

文章编号: 1007-791X (2014) 05-0381-07

形式背景中属性特征与对象特征的完备定义

洪文学^{1,2,*}, 栾景民¹, 张 涛³, 李少雄¹, 郑存芳¹, 刘建波²

(1. 燕山大学 电气工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 东北大学秦皇岛分校 大数据可视化分析技术中心, 河北 秦皇岛 066004; 3. 燕山大学 信息科学与工程学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘 要: 形式背景是形式概念分析理论中的一个重要元素, 是用于表达和记录对象与属性之间二元关系的数据载体; 形式背景中属性间的关系、对象间的关系是非常重要的关系, 由此表现出来的属性的特征、对象的特征非常值得研究。本文目的是给出形式背景中属性特征与对象特征的完备数学定义及其性质, 为偏序结构理论的研究奠定坚实的基础。

关键词: 形式概念分析; 形式背景; 属性特征; 对象特征

中图分类号: TP301 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1007-791X.2014.05.002

0 引言

形式概念分析 (Formal Concept Analysis, FCA) 理论是由德国 Wille 教授于 1982 年首先提出的^[1]。概念格, 也称为 Galois 格, 是形式概念分析理论的核心数据结构。概念格的每个节点被称为一个形式概念, 由外延和内涵两部分构成。外延表示属于这个概念的所有对象的集合; 内涵表示所有这些对象所共有的属性的集合。概念格及其 Hasse 图体现了内涵与外延的统一, 表明了概念间泛化和例化的关系内涵, 从而实现了数据的可视化。

形式概念分析是一种从形式背景 (Formal Context) 建立概念格来进行知识发现和数据分析的一种有效数学工具, 它已经被成功运用到知识发现^[2-4]、机器学习^[5-6]、软件工程^[7-8]、信息检索^[9-11]和可视化^[12-13]等多个领域。

形式背景是由对象集合、属性集合、以及对象集合与属性集合之间的二元关系组成的三元组。本文主要通过对形式背景基础属性特征进行研究, 给出了形式背景中基础属性特征的完整定义及性质, 并结合实例加以说明, 这不仅从理论上丰富和发展了形式概念分析, 也为偏序结构理论的研究奠定坚

实的基础。

1 形式概念分析基础

在形式概念分析中, 形式背景被定义为一个三元组 $K = \{U, M, I\}$, 由一个形式对象集合 U 、一个形式属性集合 M 以及决定一个对象拥有哪些属性的二元关系集合 I 所组成。通常, 一个形式背景可以用一个交叉表来表示, 如表 1 所示。交叉表中的行表示对象, 列表示属性, 若一个对象拥有一个属性, 这个对象和其属性相交的单元格中可以用一个符号 “ \times ” 进行标记。

表 1 形式背景

Tab. 1 Formal context

	a	b	c	d
1	\times	\times		\times
2	\times		\times	
3		\times	\times	
4	\times	\times		\times
5	\times			

对象与属性集合在形式背景 $K = \{U, M, I\}$ 中, 对象集 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, 属性集 $M = \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ 。

设 $y \in M$, 定义

收稿日期: 2014-06-20 **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目 (61273019, 61201111, 81273740, 81373767); 河北省自然科学基金资助项目 (F2013203368)

作者简介: *洪文学 (1953-), 男, 黑龙江依安人, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为大数据偏序结构理论、复杂概念网络、可视化模式识别和中医工程学, Email: hongwx@ysu.edu.cn。

$$g(y)=\{u|\forall u\in U, (u, y)\in I\}$$

表示具有属性 y 的对象集合。

设 $x\in U$, 定义

$$f(x)=\{m|\forall m\in M, (x, m)\in I\}$$

表示对象 x 所具有的属性集合。

将属性 y 扩展至属性集合 Y , $Y\subseteq M$, 将对象 x 扩展至集合 X , $X\subseteq U$, 则有

$$g(Y)=\{u|\forall y\in Y, u\in U, (u, y)\in I\},$$

$$f(X)=\{m|\forall x\in X, m\in M, (x, m)\in I\},$$

分别表示具有属性集合 Y 中所有属性的对象集合, 和对象集合 X 中所共同拥有的属性集合。

设 $K=\{U, M, I\}$ 是一个形式背景, 若 $A\subseteq U$, $B\subseteq M$, 令

$$f(A)=\{m\in M|\forall u\in A, (u, m)\in I\},$$

$$g(B)=\{u\in U|\forall m\in B, (u, m)\in I\},$$

如果 A, B 满足 $f(A)=B$, $g(B)=A$, 称二元组 (A, B) 是形式背景 $K=\{U, M, I\}$ 的一个形式概念 (Formal Concept)。 A 是形式概念 (A, B) 的外延 (Extent), B 是形式概念 (A, B) 的内涵 (Intent)。 $\mathcal{B}\{U, M, I\}$ 表示形式背景的所有形式概念的集合。表 1 形式背景中所有的形式概念如表 2 所示。

表 2 形式背景的所有概念

Tab. 2 The formal concept, extent and intent of formal context

概念 (formal concept)	外延 (extent)	内涵 (intent)
c (0)	{1; 2; 3; 4; 5}	{}
c (1)	{2; 3}	{c}
c (2)	{1; 3; 4}	{b}
c (3)	{3}	{b; c}
c (4)	{1; 2; 4; 5}	{a}
c (5)	{2}	{a; c}
c (6)	{1; 4}	{a; b; d}
c (7)	{}	{a; b; c; d}

决策形式背景称一个五元组 $K=\{U, M, I, D, J\}$, 为一个决策形背景, 其中 U 是一个对象集合、 M 是条件属性集合, D 是决策属性集合, I 是对象集 U 和

条件属性集 M 之间的笛卡尔积的子集, 即: $I\subseteq U\times M$; J 是对象集 U 和决策属性集 D 的之间的笛卡尔积的子集, 即: $J\subseteq U\times D$ 。

例 1 表 3 为某对象和属性构成的形式背景。

形式背景中的对象集为 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 属性集为 $M=\{a, b, c, d, e, f, g\}$ 。 b 是属性集合 M 中的一个属性, $b\in M$, 则集合 $g(b)=\{1, 2, 3, 4\}$ 为具有 b 属性的所有对象的集合。集合 $B=\{b, d\}$, $B\subseteq M$, 则 $g(B)=\{1, 4\}$, 即同时含有属性 b 和 d 的对象集合为 $\{1, 4\}$ 。对象“3”, 是对象集合 U 中的一个对象, $3\in U$, $f(3)=\{a, b, c, e, g\}$, 表示对象“3”具有的属性为 $\{a, b, c, e, g\}$; 集合 $A=\{1, 3, 5\}$, $A\subseteq U$, $f(A)=\{a, g\}$, 即对象“1”、“3”和“5”共同含有的属性集合为 $\{a, g\}$ 。

表 3 某对象和属性构成的形式背景 1

Tab. 3 Formal context 1 formed by objects and attributes

	a	b	c	d	e	f	g
1	×	×	×	×			×
2	×	×	×		×		×
3	×	×	×		×		×
4	×	×		×	×		×
5	×			×		×	×
6	×					×	

传统的形式概念分析, 研究了对象与属性之间的二元关系, 但形式背景中的属性有哪些特征, 以及属性与属性之间是什么样的关系没有研究。张文修等在研究粗糙集理论上的属性约简问题时, 给出了 3 种属性定义: 核心属性、相对必要属性和不必要属性^[14-15]。在实际问题的研究中, 属性之间的关系错综复杂。对于属性约简, 只需要判断是必要属性还是非必要属性。然而, 如果想深入研究属性之间关联关系, 3 种属性显然还不足以描述这些复杂的特征关系。

针对上述这些问题, 本文在形式概念分析的基础上, 研究了形式背景中“属性”的属性, 提出了基于属性特征的完备数学定义, 并讨论了相应的性质。

2 形式背景中属性特征的定义

定义 1 最大共有属性: 在形式背景 $K=\{U, M, I\}$ 中, 对于属性 $m_a\in M$, 如果属性 m_a 满足

$$g(m_A)=U,$$

则称属性 m_A 为形式背景 K 的最大共有属性。

性质 1 若形式背景中存在最大共有属性 m_A , 则有:

1) 所有对象都具有最大共有属性, 即 $\forall u \in U, m_A \in f(u)$ 。

2) 其他所有属性的对象集的并集, 一定是 m_A 对象集的子集, 即 $\bigcup g(m_i) \subseteq g(m_A)$ 。

3) 属性 m_A 存在于此形式背景中所有的形式概念的内涵中。

例 2 在表 3 中, 对于属性 a , 有 $g(a)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}=U$, 因此, 属性 a 为形式背景中的最大共有属性。显然, 形式背景中的所有对象, 都含有属性 a , 且 $g(b) \cup g(c) \cup \dots \cup g(g) \subseteq U$, 由于对所有的对象求内涵, 都包含最大共有属性, 因此, 最大共有属性一定存在于所有形式概念的内涵中。

定义 2 共有属性: 在形式背景 $K=\{U, M, I\}$ 中, $m_0, m_1, \dots, m_k \in M$, 是一些属性, 如果这些属性满足

$$g(m_i) \subseteq g(m_0),$$

其中, $i=1, 2, \dots, k$, 且 $k \geq 2$, 则称在形式背景 K 中, 属性 m_0 为属性集合 $\{m_0, m_1, \dots, m_k\}$ 的共有属性。

性质 2 共有属性的对象集合是某些属性对象集合的并集。

在表 3 中, 对于属性 b, c, d, e , $g(c) \subseteq g(b)$, $g(e) \subseteq g(b)$ 。所以属性 b 是属性 c, e 的共有属性, 且 $g(b)=\{1, 2, 3, 4\}$, $g(c) \cup g(e)=\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}=g(b)$ 。

定义 3 独有属性: 在形式背景 $K=\{U, M, I\}$ 中, 对于属性 $m_i \in M$, 如果满足

$$|g(m_i)|=1,$$

则称属性 m_i 为形式背景 K 的独有属性。式中, $|g(m_i)|$ 表示具有属性 m_i 的对象的基数。

性质 3 若形式背景中存在独有属性 m_i , 则有:

1) 独有属性的对象集只含有一个对象, 即 $|g(m_i)|=1$ 。

2) 独有属性的对象, 除了具有独有属性 m_i 以外, 可能具有其他属性。也就是说: $|g(m_i)|=1$, 但是, $|f(g(m_i))| \geq 1$ 。

3) 如果独有属性 m_i 满足 $|g(m_i)|=1$, 且 $|f(g(m_i))|=1$, 则内涵为 m_i 的概念, 与概念 (U, \emptyset) 、 (\emptyset, M) 组成的格, 为原形式背景的完全子格。

例 3 在表 3 的基础上, 新加入一个对象和两个属性, 如表 4 所示。在新的形式背景中, 对于属性 h 和属性 i , 满足 $|g(h)|=|\{6\}|=1$ 和 $|g(i)|=|\{7\}|=1$, 所以, 属性 h 和属性 i 均是表 4 所示形式背景的独有属性。

需要注意的是: $f(g(h))=f(\{6\})=\{a, f, h\}$, 而 $f(g(i))=f(\{7\})=\{i\}$, 也就是说, 独有属性的对象集一定只有一个对象, 但是, 独有属性的对象, 除了具有独有属性以外, 可能含有其他属性。

表 4 对象和属性构成的形式背景 2

Tab. 4 Formal context 2 formed by objects and attributes

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	×	×	×	×			×		
2	×	×	×		×		×		
3	×	×	×		×		×		
4	×	×		×	×		×		
5	×			×		×	×		
6	×					×		×	
7									×

定义 4 矛盾属性: 在形式背景 $K=\{U, M, I\}$ 中, 若属性 m_i 和属性 m_j 同时满足

$$g(m_i) \cup g(m_j) = U, \quad g(m_i) \cap g(m_j) = \emptyset,$$

其中, $i \neq j$ 。此时, 在形式背景 K 中, 称属性 m_i 和属性 m_j 为当前形式背景的一对矛盾属性。

性质 4 若形式背景中, 属性 m_i 和属性 m_j 为矛盾属性, 则有:

1) 一对矛盾属性的对象集合的并集, 一定是形式背景的对象全集。

2) 矛盾属性的对象集的交集一定是空集。

3) 矛盾属性将形式背景中的划分为两块独立的子形式背景。

4) 矛盾属性一定位于此形式背景中不同的概念内涵中。

例 4 如表 5 所示形式背景中, 对于属性 c 和属性 f , 满足: $g(c) \cup g(f) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8\} = U$, 且 $g(c) \cap g(f) = \emptyset$, 所以, 属性 c 和属性 f 是形式背景中的一对矛盾属性。可以清晰的看到, 一对矛盾属性可以将形式背景划分为两块独立的子形式背景。

表 5 某对象和属性构成的形式背景 3

Tab. 5 Formal context 3 formed by objects and attributes

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	×	×	×	×					×
2	×	×	×	×					
3	×	×	×	×			×		
4	×	×	×		×		×	×	
5	×	×	×		×		×		×
6	×	×	×		×		×		
7	×	×				×	×		
8	×					×		×	

定义 5 互斥属性: 在形式背景 $K = \{U, M, I\}$ 中, $m_1, m_2, \dots, m_k \in M$ 是一些属性, 如果这些属性同时满足

$$\bigcup_{i=1}^k g(m_i) = U, \quad g(m_i) \cap g(m_j) = \emptyset (i \neq j; 0 \leq i, j \leq k),$$

此时, 在形式背景 K 中, 称属性 m_1, m_2, \dots, m_k 为互斥属性。

互斥属性可以看作是矛盾属性的扩展, 因此, 具有与矛盾属性相近的属性性质。

性质 5 若形式背景中, 属性 m_i, m_j 和属性 m_k 为互斥属性, 则有:

1) 互斥属性是多个属性之间的属性关系, 至少 3 个或 3 个以上的属性才可以构成互斥属性关系。

2) 互斥属性的对象集合的并集, 一定是形式背景的对象全集。

3) 互斥属性的对象集的交集一定是空集。

4) 互斥属性将形式背景中的划分为多块独立的子形式背景。

5) 互斥属性一定位于此形式背景中不同的概念内涵中。

例 5 在表 5 的形式背景中, 对于属性 d, e 和

属性 f , 满足 $g(d) \cup g(e) \cup g(f) = \{1, 2, 3\} \cup \{4, 5, 6\} \cup \{7, 8\} = U$, 且 $g(d) \cap g(e) \cap g(f) = \emptyset$, 所以, 属性 d, e 和属性 f 是形式背景中的一组互斥属性。同理, 互斥属性将形式背景划分为多块独立的子背景。

定义 6 互不包含属性: 在形式背景 $K = \{U, M, I\}$ 中, $m_i, m_j \in M$, 且 $i \neq j$, 如果同时满足

$$g(m_i) \cap g(m_j) \neq \emptyset, \quad g(m_i) \not\subseteq g(m_j) \wedge g(m_j) \not\subseteq g(m_i),$$

此时, 称属性 m_i, m_j 为形式背景 K 的互不包含属性。

性质 6 若形式背景中, 属性 m_i, m_j 为互不包含属性, 则有:

1) 互不包含属性的对象集的交集, 一定是非空集合。

2) 互不包含属性的对象集一定互不包含。

3) 除了概念 (\emptyset, M) 以外, 至少存在一个概念, 该概念的内涵同时具有属性 m_i 和属性 m_j 。

另外, 互不包含属性可以由两个属性之间的互不包含关系, 推广到多个属性之间两两互不包含关系。

例 6 在表 5 的形式背景中, 对于属性 c 和属性 h , 满足: $g(c) \cap g(h) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 4, 8\} = \{1, 4\}$, 且 $g(c) \not\subseteq g(h), g(h) \not\subseteq g(c)$, 所以, 属性 c 和属性 h 是形式背景中的一对互不包含属性, 有序二元组 $(g(c, h), f(g(c, h)))$, 一定是一个形式概念, 则属性 c 和属性 h 同时存在于概念 $((1, 4), (a, b, c, h))$ 的内涵中。同理, 属性 c 和属性 g 、属性 b 和属性 f 、属性 b 和属性 g 、属性 g 和属性 h , 均是形式背景的互不包含属性。

定义 7 伴生属性: 在形式背景 $K = \{U, M, I\}$ 中, 若属性 m_i 和属性 m_j , 满足

$$g(m_i) \subseteq g(m_j), \quad i \neq j,$$

此时, 在形式背景 K 中, 称属性 m_i 是属性 m_j 的伴生属性。

性质 7 形式背景中, 若属性 m_i 是属性 m_j 的伴生属性, 则有

1) 属性 m_i 的对象集, 一定属性 m_j 的对象集的子集。

2) 形式背景中, 如果某一概念的内涵中包含属性 m_i , 则一定同时包含 m_j 。

定义 8 最近伴生属性: 在形式背景 $K=\{U, M, I\}$ 中, 属性 m_i 是属性 m_j 的伴生属性, 如果不存在属性 $m_k \in M$ 使得

$$g(m_i) \subseteq g(m_k) \subseteq g(m_j),$$

此时, 在形式背景 K 中, 称属性 m_i 是属性 m_j 的最近伴生属性。

最近伴生属性可以看作作为伴生属性的一种特例, 因此, 最近伴生属性具有伴生属性的所有性质。

性质 8 形式背景中, 若属性 m_i 是属性 m_j 的最近伴生属性, 则有:

1) 属性 m_i 的对象集, 一定属性 m_j 的对象集的子集。

2) 形式背景中, 如果某一概念的内涵中包含属性 m_i , 则一定同时包含 m_j 。

例 7 在表 5 的形式背景中, 对于属性 b 、属性 c 、属性 d 和属性 e , $g(b)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $g(c)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $g(d)=\{1, 2, 3\}$, $g(e)=\{4, 5, 6\}$, 显然, $g(c) \subseteq g(b)$, $g(d) \subseteq g(b)$, $g(e) \subseteq g(b)$, 因此, 属性 c 、 d 、 e 是属性 b 的伴生属性, 但是, 由于 $g(d) \subseteq g(c) \subseteq g(b)$, 所以, 属性 c 是属性 b 的最近伴生属性, 而属性 d 和属性 e 不是。同理, 属性 d 和属性 e 是属性 c 的伴生属性, 且是最近伴生属性。

定义 9 多属性伴生属性: 在形式背景 $K=\{U, M, I\}$ 中, m_i 、 m_j 为互不包含属性, 如果存在 $m_k \in M$, 使得

$$g(m_k) \not\subseteq g(m_i) \wedge g(m_k) \not\subseteq g(m_j), \quad g(m_k) \subseteq g(m_i) \cup g(m_j),$$

其中, $i \neq j \neq k$, 此时, 在形式背景 K 中, 称属性 m_k 为属性 m_i 和 m_j 的多属性伴生属性。

性质 9 形式背景中, 多属性伴生属性一定是伴随着两个或两个以上的属性存在而存在。

例 9 在表 5 的形式背景中, 对于属性 b 和属性 f , $g(b)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $g(f)=\{7, 8\}$, 属性 b 和属性 f 满足互不包含属性的定义; 同时, 对于

属性 h , $g(h)=\{1, 4, 8\}$, 显然, $g(h) \not\subseteq g(b)$, $g(h) \not\subseteq g(f)$, 但是, $g(h) \subseteq g(b) \cup g(f)$, 因此属性 h 是属性 b 和属性 f 的多属性伴生属性。

定义 10 多属性共有伴生属性: 在形式背景中, m_i 、 m_j 为互不包含属性, 如果存在 $m_k \in M$, 使得

$$g(m_k) \subseteq g(m_i) \cap g(m_j),$$

其中, $i \neq j \neq k$, 此时, 在形式背景 K 中, 称属性 m_k 为属性 m_i 和 m_j 的多属性共有伴生属性。

性质 10 形式背景中, 若属性 m_k 为属性 m_i 和 m_j 的多属性共有伴生属性, 则有

1) 多属性共有伴生属性一定是伴随着两个或两个以上的属性存在而存在。

2) 属性 m_i 、 m_j 和 m_k 一定同时出现于一个非空外延概念的内涵中。即: 除概念 (\emptyset, M) 外, 至少存在一个概念, 该概念的内涵同时包含属性 m_i 、 m_j 和 m_k 。

例 10 在表 5 的形式背景中, 对于属性 c 和属性 g , $g(c)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $g(g)=\{3, 4, 5, 6, 7\}$, 属性 c 和属性 g 为互不包含属性, 对于属性 e , $g(e)=\{4, 5, 6\}$, $g(e) \subseteq g(c) \cap g(g)$, 因此属性 h 是属性 b 和属性 f 的多属性共有伴生属性。形式概念 $(\{4, 5, 6\}, \{a, b, c, e, g\})$ 的内涵中同时含有属性 c 、 g 和属性 e 。

定义 11 多属性共有伴生属性在决策形式背景 $K=\{U, M, I, D, J\}$ 中, U_1 是一个类对象的集合, $U_1 \subseteq U$, $m_k \in M$ 是条件属性, 如果满足

$$g(m_k) \subseteq U_1, \quad g(m_k) \cap U_p = \emptyset,$$

其中, U_p 是 U_1 以外的任何类。此时, 在决策形式背景 K 中, 称属性 m_k 为 U_1 的类独有属性。

在决策形式背景中, 类独有属性仅为某一类对象所独有, 是其他类对象不具有的属性, 可以作为决策点进行类对象的分类。类独有属性的矛盾属性、互斥属性也可作为类对象分类的重要依据。

例 11 表 6 所示为一个决策形式背景, 其中, U 是对象集合, $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 条件属性 $M=\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$, 决策属性集 $D=\{d_1, d_2, d_3\}$ 。设: $U_1=g(d_1)=\{1, 4, 6, 7, 8\}$,

$U_2=g(d_2)=\{1, 2, 3, 4, 8\}$, $U_3=g(d_3)=\{2, 3, 5, 6, 8\}$ 。 满足

对于条件属性 g , $g(g)=\{5\}$, $g(g)\subseteq U_3$, 且 $g(g)\cap U_1=\emptyset$, $g(g)\cap U_2=\emptyset$, 因此, 属性 g 是类 U_1 的类独有属性。同样, 属性 f 是类 $U_1\cap U_2$ 的类独有属性。

表 6 带有决策属性的形式背景

Tab. 6 A formal context with decision attribute

	a	b	c	d	e	f	g	d_1	d_2	d_3
1	x	x				x		x	x	
2	x	x							x	x
3	x	x			x				x	x
4	x		x		x	x		x	x	
5	x		x		x		x			x
6	x		x		x			x	x	
7				x	x			x		x
8				x		x		x	x	

定义 12 类独有复合属性: 在决策形式背景 $K=\{U, M, I, D, J\}$ 中, U_i 是一个类对象的集合, $U_i\subseteq U$, $M_i\subseteq M$, 如果 $M_i=\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$, 如果

$$g(M_i)\subseteq U_i, g(M_i)\cap U_p=\emptyset,$$

其中, U_p 是 U_i 以外的任何类。此时, 在决策形式背景 K 中, 称属性 M_i 为 U_i 的类独有复合属性。

在决策形式背景中, 类独有复合属性同样是对类对象进行分类的重要依据。

例 12 在表 6 的决策形式背景中, 属性集合 $M_i=\{b, e\}$, $M_i\subseteq M$, $g(M_i)=g(\{b, e\})=\{3\}$, $g(M_i)\subseteq D_2\cap D_3$, 所以, M_i 是 $D_2\cap D_3$ 类的类独有复合属性。

3 形式背景中对象特征的定义

与形式背景中属性特征的定义相似, 可以对偶的给出对象特征的定义如表 7 所示。

表 7 形式背景中对象特征的数学定义

Tab. 7 Mathematical definitions for basic object feature of formal context

对象	特征定义
1 全属性对象	$\{f(u) u\in U\}=M$
2 最多属性对象	$u_j=u f(u)\neq M \wedge u\neq u_i f(u_i)\geq f(u) , (i\neq j)$
3 独有属性对象	$ g(m) =1$
4 属性包含对象	$f(u_i)\subseteq f(u_j)$
5 最近属性包含对象	$f(u_i)\subseteq f(u_j) \nexists u_k=\{u_i f(u_i)\subset f(u_k)\subseteq f(u_j)\}$
6 属性互不包含对象	$f(u_i)\cap f(u_j)\neq \emptyset, (i\neq j) \quad f(u_i)\not\subseteq f(u_j), (i\neq j)$
7 属性对立对象	$f(u_i)\cap f(u_j)=\emptyset (i\neq j) \quad f(u_i)\cup f(u_j)=M (i\neq j)$
8 属性互斥对象	$f(u_i)\cap f(u_j)=\emptyset (i\neq j; 1\leq i, j\leq k) \quad f(u_i)\cup f(u_j)\cup \dots \cup f(u_k)=M$
9 多对象伴生对象	$f(u_i)\not\subseteq f(u_j) (i\neq j) \quad f(u_i)\not\subseteq f(u_k) \wedge f(u_k)\not\subseteq f(u_j) (i\neq j\neq k) \quad f(u_i)\subseteq f(u_j)\cup f(u_k) (i\neq j\neq k)$
10 类独有对象	$U_i\subseteq U, u_i=\{u_1, u_2, \dots\}\subseteq U_i, u_i\cap U_p=\emptyset$
11 类独有复合对象	$U_i, U_j\subseteq U, u_i=\{u_1, u_2, \dots\}\subseteq U_i\cap U_j, u_i\cap U_p=\emptyset$

4 结论

本文在形式概念分析理论及众多形式背景研究的基础上, 给出了形式背景中属性特征的完备数学定义, 通过对属性特征的研究, 给出了属性特征的性质, 由此可以更好表现出属性之间的关系, 同时对偶地给出对象特征的定义, 为属性偏序结构理论的研究奠定了理论基础。属性特征与对象特征的研究, 有利于根据属性的特性及对象的特征, 对形式背景进行约简及知识发现, 在形式背景越来越大的大数据时代, 有着重要的意义。属性特征与对象特征的定义的提出及其性质的研究, 为下一步利用属性的特征进行属性约简、基于属性特征的概念格生成、基于属性特征的概念可视化、基于属性特征

的知识发现等研究奠定了坚实的基础。

参考文献

- [1] Wille R. Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts ordered sets [M]. Dordrecht: Reidel, 1982: 445-470.
- [2] Jonas Poelmans, Dmitry I Ignatov, Sergei O Kuznetsov, et al.. Formal concept analysis in knowledge processing: A survey on applications [J]. Expert Systems with Applications, 2013,40 (16): 6538-6560.
- [3] Jonas Poelmans, Sergei O Kuznetsov, Dmitry I Ignatov, et al.. Formal concept analysis in knowledge processing: A survey on models and techniques [J]. Expert Systems with Applications, 2013,40 (16): 6601-6623.
- [4] 刘超男, 徐笋晶, 李赛美, 等. 基于多层次复杂概念网络表示

- 方法的《伤寒论》方药按治法分类的知识发现 [J]. 北京中医药大学学报, 2014,37 (7): 452-457.
- [5] Nida Meddouri, Hela Khoufi, Mondher Maddouri. Parallel learning and classification for rules based on formal concepts [J]. Procedia Computer Science, 2014,35: 358-367
- [6] Luis E Zárate, S Mariano Dias, M A Junho Song. FCANN: A new approach for extraction and representation of knowledge from ANN trained via Formal Concept Analysis [J]. Neurocomputing, 2008,71 (13/15): 2670-2684.
- [7] Zheng Pei, Da Ruan, Dan Meng, et al.. Formal concept analysis based on the topology for attributes of a formal context [J]. Information Sciences, 2013,236: 66-82.
- [8] 沈夏炯, 白景华, 刘宗田, 等. 形式概念分析与软件过程改进 [J]. 计算机科学, 2003,30 (7): 103-105.
- [9] Li Jinhai, Mei Changlin, Lv Yuejin. Incomplete decision contexts: Approximate concept construction, rule acquisition and knowledge reduction [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2013,54 (1): 149-165
- [10] Jonas Poelmans, Guido Dedene, Monique Snoeck, et al.. An iterative requirements engineering framework based on Formal Concept Analysis and C - K theory [J]. Expert Systems with Applications, 2012,39 (9): 8115-8135,
- [11] 康向平. 不完备信息系统中的知识获取方法研究 [D]. 太原: 山西大学, 2008.
- [12] Tom Huysegoms, Monique Snoeck, Guido Dedene, et al.. Visualizing variability management in requirements engineering through formal concept analysis [J]. Procedia Technology, 2013,9: 189-199.
- [13] Alexey Neznanov, Dmitry Ilvovsky, Andrey Parinov. Advancing FCA workflow in FCART system for knowledge discovery in quantitative data[J].Procedia Computer Science,2014,31:201-210.
- [14] 张文修, 仇国芳. 粗糙集属性约简的一般理论 [J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2005,35 (12): 1304-1313.
- [15] 马建敏, 张文修. 基于信息量的集值信息系统的属性约简 [J]. 模糊系统与数学, 2013,27 (2): 177-182.

Complete definition of attribute and object feature in formal context

HONG Wen-xue^{1,2}, LUAN Jing-min¹, ZHANG Tao³, LI Shao-xiong¹, ZHENG Cun-fang¹, LIU Jian-bo²

(1. College of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China; 2. Big Data Visualization Technology Center, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao, Hebei 066004, China; 3. College of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao, Hebei 066004, China)

Abstract: Formal context is an important element in the formal concept analysis theory, and it is data carrier representing and recording the binary relations between objects and attributes. In formal context, attribute is the abstract description of object, but the attribute features and object features are more abstract description. By extracting the features attribute and object in various formal contexts, the complete mathematical definition of attribute features and object features has been defined abstractly, and to lay the foundation for the study of partial ordered structure theory.

Key words: formal concept analysis; formal context; attribute features; object features