計量経済 I：復習テスト 13

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2023 年 7 月 11 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 9〜14 を（左上で）ホチキス止めし，定期試験実施日（7 月 25 日の予定）にまとめて提出すること．

1. (Y, X, Z) を確率ベクトルとする．以下を示しなさい．

   (a) X と Y は独立 $\Longrightarrow \mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y)$

   (b) $\mathrm{E}(Y|X) = \mathrm{E}(Y) \Longrightarrow \mathrm{cov}(X, Y) = 0$

   (c) Z を所与として X と Y は条件付き独立 $\Longrightarrow \mathrm{E}(Y|X, Z) = \mathrm{E}(Y|Z)$

2. 処置ダミーを D，処置をする時としない時の潜在的な結果を (Y_1^*, Y_0^*)，共変量を X，傾向スコアを $p(X) := \Pr[D = 1|X]$ とする．X を所与として (Y_1^*, Y_0^*) と D が条件付き独立なら，$p(X)$ を所与としても両者は条件付き独立であることを示したい．すなわち

$$\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, X] = \Pr[D = 1|X] \Longrightarrow \Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \Pr[D = 1|p(X)]$$

以下を順に示しなさい．

(a)

$$\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, X] = \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, X)$$
$$\Pr[D = 1|Y_1^*, Y_0^*, p(X)] = \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X))$$

(b)

$$\Pr[D = 1|p(X)] = p(X)$$

(c)

$$\mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, X) = p(X) \Longrightarrow \mathrm{E}(D|Y_1^*, Y_0^*, p(X)) = p(X)$$

解答例

1. (a) 独立性の定義より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y|X) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}(Y)
\end{aligned}
$$

(b) 共分散の計算公式と繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(XY|X)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}(Y|X)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X\,\mathrm{E}(Y)) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(c) 条件付き独立性の定義より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y|X,Z) &:= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X,Z}(y|x,z)\,\mathrm{d}y \\
&:= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|Z}(y|z)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{E}(Y|Z)
\end{aligned}
$$

2. (a) 期待値の定義より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(D|Y_1^*,Y_0^*,X) &:= 1\cdot\Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,X] + 0\cdot\Pr[D=0|Y_1^*,Y_0^*,X] \\
&= \Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,X] \\
\mathrm{E}(D|Y_1^*,Y_0^*,p(X)) &:= 1\cdot\Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,p(X)] + 0\cdot\Pr[D=0|Y_1^*,Y_0^*,p(X)] \\
&= \Pr[D=1|Y_1^*,Y_0^*,p(X)]
\end{aligned}
$$

(b) 繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\Pr[D=1|p(X)] &= \mathrm{E}(D|p(X)) \\
&= \mathrm{E}(\mathrm{E}(D|X)|p(X)) \\
&= \mathrm{E}(\Pr[D=1|X]|p(X)) \\
&= \mathrm{E}(p(X)|p(X)) \\
&= p(X)
\end{aligned}
$$

(c) 繰り返し期待値の法則より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(D|Y_1^*,Y_0^*,p(X)) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(D|Y_1^*,Y_0^*,X)|Y_1^*,Y_0^*,p(X)) \\
&= \mathrm{E}(p(X)|Y_1^*,Y_0^*,p(X)) \\
&= p(X)
\end{aligned}
$$