可換環上の最高ウエイト圏、準遺伝的代数とルコルマン

源　泰幸

1　始めに

この講義の目的は文献 [2] の第一章の内容の紹介です。

内容は大雑把には次の二点です。

1. 可換環 $\mathbf{k}$ 上の最高ウエイト圏や分裂準遺伝的代数の定義の紹介
2. 可換環 $\mathbf{k}$ 上の最高ウエイト圏のホモロジー的ルコルマンを用いた特徴づけ

ルコルマンの定義やその周辺の事柄をご存知であれば直接論文をご覧になれば証明は理解出来ます。

このノートは講義の補助として随伴関手対やルコルマンの定義を復習したり、主定理の鍵であるホモロジー的ルコルマンの紹介をします。

主定理には完全圏を用いて述べられます。完全圏については良い文献 [1] があるのでこちらをご覧ください。

2　随伴関手対

圏論の基本的な事柄に関しては基本的な教科書（例えば [6]）を参考にして下さい。

ルコルマンは幾つかの随伴関手対の組で然るべき性質を満たすものと定義されます。なので、先ず随伴関手対を復習します。

定義 2.1. 関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と関手 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ の組 (F, G) が**随伴関手対**とは、次の $c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$ に関して自然な同型が存在することと定める：

$$\Phi_{c,d} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(c), d) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(c, G(d)).$$

随伴関手対 (F, G) から次の自然変換が得られます

$$\eta_c : c \to GF(c), \epsilon_d : FG(d) \to d.$$

それぞれ単位射、余単位射というのでした。

随伴関手対 (F, G) が存在するとき F を G の左随伴、G を F の右随伴と呼ぶ。随伴関手対 (F, G) の表示の仕方は「$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$」というのが代表的だが、下の様なのもある。スペースは取るが、次に出てくる随伴関手三つ組の表示には適している。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, bend left, "G"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

定義 2.2. 関手 $F,H:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ と関手 $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ の組 (F,G,H) が**随伴関手三つ組** ***(adjoint triple)*** とは、(F,G) と (G,H) がそれぞれ随伴関手対であることと定める。

これは以下の様に表示される：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[d, "G"] \\ \mathcal{C} \arrow[u, bend left=70, "F"] \arrow[u, bend right=70, "H"'] \end{tikzcd}$$

練習問題 2.3. $\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ をアーベル圏とします。（特に加群圏としても問題はありません。）

1. 左随伴関手 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ は右完全である。また無限直和とも可換である。
2. $F:\mathcal{A}\leftrightarrows\mathcal{B}:G$ を随伴関手対とする。G がエピ射を保つならば F は射影対象を保つ。
3. 関手 $F,H:\mathcal{A}\to\mathcal{B},\ G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ は随伴三つ組 (F,G,H) を成すとする。すると F は射影対象を保ち、H は入射対象を保つ [1]。
4. 右随伴関手 $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ が忠実充満である為の必要十分条件は余単位射 $FG(b)\to b$ が任意の対象 $b\in\mathcal{B}$ に対し同型であることである。（注：この命題は一般の圏で成り立つ。）

例 2.4. A,B を環とします。

1. 両側加群 ${}_AX_B$ にたいして $T_X=-\otimes_A X:\operatorname{Mod}A\to\operatorname{Mod}B$ と $H_X=\operatorname{Hom}_B(X,-):\operatorname{Mod}B\to\operatorname{Mod}A$ は随伴関手対 (T_X,H_X) を成す。
2. 環準同型 $f:A\to B$ から定まる制限関手を $\mathsf{rest}^B_A:\operatorname{Mod}B\to\operatorname{Mod}A,\ M_B\mapsto M_A$ と書きます。これは右と左の随伴を持ちます。というのは　ホム関手としての表示 $\mathsf{rest}^B_A=\operatorname{Hom}_B(B,-)$ からテンソル関手 $-\otimes_A B$ が左随伴であることが従いテンソル関手としての表示 $\mathsf{rest}^B_A=-\otimes_B B$ から $\operatorname{Hom}_A(B,-)$ が右随伴であることが従うからです。

   まとめると以下の随伴関手三つ組が得られます：

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Mod}B \arrow[d, "\mathsf{rest}"] \\ \operatorname{Mod}A \arrow[u, bend left=70, "-\otimes_A B"] \arrow[u, bend right=70, "\operatorname{Hom}_A(B,-)"'] \end{tikzcd}$$

例 2.5. 1. 右 A 加群 M は自己準同型環 $E:=\operatorname{End}_A(M)$ 上の左加群の構造を自然に持ちます。なので随伴関手対 $F:=-\otimes_E M:\operatorname{Mod}E\leftrightarrows\operatorname{Mod}A:\operatorname{Hom}_A(M,-)=G$ ができます。

<u>**演習問題**</u> この随伴関手対 (F,G) が随伴関手三つ組 (F,G,H) に拡張されるための必要十分条件は M が有限生成射影であることである。更にこの条件が成り立つとき左 A 加群 $M^*=\operatorname{Hom}_A(M,A)$ をこう書くことにすると、$G=-\otimes_A M^*$ である。また、M^* は自然に右 E 加群の構造をもち $H=\operatorname{Hom}_E(E^*,-)$ である。

ヒント：完全性に対する要請から M が射影加群であることが従う。有限生成性は直和と交換することからでる。詳しく言えば次の事実がある：射影加群 M が有限生成であることと任意の族 $\{N_\Lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して自然な準同型 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\operatorname{Hom}(M,N_\lambda)\to\operatorname{Hom}(M,\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda)$ が同型であることは同値である [2]。

---

[1]相対的な射影対象入射対象に関しても然るべく定式化すればこの命題の様々な変種が成り立ちます。裏を返せば随伴関手対（または三つ組）があれば $\mathcal{B}$ の相対的ホモロジー的な構造を $\mathcal{A}$ に持ち上げることが出来ます。（伊山さんとの複体の一般化に関する共同研究でそれを使っています。）

[2]M が射影的でない場合はどうなのでしょうか？考えてみましょう。

2. 環 A, B に対し以下の随伴三つ組が存在したとします：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}\,A \arrow[d, "j^!"] \\ \mathrm{Mod}\,B. \arrow[u, bend left=60, "j_!"] \arrow[u, bend right=60, "j_*"'] \end{tikzcd}$$

上と同様にして $j_!$ は有限生成射影加群を保つことが判ります。特に $\Delta := j_! B$ は有限生成射影 A 加群です。

$j_!$ が左完全であり直和と可換であることから自然同型 $j_! \cong - \otimes_B \Delta$ が得られます。（これを見るためには B 加群 M の自由表示 *(free presentation)*$B^I \to B^J \to M \to 0$ を使えばいいです。）このことから随伴関手の一意性により $j^! \cong \mathrm{Hom}_A(\Delta, -), j_* \cong \mathrm{Hom}_B(\Delta^*, -)$ を得ます。

3. 我々とって重要なのは次の例です。

A を環、$e \in A$ をべき等元とします。右 A 加群 $M = eA$ に対して上の構成を行うと次の随伴三つ組が得られます。

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}\,A \arrow[d, "U"] \\ \mathrm{Mod}\,eAe \arrow[u, bend left=60, "-\otimes_{eAe} eA"] \arrow[u, bend right=60, "\mathrm{Hom}_{eAe}(Ae,-)"'] \end{tikzcd}$$

ここで関手 $U : \mathrm{Mod}\,A \to \mathrm{Mod}\,eAe$ は A 加群 M に対して e を右から掛けて得られる eAe 加群を対応させる関手です[3]。

3　ホモロジー的埋め込み

関手 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が忠実充満とは任意の対象 $a, a' \in \mathcal{A}$ に対してホムに誘導される写像が同型になることでした。

$$F_{a,a'} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(a, a') \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(a), F(a'))$$

これの全射性を充満、単射性を忠実といいました。記号としては $F : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ で表されることもあります。忠実充満関手のことを埋め込み関手や包含関手といったりします。こういう言葉遣いをする意図は、この関手を固定して $\mathcal{A}$ を $\mathcal{B}$ の部分圏と見做す、ということです。

練習問題 3.1.　*1.* アーベル圏の埋め込み $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が完全関手であれば任意の対象 $a, a' \in \mathcal{A}$ に対して米田拡大類を対応させることで第 1 次の拡大群に写像が誘導される。

$$F^1_{a,a'} : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(a, a') \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(F(a), F(a'))$$

2. 完全な埋め込み $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が第 1 次の拡大群に誘導する写像が任意の $a, a' \in \mathcal{A}$ に対して同型である為の必要十分条件は $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ が拡大で閉じていることである。

この演習問題により完全埋め込み $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ によりホム集合（＝第 0 次の拡大群）と第 1 次の拡大群に誘導される写像は同型です。では $n \geq 2$ に対して第 n 次の拡大群に誘導される写像はどうなのでしょう？
一般には同型になりません。

[3]射の対応がどうなるかは各自で考えましょう。

練習問題 3.2. A を下のクイバーと関係式で定義される代数とし e_1 を頂点 1 に対応するべき等元とする。このとき埋め込み関手 $\mathrm{Mod}\,A/\langle e_1\rangle \to \mathrm{Mod}\,A$ が第 2 次の拡大群 Ext^2 に誘導する写像は同型でないことをしめせ。ヒント：頂点 2 に対応する単純加群を考えよう。

$$\text{クイバー}: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\alpha"] & 2 \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}, \qquad \text{関係式}: \alpha\beta = 0, \beta\alpha = 0.$$

定義 3.3. アーベル圏の完全埋め込み $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が**ホモロジー的埋め込み**とは任意の自然数 n と任意の対象 $a, a' \in \mathcal{A}$ に対して誘導される写像 $F^n_{a,a'}$ が同型であることと定める。

$$F^n_{a,a'} : \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{A}}(a, a') \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{B}}(F(a), F(a'))$$

練習問題 3.4. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ は十分な射影的対象をもつとする。完全埋め込み $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ がホモロジー的埋め込みである為の必要十分条件は次が成り立つことである。

条件を記述するために一つだけ定義をする必要があります。

射影的対象 $q \in \mathcal{A}$ が**良い**[4] とは射影的対象 $p \in \mathcal{B}$ からのエピ射 $\phi : p \to F(q)$ が存在して

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}}(\ker(\phi), F(a)) = 0$$

が任意の $a \in \mathcal{A}$ に対して成り立つことと定める。

条件は「任意の $a \in \mathcal{A}$ は良い射影的対象 p からのエピ射 $p \to a$ を持つこと」である。

4 ルコルマン、ホモロジー的ルコルマン

アーベル圏のルコルマン、ホモロジー的ルコルマンについての詳しいことは論文 [4] をご覧ください。

定義 4.1. アーベル圏 $\mathcal{A}', \mathcal{A}, \mathcal{A}''$ に関する下の図式が**ルコルマン (recollement)** とは以下の条件が成り立つことと定める。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}' \arrow[d, "i_*"] \\ \mathcal{A} \arrow[u, bend left=60, "i^*"] \arrow[u, bend right=60, "i^!"'] \arrow[d, "j^!"] \\ \mathcal{A}'' \arrow[u, bend left=60, "j_!"] \arrow[u, bend right=60, "j_*"'] \end{tikzcd}$$

1. $(i^*, i_*, i^!), (j_!, j^!, j_*)$ は随伴関手三つ組。

2. $i_*, j_!, j_*$ は忠実充満。

3. $\mathrm{Im}\, i_* = \mathrm{Ker}\, j^!$

このルコルマンのあるとき忠実充満関手 $i_* : \mathcal{A}' \hookrightarrow \mathcal{A}$ により $\mathcal{A}'$ を $\mathcal{A}$ の部分圏と見做す。

練習問題 4.2. 定義 *4.1* のルコルマンを考えたとき部分圏 $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ は商対象、部分対象、拡大で閉じている。

命題 4.3 ([4, Proposition 2.6])**.** 定義 *4.1* のルコルマンが与えられているとき、任意の対象 $a \in \mathcal{A}$ に対して単位射、余単位射から次の完全列が得られる：

$$0 \to \mathrm{Ker} \to j_! j^!(a) \to a \to i_* i^*(a) \to 0$$
$$0 \to i_* i^!(a) \to a \to j_* j^!(a) \to \mathrm{Coker} \to 0$$

[4]言うまでもなく一時的な定義です。

定義 4.4. 定義 *4.1* のルコルマンが**ホモロジー的 (homological)** とは関手 i_* がホモロジー的埋め込みであることと定める。

命題 4.5 (Krause [3, Proposition A.2])**.** アーベル圏 $\mathcal{A}$ は十分な射影的対象を持つとする。定義 *4.1* のルコルマンがホモロジー的である為の必要十分条件は任意の射影的対象 $P \in \mathcal{A}$ に対して余単位射 $j_! j^!(P) \to P$ がモノ射になることである。

練習問題 4.6. 練習問題 *3.4* を用いて上の命題の十分性を示せ。

5 短完全列と第一次拡大群、普遍拡大

主定理の証明に用いられる普遍拡大という概念を紹介するのがこの節の目標です。短完全列と第一次拡大群関係のの詳しいことはホモロジー代数の教科書、例えば [5, 第 3 章] を参考にして下さい。

短完全列 $\xi : 0 \to L \to M \to N \to 0$ と第 1 次拡大群 $\mathrm{Ext}^1(N, L)$ の関係を復習しましょう。言葉の問題ですが眺め方によっては短完全列 ξ は「N の L による拡大」という別名を持っていたことを思い出しておきます。

短完全列 ξ にホム関手 $\mathrm{Hom}(-, L)$ を当ててできるホモロジー完全列を考えると次の境界準同型が得られます：

$$\partial : \mathrm{Hom}(L, L) \to \mathrm{Ext}^1(N, L).$$

この準同型 ∂ による恒等写像 id_L の像を $[\xi]$ と表し、短完全列 ξ に対応する拡大類と呼びました。

ここで大切になるのは第一次拡大群の任意の元 $x \in \mathrm{Ext}^1(N, L)$ に対してこれを拡大類とする短完全列 ξ が短完全列の同型を法として一意的に存在するということです。

第一次拡大群 $\mathrm{Ext}^1(N, L)$ は基礎環 $\mathbf{k}$ 上加群として有限生成と仮定します。この条件の下で **普遍拡大 (universal extension)** とは以下の様に構成される拡大です。先ず第一次拡大群 $\mathrm{Ext}^1(N, L)$ の生成元 $x_1, \ldots, x_r$ を選びます [5]。次に同型 $\mathrm{Ext}^1(N, L^r) \cong \mathrm{Ext}^1(N, L)^r$ の下で右辺の元 $(x_1, \ldots, x_r)$ に対応する左辺の元を $\tilde{x} \in \mathrm{Ext}^1(N, L^r)$ とします。そして、この $\tilde{x}$ を拡大類とする短完全列

$$\tilde{\xi} : 0 \to L^r \to M \to N \to 0$$

を普遍拡大と呼びます。

これの大事な性質は次です。

練習問題 5.1.

1. 上の普遍拡大 $\tilde{xi}$ に関手 $\mathrm{Hom}(-, L)$ を当てて得られる境界写像 $\partial : \mathrm{Hom}(L^r, L) \to \mathrm{Ext}^1(N, L)$ は全射である。

2. 加群 L が $\mathrm{Hom}(L, L) \cong \mathbf{k}$ を満たすとする。短完全列 $\eta : 0 \to L^s \to M \to N \to 0$（$s$ は自然数）から誘導される境界写像 $\partial : \mathrm{Hom}(L^s, L) \to \mathrm{Ext}^1(N, L)$ が全射であれば短完全列 η は普遍拡大として得られる。

3. 加群 L は $\mathrm{Hom}(L, L) \cong \mathbf{k}$ を満たす射影加群とする。短完全列 $\eta : 0 \to L^s \to M \to N \to 0$（$s$ は自然数）の中間項 M が射影加群であれば短完全列 η は普遍拡大として得られる。

然るべき状況では上の練習問題 5.1.3 の逆が成り立ち、それが [3] では主定理の証明の鍵です。

[5] 基礎環 $\mathbf{k}$ が体の場合は基底をとる。そのことで一意性が保証される。基礎環が一般の場合はそういう訳にはいかないので任意性が出てくる。なので半普遍拡大とか呼びたくなるけれども。。。

6　最高ウエイト圏、分裂準遺伝的代数

定義 6.1. $\mathbf{k}$ 代数 Λ に対して $\mathrm{mod}(\Lambda, \mathbf{k})$ で $\mathbf{k}$ 上有限生成射影加群である様な Λ 加群の圏をあらわす。

$\mathbf{k}$ 上有限生成射影加群である様な $\mathbf{k}$ 代数 Λ を**分裂 $\mathbf{k}$ 代数 (split k-algebra)** と呼びましょう [6]。

練習問題 6.2.　*1.* 部分圏 $\mathrm{mod}(\Lambda; \mathbf{k}) \subset \mathrm{Mod}\,\Lambda$ は全射の核で閉じてることを示せ。

つまり、Λ 加群の短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ の N, M が $\mathrm{mod}(\Lambda; \mathbf{k})$ に属するならば L もそうである。

2.

定義 6.3. $\mathcal{A}$ を $\mathbf{k}$ 線形完全圏とする。ある分裂 $\mathbf{k}$ 代数 Λ が存在して $\mathbf{k}$ 線形完全圏として $\mathcal{A}$ と $\mathrm{mod}(\Lambda, \mathbf{k})$ は同値と仮定する。

この設定の下で $\mathcal{A}$ が **$\mathbf{k}$ 線形最高ウエイト圏 (k-linear highest weight category)** であることを以下の性質 *(1)*〜*(4)* を満たす短完全列の列

$$0 \to U_i \to P_i \to \Delta_i \to 0 \quad (1 \le i \le n) \tag{6-1}$$

が存在することと定める：

(1) $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(\Delta_i) = \mathbf{k}$ *for all* i.

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Delta_i, \Delta_j) = 0$ *for all* $i > j$.

(3) U_i は $\mathsf{filt}(\Delta_{i+1}, \ldots, \Delta_n)$ に属する。

(4) $\bigoplus_{i=1}^{n} P_i$ は $\mathcal{A}$ の射影生成対象である。

定義 6.4. $\mathbf{k}$ 代数 A が**分裂準遺伝的 (split quasi-hereditary)** とはこれがある $\mathbf{k}$ 線形最高ウエイト圏の射影生成対象の自己準同型環と $\mathbf{k}$ 上同型であることと定義する。

練習問題 6.5.　*1.* 分裂 $\mathbf{k}$ 代数 Λ 上の射影加群は $\mathbf{k}$ 加群としても射影的である。

2. 分裂準遺伝的代数 A は分裂 $\mathbf{k}$ 代数である。

6.1　主定理の証明の補足

主定理の証明でホモロジー的ルコルマンの列の存在から最高ウエイト圏であることを示す際の鍵は次です。

命題 6.6. Λ, Λ' を分裂 $\mathbf{k}$ 代数とします。ホモロジー的ルコルマン

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}\,\Lambda' \arrow[d, "i_*"] \\
\mathrm{Mod}\,\Lambda \arrow[u, bend left=60, "i^*"] \arrow[u, bend right=60, "i^!"'] \arrow[d, "j^!"] \\
\mathrm{Mod}\,\mathbf{k} \arrow[u, bend left=60, "j_!"] \arrow[u, bend right=60, "j_*"']
\end{tikzcd}$$

が与えられているとする。関手 i_* は $\mathrm{mod}(\Lambda'; \mathbf{k})$ を $\mathrm{mod}(\Lambda; \mathbf{k})$ に移すと仮定する。

$\Delta := j_!\mathbf{k}$ とおく。このとき、任意の有限生成射影 Λ' 加群 P' に対して完全列

$$0 \to \Delta^r \to P \to P' \to 0$$

で P は射影的 Λ 加群、r は自然数となるものが存在する。

[6] 何処かでこの用語を見かけた気がしたのですが、探してみても文献が見つからないので一時的な用語と思っておいて下さい。

$\Delta := j_!\mathbf{k}$ は有限生成射影的 Λ 加群であり、

$$j_! = - \otimes_{\mathbf{k}} \Delta, j^! = \mathrm{Hom}_\Lambda(\Delta, -), j_* = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\Delta^*, -)$$

が成り立ちます。関手 $j_!$ が忠実充満なので同型 $\mathrm{End}_\Lambda(\Delta) \cong \mathbf{k}$ が従います。

練習問題 6.7. 任意の有限生成射影 Λ 加群 P に対して $j^!(P)$ は有限生成射影 $\mathbf{k}$ 加群である。

$\mathrm{proj}\,\Lambda', \mathrm{proj}\,\Lambda$ でそれぞれの代数上の有限生成射影加群の圏を表します。
上の練習問題と命題 4.5 から次が従います。

補題 6.8. *1.* $\mathrm{proj}\,\Lambda \subset \mathsf{filt}(\Delta, \mathrm{proj}\,\Lambda')$.

2. $\mathrm{proj}\,\Lambda = \mathrm{proj}(\mathsf{filt}(\Delta, \mathrm{proj}\,\Lambda'))$ 右辺は完全圏としての射影対象を表します。

3. 任意の Λ' 射影加群 $P' \in \mathrm{proj}\,\Lambda'$ に対して第一次拡大群 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P', \Delta)$ は有限生成 $\mathbf{k}$ 加群。

埋め込み $i_* : \mathrm{mod}(\Lambda'; \mathbf{k}) \hookrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda; \mathbf{k})$ により左側の圏を右側の部分圏と見做していることを思い出しておきます。

補題の証明. 1. 命題 4.5 より、$P \in \mathrm{proj}\,\Lambda$ に対して完全列 $0 \to j_!j^!P \to P \to i_*i^*P \to 0$ が存在する。$i^*P \in \mathrm{proj}\,\Lambda'$ であり、また $j^!P \in \mathrm{proj}\,\mathbf{k}$ より主張が従う。

2. 練習問題とします。([2, Lemma 1.5] を使います。)

3. $P' \in \mathrm{proj}\,\Lambda'$ は仮定より有限生成 Λ 加群なので、ある $P \in \mathrm{proj}\,\Lambda$ からの全射 $f : P \to i_*P'$ が存在する。これは単位射 $\eta : P \to i_*i^*P$ を経由する、つまり、f は $f : P \xrightarrow{\eta} i_*i^*P \xrightarrow{\xi} i_*P'$ と分解する。i_* は忠実充満であるから $\xi' : i^*P \to P'$ が存在して $i_*\xi' = \xi$ を満たす。この ξ' は全射でなくてはならない(練習問題)。P' が射影的であることから ξ' は分裂する。よって、ある $Q' \in \mathrm{proj}\,\Lambda'$ が存在して $i^*P \cong P' \oplus Q'$ という同型が出来る。

命題 4.5 の完全列は $0 \to j_!j^!P \to P \to i_*P' \oplus i_*Q' \to 0$ と書き替えられる。P は射影的なのでこれにホム関手 $\mathrm{Hom}_\Lambda(-, \Delta)$ を当てることで、次の全射を得る $\mathrm{Hom}_\Lambda(j_!j^!P, \Delta) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(i_*P' \oplus i_*Q', \Delta)$. □

あとは [3, Lemma 5.8] を使って、任意の有限生成 Λ' 加群の普遍拡大 $0 \to \Delta^r \to P \to P' \to 0$ の中間項 P が $\mathsf{filt}(\Delta, \mathrm{proj}\,\Lambda')$ の射影対象であることを確かめれば、上の補題から P が有限生成射影的 Λ 加群であることが従い命題の証明が完了します。

7 分裂代数 Λ の分裂加群圏 $\mathrm{mod}(\Lambda; \mathbf{k})$ に関する注意

分裂代数 Λ の分裂加群圏 $\mathrm{mod}(\Lambda; \mathbf{k})$ は体上の有限次元代数の有限生成加群圏の様なものかと思っていましたが、上手くいっていない部分もあります。

7.1 ホム加群 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ の $\mathbf{k}$ 上の有限生成性

ホム加群 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ が何時でも基礎環 $\mathbf{k}$ 上有限生成という訳ではありません。

例 7.1. 上半三角行列環 $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{k}e_{11} & \mathbf{k}e_{12} \\ 0 & \mathbf{k}e_{22} \end{pmatrix}$ を考えます。別の見方では道代数 $\Lambda = \mathbf{k}[\to]$ ですね。
基礎環の元 $x \in \mathbf{k}$ に対して分裂 Λ 加群 M_x を以下で定義します:

$\mathbf{k}$ 加群としては $M_x := \mathbf{k}m_1 \oplus \mathbf{k}m_2$、

Λ の作用は $m_1e_{11} := m_1, m_1e_{12} = m_2x, m_2e_{22} = m_2$ その他の基底の積は 0.

クイバーの表現としては $M_x = [\mathbf{k} \xrightarrow{x} \mathbf{k}]$ です。基礎環が体の場合はこの右加群は射影加群 $e_{11}\Lambda$ と同型ですが、一般にはそうとは限りません。二つの加群 M_x と $e_{11}\Lambda$ が同型となる必要十分条件はなにか考えるのは初歩的な練習問題です。

練習問題 7.2. 基礎環の元 $x, y \in \mathbf{k}$ に対して次の $\mathbf{k}$ 加群としての準同型が存在する。

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M_x, M_y) \cong \{(a,b) \in \mathbf{k}^2 \mid ay - bx\}$$

さて、この加群が何時でも有限生成かというとそうでもありません。

例 7.3. $\mathbf{k} = \mathbb{Z}[x, y, a_i, b_i \mid i \in \mathbb{Z}]/(a_i y - b_i y)$ の場合は上のホム加群 $\mathrm{Hom}_\Lambda(M_x, M_y)$ は $\mathbf{k}$ 加群として有限生成ではない。

基礎環を一般の可換環とすると少し困るかも知れない訳です。ネター性を課せば有限生成性が保証されます。

練習問題 7.4. 基礎環 $\mathbf{k}$ がネター環ならば分裂代数 Λ 上の分裂加群圏 $\mathrm{mod}(\Lambda; \mathbf{k})$ のホム加群は $\mathbf{k}$ 上有限生成である。

7.2 第一次拡大加群 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N)$ の $\mathbf{k}$ 上の有限生成性

第一次拡大群も何時でも $\mathbf{k}$ 上有限生成という訳には行きません。

例 7.5. 上半三角行列環 $\Lambda = \begin{pmatrix} \mathbf{k}e_{11} & \mathbf{k}e_{12} & \mathbf{k}e_{13} \\ 0 & \mathbf{k}e_{22} & \mathbf{k}e_{23} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}e_{33} \end{pmatrix}$ を考えます。別の見方では道代数 $\Lambda = \mathbf{k}[1 \to 2 \to 3]$ ですね。

基礎環の元 $x \in \mathbf{k}$ に対して分裂 Λ 加群 M_x, N_x を以下のクイバー表現で定義します：

$$M_x := [0 \to \mathbf{k} \xrightarrow{x} \mathbf{k}], N_x := [\mathbf{k} \xrightarrow{x} \mathbf{k} \to 0].$$

M_x のキチンとした定義を書いておきます。クイバー表示になれていない人には N_x の定義を書き下すのは良い演習でしょう。

$\mathbf{k}$ 加群としては $M_x := \mathbf{k}m_2 \oplus \mathbf{k}m_3$、

Λ の作用は

$$m_i e_{jk} := \begin{cases} m_i & i = j = k \\ m_k x & i = j \neq k \\ 0 & \text{other cases} \end{cases}$$

今から第一次拡大群 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N_x, M_y)$ が一般には基礎環 $\mathbf{k}$ 上有限生成にならないことを確かめます。

拡大群の表示を得るために N_x の射影分解を構成しましょう。基礎環が体の場合なら（体上の）多元環の表現論の初歩ですが、今の場合は様子が少しことなります。

べき等元 e_{11}, e_{22}, e_{33} に対応する射影加群を $P_i = e_{ii}\Lambda$ とおきます。

すると N_x の射影分解は以下で与えられます

$$0 \to P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{g} P_1 \oplus P_2 \xrightarrow{f} N_x \to 0$$

但し準同型 f, g は以下で定められています：

$$f_1 = 1 : \mathbf{k} \to \mathbf{k}, f_2 = \begin{pmatrix} x & 1 \end{pmatrix} : \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \to \mathbf{k}, f_3 = 0 : \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \to 0$$
$$g_1 = 0 : 0 \to \mathbf{k}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix} : \mathbf{k} \to \mathbf{k} \oplus \mathbf{k}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} : \mathbf{k} \oplus \mathbf{k} \to \mathbf{k} \oplus \mathbf{k}$$

ホム加群は $\mathbf{k}$ 加群として以下の表示を持ちます：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, M_y) = 0\\
&\mathrm{Hom}_\Lambda(P_2, M_y) \cong \{(a,b)\in \mathbf{k}^2 \mid ay-b=0\}, \quad \phi\mapsto(\phi_2,\phi_3),\\
&\mathrm{Hom}_\Lambda(P_3, M_y) \cong \mathbf{k}, \quad \phi\mapsto \phi_3.
\end{aligned}$$

これでもって拡大群を計算しましょう。拡大群は次の準同型の余核です

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P_1\oplus P_2, M_y) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(g,M_y)} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_2\oplus P_3, M_y).$$

これは上の表示でみると次の準同型です

$$\{(a,b)\in\mathbf{k}^2 \mid ay+b=0\} \to \{(a,b,c)\in\mathbf{k}^3 \mid ay-b=0\}, \quad (a,b)\mapsto(-ax,-bx,b).$$

それ故、第一次拡大群は次の表示を持ちます

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N_x, M_y) \cong \frac{\{(a,b,c)\in\mathbf{k}^3 \mid ay-b=0\}}{\{(\alpha x,\beta x,-\beta)\mid \alpha y-\beta=0\}}.$$

これは何時でも有限生成というわけにはいきません。そういう様な可換環 $\mathbf{k}$ と元 $x,y\in\mathbf{k}$ は例 *7.3* と同様に構成出来ます。

練習問題 7.6. 第一次拡大群 $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N_x, M_y)$ が有限生成でないような $\mathbf{k}$ と $x,y\in\mathbf{k}$ の例を構成せよ。

基礎環にネター性を課せば練習問題 7.7 と同様に拡大群の有限生成性が言えます。

練習問題 7.7. 基礎環 $\mathbf{k}$ がネター環ならば任意の $n\geq 0$ に対して分裂代数 Λ 上の分裂加群圏 $\mathrm{mod}(\Lambda;\mathbf{k})$ の第 n 次拡大群加群 $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,N)$ は $\mathbf{k}$ 上有限生成である。

References

[1] T. Buhler, Exact categories, Expositiones Mathematicae 28(1) arXiv:0811.1480

[2] Krause, Henning,. Highest weight categories and strict polynomial functors,. arXiv:1405.1691

[3] Krause, Henning,. Highest weight categories and recollements,. arXiv:1506.01485

[4] Psaroudakis, Chrysostomos Homological theory of recollements of abelian categories. J. Algebra 398 (2014), 63-110

[5] ホモロジー代数 (岩波基礎数学選書) 、河田 敬義、岩波書店

[6] 圏論の技法、中岡 宏行 (著) 、日本評論社