中級統計学：復習テスト 25

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 1 月 13 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 21〜26 を（左上で）ホチキス止めし，定期試験実施日（1 月 24 日の予定）にまとめて提出すること．

1. 2 変量データを $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ とする．y_i の x_i 上への定数項のない古典的線形回帰モデルは

$$\begin{aligned} y_i &= \beta x_i + u_i \\ \mathrm{E}(u_i) &= 0 \\ \mathrm{var}(u_i) &= \sigma^2 \\ \mathrm{cov}(u_i, u_j) &= 0 \quad \text{for } i \neq j \end{aligned}$$

β の OLS 推定量を b とする．

(a) b を式で与えなさい．

(b) b の期待値を求めなさい．

(c) b の分散を求めなさい．

2. 2 変量データを $((y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n))$ とする．y_i の x_i 上への定数項のない古典的正規線形回帰モデルは

$$y_i = \beta x_i + u_i$$
$$\{u_i\} \sim \mathrm{IN}\left(0, \sigma^2\right)$$

β の OLS 推定量を b とする．σ^2 を既知として次の片側検定問題を考える．

$$H_0 : \beta = c \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta > c$$

(a) b の分布を求めなさい．

(b) 検定統計量を与えなさい．

(c) 検定統計量の H_0 の下での分布を与えなさい．

(d) 有意水準 5 %の検定の棄却域を定めなさい．

(e) 検定統計量の値が 2.0 のとき p 値を求めなさい．

解答例

1. (a)

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(b) &= \mathrm{E}\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\
&= \beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i \, \mathrm{E}(u_i)}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \\
&= \beta
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(b) &= \mathrm{var}\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\
&= \mathrm{var}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i u_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \\
&= \frac{\mathrm{var}(x_1 u_1) + \cdots + \mathrm{var}(x_n u_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{x_1^2 \, \mathrm{var}(u_1) + \cdots + x_n^2 \, \mathrm{var}(u_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^n x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i^2)^2} \\
&= \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}
\end{aligned}$$

2. (a)

$$b \sim \mathrm{N}\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right)$$

(b)

$$Z := \frac{b - c}{\sqrt{\sigma^2 / \sum_{i=1}^n x_i^2}}$$

(c) H_0 の下で

$$Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$$

(d) 標準正規分布表より H_0 の下で

$$\Pr[Z \geq 1.65] = .05$$

したがって棄却域は $[1.65, \infty)$.

(e) 標準正規分布表より

$$\Pr[Z \geq 2.00] = .02275$$

したがって p 値＝.02275.