Calculus (1)

Siwon Yun

March 25, 2025

Contents

THEME 1

앞으로 사용할 수학 표현

1.1 구간

1.1.1 정의

DEFINITION 1.1 (구간)**.** 구간$^{\text{interval}}$. 단어에서 유추되는 바와 같이 특정 원소 사이를 말한다. -1과 1 사이에는 무수히 많은 실수가 존재하는데, -1과 1 사이의 '구간'은 이를 모두 망라하기에 구간은 하나의 집합이다. 구간의 집합은 대개 연속되고 값의 크기가 비교되는 특징을 지닌다. i.e., 순서를 가진다.

NOTE 1.1 (구간의 원소가 순서를 가지지 않는다면?)**.** 예컨대 순서가 정의되지 아니한 복소수에서는 구간을 어떻게 표현할 수 있을까? $(3i, 5i)$와 같이 표현할 수 있을까? 이는 $3i$ 보다 크고 $5i$ 보다 작은 원소들의 집합을 의미해야 하는데, 복소수값은 대수 관계가 정의되지 아니하니 모순된다. 그러면 복소수 평면의 구간은 어떻게 표현할까? stackExchange에 등록된 질문[a]에 따르면 복소수에서 구간은 다음과 같이 표현 가능하다:

$$[a, b] + [c, d]i \tag{1.1}$$

[a]https://math.stackexchange.com/questions/899077/is-there-an-interval-notation-for-complex-numbers

1.1.2 구간의 종류

다음은 구간의 종류이다. 구간은 끝점의 포함 여부에 따라 분류된다.

NOTE 1.2 (구간의 종류)**.** 구간의 종류를 아래와 같이 표로 정리하였다:

표현	조건 제시법	이름	diagram
(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	열린 구간[open interval, 개구간]	
$[a, b]$	$\{x : a \le x \le b\}$	닫힌 구간[closed interval, 폐구간]	
$(a, b]$	$\{x : a < x \le b\}$	반열린 구간[half-open interval, 반개구간]	
$[a, b)$	$\{x : a \le x < b\}$	반열린 구간[half-open interval, 반개구간]	
(a, ∞)	$\{x : x > a\}$	열린 구간[open interval]	
(∞, b)	$\{x : x < b\}$	열린 구간[open interval]	
$[a, \infty)$	$\{x : x \le a\}$	닫힌 구간[closed interval]	
$(-\infty, b]$	$\{x : x \ge b\}$	닫힌 구간[closed interval]	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	실수 집합	

Table 1.1: 구간의 종류

일반적으로 수학에서 구간이라고 말하면 열린 구간을 나타냅니다.

— 교수님

표현

구간이 끝점을 포함하지 아니할 경우 '열린 구간'이라고 표현하며 기호 '('와 ')'로 표현한다. 반면 끝점을 포함하고 있을 경우 '닫힌 구간'이라고 표현하며 기호 '['와 ']'로 표현한다.

다이어그램

구간이 끝점을 포함하지 아니하는 경우 다이어그램으로 표시할 때 포함하는 끝점을 안이 비어있는 점으로 표시하고, 끝점을 포함할 경우 안을 칠한 점으로 표시한다.

NOTE 1.3 (구간에서의 무한대). 왜 (a, ∞) 등 한 끝점을 기준으로 하나의 방향으로 끝없이 연속되는 구간에서 ∞에 대하여 닫힌 구간으로 표현하지 않을까? ∞는 분명 하나의 숫자는 아니며 — 그 어떤 실수 하나를 선택하여도 이는 ∞보다 작은 수이다 — 순서 또한 정의되지 아니한다. 교수님은 수업 중 ∞는 하나의 '상태'라고 표현하였다. 닫힌 구간으로 표현하기 위해서는 구간의 끝 점이 구간에 포함되어야 하는데, 하나의 상태가 구간에 포함된다? 모순되고 어색하다.

1.1.3 근방

— Mar 6에 추가함.

DEFINITION 1.2 (근방). 점 a를 포함하는 집합 $N \subset \mathbb{R}$을 점 a의 근방[neighbourhood]라고 부른다. i.e.

$$a \in N \subset \mathbb{R} \tag{1.2}$$

단, neighbourhood는 일반적으로 open interval을 의미한다. open interval I에 대하여 다음과

같은 식을 찾을 수 있었다:

$$x \in I,\ I \subset N \iff N \text{ is a neighbourhood of } x \tag{1.3}$$

경우에 따라 적당한 근방을 찾아야 한다.

1.2 특수한 집합의 표현

고등학교 1학년 수업시간, 수학 선생님께서 해당 표현들을 알려주셨다. 개인적으로 큰 감명을 받았는데, 알다가도 모르겠는 '실수' 때문이었다: 1) '복소수가 아닌 수'라고 이해하기에는 정의가 아니라는 점. 2) 나머지, 예컨대 자연수와 유리수 등은 모두 실수에 조건을 주어 생성할 수 있다는 점. 그런데 실수 집합을 하나의 표현 $\mathbb{R}$으로 나타내니 세상 고민 사라졌다.

NOTE 1.4 (특수한 집합의 표현). 집합은 다음과 같이 표현된다:

표현	의미
$\mathbb{N}$	자연수 집합
$\mathbb{Z}$	정수 집합
$\mathbb{Q}$	유리수 집합
$\mathbb{R}$	실수 집합
$\mathbb{C}$	복소수 집합

Table 1.2: 특수한 집합의 표현

- $\mathbb{N}$: Natural number
- $\mathbb{Z}$: Integer - I는 수학에서 많이 사용되는 문자이기에 — 구간 또한 문자 I로 표현하는 경우가 허다하다 — number를 뜻하는 독일어 'Zahlen'의 앞 글자를 따 $\mathbb{Z}$로 표현한다고 한다.
- $\mathbb{Q}$: Quotient
- $\mathbb{R}$: Real number
- $\mathbb{C}$: Complex number

해당 집합들은 실수 집합을 통해 정의 가능하다.

DEFINITION 1.3. 실수 집합을 활용한 다른 집합의 정의:

- $\mathbb{N}$: $\{x : x > 0,\ x \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{Z}$: $\{x : x \mod 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{Q}$: $\{x : x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z}\}$
- $\mathbb{C}$: $\{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

정의에 따라 다음과 같은 포함 관계가 성립한다: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

1.3 양화사

함수를 만족하기 위해서는 하나의 x값에 대하여 하나의 함숫값을 가져야 한다. 여기서, $x = 314$, $x = 421$ 등 특별한 x 값에 대하여만 해당 조건이 만족하면 아니되고, 모든 x 값에 대하여 만족하여야 한다. 이를 함수 $f(x) : \mathbb{R} -> RR$에 대하여 다음과 같이 표현할 수 있다:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : (f(x_1) = f(x_2)) \implies (x_1 = x_2) \tag{1.4}$$

여기서 $\forall$는 전체 양화사라고 불리운다.

DEFINITION 1.4 (양화사). 양화사[quantifier]는 명제의 진위를 판단하는 데 사용되는 수식어이다. 양화사는 모든[for all]과 어떤[there exists]이 있다.

양화사	의미
$\forall$	모든
$\exists$	어떤

Table 1.3: 전체 양화사와 존재 양화사

$\forall$은 All의 앞자인 A를 뒤집어 쓴 것이며, $\exists$는 존재의 앞자인 E를 뒤집어 쓴 것이다. 뒤집은 이유가 무엇인지 궁금하지만 기호를 처음 만든 사람이 문자와 구분되지만 의미를 쉽게 파악하기 위해 뒤집었다고 생각하고 넘어가겠다. (검색해도 이유를 잘 모르겠음)

이를 포함해 수학 문헌에서 다음과 같은 표현이 많이 사용된다.

1.3.1 모든

- for all, for every
- for any, for arbitrary
- for each

1.3.2 존재

- there exists, at least one
- there is

수업 시간에서 나온 조건 양화사와 전체 양화사의 예시를 살펴보고 뉘앙쓰의 차이를 인지하여 보자.

EXAMPLE 1.1.

$$\exists 0 \in \mathbb{R} \; s.t. \; a + 0 = 0 + a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad - a \in \mathbb{R} \; s.t. \; a + (-a) = (-a) + a = 0 \tag{1.6}$$

equation (1.5)은 덧셈의 항등원을 나타내고, equation (1.6)은 덧셈의 역원을 나타낸다. 두 식을 자연어로 풀이하자면 다음과 같다:

(1.5) : 모든 실수 a에 대하여 어떤 실수 0이 존재하며 $a + 0 = 0 + a = 0$이다.

- (1.6) : 모든 실수 a에 대하여 어떤 실수 $-a$가 존재하며 $a + (-a) = (-a) + a = 0$이다.

두 식에서 등장한 $\forall a \in \mathbb{R}$는 같은 '모든'이라는 의미를 내포한다면, 왜 equation(1.5)에서는 식 마지막에, equation (1.6)에서는 식 처음에 위치하는지 의문이 들 수 있다. 1번째 식에서는 a의 값이 다른 조건에 영향을 주지 아니하는데 반해 2번째 식은 $\exists - a \in \mathbb{R}$이 a에 종속된다. 한글로 의미를 전하자면, 각 식의 $\forall a \in \mathbb{R}$는 1번째 식에서는 '임의의'로, 2번째 식에서는 '각각의'로 이해하자.

1.4 명제와 집합

사실 나는 고등학교 시절 명제proposition에 대하여 배울 때 코로나에 감염되어 수업을 듣지 못하였다. — 다만 정보에서도 중요한 내용인 만큼 수학 시간 외에도 배울 기회는 있었다. — 때문에 명제에 대하여 수학 수업시간에 배운 적이 없는데, 명제의 중요함을 느끼고 다시 한번 정리하고자 한다.

DEFINITION 1.5 (명제)**.** 명제는 참true인지 거짓false인지 판정 가능한 문장이다. 명제는 다음과 같은 성질을 가진다:

- 참인지 거짓인지 판정 가능해야 한다.
- 참인지 거짓인지 판정 가능해야 한다.

즉, 명제는 조건condition에 대 결과conclusion의 참과 거짓을 판별한다. 조건 p와 결과 q에 대하여 일반적으로 다음과 같이 표현한다:

$$p \longrightarrow q \tag{1.7}$$

조건에 대한 결과가 참인 경우(참임을 검증 가능한 경우)에는 다음과 같이 표시한다:

$$p \Longrightarrow q \tag{1.8}$$

DEFINITION 1.6 (동형)**.** 명제 $p \Longrightarrow q$가 성립한다면, 이를 동형equivalences, isomorphism이라 한다. p와 q에 대한 동형은 다음과 같이 표현하다:

$$p \Longleftrightarrow q \tag{1.9}$$

이는 p와 q가 동일한 진리값을 가지면 다음을 만족한다:

$$p \Longrightarrow q \tag{1.10}$$

$$q \Longrightarrow p \tag{1.11}$$

추가로, $q \longrightarrow p$를 $p \longrightarrow q$에 대한 역converse이라 하며, 진리값이 역인 $\not p$와 p를 p에 대한 not이라고 한다.

DEFINITION 1.7. $p \longrightarrow q$에 대하여 $q \longrightarrow p$를 대우contrapositive이라 한다. 대우는 진리값이 일치하여 $p \Longrightarrow q$인 경우 대우 또한 참이다.

1.5 유리함수

추가로 유리함수라는 단어가 종종 등장하지만 뜻이 기억나지 아니하여 적어둔다. 유리함수는 간단히 분모에 x가 포함된 함수로 기억하자:

EXAMPLE 1.2 (유리함수 예시)**.** $y = \frac{2x}{x-3}$

Theme 2

극한

2.1 들어가며

드디어 수학 표현이 끝났다, 야호! 해당 대학수학 1(몇몇 학생이 혼돈이 있었던 듯 한데, 미분적분학이라 부르면 될 것을 왜 대학에선 대학수학으로 이름 지었는지 의문이다, 특별한 뜻이 있겠지.) 강좌는 미분적분학을 배우는 것을 목표로 하지만, 컴퓨터공학부 학생들만을 대상으로 하기에 엄밀함이 완전치 아니하다. (교수님도 강조하는 부분이다.) 때문에 추가로 엄밀한 증명이 필요한 경우, 또는 내가 궁금해서 근질거릴 때는 해당 노트에 적고자 한다.

2.2 극한

극한은 어떤 값에 가까워지는 것을 의미한다. 수업시간에 다루는 극한의 정의는 다음과 같다:

DEFINITION 2.1 (극한)**.** a가 적당한 구간 I에 대하여 $a \in I$를 제외한 부분에 대한 함수값이 정의되어 있다. 이 때 함수 $f(x)$가 x가 a에 가까워질 때 L에 가까워진다면, 다음과 같이 표현한다:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad (\text{or } f(x) \to L \text{ as } x \to a) \tag{2.1}$$

이 경우 'x가 a에 한없이 가까워질 때 함수 f의 극한$^{\text{limit}}$은 L이다'라고 표현한다.

함수 $f(x)$에 대한 극한 값은 특정 x에 대한 함숫값을 구하는 것이 아니다. 때문에, $f(a)$의 값이 정의되지 아니하더라도, $\lim_{x\to a} f(x)$의 값은 정의될 수 있다.

추가로 좌극한과 우극한도 정의한다.

DEFINITION 2.2 (좌극한과 우극한)**.** a가 적당한 구간 I에 대하여 $a \in I$를 제외한 부분에 대한 함수값이 정의되어 있다. 이 때 함수 $f(x)$가 x가 a에 왼쪽에서 가까워질 때 L에 가까워진다면, 다음과 같이 표현한다:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad (\text{or } f(x) \to L \text{ as } x \to a^-) \tag{2.2}$$

이 경우 'x가 a에 한없이 왼쪽에서 가까워질 때 함수 f의 좌극한은 L이다'라고 표현한다.

마찬가지로, a가 적당한 구간 I에 대하여 $a \in I$를 제외한 부분에 대한 함수값이 정의되어 있다. 이 때 함수 $f(x)$가 x가 a에 오른쪽에서 가까워질 때 L에 가까워진다면, 다음과 같이 표현한다:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad (\text{or } f(x) \to L \text{ as } x \to a^+) \tag{2.3}$$

이 경우 'x가 a에 한없이 오른쪽에서 가까워질 때 함수 f의 우극한은 L이다'라고 표현한다.

좌극한과 우극한 역시 $f(a)$의 값은 정의되지 아니하여도 무관하며, 좌극한과 우극한은 극한의 서브적인 조건이다.

THEOREM 2.1. 좌극한과 우극한이 L로 동일한 것은 극한이 L인 것과 동형이다. i.e.,

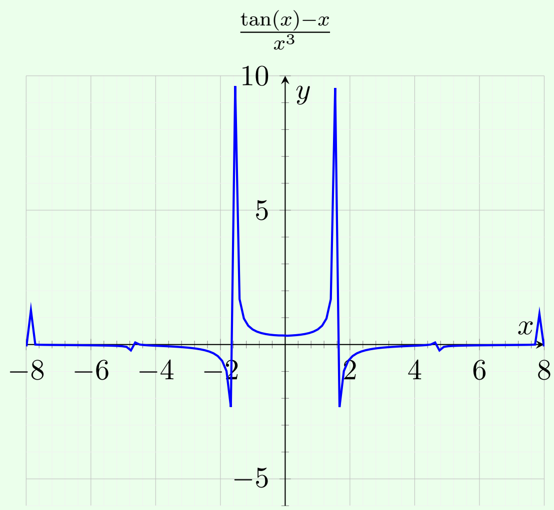
$$\lim_{x\to a} f(x) \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \tag{2.4}$$

극한과 좌극한 및 우극한을 구분하기 위해 극한을 two-side limit이라고 말하며, 좌극한과 우극한을 one-side limit이라고 말한다.

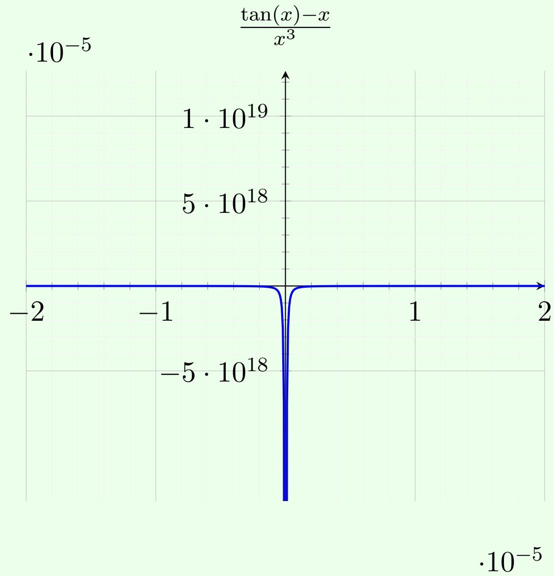
또한, 대우는 진리값이 동일함을 이용하면 좌극한과 우극한이 다를 경우 극한이 존재하지 않음을 알 수 있다.

가까워진다면? 그게 무엇인가? 거리가 0.001이면 가까운 것인가, 아니면 거리가 0.000001일 때야 비로소 가까운 것인가? 엄격하지 아니한 정의이기 때문에 모호하고 알송달송하다.

EXAMPLE 2.1. 다음 예제를 살펴보자. figure 2.1은 $(\tan(x) - x)/x^3$의 그래프에 대한 samples=150의 그래프이다. — samples는 domain에 대하여 값을 측정한 횟수를 의미한다. 다음에서는 구간 $[-8, 8]$을 150개의 구간으로 나눈 것이다. — 이 그래프에서 x가 0에 가까워지면 함수값 L은 어떤 값이 될까?



눈으로 보기에는 0과 1 사잇값, 약 0.5정도가 $\lim_{x\to 0}(\tan(x) - x)/x^3$의 값이 될 듯하다. 계산기를 이용하여 값을 구해 보아도 $f(x) = (\tan(x) - x)/x^3$일 때, $f(0.1) = 0.33$, $f(0.01) = 0.33$, $f(0.001) = 0.33$이다. 비단, 축적이 더욱 큰 동일한 그래프를 살펴보자.



비록 LaTeX의 tikz 모듈에서 해당 그래프가 잘 표현되지는 아니하였지만(x축 라벨링도 잘 못 되었다. domain은 -0.00002:0.00002이다.) 굉장히 작은 값에 대하여 크게 진동하고 있음을 알 수 있다. 사진을 캡처하고 파일로 옮기는 것은 생각보다 어려운(정확히는 귀찮은) 일이기에 geogebra link[a] 를 남긴다.

해당 수식은 교재의 문제에서 가져왔는데, 마치 카오스를 처음 들었을 때와 같은 기분이 들었다. 이 예제가 극한에 대한 보다 엄격한 정의의 필요성을 보인다고 생각한다.

[a] https://www.geogebra.org/classic/u3cpa3qt

마음 같아서는 수업시간에 다루지 아니한 $\epsilon - \delta$ 논법에 대하여 정리하고프지만, 우선 ToDoo로 남겨 놓는다.

2.3 무한대 발산

DEFINITION 2.3 (무한대 발산)**.** 함수 $f(x)$가 x가 a에 가까워질 때 $f(x)$가 무한히 커진다면, 다음과 같이 표현한다:

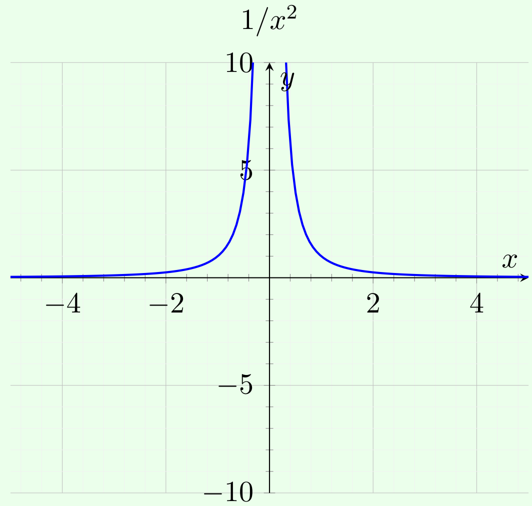
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \tag{2.5}$$

이 경우 'x가 a에 한없이 가까워질 때 함수 f는 무한대로 발산한다'라고 표현한다.

반대로 함수 $f(x)$가 x가 a에 가까워질 때 $f(x)$가 무한히 작아진다면, 다음과 같이 표현한다:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \tag{2.6}$$

EXAMPLE 2.2. figure 2.2은 $1/x^2$의 그래프이며, $\lim_{x \to 0} 1/x^2 = \infty$이다.



theorem 2.1에 의해 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$와 $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$도 존재함을 알 수 있다.

2.4 수직 점근선

첫 시간, 교수님께서 수평선을 그리며 말씀하셨다: '수직선 위에'. 수평선을 그리며 왜 수직선이라고 말씀하는지 물어본 학생이 있다고 한다.(물론 나는 아니다, 난 그렇게 궁금한 것이 많은 학생은 아니다 :) 교수님께서도 친절히 설명해 주셨고, 위키피디아[1]에도 친절히 적혀 있는데, 수학에서 '수직선'은 2가지 뜻을 가진 동음이의어라고 한다. 1) 두 직선 등에 직각으로 만나는 선. 2) 수를 직선에 대응시켜 표시한 직선.(친구가 '학생회-관'으로 끊어 읽던데, 마치 이런 느낌이려나? '수직-선'과 '수-직선') 다음에 정리한 '수직 점근선'의 수직은 vertical을 뜻한다. '직각의 관계'를 나타내는 수직이라고 할 수 있겠다.

DEFINITION 2.4 (수직 점근선)**.** 다음중 1개라도 만족하면 직선 $x = a$를 곡선 $y = f(x)$에 대한 수직 점근선$^{\text{vertical asymptote}}$이라 한다: [2]

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \tag{2.7}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \tag{2.8}$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \tag{2.9}$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \tag{2.10}$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \tag{2.11}$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \tag{2.12}$$

NOTE 2.1. 2가지 의문이 있다:

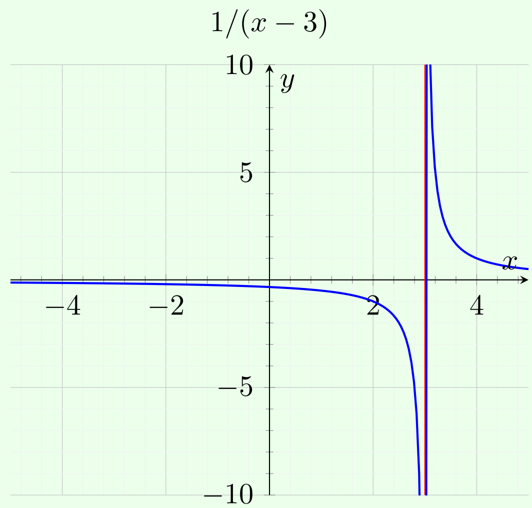
1. 첫 2개의 식이 왜 있는가? 위 수직 점근선에 대한 정의는 교재를 참고했는데, 해당 교재에는

[1] https://ko.wikipedia.org/wiki/%EC%88%98%EC%A7%81%EC%84%A0

다음 6개의 식 중 1개 만이라도 만족한다면 수직 점근선이라 말한다. 첫 식이 만족하기 위해서는 3번째와 5번째 조건이 모두 만족해야 하는 것 아닌가? 마찬가지로 2번째 식이 만족하기 위해서는 4번째와 6번째 식 모두가 만족해야만 한다. 때문에 1-4번째 식만 존재하여도 정의가 성립한다. 그저 극한 표현을 많이 써보고 싶기에, 의미가 달라지지 아니하기 때문에 첫 두개의 식을 추가했으리라 유추하고 넘어간다.

2. 왜 곡선 $y = f(x)$인가? 직선에서는 수직 점근선이 생기지 않기 때문인듯하다.

EXAMPLE 2.3. 다음 그래프 $1/(x-3)$의 수직 점근선은 $x = 3$이다:



$1/(x-3)$은 $1/x$를 x축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프이다. 때문에 수직 점근선도 $1/x$에서의 수직 점근선 $x = 0$에서 3만큼 평행이동한 $x = 3$이 되는 것이다.

2.5 극한 법칙

사실 여기도 고등학생 시절 주구장창 쓰던 법칙 아닌가? 수업 시간에도 소개하고 증명 없이 넘어간다. 마음 같아서는 모든 식을 증명해보고 프지만, 아쉽게도 1시간 듣고 3시간 정리할 열정 없다.

1. 2.1를 보면 분명 엄격한 수학적 증명과 표현은 중요해 보인다.
   → 엄격하고 수학적인 방법에 대하여 공부해보고 싶다.

2. 나는 수학과가 아니고 컴퓨터 공학부 학생 아닌가? 본 수업도 엄격한 수학적 증명[2]을 목적으로 하지 아니한다. 누구는 말한다, 공학의 꽃은 활용이라고.
   → 굳이 엄격한 명확성을 따져야 할까? 컴퓨터도 공부해야하고 공부해보고 싶은 점이 많은데?

다시 돌아와서, 극한 법칙을 나열한다:

[2]큰 관련이 있는지는 모르겠지만 문득 생각나서 적어본다: 어떤 책에서 보았던 내용인데, 망델브로 집합으로 유명한 망델브로는 수학적 엄격함을 중요시 하지 아니했다고 한다. 당시 프랑스의 부르바키로 부터 수학적 엄격함이 굉장히 중요시 되었던 시대였기에 프랑스 내 최고 명문 대를 자퇴하는 일도 있었다고 한다. 또한 푸앙카레는 '맞는건데 왜 증명해야해?'라고 말했다고 한다. 그냥 다양한 사람이 있구나 생각하자.

THEOREM 2.2. 극한 $\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재한다고 가정하자. 다음 법칙이 성립한다(c는 상수):

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \tag{2.13}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \tag{2.14}$$

$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x) \tag{2.15}$$

$$\text{곱의 법칙: } \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) \tag{2.16}$$

$$\text{몫의 법칙: } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad (\lim_{x\to a} g(x) \neq 0) \tag{2.17}$$

극한 $\lim_{x\to a} f(x)$와 $\lim_{x\to a} g(x)$가 존재해야 함을 다시 한번 강조하자. 5번째 식에서 분모가 0이 되면 안된다는 점도 다시 한번 상기하면 좋겠다.

추가로 대학 수업에서 교수님이 말하지는 아니하였지만, 고등학생 때 선생님께서 강조한 내용이다: 곱의 법칙은 역이 성립하지 아니한다. i.e.,

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) \;\not\Leftarrow\; \lim_{x\to a}(f(x)\dot{g}(x)) \tag{2.18}$$

교재의 예제 문제를 보면 풀이 방법에서 모든 과정을 무슨 법칙을 사용한 것인지 묻는 문제가 있는데, 이 과정이 중요한 것 같다. 혹여나 나중에 덧셈이 정의되지 않은 공간을 다룰지도 모르는 일이니까.

추가적인 극한 법칙:

THEOREM 2.3. n은 양의 정수이다:

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n \tag{2.19}$$

$$\lim_{x\to c} c = c \tag{2.20}$$

$$\lim_{x\to a} x = a \tag{2.21}$$

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n \tag{2.22}$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad (n\text{이 짝수이면 } a > 0) \tag{2.23}$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \quad (n\text{이 짝수이면 } \lim_{x\to a} f(x) > 0) \tag{2.24}$$

극한 법칙을 수학적 귀납해서 유용한 식들을 만들 수 있다.

2.6 직접 대입 성질

THEOREM 2.4 (직접 대입 성질)**.** f가 다항함수이거나 유리함수이고 a가 f의 정의역에 있으면 다음을 만족한다:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \tag{2.25}$$

사실, f가 다항함수라고 하였다면 a가 어떤 실수이든 관련 없다.(고등학생 때와 마찬가지로 calculus 과목에서도 수는 허수가 아닌 실수만을 고려하는 듯 하다.) 비단, 유리함수에 경우 분모가 0일 경우 함수값이 정의되지 아니한다. e.g., 유리함수 $f(x) = 1/x$는 $x = 0$에서 함숫값이 정의되지 아니하기에 0은 domain에 속하지 아니한다. 이외 domain에 속하는 부분은 근방이 연속이다.

NOTE 2.2. 수업 시간에도 다룬 한가지 예시를 보자:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} && (2.26)\\ &= \lim_{x\to 1} x+1 && (2.27)\\ &= \lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1 && (2.28)\\ &= 2 && (2.29)\end{aligned}$$

2.26에서 분모와 분자의 $x-1$을 약분하는데, 이는 $\lim_{x\to 1}$이기 때문에, 즉 x의 값이 1이 아님이 자명하기에 약분 가능한 것이다. 고등학생 시절 해설도 없는 수능에서 풀이법이 뭐가 중요하다고 이런것을 따졌겠냐만, 이젠 주의하자.

2.7 좌-우극한을 나누어 생각하는 경우

간단히 한줄로 정리하겠다: 극한을 구하고자 하는 지점이 함수가 나뉘는 부분이라면($|\cdot|$ 또한 x와 $-x$로 함수가 나뉘는 부분이다.) 좌극한과 우극한을 나누어 푸는 요령을 익혀야 한다.

2.8 샌드위치 정리

THEOREM 2.5. x가 a 근방에서(a는 제외할 수 있음) $f(x) \le g(x)$이고 x가 a에 접근할 때 f와 g의 극한이 모두 존재하면 다음이 성립한다:

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x) \tag{2.30}$$

'당연한 것이 아닌가?'라는 생각이 드는데 증명하기는 어렵다고 한다. 또 다르게 생각해보면, $\lim_{x\to a}$가 a의 좌극한 일 수도 a의 우극한일 수도 있는데 저것이 성립하나 생각 들지만, 극한이 존재한다는 조건 때문에 명확함을 느낄 수 있다. 이를 확장한 샌드위치 정리를 (또!) 보자:

THEOREM 2.6 (샌드위치 정리)**.** $f(x) \le g(x) \le h(x)$가 a의 근방에서 성립하고 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$이면 다음이 성립한다:

$$\lim_{x\to a} g(x) = L \tag{2.31}$$

예제로 $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$임을 보이는 문제가 나왔다. 고등학생 때도 똑같은 문제를 교과서에서 본 기억이 있다. 나도 좋은 문제라고 생각한다.

추가로 lim와 식의 연결성보다 곱이 우선 순위가 높음을 알게 되었다. — $\lim_{x\to 0}(x^2 \sin(1/x^2))$으로 적지 않은 이 식이 올바르기를! —

2.9 연속성

DEFINITION 2.5 (연속). 다음을 만족하면 함수 f는 $x = a$에서 연속$^{\text{continuous}}$이다:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{2.32}$$

사실 위 식은 몇가지 숨겨진 사실이 있다. 1) a는 f의 domain에 속한다. 2) f의 좌극한과 우극한은 서로 같다.

DEFINITION 2.6 (불연속). 함수 f가 $x = a$에서 연속이 아니면 함수 f는 $x = a$에서 불연속discontinuous이다.

같은 날 확률 및 통계 수업에서는 countable이라는 개념이 등장하였는데, 여기서 역은 uncountable로 접두사 un을 사용한다. 이와 discontinuous가 접두사의 차이의 뉘앙쓰를 보이는 좋은 예인듯 하다.

REMARK 2.1. 추가로 몇가지 연속에 대한 이름을 배웠다:

- 제거 가능한 불연속$^{\text{removable discontinuouity}}$: a를 제외한 a의 근방이 연속이지만, a에서 연속이 아니거나 정의되지 아니한 상황
- 무한 불연속$^{\text{infinite discontinuous}}$: a에서 한쪽이라도 극한이 무한대로 발산하는 경우
- 도약 불연속$^{\text{jump discontinuities}}$: step function인 경우
- 진동 불연속$^{\text{oscillatory discontinuity}}$: 주기 함수 등에서 무한히 진동하는 경우, e.g., $\sin(1/x)$

1종 불연속	2종 불연속
제거 가능한 불연속 도약 불연속	무한 불연속 진동 불연속

DEFINITION 2.7 (왼-오른쪽에서 연속). 다음을 만족할 때 f는 $x = a$에서 왼쪽에서 연속$^{\text{continuous from the left}}$이다:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \tag{2.33}$$

반대로, 다음을 만족할 때 f는 $x = a$에서 오른쪽에서 연속$^{\text{continuous from the right}}$이다:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \tag{2.34}$$

사실 왼쪽과 오른쪽에서 연속이라는 말을 잘 사용하는지는 의문이다. '좌극한과 함숫값이 같다'라고 말하는 것도 길지 아니하기 때문이다.

THEOREM 2.7. 다음은 동형이다:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x) \tag{2.35}$$

THEME 3

미분법

3.1 연쇄법칙

3.1.1 라이프니츠 표현을 사용한 음함수의 미분법

EXAMPLE 3.1. y^2을 x에 대하여 미분하자, y를 미분가능한 x의 함수라고 가정하면:

$$V = y^2 \tag{3.1}$$

$$y = f(x) \tag{3.2}$$

$$V = (f(x))^2 \tag{3.3}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx} \tag{3.4}$$

NOTE 3.1. y를 미분가능한 x의 함수로 가정한다? 사실 존재성을 확인한 후 미분을 시작해야 한다고 한다.

3.1.2 함수를 나누어서 풀기

EXAMPLE 3.2. $x^2 + y^2 = 25$를 미분하자: $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$으로 2개의 함수로 나누어 생각할 수 있다.

참고로 $x = -5, x = 5$는 domain에 속하지 아니한다. 미분값이 각각 $\mp\infty$로 가기 때문이다. 본 example에서는 2개의 함수로 나누었지만, 실제로는 domain이 다르면 다른 함수이기 때문에 무한히 많은 함수로 나눌 수 있다. 편의상 domain이 가장 큰 함수를 고려하자.

라이프니츠 표현을 추구하자... example로 등장하는 데카르트 엽선 등 그래프가 복잡해지면 함수를 여러개로 나누기란 쉽지 아니하다. 또한 경우의 수를 나누는 것도 쉽지 아니하다.

THEOREM 3.1. r은 유리수이다. 다음이 성립한다:

$$\frac{d}{dx}(x^r) = rx^{r-1} \tag{3.5}$$

가능한 경우만을 생각한다: domain에 속한 부분만을 고려하면 된다.

PROOF 3.1. 핵심 아이디어: 음함수 미분법

유리수의 정의에 따라 유리수 $r = \frac{m}{n}(m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$라 하자. $y = x^{\frac{m}{n}} \Rightarrow y^n = x^m$이다. 이를 x에 대하여 음함수 미분을 하면 다음과 같다:

$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1} \tag{3.6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} = \frac{mx^{m-1}}{nx^{\frac{m}{n}-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} \tag{3.7}$$

$$= rx^{r-1} \tag{3.8}$$

3.2 로그함수와 역삼각함수의 도함수

전반부: 로그함수, 후반부: 역삼각함수에 대하여 학습한다.

DEFINITION 3.1. 일대일함수 임의의 $x_1, x_2 \in X$에 대하여

$$x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2) \tag{3.9}$$

이면 함수 $f : X \to Y$를 일대일 함수$^{\text{one to one function, injection function}}$라고 부른다.

수평선 판정법을 활용해 판단할 수 있다. ToDo.

DEFINITION 3.2. 역함수 함수 $f : X \to Y$가 일대일 함수이면 역함수inverse function $f^{-1} : Y \to X$로 정의한다.

$$f^{-1}(y) = x \leftrightarrow f(x) = y \tag{3.10}$$

REMARK 3.1.

- domain과 range가 서로 바뀜.
- 뉘양쓰에 따라 종속변수를 변환함.

$$f^{-1}(x) = y \leftrightarrow f(y) = x \tag{3.11}$$

-

$$f^{-1}(f(x)) = x \tag{3.12}$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \tag{3.13}$$

- $y = x$에 대칭꼴.

REMARK 3.2. 일대일 함수의 특성

1. f가 일대일이고 연속이면 역함수도 연속이다.
2. f가 일대일이고 미분가능하면 역함수는 '수직접선'을 갖는 점을 제외하고 모든점에서 미분가능하다.

2번째에 더하면, 함수의 미분값이 0일때 역함수의 미분값의 절댓값은 즉 수직선을 가지게 된다. 따라서 역함수가 수직접선을 가지면 그 점에서 미분 불가하다.

THEOREM 3.2.

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \tag{3.14}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \tag{3.15}$$

PROOF 3.2. 핵심 아이디어: 음함수 미분법 사용.

$y = \log_a x$라 하자. $a^y = x$이다. 이를 x에 대하여 음함수 미분을 하면 다음과 같다:

$$a^y \ln a \frac{dy}{dx} = 1 \tag{3.16}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a} \tag{3.17}$$

Index