Vortex partition functions and wall-crossing phenomena

南大阪代数セミナー＠Zoom 2022年10月25日

吉田豊(明学大 法)

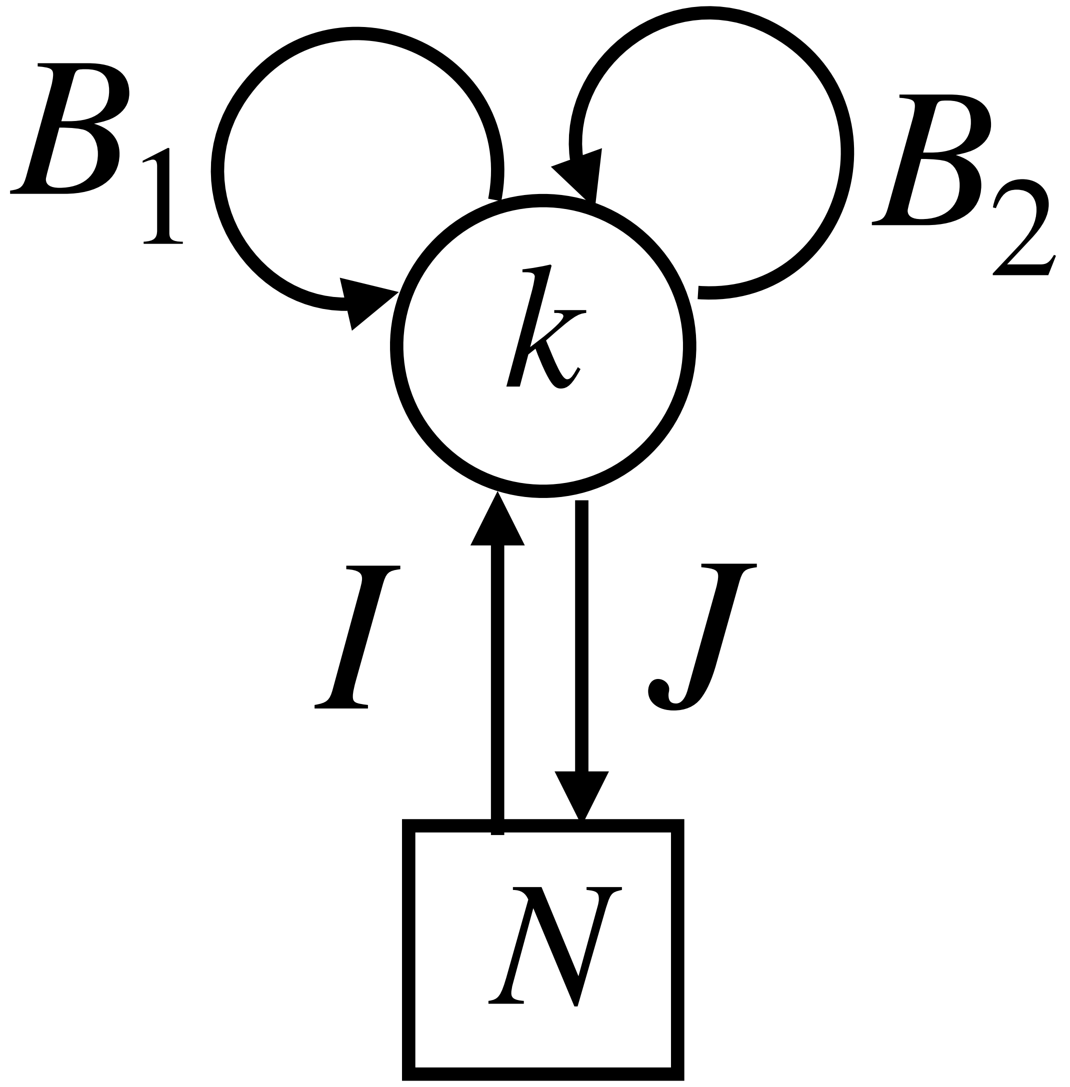
based on
Ryo Ohkawa and Yutaka Yoshida arXiv:2208.00435 [math.AG]
and
Chiung Hwang, Piljin Yi and Y.Y arXiv:1703.00213 [hep-th]

introduction

今日の話のお気持ちを言うと…

$$F_{\mu\nu} = -*F_{\mu\nu}$$

$$k = \frac{-1}{16\pi^2}\int_{\mathbb{R}^4} F_{\mu\nu} * F_{\mu\nu}$$



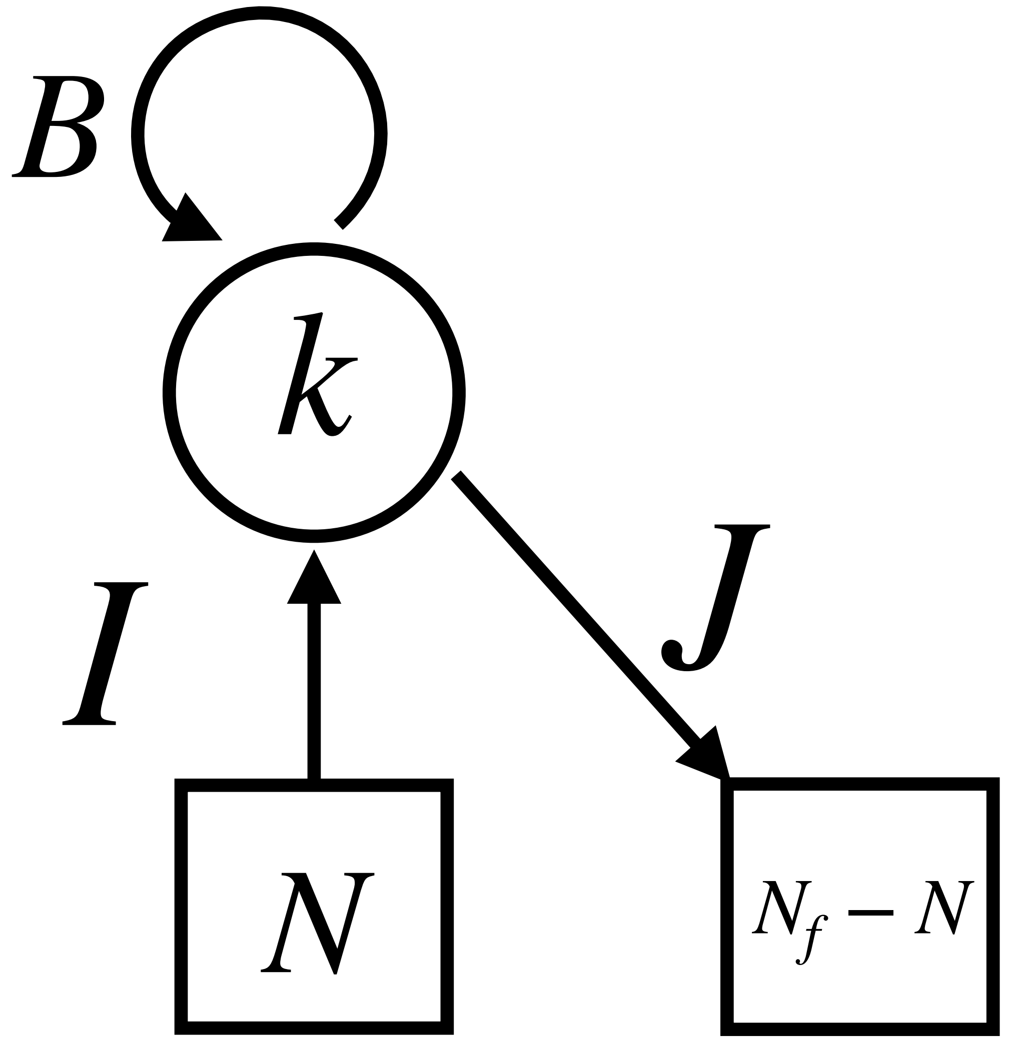
U(N)ゲージ理論のインスタントン解の

モジュライはJordanクイーバーで記述される

$$F_{12} = \frac{g^2}{2}(qq^\dagger - r\mathbf{1}_N)$$

$$(D_1 + \mathrm{i}D_2)q = 0$$

$$k = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} F_{12}$$



U(N)ゲージ理論のvortex解のモジュライは

A_1型のハンドソークイーバーで記述される

$M\times\mathbb{R}^4_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$上の超対称ゲージ理論のインスタントン分配函数の物理的な定義

$(M=\mathrm{pt},\ S^1,\ T^2)$

$$Z(M\times\mathbb{R}^4_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = \int \mathscr{D}A\mathscr{D}\lambda\mathscr{D}(\cdots)e^{-S_{SYM}}$$

$$= Z_{1-\mathrm{loop}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z_k(M)\right), \qquad (Q=e^{\mathrm{i}\theta+8\pi^2/g^2})$$

ここで$Z_k(M)$はADHMデータを場とするM上のSUSY場の量子論の

分配函数(よくk-インスタントン分配函数と言う)

$$Z_k(M) = \int \mathscr{D}B_1\mathscr{D}B_2\mathscr{D}I\mathscr{D}J\mathscr{D}(\cdots)e^{-S_{ADHM}}$$

例:$\mathbb{R}^4_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ $(M=\mathrm{pt})$上の$\mathcal{N}=2$ pure SYMのk-インスタントン分配函数の

ネクラソフ公式(超対称局所化公式)

$$Z_k(\mathrm{pt}) = \sum_{\sum_\alpha |Y_\alpha|=k} \prod_{\alpha,\beta=1}^{N} \prod_{s\in Y_\alpha} \frac{1}{E_{\alpha,\beta}(s)(E_{\alpha,\beta}(s)-\varepsilon_1-\varepsilon_2)} = \int_{\mathcal{M}^{(\zeta),ADHM}_{k,N}} 1$$

例:$S^1\times\mathbb{R}^4_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ $(M=S^1)$上の$\mathcal{N}=1^*$ SYMのk-インスタントン分配函数の

ネクラソフ公式(超対称局所化公式)

$$Z_k(S^1) = \sum_{\sum_\alpha |Y_\alpha|=k} \prod_{\alpha,\beta=1}^{N} \prod_{s\in Y_\alpha} \frac{\sinh((E_{\alpha,\beta}(s)-m)/2)(\sinh((E_{\alpha,\beta}(s)-\varepsilon_1-\varepsilon_2-m)/2)}{\sinh(E_{\alpha,\beta}(s)/2)\sinh((E_{\alpha,\beta}(s)-\varepsilon_1-\varepsilon_2)/2)} = \chi_y(\mathcal{M}^{(\zeta),ADHM}_{k,N})$$

$M\times\mathbb{R}^2_\varepsilon$上の超対称ゲージ理論(GLSM)の分配函数の計算

$(M=\mathrm{pt},\ S^1,\ T^2)$

$$Z(M\times\mathbb{R}^2_\varepsilon)=\int\mathscr{D}A\mathscr{D}\lambda\mathscr{D}q\cdots e^{-S_{GLSM}}$$

$$=\sum Z_{1-\mathrm{loop}}(\sum_{k=0}^{\infty}Q^k Z_k(M)),\qquad (Q=e^{2\pi\mathrm{i}\theta-r})$$

ここで$Z_k(M)$はvortexのモジュライ(B,I,J)を場とする

M上のSUSY場の量子論の分配函数(k-vortex分配函数)

$$Z_k(M)=\int\mathscr{D}B\mathscr{D}I\mathscr{D}J\mathscr{D}(\cdots)e^{-S_{k-vortex}}$$

例1:$\mathbb{R}^2_\varepsilon$ ($M=\mathrm{pt}$)上の $\mathcal{N}=(2,2)$ $U(N)$ ゲージ理論＋N_f個の基本表現

カイラル多重項のk-vortex分配函数の超対称局所化公式

$$Z_k(\mathrm{pt}) = \sum_{k_1+\cdots+k_N=k} \frac{1}{\prod_{\alpha,\beta=1}^{N}\prod_{l=1}^{k_\alpha}(m_\alpha - m_\beta - (l-k_\beta-1)\varepsilon)\prod_{\beta=1}^{N_c}\prod_{\alpha=1}^{N_f-N_c}\prod_{l=1}^{k_\beta}(m_\beta - m_\alpha + l\varepsilon)} = \int_{\mathscr{M}^{(\zeta)handsaw}_{k,N,N_f}} 1$$

例2:$S^1\times\mathbb{R}^2_\varepsilon$ ($M=S^1$)上の$\mathcal{N}=2^*$ $U(N)$ ゲージ理論

のk-vortex分配函数の超対称局所化公式

$$Z_k(S^1) = \sum_{k_1+\cdots+k_N=k}\prod_{\alpha,\beta=1}^{N_c}\frac{\mathrm{sh}(m_\alpha - m_\beta + \theta - (l-k_\beta-1)\varepsilon)}{\mathrm{sh}(m_\alpha - m_\beta - (l-k_\beta-1)\varepsilon)}\prod_{\beta=1}^{N_c}\prod_{\alpha=1}^{N_f-N_c}\prod_{l=1}^{k_\beta}\frac{\mathrm{sh}(m_\alpha - m_\beta + \theta + l\varepsilon)}{\mathrm{sh}(m_\beta - m_\alpha + l\varepsilon)}$$

$M = \mathrm{pt}, S^1, T^2$上の

SUSY理論の分配函数(matrix model, Witten指数, 楕円種数)の

超対称局所化公式の一般形

$M=\mathrm{pt}, S^1, T^2$上のSUSY理論の分配函数(相関関数)の超対称局所化公式の一般形

$$\langle F(\phi)\rangle = \frac{1}{|W_G|}\sum_{\phi_*}\text{JK-Res}(\phi_*,\zeta)\prod_{\alpha\in rt(\mathfrak{g})} f(\langle\alpha,\phi\rangle)\frac{\prod_{w'\in R_{\mathfrak{g}_F}}\prod_{w\in R'_{\mathfrak{g}}} f(\langle w,\phi\rangle+\langle w',\tilde{m}\rangle)}{\prod_{w'\in R_{\mathfrak{g}_B}}\prod_{w\in R_{\mathfrak{g}}} f(\langle w,\phi\rangle+\langle w',m\rangle)} F(\phi)\ \ d\phi_1\wedge\cdots\wedge d\phi_{\mathrm{rank}(\mathfrak{g})}$$

ここで

$$f(x)=\begin{cases} x, & (\ M=\mathrm{pt}\text{の場合}) \\ 2\sinh(x/2), & (\ M=S^1\ \text{の場合:Hori-Kim-Yi, Hwang et al. 2014}) \\ \theta_1(x;\tau)/\eta(\tau), & (M=T^2\text{の場合:Benini et al. 2013}) \end{cases}$$

← 壁越えあり得る
← 壁越えあり得る
← 壁越えなし

分配函数は$Z^{(\zeta)}=\langle 1\rangle$の場合。以下長くなるので微分形式の部分は書かない。

$M = \mathrm{pt}, S^1, T^2$上のSUSY理論の分配函数の超対称局所化公式の一般形

$$Z^{(\zeta)} = \frac{1}{|W_G|} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi = \phi_*, \zeta) \prod_{\alpha \in rt(\mathfrak{g})} f(\langle \alpha, \phi \rangle) \frac{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_F}} \prod_{w \in R'_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', \tilde{m} \rangle)}{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_B}} \prod_{w \in R_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', m \rangle)}$$

ここで

- $\mathfrak{g}$:Lie群G(M上の理論のゲージ群)のリー代数, (真空はGによるケーラー商)
- $|W_G|$: Gのワイル群の位数
- $rt(\mathfrak{g})$:$\mathfrak{g}$のルートたち
- $wt(R_\mathfrak{g})$:$\mathfrak{g}$の表現$R_\mathfrak{g}$のウェイト
- $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{\mathrm{rank}(\mathfrak{g})}), \quad \phi_i \in \mathbb{C} \text{ or } S^1 \times \mathbb{R} \text{ or } T^2$

$M=\mathrm{pt}, S^1, T^2$上のSUSY理論の分配函数の超対称局所化公式の一般形

$$Z^{(\zeta)} = \frac{1}{|W_G|}\sum_{\phi_*}\text{JK-Res}(\phi=\phi_*,\zeta)\prod_{\alpha\in rt(\mathfrak{g})} f(\langle\alpha,\phi\rangle)\frac{\prod_{w'\in R_{\mathfrak{g}_F}}\prod_{w\in R'_{\mathfrak{g}}} f(\langle w,\phi\rangle+\langle w',\tilde{m}\rangle)}{\prod_{w'\in R_{\mathfrak{g}_B}}\prod_{w\in R_{\mathfrak{g}}} f(\langle w,\phi\rangle+\langle w',m\rangle)}$$

ここで

- $\mathfrak{g}_B$:G_B(framingに作用する群)のリー代数,
- $\mathfrak{g}_F$:群G_F(フェルミオンに作用する群)のリー代数
- $m=(m_1,\cdots,m_{\mathrm{rank}(\mathfrak{g}_B)})\in\mathbb{C}^{\mathrm{rank}(\mathfrak{g}_B)}$:同変パラメータ(ボゾンの質量)
- $\tilde{m}=(\tilde{m}_1,\cdots,\tilde{m}_{\mathrm{rank}(\mathfrak{g}_F)})\in\mathbb{C}^{\mathrm{rank}(\mathfrak{g}_F)}$:フェルミオンの質量
- $\langle\cdot,\cdot\rangle$: 双線形形式

$M=\mathrm{pt}, S^1, T^2$上のSUSY理論の分配函数の超対称局所化公式の一般形

$$Z^{(\zeta)} = \frac{1}{|W_G|} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi = \phi_*, \zeta) \prod_{\alpha \in rt(\mathfrak{g})} f(\langle \alpha, \phi \rangle) \frac{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_F}} \prod_{w \in R'_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', \tilde{m} \rangle)}{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_B}} \prod_{w \in R_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', m \rangle)}$$

ここでJK-Res(ϕ_*, ζ)はJeffrey-Kirwan residueで次のように定義される。

・JK-Res($\phi=\phi_*,\zeta$)、Jeffrey-Kirwan residueの定義

$$Q_i=(Q_{i,1},\cdots,Q_{i,k})\in\mathbb{Z}^k,\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_k)\in\mathbb{C}^k,(S^1\times\mathbb{R})^k,(T^2)^k$$

$$\zeta\in\mathbb{R}^k$$

k個の超平面たち $0=\langle Q_i,\phi\rangle=\sum_{l=1}^{k}Q_{i,k}\phi_i,\ (i=1,\cdots,k)$, が原点$\phi=0$で

横断的に交わっているとき、原点でのJeffrey-Kirwan residueは

$$\text{JK-Res}(\phi=0,\zeta)\frac{d\phi_1\wedge\cdots\wedge d\phi_k}{\prod_{i=1}^{k}\langle Q_i,\phi\rangle}=\begin{cases}\dfrac{1}{|\det(Q_1,Q_2,\cdots,Q_k)|}, & \zeta\in\text{Cone}((Q_1,\cdots,Q_k))\\ 0, & \zeta\notin\text{Cone}((Q_1,\cdots,Q_k)),\end{cases}$$

で定義される。ただしここで$\text{Cone}((Q_1,Q_2,\cdots,Q_k))=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{R}_{>0}Q_i$

・JK-Res($\phi = \phi_*, \zeta$)、Jeffrey-Kirwan residueは万能か？

・$N > k$の超平面が横断的に交わっている場合のJK-Resの定義はあるが、ここでは複雑なので説明しない。
この場合、path integralがJK-Resに一致するというのは物理でも示された訳ではなく天下り式に使っている

・$\zeta \in \partial(\mathrm{Cone}),\ \zeta = 0$の場合はJK-Resは未定義。物理ではこういう状況も重要な場合がある。
(例)5d SCIのインスタントンの寄与、パッフィアンフェイズ、SU(N)ゲージ理論のモノポールバブリング….。
しかし一般的な計算方法はなくcase by caseで『頑張る』しかない。

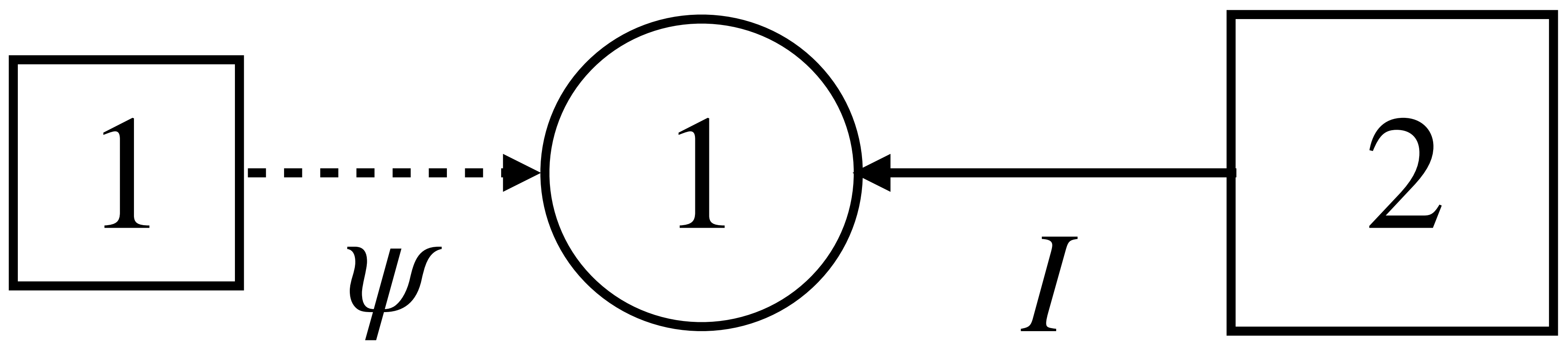
・横断的に交わってない場合はJK-Resは未定義。この場合も何かしらの方法で計算できる場合が
あるがこれもcase by case。
（例）種数g=2以上のリーマン面上のA-twisted GLSMの場合

・ζはFIパラメータ、もしくは記号の乱用を許して$\mathfrak{g}$に埋め込んだもの。

今回の話は上のビミョー問題は一切起きないのでご安心を！

計算例

例 1：$M = \mathrm{pt}$,



$$\mathscr{M}^{(\zeta)}_{vauca} = \{I \,|\, I \in Hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}), II^\dagger - \zeta = 0\}/U(1)$$

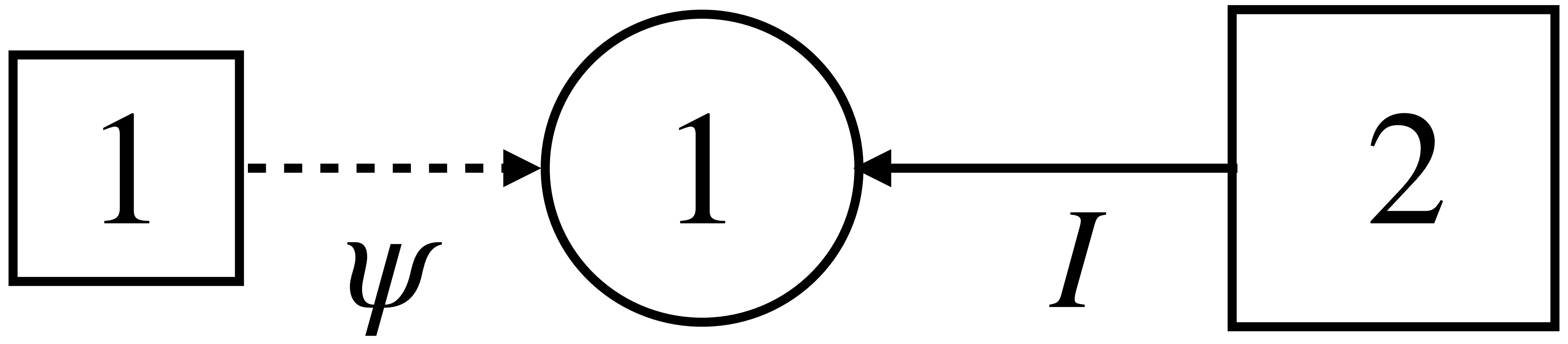
$$= \begin{cases} \varnothing, & (\zeta < 0) \\ \boldsymbol{P}^1, & (\zeta > 0) \end{cases}$$

$$Z^{(\zeta)} = \frac{1}{|W_G|} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi_*, \zeta) \prod_{\alpha \in rt(\mathfrak{g})} f(\langle \alpha, \phi \rangle) \frac{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_F}} \prod_{w \in R'_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', \tilde{m} \rangle)}{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_B}} \prod_{w \in R_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', m \rangle)}$$

$$= \begin{cases} 0, \quad (\zeta < 0) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \oint_{\phi = m_i} \frac{d\phi}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\phi - \tilde{m}}{(\phi - m_1)(\phi - m_2)} = \int_{\boldsymbol{P}^1}^{T} H - \tilde{m} \int_{\boldsymbol{P}^1}^{T} 1 = 1, \quad (\zeta > 0) \end{cases}$$

$$H_T^*(\boldsymbol{P}^1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[H, m_1, m_2]/((H - m_1)(H - m_2))$$

例 1 : M = pt,



$Z^{(\zeta>0)} \neq Z^{(\zeta<0)}$なので壁越えが起きている。

Wall-crossing 公式

$$Z^{(\zeta>0)} + \oint_{\phi=\infty} \frac{d\phi}{2\pi \mathrm{i}} \frac{\phi - \tilde{m}}{(\phi - m_1)(\phi - m_2)} = Z^{(\zeta<0)}$$

例2, $M = \mathbf{pt}, G = U(N)$

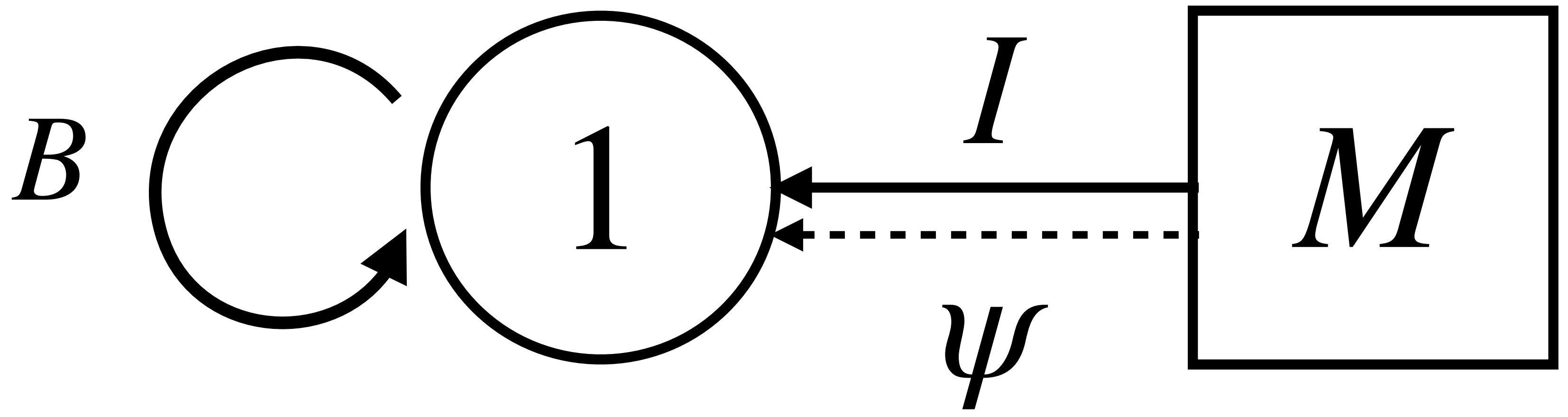
$$\begin{tikzcd} \boxed{N_a} \arrow[r, dashed, "\psi"'] & \bigcirc N & \boxed{N_f} \arrow[l, "I"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{M}^{(\zeta)}_{vauca} &= \{ I \,|\, I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{N_f}, \mathbb{C}^{N}),\ II^{\dagger} - \zeta \mathbf{1}_N = 0 \} / U(N) \\ &= \begin{cases} \varnothing, & (\zeta < 0) \\ \mathrm{Gr}(N, N_f), & (\zeta > 0) \end{cases}\end{aligned}$$

$$Z^{(\zeta)} = \frac{1}{|W_G|} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi_*, \zeta) \prod_{\alpha \in rt(\mathfrak{g})} f(\langle \alpha, \phi \rangle) \frac{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_F}} \prod_{w \in R'_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', \tilde{m} \rangle)}{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_B}} \prod_{w \in R_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', m \rangle)}$$

$$= \begin{cases} 0, \quad (\zeta < 0) \\ \dfrac{1}{N!} \displaystyle\sum_{\{m_{i_\alpha}\}} \oint_{\phi_\alpha = m_{i_\alpha}} \prod_{\alpha=1}^{N} \frac{d\phi_\alpha}{2\pi \mathrm{i}} \prod_{1 \le \alpha \neq \beta \le N} (\phi_\alpha - \phi_\beta) \cdot \prod_{\alpha=1}^{N} \frac{\prod_{j=1}^{N_a} (\phi_\alpha - \tilde{m}_j)}{\prod_{\alpha=1}^{N_f} (\phi_\alpha - m_i)} = \int_{\mathrm{Gr}(N,M)}^{T} (\cdots), \quad (\zeta > 0) \end{cases}$$

例3：$M = \mathrm{S}^1, G = U(1)$



$$
\begin{aligned}
\mathscr{M}^{(\zeta)}_{vauca} &= \{ I \,|\, I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^M, \mathbb{C}), II^\dagger - \zeta = 0 \} / U(1) \\
&= \begin{cases} \varnothing, & (\zeta < 0) \\ \boldsymbol{P}^{M-1}, & (\zeta > 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

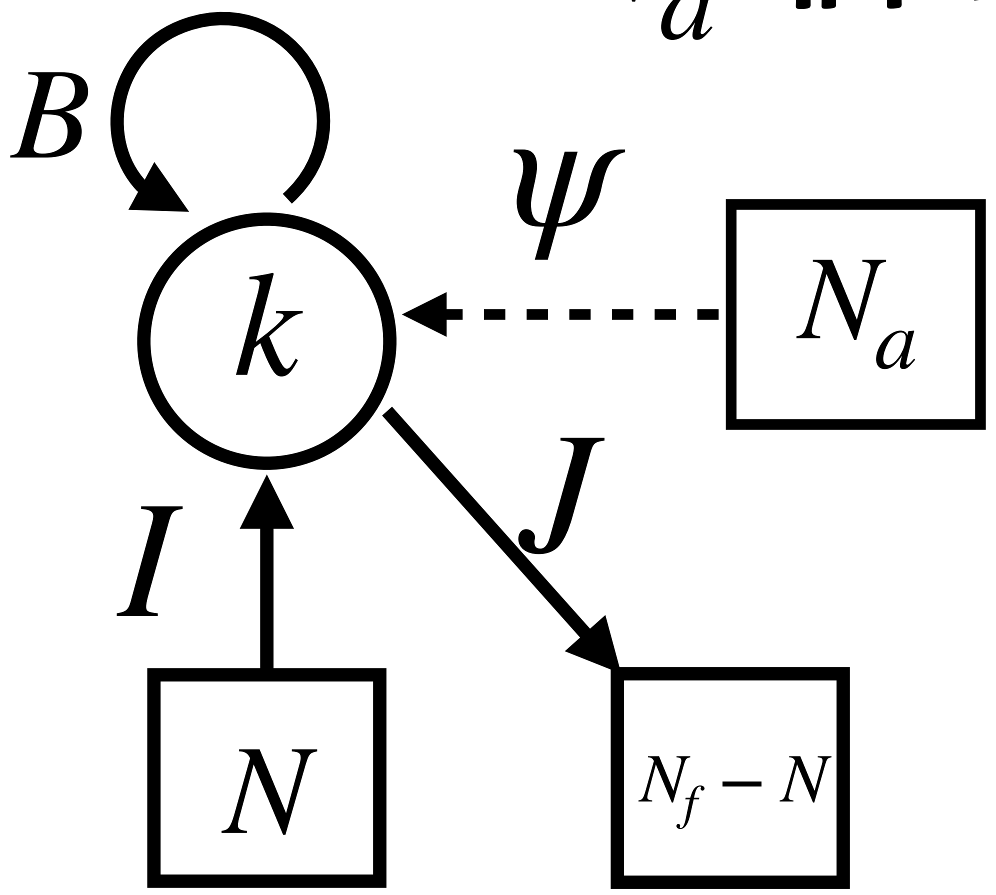
$$
Z^{(\zeta)} = \begin{cases} 0, \quad (\zeta < 0) \\ \dfrac{1}{2\sinh(-m)} \oint_{\phi=0} \dfrac{d\phi}{2\pi \mathrm{i}} \left(\dfrac{\sinh(-\phi/2 + m/2)}{\sinh(\phi/2)} \right)^M, \quad (\zeta > 0) \end{cases}
$$

$$
= y^{-\frac{M-1}{2}} \chi_y(\boldsymbol{P}^{M-1}), \quad (y = e^m, M = \text{even})
$$

vortex partition function(PF)の
超対称局所化公式

2d(M=pt) $\mathcal{N}=(2,2)$ $U(N)$ **ゲージ理論**+ N_f **個の基本表現**

+N_a **個の反基本表現のカイラル's** ($N_f > N_a$) **の**k**-vortex PF**



$$\mathscr{M}^{(\zeta)}_{vauca} = \left\{ (B, I, J) \,\middle|\, \begin{array}{l} B \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^k), I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^k), J \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^{N_f - N}) \\ [B, B^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = \zeta \mathbf{1}_k \end{array} \right\} / U(k)$$

ボゾニックな部分はA_1型のハンドソークイーバーに一致している。

このクイーバーで指定される理論の分配函数(k-vortex partition function)は

$$Z_k^{(\zeta)} = \frac{1}{|W_G|} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi = \phi_*, \zeta) \prod_{\alpha \in rt(\mathfrak{g})} f(\langle \alpha, \phi \rangle) \frac{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_F}} \prod_{w \in R'_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', \tilde{m} \rangle)}{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_B}} \prod_{w \in R_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', m \rangle)}$$

$$= \frac{(-1^k)}{\varepsilon^k k!} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi = \phi_*, \zeta) \prod_{1 \le \alpha \neq \beta \le k} \frac{\phi_\alpha - \phi_\beta}{\phi_\alpha - \phi_\beta - \varepsilon} \prod_{\alpha=1}^{k} \frac{\prod_{j=1}^{N_a} (\phi_\alpha - \tilde{m}_j)}{\prod_{i=1}^{N} (\phi_\alpha - m_i) \prod_{j=N+1}^{N_f} (-\phi_\alpha + m_i)}$$

計算例：$\zeta > 0, k = 2$の場合にJK-resに効く組み合わせ

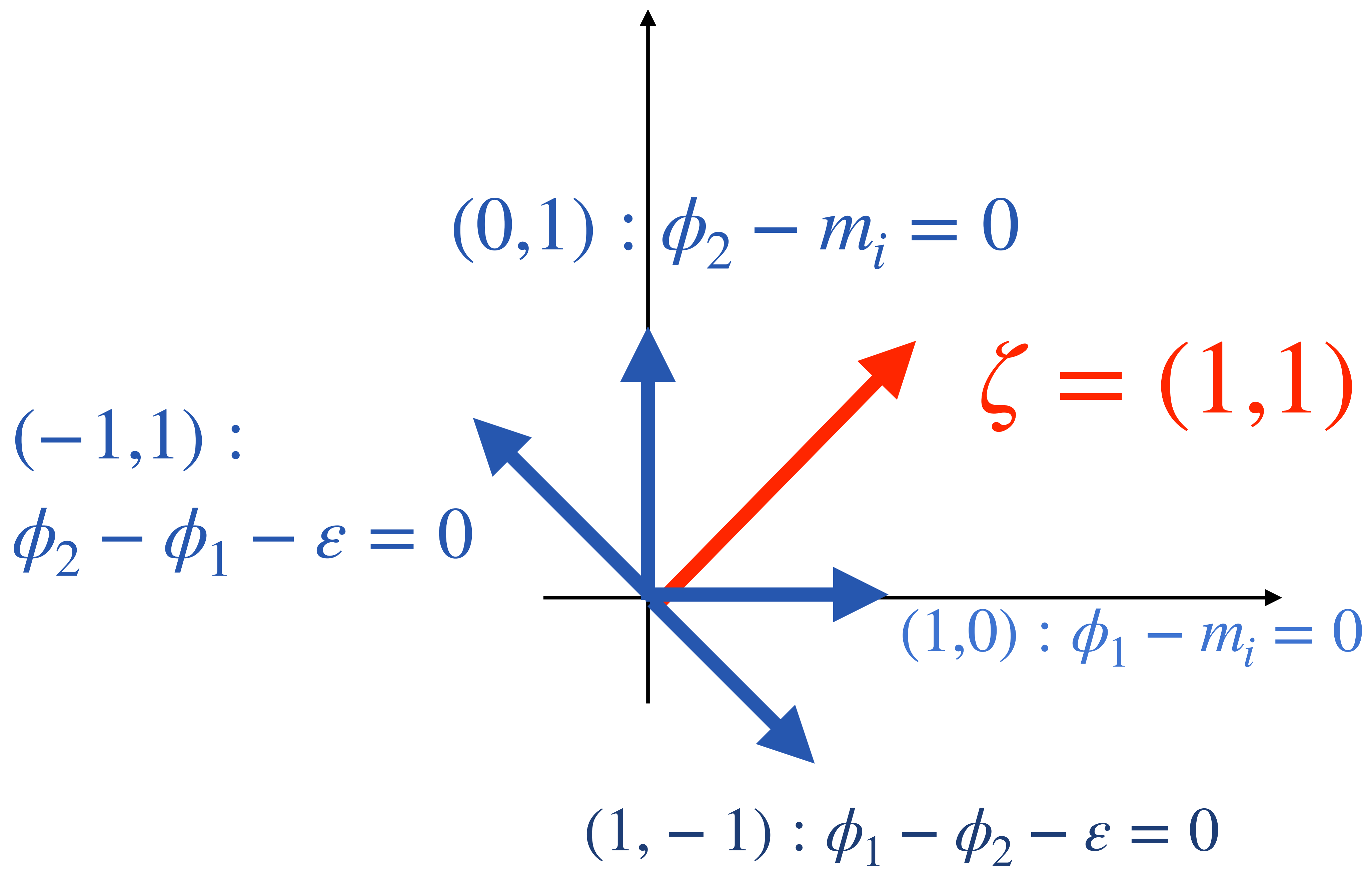
$$Z_k^{(\zeta)} = \frac{(-1^k)}{\epsilon^k k!} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi = \phi_*, \zeta) \prod_{1 \le \alpha \neq \beta \le 2} \frac{\phi_\alpha - \phi_\beta}{\phi_\alpha - \phi_\beta - \epsilon} \prod_{\alpha=1}^{2} \frac{\prod_{j=1}^{N_a} (\phi_\alpha - \tilde{m}_j)}{\prod_{i=1}^{N} (\phi_\alpha - m_i) \prod_{j=N_f-N+1}^{N_f} (-\phi_\alpha + m_i)}$$

(1) $\phi_* \begin{cases} \phi_1 - m_{i_1} = 0 \\ \phi_2 - m_{i_2} = 0 \end{cases}$ $\{i_1, i_2\} \subset \{1, \cdots, N\}$

(2) $\phi_* \begin{cases} \phi_1 - m_i = 0 \\ \phi_2 - \phi_1 - \epsilon = 0 \end{cases}$ $i \in \{1, \cdots, N\}$

(3) $\phi_* \begin{cases} \phi_2 - m_i = 0, \quad i \in \{1, \cdots, N\} \\ \phi_1 - \phi_2 - \epsilon = 0 \end{cases}$

図:$k = 2$の時のweightたちと対応する超平面たち



計算例：$\zeta > 0, k = 2$の場合にJK-resに効く組み合わせ

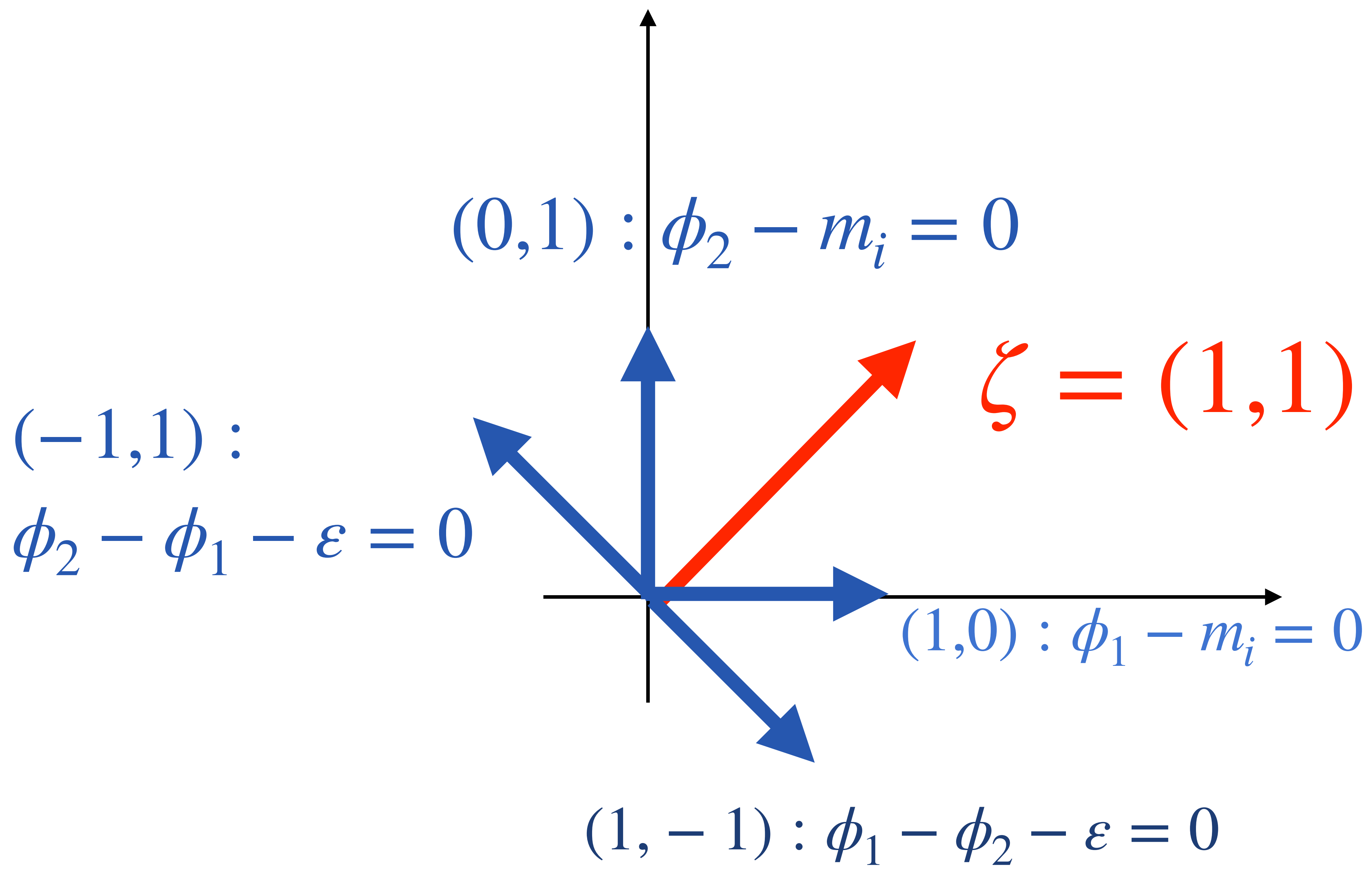
$$Z_k^{(\zeta)} = \frac{(-1^k)}{\varepsilon^k k!} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi = \phi_*, \zeta) \prod_{1 \le \alpha \neq \beta \le 2} \frac{\phi_\alpha - \phi_\beta}{\phi_\alpha - \phi_\beta - \varepsilon} \prod_{\alpha=1}^{2} \frac{\prod_{j=1}^{N_a} (\phi_\alpha - \tilde{m}_j)}{\prod_{i=1}^{N} (\phi_\alpha - m_i) \prod_{j=N_f-N+1}^{N_f} (-\phi_\alpha + m_i)}$$

(1) $\phi_* \begin{cases} \phi_1 - m_{i_1} = 0 \\ \phi_2 - m_{i_2} = 0 \end{cases} \quad \{i_1, i_2\} \subset \{1, \cdots, N\}$

(2) $\phi_* \begin{cases} \phi_1 - m_i = 0 \\ \phi_2 - \phi_1 - \varepsilon = 0 \end{cases} \quad i \in \{1, \cdots, N\}$

(3) $\phi_* \begin{cases} \phi_2 - m_i = 0, \quad i \in \{1, \cdots, N\} \\ \phi_1 - \phi_2 - \varepsilon = 0 \end{cases}$

図:$k = 2$の時のweightたちと対応する超平面たち



計算例：$\zeta > 0, k = 2$の場合にJK-resに効く組み合わせ

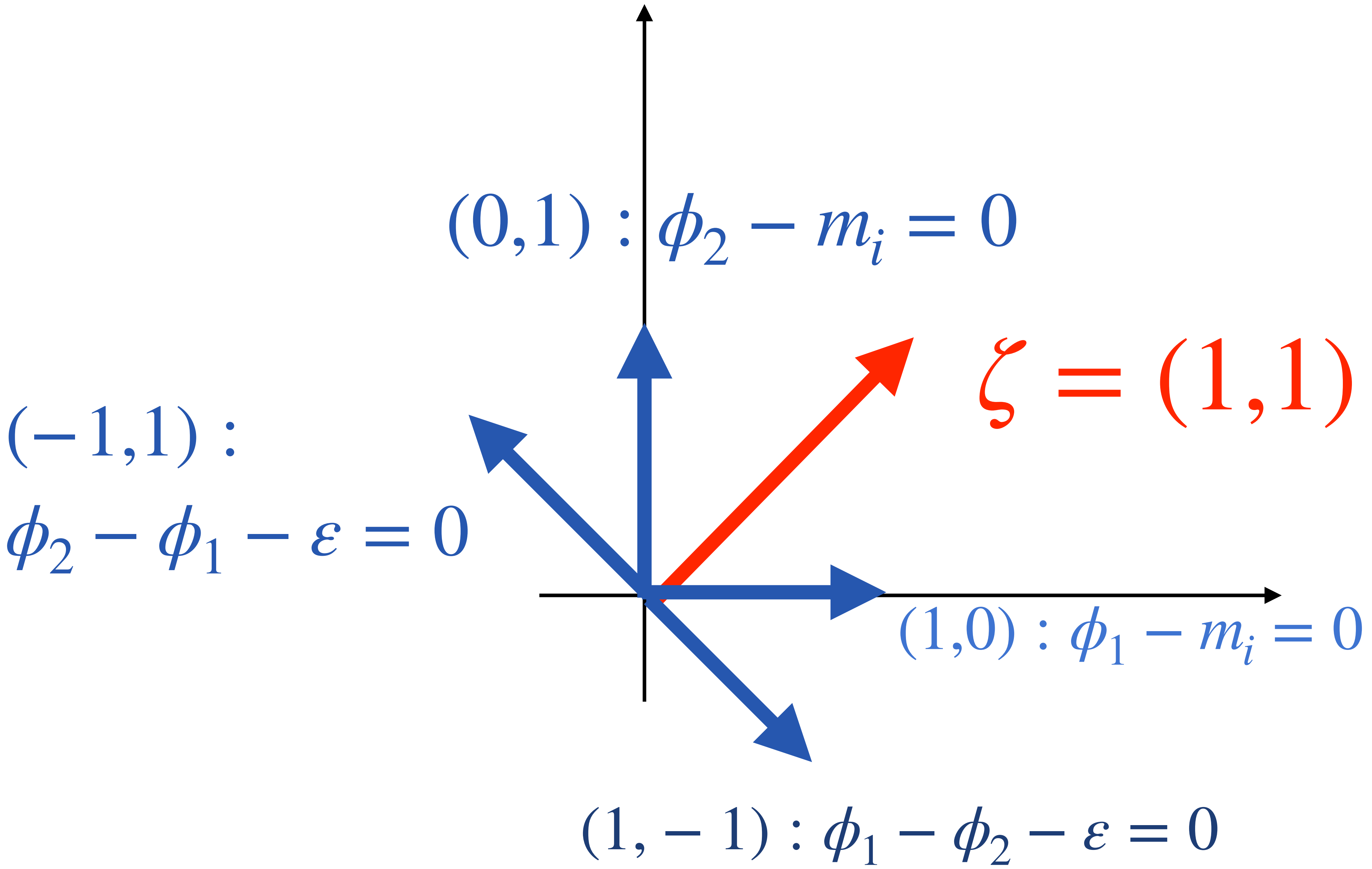
$$Z_k^{(\zeta)} = \frac{(-1^k)}{\epsilon^k k!} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi = \phi_*, \zeta) \prod_{1 \le \alpha \neq \beta \le 2} \frac{\phi_\alpha - \phi_\beta}{\phi_\alpha - \phi_\beta - \epsilon} \prod_{\alpha=1}^{2} \frac{\prod_{j=1}^{N_a} (\phi_\alpha - \tilde{m}_j)}{\prod_{i=1}^{N} (\phi_\alpha - m_i) \prod_{j=N_f-N+1}^{N_f} (-\phi_\alpha + m_i)}$$

(1) $\phi_* \begin{cases} \phi_1 - m_{i_1} = 0 \\ \phi_2 - m_{i_2} = 0 \end{cases}$ $\{i_1, i_2\} \subset \{1, \cdots, N\}$

(2) $\phi_* \begin{cases} \phi_1 - m_i = 0 \\ \phi_2 - \phi_1 - \epsilon = 0 \end{cases}$ $i \in \{1, \cdots, N\}$

(3) $\phi_* \begin{cases} \phi_2 - m_i = 0, \quad i \in \{1, \cdots, N\} \\ \phi_1 - \phi_2 - \epsilon = 0 \end{cases}$

図:$k = 2$の時のweightたちと対応する超平面たち



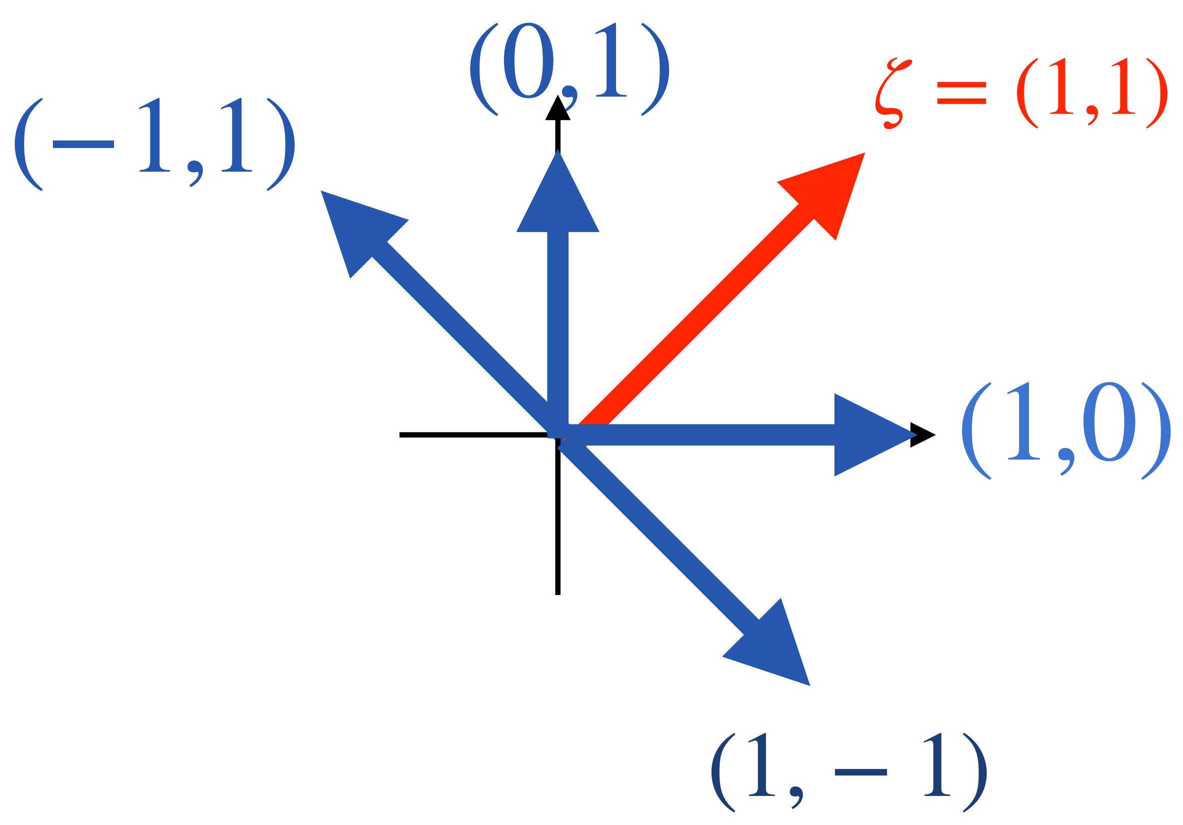
$\zeta > 0, k = $ (一般)の場合にJK-resに効く組み合わせ

$$\begin{cases} \phi_\alpha - \phi_\beta - \varepsilon = 0 \\ \phi_\alpha - m_i = 0, \quad i \in \{m_1, \ldots, m_N\} \end{cases}$$

から選ばれるk個の組みでウェイトが

張るコーンがζを含むもの

$k = 2$の図



ϕの空間で交わる点を分類すると自然数kのN個の分割でラベルされる

(ハンドソークイーバーのトーラス作用での固定点に対応する)

$$\phi_* = (\phi_{*,1}, \cdots, \phi_{*,k}), \quad \phi_{*,\alpha} = (l_i - 1)\varepsilon + m_i, \quad l_i \in \{1, \cdots, k_i\}$$

$$i \in \{1, \cdots, N\}, \quad \sum_{i=1}^{N} k_i = k, \quad k_i \geq 0$$

k-vortex PFの超対称局所化公式

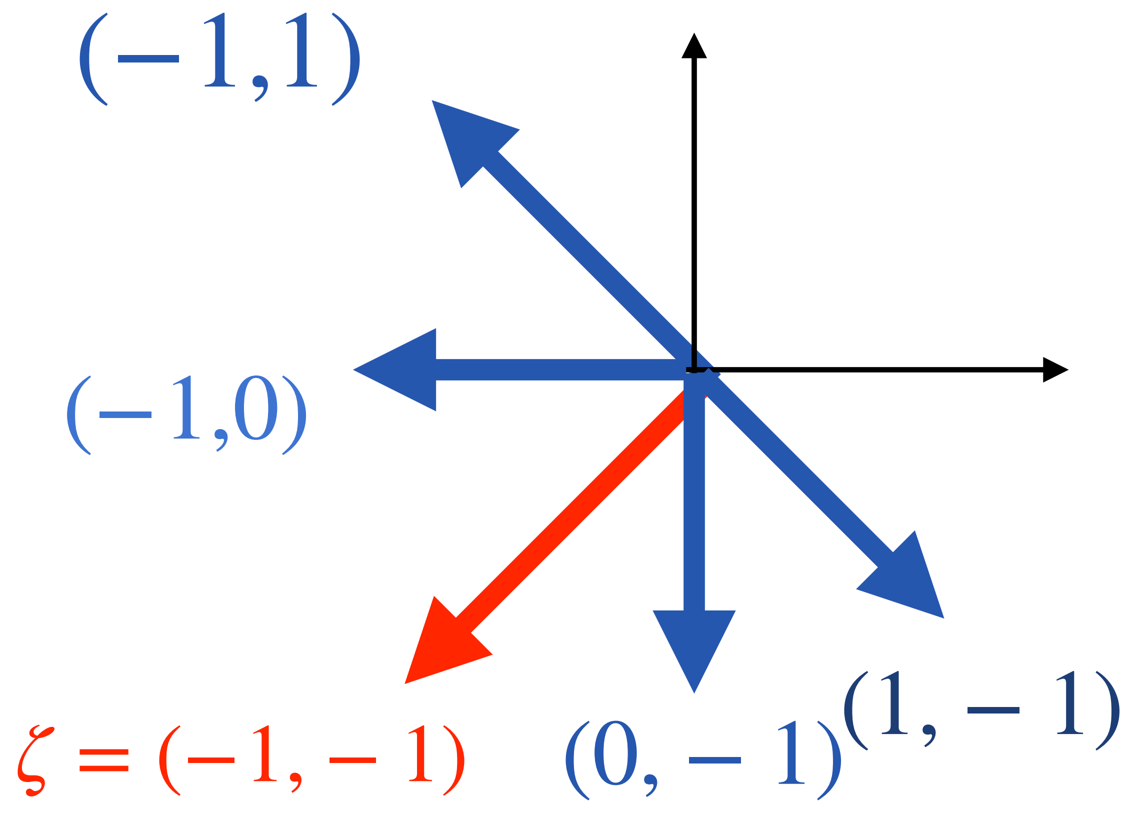
$$\boxed{Z_k^{(\zeta>0)} = \sum_{\substack{k_1, \cdots, k_N = 0 \\ k_1 + \cdots + k_N = k}}^{k} \prod_{i=1}^{N} \prod_{l=1}^{k_i} \frac{\prod_{j=1}^{N_a} (m_i - \tilde{m}_j + (l-1)\varepsilon)}{\prod_{j=1}^{N} (m_i - m_j + (l - k_j - 1)\varepsilon) \prod_{j=N+1}^{N_f} (m_j - m_i - (l-1)\varepsilon)}}$$

$\zeta < 0, k =$ (一般)の場合にJK-resに効く組み合わせ

$$\begin{cases} \phi_\alpha - \phi_\beta - \varepsilon = 0 \\ -\phi_\alpha + m_i = 0, \quad i \in \{N+1, \ldots, N_f\} \end{cases}$$

から選ばれるk個の組みでウェイトが張るコーンがζを含むもの

$k = 2$の図



ϕの空間で交わる点を分類すると自然数kのN個の分割でラベルされる

(ハンドソークイーバーのトーラス作用での固定点に対応する)

$$\phi_* = (\phi_{*,1}, \cdots, \phi_{*,k}), \quad \phi_{*,\alpha} = -(l_i - 1)\varepsilon + m_{i+N}, \quad l_i \in \{1, \cdots, k_i\}$$

$$i \in \{1, \cdots, N_f - N\}, \quad \sum_{i=1}^{N_f - N} k_i = k, \quad k_i \geq 0$$

k-vortex PFの超対称局所化公式

$$\boxed{Z_k^{(\zeta<0)} = \sum_{\substack{k_1, \cdots, k_{N_f-N} = 0 \\ k_1 + \cdots + k_{N_f-N} = k}}^{k} \prod_{i=1}^{N_f-N} \prod_{l=1}^{k_i} \frac{\prod_{j=1}^{N_a} (m_{i+N} - \tilde{m}_j - (l-1)\varepsilon)}{\prod_{j=1}^{N_f-N} (m_{j+N} - m_{i+N} - (l - k_j - 1)\varepsilon) \prod_{j=1}^{N} (m_{i+N} - m_j + (l-1)\varepsilon)}}$$

vortex partition functionの壁越え公式

vortex分配函数たちの母関数を次の式で定義する

$$Z^{(\zeta)}_{\mathrm{vortex}} := \sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z^{(\zeta)}_k$$

X=pt(有理型)の場合のvortex PFの壁越え公式

$$Z^{(\zeta>0)}_{\mathrm{vortex}} = \ (1-Q)^{\frac{1}{\varepsilon}} Z^{(\zeta<0)}_{\mathrm{vortex}}, \quad (N_a = N_f - 1,),$$

$$Z^{(\zeta>0)}_{\mathrm{vortex}} = (1-Q)^{\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{N_f}(\tilde{m}_i - m_i)} \ Z^{(\zeta<0)}_{\mathrm{vortex}}, \quad (N_a = N_f)$$

vortex partition functionの壁越え公式に関する歴史

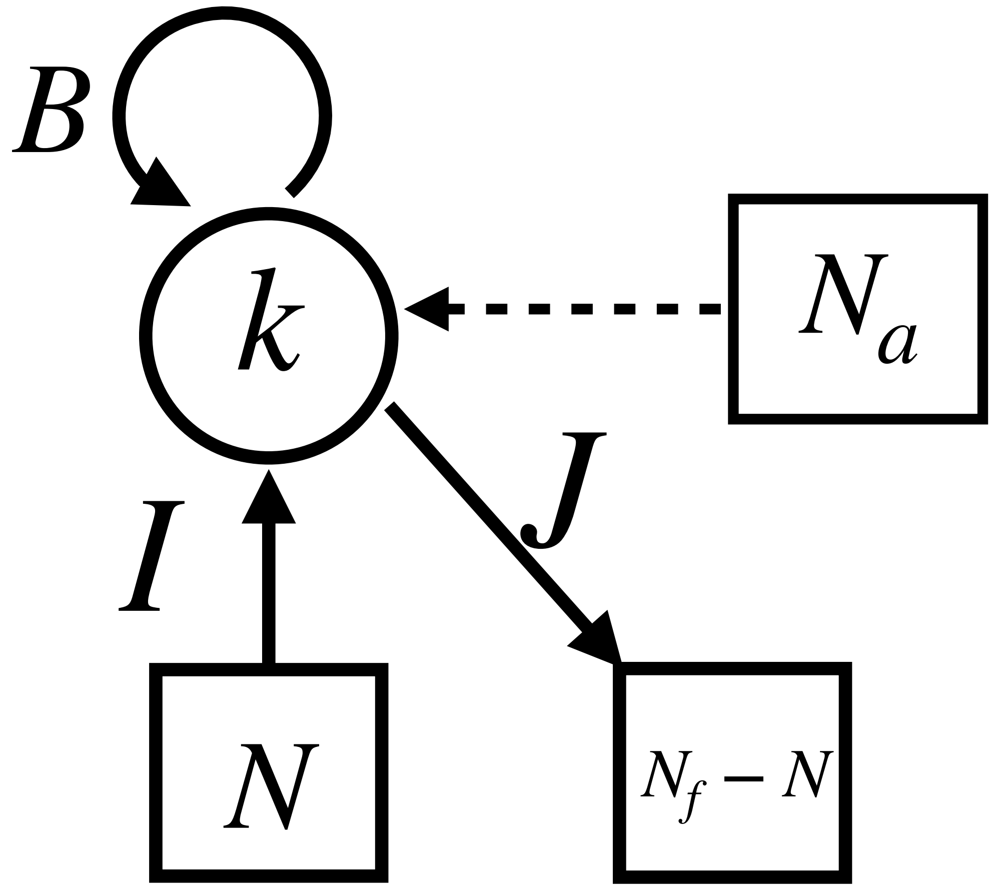
- M=ptの場合(有理型)のvortex PFの壁越え公式は元々Honda-Okuda(2013), Benini-Park-Zhao(2014), Gomis-Le Floch(2014)
で得られたが、当時は2d Seiberg-like dualな二つの理論のvortex PFの間の関係として認識されて
おり、壁越えと公式とは認識されていなかった。(vortex PFと言った時点で$\zeta > 0$が選ばれている)

- Hwang-Yi-Y.Y (2017)においてvortex PFの壁越え公式(M=S^1の場合)がWitten指数の局所化公式から導出された。
この論文で初めて(3d Chern-Simons-matter理論の)Seiberg dualな理論のvortex PFの関係が壁越えであると
明確に認識された。CS項があると$N_a < N_f - 1$でも非自明な壁越えがある。

- Ohkawa-Y.Y(2022)においてGomis-Le Flochで導かれた公式($N_a = N_f$)と$\mathcal{N} = (2,2)^*$の壁越え公式を
ハンドソー箙多様体の安定性条件についての壁越えとして証明した。さらに多重超幾何級数のオイラー変換の
有理極限に一致することを示した。

- Hwang-Yi-Y.Y (2017)で研究された3d $\mathcal{N} = 2 * U(N)$ゲージ理論の壁越え公式はオイラー変換の有理極限を
とる前そのものになっている。後のスライド参照[Y.Y 2022]

壁越えの公式の導出の概略($M = S^1$ case)



$$I_k = \frac{1}{2\sinh(-\varepsilon/2)^k k!}\int_0^{2\pi \mathrm{i}}\frac{d^k\phi}{(2\pi \mathrm{i})^k}\prod_{1\le\alpha\neq\beta\le k}\frac{2\sinh((\phi_\alpha-\phi_\beta)/2)}{2\sinh((\phi_\alpha-\phi_\beta-\varepsilon))/2}\prod_{\alpha=1}^{k}\frac{e^{\kappa\phi_\alpha}\prod_{j=1}^{N_a}2\sinh((\phi_\alpha-\tilde{m}_j)/2)}{\prod_{i=1}^{N}2\sinh((\phi_\alpha-m_i)/2)\prod_{j=N+1}^{N_f}2\sinh((-\phi_\alpha+m_i)/2)}$$

$z_\alpha = e^{\phi_\alpha}, q = e^{-\varepsilon}, w_i = e^{m_i},$と置く

$w_i q^l < 1, (l \geq 0, i = 1, \cdots, N)$ and $w_j q^{-l} > 1, (l \geq 0, i \in \{1, \cdots, N\}, j \in \{N+1, \cdots, N_f\})$とする。

$|z_\alpha| = 1$の内側の極の位置を決める式

$$\begin{cases} z_\alpha z_\beta^{-1} q = 1 \\ z_\alpha w_i^{-1} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_\alpha z_\beta^{-1} q = 1 \\ z_\alpha = 0 \end{cases}$$

JK-Res($\zeta > 0$)に対応する

wall-crossing factorの寄与

(N_f, N_a, κの値によっては留数はゼロかも)

$|z_\alpha| = 1$の外側の極の位置を決める式

$$\begin{cases} z_\alpha z_\beta^{-1} q = 1 \\ z_\alpha^{-1} w_j = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_\alpha z_\beta^{-1} q = 1 \\ z_\alpha = \infty \end{cases}$$

JK-Res($\zeta < 0$)に対応する

WC factorの寄与

壁越えの公式の導出の概略($M = S^1$ case)

単位円の内側と外側でそれぞれ留数を評価ものをそれぞれ$I^k_{(\mathrm{in})}, I^k_{(\mathrm{out})}$とすると

$$I_k^{(\mathrm{in})} = \sum_{n+l=k} f_{(\mathrm{in}),n}(w,q) Z_l^{(\zeta>0)} \qquad I_k^{(\mathrm{out})} = \sum_{n+l=k} f_{(\mathrm{out}),n}(w,q) Z_l^{(\zeta<0)}$$

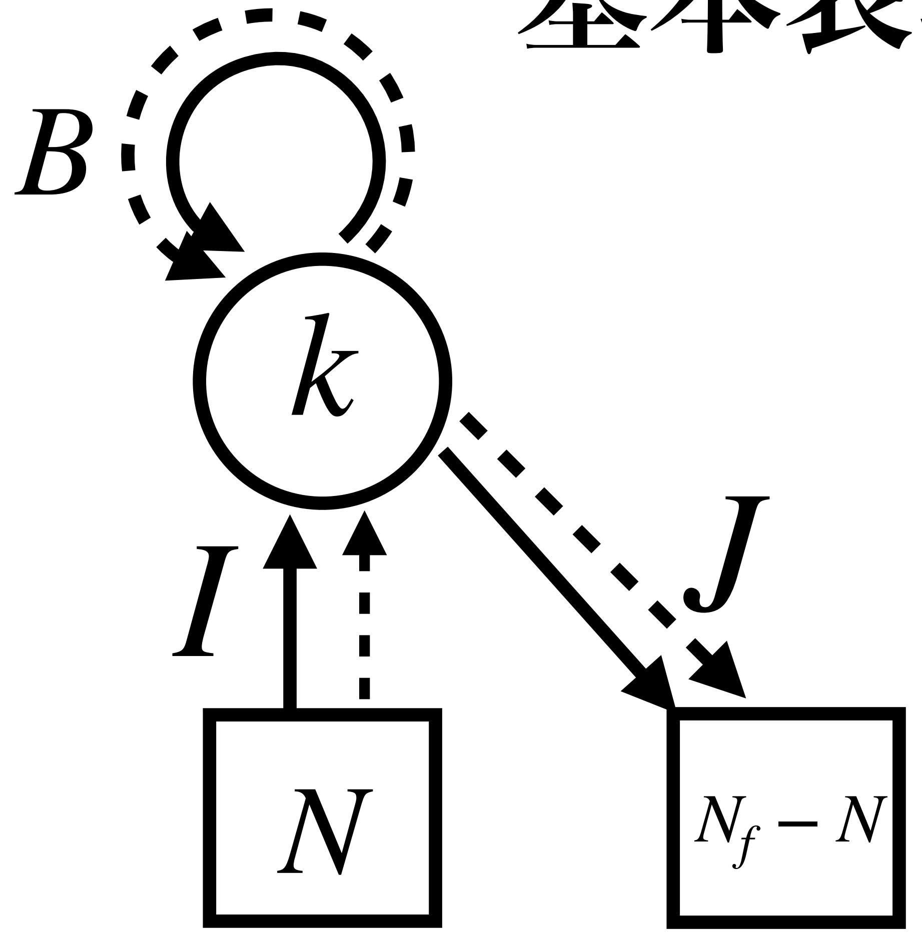
と言う形にまとまる。ここで$f_{(\mathrm{in}),n}$, $f_{(\mathrm{out}),n}$は具体形が求まることに注意。

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q^n f_{(\mathrm{in}),n}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z_k^{(\zeta>0)}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} Q^n f_{(\mathrm{out}),n}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z_k^{(\zeta<0)}\right)$$

$$\xRightarrow[\text{q二項定理}]{} \quad \mathrm{PE}\left[f_{(\mathrm{in}),1} Q\right]\left(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z_k^{(\zeta>0)}\right) = \mathrm{PE}\left[f_{(\mathrm{out}),1} Q\right]\left(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z_k^{(\zeta<0)}\right)$$

ここで$f_{(\mathrm{in}),1}(w,q,\cdots) = \oint_{z_1=0} \frac{dz_1}{2\pi \mathrm{i} z_1} I_{(k=1)}$, $f_{(\mathrm{out}),1}(w,q,\cdots) = \oint_{z_1=\infty} \frac{dz_1}{2\pi \mathrm{i} z_1} I_{(k=1)}$、壁越え公式が導出できた。

$S^1 \times \mathbb{R}^2_\varepsilon$上の $\mathcal{N} = 2^* \; U(N)$ ゲージ理論(N_f個の基本表現ハイパー’s) のk-vortex PFの壁越えとオイラー変換



$$\mathscr{M}^{(\zeta)}_{vauca} = \left\{ (B, I, J) \,\middle|\, \begin{array}{l} B \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^k), I \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^k), J \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^{N_f - N}) \\ \quad [B, B^\dagger] + II^\dagger - J^\dagger J = \zeta \mathbf{1}_k \end{array} \right\} / U(k)$$

超対称局所化公式[Hwang-Park 2015, Hwang-Yi-YY 2017]

$$Z_k^{(\zeta>0)} = \frac{1}{|W_G|} \sum_{\phi_*} \text{JK-Res}(\phi = \phi_*, \zeta) \prod_{\alpha \in rt(\mathfrak{g})} f(\langle \alpha, \phi \rangle) \frac{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_F}} \prod_{w \in R'_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', \tilde{m} \rangle)}{\prod_{w' \in R_{\mathfrak{g}_B}} \prod_{w \in R_{\mathfrak{g}}} f(\langle w, \phi \rangle + \langle w', m \rangle)}$$

$$= \prod_{\alpha, \beta = 1}^{N_c} \frac{\mathrm{sh}(m_\alpha - m_\beta + \theta - (l - k_\beta - 1)\varepsilon)}{\mathrm{sh}(m_\alpha - m_\beta - (l - k_\beta - 1)\varepsilon)} \prod_{\beta=1}^{N_c} \prod_{\alpha=1}^{N_f - N_c} \prod_{l=1}^{k_\beta} \frac{\mathrm{sh}(m_\alpha - m_\beta + \theta + l\varepsilon)}{\mathrm{sh}(m_\beta - m_\alpha + l\varepsilon)}$$

多重超幾何級数の変換の例

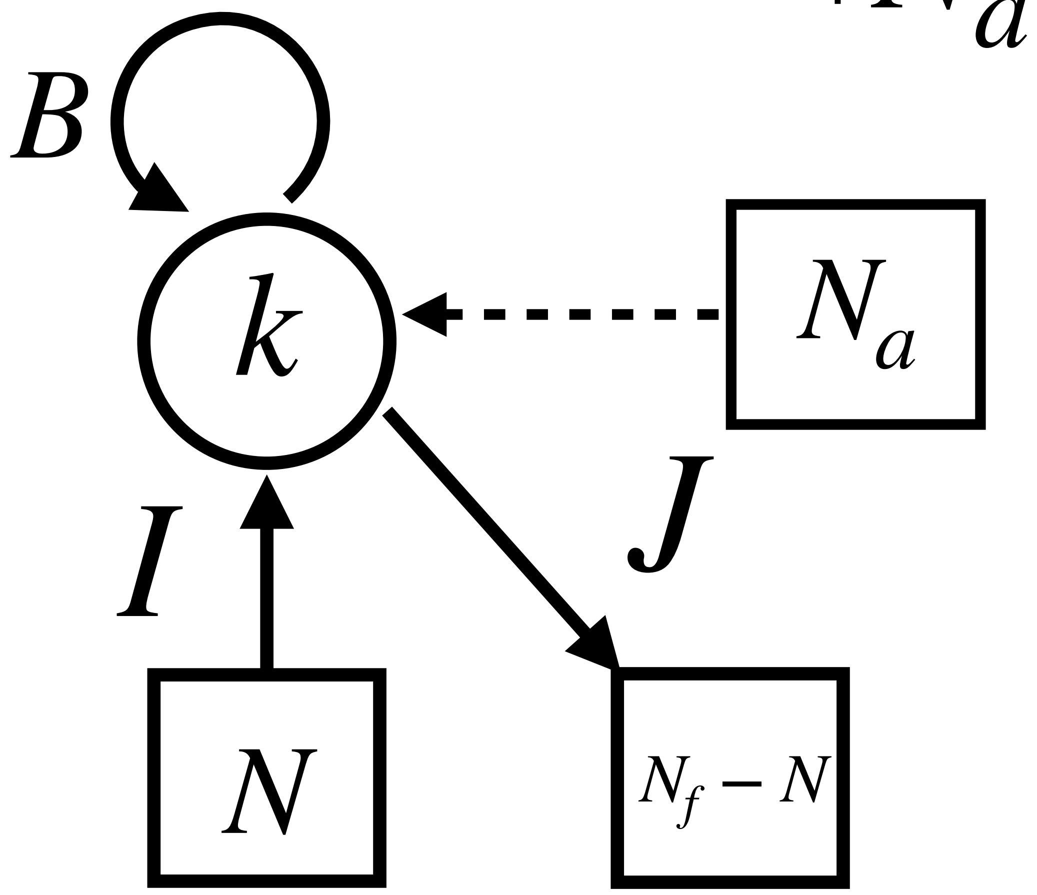
$$\underbrace{\sum_{\gamma=1}^{N}\sum_{k_\gamma=0}^{\infty} Q^{|k|}\prod_{\alpha,\beta=1}^{N}\frac{(q^{-k_\beta+1}x_\alpha/tx_\beta;q)_{k_\alpha}}{(q^{-k_\beta}x_\alpha/x_\beta;q)_{k_\alpha}}\prod_{\beta=1}^{N}\prod_{\alpha=1}^{N_f-N}\frac{(x_\beta y_\alpha;q)_{k_\beta}}{(qx_\beta y_\alpha t^{-1};q)_{k_\beta}}}_{\sum_k Q^k Z^{(\zeta>0)}}$$

$$=\underbrace{\prod_{s=1}^{2N-N_f}\frac{(q^s p t^{1-s};q)_\infty}{(q^s p t^{-s};q)_\infty}}_{\text{wall-crossing factor}}\underbrace{\sum_{\gamma=1}^{N_f-N}\sum_{k_\gamma=0}^{\infty}\left(Q\frac{q^{2N-N_f}}{t^{2N-N_f}}\right)^{|k|}\prod_{\alpha,\beta=1}^{N_f-N}\frac{(q^{-k_\beta+1}y_\alpha/ty_\beta;q)_{k_\alpha}}{(q^{-k_\beta}y_\alpha/y_\beta;q)_{k_\alpha}}\prod_{\beta=1}^{N_f-N}\prod_{\alpha=1}^{N}\frac{(y_\beta x_\alpha;q)_{k_\beta}}{(qy_\beta x_\alpha t^{-1};q)_{k_\beta}}}_{\sum_k Q^k Z^{(\zeta<0)}}$$

この等式は適切な変数の同一視のもとでvortex PFの母関数の壁越え公式[Hwang -Yi -YY 2021?]に一致している

Seiberg-like duality and wall-crossing

$\mathbb{R}^2_\varepsilon$(M=pt)上の $\mathcal{N}=(2,2)$ $U(N)$ ゲージ理論+ N_f 個の基本表現 +N_a 個の反基本表現のカイラル's のk-vortex PF



$$\mathcal{M}^{(\zeta)}_{vauca}=\mathcal{M}^{(\zeta)}_{k,N,N_f}$$

$$:=\left\{(B,I,J)\,\middle|\,\begin{array}{l}B\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^k),I\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^k),J\in\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^k,\mathbb{C}^{N_f-N})\\ [B,B^\dagger]+II^\dagger-J^\dagger J=\zeta\mathbf{1}_k\end{array}\right\}/U(k)$$

$\mathcal{M}^{(\zeta>0)}_{k,N,N_f}\simeq\mathcal{M}^{(\zeta<0)}_{k,N_f-N,N_f}$より$U(N)$ゲージ理論のvortex PF($\zeta<0$)と

$U(N_f-N)$ゲージ理論のvortex PF($\zeta>0$)が(適当なパラメータの同一視で)等しいことが従う。

つまり壁越え公式は$U(N)$ゲージ理論と$U(N_f-N)$ゲージ理論のvortex PF($\zeta>0$)の関係

を与えている。この二つのゲージ理論は2d Seiberg dualな理論の一例。

ここまでM上の場の量子論であるvortex partition function $Z_k^{(\zeta)}(M)$のwall-crossingを調べてきた。

$$Z(M \times \mathbb{R}^2_\varepsilon) = \sum Z_{1\text{-}loop}(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z_k^{(\zeta)}(M))$$

vortex PFのwall-crossingと$M \times \mathbb{R}^2_\varepsilon$上の理論の関係はなんだろうか？$M = \mathrm{pt}$を考える。

Seiberg dualな2つ理論の$U(N)$, $U(N_f - N)$ゲージ理論+N_f個のカイラル多重項の分配函数を計算すると

$$Z_{U(N)}(\mathbb{R}^2_\varepsilon) = \sum Z_{1\text{-}loop}(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z_{N,k}^{(\zeta>0)}(\mathrm{pt})) = \int_{\mathscr{W}}^{T} \Gamma_{\mathscr{W}} \cup I_{\mathscr{W}}$$

$$Z_{U(N_f-N)}(\mathbb{R}^2_\varepsilon) = \sum Z_{1\text{-}loop}(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z_{N_f-N,k}^{(\zeta>0)}(\mathrm{pt})) = \int_{\tilde{\mathscr{W}}}^{T} \Gamma_{\tilde{\mathscr{W}}} \cup I_{\tilde{\mathscr{W}}}$$

$\mathscr{W}$ は$\mathbb{R}^2_\varepsilon$上の2d $\mathcal{N} = (2{,}2)$ $U(N)$ゲージ理論+N_f基本表現+N_a反基本表現 の理論の真空で

$\mathscr{W} = S^{\oplus N_a} \to \mathrm{Gr}(N, N_f)$になっている

一方、$\tilde{\mathscr{W}}$ は$\mathbb{R}^2_\varepsilon$上のSeiberg双対な$U(N_f - N)$ゲージ理論の真空で

$\tilde{\mathscr{W}} = S^{\vee \oplus N_a} \to \mathrm{Gr}(N_f - N, N_f)$になっている。

つまり、vortex PFの壁越え公式あるいはSeiberg dualityは$\mathscr{W}$と$\tilde{\mathscr{W}}$の同変I函数の間の関係を与えている。

(A型のpartial flagとそのquiver mutationに一般化された形で証明されている[Zhang,2021])

また$\mathcal{N} = (2{,}2)^*$ U(N)の場合は$\mathscr{W} = T^*\mathrm{Gr}(N, N_f)$, $\tilde{\mathscr{W}} = T^*\mathrm{Gr}(N_f - N, N_f)$なので

この理論の壁越えはグラスマンの余接のI函数の関係を与えると思われる。

一般化すると$T_\rho[SU(N)]$理論の壁越えはA型のpartial flagの余接のI函数に関係していると予想される

三角型に対するコメント

$S^1 \times \mathbb{R}^2_\varepsilon$上の3d $\mathcal{N}=2$ $U(N)_{\kappa,\kappa'}$ Chern-Simons理論+N_f 基本表現 の理論の真空は

$\mathscr{W} = \mathrm{Gr}(N, N_f)$になっている。うまくCSレベル$\kappa, \kappa'$を選ぶと

$$Z_{U(N)}(S^1 \times \mathbb{R}^2_\varepsilon) = \sum Z_{1\text{-}loop}\left(\sum_{k=0}^{\infty} Q^k Z^{(\zeta>0)}_{N,k}(S^1)\right) = \int_{\mathscr{W}}^{T} \Gamma^q_{\mathscr{W}} \cup I^K_{\mathscr{W}}$$

となる[Y.Y-Sugiyama 2014, Ueda-Yoshida 2019]。ここで$I^K_{\mathscr{W}}$は$\mathscr{W}$のK理論的I函数。

Γ^q_Xはガンマクラスのq変形と思えるもの。この理論のvortex PFの壁越え公式は

は、$\mathrm{Gr}(N, N_f)$と$\mathrm{Gr}(N_f - N, N_f)$のレベル構造付きK理論的I函数の関係[Dong-Wen 2020]

と関係している。[Y.Y in progress]

Summary & Future directions

- vortex PFのFIパラメータに関する壁越え公式を導出した。有理型の場合は大川氏との共同研究で幾何学的な証明を与えた。
- また壁越え公式がオイラー変換に等しいことを見出した。
- A_N型への拡張と壁越え現象、リニアクイーバーChern-Simons-matter理論のSeiberg like双対性との関係、またレベル付きK理論的I函数との関係[Y.Y in progress]
- K理論的(5d)インスタントン分配函数の壁越え公式[Y.Y in progress]

To Be Continued...