

第8回 チェビシェフの不等式，確率変数の変換（5.4–5.5）

村澤 康友

2024 年 10 月 15 日

今日のポイント

1. マルコフ／チェビシェフの不等式は，分布の裾の確率の上限を与える．
2. $Y := g(X)$ の分布は， X が離散なら pmf，連続なら cdf で導出する．
3. $[0, 1]$ 上の一様乱数 U を $F^{-1}(U)$ と変換した乱数の cdf は $F(\cdot)$ （逆関数法）．

目次

1	チェビシェフの不等式	1
1.1	分布の裾の確率	1
1.2	マルコフの不等式	1
1.3	チェビシェフの不等式（p. 104）	1
2	確率変数の変換	2
2.1	離散分布	2
2.2	連続分布（p. 106）	3
2.3	乱数の生成（p. 106）	3
3	今日のキーワード	4
4	次回までの準備	4

1 チェビシェフの不等式

1.1 分布の裾の確率

確率変数 X の分布の裾の確率を求めたい（図 1）．

- 分布が既知なら cdf・pmf・pdf から $\Pr[|X| \geq c]$ が正確に求まる．
- 分布が未知でも積率から $\Pr[|X| \geq c]$ の上限が求まる．

1.2 マルコフの不等式

補題 1（マルコフの不等式）．任意の $c > 0$ について

$$\Pr[|X| \geq c] \leq \frac{E(|X|)}{c}$$

証明． X が連続なら

$$\begin{aligned} c \Pr[|X| \geq c] &= c \int_{|x| \geq c} f_X(x) dx \\ &= \int_{|x| \geq c} c f_X(x) dx \\ &\leq \int_{|x| \geq c} |x| f_X(x) dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx \\ &= E(|X|) \end{aligned}$$

離散の場合も同様．

□

注 1. X の分布にかかわらず $\Pr[|X| \geq c]$ の上限を与える．

1.3 チェビシェフの不等式（p. 104）

定理 1（チェビシェフの不等式）．任意の $c > 0$ について

$$\Pr[|X - \mu_X| \geq c] \leq \frac{\sigma_X^2}{c^2}$$

証明．マルコフの不等式より

$$\begin{aligned} \Pr[|X - \mu_X| \geq c] &= \Pr[|X - \mu_X|^2 \geq c^2] \\ &\leq \frac{E(|X - \mu_X|^2)}{c^2} \\ &= \frac{\text{var}(X)}{c^2} \end{aligned}$$

□

注 2. c が大きいときマルコフの不等式よりシャープな上限を与える．また大数の法則（第 8 章）の証明に用いる．

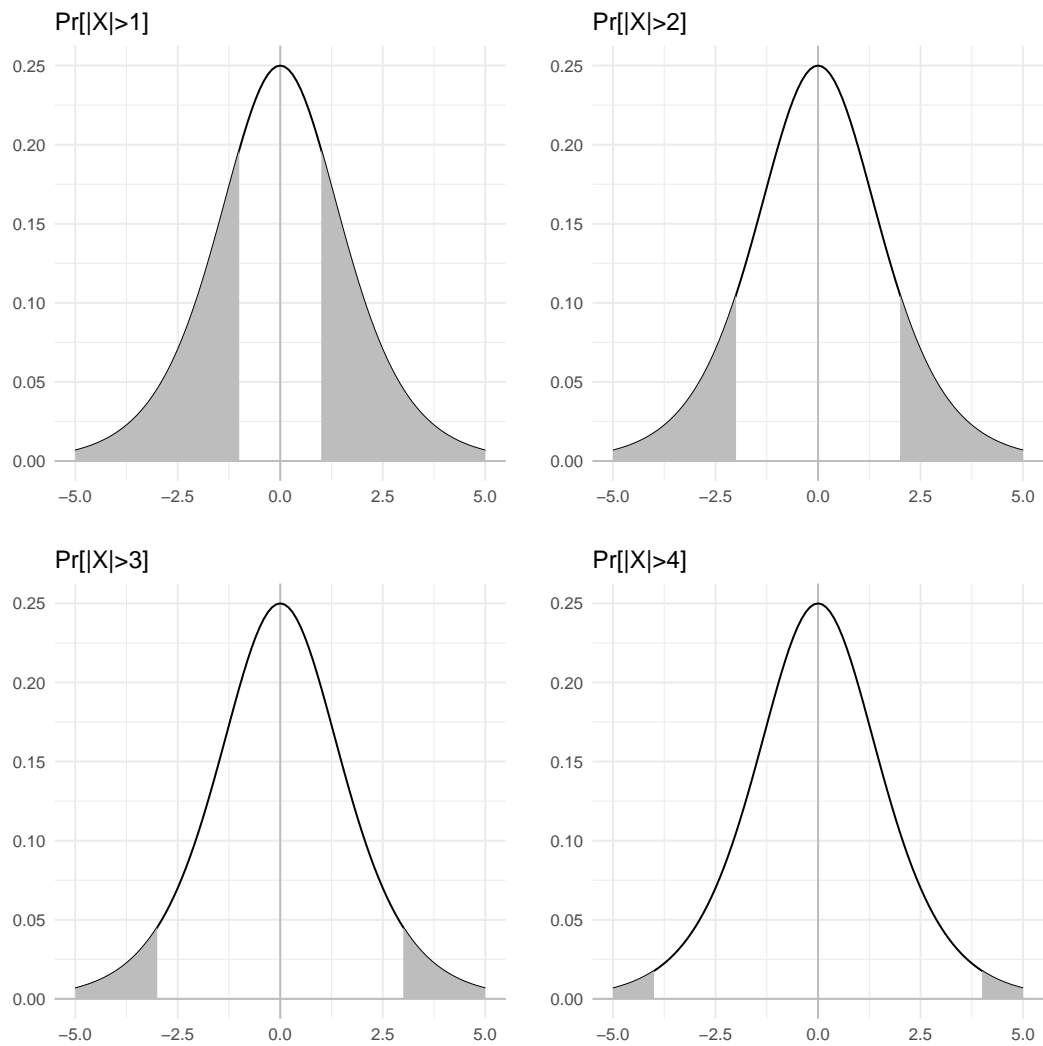


図1 分布の裾の確率

例 1. 標準化変量を Z とすると偏差値は $10Z + 50$.

例えば

- $|Z| \geq 2 \iff$ 偏差値 30 以下か 70 以上
- $|Z| \geq 3 \iff$ 偏差値 20 以下か 80 以上

チェビシェフの不等式より

$$\begin{aligned}\Pr[|Z| \geq 2] &\leq \frac{1}{4} \\ \Pr[|Z| \geq 3] &\leq \frac{1}{9}\end{aligned}$$

2 確率変数の変換

2.1 離散分布

X を離散確率変数, $g(\cdot)$ を 1 対 1 の関数とする.
 $Y := g(X)$ の分布を求めたい. Y の pmf は

$$\begin{aligned}p_Y(y) &:= \Pr[Y = y] \\ &= \Pr[g(X) = y] \\ &= \Pr[X = g^{-1}(y)] \\ &= p_X(g^{-1}(y))\end{aligned}$$

例 2. 次の確率変数を考える.

$$X := \begin{cases} 1 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

X の pmf は

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{for } x = 0, 1 \\ 0 & \text{for } x \neq 0, 1 \end{cases}$$

$Y := 2X$ とすると

$$Y = \begin{cases} 2 & \text{with pr. } 1/2 \\ 0 & \text{with pr. } 1/2 \end{cases}$$

Y の pmf は

$$\begin{aligned} p_Y(y) &:= \Pr[Y = y] \\ &= \Pr[2X = y] \\ &= \Pr\left[X = \frac{y}{2}\right] \\ &= p_X\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 1/2 & \text{for } y = 0, 2 \\ 0 & \text{for } y \neq 0, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

X, Y の pmf のグラフは図 2 の通り.

2.2 連続分布 (p. 106)

X を連続確率変数, $g(\cdot)$ を 1 対 1 の関数とする. また $g(\cdot), F_X(\cdot)$ は微分可能とする. $Y := g(X)$ の分布を求めたい. 連続確率変数の変換では, まず cdf を変換し, それから pdf を求める.

1. $g(\cdot)$ が厳密な増加関数なら, Y の cdf は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \leq y] \\ &= \Pr[g(X) \leq y] \\ &= \Pr[X \leq g^{-1}(y)] \\ &= F_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

pdf は

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= Dg^{-1}(y) f_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

2. $g(\cdot)$ が厳密な減少関数なら, Y の cdf は

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \leq y] \\ &= \Pr[g(X) \leq y] \\ &= \Pr[X \geq g^{-1}(y)] \\ &= 1 - F_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

pdf は

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_Y(y) \\ &= -Dg^{-1}(y) f_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

まとめると

$$f_Y(y) = |Dg^{-1}(y)| f_X(g^{-1}(y))$$

$|Dg^{-1}(y)|$ を変換のヤコビアンという. これがないと $f_Y(\cdot)$ を全範囲で積分しても 1 にならない.

例 3. X を $[0, 1]$ 上の一様確率変数とする. X の pdf は

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{for } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

$Y := 2X$ とすると

$$\begin{aligned} F_Y(y) &:= \Pr[Y \leq y] \\ &= \Pr[2X \leq y] \\ &= \Pr\left[X \leq \frac{y}{2}\right] \\ &= F_X\left(\frac{y}{2}\right) \\ f_Y(y) &= \frac{1}{2} f_X\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 1/2 & \text{for } y \in [0, 2] \\ 0 & \text{for } y \notin [0, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

X, Y の cdf と pdf のグラフは図 3 の通り.

2.3 乱数の生成 (p. 106)

確率分布 (cdf) $F(\cdot)$ からの乱数を生成したい. 一様乱数はコンピュータで生成できる. U を $[0, 1]$ 上の一様確率変数とする. U の cdf は

$$F_U(u) := \begin{cases} 0 & \text{for } u < 0 \\ u & \text{for } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{for } 1 < u \end{cases}$$

定理 2. $X := F^{-1}(U)$ の cdf は $F(\cdot)$.

証明. $F(\cdot)$ は増加関数なので

$$\begin{aligned} F_X(x) &:= \Pr[X \leq x] \\ &= \Pr[F^{-1}(U) \leq x] \\ &= \Pr[U \leq F(x)] \\ &= F_U(F(x)) \\ &= F(x) \end{aligned}$$

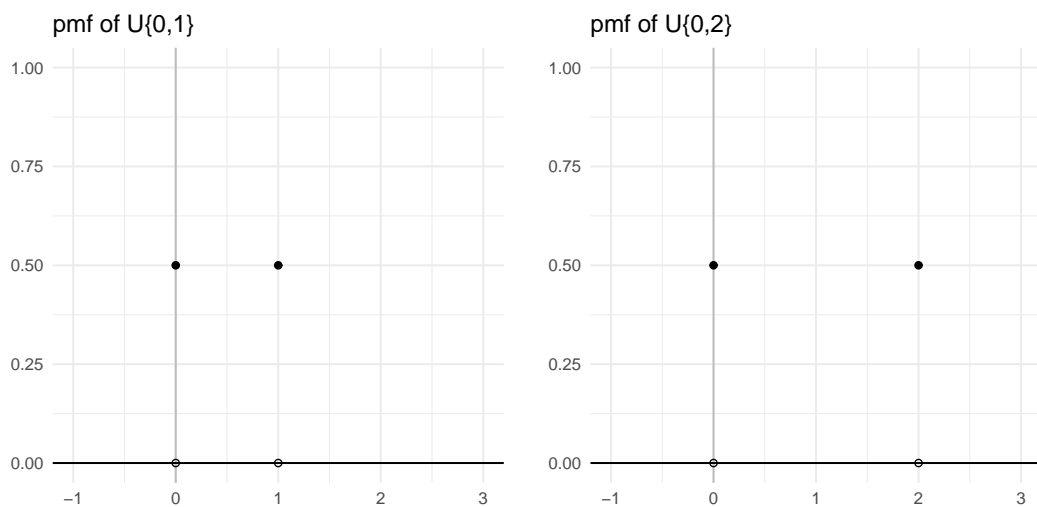


図2 離散確率変数の変換

□

定義 1. 一様乱数 U を $F^{-1}(U)$ と変換して $F(\cdot)$ からの乱数を生成する方法を**逆関数法**という.

例 4. $x > 0$ について

$$F(x) := 1 - e^{-x}$$

とすれば $F(\cdot)$ は cdf (指数分布). $F(\cdot)$ の逆関数は

$$F^{-1}(y) = -\ln(1 - y)$$

したがって U が一様乱数なら $-\ln(1 - U)$ は指数分布にしたがう.

3 今日のキーワード

マルコフの不等式, チェビシエフの不等式, 確率変数の変換 (離散・連続), 変換のヤコビアン, 逆関数法

4 次回までの準備

提出 宿題 2, 復習テスト 1-8

復習 教科書第 5 章 4-5 節, 復習テスト 8

試験 (1) 教科書を読む (2) 用語の定義を覚える (3) 復習テストを自力で解く (4) 過去問に挑戦

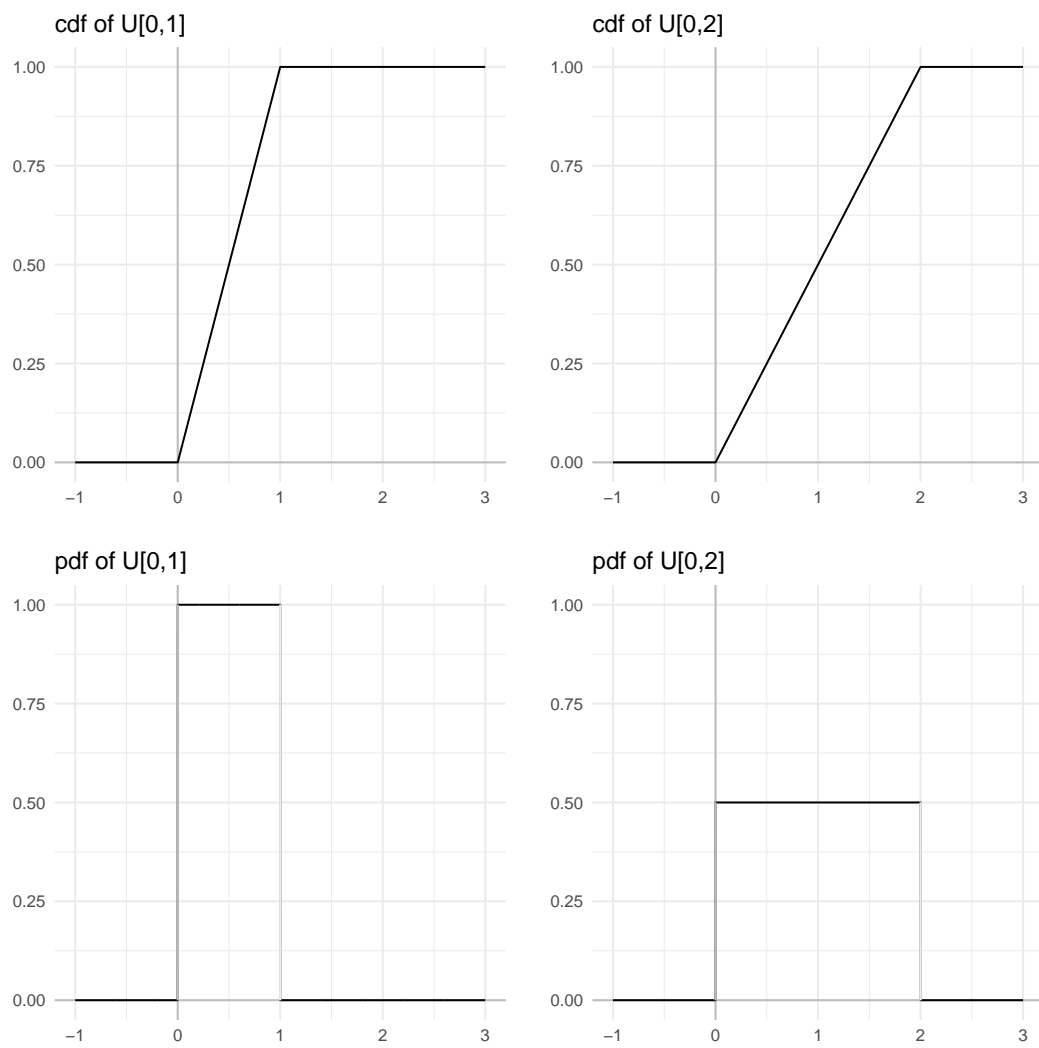


図3 連続確率変数の変換