Notation.

- A: 体 k 上の有限次元多元環.
- $\operatorname{mod} A$: 有限生成右 A-加群のなす圏.

1. Cline-Parshall-Scott's equivarence

この節では highest weight category と quasi-hereditary algbera を導入し, それらを結ぶ Cline-Parshall-Scott による結果を紹介する. $\mathcal{C}$ をアーベル k-圏とし以下の条件を仮定する.

- $\mathcal{C}$ の simple object の同型類は有限集合 Λ によってパラメトライズ ($\lambda \mapsto S(\lambda)$) されている.
- $\mathcal{C}$ の各対象は有限長の組成列をもつ.
- 任意の対象 X, Y に対して $\operatorname{Hom}(X, Y)$ および $\operatorname{Ext}(X, Y)$ は有限次元.
- $\mathcal{C}$ は十分射影対象をもつ.

定義 1.1. (最高ウェイト圏) $\leq$ を Λ 上の半順序とする. $(\mathcal{C}, \leq)$ が**最高ウェイト圏**とは対象の族 $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在して以下の条件を満たすときにいう.

(i) 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して完全列

$$0 \to K(\lambda) \to P(\lambda) \to \Delta(\lambda) \to 0$$

が存在する i.e. $S(\lambda) = \operatorname{Top} \Delta(\lambda)$.

(ii) $[\operatorname{rad} \Delta(\lambda) : S(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \mu < \lambda$.

(iii) $P(\lambda)$ は "good" filtration $(*)$ をもつ.

$$(*) : P(\lambda) = F_0(\lambda) \supset K(\lambda) = F_1(\lambda) \supset \cdots \supset F_\ell(\lambda) = 0$$

s.t. 各 $i \geq 1$ に対してある $\lambda_i > \lambda$ が存在して $F_i(\lambda)/F_{i+1}(\lambda) \simeq \Delta(\lambda_i)$.

演習問題. $(\mathcal{C}, \leq)$ を最高ウェイト圏とする. 以下を示せ.

(1) $\Delta(\lambda)$ は組成因子に $S(\mu)$ ($\mu \not\leq \lambda$) が現れないような $P(\lambda)$ の最大の剰余対象.
(2) "good" filtration は $\lambda_i < \lambda_j \Rightarrow i < j$ ととれる.
(3) 半順序 $\leq$ は全順序としてとれる.

定義 1.2. A の両側イデアル $J \neq 0$ が **heredity イデアル**とは以下の条件を満たすときにいう.

(i) J_A は射影加群.
(ii) $\operatorname{Hom}_A(J, A/J) = 0$.
(iii) $J \operatorname{rad} AJ = 0$.

また両側イデアルの列

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_\ell = A$$

であって, 各 $i \in \{0, \dots, \ell-1\}$ に対して J_{i+1}/J_i が A/J_i の heredity イデアルになるものが存在するとき, この列を **heredity chain** とよび A を **quasi-hereditary 代数**とよぶ.

演習問題. 次を示せ.

(1) A が 半単純でない quasi-hereditary 代数 $\Leftrightarrow$ ある heredity イデアル $J \neq A$ が存在して A/J が quasi-heredity.
(2) heredity ideal の条件 (i) の下で以下は同値.
   - 条件 (ii).
   - $J^2 = J$.
   - ある冪等元 e が存在して $J = AeA$.

Heredity chian の長さに関して次の結果が知られている.

定理 1.3. [9] 任意の *heredity chain* は長さ $|\Lambda|$ の *heredity chain* に細分化できる.

例 1.4. (1) $A = A_n = \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \cdots & \mathbb{C} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \mathbb{C} \end{pmatrix}$ を n 次の上三角行列環とする. $e_i = E_{ii}$, $J_i := A(e_1 + \cdots + e_i)A$ と定めれば, $A/J_i \cong A_{n-i}$ および $J_{i+1}/J_i = e_{i+1}(A/J_i)$ が成り立つ. また

$$\begin{aligned}(J_{i+1}/J_i)(\operatorname{rad} A/J_i)(J_{i+1}/J_i) &= \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \cdots & \cdots & \mathbb{C} \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{C} & \cdots & \mathbb{C} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \mathbb{C} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{C} & \cdots & \cdots & \mathbb{C} \\ & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

なので列 $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n = A$ は heredity chain であり, A は quasi-hereditary 代数になる.

(2) Q を有限クイバー (=有向グラフ) とし Q_0, Q_1 でそれぞれ頂点集合, 辺集合を表すことにする. Q 上の長さ ℓ のパス $w : x = x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_\ell = y$ に対して $s(w) = x$, $t(w) = y$ と定める. ただし各頂点 $i \in Q_0$ に対して e_i を $s(e_i) = t(e_i) = i$ を満たす長さ 0 のパスとおく. k 上の多元環 kQ を以下で定める:

- Q のパス全体が kQ の k 上の基底.
- $w : x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_\ell} x_\ell$, $w' : y_0 \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_{\ell'}} y_{\ell'}$ に対してその積を
$$w \cdot w' = \begin{cases} x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_\ell} x_\ell = y_0 \xrightarrow{\beta_1} y_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_{\ell'}} y_{\ell'} & t(w) = s(w') \\ 0 & t(w) \neq s(w') \end{cases}$$
と定める.

Q を有向サイクルをもたないクイバーとする. このとき定義から $A = kQ$ は有限次元多元環となることに注意する. また $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$ が原始直交冪等元分解を与える. (例えば $A_n \cong k(1 \to \cdots \to n)$.) いま勝手な頂点 $i \in Q_0$ に対し $J = Ae_iA$ は heredity ideal となる. 実際, $\Phi_i := \{w : \text{path to } i\}$, $r := |\Phi|$ とおけば

$$J_A = \oplus_{w \in \Phi} wA \simeq (e_iA)^{\oplus r}$$

より J は右加群として射影的となる. また i から i への長さ 1 以上のパスは存在しないので

$$J \operatorname{rad} AJ = 0$$

が従う ($\operatorname{rad} A$ はベクトル空間として長さ 1 以上のパスで生成される). ここで $A/J \cong k(Q \setminus \{i\})$ であることから帰納的に A は quasi-hereditary 代数であることが分かる.

注意 1.5. 以上の例は全て大域次元が 1 以下の多元環であるが実際には大域次元が 2 以上の quasi-hereditary 代数も存在する. その例は後で紹介する.

本節の主定理である Cline-Parshall-Scott の結果を紹介する.

定理 1.6. [2] A を有限次元多元環とし有限集合 Λ による単純加群 (の同型類) のラベル付けが与えられているとする. 次は同値.

(a) A は *quasi-hereditary* 代数.

(b) ある Λ 上の半順序 $\leq$ に対して $(\operatorname{mod} A, \leq)$ は最高ウェイト圏.

Proof. $\underline{(a) \Rightarrow (b)}$: $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_\ell = A$ を heredity chain とする.

Claim 1. 単純加群 S に対し, $S \in \mathsf{add}((J_i/J_{i-1})/\operatorname{rad}(J_i/J_{i-1}))$ を満たす $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ が唯一つ存在する.

Proof. 省略.（演習問題とする） ■

$\Lambda_i := \{\lambda \in \Lambda \mid S(\lambda) \in \mathsf{add}((J_i/J_{i-1})/\operatorname{rad}(J_i/J_{i-1}))\}$ とおけば Claim 1 より $\Lambda = \sqcup_{i=1}^{\ell} \Lambda_i$ である. そこで Λ 上の半順序 $\leq$ を

$$\lambda < \mu \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lambda \in \Lambda_i,\ \mu \in \Lambda_j \ \&\ i > j$$

で定める. また $\lambda \in \Lambda_i$ に対し, $\Delta(\lambda)$ を $S(\lambda)$ の $\operatorname{mod} A/J_{i-1}$ における射影被覆とする. この半順序および $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ により $(\operatorname{mod} A, \leq)$ が最高ウェイト圏となることを示す.

Claim 2. $[\operatorname{rad}\Delta(\lambda) : S(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \mu < \lambda$.

Proof. ある $\mu \not< \lambda$ が存在して $[\operatorname{rad}\Delta(\lambda) : S(\mu)] \neq 0$ であると仮定する. Claim 1 および $\Delta(\lambda)$ の定義から, $\mathsf{add}\, J_i/J_{i-1} = \mathsf{add} \oplus_{\lambda \in \lambda_i} \Delta(\lambda)$ であることに注意する. 特に仮定からある $j \leq i$ が存在して

$$\operatorname{Hom}_{A/J_{j-1}}(J_j/J_{j-1}, \operatorname{rad}(J_i/J_{i-1})) \neq 0$$

が従う.

$i = j$ とする. $J_i/J_{i-1} = (A/J_{i-1})e(A/J_{i-1})$, $0 \neq f \in \operatorname{Hom}_{A/J_{j-1}}(J_j/J_{j-1}, \operatorname{rad}(J_i/J_{i-1}))$ とおいたとき, ある $a \in A/J_{i-1}$ が存在して $f(ae) \neq 0$ である. 他方,

$$f(ae) = f(aee) = f(ae)e \in \operatorname{rad}(J_i/J_{i-1}) \cdot (J_i/J_{i-1}) = (J_i/J_{i-1})(\operatorname{rad} A/J_{i-1})(J_i/J_{i-1}) = 0$$

であるから矛盾.

$i > j$ とする. 仮定より $\operatorname{Hom}_{A/J_{j-1}}(J_j/J_{j-1}, A/J_{i-1}) \neq 0$ である. 可換図式

$$\begin{tikzcd} A/J_j \arrow[r] & A/J_{i-1} \\ & J_j/J_{j-1} \arrow[u, "\neq 0"'] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

により, $\operatorname{Hom}_{A/J_{j-1}}(J_j/J_{j-1}, A/J_j) \neq 0$ である. ここで $A/J_j \simeq (A/J_{j-1})/(J_j/J_{j-1})$ なので矛盾. ■

Claim 3. $P(\lambda)$ は *"good" filtration* をもつ.

Proof. $P(\lambda) = eA$ とおく. heredity chain に左から e をかけて列

$$eA = eJ_\ell \supset eJ_{\ell-1} \supset \cdots \supset eJ_0 = 0$$

を得る. $eJ_i/eJ_{i-1} \in \mathsf{add}(J_i/J_{i-1}) = \mathsf{add} \oplus_{\mu \in \Lambda_i} \Delta(\mu)$ に注意する. また i を $eJ_i/eJ_{i-1} \neq 0$ となる最大の添え字とする. このとき $eJ_i = eA = P(\lambda)$ なので全射 $P(\lambda) \to eJ_i/eJ_{i-1}$ が存在する. 特に, eJ_i/eJ_{i-1} は直既約で $\Delta(\lambda)$ と同型である. また $\Delta(\mu) \in \mathsf{add}\, eJ_j/eJ_{j-1}$ $(j < i)$ とすれば $\mu \in \Lambda_j$ であるから $\lambda < \mu$ である. したがって

$$eA = eJ_\ell \supset eJ_{\ell-1} \supset \cdots \supset eJ_0 = 0$$

を適当に細分化することで求める filtration が得られる. ■

Claim 2 と Claim 3 から $(\mathrm{mod}\, A, \leq)$ は最高ウェイト圏である.

$\underline{(b) \Rightarrow (a)}$: $(\mathrm{mod}\, A, \leq)$ を最高ウェイト圏とする. 簡単のため A は基本的と仮定する. 注意 1.1 より $\leq$ は全順序で, $F_i(\lambda)/F_{i+1}(\lambda) = \Delta(\lambda_i)$ とおいたとき, $\lambda_i < \lambda_j \Rightarrow i < j$ が成り立っているとしてよい. ω を Λ の最大元とし, $\Gamma = \Lambda \setminus \{\omega\}$ とする. 各 A-加群 X に対して, X_Γ で組成因子に $S(\omega)$ が現れない X の最大の剰余加群と定める. このとき $P(\lambda)_\Gamma = P(\lambda)/F_{i_\lambda}(\lambda)$ かつ $F_{i_\lambda}(\lambda) \in \mathsf{add}\, P(\omega)$ である. ただし $i_\lambda = \min\{j \mid F_j(\lambda)/F_{j+1}(\lambda) = \Delta(\omega) = P(\omega)\}$ とおいた.

$J = \oplus_{\lambda\in\Lambda} F_{i_\lambda} \in \mathsf{add}\, P(\omega)$ としたとき, J が heredity イデアルであることを示す. まず $F_{i_\omega}(\omega) = \Delta(\omega) = P(\omega)$ より $J \neq 0$ である.

Claim 4. $\mathrm{Hom}_A(J, A/J) = 0$.

Proof. $A/J = \oplus P(\lambda)_\Gamma$ および $J \in \mathsf{add}\, P(\omega)$ から従う. ■

Claim 5. J は両側イデアル.

Proof. 両側イデアルでないとすれば, ある $a \in A$ であって, $aJ \not\subset J$ となるものが存在する. 特に, $(J + aJ)/J \neq 0$ である. 自然な全射 $J \to (J + aJ)/J$ が存在するので $\mathrm{Hom}_A(J, (J+aJ)/J) \neq 0$ であり, $[(J+aJ)/J : S(\omega)] \neq 0$ が従う. 他方, $(J+aJ)/J \subset A/J$ および $[A/J : S(\omega)] = 0$ より矛盾が導かれる. ■

Claim 6. $\mathrm{rad}\, J \cdot J = 0$.

Proof. $P(\omega) = \Delta(\omega)$ かつ $J \in \mathsf{add}\, P(\omega)$ より $\mathrm{Hom}_A(J, \mathrm{rad}\, J) = 0$ である. $\mathrm{rad}\, J \cdot J \neq 0$ と仮定する. 従ってある $x \in \mathrm{rad}\, J$ と $y \in J$ が存在して $xy \neq 0$ となる. 特に $f : J \to \mathrm{rad}\, J$ を $f(a) = xa$ で定めれば, $f \neq 0$ となり矛盾. ■

Claim 7. $(\mathrm{mod}\, A/J, \leq|_\Gamma)$ は最高ウェイト圏.

Proof. $A/J = \oplus_{\lambda\in\Gamma} P(\lambda)_\Gamma$ より, $P(\lambda)_\Gamma = P(\lambda)/F_{i_\lambda}(\lambda)$ が $S(\lambda)$ の $\mathrm{mod}\, A/J$ における射影被覆となる. 従って, $\{\Delta(\lambda) \mid \lambda \in \Gamma\}$ は定義 1.1 の条件 (i),(ii),(iii) を満たす. ■

Claim 4, Claim 5, Claim 6 および Claim 7 より帰納的に A が quasi-hereditary 代数であることが従う. □

以下, A を有限次元多元環, Λ を単純加群 (の同型類) のラベリングを与える集合とする.

定義 1.7. Λ 上の半順序 $\leq$ および, $\lambda \in \Lambda$ に対して $\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda, \leq)$ を組成因子に $S(\mu)$ $(\mu \not\leq \lambda)$ が現れないような $P(\lambda)$ の最大の剰余加群として定義し, これを λ (および半順序 $\leq$) に関する**標準加群**とよぶ.

また $\mathcal{F}(\Delta) := \{X \in \mathrm{mod}\, A \mid X$ は標準加群による filtration をもつ$\}$ と定める.

また双対的に**余標準加群** $\nabla(\lambda)$, $\mathcal{F}(\nabla)$ を定める.

A が quasi-hereditary 代数になるための必要十分条件を幾つか与えておく. 詳しくは [4] を参照されたい.

定理 1.8. $\leq$ を Λ 上の全順序とする.

(1) 次は同値.

(i) $[\Delta(\lambda) : S(\lambda)] = 1$.

(i') $[\nabla(\lambda) : S(\lambda)] = 1$.

(2) 条件 (i) の下で次は同値.

(ii) $A_A \in \mathcal{F}(\Delta)$.

(iii) $\mathcal{F}(\Delta) = \{X \in \mathrm{mod}\, A \mid \mathrm{Ext}^1_A(X, \nabla) = 0\}$.

(iv) $\mathcal{F}(\Delta) = \{X \in \operatorname{mod} A \mid \operatorname{Ext}_A^{>0}(X, \nabla) = 0\}$.
(v) 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して $\operatorname{Ext}_A^2(\Delta(\lambda), \nabla(\mu)) = 0$.

(3) 次は同値.
(a) A は *quasi-hereditary* 代数.
(b) ある Λ 上の全順序 $\leq$ が存在して条件 (i) 及び (ii) を満たす.

注意 1.9. 定理 1.8 中の条件 (i) 及び (v) は自己双対的な条件なので次が成り立つ.

$$A : \text{quasi-hereditary 代数} \Leftrightarrow A^{\mathrm{op}} : \text{quasi-hereditary 代数}.$$

演習問題. 上三角行列環で具体的に標準加群および各直既約射影加群の標準加群による filtration を与えよ.

2. Global dimension, Iyama's finiteness Theorem

この節では, quasi-hereditary 代数の大域次元の有限性 ([3]) およびその応用として有限次元多元環の表現次元の有限性 ([6]) をみる.

定理 2.1. [3] A を *quasi-hereditary* 代数とし $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_m = A$ を *heredity chain* とする. このとき $\operatorname{gl.dim} A \leq 2m - 2$ がなりたつ. 特に $\operatorname{gl.dim} A \leq 2|A| - 2$ である.

Proof. 題意は次の主張および Remark 1 (3) から従う.

Claim 8. J を A 両側イデアルかつ右 A-加群として射影的であるとし, $B = A/J$ とおく.
(1) 任意の右 B-加群 X に対して次が成り立つ.

$$\operatorname{pd}_A X \leq 1 + \operatorname{pd}_B X,$$

(2) $J \operatorname{rad} A J = 0$ であれば $\operatorname{gl.dim} A \leq \operatorname{gl.dim} B + 2$.

Proof. (1) を示す. $d = \operatorname{pd}_B X$ とおき, d に関する帰納法を用いる. まず $\operatorname{mod} A$ での完全列

$$0 \to J \to A \to B \to 0$$

を考えると, J は射影的なので $\operatorname{pd}_A B \leq 1$ となる. 従って $d = 0$ のとき, 主張は成り立つ.
$d < \ell (\geq 1)$ で主張が成り立つと仮定し, $d = \ell$ のときを示す. X の $\operatorname{mod} B$ における射影被覆 $f : P \to X$ とおき, $X' = \operatorname{Ker} f$ とする. このとき, $\operatorname{pd}_B X' = d - 1 < d$, $\operatorname{pd}_B P = 0$ より $\operatorname{pd}_A X' \leq d$, $\operatorname{pd}_A P \leq 1$ である. $\operatorname{mod} A$ における完全列

$$0 \to X' \to P \to X \to 0$$

に $\operatorname{Hom}_A(-, Y)$ ($Y \in \operatorname{mod} A$) を充てることで完全列

$$\operatorname{Ext}_A^i(X', Y) \to \operatorname{Ext}_A^{i+1}(X, Y) \to \operatorname{Ext}_A^{i+1}(P, Y)$$

を得る. 従って $i \geq d + 1$ とすれば $\operatorname{Ext}_A^{i+1}(X, Y) = 0$ である.
(2) を示す. $\operatorname{gl.dim} B = d$ とおき, $d = \infty$ ならば主張は明らかなので $d < \infty$ とする. $X \in \operatorname{mod} A$, $\pi : P \to XJ$ を XJ の射影被覆, $\rho_x : J \to XJ$ を $y \mapsto xy$ で定める. $x_1, \ldots, x_r$ を X の生成元とし, $\pi' := \oplus_{i=1}^r \rho_{x_i} : J^{\oplus r} \to XJ$ とおく. π' は全射で, J_A は射影的なので P は $J_A^{\oplus r}$ の直和因子である. 従って次を得る.

$$\operatorname{Ker} \pi \subset \operatorname{rad} P = P \operatorname{rad} A \subset P' \operatorname{rad} A = (J \operatorname{rad} A)^{\oplus r}.$$

仮定から $(\operatorname{Ker} \pi) J = 0$ となるので $\operatorname{Ker} \pi \in \operatorname{mod} B$ である. 従って (1) より

$$\operatorname{pd}_A \operatorname{Ker} \pi \leq \operatorname{pd}_B \operatorname{Ker} \pi + 1 \leq d + 1$$

を得る. 特に, $\mathrm{pd}_A XJ \leq d+2$ である. また $(X/XJ) \in \mathrm{mod}\, B$ に (1) を適用することで $\mathrm{pd}_A X/XJ \leq d+1$ を得る. $\mathrm{mod}\, A$ における完全列

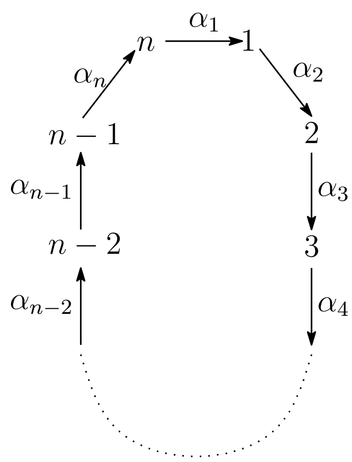
$$0 \to XJ \to X \to X/XJ \to 0$$

より $\mathrm{pd}_A X \leq d+2$ が得られる. ■

□

注意 2.2. 注意 2.1 から quasi-hereditary 代数の大域次元が有限であることがわかった. 実際には任意の非負整数 n に対して, 大域次元 n であるような quasi-hereditary 代数が存在する (下記演習 (1)). また与えられた上限は best possible である (下記演習 (2)).

演習問題. (1) C_n $(n \geq 2)$ を次のクイバーとする.



$\{\alpha_1\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}\alpha_n\}$ で生成される kC_n の両側イデアルを I とし有限次元多元環 $A = kC_n/I$ を考える. このとき A は大域次元 n の quasi-hereditary 代数であることを示せ.

(2) Q を次のクイバーとする.

$$0 \underset{\alpha_1^*}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\alpha_2^*}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} \cdots\cdots \underset{\alpha_n^*}{\overset{\alpha_n}{\rightleftarrows}} n$$

I を $\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i\alpha_{i+1} + \alpha_{i+1}^*\alpha_i^* + \alpha_i^*\alpha_i - \alpha_{i+1}\alpha_{i+1}^*) + \alpha_n^*\alpha_n$ で生成される kQ の両側イデアルとし, $A = kQ/I$ とおく. このとき A は大域次元 $2n = 2|A| - 2$ の quasi-hereditary 代数であることを示せ.

Definition-Theorem 2.3. [1] A を有限次元多元環とすると次の 2 つの値は一致する.

- $\inf\{\mathrm{gl.dim}\, B \mid \mathrm{dom.dim}\, B \geq 2,\ \mathrm{End}_B(I_B(B))$ は A と森田同値 $\}$. ここで $I_B(B)$ は $\mathrm{mod}\, B$ における B の 入射包絡である.
- $\inf\{\mathrm{gl.dim}\,\mathrm{End}_A(M) \mid A \oplus D(A) \in \mathsf{add}\, M\}$.

この値を A の**表現次元**とよび $\mathrm{rep.dim}\, A$ とかく.

表現次元に関するいくつかの結果を述べておく. (詳細は [1], [5], [8], [10] 等を参照されたい.)

命題 2.4. (1) [1] A が半単純でないとする. このとき次は同値.

- A は有限表現型 ($\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ 直既約 A 加群は同型を除き有限個).
- $\mathrm{rep.dim}\, A = 2$.

(2) [1] $\mathrm{gl.dim}\, A \leq 1 \Rightarrow \mathrm{rep.dim}\, A \leq 3$.

(3) [10] $\mathrm{rad}^2 A = 0 \Rightarrow \mathrm{rep.dim}\, A \le 3$.
(4) [5] $\mathrm{rep.dim}\, A \le 3 \Rightarrow \mathrm{fin.dim}\, A < \infty$.
(5) [8] 任意の非負整数 r に対してある A が存在して $\mathrm{rep.dim}\, A = r$.

注意 2.5. 命題 2.4 中で $\mathrm{fin.dim}\, A := \sup\{\mathrm{pd}\, X \mid \mathrm{pd}\, X < \infty\}$ と定義されこれを A の **finitistic 次元**と呼ぶ. Finitistic 次元が有限であるという finitistic 次元予想のもと, 中山予想など種々のホモロジー代数に関する予想が従う.

表現次元に関して Xi によって次の予想が提唱された.

予想 1. [11]
(1) 任意の有限次元多元環 A に対して $\mathrm{rep.dim}\, A < \infty$.
(2) $M \in \mathrm{mod}\, A$ に対してある $M' \in \mathrm{mod}\, A$ が存在して $\mathrm{End}(M \oplus M')$ は quasi-hereditary 代数になる.

上の予想 (1) は (2) から従う. 実際, $M = A \oplus D(A)$ とすれば quasi-hereditary 代数の大域次元の有限性 (定理 2.1) および表現次元の定義から A の表現次元の有限性が従う.

定理 2.6. [6] 予想 *1* は成り立つ.

Sketch of proof. 以下では [7] に基づき, 定理 2.6 の証明を与える.

設定. $X \in \mathrm{mod}\, A$ に対して $\gamma X := \mathrm{rad}(X, X)X$ と定める.

- $M_1 := X$, $M_i := \gamma M_{i-1}$ $(i > 0)$.
- $d = d(X) := \sup\{i \mid M_i \ne 0\}$. (下記注意 2.7 より $d < \infty$.)
- $M := \oplus_{i=1}^{d} M_i$, $M_{>t} := \oplus_{i>t} M_i$. $B := \mathrm{End}_A(M)$
- M の直既約因子 N に対し, $P(N) := \mathrm{Hom}_A(M, N)$, $S(N) := P(N)/\mathrm{rad}_B\, P(N)$, $\ell(N) := \max\{\ell \mid N \in \mathsf{add}\, M_\ell\}$ と定める.
- $\Lambda :=$ M の直既約因子の同型類の完全代表系とし $\le$ を Λ 上の全順序であって $\ell(N) < \ell(N') \Rightarrow N < N'$ を満たすものとする.

注意 2.7. $X \in \mathrm{mod}\, A$ とする. 次を示せ.
(1) $\gamma X \in \mathsf{Fac}\, X$.
(2) $X \ne 0 \Rightarrow \gamma X \subsetneq X$.
(3) $X = Y \oplus Z \Rightarrow \gamma X = \mathrm{rad}(X, Y)X \oplus \mathrm{rad}(X, Z)X$.

命題 2.8. $N \in \Lambda$ とし, $N \in \mathsf{add}\, M_i \setminus \mathsf{add}\, M_{i+1}$ を満たす i を *1* つとってくる. この i に対し $\alpha N = \mathrm{rad}(M_i, N)M_i$ とおく.
(1) $\alpha N \subsetneq N$ であり自然な単射

$$u : \alpha N \to N$$

は N の極小右 $\mathsf{add}\, M_{>i}$ 近似を与える.
(2) i は一意的, つまり $i = \ell(N)$.

Proof. (2) は (1) より従うので (1) を示せばよい. まず $\alpha N = \mathrm{rad}(M_i, N)M_i \in \mathsf{add}\, M_{i+1}$ が注意 2.7 (3) より従う. 実際, $M_i = N \oplus N'$ とおけば $M_{i+1} = \gamma M_i = \mathrm{rad}(M_i, N)M_i \oplus \mathrm{rad}(M_i, N')M_i$ である. 特に $\alpha N \subsetneq N$ が従う.

従って $u : \alpha N \to N$ が N の右 $\mathsf{add}\, M_{>i}$ 近似であることを示せばよい (右極小であることは u が単射であることから従う). つまり $g : M_j \to N$ $(j > i)$ としたとき, $\mathrm{Im}\, g \in \alpha N$ であることを示せばよい. 注意 2.7 (1) より全射の列

$$M_i^{\oplus r'} \xrightarrow{\eta'} M_{i+1}^{\oplus r} \xrightarrow{\eta} M_j$$

が存在する．$\varphi := g\circ\eta\circ\eta'$ とおけば $\varphi\in\operatorname{rad}(M_i^{\oplus r'}, N)$ である (そうでなければ $g\circ\eta : M_{i+1}^{\oplus r}\to N$ が分裂全射となり矛盾)．従って

$$\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}\varphi \subset \operatorname{rad}(M_i, N)M_i = \alpha N.$$

□

系 2.9. $N\in\Lambda$, $\ell(N)=\ell$ とする．
(1) $u : \alpha N\to N$ は $\operatorname{mod} B$ における完全列

$$0\to \operatorname{Hom}_A(M,\alpha N)\xrightarrow{\operatorname{Hom}_A(M,u)}\operatorname{Hom}_A(M,N)\xrightarrow{\pi}\operatorname{Hom}_A(M,N)/\langle\mathsf{add}\, M_{>\ell}\rangle\to 0$$

を誘導する．ここで $\langle\mathsf{add}\, M_{>\ell}\rangle := \{f\in\operatorname{Hom}_A(M,N)\mid f$ は $\mathsf{add}\, M_{>\ell}$ を通過する $\}$.
(2) $K(N) := \operatorname{Hom}_A(M,\alpha N)\in\operatorname{mod} B$ とおく．このとき

$$P(N'')\in\mathsf{add}\, K(N)\Rightarrow \ell(N'')>\ell(N)\Rightarrow N''>N.$$

(3) $\Delta(N) := \operatorname{Hom}_A(M,N)/\langle\mathsf{add}\, M_{>i}\rangle\in\operatorname{mod} B$ とおく．このとき

$$[\operatorname{rad}\Delta(N) : S(N')]\neq 0\Rightarrow \ell(N')<\ell(N)\Rightarrow N'<N.$$

Proof. (1) および (2) は命題 2.8 より直ちに従うので (3) を示す．$[\Delta(N) : S(N')]\neq 0$ とする ($N'\in\Lambda$)．このとき, ある $f : N'\to N$ で $\mathsf{add}\, M_{>\ell}$ を通過しないものが存在する．特に $\ell(N')\leq\ell=\ell(N)$ である．また $\ell(N')=\ell(N)$ かつ $N'\neq N$ であれば $\widetilde{f} : \iota_N\circ f\circ\pi'_N\in\operatorname{rad}(M_\ell, M_\ell)$ である, ここで $\iota_N : N\to M_\ell$ は標準単射, $\pi'_N : M_\ell\to N'$ は標準全射とした．よって $\operatorname{Im}\widetilde{f}\in\gamma M_\ell = M_{\ell+1}$ であるが, これは f が $\mathsf{add}\, M_{>\ell}$ を通過しないことに矛盾する．次に $N'=N$ のときを考える．$f\in\operatorname{rad}(N,N)$ であれば $\ell(N')=\ell(N)$ かつ $N'\neq N$ の場合と同様にして矛盾が出る．従って $f\notin\operatorname{rad}(N,N)$ である．N は直既約なので, f は全単射である．よって $\pi\circ\operatorname{Hom}_{M,f} : P(N)\to\Delta(N)$ は全射となる．特に $[\operatorname{rad}\Delta(N), S(N)]=0$ が従う． □

Corollary 2.9 (2), (3) から $\Delta(N)$ は Λ 上の全順序 $\leq$ に関する B の標準加群であることがわかる．また (1) より $P(N)\in\mathcal{F}(\Delta)$ なので B は quasi-hereditary 代数である．

注意 2.10. 構成で $X=A$ とすると, $A\cong eBe$ となる冪等元 $e\in B$ がとれる．従って任意の有限次元多元環は quasi-hereditary 多元環を冪等元ではさんだ多元環として実現できる．ただしこの事実自体は Auslander および Dlab-Ringel が別の構成 (Auslander-Dlab-Ringel 代数) で最初に示している．

演習問題. $A=k[T]/(T^3)$, $X=A$ および B を定理 2.6 の証明の中で構成した多元環とする．
(1) Q を次のクイバーとする．

$$1 \underset{\alpha^*}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta^*}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 3$$

I を $\alpha^*\alpha-\beta\beta^*$, $\beta^*\beta$ で生成される kQ の両側イデアルとし, $C=kQ/I$ とおく．このとき, $B\cong C$ を示せ．
(2) C は自然な全順序 $1<2<3$ により quasi-hereditary 代数となるが標準加群がそれぞれ

$$\Delta(1)=P(1)/\operatorname{rad}P(1)=S(1),\ \Delta(2)=P(2)/\beta B\simeq P(3),\ \Delta(3)=P(3)$$

で与えられることを示せ．

(3) 多元環としての同型

$$A \cong e_1 C e_1$$

を具体的に同型射像を与えることで示せ.

References

[1] *M. Auslander*, Representation dimension of Artin algebras, Queen Mary College Mathematics Notes, Queen Mary College, London, 1971.

[2] *E. Cline*, *B. Parshall* and *L. Scott*, Finite dimensional algebras and highest weight categories, J. Reine Angew. Math. **391**, (1988), 85-99.

[3] *V. Dlab* and *C. M. Ringel*, Quasi-hereditary algebras, Illinois J. Math. 33 (1989), no. 2, 280-291.

[4] *V. Dlab* and *C. M. Ringel*, The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras, Representations of algebras and related topics (Kyoto, 1990), 200-224, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 168, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[5] *K. Igusa* and *G. Todorov*, On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras, Representations of algebras and related topics, 201-204, Fields Inst. Commun., 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[6] *O. Iyama*, Finiteness of representation dimension, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 4, 1011-1014.

[7] *C. M. Ringel*, Iyama's finiteness theorem via strongly quasi-hereditary algebras, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 9, 1687-1692.

[8] *R. Rouquier* Representation dimension of exterior algebras, Invent. Math. **165** (2006), no. 2, 357-367.

[9] *M. Uematsu* and *K. Yamagata*, On serial quasi-hereditary rings, Hokkaido Math. J. **19** (1990), no. 1, 165-174.

[10] *C. C. Xi*, On the Representation Dimension of Finite Dimensional Algebras, J. Algebra **226** (2002), no. 1, 332-346.

[11] *C. C. Xi*, Representation dimension and quasi-hereditary algebras, Adv. Math. **168** (2002), no. 2, 193-212.