第 4 回　確率（4.1–4.4）

村澤 康友

2022 年 10 月 7 日

これまでの復習

統計学の 2 つのアプローチ

記述統計学　データの整理

統計的推測　標本から母集団について推測
→抽出される標本により結果が変わる
→信頼度の評価が必要

今日のポイント

1. 試行において起こりうる結果を標本点，標本点全体の集合を標本空間，標本空間の部分集合を事象という．
2. 事象に対して定義され，確率の公理を満たす関数を確率という．
3. 確率の公理から確率の性質が導かれる．

目次

1　標本空間と事象（p. 68）

1.1　標本空間（p. 69）

定義 1. 結果が偶然に支配される実験を**試行**という．

例 1. コイントス，サイコロ，電球の寿命，明日の天気．

定義 2. 試行において起こりうる結果を**標本点**という．

定義 3. 標本点全体の集合を**標本空間**という．

例 2. コイントスなら $\{H, T\}$，サイコロなら $\{1, \dots, 6\}$，電球の寿命なら $(0, \infty)$．

注 1. 標本点を ω，標本空間を Ω で表すことが多い．

1.2　事象（p. 69）

定義 4. 標本空間の部分集合を**事象**という．

例 3. コイントスの事象は $\emptyset, \{H\}, \{T\}, \Omega$．

定義 5. 空集合の事象を**空事象**という．

定義 6. 標本空間全体の事象を**全事象**という．

定義 7. ただ 1 つの標本点から成る事象を**根元事象**という．

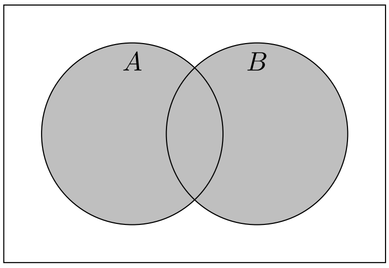
定義 8. 複数の標本点から成る事象を**複合事象**という．

1.3　集合算（p. 73）

ある試行の事象を A, B, C とする．

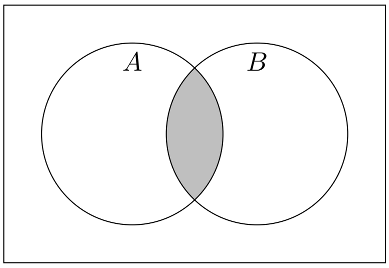
定義 9. $A \cup B$ を A と B の**和事象**という．

注 2. ベン図で表すと



定義 10. $A \cap B$ を A と B の**積事象**という.

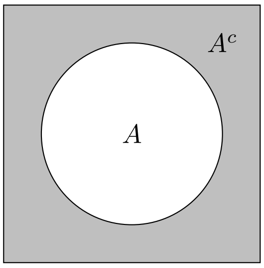
注 3. ベン図で表すと



定義 11. $A \cap B = \emptyset$ なら A と B は**排反**という.

定義 12. A^c を A の**余事象**という.

注 4. ベン図で表すと



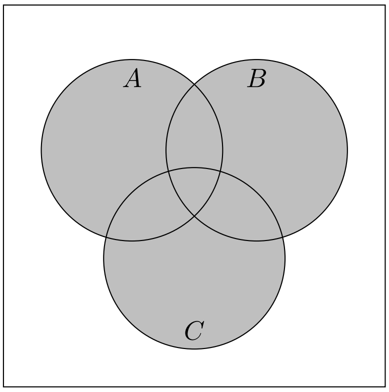
定理 1 (交換法則)**.**

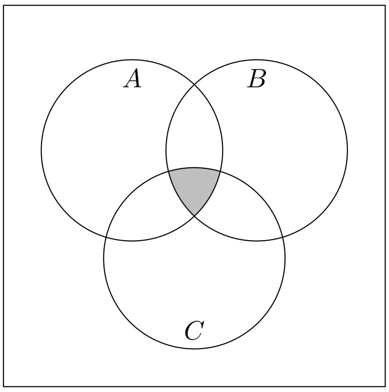
$$
\begin{aligned}
A \cup B = B \cup A \\
A \cap B = B \cap A
\end{aligned}
$$

定理 2 (結合法則)**.**

$$
\begin{aligned}
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\
(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)
\end{aligned}
$$

注 5. ベン図で表すと





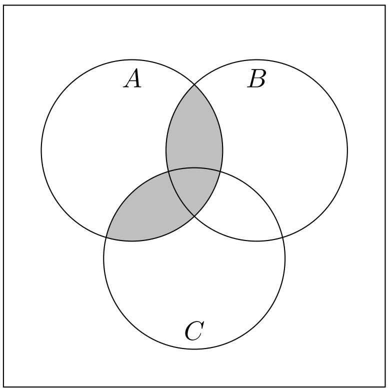
定理 3 (分配法則)**.**

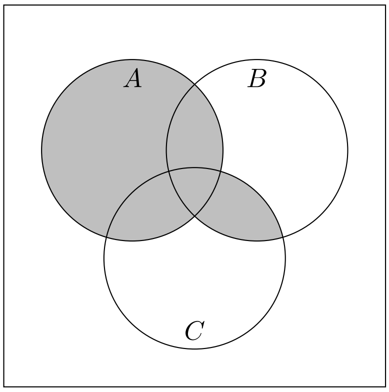
$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

注 6. 数の場合は

$$
\begin{aligned}
a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \\
a + (b \times c) \neq (a + b) \times (a + c)
\end{aligned}
$$

注 7. ベン図で表すと

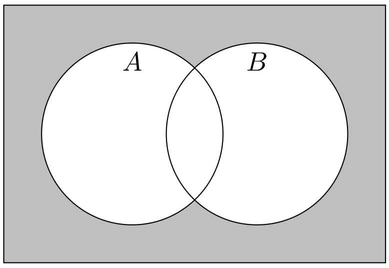


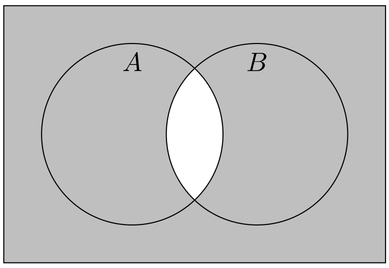


定理 4 (ド・モルガンの法則)**.**

$$
\begin{aligned}
(A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\
(A \cap B)^c &= A^c \cup B^c
\end{aligned}
$$

注 8. 「A または B」でない$=$ A でなく，かつ B でない.「A かつ B」でない$=$ A でないか，または B でない．ベン図で表すと





2　確率（p. 75）

2.1　確率の公理（p. 78）

定義 13. 事象に対して定義され，以下の公理を満たす関数 $P(.)$ を**確率**という．

1. $0 \leq P(.) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. （σ 加法性）$A_1, A_2, \ldots$ が排反なら

$$
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)
$$

例 4. 公正なコイントスなら

$$
P(A) := \begin{cases} 0 & \text{for } A = \emptyset \\ 1/2 & \text{for } A = \{H\}, \{T\} \\ 1 & \text{for } A = \Omega \end{cases}
$$

2.2　確率の性質（p. 80）

定理 5.

$$
P(A) + P(A^c) = 1
$$

証明. A と A^c は排反だから

$$
\begin{aligned}
P(A) + P(A^c) &= P(A \cup A^c) \\
&= P(\Omega) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

定理 6.

$$
P(\emptyset) = 0
$$

証明. $A = A \cup \emptyset$ であり，A と $\emptyset$ は排反だから

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cup \emptyset) \\
&= P(A) + P(\emptyset)
\end{aligned}
$$

両辺から $P(A)$ を引けば結果が得られる． □

定理 7.

$$
A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)
$$

証明. $A \subset B$ より

$$
B = A \cup (A^c \cap B)
$$

A と $A^c \cap B$ は排反だから

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(A \cup (A^c \cap B)) \\
&= P(A) + P(A^c \cap B) \\
&\geq P(A)
\end{aligned}
$$

□

定理 8 (加法定理)**.**

$$
P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)
$$

証明. ベン図より

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \\
A &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \\
B &= (A \cap B) \cup (A^c \cap B)
\end{aligned}
$$

$A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ は排反だから

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) + (A \cap B^c) \\
P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \\
P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B)
\end{aligned}
$$

□

3 今日のキーワード

試行, 標本点, 標本空間, 事象 (空事象, 全事象, 根元事象, 複合事象, 和事象, 積事象, 排反事象, 余事象), 集合算の法則 (交換法則, 結合法則, 分配法則, ド・モルガンの法則), 確率の公理, σ 加法性, 加法定理

4 次回までの準備

復習 教科書第 4 章 1–4 節, 復習テスト 4

予習 教科書第 4 章 5 節