中級統計学：第 3 回中間試験

村澤 康友

2019 年 12 月 20 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 標本標準偏差
   (b) 推定値
   (c) 最尤法
   (d) 信頼係数
2. （30 点）分布表を用いて以下の問いに答えなさい．
   (a) $X \sim \chi^2(10)$ とする．$\Pr[a \leq X \leq b] = .95$ となる a, b を求めなさい．
   (b) $Y \sim \mathrm{t}(15)$ とする．$\Pr[|Y| \leq c] = .95$ となる c を求めなさい．
   (c) $Z \sim \mathrm{F}(10, 15)$ とする．$\Pr[d \leq Z \leq e] = .95$ となる d, e を求めなさい．
   なお a〜e はすべて正の実数（$0, \infty$ は含まない）とする．
3. （50 点）K 大生の通学時間の分布を調べたい．母集団分布を $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ と仮定する（μ, σ^2 は未知）．無作為に選んだ K 大生 6 人に通学時間を尋ねたところ，35 分・35 分・50 分・60 分・60 分・60 分という回答が得られた．
   (a) 標本平均 $\bar{X}$ と標本分散 s^2 を求めなさい．
   (b) $\bar{X}$ と s^2 はどのような分布をもつか？（証明不要）
   (c) $\bar{X}$ の分散の推定値を求めなさい．
   (d) μ の 95 %信頼区間を求めなさい．
   (e) σ^2 の 95 %信頼区間を求めなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 標本分散の平方根.
   (b) 推定量の実現値.
   (c) (対数) 尤度関数を最大にする解を母数の推定値とする手法.
      - 「推定値」を「推定量」としても可.
   (d) 信頼域が母数を含む確率.
2. 分布表の読み方
   (a)

$$\begin{aligned}\Pr[a \le X \le b] &= \Pr[X \ge a] - \Pr[X > b] \\ &= .95\end{aligned}$$

これを満たす例は

$$\begin{aligned}\Pr[X \ge a] &= .975 \\ \Pr[X > b] &= .025\end{aligned}$$

χ^2 分布表より $X \sim \chi^2(10)$ なら $a = 3.24697$, $b = 20.4832$.
   - 各 5 点.

   (b) t 分布の対称性より

$$\begin{aligned}\Pr[|Y| \le c] &= \Pr[-c \le Y \le c] \\ &= 1 - 2\Pr[Y > c] \\ &= .95\end{aligned}$$

すなわち

$$\Pr[Y > c] = .025$$

t 分布表より $Y \sim \mathrm{t}(15)$ なら $c = 2.131$.

   (c)

$$\begin{aligned}\Pr[d \le Z \le e] &= 1 - \Pr[Z < d] - \Pr[Z > e] \\ &= .95\end{aligned}$$

これを満たす例は

$$\begin{aligned}\Pr[Z < d] &= \Pr\left[\frac{1}{Z} > \frac{1}{d}\right] \\ &= .025 \\ \Pr[Z > e] &= .025\end{aligned}$$

$Z \sim \mathrm{F}(10, 15)$ なら $1/Z \sim \mathrm{F}(15, 10)$ なので F 分布表より $1/d = 3.522$, すなわち $d = 1/3.522$.
同じく F 分布表より $Z \sim \mathrm{F}(10, 15)$ なら $e = 3.060$.
   - 各 5 点.
3. 母平均・母分散の区間推定

(a) 標本平均は

$$\begin{aligned}\bar{X} &:= \frac{35+35+50+60+60+60}{6}\\ &= 50\end{aligned}$$

標本分散は

$$\begin{aligned}s^2 &:= \frac{(35-50)^2+(35-50)^2+(50-50)^2+(60-50)^2+(60-50)^2+(60-50)^2}{5}\\ &= \frac{225+225+0+100+100+100}{5}\\ &= 150\end{aligned}$$

- 各 5 点.

(b)

$$\bar{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{6}\right)$$

$$\frac{5s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(5)$$

- 各 5 点.
- $n = 6$ を代入しなければ 1 点減.
- 左辺の $5s^2/\sigma^2$ がなければダメ.

(c) $\bar{X}$ の分散の推定値は

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{n} &= \frac{150}{6}\\ &= 25\end{aligned}$$

(d) $\bar{X}$ を標準化すると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{\sigma^2/6}} \sim \mathrm{N}(0,1)$$

σ^2 を s^2 に置き換えると

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/6}} \sim \mathrm{t}(5)$$

t 分布表より

$$\Pr\left[-2.571 \le \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/6}} \le 2.571\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\bar{X} - 2.571\sqrt{\frac{s^2}{6}} \le \mu \le \bar{X} + 2.571\sqrt{\frac{s^2}{6}}\right] = .95$$

$\bar{X} = 50$，$s^2 = 150$ より μ の 95 %信頼区間は

$$[50 - 2.571 \cdot 5, 50 + 2.571 \cdot 5] \approx [37.145, 62.855]$$

- $\bar{X} = 50$，$s^2 = 150$ を代入しなければ 2 点減.

- 標準化で 2 点.
- $t(5)$ までは 4 点.
- t 分布表の読み取りまでは 6 点.

（e）$5s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(5)$ なので χ^2 分布表より

$$\Pr\left[.831212 \le \frac{5s^2}{\sigma^2} \le 12.8325\right] = .95$$

すなわち

$$\Pr\left[\frac{5s^2}{12.8325} \le \sigma^2 \le \frac{5s^2}{.831212}\right] = .95$$

$s^2 = 150$ より σ^2 の 95 %信頼区間は

$$\left[\frac{750}{12.8325}, \frac{750}{.831212}\right] \approx [58.45, 902.30]$$

- $s^2 = 150$ を代入しなければ 2 点減.
- χ 分布表の読み取りまでは 5 点.