

练习 1

列真值表，无需赘述。

7°

$(\neg$	p	\wedge	q)	\rightarrow	$(\neg$	q	\wedge	r)
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0

8°

(p	\rightarrow	q)	\rightarrow	(p	\rightarrow	r)
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0

9°

$(\neg$	(p	\vee	(q	\wedge	r)))	\leftrightarrow	((p	\vee	q)	\wedge	(p	\vee	r))
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

练习 2

参照P17归纳定义不容易错写、漏写。

1.

$$L_0 = X_1 = \{x_1\}$$

$$L_1 = \{\neg x_1, x_1 \rightarrow x_1\}$$

$$L_2 = \{\neg(\neg x_1), \neg(x_1 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (\neg x_1), x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), (\neg x_1) \rightarrow x_1, (x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1\}$$

2.

$$L_0 = X_2 = \{x_1, x_2\}$$

$$L_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, x_1 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow x_2\}$$

$$L_2 = \{\neg(\neg x_1), \neg(\neg x_2), \neg(x_1 \rightarrow x_1), \neg(x_1 \rightarrow x_2), \neg(x_2 \rightarrow x_1), \neg(x_2 \rightarrow x_2), \\ x_1 \rightarrow (\neg x_1), x_1 \rightarrow (\neg x_2), x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2), x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_2), \\ x_2 \rightarrow (\neg x_1), x_2 \rightarrow (\neg x_2), x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2), x_2 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1), x_2 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_2), \\ (\neg x_1) \rightarrow x_1, (\neg x_2) \rightarrow x_1, (x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1, (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1, (x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1, (x_2 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1, \\ (\neg x_1) \rightarrow x_2, (\neg x_2) \rightarrow x_2, (x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2, (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2, (x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2, (x_2 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2\}$$

3.

$$|L_0| = |X_3| = 3$$

$$|L_1| = 3 + 3 \times 3 = 12$$

$$|L_2| = 12 + 3 \times 12 + 12 \times 3 = 84$$

$$|L_3| = 84 + 3 \times 84 + 84 \times 3 + 12 \times 12 = 732$$

练习3

2.

1°

$$\begin{array}{ll} (1) \neg x_1 \rightarrow \neg x_2 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1) & (L_3) \\ (2) ((\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1))) & (L_1) \\ (3) (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1)) & (1), (2), MP \end{array}$$

2°

$$\begin{array}{ll} (1) (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) & (L_2) \\ (2) ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))) \rightarrow (((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))) & (L_2) \\ (3) ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) & (1), (2), MP \end{array}$$

3.

2°

$$\begin{array}{ll} (1) \neg \neg p & \text{假定} \\ (2) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) & (L_1) \\ (3) \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p & (1), (2), MP \\ (4) (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) & (L_3) \\ (5) \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p & (3), (4), MP \\ (6) (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p) & (L_3) \\ (7) \neg \neg p \rightarrow p & (5), (6), MP \\ (8) p & (1), (7), MP \end{array}$$

另法

(1)	$\neg \neg p$	假定
(2)	$\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)$	否定前件律
(3)	$\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p$	(1), (2), MP
(4)	$(\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)$	(L_3)
(5)	$\neg \neg p \rightarrow p$	(3), (4), MP
(6)	p	(L_3)

3°

(1)	$\neg (q \rightarrow r) \rightarrow \neg p$	假定
(2)	$(\neg (q \rightarrow r) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	(L_3)
(3)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	(1), (2), MP
(4)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	(L_2)
(5)	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	(3), (4), MP
(6)	$p \rightarrow q$	假定
(7)	$p \rightarrow r$	(5), (6), MP

4°

(1)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	假定
(2)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	(L_2)
(3)	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	(1), (2), MP
(4)	$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$	(L_1)
(5)	$q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	(3), (4), MP
(6)	$(q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)))$	(L_2)
(7)	$(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$	(5), (6), MP
(8)	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$	(L_1)
(9)	$q \rightarrow (p \rightarrow r)$	(7), (8), MP

练习4

2.

2°

首先由练习3.2° ,有 $\{\neg \neg p\} \vdash p$,由演绎定理有 $\vdash \neg \neg p \rightarrow p$

以下先证明 $\vdash p \rightarrow \neg \neg p$

(1)	$\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p$	定理
(2)	$(\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg p)$	(L_3)
(3)	$p \rightarrow \neg \neg p$	(1), (2), MP

然后, 由演绎定理, 只需证 $\{q \rightarrow p\} \vdash \neg p \rightarrow \neg q$

(1)	$p \rightarrow \neg \neg p$	定理
(2)	$q \rightarrow p$	假定
(3)	$q \rightarrow \neg \neg p$	(1), (2), HS
(4)	$\neg \neg q \rightarrow q$	定理
(5)	$\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p$	(3), (4), HS
(6)	$(\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$	(L_3)
(7)	$\neg p \rightarrow \neg q$	(5), (6), MP

3°

由演绎定理, 只需证 $\{(p \rightarrow q) \rightarrow p\} \vdash p$

(1)	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	否定前件律
(2)	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	假定
(3)	$\neg p \rightarrow p$	(1), (2), HS
(4)	$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$	否定肯定律
(5)	p	(3), (4), MP

练习5

1.

2°

由演绎定理，只需证 $\{\neg p \rightarrow q, \neg q\} \vdash p$

(1)	$\neg p$	新假定
(2)	$\neg p \rightarrow q$	假定
(3)	q	(1), (2), MP
(4)	$\neg q$	假定

由(3)(4)用反证律即得 $\{\neg p \rightarrow q, \neg q\} \vdash p$

3°

由演绎定理，只需证 $\{\neg(p \rightarrow q)\} \vdash \neg q$

(1)	q	新假定
(2)	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$	假定
(3)	$p \rightarrow q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg(p \rightarrow q)$	假定

由(3)(4)用归谬律即得 $\{\neg(p \rightarrow q)\} \vdash \neg q$

练习6

2-2°

即证 $\vdash \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow q$

(1)	$\neg q \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$	L_1
(2)	$(\neg q \rightarrow (p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg q)$	换位律
(3)	$\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg\neg q \rightarrow q$	双重否定律
(5)	$\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow q$	(3), (4), HS

2-3°

即证 $\vdash \neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(q \rightarrow \neg p)$ ，由演绎定理，即证 $\{\neg(p \rightarrow \neg q)\} \vdash \neg(q \rightarrow \neg p)$

(1)	$q \rightarrow \neg p$	新假定
(2)	$(q \rightarrow \neg p) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$	换位律
(3)	$\neg\neg p \rightarrow \neg q$	(1), (2), MP
(4)	$p \rightarrow \neg\neg p$	第二双重否定律
(5)	$p \rightarrow \neg q$	(3), (4), HS
(6)	$\neg(q \rightarrow \neg p)$	假定

由归谬律得证

2-4°

即证 $\vdash p \rightarrow \neg(p \rightarrow \neg p)$ ，由演绎定理，即证 $\{p\} \vdash \neg(p \rightarrow \neg p)$

(1)	p	假定
(2)	$p \rightarrow \neg p$	新假定
(3)	$\neg p$	(1), (2), MP

由归谬律得证

4-1°

先证 $\vdash \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$ ，由演绎定理，即证 $\{\neg\neg(p \rightarrow \neg q), \neg\neg p\} \vdash \neg q$

(1)	$\neg\neg(p \rightarrow \neg q)$	假定
(2)	$\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q)$	双重否定律
(3)	$p \rightarrow \neg q$	(1), (2), MP
(4)	$\neg\neg p \rightarrow p$	双重否定律
(5)	$\neg\neg p$	假定
(6)	p	(4), (5), MP
(7)	$\neg q$	(3), (6), MP

再证 $\vdash (\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$ 由演绎定理, 即证 $\{\neg\neg p \rightarrow \neg q\} \vdash \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$

(1)	$p \rightarrow \neg\neg p$	第二双重否定律
(2)	$\neg\neg p \rightarrow \neg q$	假定
(3)	$p \rightarrow \neg q$	(1), (2), HS
(4)	$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$	第二双重否定律
(5)	$\neg\neg(p \rightarrow \neg q)$	(3), (4), MP

最后即证 $\vdash \neg\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$

(1)	$(\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (((\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)))$	第二双重否定律
(2)	$\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$	定理
(3)	$((\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)) \rightarrow (\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q))$	(1), (2), MP
(4)	$(\neg\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg\neg(p \rightarrow \neg q)$	第二双重否定律
(5)	$\neg\neg(p \rightarrow \neg q) \leftrightarrow (\neg\neg p \rightarrow \neg q)$	(3), (4), MP