中級統計学：復習テスト 16

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2024 年 11 月 22 日

注意： すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 14〜20 を順に重ねて左上でホチキス止めし，第 3 回中間試験実施日（12 月 10 日の予定）に提出すること．

1. $\mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ からの無作為標本を $(X_1, \ldots, X_n)$ とする．μ は既知とする．
   (a) 標本分散 $\hat{\sigma}^2$ を式で定義しなさい．

   (b) $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$ となることを示しなさい．

   (c) $\sigma^2 = 1$ とする．$n = 10$ のとき $\hat{\sigma}^2 > 2$ の確率を χ^2 分布表を利用して求めなさい．

2. N $\left(\mu, \sigma^2\right)$ からの無作為標本を $(X_1, \ldots, X_n)$ とする．μ, σ^2 は未知とする．

（a）標本平均 $\bar{X}$ を式で定義しなさい．

（b）標本分散 s^2 を式で定義しなさい．

（c）$(n-1)s^2/\sigma^2$ はどのような分布をもつか？

（d）$\left(\bar{X}-\mu\right)/\sqrt{s^2/n}$ はどのような分布をもつか？

（e）$\mu = 0$ とする．$n = 9$, $s^2 = 1$ のとき $\bar{X} > 1$ の確率を t 分布表を利用して求めなさい．

解答例

1. (a)

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

(b) $Z_i := (X_i - \mu)/\sigma$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \\ &= \left(\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_n-\mu}{\sigma}\right)^2 \\ &= Z_1^2 + \cdots + Z_n^2\end{aligned}$$

$Z_1, \dots, Z_n \sim \mathrm{N}(0,1)$ は独立なので，$Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$.

(c)

$$\begin{aligned}\Pr\left[\hat{\sigma}^2 > 2\right] &= \Pr\left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > \frac{2n}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr\left[\chi^2(10) > 20\right] \\ &\approx .03\end{aligned}$$

2. (a)

$$\bar{X} := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

(b)

$$s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

(c)

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(d)

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim \mathrm{t}(n-1)$$

(e)

$$\begin{aligned}\Pr\left[\bar{X} > 1\right] &= \Pr\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{s^2/n}} > \frac{1-\mu}{\sqrt{s^2/n}}\right] \\ &= \Pr[\mathrm{t}(8) > 3] \\ &\approx .008\end{aligned}$$