 全確率の定理より

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\ &= P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) \\ &= .0072 + .07 \cdot .992 \\ &= .07664 \end{aligned}$$

      - $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$ で 2 点.
      - $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$ で 5 点.
   (c) ベイズの定理より

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{.0072}{.07664} \\ &\approx .094 \end{aligned}$$

      - 前 2 問の答と整合的なら OK（ただし 1 を超える確率は不可).
      - $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$ で 5 点.

3. 離散分布の例

(a)

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{for } x = -2 \\ 3/4 & \text{for } x = 2 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

グラフは省略.

- 式で 5 点，グラフで 5 点.
- 式は関数で書かなければ 0 点.
- $x \neq -2, 2$ の $p_X(x)$ がなければ各 1 点減.

(b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < -2 \\ 1/4 & \text{for } x \in [-2, 2) \\ 1 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

グラフは省略.

- 式で 5 点，グラフで 5 点.

(c)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= -2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{4}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(X^2\right) &= (-2)^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{16}{4} \\ &= 4 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &:= \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) \\ &= (-2-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + (2-1)^2 \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{12}{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= 4 - 1^2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

- 前 2 問の答と整合的なら OK（ただし負の分散は不可）.