

# 第 16 回 正規母集団 (10.1–10.4)

村澤 康友

2025 年 11 月 25 日

## 今日のポイント

1.  $N(\mu, \sigma^2)$  からの無作為標本  $(X_1, \dots, X_n)$  の標本平均・標本分散の分布を求める.
2.  $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$  が独立のとき,  $Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$ .
3. 標本分散  $s^2$  の分布は  $(n - 1)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n - 1)$ .
4.  $Z \sim N(0, 1)$  と  $X \sim \chi^2(n)$  が独立のとき,  $Z/\sqrt{X/n} \sim t(n)$ .
5. 標本平均  $\bar{X}$  の分布は  $(\bar{X} - \mu)/\sqrt{s^2/n} \sim t(n - 1)$ .

## 目次

1	正規分布 (p. 120, p. 194)	1
2	標本分散	2
2.1	$\chi^2$ 分布 (p. 199) . . . . .	2
2.2	母平均が既知の場合 . . . . .	2
2.3	母平均が未知の場合 (p. 198) . . .	2
3	標本平均	2
3.1	t 分布 (p. 202) . . . . .	2
3.2	母分散が既知の場合 (p. 197) . . .	3
3.3	母分散が未知の場合 (p. 201) . . .	4
4	今日のキーワード	5
5	次回までの準備	5

## 1 正規分布 (p. 120, p. 194)

定義 1. 正規 (ガウス) 分布の pdf は

$$f(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

注 1.  $N(\mu, \sigma^2)$  と書く.

定義 2.  $N(0, 1)$  を標準正規分布という.

注 2.  $N(0, 1)$  の cdf を  $\Phi(\cdot)$ , pdf を  $\phi(\cdot)$  で表す. すなわち

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

定理 1.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  なら

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$$

証明. mgf を用いる. □

系 1.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  なら

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

証明. 前定理で  $a := 1/\sigma$ ,  $b := -\mu/\sigma$  とする. □

注 3. したがって  $X$  の累積確率は標準正規分布表から求まる. すなわち

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \leq x] \\ &= \Pr\left[\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

ただし  $\Phi(\cdot)$  でなく  $Q(\cdot) := 1 - \Phi(\cdot)$  の表の場合も多い.

## 2 標本分散

### 2.1 $\chi^2$ 分布 (p. 199)

**定義 3.**  $Z_1, \dots, Z_n \sim N(0, 1)$  が独立のとき,  $Z_1^2 + \dots + Z_n^2$  の分布を自由度  $n$  の  $\chi^2$  分布という.

注 4.  $\chi^2(n)$  と書く.

注 5. 累積確率は  $\chi^2$  分布表を参照.

**例 1.**  $\chi^2(n)$  の pdf の例は図 1 の通り.

**定理 2.**  $X \sim \chi^2(n)$  なら

$$E(X) = n$$

証明.  $X = Z_1^2 + \dots + Z_n^2$  とすると

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) \\ &= E(Z_1^2) + \dots + E(Z_n^2) \\ &= \text{var}(Z_1) + \dots + \text{var}(Z_n) \\ &= n \end{aligned}$$

□

### 2.2 母平均が既知の場合

$N(\mu, \sigma^2)$  からの無作為標本を  $(X_1, \dots, X_n)$  とする.  $\mu$  が既知なら標本分散は

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

**定理 3.**

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$$

証明.

$$\begin{aligned} \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \\ &= \left( \frac{X_1 - \mu}{\sigma} \right)^2 + \dots + \left( \frac{X_n - \mu}{\sigma} \right)^2 \end{aligned}$$

各項は独立な  $N(0, 1)$  の 2 乗.

□

注 6.  $\hat{\sigma}^2$  の累積確率は  $\chi^2$  分布表から次のように求める.

$$\begin{aligned} \Pr[\hat{\sigma}^2 \leq x] &= \Pr\left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \leq \frac{nx}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr\left[\chi^2(n) \leq \frac{nx}{\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

**例 2.**  $\sigma^2 = 1$  とする.  $n = 10$  なら  $\hat{\sigma}^2 > 2$  の確率は

$$\begin{aligned} \Pr[\hat{\sigma}^2 > 2] &= \Pr\left[\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} > \frac{2n}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr[\chi^2(10) > 20] \\ &\approx .03 \end{aligned}$$

### 2.3 母平均が未知の場合 (p. 198)

$\mu$  が未知なら標本分散は

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

**定理 4.**

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

証明. 省略 (難しい). □

注 7. 母平均が既知の場合と同様に書き換えると

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \\ &= \left( \frac{X_1 - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 + \dots + \left( \frac{X_n - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \end{aligned}$$

各項は独立でなく  $N(0, 1)$  の 2 乗でもない.

注 8.  $s^2$  の累積確率は  $\chi^2$  分布表から次のように求める.

$$\begin{aligned} \Pr[s^2 \leq x] &= \Pr\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \frac{(n-1)x}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr\left[\chi^2(n-1) \leq \frac{(n-1)x}{\sigma^2}\right] \end{aligned}$$

**例 3.**  $\sigma^2 = 1$  とする.  $n = 10$  なら  $s^2 > 2$  の確率は

$$\begin{aligned} \Pr[s^2 > 2] &= \Pr\left[\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} > \frac{2(n-1)}{\sigma^2}\right] \\ &= \Pr[\chi^2(9) > 18] \\ &\approx .04 \end{aligned}$$

## 3 標本平均

### 3.1 t 分布 (p. 202)

**定義 4.**  $Z \sim N(0, 1)$  と  $X \sim \chi^2(n)$  が独立のとき,  $Z/\sqrt{X/n}$  の分布を自由度  $n$  の t 分布という.

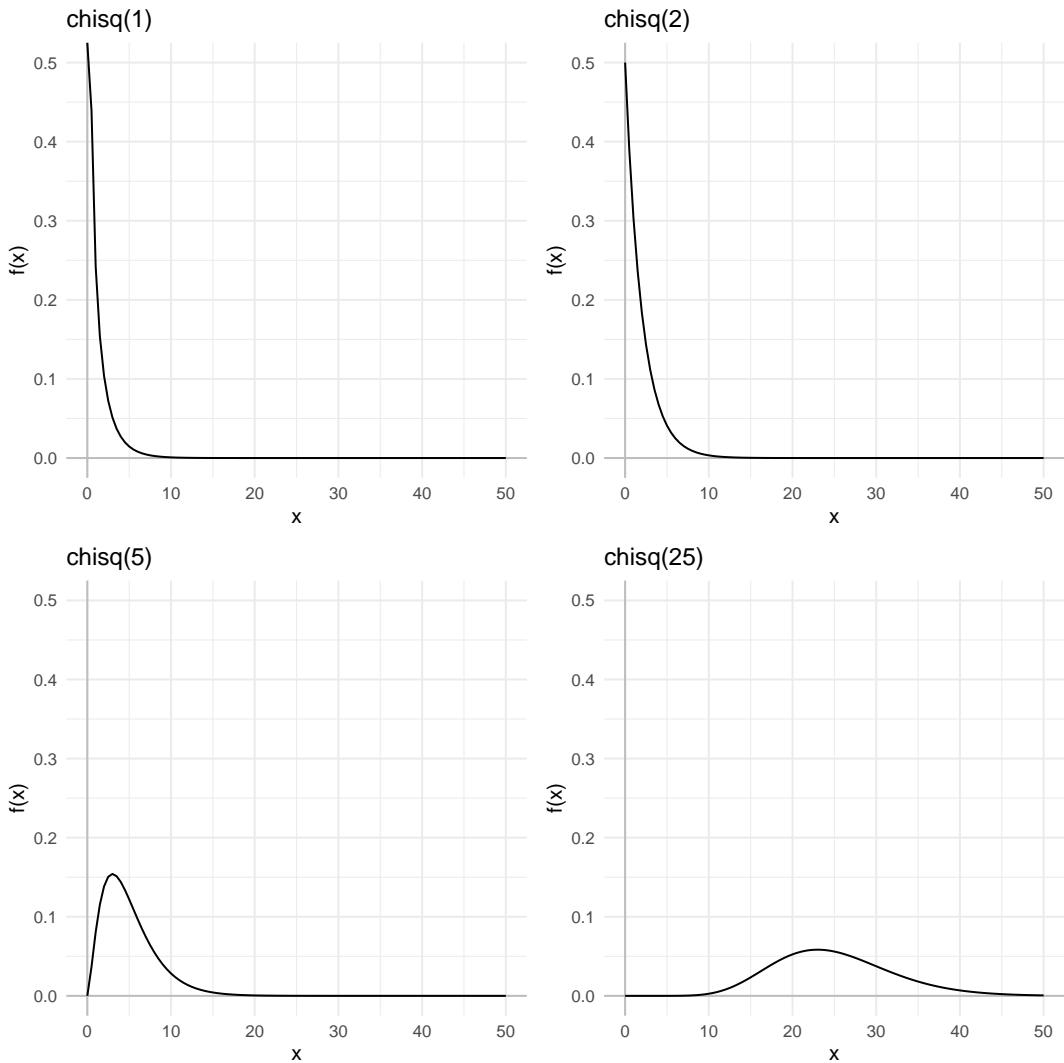


図 1  $\chi^2(n)$  の pdf の例

注 9.  $t(n)$  と書く.

注 10. 累積確率は  $t$  分布表を参照.

注 11.  $t(1)$  はコーシー分布,  $t(\infty)$  は  $N(0, 1)$ .

例 4.  $t(n)$  の pdf の例は図 2 の通り.

### 3.2 母分散が既知の場合 (p. 197)

$N(\mu, \sigma^2)$  からの無作為標本を  $(X_1, \dots, X_n)$  とする.

定理 5.

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

証明. 正規分布の線形変換は正規分布. 平均と分散の計算は省略.  $\square$

### 系 2.

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$

証明. 正規分布の線形変換は正規分布. 標準化で平均 0, 分散 1 となる.  $\square$

注 12.  $\bar{X}$  の累積確率は標準正規分布表から次のよ

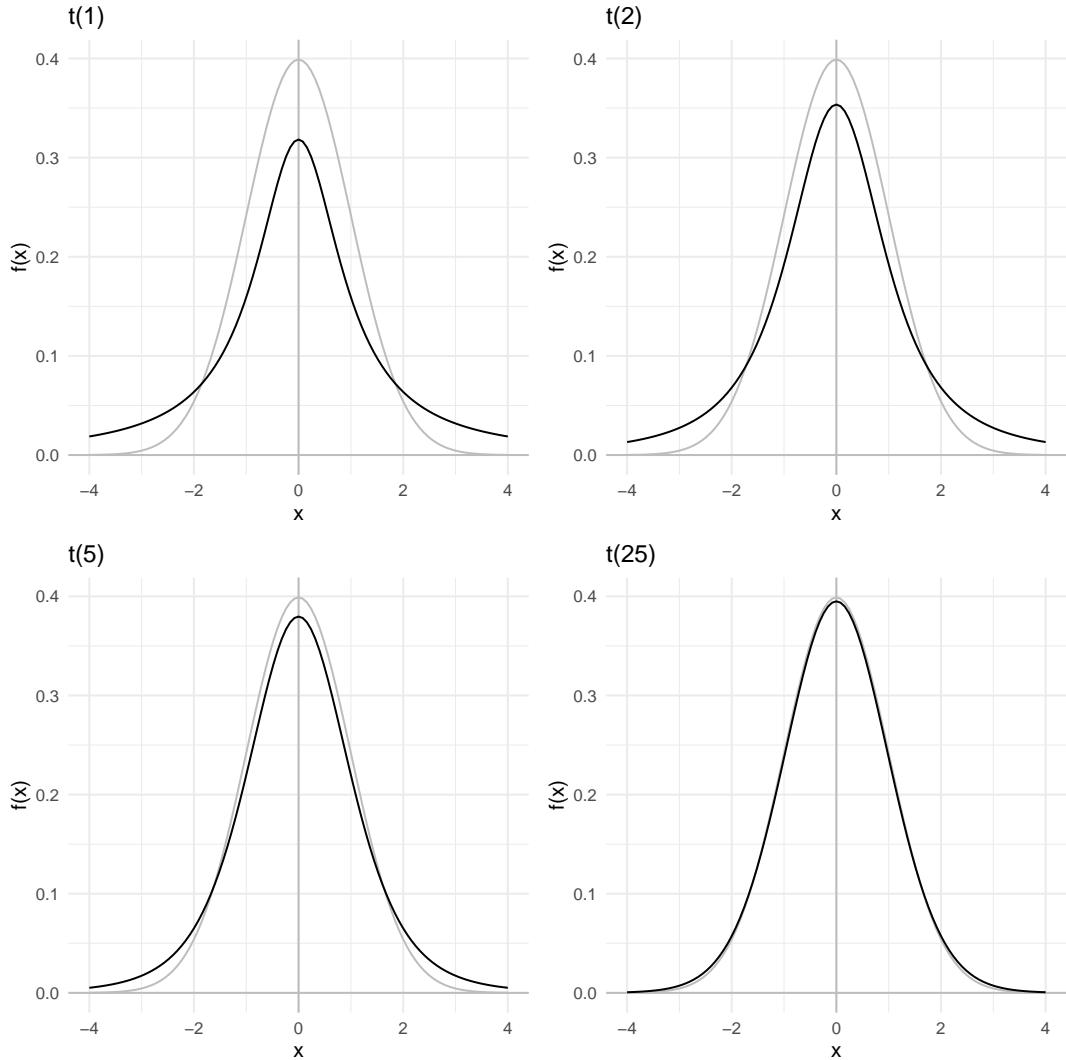


図 2  $t(n)$  の pdf の例

うに求める。

$$\begin{aligned} \Pr [\bar{X} \leq x] &= \Pr \left[ \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq \frac{x - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right] \\ &= \Phi \left( \frac{x - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right) \end{aligned}$$

**例 5.**  $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$  とする。 $n = 9$  なら  $\bar{X} > 1$  の確率は

$$\begin{aligned} \Pr [\bar{X} > 1] &= \Pr \left[ \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} > \frac{1 - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \right] \\ &= Q(3) \\ &= .0013499 \end{aligned}$$

### 3.3 母分散が未知の場合 (p. 201)

母分散が未知なら  $\sigma^2$  を  $s^2$  で置き換える。

**定理 6.**

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t(n-1)$$

証明。変形すると

$$\begin{aligned} \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} &= \frac{(\bar{X} - \mu) / \sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{s^2/n} / \sqrt{\sigma^2/n}} \\ &= \frac{(\bar{X} - \mu) / \sqrt{\sigma^2/n}}{\sqrt{[(n-1)s^2/\sigma^2]/(n-1)}} \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0, 1)$$
$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

分子と分母の独立性も証明できる（省略）。  $\square$

注 13.  $\bar{X}$  の累積確率は t 分布表から次のように求める。

$$\Pr[\bar{X} \leq x] = \Pr\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \leq \frac{x - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\right]$$
$$= \Pr\left[t(n-1) \leq \frac{x - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\right]$$

例 6.  $\mu = 0$  とする。 $n = 9, s^2 = 1$  なら  $\bar{X} > 1$  の確率は

$$\Pr[\bar{X} > 1] = \Pr\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} > \frac{1 - \mu}{\sqrt{s^2/n}}\right]$$
$$= \Pr[t(8) > 3]$$
$$\approx .008$$

## 4 今日のキーワード

正規分布、標準正規分布、正規分布の標準化、標準正規分布表、自由度  $n$  の  $\chi^2$  分布、 $\chi^2$  分布表、標本分散の分布（母平均が既知、母平均が未知）、標本平均の分布（母分散が既知）、自由度  $n$  の t 分布、t 分布表、標本平均の分布（母分散が未知）

## 5 次回までの準備

復習 教科書第 10 章 1–4 節、復習テスト 16

予習 教科書第 10 章 5 節