

练习 1

列真值表，无需赘述。

7°

$(\neg$	<b>p</b>	$\vee$	<b>q)</b>	$\rightarrow$	$(\neg$	<b>q</b>	$\wedge$	<b>r)</b>
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	0

8°

<b>(p</b>	$\rightarrow$	<b>q)</b>	$\rightarrow$	<b>(p</b>	$\rightarrow$	<b>r)</b>
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0

9°

$(\neg$	<b>(p</b>	$\vee$	<b>(q</b>	$\wedge$	<b>r)))</b>	$\leftrightarrow$	<b>((p</b>	$\vee$	<b>q)</b>	$\wedge$	<b>(p</b>	$\vee$	<b>r))</b>
0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

练习 2

参照P17归纳定义不容易错写、漏写。

1.

$$L_0 = X_1 = \{x_1\}$$

$$L_1 = \{\neg x_1, x_1 \rightarrow x_1\}$$

$$L_2 = \{\neg(\neg x_1), \neg(x_1 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (\neg x_1), x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), (\neg x_1) \rightarrow x_1, (x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1\}$$

2.

$$L_0 = X_2 = \{x_1, x_2\}$$

$$L_1 = \{\neg x_1, \neg x_2, x_1 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_2, x_2 \rightarrow x_1, x_2 \rightarrow x_2\}$$

$$L_2 = \{\neg(\neg x_1), \neg(\neg x_2), \neg(x_1 \rightarrow x_1), \neg(x_1 \rightarrow x_2), \neg(x_2 \rightarrow x_1), \neg(x_2 \rightarrow x_2), \\ x_1 \rightarrow (\neg x_1), x_1 \rightarrow (\neg x_2), x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2), x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1), x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_2), \\ x_2 \rightarrow (\neg x_1), x_2 \rightarrow (\neg x_2), x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_1), x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2), x_2 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_1), x_2 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_2), \\ (\neg x_1) \rightarrow x_1, (\neg x_2) \rightarrow x_1, (x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1, (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1, (x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_1, (x_2 \rightarrow x_2) \rightarrow x_1, \\ (\neg x_1) \rightarrow x_2, (\neg x_2) \rightarrow x_2, (x_1 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2, (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2, (x_2 \rightarrow x_1) \rightarrow x_2, (x_2 \rightarrow x_2) \rightarrow x_2\}$$

3.

$$|L_0| = |X_3| = 3$$

$$|L_1| = 3 + 3 \times 3 = 12$$

$$|L_2| = 12 + 3 \times 12 + 12 \times 3 = 84$$

$$|L_3| = 84 + 3 \times 84 + 84 \times 3 + 12 \times 12 = 732$$

## 练习3

2.

1°

$$\begin{array}{ll} (1) \neg x_1 \rightarrow \neg x_2 \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2) & (L_3) \\ (2) ((\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2))) & (L_1) \\ (3) (x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow ((\neg x_1 \rightarrow \neg x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) & (1), (2), MP \end{array}$$

2°

$$\begin{array}{ll} (1) (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) & (L_2) \\ (2) ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow x_2) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))) \rightarrow (((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3))) & (L_2) \\ (3) ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_2)) \rightarrow ((x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow x_3)) \rightarrow (x_1 \rightarrow x_3)) & (1), (2), MP \end{array}$$

3.

2°

$$\begin{array}{ll} (1) \neg \neg p & \text{假定} \\ (2) \neg \neg p \rightarrow (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) & (L_1) \\ (3) \neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p & (1), (2), MP \\ (4) (\neg \neg \neg \neg p \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) & (L_3) \\ (5) \neg p \rightarrow \neg \neg \neg p & (3), (4), MP \\ (6) (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p) & (L_3) \\ (7) \neg \neg p \rightarrow p & (5), (6), MP \\ (8) p & (1), (7), MP \end{array}$$

另法

(1)	$\neg \neg p$	假定
(2)	$\neg \neg p \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p)$	否定前件律
(3)	$\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p$	(1), (2), $MP$
(4)	$(\neg p \rightarrow \neg \neg \neg p) \rightarrow (\neg \neg p \rightarrow p)$	( $L_3$ )
(5)	$\neg \neg p \rightarrow p$	(3), (4), $MP$
(6)	$p$	( $L_3$ )

### 3°

(1)	$\neg (q \rightarrow r) \rightarrow \neg p$	假定
(2)	$(\neg (q \rightarrow r) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$	( $L_3$ )
(3)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	(1), (2), $MP$
(4)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	( $L_2$ )
(5)	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	(3), (4), $MP$
(6)	$p \rightarrow q$	假定
(7)	$p \rightarrow r$	(5), (6), $MP$

### 4°

(1)	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	假定
(2)	$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	( $L_2$ )
(3)	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	(1), (2), $MP$
(4)	$((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)))$	( $L_1$ )
(5)	$q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$	(3), (4), $MP$
(6)	$(q \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow ((q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)))$	( $L_2$ )
(7)	$(q \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$	(5), (6), $MP$
(8)	$q \rightarrow (p \rightarrow q)$	( $L_1$ )
(9)	$q \rightarrow (p \rightarrow r)$	(7), (8), $MP$

## 练习4

### 2.

### 2°

首先由练习3.2° ,有 $\{\neg \neg p\} \vdash p$ ,由演绎定理有  $\vdash \neg \neg p \rightarrow p$

以下先证明  $\vdash p \rightarrow \neg \neg p$

(1)	$\neg \neg p \rightarrow p$	定理
(2)	$(\neg \neg \neg p \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow \neg \neg p)$	( $L_3$ )
(3)	$(p \rightarrow \neg \neg p$	(1), (2), $MP$

然后，由演绎定理，只需证 $\{q \rightarrow p\} \vdash \neg p \rightarrow \neg q$

(1)	$p \rightarrow \neg \neg p$	定理
(2)	$q \rightarrow p$	假定
(3)	$q \rightarrow \neg \neg p$	(1), (2), $HS$
(4)	$\neg \neg q \rightarrow q$	定理
(5)	$\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p$	(3), (4), $HS$
(6)	$(\neg \neg q \rightarrow \neg \neg p) \rightarrow (\neg p \rightarrow \neg q)$	( $L_3$ )
(7)	$\neg p \rightarrow \neg q$	(5), (6), $MP$

### 3°

由演绎定理，只需证 $\{(p \rightarrow q) \rightarrow p\} \vdash p$

(1)	$\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$	否定前件律
(2)	$(p \rightarrow q) \rightarrow p$	假定
(3)	$\neg p \rightarrow p$	(1), (2), $HS$
(4)	$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$	否定肯定律
(5)	$p$	(3), (4), $MP$

## 练习5

1.

2°

由演绎定理, 只需证 $\{\neg p \rightarrow q, \neg q\} \vdash p$

(1)  $\neg p$

新假定

(2)  $(p \rightarrow q) \rightarrow p$

假定

(3)  $q$

(1), (2),  $MP$

(4)  $\neg q$

假定

由(3)(4)用反证律即得 $\{\neg p \rightarrow q, \neg q\} \vdash p$

3°

由演绎定理, 只需证 $\{\neg (p \rightarrow q)\} \vdash \neg q$

(1)  $q$

新假定

(2)  $q \rightarrow (p \rightarrow q)$

假定

(3)  $p \rightarrow q$

(1), (2),  $MP$

(4)  $\neg(p \rightarrow q)$

假定

由(3)(4)用归谬律即得 $\{\neg (p \rightarrow q)\} \vdash \neg q$