中級統計学：復習テスト 15

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 11 月 19 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 14〜20 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 3 回中間試験実施日（12 月 10 日の予定）に提出すること．

1. 母集団分布を $\mathrm{Bin}(1,p)$ とする．母集団から無作為抽出した標本を $(X_1,\dots,X_n)$ とする．
   (a) 標本和を式で定義しなさい．

   (b) 標本和の pmf を求めなさい．

   (c) 標本平均を式で定義しなさい．

   (d) 標本平均の pmf を求めなさい．

2. 平均 μ, 分散 σ^2 の母集団から無作為抽出した標本を $(X_1, \ldots, X_n)$ とする.

(a) μ は既知とする.

i. 標本分散 $\hat{\sigma}^2$ を式で定義しなさい.

ii. $\mathrm{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) = \sigma^2$ となることを示しなさい.

(b) μ は未知とする.

i. 標本分散 s^2 を式で定義しなさい.

ii. $\mathrm{E}\left(s^2\right) = \sigma^2$ となることを示しなさい.

解答例

1. (a)

$$T := X_1 + \cdots + X_n$$

(b) $T \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ なので

$$p_T(t) = \begin{cases} {}_nC_t p^t (1-p)^{n-t} & \text{for } t = 0, 1, 2, \ldots, n \\ 0 & \text{for } t \neq 0, 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

(c)

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

(d)

$$\begin{aligned} p_{\bar{X}}(x) &:= \Pr\left[\bar{X} = x\right] \\ &= \Pr[T = nx] \\ &= p_T(nx) \\ &= \begin{cases} {}_nC_{nx} p^{nx} (1-p)^{n-nx} & \text{for } x = 0, 1/n, 2/n, \ldots, 1 \\ 0 & \text{for } x \neq 0, 1/n, 2/n, \ldots, 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2. (a) i.

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

ii. 期待値の線形性より

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(\hat{\sigma}^2\right) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left((X_i - \mu)^2\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i) \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

(b) i.

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

ii. 次式を示せばよい.

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2\right) = (n-1)\sigma^2$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mu) - \left(\bar{X} - \mu\right)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[(X_i - \mu)^2 - 2(X_i - \mu)\left(\bar{X} - \mu\right) + \left(\bar{X} - \mu\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)\left(\bar{X} - \mu\right) + n\left(\bar{X} - \mu\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)\left(\bar{X} - \mu\right) + n\left(\bar{X} - \mu\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2\left(n\bar{X} - n\mu\right)\left(\bar{X} - \mu\right) + n\left(\bar{X} - \mu\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - 2n\left(\bar{X} - \mu\right)^2 + n\left(\bar{X} - \mu\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 - n\left(\bar{X} - \mu\right)^2
\end{aligned}
$$

期待値をとると

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left((X_i - \mu)^2\right) - n\,\mathrm{E}\left(\left(\bar{X} - \mu\right)^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}(X_i) - n\,\mathrm{var}\left(\bar{X}\right) \\
&= n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} \\
&= (n-1)\sigma^2
\end{aligned}
$$