Rouquier の準遺伝被覆の理論の紹介

有木　進
（大阪大学大学院情報科学研究科）

講義ではこのレジュメの内容を理解してもらうように説明をする予定である．

1. 基本事項の復習

1.1. **正則局所環.** この講義では基礎環が整域である代数しか扱わない．可換環はつねに単位元をもつものを考える．可換環 R の（Krull）次元 $\dim R$ は

$$\dim R = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \text{素イデアル列 } \mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n \text{ が存在.}\}$$

で定義されることをまず思い出しておこう．

定義 1. $(R, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環，$\mathrm{k} = R/\mathfrak{m}$ を剰余体とする．
$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ は k-加群であり，一般に $\dim_{\mathrm{k}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \geq \dim R$ が成り立つが，この不等式において等号が成立するとき R を正則局所環という．

次の事実が成り立つ．

(i) 正則局所環は整閉整域である．
(ii) R を正則局所環，$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ とすると局所化 $R_{\mathfrak{p}}$ も正則局所環である．
(iii) R を Noether 局所環とし，$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ に対し $R/\mathfrak{p}$ と $R_{\mathfrak{p}}$ が正則局所環だとする．もし $\mathfrak{p}$ が $\dim R_{\mathfrak{p}}$ 個の元で生成されるなら R も正則局所環である．
(iv) R が正則局所環ならば R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ は $\dim R$ 個の元で生成される．

例 2. k を体とする．形式的べき級数環 $R = \mathrm{k}[[X_1, \ldots, X_d]]$ は正則局所環である．実はもっと強く完備局所環であり

$$R \simeq \varprojlim_{n \to \infty} R/\mathfrak{m}^n$$

が成り立つ．Cohen の有名な結果によれば，体 k を含む Noether 完備正則局所環はこの形に限り，また体 k を含む Noether 完備局所環はその商として得られる．

例 3. $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$ を素イデアルとするとき，$\mathfrak{p}$ に含まれない多項式を分母にもつ有理式全体のなす環が $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$ の局所化 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]_{\mathfrak{p}}$ である．一般に正則局所環の局所化は正則局所環になるので $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]_{\mathfrak{p}}$ は正則局所環である．

例 4. $\mathfrak{p} \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]$ を素イデアルとし，アフィン代数多様体

$$X = \{x \in \mathbb{C}^d \mid f(x) = 0 \ (\forall f \in \mathfrak{p})\}$$

を考える．$x \in X$ を $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d]/\mathfrak{p}$ の極大イデアル $\mathfrak{m}_x$ と思い，$\mathbb{C}[X]$ の商体の元で $\mathbb{C}[X] \setminus \mathfrak{m}_x$ を分母にもつ有理式全体を $\mathcal{O}_{X,x}$ で表わす．このとき，$\mathcal{O}_{X,x}$ が正則局所環になるための必要十分条件は $\mathfrak{p} = (F_1, \ldots, F_r)$ として

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_r}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial F_r}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix} = d - \dim \mathcal{O}_{X,x}$$

である．

1.2. 加群の拡大. A を代数，M, N を A-加群とする．M の射影分解を

$$\cdots \to P_2 \overset{\partial_2}{\to} P_1 \overset{\partial_1}{\to} P_0 \to M \to 0$$

とするとき，

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) = \frac{\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_A(P_1,N) \overset{\partial_2^*}{\to} \mathrm{Hom}_A(P_2,N))}{\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}_A(P_0,N) \overset{\partial_1^*}{\to} \mathrm{Hom}_A(P_1,N))}$$

であるが，他方，$\mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ は加群の拡大 $0 \to N \to E \to M \to 0$ の同値類の集合でもある．$\phi \circ \partial_2 = 0$ をみたす $\phi \in \mathrm{Hom}_A(P_1,N)$ から加群の拡大の同値類への写像を具体的に構成しよう．射影 A-加群 Q からの全射 $q : Q \to N$ を固定し，$\varphi : Q \oplus P_1 \to N$ を $(x,y) \mapsto q(x) + \phi(y)$ で定めると $Q \oplus P_1/\operatorname{Ker}\varphi = N$ と同一視できる．このとき，

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_2 & \overset{[0,\partial_2]}{\longrightarrow} & Q \oplus P_1 & \overset{\mathrm{id}_Q \oplus \partial_1}{\longrightarrow} & Q \oplus P_0 & \overset{[0,\partial_0]^T}{\longrightarrow} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & Q \oplus P_0/\operatorname{Ker}\varphi & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

の下段が対応する加群の拡大である．ただし垂直方向の射は自然な商写像である．

$0 \to N \to E_i \to M \to 0$ $(i = 1, 2)$ がそれぞれ $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Ext}^1_A(M,N)$ から得られる加群の拡大の同値類の代表とするとき，$\xi_1 + \xi_2$ から得られる加群の拡大の同値類は次のように計算される．これを Baer 和と呼ぶ.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N \oplus N & \longrightarrow & E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & M \oplus M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & N \oplus N & \longrightarrow & (E_1 \oplus E_2) \times_{M \oplus M} M & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

ただし，上段から中段は対角写像 $M \to M \oplus M$ に関する引き戻し，中段から下段は和写像 $N \oplus N \to N$ に関する押し出しである.

2. 分裂最高重み圏

2.1. 可換環上の分裂最高重み圏.

定義 5. R を可換環，A を R-加群としては有限生成射影加群である R-代数とする．有限生成 A-加群のなす圏 $\mathcal{C} = A\text{-}\mathrm{mod}$ と半順序集合の組 $(\mathcal{C}, \Lambda)$ が最高重み圏とは，A-加群の集合 $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在して次をみたすときをいう.

(i) $\Delta(\lambda)$ は有限生成射影 R-加群.
(ii) $\mathrm{Hom}_A(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \neq 0$ なのは $\lambda \leq \mu$ のときに限る.
(iii) $\mathrm{Hom}_A(\Delta(\lambda), N) = 0$ $(\forall \lambda \in \Lambda)$ ならば $N = 0$.
(iv) 有限生成射影 A-加群 $P(\lambda)$ が存在して

$$0 \to K(\lambda) \to P(\lambda) \to \Delta(\lambda) \to 0$$

かつ $K(\lambda)$ は $\{\Delta(\mu) \mid \mu > \lambda\}$ による filtration をもつ.

さらに次が成り立つとき $(\mathcal{C}, \Lambda)$ を分裂最高重み圏と呼ぶ.

(v) $\mathrm{End}_A(\Delta(\lambda)) = R$.

補題 6. R を体とする．$(\mathcal{C}, \Lambda)$ が分裂最高重み圏ならば次が成り立つ.

(i) $L(\lambda) = \Delta(\lambda)/\operatorname{Rad}\Delta(\lambda)$ は既約で $\{L(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は既約加群の完全代表系.
(ii) $[\operatorname{Rad}\Delta(\lambda) : L(\mu)] \neq 0$ ならば $\mu < \lambda$.

問 1. R を体とする．補題 6 の条件 (i),(ii) と分裂最高重み圏の定義の条件 (iv),(v) が成り立てば $(\mathcal{C},\Lambda)$ は分裂最高重み圏になることを示せ．

定義 7. $(\mathcal{C},\Lambda)$ が分裂最高重み圏のとき，$\mathcal{C}$ の対象で $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ による filtration をもつもの全体のなす充満部分圏を $\mathcal{C}^{\Delta}$ で表わす．

2.2. Schur **代数．** S_n を n 次対称群，$\mu \models n, \ell(\mu) \le d$ に対し S_μ を Young 部分群とし，

$$x_\mu = \sum_{\sigma \in S_\mu} \sigma$$

と定める．また，$M^\mu = Rx_\mu S_n$ を右 S_n-加群とする．このとき，

$$\mathcal{S}_{n,d} = \mathrm{End}_{S_n}\left(\oplus_{\mu \models n, \ell(\mu)\le d} M^\mu\right)$$

を Schur 代数と呼ぶ．$\lambda \vdash n$ に対し $\mathrm{SST}(\lambda,\mu)$ を重み μ の半標準盤の集合，$\mathrm{ST}(\lambda)$ を標準盤の集合とする．また $\mathrm{SST}(\lambda) = \sqcup_{\mu \models n, \ell(\mu)\le d} \mathrm{SST}(\lambda,\mu)$ とする．

註 8. $\mu \models n, \ell(\mu) \le d$ とは $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_d) \in \mathbb{Z}^d_{\ge 0}$ かつ $\sum_{i=1}^d \mu_i = n$ を意味する．$\lambda \vdash n$ とは λ が箱の数が n の Young 図形という意味であり，λ の n 個の箱の中に 1 を μ_1 個，2 を μ_2 個,..，d を μ_d 個用いて各列は上から下に狭義単調増加，各行は左から右に広義単調増加するように書き込んだものが重み μ の半標準盤である．他方で，$1,\dots,n$ を 1 個ずつ同じ規則で書き込んだものが標準盤である．

$S \in \mathrm{SST}(\lambda,\mu)$ とする．$\mu^{-1}(S) \subseteq \mathrm{ST}(\lambda)$ を $s \in \mathrm{ST}(\lambda)$ で，s 中の k $(1 \le k \le n)$ を $1 \le k \le \mu_1$ なら 1，$\mu_1 + 1 \le k \le \mu_1 + \mu_2$ なら 2,..，$n - \mu_d + 1 \le k \le n$ なら d, で置き換えて得られる半標準盤が S になるもの全体とする．

$\{m_{ts} = d(t)^{-1} x_\lambda d(s) \mid s,t \in \mathrm{ST}(\lambda), \lambda \vdash n\}$ を RS_n の Murphy 基底とする．このとき，$S \in \mathrm{SST}(\lambda,\mu), T \in \mathrm{SST}(\lambda,\nu)$ に対し

$$m_{TS} = \sum_{s \in \mu^{-1}(S), t \in \nu^{-1}(T)} m_{ts}$$

と置くと，$x_\mu \mapsto m_{TS}$ により $\varphi_{TS} \in \mathrm{Hom}_{S_n}(M^\mu, M^\nu)$ が定まる．すると

$$\{\varphi_{TS} \mid \lambda \vdash n, \mu \models n, \nu \models n, \ell(\mu) \le d, \ell(\nu) \le d\}$$

は $\mathcal{S}_{n,d}$ の cellular 基底を与える．とくに $\lambda \vdash n$ に対し cell 加群 $\Delta(\lambda)$ が定まる．

例 9. $\mathcal{S}_{3,2}$ を考える．μ の可能性は $\mu = (3,0),(2,1),(1,2),(0,3)$ である．s_1, s_2 を S_3 の Coxeter 生成元とする．

(1) $\lambda = (3)$ のとき $\mathrm{ST}(\lambda)$ はただひとつの標準盤からなり，任意の $S,T \in \mathrm{SST}(\lambda)$ に対し $m_{TS} = x_{(3)}$ である．(Weyl 次元公式より $|\mathrm{SST}(\lambda)| = 4$)
よって，任意の μ に対して $\varphi_{TS} : M^\mu \to M^\nu$ は
 (i) $\nu = (3,0),(0,3)$ なら $x_\mu \mapsto x_\nu$.
 (ii) $\nu = (2,1)$ なら $x_\mu \mapsto x_\nu(1 + s_2 + s_2 s_1)$.
 (iii) $\nu = (1,2)$ なら $x_\mu \mapsto x_\nu(1 + s_1 + s_1 s_2)$.

(2) $\lambda = (2,1)$ のとき $x_{(2,1)} = 1 + s_1$ であり，λ から寄与する Murphy 基底は

$$\{x_{(2,1)}, s_2 x_{(2,1)}, x_{(2,1)} s_2, s_2 x_{(2,1)} s_2\}$$

である．また $|\mathrm{SST}(\lambda)| = 2$ である．このとき，
 (i) $\mu = (2,1)$ に対して $\varphi_{TS} : M^\mu \to M^\nu$ は
 $\nu = (2,1)$ なら $x_\mu \mapsto x_\nu$，$\nu = (1,2)$ なら $x_\mu \mapsto x_\nu(1 + s_1)$.
 (ii) $\mu = (1,2)$ に対して $\varphi_{TS} : M^\mu \to M^\nu$ は
 $\nu = (2,1)$ なら $x_\mu \mapsto x_\nu(1+s_2)$，$\nu = (1,2)$ なら $x_\mu \mapsto x_\nu(2+s_1+s_1 s_2)$.

$e_{(3)}$ と $e_{(2,1)}$ を各々$M^{(3,0)}$ と $M^{(2,1)}$ への射影子とし,

$$P((3)) = \mathcal{S}_{3,2}e_{(3)}, \quad P((2,1)) = \mathcal{S}_{3,2}e_{(2,1)}$$

と置く. 具体的に基底を求めると

$$P((3)) = \bigoplus_{\mu=(\mu_1,\mu_2)\models 3} \mathrm{Hom}_{S_3}(M^{(3,0)}, M^{\mu})$$

の基底は

$$\begin{gathered} x_{(3,0)} \mapsto x_{(3,0)},\ x_{(3,0)} \mapsto x_{(0,3)} \\ x_{(3,0)} \mapsto x_{(2,1)}(1+s_2+s_2s_1), \\ x_{(3,0)} \mapsto x_{(1,2)}(1+s_1+s_1s_2) \end{gathered}$$

であり, $P((3)) = \Delta((3))$ となる. 同様に

$$P((2,1)) = \bigoplus_{\mu=(\mu_1,\mu_2)\models 3} \mathrm{Hom}_{S_3}(M^{(2,1)}, M^{\mu})$$

の基底は

$$\begin{gathered} x_{(2,1)} \mapsto x_{(3,0)},\ x_{(2,1)} \mapsto x_{(0,3)} \\ x_{(2,1)} \mapsto x_{(2,1)}(1+s_2+s_2s_1), \\ x_{(2,1)} \mapsto x_{(1,2)}(1+s_1+s_1s_2), \\ x_{(2,1)} \mapsto x_{(2,1)},\ x_{(2,1)} \mapsto x_{(1,2)}(1+s_1) \end{gathered}$$

であり, $0 \to P((3)) \to P((2,1)) \to \Delta((2,1)) \to 0$ となる.
そこで, $P((3)) \to P((2,1)) : e_{(3,0)} \mapsto (x_{(2,1)} \mapsto x_{(3,0)})$ の誘導する射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_{3,2}}(P((2,1)), \Delta((3))) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_{3,2}}(P((3)), \Delta((3)))$$

を考えると, $e_{(2,1)} \mapsto (x_{(3,0)} \mapsto x_{(2,1)}(1+s_2+s_2s_1))$ に $x_{(2,1)} \mapsto x_{(3,0)}$ を合成して

$$x_{(3,0)} \mapsto x_{(3,0)}(1+s_2+s_2s_1) = 3x_{(3,0)}$$

になることより次の完全系列を得る.

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}_{3,2}}(\Delta((2,1)), \Delta((3))) \longrightarrow R \overset{3\text{倍写像}}{\longrightarrow} R \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{S}_{3,2}}((\Delta((2,1)), \Delta((3))) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

問 2. $\Lambda = \{(3),(2,1)\}$ に $(3) \rhd (2,1)$ により順序を入れ, $\mathcal{C} = \mathcal{S}_{3,2}\text{-}\mathrm{mod}$ とするとき, $(\mathcal{C}, \Lambda)$ は分裂最高重み圏であることを示せ.

ここで次のふたつの事実を引用しておこう. とくに Λ が有限集合ならば $\mathcal{C} = A\text{-}\mathrm{mod}$ が分裂最高重み圏になるかどうかは $\mathrm{Spec}\, R$ の閉点でチェックすればよい.

補題 10. [R, Lem.4.12] A が R 上有限生成射影的な R-代数で, $\mathcal{C} = A\text{-}\mathrm{mod}$ に $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ が与えられているとする. λ_o を Λ の極大元とし, $L = \Delta(\lambda_o)$ と置く. このとき, $(\mathcal{C}, \Lambda)$ が標準加群 $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ をもつ分裂最高重み圏になることと次は同値である.

(a) $0 \to L \otimes_R \mathrm{Hom}_A(L, A) \to A$ が分裂単射.
(b) $\{M \in \mathcal{C} \mid \mathrm{Hom}_A(L, M) = 0\}$ のなす $\mathcal{C}$ の充満部分圏が標準加群

$$\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_o\}\}$$

をもつ分裂最高重み圏.

定理 11. [R, Thm.4.15] $(R,\mathfrak{m})$ を局所環，A が R 上有限生成射影的な R-代数で，$\mathcal{C}=A\text{-}\mathrm{mod}$ に有限個の加群 $\{\Delta(\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$ が与えられているとき，剰余体 $\mathrm{k}=R/\mathfrak{m}$ に対し $\mathcal{C}(\mathfrak{m})=A\otimes_R\mathrm{k}\text{-}\mathrm{mod}$ と置くと，$(\mathcal{C},\Lambda)$ が分裂最高重み圏になることと $(\mathcal{C}(\mathfrak{m}),\Lambda)$ が分裂最高重み圏になることは同値である．

3. 商関手

3.1. **忠実性.** $(\mathcal{C}=A\text{-}\mathrm{mod},\Lambda)$ を分裂最高重み圏とする．部分集合 $\Gamma\subseteq\Lambda$ に対し射影 A-加群 P と冪等元 e を

$$P=\bigoplus_{\lambda\in\Gamma}P(\lambda)=Ae$$

により定め，$B=\mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}}$ と置く．$\varphi\mapsto\varphi(e)$ により $B\simeq eAe$ であり，P への φ の作用は eAe では右からの $\varphi(e)$ の積に対応するから，$B=eAe$ と同一視すれば B は A の部分代数であり，P の $(A,\mathrm{End}_A(P)^{\mathrm{op}})$-両側加群構造は Ae の (A,eAe)-両側加群構造に一致する．

定義 12. A,B を上記のとおりとする．このとき，

$$\begin{array}{lcl} j^*=eA\otimes_A\ ? & : & A\text{-}\mathrm{mod}\longrightarrow B\text{-}\mathrm{mod}\\ j^!=\mathrm{Hom}_A(P,\ ?) & : & A\text{-}\mathrm{mod}\longrightarrow B\text{-}\mathrm{mod}\end{array}$$

は同型な関手である．この関手を Γ の定める商関手または Schur 関手と呼ぶ．j^* の右随伴関手 j_* と左随伴関手 $j_!$ は

$$\begin{array}{lcl} j_*=\mathrm{Hom}_B(eA,\ ?) & : & B\text{-}\mathrm{mod}\longrightarrow A\text{-}\mathrm{mod}\\ j_!=Ae\otimes_B\ ? & : & B\text{-}\mathrm{mod}\longrightarrow A\text{-}\mathrm{mod}\end{array}$$

で与えられる．

定義 13. $A,B,j^*:\mathcal{C}=A\text{-}\mathrm{mod}\to B\text{-}\mathrm{mod}$ を上記のとおりとする．
- (i) j^* が $\mathcal{C}^\Delta$ 上 faithful のとき，j^* が (-1)-faithful であるという．
- (ii) j^* が $\mathcal{C}^\Delta$ 上 fully faithful のとき，j^* が 0-faithful であるという．
- (iii) i を非負整数とする．一般に，任意の $X,Y\in\mathcal{C}^\Delta$ に対し

$$\mathrm{Ext}^j_A(X,Y)\simeq\mathrm{Ext}^j_B(j^*X,j^*Y)\quad(j=0,1,\dots,i)$$

  が成り立つとき，j^* が i-faithful であるという．
- (iv) 射影 A-加群のなす $\mathcal{C}$ の充満部分圏上 fully faithful のとき，A は B の準遺伝被覆であるという．

3.2. **$\mathcal{S}_{3,2}$ の例.** $A=\mathcal{S}_{3,2}$，$e=e_{(2,1)}$ とする．$j^*=\mathrm{Hom}_A(P((2,1)),\ ?)$ である．$\Delta((3))=P((3))$ かつ $\Delta((2,1))$ は次の射影分解をもっていたことを思い出そう．

$$0\to P((3))\xrightarrow{\iota}P((2,1))\xrightarrow{p}\Delta((2,1))\to 0$$

問 3. $b=(x_{(2,1)}\mapsto x_{(2,1)}(1+s_2+s_2s_1))\in\mathrm{End}_{S_3}(M^{(2,1)})$ とすると，$B=Re\oplus Rb$ かつ $b^2=3b$ であることを示せ．

問 4. R を体とする．A が半単純になるための必要十分条件を求めよ．

問 5. 次の計算を実行せよ．

$$\mathrm{Ext}^1_A(\Delta((3)),\Delta((3)))=0,\ \ \mathrm{Ext}^1_A(\Delta((3)),\Delta((2,1)))=0$$
$$\mathrm{Ext}^1_A(\Delta((2,1)),\Delta((2,1)))=0,\ \ \mathrm{Ext}^1_A(\Delta((2,1)),\Delta((3)))=R/3R$$

問 6. R の元として $3\neq0$ ならば $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta((2,1)),\Delta((3)))$ は torsion R-加群である．この事実を $A\otimes_R K$（K は R の商体）の半単純性と関連付けて説明せよ．

問 7. R の元として $3=0$ のとき次を示せ.（つまり j^* は 0-faithful でない.）

$$\mathrm{End}_A(\Delta((2,1))\oplus\Delta((3)))=R^3,\ \ \mathrm{End}_B(j^*\Delta((2,1))\oplus j^*\Delta((3)))=R^4$$

問 8. $r\in R$ に対し A-加群 $E(r)$ を

$$E(r)=\frac{P((2,1))\oplus P((3))}{\{(\iota(x),-rx)\mid x\in P((3))\}}$$

と定めるとき次の問に答えよ.

(1) $r=1$ のとき $E(r)\simeq P((2,1))$ であることを示せ.
(2) 長さ 2 の Δ-filtration をもつ A-加群は $E(r)$ $(r\in R)$ に限ることを示せ.

問 9. R を整域とし，$E(r)$ $(r\in R)$ の射影分解を

$$0\longrightarrow P((3))\xrightarrow{\phi(r)}P((2,1))\oplus P((3))\longrightarrow E(r)\longrightarrow 0$$

とする．ただし，$\phi(r):x\mapsto(\iota(x),-rx)$ である．$r\neq 0, r'\neq 0$ とし次の問に答えよ.

(1) $f(r,r'):R^3\to R$ を $(r_1,r_2,r_3)\mapsto r'r_1+3r_2-rr_3$ とするとき次の完全系列の存在を示せ.

$$0\to\mathrm{Hom}_A(E(r),E(r'))\to R^3\overset{f(r,r')}{\to}R\to\mathrm{Ext}^1_A(E(r),E(r'))\to 0$$

(2) $\mathrm{Hom}_A(E(r),E(r'))\simeq\mathrm{Hom}_B(j^*E(r),j^*E(r'))$ であることを示せ.

問 10. R を整域とする．次の問に答えよ.

(1) $b\in\mathrm{Mat}(3,R)$ を下記のように定めるとき，$b^2=3b$ をみたすための必要十分条件が $r'x+3y=0$ であることを示せ.

$$b=\begin{pmatrix}3&0&0\\x&0&0\\y&r'&3\end{pmatrix}$$

(2) B-加群の拡大の同値類を考えることにより次の同型を示せ.

$$\mathrm{Ext}^1_B(j^*P((3)),j^*E(r'))\simeq\frac{\{(x,y)\in R^2\mid r'x+3y=0\}}{\{(-3u,r'u)\mid u\in R\}}$$

(3) $\mathrm{Ext}^1_B(j^*P((3)),j^*E(r'))=0$ のとき

$$\mathrm{Ext}^1_A(E(r),E(r'))\simeq\mathrm{Ext}^1_B(j^*E(r),j^*E(r'))$$

であることを示せ.

註 14. [HN] R が体で標数が 2 でも 3 でもなければ $j^*:\mathcal{S}_{n,n}\text{-mod}\to RS_n\text{-mod}$ は 1-faithful である.

4. 一意性定理

4.1. 諸定義と基本補題.

定義 15. 局所環 R 上の分裂最高重み圏 $(\mathcal{C}_1,\Lambda_1),(\mathcal{C}_2,\Lambda_2)$ に対し，圏同値 $F:\mathcal{C}_1\simeq\mathcal{C}_2$ が分裂最高重み圏の同値とは，全単射 $\sigma:\Lambda_1\simeq\Lambda_2$ が存在して

$$F(\Delta(\lambda))\simeq\Delta(\sigma(\lambda))\quad(\forall\lambda\in\Lambda_1)$$

が成り立つときをいう.

定義 16. R を局所環，B を R 上有限生成射影的な R-代数，$j_i^*:\mathcal{C}_i\to B\text{-mod}$ $(i=1,2)$ を B の準遺伝被覆とする．商関手 j_1^* と j_2^* が同値な B の準遺伝被覆とは，分裂最高重み圏の同値 $F:\mathcal{C}_1\simeq\mathcal{C}_2$ が存在して $j_1^*=j_2^*\circ F$ となるときをいう.

補題 17. R, A, B と $j^* : \mathcal{C} = A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ は上記のとおりとする．このとき次が成立．

(1) j^* が 0-faithful になるための必要十分条件は

$$M \simeq j_* j^* M \quad (\forall M \in \mathcal{C}^{\Delta})$$

(2) j^* が 0-faithful とする．j^* が 1-faithful になるための必要十分条件は

$$R^1 j_*(j^* N) = 0 \quad (\forall N \in \mathcal{C}^{\Delta})$$

さて，分裂最高重み圏には余標準加群 $\{\nabla(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在して次が成り立つ．

(a) M が R 上有限生成射影的とすると $M \in \mathcal{C}^{\Delta}$ であるための必要十分条件は

$$\mathrm{Ext}^1_A(M, \nabla(\lambda)) = 0 \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

(b) 次の公式が成り立つ．

$$\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(\lambda), \nabla(\mu)) = \begin{cases} R & (i = 0 \text{ かつ } \lambda = \mu \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

註 18. 上記の事実は次の補題を証明するときに途中で用いる．

補題 19. $j^* : \mathcal{C} = A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ が 1-faithful とし，$S(\lambda) = j^*\Delta(\lambda)$ と定める．このとき次の条件をみたす B-加群 $Y(\lambda)$ が同型を除いて一意的に存在する．

(i) 全射 B-加群準同型 $p_\lambda : Y(\lambda) \to S(\lambda)$ が存在．
(ii) $\mathrm{Ext}^1_B(Y(\lambda), S(\mu)) = 0$ $(\forall \mu \in \Lambda)$.
(iii) $\mathrm{Ker}\, p_\lambda$ は $\{S(\mu) \mid \mu > \lambda\}$ による filtration をもつ．
(iv) $Y(\lambda)$ は直既約加群．

$Y(\lambda)$ を Young 加群と呼ぶ．

系 20. $j^* : \mathcal{C} = A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ が 1-faithful ならば，j^* は

$$A = \mathrm{End}_B(\oplus_{\mu \in \Lambda} Y(\mu)), \quad \Delta(\lambda) = \mathrm{Hom}_B(\oplus_{\mu \in \Lambda} Y(\mu), S(\lambda))$$
$$P = \mathrm{Hom}_B(\oplus_{\mu \in \Lambda} Y(\mu), \oplus_{\nu \in \Gamma} Y(\nu))$$

が定める商関手と同値な B の準遺伝被覆．ただし $\Gamma = \{\nu \in \Lambda \mid Y(\nu) \text{ が射影 } B\text{-加群}\}$.

命題 21. $j_i^* : \mathcal{C}_i \to B\text{-mod}$ $(i = 1, 2)$ がともに 1-faithful であって

$$\{j_1^* \Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} = \{j_2^* \Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$$

ならば，$j_1^* = j_2^* \circ F$ をみたす圏同値 $F : \mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2$ が存在して分裂最高重み圏の同値を与える．

補題 22. K を R の商体とする．$j^* : \mathcal{C} = A\text{-mod} \to B\text{-mod}$ が 1-faithful で $B \otimes_R K$ が分裂半単純 K-代数ならば次が成り立つ．

(i) $A \otimes_R K$ は $\{\Delta(\lambda) \otimes_R K \mid \lambda \in \Lambda\}$ を既約 A-加群の完全代表系にもつ分裂半単純 K-代数．
(ii) $j^* : A \otimes_R K\text{-mod} \to B \otimes_R K\text{-mod}$ は圏同値．とくに全単射 $\Lambda \simeq \mathrm{Irr}(B \otimes_R K)$ が存在する．

次の定理は [R, Thm.4.49] の特別な場合である．R の商体を K とする．

定理 23. R, B は上記のとおりとし，$B \otimes_R K$ が分裂半単純 K-代数であり，B の準遺伝被覆 $(\mathcal{C}_i, \Lambda_i)$ $(i = 1, 2)$ がともに 1-faithful であるとする．補題 22 により

$$\Lambda_i = (\mathrm{Irr}(B \otimes_R K), \leq_i) \quad (i = 1, 2)$$

としてよい．このとき，$\leq_1$ が $\leq_2$ の細分ならば準遺伝被覆の同値 $F : \mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2$ が存在して，しかも $j_1^* \Delta(\lambda) \simeq j_2^* \Delta(\lambda)$ $(\forall \lambda \in \mathrm{Irr}(B \otimes_R K))$ となる．

5. 変形理論

5.1. Rouquier **の定理.** R を正則局所環，A を R 上有限生成射影的な R-代数とし，R の商体 K に対し $A \otimes_R K$ は分裂半単純 K-代数であるとする．射影 A-加群 $P = Ae$ に対し $B = eAe$ とおく．そして半順序集合 $\Lambda = (\mathrm{Irr}(B \otimes_R K), \leq)$ があって $(\mathcal{C} = A\text{-}\mathrm{mod}, \Lambda)$ が分裂最高重み圏であるとする．$\dim R$ に関する帰納法を動かすため，途中段階でも同じ仮定が成り立つことを要求する．すなわち次が成り立つことを仮定する．

$\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ に対し $R/\mathfrak{p}$ が正則局所環ならば
- (a) $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ である限り $A \otimes_R Q(\mathfrak{p})$ は分裂半単純 $Q(\mathfrak{p})$-代数．ただし $Q(\mathfrak{p})$ は $R/\mathfrak{p}$ の商体.
- (b) $\mathcal{C}(\mathfrak{p}) = A \otimes_R R/\mathfrak{p}\text{-}\mathrm{mod}$ は $\{\Delta(\lambda) \otimes_R R/\mathfrak{p} \mid \lambda \in \Lambda\}$ を標準加群にもつ分裂最高重み圏．とくに
  - (i) $\mathrm{End}_A(\Delta(\lambda) \otimes_R R/\mathfrak{p}) = R/\mathfrak{p}$.
  - (ii) $\mathrm{Hom}_A(\Delta(\lambda) \otimes_R R/\mathfrak{p}, \Delta(\mu) \otimes_R R/\mathfrak{p}) \neq 0$ ならば $\lambda \leq \mu$.

商関手 $j^* = \mathrm{Hom}_A(P, \ ?) : \mathcal{C} = A\text{-}\mathrm{mod} \to B\text{-}\mathrm{mod}$ の $\mathcal{C}(\mathfrak{p})$ への制限を

$$j^*|_{\mathcal{C}(\mathfrak{p})} : \mathcal{C}(\mathfrak{p}) \to B \otimes_R R/\mathfrak{p}\text{-}\mathrm{mod}$$

とする．ここで，$B = eAe$ より $B \otimes_R R/\mathfrak{p} \simeq \mathrm{End}_A(P \otimes_R R/\mathfrak{p})^{\mathrm{op}}$ である．

定理 24. [R, Thm.4.42] 上記の仮定のもとで，極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対し $j^*|_{\mathcal{C}(\mathfrak{m})}$ が 0-faithful ならば，$R/\mathfrak{p}$ が正則局所環になる任意の素イデアル $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ に対し $j^*|_{\mathcal{C}(\mathfrak{p})}$ は 1-faithful.

註 25. 証明の方針は $M \in \mathcal{C}^{\Delta}$ に対して $Z = \mathrm{supp}\,\mathrm{Ext}^1_B(j^*A, j^*M) \neq \emptyset$ と仮定して矛盾を導く．[R, Thm.4.42] に書いてある証明を [A, Prop.4.47] にもう少していねいに説明してある．議論の雰囲気を見るため，講義では次節の問 11 を解説する．

5.2. Losev **の論文から.**

問 11. [L, Thm.3.1] $R = \mathbb{C}[[x_1, x_2]]$，$A$ を R 上有限生成射影的な R-代数とする．$(\mathcal{C} = A\text{-}\mathrm{mod}, \Lambda)$ を分裂最高重み圏とし，商関手 $j^* : \mathcal{C} \to B\text{-}\mathrm{mod}$ を考える．もし
- (a) 相異なる $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{C}x_1 \oplus \mathbb{C}x_2$ $(k \geq 2)$ が存在して，$y = y_1 \cdots y_k$ による局所化 $A \otimes_R R[1/y]$ が $R[1/y]$ 上の行列代数の直和と同型.
- (b) 各 i に対し，$R/(y_i)$ の商体を K_i とすると $j^*|_{A \otimes_R K_i\text{-}\mathrm{mod}}$ は (-1)-faithful.

ならば，j^* は 0-faithful であることを示せ.

註 26. $M, N \in \mathcal{C}^{\Delta}$ に対し次式が成り立つ．R が 2 次元正則局所環であることに注意すると $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は自由 R-加群．同様に $\mathrm{Hom}_B(j^*M, j^*N)$ も自由 R-加群.

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) = \bigcap_{\mathrm{ht}\mathfrak{p}=1} \mathrm{Hom}_A(M, N)_{\mathfrak{p}}$$

定理 27. [L, Thm.3.4] $R = \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]]$ 上有限生成射影的な R-代数 A_1 と A_2 に対し $B = B_1 = B_2$ である商関手

$$j_i^* = \mathrm{Hom}_{A_i}(P_i,\ ?) : \mathcal{C}_i = A_i\text{-}\mathrm{mod} \to B\text{-}\mathrm{mod} \quad (i = 1, 2)$$

を考える．ここで，P_1 の直和因子 Q_1 と P_2 の直和因子 Q_2 が存在して

(i) $Q_i \otimes_R \mathbb{C}$ $(i = 1, 2)$ は入射的 $A_i \otimes_R \mathbb{C}$-加群.

(ii) $Q_i \otimes_R K$ $(i = 1, 2)$ は $A_i \otimes_R K\text{-}\mathrm{mod}$ を生成する．

(iii) $j_1^* Q_1 \simeq j_2^* Q_2$.

が成り立つとする．ただし $K = \mathbb{C}((X_1, \ldots, X_d))$ である．

また，$B \otimes_R K$ が分裂半単純 K-代数と仮定し，$\mathcal{C}_i$ $(i = 1, 2)$ は共通の半順序集合 $\Lambda = (\mathrm{Irr}(B \otimes_R K), \leq)$ をもつ分裂最高重み圏だとする．このときさらに

(iv) j_1^* は 0-faithful で j_2^* は 1-faithful.

(v) 任意の射影 A_2-加群 X に対し単射 $\iota_X : X \to Q_2^m$ があって $\mathrm{Coker}\, \iota_X \in \mathcal{C}_2^{\Delta}$.

が成り立つならば，B の準遺伝被覆の同値 $F : \mathcal{C}_1 \simeq \mathcal{C}_2, j_1^* = j_2^* \circ F$ が存在する．

References

[A] S. Ariki, Finite dimensional Hecke algebras (section 4), Trends in representation theory of algebras and related topics, 1–48, EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc., Zurich, 2008.

[HN] D. Hemmer and D. Nakano, Specht filtrations for Hecke algebras of type A, J. London Math. Soc. (2) **69** (2004), 623–638.

[L] I. Losev, Proof of Varagnolo-Vasserot conjecture on cyclotomic categories $\mathcal{O}$, Selecta Math. (N.S.) **22** (2016), 631–668.

[R] R. Rouquier, q-Schur algebras for complex reflection groups, Mosc. Math. J. **8** (2008), 119–158.

[RSVV] R. Rouquier, P. Shan, M. Varagnolo and E. Vasserot, Categorifications and cyclotomic rational double affine Hecke algebras, Invent. Math. **204** (2016), 671–786.