## T2

$$\begin{aligned}E[N(t)N(t+s)] &= E[N(t)(N(t+s)+N(t)-N(t))] \\ &= E[N(t)(N(t+s)-N(t))]+E[N(t)^2] \\ &= E[N(t)-N(0)]E[N(t+s)-N(t)]+Var[N(t)]+(E[N(t)])^2 \\ &= \lambda t\times\lambda s+\lambda t+(\lambda t)^2 \\ &= \lambda t(\lambda(t+s)+1)\end{aligned}$$

## T4

### (i)

$$P\{N(1)\le 2\}=\sum_{k=0}^{2}P(N(1)-N(0)=k)=e^{-2}(\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!})$$

### (ii)

$$P(N(1)=1,\ N(2)=3)=P(N(1)-N(0)=1,N(2)-N(1)=2)=P(N(1)-N(0)=1)P(N(2)-N(1)=2)=\frac{2^1}{1!}e^{-2}\times\frac{2^2}{2!}e^{-2}$$

### (iii)

$$P(N(1)\ge 1,\ N(1)\ge 2)=P(N(1)\ge 2)=1-P(N(1)-N(0)=0)-P(N(1)-N(0)=1)$$

$$P(N(1)\ge 1)=1-P(N(1)-N(0)=0)$$

$$P(N(1)\ge 2\mid N(1)\ge 1)=\frac{P(N(1)\ge 1,\ N(1)\ge 2)}{P(N(1)\ge 1}=1-\frac{P(N(1)-N(0)=1)}{1-P(N(1)-N(0)=0)}=1-\frac{\frac{2^1}{1!}e^{-2}}{1-\frac{2^0}{0!}e^{-2}}$$

## T9

易知满足前两条，下证第三条。

$$P(N(t+s)-N(s)=n)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}$$

$$P(N_1(t+s)-N_1(s)=k\mid N(t+s)-N(s)=n)=\tbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}P(N_1(t+s)-N_1(s)=k) &= \sum_{n=k}^{\infty}P(N_1(t+s)-N_1(s)=k\mid N(t+s)-N(s)=n)P(N(t+s)-N(s)=n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty}\tbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[\lambda t(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}\end{aligned}$$

故$N_1(t)$是强度为$\lambda p$的$Poission$过程，同理$N(t)-N_1(t)$是强度为$\lambda(1-p)$的$Poission$过程

由独立定义可验证两者独立。

## T11

易知$P(T>t)=P(X(T)\le\alpha)=P(\sum_{k=1}^{N(t)}Y_k\le\alpha)$

注意到$\sum_{k=1}^{n}Y_k\sim\Gamma(n,\mu)$

$$P(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le \alpha \mid N(t)=n) = P(\sum_{k=1}^{n} Y_k \le \alpha) = \int_0^\alpha \frac{\mu e^{-\mu s}(\mu s)^{n-1}}{(n-1)!} ds$$

$$P(T>t) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k \le \alpha \mid N(t)=n) P(N(t)=n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda\mu t)^n}{n!(n-1)!} \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-ns} ds$$

又$T$非负

$$\begin{aligned}
E(T) &= \int_0^\infty P(T>t)dt \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^n}{n!(n-1)!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n dt \int_0^\alpha s^{n-1} e^{-ns} ds \\
&= \int_0^\alpha \frac{\mu}{\lambda} e^{-\mu s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu s)^{n-1}}{(n-1)!} ds \\
&= \frac{\alpha\mu}{\lambda}
\end{aligned}$$