計量経済 I：復習テスト 2

学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2025 年 4 月 15 日

注意：すべての質問に解答しなければ提出とは認めない．正答に修正した上で，復習テスト 1〜8 を順に重ねて左上でホチキス止めし，中間テスト実施日（6 月 10 日の予定）に提出すること．

1. データを $(x_1, \dots, x_n)$ とする．
   (a) $y_i := ax_i + b$ と一次変換すると，
   $$\begin{aligned}\mu_y &= a\mu_x + b \\ \sigma_y^2 &= a^2\sigma_x^2\end{aligned}$$
   となることを示しなさい．ただし μ_x, μ_y は平均，σ_x^2, σ_y^2 は分散を表す．

   (b) 上の結果を利用して，$z_i := (x_i - \mu_x)/\sigma_x$ と標準化すると，平均が 0，分散が 1 となることを示しなさい．

2. 1 変量データ $(x_1, \ldots, x_n)$ の平均を μ，分散を σ^2 とする．

（a）σ^2 の定義を式で書きなさい．

（b）σ^2 が次のようにも書けることを示しなさい．

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mu^2$$

3. 2 変量データ $((x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n))$ の平均を μ_x, μ_y，分散を σ_x^2, σ_y^2，共分散を σ_{xy}，相関係数を ρ_{xy} とする．

（a）σ_{xy} の定義を式で書きなさい．

（b）σ_{xy} が次のようにも書けることを示しなさい．

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \mu_x \mu_y$$

（c）ρ_{xy} の定義を式で書きなさい．

（d）ρ_{xy} が次のように書けることを示しなさい．

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

解答例

1. (a)

$$
\begin{aligned}
\mu_y &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} ax_i + \sum_{i=1}^{n} b\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ax_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b \\
&= a \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + b \\
&= a\mu_x + b \\
\sigma_y^2 &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \mu_y)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(ax_i + b) - (a\mu_x + b)]^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[a(x_i - \mu_x)]^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a^2(x_i - \mu_x)^2 \\
&= a^2 \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2 \\
&= a^2\sigma_x^2
\end{aligned}
$$

(b) $z_i := (x_i - \mu_x)/\sigma_x = (1/\sigma_x)x_i - \mu_x/\sigma_x$ と書けるから，$a = 1/\sigma_x$，$b = -\mu_x/\sigma_x$ と置くと，前問の結果より

$$
\begin{aligned}
\mu_z &= a\mu_x + b \\
&= \frac{1}{\sigma_x}\mu_x - \frac{\mu_x}{\sigma_x} \\
&= 0 \\
\sigma_y^2 &= a^2\sigma_x^2 \\
&= \left(\frac{1}{\sigma_x}\right)^2 \sigma_x^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

2. (a)

$$
\sigma^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}2x_i\mu + \sum_{i=1}^{n}\mu^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}2x_i\mu + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\mu\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \mu^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \mu^2
\end{aligned}
$$

3. (a)

$$
\sigma_{xy} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xy} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i - x_i\mu_y - \mu_xy_i + \mu_x\mu_y) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \sum_{i=1}^{n}x_i\mu_y - \sum_{i=1}^{n}\mu_xy_i + \sum_{i=1}^{n}\mu_x\mu_y\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\mu_y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_xy_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu_x\mu_y \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\mu_y - \mu_x\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i + \mu_x\mu_y \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i - \mu_x\mu_y
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\rho_{xy} &:= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y}
\end{aligned}
$$

（d）

$$
\begin{aligned}
\rho_{xy} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y_i-\mu_y}{\sigma_y} \\
&= \frac{(1/n)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \\
&= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}
\end{aligned}
$$