南大阪代数セミナー

2022/11/01

《変形 Macdonald-Ruijsenaars 系の可積分性》

§1: Macdonald-Ruijsenaars 系と Macdonald 多項式

$x=(x_1,\dots,x_n)$　　$(\mathbb{C}^*)^n$ の標準座標系

$q,t\in\mathbb{C}^*$　　$|q|<1$

Macdonald-Ruijsenaars 作用素

$$D_x=\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}\cdot T_{q,x_i}\curvearrowright\mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}_n}$$ 対称多項式環

$T_{q,x_i}f(x_1,\dots x_i,\dots x_n)=f(x_1,\dots,qx_i,\dots,x_n)$ $(i=1,\dots,n)$

x_i についての q-shift の作用素

定理 q, t: generic とすると

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$

$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$

$\forall \lambda \in \mathcal{P}_n$ = 分割で成分数が n 以下のものの全体

$\exists!$

$P_\lambda(x) = P_\lambda(x; q, t) \in \mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}_n}$

$$\begin{cases} (1) & D_x P_\lambda(x) = d_\lambda P_\lambda(x) \\ (2) & P_\lambda(x) = m_\lambda(x) + (\text{lower order terms}) \end{cases}$$

$$d_\lambda = \sum_{i=1}^{n} t^{n-i} q^{\lambda_i}$$

$$m_\lambda(x) = \sum_{\mu \in \mathfrak{S}_n \lambda} x^\mu$$

monomial symmetric function

$$\mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \mathbb{C} P_\lambda(x)$$

Macdonald多項式に対するCauchyの公式

・ $x=(x_1,\dots,x_m)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$

$$P_\lambda(x;q,t)\quad P_\lambda(y;q,t)$$

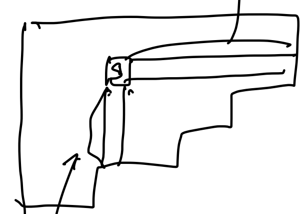
$$\Phi_{m,n}(x;y)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty}=\sum_{\ell(\lambda)\le\min\{m,n\}}\underline{b_\lambda}\,P_\lambda(x)P_\lambda(y)$$

$$(z;q)_\infty=\prod_{k=0}^{\infty}(1-q^kz)\quad(z\in\mathbb{C})$$

$$b_\lambda=b_\lambda(q,t)=\prod_{s\in\lambda}\frac{1-t^{\ell_\lambda(s)+1}q^{a_\lambda(s)}}{1-t^{\ell_\lambda(s)}q^{a_\lambda(s)+1}}$$

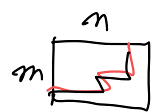
arm length

$a_\lambda(s)$

$\lambda=$ 

$\ell_\lambda(s)$ leg length

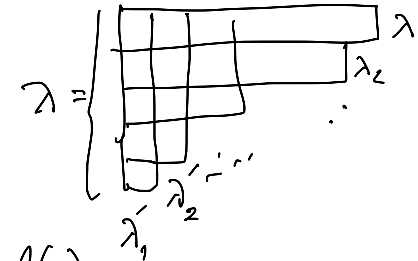
・ $$\check{\Phi}_{m,n}(x;y)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1+x_iy_j)=\sum P_\lambda(x;q,t)P_{\lambda'}(y;t,q)$$



$\lambda\subseteq(n^m)$ $m\times n$の長方形

λ': λの転置

◎ 無限変数の Macdonald 多項式 (函数)



$$P_\lambda(x_1, \ldots x_m)\Big|_{x_{n+1}=\cdots=x_m=0} = \begin{cases} P_\lambda(x_1 \ldots x_n) & \ell(\lambda) \leq n \\ 0 & \ell(\lambda) > n \end{cases}$$

$m > n$

stability

$x = (x_1, x_2, \ldots)$

- $$\Lambda^x_\infty = \mathbb{C}[p_1(x), p_2(x), \ldots] \qquad p_r(x) = \sum_{i \geq 1} x_i^r$$

$$= \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C} P_\lambda(x)$$

分割の全体

$$\underline{\underline{\Lambda^x_\infty}} \xrightarrow{\pi_n} \Lambda_n^{(x_1, \ldots x_n)} = \mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

$\pi_n(x_i) = 0 \quad (i > n)$

$$\begin{cases} \Phi(x;y) = \prod_{i\geq 1} \prod_{j\geq 1} \dfrac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty} = \sum_{\lambda\in P} b_\lambda P_\lambda(x;q,t) P_\lambda(y;q,t) \\ \check{\Phi}(x;y) = \prod_{i\geq 1} \prod_{j\geq 1} (1+x_iy_j) = \sum_{\lambda\in P} P_{\lambda'}(x;t,q) P_\lambda(y;q,t) \end{cases}$$

$$\omega^x_{q,t} : \Lambda^x_\infty \longrightarrow \Lambda^x_\infty \qquad \omega^x_{q,t}(p_r(x)) = (-1)^{r-1} \frac{1-q^r}{1-t^r} p_r(x)$$

$$b_\lambda \omega^x_{q,t}(P_\lambda(x;q,t)) = P_{\lambda'}(x;t,q)$$

$$\Phi(x;y) = \prod_{i,j\geq 1} \prod_{k\geq 0} \frac{1-q^k t x_i y_j}{1-q^k x_i y_j} = \prod_{i,j\geq 1} \prod_{k\geq 0} \exp\Big(-\sum_{r\geq 1} \frac{1}{r}(q^k t x_i y_j)^r + \sum_{r\geq 1} \frac{1}{r}(q^k x_i y_j)^r\Big)$$

$$= \prod_{i,j\geq 1} \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{1}{r}\,\frac{1-t^r}{1-q^r}\, x_i^r y_j^r\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{1}{r}\,\boxed{\frac{1-t^r}{1-q^r}}\,\boxed{p_r(x)}\,p_r(y)\right)$$

$$\Phi^{\vee}(x;y) = \prod_{i,j\geq 1}(1+x_i y_j) = \prod_{i,j\geq 1} \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{(-1)^{r-1}}{r}\, x_i^r y_j^r\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{\boxed{(-1)^{r-1}}}{r}\,\boxed{p_r(x)}\,p_r(y)\right)$$

$\omega^x_{q.t}$

$$\omega^x_{q.t}\big(p_r(x)\big) = (-1)^{r-1}\,\frac{1-q^r}{1-t^r}\,p_r(x)$$

$$\omega^{x}_{q,t}\left(\Phi(x;y)\right) = \Phi^{\vee}(x;y)$$

$$\sum_{\lambda} b_\lambda\, \omega^{x}_{q,t}\left(P_\lambda(x;q,t)\right) \underline{P_\lambda(y;q,t)} = \sum_{\lambda} P_{\lambda'}(x;t,q)\, \underline{P_\lambda(y;q,t)}$$

$$\omega^{x}_{q,t}\Big(\underbrace{b_\lambda P_\lambda(x;q,t)}_{\substack{\parallel \\ Q_\lambda(x;q,t)}} \Big) = P_{\lambda'}(x;t,q)$$

$$\Phi(x;y) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}} Q_\lambda(x;q,t)\, P_\lambda(y;q,t)$$

§2: 変形 Macdonald-Ruijsenaars 系と super Macdonald 多項式

∘ Sergeev - Veselov 2009 CMP

(Hallnäs-Langmann - Noumi - Rosengren 2022 Selecta Math)

この記号にあわせる

$x=(x_1,\dots,x_n)$ $\quad y=(y_1,\dots,y_m)$

変形 MR 作用素

$$D_{n,m}(x,y)=D_{n,m}(x,y;q,t)$$

$$=(1-t)\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\prod_{l=1}^{m}\frac{1-x_i/qy_l}{1-x_i/y_l}T_{q,x_i}$$

$$+(1-q^{-1})\sum_{k=1}^{m}\prod_{l\neq k}\frac{1-y_k/qy_l}{1-y_k/y_l}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-ty_k/x_j}{1-y_k/x_j}T^{-1}_{t,y_k}$$

$$\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}$$

(q,t)

$\downarrow$

(t^{-1},q^{-1})

$(x,y,q,t)\longleftrightarrow(y,x,t^{-1},q^{-1})$

以下 q, t は 条件 「$t^r q^s \neq 1$ $(r, s \in \mathbb{N},\ (r,s) \neq (0,0))$」を満たすものと仮定する。

変形MR系　n 変数 x がパラメータ (q,t) をもつ MR系と m 変数 y が 〃 (t^{-1}, q^{-1}) をもつ MR系との結合系と思う。

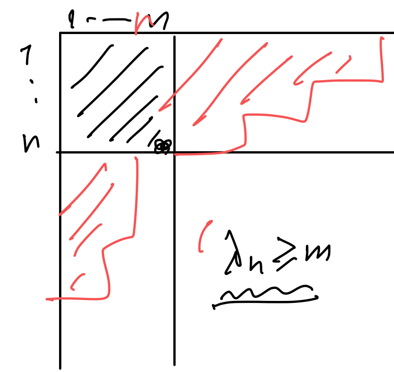
◎ 擬不変式環 $\Lambda_{n,m;q,t}$ と super Macdonald 多項式
ring of quasi-invariants

$$\Lambda_{n,m;q,t} = \left\{ f(x,y) \in \mathbb{C}[\underset{n}{x}, \underset{m}{y}]^{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m} \;\middle|\; \left(T_{q,x_i} f(x,y) - T_{t,y_k}^{-1} f(x,y) \right) \Big|_{x_i = y_k} = 0 \right\}_{1 \le i \le n,\ 1 \le k \le m}$$

$\Lambda_n = \mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}_n}$

$$f(x_1, \dots, q x_i, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k, \dots, y_m) \qquad x_i = y_k = z$$

$$= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y_1, \dots, t^{-1} y_k, \dots, y_m)$$



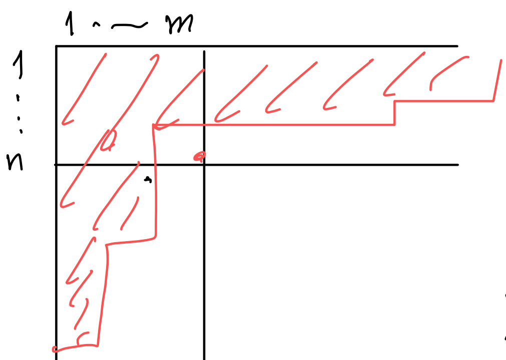
$$D_{n,m}(x;y;q,t) \curvearrowright \Lambda_{n,m;q,t}$$

$$\| $$

$$\bigoplus_{\lambda \in H_{n,m}} \mathbb{C}\, SP_\lambda(x,y;q,t)$$

super Macdonald多項式

$D_{n,m}(x,y;q,t)$ の固有関数



fat hook $H_{n,m} = \{ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in P \mid \lambda_{n+1} \leq m \}$

Super Macdonald 多項式の定義

$z = (z_1, z_2, \dots\dots)$

$\Lambda^z_\infty \xrightarrow[\phi_{n,m:q,t}]{} \Lambda_{n,m:q,t} \subset \mathbb{C}[x,y]^{S_n \times S_m}$

quasi-invariants

$$\phi^{x,y}_{n,m:q,t}(p_r(z)) = p_r(x) - t^r \frac{1-q^r}{1-t^r} p_r(y)$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ $\quad$ $y = (y_1 \dots y_m)$

$$\phi^{x,y}_{n,m:q,t}(P_\lambda(z;q,t)) = SP_\lambda(x,y;q,t)$$

$$\Lambda_{n,m:q,t} = \bigoplus_{\lambda \in H_{n,m}} \mathbb{C}\, SP_\lambda(x,y;q,t)$$

次のことがわかる

$P_{\lambda/\nu}(z':q,t)$ を有限変数にする?

$$SP_\lambda(x,y:q,t) = \sum_{\nu\subseteq\lambda} (-t)^{|\nu|} P_{\lambda/\nu}(x:q,t)\, Q_{\nu'}(y:t,q)$$

∞変数のレベルで $z=(z',z'')$ $z'=(z'_1,z'_2,\ldots)$ $z''=(z''_1,z''_2,\ldots)$

$$P_\lambda(z',z'';q,t) = \sum_{\nu\subseteq\lambda} P_{\lambda/\nu}(z':q,t)\, P_\nu(z'';q,t)$$

$$P_\lambda(z',z'':q,t) = \sum_{\mu,\nu} b^\lambda_{\mu,\nu} P_\mu(z':q,t)\, P_\nu(z'':q,t)$$

$$P_{\lambda/\nu}(z':q,t) = \sum_{\mu} b^\lambda_{\mu\nu} P_\mu(z':q,t)$$

母函数で書くと $x=(x_1,\dots,x_n)$ $y=(y_1,\dots,y_m)$ $z=(z_1,z_2,\dots\dots)$

∞変数

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j\geq 1}\frac{(tx_iz_j;q)_\infty}{(x_iz_j;q)_\infty}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j\geq 1}(1-ty_iz_j)$$

$$=\sum_{\lambda\in H_{n,m}} SP_\lambda(x,y;q,t)\,\underbrace{Q_\lambda(z;q,t)}_{\substack{\shortparallel \\ b_\lambda P_\lambda(z;q,t)}}$$

§3：高階の作用素の可換族と核函数：MR系の場合

MR作用素

$$D_x = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j\neq i} \frac{t x_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i} \curvearrowright \mathbb{C}[x]^{\mathfrak{S}_n} = \bigoplus_{\lambda\in\mathcal{P}_n} \mathbb{C}P_\lambda(x)$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$

高階の作用素の可換族　　2つ系列が知られている。

(1) 高階のMR作用素　$D_x^{(r)}$　$(r=0,1,\dots,n)$　HLNR 2022 Select

(2) NS作用素　$H_x^{(l)}$　$(l=0,1,2,\dots)$　2022 CMP

Noumi-Sano　　Noumi-Sano 2021 LMP

$$\mathbb{C}[\underbrace{D_x^{(1)}}_{D_x}, D_x^{(2)},\dots, D_x^{(n)}] = \mathbb{C}[H_x^{(1)}, H_x^{(2)},\dots]$$

$$\mathbb{C}[\xi_1,\xi_2,\dots\xi_n]^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[e_1(\xi),\dots,e_n(\xi)]$$

(1) 高階のMR作用素　Ruijsenaars 1987　Macdonaldの本

$$D_x^{(r)} = \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ |I|=r}} t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i\in I} T_{q,x_i} \quad (r=0,1,\dots,n)$$

$D_x^{(0)}=1$, $D_x^{(1)}=D_x, \dots$

$\dots, D_x^{(n)} = t^{\binom{n}{2}} \underline{T_{q,x_1}\cdots T_{q,x_n}}$

- $[D_x^{(r)}, D_x^{(s)}] = 0$

- $D_x^{(r)} P_\lambda(x) = e_r(t^\delta q^\lambda) P_\lambda(x) \quad (\lambda\in\mathcal{P}_n,\ (r=0,1,\dots,n))$

$e_r(\xi)$　$\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ の r 次の基本対称式

$\underline{t^\delta q^\lambda} = (t^{n-1}q^{\lambda_1}, t^{n-2}q^{\lambda_2}, \dots, tq^{\lambda_{n-1}}, q^{\lambda_n})$　$\underline{\delta=(n-1, n-2, \dots, 0)}$

$$D_x(u) = \sum_{r=0}^{n} (-u)^r D_x^{(r)}$$

$$\sum_{r=0}^{n} (-u)^r e_r(\underset{\xi}{t^\delta q^\lambda}) = \prod_{i=1}^{n} (\underset{1-u\xi_i}{1-ut^{n-i}q^{\lambda_i}}).$$

$$D_x(u)\,P_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{n}\left(1-u\,t^{n-i}q^{\lambda_i}\right)\cdot P_\lambda(x).$$

$$T_{q,x_1}^{\mu_1}\cdots T_{q,x_n}^{\mu_n}$$
$$\|$$

(2) NS作用素

$$\underline{\underline{H_x^{(\ell)}}} = \sum_{\substack{\mu\in\mathbb{N}^n \\ |\mu|=\mu_1+\cdots+\mu_n=\ell}} \frac{\Delta(q^{\mu}x)}{\Delta(x)} \prod_{i,j=1}^{n} \frac{(t x_i/x_j;q)_{\mu_i}}{(q x_i/x_j;q)_{\mu_i}}\, T_{q,x}^{\mu} \quad (\ell=0,1,2,\ldots)$$

$$\mathbb{N}=\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$\Delta(x)=\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j) \qquad \frac{\Delta(q^{\mu}x)}{\Delta(x)}=\prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{q^{\mu_i}x_i-q^{\mu_j}x_j}{x_i-x_j}$$

$$[H_x^{(k)}, H_x^{(\ell)}]=0, \quad [H_x^{(\ell)}, D_x^{(r)}]=0 \qquad \exists\, e_r$$

$$H_x^{(\ell)}\,P_\lambda(x) = \underset{\sim\sim}{g_\ell}(t^{\delta}q^{\lambda})\,P_\lambda(x) \qquad (\ell=0,1,\ldots)$$

$$g_\ell(\xi) = \sum_{\mu_1+\cdots+\mu_n=\ell} \frac{(t;q)_{\mu_1}\cdots(t;q)_{\mu_n}}{(q;q)_{\mu_1}\cdots(q;q)_{\mu_n}} \xi_1^{\mu_1}\cdots\xi_n^{\mu_n} = Q_{(\ell)}(\xi;q,t)$$

$$= b_{(\ell)} P_{(\ell)}(\xi;q,t)$$

$\xi = (\xi_1, \dots \xi_n)$

$(\ell) = \underbrace{\boxed{\;|\;|\;|\;|\;}}_{\ell}$

$(a;q)_k = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{k-1}a) \quad (k=0,1,2,\dots)$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \underbrace{g_\ell(\xi)}_{\substack{\shortparallel \\ Q_{(\ell)}(\xi)}} \underset{\substack{\shortparallel \\ P_{(\ell)}(u)}}{u^\ell} = \prod_{i=1}^{n} \frac{(t\xi_i u;q)_\infty}{(\xi_i u;q)_\infty}$$

$$\sum_{r+s=k} (-1)^r e_r h_s = 0 \quad (k=1,2,\dots)$$

Wronski 関係式

$$H_x(u) = \sum_{\ell=0}^{\infty} u^\ell H_x^{(\ell)}$$

$$H_x(u) P_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(t^{n-i+1} q^{\lambda_i};q)_\infty}{(t^{n-i} q^{\lambda_i};q)_\infty} \cdot P_\lambda(x)$$

(3) Wronski 関係式

$$\sum_{r+l=k} (-1)^r (1-t^r q^l) D_x^{(r)} H_x^{(l)} = 0 \qquad (k=1,2,3,\dots)$$

$$\Rightarrow \quad H_x^{(l)} \in \mathbb{C}[D_x^{(1)}, \dots D_x^{(n)}] \quad //$$

---

④ 核函数関係式

$x=(x_1,\dots x_m)$, $y=(y_1,\dots y_n)$

$$\prod_{i,j=1}^{m,n} \frac{1}{1-x_iy_j} = \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y)$$

$$\Phi_{m,n}(x;y) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} \frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty} = \sum_{l(\lambda)\le\min\{m,n\}} \boxed{b_\lambda} P_\lambda(x)P_\lambda(y)$$

$m = n$

$$D_x(u)\,\bar{\Phi}_{n,n}(x,y) = \sum_{\ell(\lambda)\le n} b_\lambda P_\lambda(x) P_\lambda(y) \prod_{i=1}^{n}\left(1-ut^{n-i}q^{\lambda_i}\right)$$

$$= D_y(u)\,\bar{\Phi}_{n,n}(x,y)$$

$D_x(u)\,\bar{\Phi}_{n,n}(x,y) = D_y(u)\,\bar{\Phi}_{n,n}(x,y)$ が…

$$b_\lambda P_\lambda(y)$$

$$\|$$

$$\bar{\Phi}_{n,n}(x,y) = \sum_{\lambda\in\mathcal{P}_n} P_\lambda(x)\,\boxed{F_\lambda(y)}$$

$$\Downarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-ut^{n-i}q^{\lambda_i}\right)$$

$(t x_i y_k ; q)_\infty$

$(x_i y_k ; q)_\infty$

$$\left[\sum_{|I|\subseteq\{1..n\}} (-u)^{|I|}\, t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i\in I}\prod_{l=1}^{n} \frac{1-x_i y_l}{1-tx_i y_l}\right] \Phi_{n,n}(x,y)$$

$$\underline{D_x(u)\Phi = D_y(u)\Phi}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{|I|\subseteq\{1..n\}} (-u)^{|I|}\, t^{\binom{|I|}{2}} \prod_{\substack{i\in I\\ j\notin I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i\in I}\prod_{l=1}^{n} \frac{1-x_i y_l}{1-tx_i y_l}$$

$$= \sum_{|K|\subseteq\{1..n\}} (-u)^{|K|}\, t^{\binom{|K|}{2}} \prod_{\substack{k\in K\\ l\notin K}} \frac{ty_k - y_l}{y_k - y_l} \prod_{k\in K}\prod_{j=1}^{n} \frac{1-x_j y_k}{1-tx_j y_k}$$

Source identity → Kajihara(-Noumi) 変換公式

一般の $x=(x_1,\dots,x_m)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ のとき

$$\Phi_{m,n}(x;y) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty}$$

$$\frac{(u;t)_\infty}{(t^{m-n}u;t)_\infty}$$

に対して

$m \geq n$

- $D_x(u)\,\underline{\Phi_{m,n}(x,y)} = (u;t)_{m-n}\, D_y(t^{m-n}u)\,\Phi_{m,n}(x,y)$

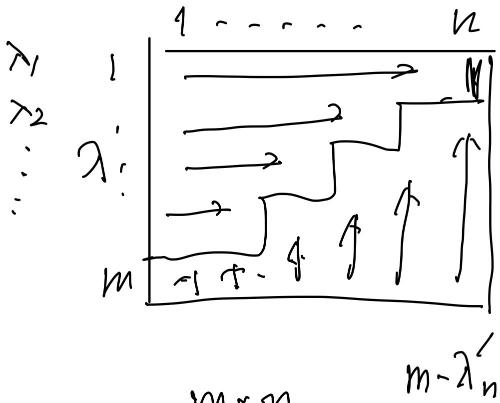
$$H_x(u)\,\Phi_{m,n}(x,y) = \frac{(t^{m-n}u;q)_\infty}{(u;q)_\infty}\, H_y(\underline{t^{m-n}u})\,\Phi_{m,n}(x,y)$$

$$\Phi^{\vee}_{m,n}(x,y) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1+\underline{x_i}y_j)$$

$$\Psi_{m,n}(x,y) = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x_i-y_j) = \sum_{\lambda\subseteq(n^m)}(-1)^{|\lambda^c|}P_\lambda(x;q,t)\,P_{\lambda^c}(y;\underline{t,q})$$

n

m 



$m \times n$

complementary

$$\lambda^c = (m-\lambda'_n,\ m-\lambda'_{n-1}, \dots\ m-\lambda'_1)$$

$$H_x(u)\,\Psi_{m,n}(x,y) = \frac{(t^m q^n u;q)_\infty}{(u;q)_\infty}\,\hat{D}_y(u)\,\Psi_{m,n}(x,y)$$

$$\hat{D}_y(u) = D_y(u;t,q) \leftarrow D_y(u) = D_y(u;q,t)$$

q,t を反転

§4: 高階の作用素の可換族と核函数: 変形MR系の場合

$$x=(x_1,\dots,x_n) \qquad y=(y_1,\dots,y_m)$$

$$D_{n,m}(x,y)=D_{n,m}(x,y;q,t)$$

$$=(1-t)\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{1-tx_i/x_j}{1-x_i/x_j}\prod_{l=1}^{m}\frac{1-x_i/qy_l}{1-x_i/y_l}T_{q,x_i} \qquad (q,t)$$

$$\text{☆} \qquad +(1-q^{-1})\sum_{k=1}^{m}\prod_{l\neq k}\frac{1-y_k/qy_l}{1-y_k/y_l}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-ty_k/x_j}{1-y_k/x_j}T_{t,y_k}^{-1} \qquad (t^{-1},q^{-1})$$

② 高階の多変数 MR 作用素 NS

$x=(x_1,\dots,x_n)$ $y=(y_1,\dots,y_m)$

$$D^{(r)}_{n,m}(x,y;q,t)=\sum_{\substack{\cdot\, I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \cdot\, \mu\in\mathbb{N}^m\\ |I|+|\mu|=r}}(-1)^{|\mu|}(q^m t^{-n})^{|\mu|}t^{-\binom{|I|}{2}}A_{I,\mu}(x,y;q,t)T^{\varepsilon_I}_{q,x}T^{\mu}_{t,y}$$

(Feigin-Silantyev 2014 Adv. Math)

$\varepsilon_I=\sum_{i\in I}\varepsilon_i$

$(x,y,\underline{q,t})$

$(y,x,\underline{t^{-1},q^{-1}})$

$T^{\varepsilon_I}_{q,x}=\prod_{i\in I}T_{q,x_i}$

MR NS

$$A_{I,\mu}(x,y;q,t)=\prod_{\substack{1\le i,j\le n\\ i\in I,\, j\notin I}}\frac{tx_i-x_j}{t(x_i-x_j)}\cdot\frac{\Delta(t^{\mu}y)}{\Delta(y)}\prod_{i,j=1}^{m}\frac{(y_i/qy_j;t^{-1})_{\mu_i}}{(y_i/ty_j;t^{-1})_{\mu_i}}$$

$$\times \underbrace{\prod_{i=1}^{m} \left(\prod_{j\in I} \frac{1-q y_i/x_j}{1-t^{\mu_i} y_i/x_j} \prod_{j\notin I} \frac{1-t y_i/x_j}{1-t^{1-\mu_i} y_i/x_j} \right)}_{\text{結合項}}$$

$$D_{n,m}(x,y;u;q,t) = \sum_{r=0}^{\infty} D^{(r)}_{n,m}(x,y;q,t)(-u)^r$$

$$D_{n,0}(x,y;u;\underline{q,t}) = D_x(t^{1-n}u;\underline{q,t}) \quad \text{MR}$$

$$D_{0,m}(x,y;u;q,t) = H_y(q^m u; t^{-1}, q^{-1}) \quad \text{NS}$$

変形

NS作用素

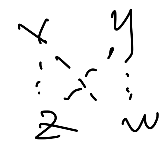
$$H_{n,m}(\underline{x},\underline{y};u;\underline{q,t}) = D_{m,n}(\underline{y},\underline{x};\underline{tu};\underline{t^{-1},q^{-1}})$$

$m=0 \rightarrow$ NS

さらに少し補正　　以下 $|q|<1,\ |t^{-1}|<1$

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{n,m}(x,y:u) = \dfrac{(q^m t^{-n} u : t^{-1})_\infty}{(u : t^{-1})_\infty} D_{n,m}(x,y:u) \\[2ex] \mathcal{H}_{n,m}(x,y:u) = \dfrac{(t^{1-n} q^m u : q)_\infty}{(\underline{\underline{t}}u : q)_\infty} H_{n,m}(x,y:u) \end{cases}$$

次元に関して stableとなるような補正



|| Cauchy × $\underline{\text{dual}}$

定理 $|q|<1,\ |t|>1$ とする

$x=(x_1,\dots x_n),\ y=(y_1,\dots y_m)$　　$z=(z_1,\dots z_N),\ w=(w_1,\dots w_M)$

$$\Phi_{n,m:N,M}(x,y;z,w) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{N}\frac{(x_i z_j : q)_\infty}{(t^{-1}x_i z_j : q)_\infty}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{M}\frac{(y_i w_j : t^{-1})_\infty}{(q y_i w_j : t^{-1})_\infty}$$
$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{M}(1-x_i w_j)\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{N}(1-y_i z_j)$$

とおくと

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{n,m}(x,y:u)\,\overline{\Phi}_{n,m:N,M}(x,y:z,w) = \mathcal{H}_{N,M}(z,w:u)\,\overline{\Phi}_{n,m:N,M}(x,y:z,w) \\ \mathcal{D}_{n,m}(x,y:u)\,\overline{\Phi}_{n,m:N,M}(x,y:z,w) = \mathcal{D}_{N,M}(z,w:u)\,\overline{\Phi}_{n,m:N,M}(x,y:z,w) \end{cases}$$

定理

$$\begin{cases} [\mathcal{H}^{(r)}_{n,m}, \mathcal{H}^{(s)}_{n,m}] = [\mathcal{D}^{(r)}_{n,m}, \mathcal{D}^{(s)}_{n,m}] = [\mathcal{H}^{(r)}_{n,m}, \mathcal{D}^{(s)}_{n,m}] = 0 \\ \mathbb{C}[\mathcal{D}^{(1)}_{n,m}, \mathcal{D}^{(2)}_{n,m}, \dots] = \mathbb{C}[\mathcal{H}^{(1)}_{n,m}, \mathcal{H}^{(2)}_{n,m}, \dots] \end{cases}$$

最初の $n+m$ 個は $\mathbb{C}$ 上代数的独立

Wronski関係式 $\displaystyle\sum_{r+s=k} (-1)^r (1-t^r q^s)\,\mathcal{D}^{(r)}_{n,m}\,\mathcal{H}^{(s)}_{n,m} = 0$

$(k \geq 1, 2, \dots)$

$$\begin{cases} \mathcal{H}^{(r)}_{n,m}(x,y)\, SP_\lambda(x,y;q,t) = \boxed{}\; SP_\lambda(x,y;q,t) \\ \mathcal{D}^{(r)}_{n,m}(x,y)\, SP_\lambda(x,y;q,t) = \boxed{}\; SP_\lambda(x,y;q,t) \end{cases}$$

$$(\lambda \in H_{n,m})$$