計量経済 II：中間試験

村澤 康友

2019 年 11 月 26 日

注意：3 問とも解答すること．結果より思考過程を重視するので，途中計算等も必ず書くこと（部分点は大いに与えるが，結果のみの解答は 0 点とする）．

1. （20 点）以下の用語の定義を式または言葉で書きなさい（各 20 字程度）．
   (a) 推測統計学
   (b) 母集団分布
   (c) （k 次の）標本積率
   (d) 漸近分散
2. （30 点）分布表を用いて以下の問いに答えなさい．
   (a) $X \sim \chi^2(5)$ とする．$\Pr[a \leq X \leq b] = .99$ となる a, b を求めなさい．
   (b) $Y \sim \mathrm{t}(10)$ とする．$\Pr[|Y| \leq c] = .95$ となる c を求めなさい．
   (c) $Z \sim \mathrm{F}(5, 10)$ とする．$\Pr[d \leq Z \leq e] = .95$ となる d, e を求めなさい．
   なお a〜e はすべて正の実数（$0, \infty$ は含まない）とする．
3. （50 点）将棋の対局における先手の勝率 p の区間推定を考える．先手の勝ちを 1，負けを 0 で表すと，（先手の）対局結果は $\mathrm{Bin}(1, p)$ にしたがう．無作為に選んだ n 局の対局結果 $(X_1, \ldots, X_n)$ の標本比率（＝標本平均）を $\hat{p}$ とする．
   (a) $\mathrm{E}(X_i)$ と $\mathrm{var}(X_i)$ を求めなさい．
   (b) $\mathrm{E}(\hat{p})$ と $\mathrm{var}(\hat{p})$ を求めなさい．
   (c) $\hat{p}$ の漸近分布を求めなさい．
   (d) p の 95% 信頼区間を近似的に求めなさい．
   (e) $n = 100$，$\hat{p} = .5$ として p の 95% 信頼区間を近似的に計算しなさい．

解答例

1. 統計学の基本用語
   (a) 統計的推測の理論体系.
      - 「統計的推測」の定義のみは 1 点減.
   (b) 母集団における各個体の属性値の分布.
      - 「母集団の分布」は数値の分布でないので 0 点.
   (c) $\hat{\mu}_k := (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i^k$.
      - 「標本の積率」は「標本の k 乗の期待値」の意味になるので 0 点.
   (d) 漸近分布の分散.
      - 「漸近分布」の定義は 0 点.
2. 分布表の読み方
   (a)

$$\begin{aligned}\Pr[a \le X \le b] &= \Pr[X \ge a] - \Pr[X > b] \\ &= .99\end{aligned}$$

これを満たす例は

$$\begin{aligned}\Pr[X \ge a] &= .995 \\ \Pr[X > b] &= .005\end{aligned}$$

χ^2 分布表より $X \sim \chi^2(5)$ なら $a = .411742$，$b = 16.7496$.

   - 各 5 点.

   (b) t 分布の対称性より

$$\begin{aligned}\Pr[|Y| \le c] &= \Pr[-c \le Y \le c] \\ &= 1 - 2\Pr[Y > c] \\ &= .95\end{aligned}$$

すなわち

$$\Pr[Y > c] = .025$$

t 分布表より $Y \sim \mathrm{t}(10)$ なら $c = 2.228$.

   (c)

$$\begin{aligned}\Pr[d \le Z \le e] &= 1 - \Pr[Z < d] - \Pr[Z > e] \\ &= .95\end{aligned}$$

これを満たす例は

$$\begin{aligned}\Pr[Z < d] &= \Pr\left[\frac{1}{Z} > \frac{1}{d}\right] \\ &= .025 \\ \Pr[Z > e] &= .025\end{aligned}$$

$Z \sim \mathrm{F}(5,10)$ なら $1/Z \sim \mathrm{F}(10,5)$ なので F 分布表より $1/d = 6.619$，すなわち $d = 1/6.619$．同じく F 分布表より $Z \sim \mathrm{F}(5,10)$ なら $e = 4.236$.

- 各 5 点.

3. 母比率の信頼区間

(a)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_i) &:= 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) \\ &= p \\ \mathrm{var}(X_i) &= \mathrm{E}\left(X_i^2\right) - \mathrm{E}(X_i)^2 \\ &= \mathrm{E}(X_i) - \mathrm{E}(X_i)^2 \\ &= p - p^2 \\ &= p(1-p)\end{aligned}$$

- 各 5 点.
- p で表さなければ 0 点.

(b)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\hat{p}) &= \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{\mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_n)}{n} \\ &= \frac{np}{n} \\ &= p \\ \mathrm{var}(\hat{p}) &= \mathrm{var}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{\mathrm{var}(X_1) + \cdots + \mathrm{var}(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{np(1-p)}{n^2} \\ &= \frac{p(1-p)}{n}\end{aligned}$$

- 各 5 点.
- $\mu, \sigma^2/n$ は証明があれば各 2 点.

(c)

$$\hat{p} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

- 前問の解答と整合的なら OK.
- 分布の母数に統計量があったら 0 点.

(d) 標準化すると

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

または

$$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

標準正規分布表より

$$\Pr\left[-1.96 \le \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \le 1.96\right] \approx .95$$

ここで

$$-1.96 \le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}} \le 1.96 \Longleftrightarrow -1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le \hat{p}-p \le 1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\Longleftrightarrow \hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

したがって p の 95 %信頼区間は近似的に

$$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

- 前問の解答の標準化で 2 点.

（e）$n = 100$，$\hat{p} = .5$ を代入すると

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} &= \sqrt{\frac{.5(1-.5)}{100}} \\ &= \frac{.5}{10} \\ &= \frac{1}{20}\end{aligned}$$

したがって 95% 信頼区間は

$$\left[.5-\frac{1.96}{20}, .5+\frac{1.96}{20}\right] \approx [.402, .598]$$