注：这里只解决了 a)部分，b)部分还没解决，但最近有点忙就还是先发出来。

令 $f(x)$ 表示其在 x 上的数量

令 $L(x)$ 表其在 x 到 $x+1$ 时在 $x+1$ 被 freeze 且被选中退回的数量

则有：

$$f(x) = \underbrace{f(x-1)\cdot(1-p)}_{\text{无失误}} + \underbrace{f(x-1)\cdot p}_{\text{失误}} \cdot \underbrace{(1-L(x-1))}_{\text{未选中}}$$

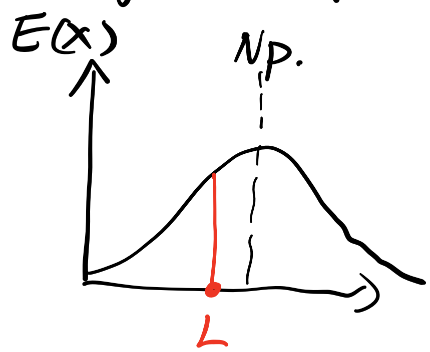
$$= f(x-1) - f(x-1)\cdot p\cdot L(x-1).$$

故只需解决：① $f(0)=?$

② $f(x-1)\cdot p\cdot L(x-1)=?$

对于①.

$f(0)$：每回合退回数量.



N个人可能失误也可能不失误。其符合二项分布. E(x)

当 $x\leq L$ 时，只有 x 返回（因很少人失误）

$x>L$ 时，只有 L 个返回

$$\because f(0)=\int_{-\infty}^{L}E(x)\cdot x\,dx+\int_{L}^{+\infty}E(x)\cdot L\,dx$$

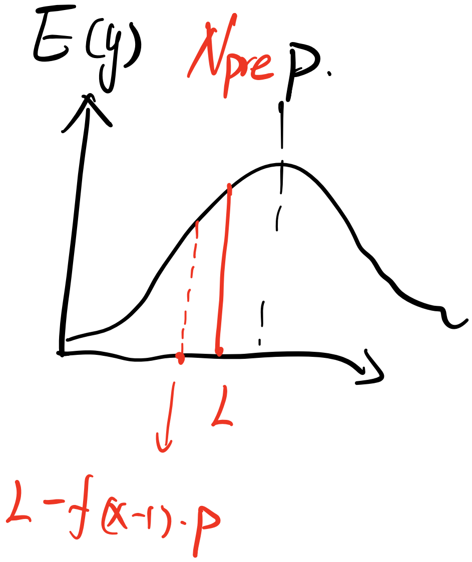
其中 $E(x)\sim\mu=Np,\ \sigma=Np(1-p)$

对于 ②：考虑其前面人数能提供多少损失以满足 L.

如果 $x < L - f(x-1)\cdot p$.

(即损失有很大容量)

全部返回



如 $L - f(x-1)p < x < L$

(即有损失但不完全)

部分返回.

如 $L < x$

说明前方的人填满了所需

则无人返回.

$$\therefore f(x-1)\cdot p\cdot L(x-1) = \int_{-\infty}^{L-f(x-1)p} E(y)\cdot \frac{f(x-1)p}{\text{全部}}\, dy + \int_{L-f(x-1)p}^{L} E(y)\cdot (L-y)\, dy$$

其中 $E(y) \sim \mu = N_{pre} \cdot p$, $\sigma = N_{pre} \cdot p \cdot (1-p)$

$$N_{pre} = N - \sum_{i=1}^{x-1} f(i).$$

数据: sitmulate 计算机模拟 (真实)

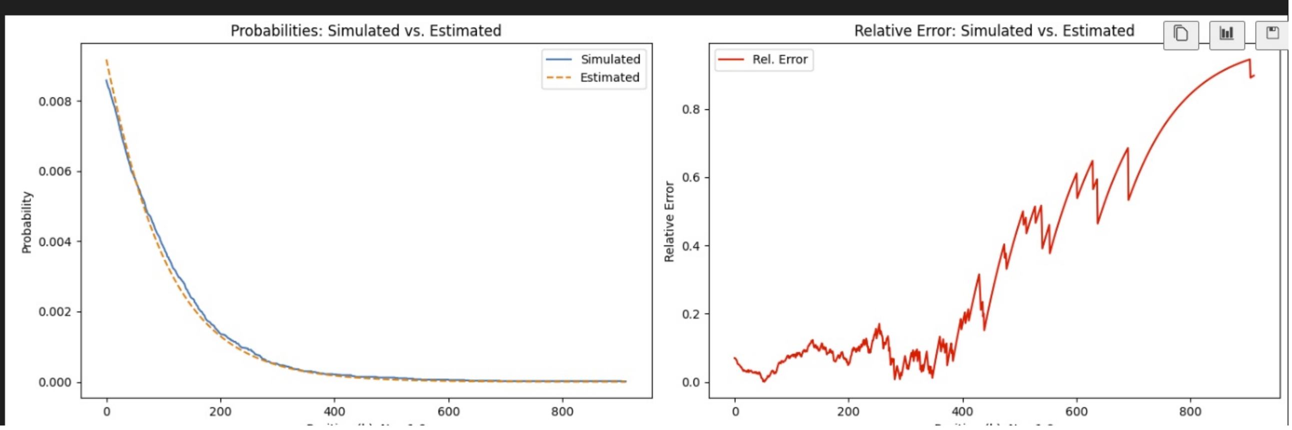
evaluate 算法模拟 (上述理论产物).

$Np < L$ 时

```
L=2
N=100
p=0.01
estimate_equal_p(L,N,p,T=100000)
```

✓ 3.5s

```
0.6030157315147149 0.31487864133641996
```

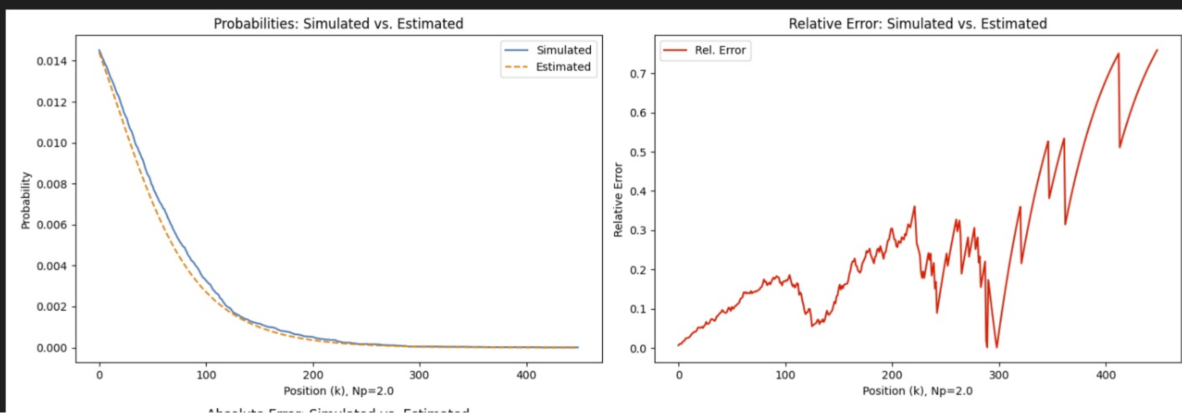


Np=L时

```python
L=2
N=100
p=0.02
estimate_equal_p(L,N,p,T=100000)
```

✓ 2.8s

```
0.4414808074379942 1.0000000000000002
```

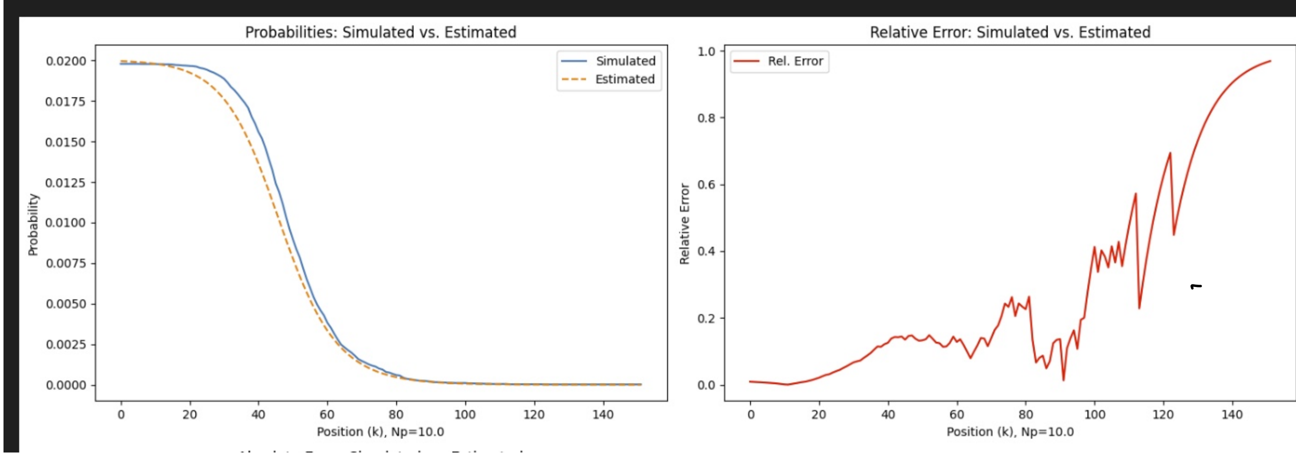


Np>L时

```python
L=2
N=100
p=0.1
estimate_equal_p(L,N,p,T=100000)
```

✓ 2.8s

```
0.004115847604497613 1.9923392388648202
```

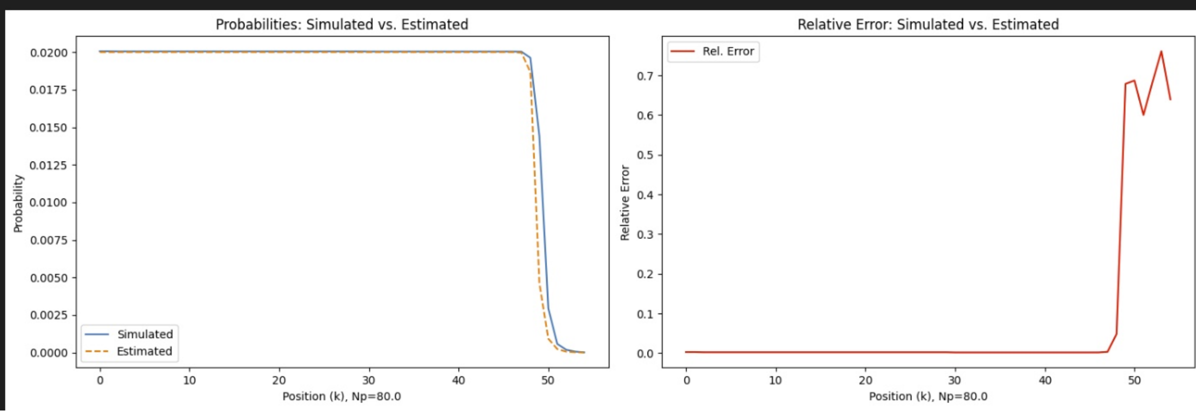


P较大时

```python
L=2
N=100
p=0.8
estimate_equal_p(L,N,p,T=100000)
```

✓ 2.9s

```
9.858104323848317e-85 2.0000000000000004
```

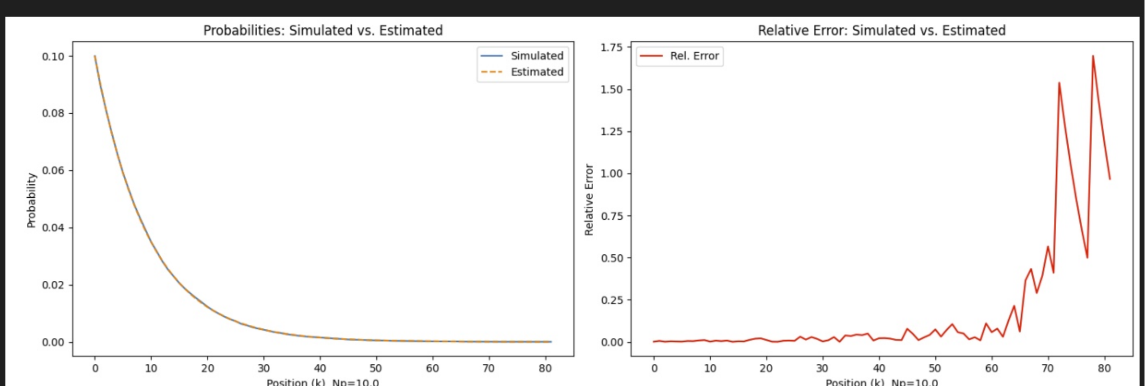


L较大时

```python
L=50
N=100
p=0.1
estimate_equal_p(L,N,p,T=100000)
```

✓ 2.2s

```
10.0 3.7032064446990866e-39
```



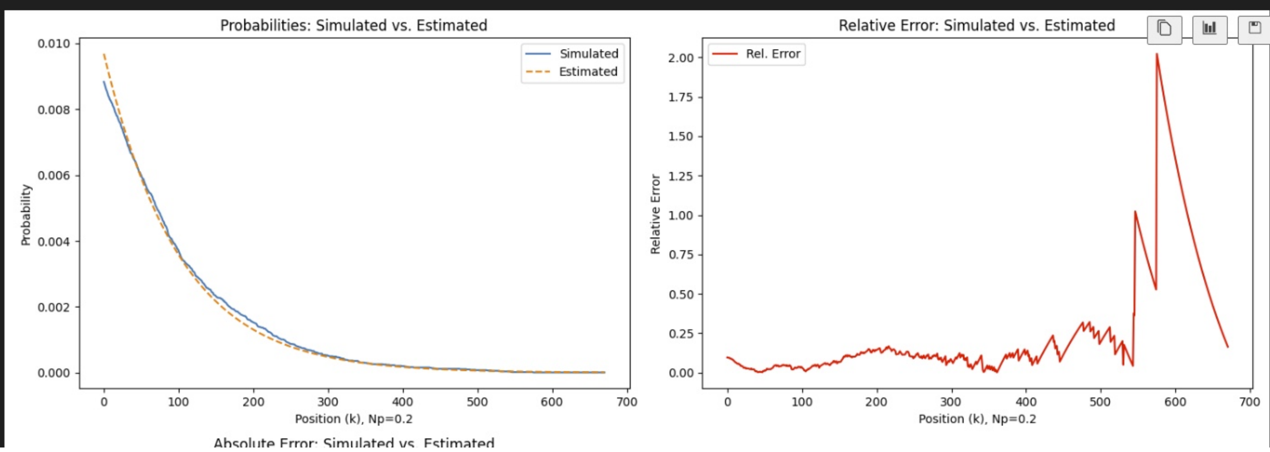
Absolute Error: Simulated vs. Estimated

N较小时

```python
L=1
N=20
p=0.01
estimate_equal_p(L,N,p,T=100000)
```

✓ 2.5s Pytho

```
0.1575144736951148 0.036099098850828834
```



N较大时

```python
L=20
N=1000
p=0.05
estimate_equal_p(L,N,p,T=100000)
```

✓ 10.5s Python

```
0.0001246417916752512 19.99986562550236
```