Quasi-hereditary algebras associated with reduced expressions in Coxeter groups

木村雄太

2016 年 8 月 27 日

目次

0 はじめに

このノートは 2016 年 8 月 26 日から 8 月 30 日に大阪府立大学で行われた Summer School on Quasi-hereditary Algebras の講義ノートである．内容は, [IR] および [BIRSm] の解説である．

このノートを通して k を代数閉体とする．k 上の多元環 A に対して, $\mathsf{mod}\, A$ で有限生成左 A-加群のなす圏を表す．特に断らない限り, 加群といえば有限生成左加群とする．A-加群 M に対し, $\mathsf{add}\, M$ で M の有限直和の直和因子のなす $\mathsf{mod}\, A$ の充満部分圏を表す．写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ の合成を $gf = g \circ f : X \to Z$ で表す．クイバー Q の矢 α, β に対して, 矢の合成を $\alpha\beta = \xleftarrow{\alpha}\xleftarrow{\beta}$ で表す．準遺伝多元環の定義および性質は同サマースクールの他の講義を参照せよ．

定義 0.1. A を有限次元準遺伝的多元環とし, $\{\Delta_i\}_{i\in I}$ を A の standard module とする．

(1) [R] 各 $i \in I$ に対して, $\mathrm{pd}\,\Delta_i \leq 1$ となるとき, A を**左強準遺伝的多元環 (left strongly quasi-hereditary algebra)** という．
(2) [IR] A の各直既約射影加群が唯一の Δ-フィルトレーションを持つとき, A を **Δ-serial** という．

Ringel [R] により, 左強準遺伝的だが右強準遺伝的でない多元環が与えられている．ここで準遺伝的多元環 A が右強準遺伝的とは, A^{op} が左強準遺伝的であるときをいう．この講義ノートの目的は, 左強準遺伝的かつ Δ-serial な準遺伝的多元環の例を構成することである．

この講義ノートで扱う左強準遺伝的多元環の構成は [BIRSc] に従い, また各証明は [IR] に従う. 左強準遺伝的多元環の Δ-filtered category $\mathcal{F}(\Delta)$ の持つ性質については, 例えば [R] を見よ.

1 Buan-Iyama-Reiten-Scott の結果

この節では [BIRSc] の結果を紹介する. この節を通して Q を非輪状クイバーとし, $\overline{Q}$ で Q のダブルクイバーとする. 即ち, $\overline{Q}_0 := Q_0$ かつ $\overline{Q}_1 := Q_1 \sqcup \{\, \alpha^* : v \to u \mid \alpha : u \to v \in Q_1 \,\}$.

定義 1.1. 次で定義される多元環 Π を, Q の**前射影多元環 (preprojective algebra)** という.

$$\Pi := k\overline{Q}/\langle \sum_{\alpha \in Q_1} \alpha\alpha^* - \alpha^*\alpha \rangle.$$

定義 1.2. (1) 次の生成元と関係式で定義される群 W_Q を Q の**コクセター群 (Coxeter group)** という. 生成元 : $\{\, s_u \mid u \in Q_0 \,\}$, 関係式 : $s_u s_u = 1$, もし u と v の間に Q において矢がなければ $s_u s_v = s_v s_u$, もし u と v の間に Q において矢がちょうど 1 本あれば $s_u s_v s_u = s_v s_u s_v$.

(2) $w \in W_Q$ の表示 $s_{u_1} s_{u_2} \cdots s_{u_l}$ が**既約 (reduced)** とは, l が w の任意の表示 $s_{v_1} s_{v_2} \cdots s_{v_m}$ に対して $l \leq m$ を満たすときをいう.

前射影多元環 Π の両側イデアルを次のように定義する. 各 $u \in Q_0$ に対して,

$$I_u := \Pi(1 - e_u)\Pi,$$

ここで e_u は $u \in Q_0$ に対応する Π の冪等元である. 次に $s_{u_1} s_{u_2} \cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とするとき,

$$I_w := I_{u_1} I_{u_2} \cdots I_{u_l}$$

とする. 命題 1.3 により, I_w は w の既約表示によらずに定まることがわかる. そこで $w \in W_Q$ に対して, 前射影多元環の商多元環を次で定める.

$$\Pi_w := \Pi/I_w.$$

命題 1.3. [BIRSc, Proposition Ⅲ. 1.8] 各 $u, v \in Q_0$ に対して, 次が成立する.

(a) $I_u I_u = I_u$.
(b) もし u と v の間に Q において矢がなければ $I_u I_v = I_v I_u$.
(c) もし u と v の間に Q において矢がちょうど 1 本あれば $I_u I_v I_u = I_v I_u I_v$.

また次の性質を確かめることができる.

補題 1.4. [BIRSc, Proposition Ⅲ. 1.11] 次が成立する.

(a) $u, v \in Q_0$, $u \neq v$ のとき, $I_u e_v = \Pi e_v$.
(b) $s_{u_1} s_{u_2} \cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とする. $v \in \{\, u_1, u_2, \dots, u_l \,\}$ に対して, $p_v = \max\{\, 1 \leq i \leq l \mid u_i = v \,\}$ とおく. このとき $(\Pi/I_{u_1 \cdots u_{p_v}})e_v = \Pi_w e_v$ となる.

I_w の計算において, 次の補題が役に立つ.

補題 1.5. $u \in Q_0$, $X \in \operatorname{mod}\Pi$ とする.

- Π/I_u は頂点 u に対応する単純 Π-加群である.
- $I_u X$ は X の部分加群 Y のうち, 次を満たすものの中で最小の部分加群である; X/Y の組成因子は全て Π/I_u と同型である.

有限次元多元環 A と A-加群 M に対して, $\mathsf{mod}\, A$ の充満部分圏を次で定める.

- $\mathsf{Sub}\, M := \{\, X \in \mathsf{mod}\, A \mid X \ \text{ is a submodule of } \ M^{\oplus n} \ \text{ for some } \ n \geq 0 \,\}$.
- ${}^{\perp}M := \{\, X \in \mathsf{mod}\, A \mid \mathrm{Ext}^i_A(X, M) = 0 \ \ \forall i > 0 \,\}$.

Buan-Iyama-Reiten-Scott らは次を示した [BIRSc, Propositions Ⅲ. 2.2, Ⅲ. 2.3, Ⅲ. 2.5, Theorem Ⅲ. 2.6].

命題 1.6. $w \in W_Q$ とする. 次が成立する.

(a) Π_w は k 上有限次元多元環である.

(b) Π_w の自己移入次元は 1 以下である. 特に $\mathsf{Sub}\, \Pi_w = {}^{\perp}\Pi_w$ となる.

(c) $\mathsf{Sub}\, \Pi_w$ は安定 2-*Calabi-Yau* フロベニウス圏である. 即ち安定圏 $\underline{\mathsf{Sub}}\, \Pi_w$ は 2-CY な三角圏である.

(d) $s_{u_1} s_{u_2} \cdots s_{u_l}$ を w の既約表示とする. $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ に対して, $M_i := (\Pi/I_{u_1 \cdots u_i}) e_{u_i}$, $M := \bigoplus_{i=1}^{l} M_i$ とする. このとき, $M \in \mathsf{Sub}\, \Pi_w$ であり, M は $\mathsf{Sub}\, \Pi_w$ の団傾対象 *(cluster tilting object)* である. 即ち, 次の等式が成立する.

$$\begin{aligned} \mathsf{add}\, M &= \{\, X \in \mathsf{Sub}\, \Pi_w \mid \mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(X, M) = 0 \,\} \\ &= \{\, X \in \mathsf{Sub}\, \Pi_w \mid \mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(M, X) = 0 \,\}. \end{aligned}$$

(e) $gl.dim\, \mathrm{End}_{\Pi_w}(M) \leq 3$.

定義 1.7. $\mathbf{w} = s_{u_1} s_{u_2} \cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とする. 命題 1.6 (c) に現れた $\mathsf{Sub}\, \Pi_w$ の団傾対象

$$M_i = M(\mathbf{w})_i := (\Pi/I_{u_1 \cdots u_i}) e_{u_i}, \quad M = M(\mathbf{w}) := \bigoplus_{i=1}^{l} M_i$$

を既約表示 $\mathbf{w}$ に関する**標準団傾対象 (standard cluster tilting object)** という.

M は w の既約表示 $\mathbf{w}$ に依存していることに注意せよ. この講義ノートで扱うのは, 標準団傾対象の自己準同型多元環 $\mathrm{End}_\Pi(M)$ である. $\mathrm{End}_\Pi(M)$ のクイバーと関係式による表示は第 4 節で与えられる.

例 1.8. Q を次のクイバーとする: $\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ 2 \arrow[rr, "\beta"'] & & 3 \end{tikzcd}$. Q の前射影多元環 Π は左加群として, 次の組成因子による表示を持つ. $\Pi = \Pi e_1 \oplus \Pi e_2 \oplus \Pi e_3$;

$$\Pi e_1 = \begin{matrix} 1 \\ 2\ 3 \\ 3\ 1\ 2 \\ 1\ 2\ 3\ 1 \\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3 \\ \vdots \end{matrix}, \qquad \Pi e_2 = \begin{matrix} 2 \\ 3\ 1 \\ 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 1\ 2 \\ 3\ 1\ 2\ 3\ 1 \\ \vdots \end{matrix}, \qquad \Pi e_3 = \begin{matrix} 3 \\ 1\ 2 \\ 2\ 3\ 1 \\ 3\ 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2 \\ \vdots \end{matrix}.$$

W_Q の元の既約表示 $\mathbf{w} = s_1s_2s_3s_1$ に対して, 各 M^i は補題 1.5 により次のように計算される.

$$I_1e_1 = \begin{array}{c} 2\ 3 \\ 3\ 1\ 2 \\ 1\ 2\ 3\ 1 \\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3 \\ \vdots \end{array}, \qquad I_1I_2e_2 = \begin{array}{c} 3 \\ 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 1\ 2 \\ 3\ 1\ 2\ 3\ 1 \\ \vdots \end{array}, \qquad I_1I_2I_3e_3 = \begin{array}{c} 2\ 3 \\ 3\ 1\ 2\ 3 \\ 1\ 2\ 3\ 1\ 2 \\ \vdots \end{array}, \qquad I_1I_2I_3I_1e_1 = \begin{array}{c} 3 \\ 1\ 2\ 3 \\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3 \\ \vdots \end{array},$$

となり, よって M^1, M^2, M^3, M^4 は次となる;

$$M_1 = 1, \qquad M_2 = \begin{smallmatrix} 2 & \\ & 1 \end{smallmatrix}, \qquad M_3 = \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \\ & & & 1 \end{smallmatrix}, \qquad M_4 = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 1 & & 2 \\ & & & & 1 \end{smallmatrix}.$$

2 $\mathrm{End}_\Pi(M)$ の準遺伝性

この節では [IR] の結果を紹介する. この節を通して Q を非輪状クイバーとする.

定理 2.1. [IR, Theorem 3.1] $\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とし, $M = M(\mathbf{w})$, $\Gamma := \mathrm{End}_\Pi(M)$ とする. このとき Γ は次の遺伝鎖を持つ準遺伝的多元環である.

$$0 \subset \Gamma e_1 \Gamma \subset \Gamma(e_1 + e_2)\Gamma \subset \cdots \subset \Gamma(e_1 + \cdots + e_{l-1})\Gamma \subset \Gamma,$$

ここで e_i は M_i に対応する Γ の冪等元である.

Proof. $e = e_1 \in \Gamma$ とおく. 次の 2 つの主張を示せば十分である.

(i) $\Gamma e \Gamma$ は Γ の heredity ideal である.

(ii) $w' \in W_Q$ を既約表示 $\mathbf{w}' = s_{u_2}s_{u_3}\cdots s_{u_l}$ を持つ元とし, この既約表示に関する $\mathsf{Sub}\,\Pi_{w'}$ の標準団傾対象を $M' = M(\mathbf{w}')$ をする. このとき多元環 $\Gamma/\Gamma e \Gamma$ と $\mathrm{End}_\Pi(M')$ は同型である.

$S = M_1$ とおく. S は $u_1 \in Q_0$ に関する単純 Π_w-加群である. $\Gamma e \Gamma = \{ f \in \mathrm{End}_{\Pi_w}(M) \mid f$ は $\mathsf{add}\, S$ を通過する $\}$ となっていることに注意する. □

Proof of (i). $e\Gamma e \simeq \mathrm{End}_\Gamma(\Gamma e) \simeq \mathrm{End}_{\Pi_w}(S)$ は半単純多元環である. 次に $\Gamma e \Gamma$ が右 Γ-加群として射影的であることを示す. M の S-socle を $\mathrm{soc}_S(M)$ と表す. このとき包含写像 $f : \mathrm{soc}_S(M) \to M$ は M の右 $\mathsf{add}\, S$-近似となっている. よって f は右 Γ-加群としての同型 $\mathrm{Hom}_{\Pi_w}(M, \mathrm{soc}_s(M)) \simeq \Gamma e \Gamma$ を導く. $\mathrm{Hom}_{\Pi_w}(M, M_1)$ は右 Γ-加群として射影加群なので, $\Gamma e \Gamma$ は右 Γ-加群として射影的である. $\Gamma e \Gamma$ が左 Γ-加群として射影的であることを示すには, M の S-top を用いればよい. □

Proof of (ii). 関手 $F : \mathsf{mod}\,\Pi \to \mathsf{mod}\,\Pi$ を $F(X) := X/\mathrm{soc}_S(X)$ と定める. 補題 1.5 及び M, M' の定義より, $F(M) = M'$ となる. 環準同型 $\Phi = F_{M,M} : \mathrm{End}_\Pi(M) \to \mathrm{End}_\Pi(M')$ が $\Gamma/\Gamma e \Gamma \simeq \mathrm{End}_\Pi(M')$ を導くことを示す. $f \in \Gamma$ に対して, $\Phi(f) = 0$ であることと f が $\mathsf{add}\, S$ を通過することは同値であり, 更にこれは $f \in \Gamma e \Gamma$ と同値である. よって Φ は環準同型 $\Gamma/\Gamma e \Gamma \to \mathrm{End}_\Pi(M')$ を導き, かつ単射である. Φ が全射であることを示す. まず, $\mathrm{Ext}^1_\Pi(M, S) = 0$ である. 実際, $\Omega_\Pi(M)$ の top は S を直和因子に持たないので, $\mathrm{Hom}_\Pi(\Omega_\Pi(M), S) = 0$ である. よって $\mathrm{Ext}^1_\Pi(M, S) = 0$ である. 完全列 $0 \to \mathrm{soc}_S M \to M \xrightarrow{p} M' \to 0$ に $\mathrm{Hom}_\Pi(M, -)$ を施す. $\mathrm{Ext}^1_\Pi(M, S) = 0$ なので, $\mathrm{Hom}_\Pi(M, p)$ は全射である. そこで任意の $g \in \mathrm{End}_\Pi(M')$ に対して, $pf = gp$ を満たす $f \in \mathrm{End}_\Pi(M)$ が存在する. これは $\Phi(f) = g$ を意味する. □

$\Gamma = \mathrm{End}_\Pi(M)$ が左強準遺伝的であることを示すために次の補題が必要である．証明には Γ のクイバー表示が使われる ([IR, Theorem 3.4] の証明を見よ)．$s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とする．各 $1 \le i \le l$ に対して，$i' := \max\{\, 1 \le j \le i-1 \mid u_j = u_i \,\}$ とし，$f_i : M_i \to M_{i'}$ を標準的全射とする．

補題 2.2. 各 $1 \le i \le l$ に対して，$f_i : M_i \to M_{i'}$ は M_i の左 $\mathsf{add}(\bigoplus_{j<i} M_j)$-近似である．

$L_i := \mathrm{Ker}(f_i)$ とおく．$\Gamma = \mathrm{End}_\Pi(M)$ が左強準遺伝的多元環であることを示す．

命題 2.3. [IR, Theorem 3.4] $\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とし，$M = M(\mathbf{w})$, $\Gamma := \mathrm{End}_\Pi(M)$ とする．このとき次が成立する．

(a) Γ は直既約射影 Γ-加群の順序

$$\mathrm{Hom}_\Pi(M_l, M), \mathrm{Hom}_\Pi(M_{l-1}, M), \ldots, \mathrm{Hom}_\Pi(M_1, M),$$

に関して左強準遺伝的である．また，$\Delta_i = \mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M)$ である．

(b) Γ は Δ-*serial* である．

Proof. (a) 定理 2.1 により，$\Delta_i = \mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M)$ かつ $\mathrm{pd}_\Gamma \mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M) \le 1$ を示せば十分である．完全列 $0 \to L_i \xrightarrow{\iota} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i'} \to 0$ に $\mathrm{Hom}_{\Pi_w}(M, -)$ を施す．$\mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(M, M) = 0$ より，次の完全列を得る．

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Pi(M_{i'}, M) \xrightarrow{(f_i, M)} \mathrm{Hom}_\Pi(M_i, M) \xrightarrow{(\iota, M)} \mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M) \to 0. \tag{2.1}$$

これより $\mathrm{pd}_\Gamma \mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M) \le 1$ である．次に各 $1 \le i \le l$ に対して，$\Delta_i = \mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M)$ を示す．各 $1 \le r \le l$ に対して，S_r を $\mathrm{Hom}_\Pi(M_r, M)$ に関する単純 Γ-加群とする．完全列 (2.1) 及び $i' < i$ より，次を示せば十分である．

- 単純 Γ-加群 S_r が $\mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M)$ の組成因子のとき，$r \ge i$ である．

以下この主張を示す．S_r が $\mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M)$ の組成因子なので，$\mathrm{Hom}_\Pi(M_r, M)$ から $\mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M)$ へ 0 でない射 $\alpha : \mathrm{Hom}_\Pi(M_r, M) \to \mathrm{Hom}_\Pi(L_i, M)$ が存在する．$\mathrm{Hom}_\Pi(M_r, M)$ は射影 Γ-加群なので，α は (ι, M) を通過する．そこで $g : M_i \to M_r$ で，$(\iota, M) \circ (g, M) = \alpha$ を満たすものが存在する．ここでもし $r < i$ ならば，$f_i : M_i \to M_{i'}$ は M_i の左 $\mathsf{add}(\bigoplus_{j<i} M_j)$-近似なので，$g$ は f_i を通過する．しかしこのとき $\alpha = 0$ となり矛盾である．よって $r \ge i$ である．

(b) 完全列 (2.1) より成立する． □

3 $\mathrm{End}_\Pi(M)$ の特性傾加群

この節では準遺伝的多元環 $\mathrm{End}_\Pi(M)$ について解説する．この節を通して Q を非輪状クイバーとする．また，$\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とし，$M = M(\mathbf{w})$, $\Gamma := \mathrm{End}_\Pi(M)$ とする．$\pi : P \to M$ を M の Π_w-加群としての射影被覆とし，$\widetilde{\Omega} M := \mathrm{Ker}\,\pi \oplus \Pi_w$ とおく．このとき $\widetilde{\Omega} M \in \mathsf{Sub}\,\Pi_w$ であり，$\widetilde{\Omega} M$ は $\mathsf{Sub}\,\Pi_w$ の団傾対象である ([IR, Proposition 3.5 (a)])．Γ の特性傾加群は次で与えられる．

定理 3.1. *[IR, Theorem 3.5]* $U := \mathrm{Hom}_\Pi(\widetilde{\Omega} M, M)$ が Γ の特性傾加群である．更に $\mathrm{End}_\Gamma(U) \simeq \mathrm{End}_\Pi(\widetilde{\Omega} M)$ である．

この節では定理 3.1 の証明を行う．U が傾 Γ-加群であり, $U \in \mathcal{F}(\Delta)$ であること及び $\mathcal{F}(\Delta) \subset {}^{\perp}U$ が成立することを示す．以下の補題が証明の鍵となる．

補題 3.2. *$X, T \in \mathsf{Sub}\,\Pi_w$ とし, T を団傾対象とする．このとき完全列*

$$0 \to T_0 \to T_1 \to X \to 0, \quad 0 \to X \to T_2 \to T_3 \to 0$$

で $T_i \in \mathsf{add}\,T$ なるものが存在する．

Proof. 一つ目の完全列の存在を示す．二つ目も同様に示すことができる．$f : T_1 \to X$ を X の右 $\mathsf{add}\,T$-近似とする．Π_w は団傾対象 T の直和因子なので, f は全射である．$T_0 := \mathrm{Ker}\, f$ とおく．$T_0 \in \mathsf{add}\,T$ となることを示す．短完全列 $0 \to T_0 \to T_1 \to X \to 0$ に $\mathrm{Hom}_{\Pi_w}(T, -)$ を施すと, 次の完全列が得られる;

$$\mathrm{Hom}_{\Pi_w}(T, T_1) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{\Pi_w}(T, X) \to \mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(T, T_0) \to \mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(T, T_1).$$

ここで T は団傾対象なので, $\mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(T, T_1) = 0$ である．また f^* は全射である．よって, $\mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(T, T_0) = 0$ である．団傾対象の定義により, $T_0 \in \mathsf{add}\,T$ となる． □

命題 3.3. [IR, Propositions 3.5 (b), 3.6] *$U = \mathrm{Hom}_{\Pi}(\widetilde{\Omega} M, M)$ とおく．任意の $X \in \mathsf{Sub}\,\Pi_w$ に対して, 次が成立する．*

(a) $\mathrm{pd}_{\Gamma}\, \mathrm{Hom}_{\Pi}(X, M) \leq 1$.
(b) 任意の $i > 0$ に対して, $\mathrm{Ext}^i_{\Gamma}(\mathrm{Hom}_{\Pi}(X, M), U) = 0$. 特に $\mathcal{F}(\Delta) \subset {}^{\perp}U$.
(c) U は傾 Γ-加群であり, $\mathrm{End}_{\Gamma}(U) \simeq \mathrm{End}_{\Pi}(\widetilde{\Omega} M)$ となる．

Proof. (a) 補題 3.2 により, 単完全列

$$0 \to X \to M' \xrightarrow{f} M'' \to 0 \tag{3.1}$$

で, $M', M'' \in \mathsf{add}\,M$ なるものが存在する．$\mathrm{Hom}_{\Pi}(-, M)$ を施して, 単完全列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\Pi}(M'', M) \to \mathrm{Hom}_{\Pi}(M', M) \to \mathrm{Hom}_{\Pi}(X, M) \to 0 \tag{3.2}$$

を得る．これより, $\mathrm{pd}_{\Gamma}\, \mathrm{Hom}_{\Pi}(X, M) \leq 1$ である．

(b) $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma}(\mathrm{Hom}_{\Pi}(X, M), U) = 0$ を示せば十分である．再び単完全列 (3.1) を考える．単完全列 (3.2) に $\mathrm{Hom}_{\Gamma}(-, U)$ を施すことで, 次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_{\Gamma}({}_{\Pi}(X, M), U) \arrow[r] & {}_{\Gamma}({}_{\Pi}(M', M), U) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & {}_{\Gamma}({}_{\Pi}(M'', M), U) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & {}^{1}_{\Gamma}({}_{\Pi}(X, M), U) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & {}_{\Pi}(\widetilde{\Omega} M, X) \arrow[r] & {}_{\Pi}(\widetilde{\Omega} M, M') \arrow[r, "f^*"] & {}_{\Pi}(\widetilde{\Omega} M, M'') \arrow[r] & {}^{1}_{\Pi}(\widetilde{\Omega} M, X), &
\end{tikzcd}$$

ここで各行は完全であり, 一行目右端の完全性は, ${}_{\Pi}(M', M)$ が射影 Γ-加群であることから従う．写像 f^* が全射であることを示す．$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Pi_w}(\widetilde{\Omega} M, M'') \simeq \mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(M, M'') = 0$ なので, $\widetilde{\Omega} M$ から M'' への任意の射は射影 Π_w-加群を通過する．また, 射影 Π_w-加群から M'' への任意の射は, 全射 $f : M' \to M''$ を通過する．よって f^* は全射である．以上から $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma}(\mathrm{Hom}_{\Pi}(X, M), U) = 0$ である．

(c) $X = \widetilde{\Omega} M$ とおく．(b) の可換図式左端から導かれる同型により, $\mathrm{End}_{\Gamma}(U) \simeq \mathrm{End}_{\Pi}(\widetilde{\Omega} M)$ となる．また, $\mathrm{pd}_{\Gamma}\, U \leq 1$ かつ $\mathrm{Ext}^1_{\Gamma}(U, U) = 0$ である．$\widetilde{\Omega} M$ は $\mathsf{Sub}\,\Pi_w$ の団傾対象であるので, 補題 3.2 により, 完全

列 $0 \to \widetilde{M_1} \to \widetilde{M_0} \to M \to 0$ で, $\widetilde{M_1}, \widetilde{M_0} \in \mathsf{add}\,\widetilde{\Omega}M$ なるものが存在する．この完全列に $\mathrm{Hom}_\Pi(-, M)$ を施すと, 完全列 $0 \to \Gamma \to \mathrm{Hom}_\Pi(\widetilde{M_0}, M) \to \mathrm{Hom}_\Pi(\widetilde{M_1}, M) \to 0$ が得られる．以上により, U は傾 Γ-加群である． □

次の命題を示すことによって, 定理 3.1 の証明は完了する．

命題 3.4. [IR, Theorem 3.5] $U = \mathrm{Hom}_\Pi(\widetilde{\Omega}M, M)$ とおく．次が成立する．

(a) $U \in \mathcal{F}(\Delta)$.
(b) ${}^\perp U = \mathcal{F}(\Delta)$.
(c) U は Γ の特性傾加群である．

Proof. (a) $\widetilde{\Omega}M = \Omega M \oplus \Pi_w$ であった． ここで Ω は Π_w-加群としての射影被覆の核である． まず $\mathrm{Hom}_\Pi(\Pi_w, M)$ は Γ の直和因子である．$\Gamma \in \mathcal{F}(\Delta)$ なので, $\mathrm{Hom}_\Pi(\Pi_w, M)$ は $\mathcal{F}(\Delta)$ の対象である．次に, 既約表示 $\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ に現れる頂点 $u_1, \ldots, u_l$ の内一つを $u\,(\in Q_0)$ と置き, 以降固定する．$\{1 \le i \le l \mid u_i = u\} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_t\}$ とおく．ここで右辺の順序は, 整数のなす集合に備わる通常の順序である．このとき, $\mathrm{Hom}_\Pi(\Omega M_{i_j}, M) \in \mathcal{F}(\Delta)$ を j に関する減少帰納法で示す．

$j = t$ のとき, $M_{i_t} = \Pi_w e_u$ なので, $\Omega M_{i_j} = 0$ である．次に $j \le t$ として, $\mathrm{Hom}_\Pi(\Omega M_{i_j}, M) \in \mathcal{F}(\Delta)$ が成立しているとする．このとき, $\mathrm{Hom}_\Pi(\Omega M_{i_{j-1}}, M) \in \mathcal{F}(\Delta)$ を示す．$u_{i_j} = u_{i_{j-1}}$ なので, $M_{i_j}, M_{i_{j-1}}$ の射影被覆は $\Pi_w e_u$ で与えられ, 次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega M_{i_j} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \Pi_w e_u \arrow[r] \arrow[d, "="] & M_{i_j} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i_j}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Omega M_{i_{j-1}} \arrow[r] & \Pi_w e_u \arrow[r] & M_{i_{j-1}} \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

ここで射 f_{i_j} は補題 2.2 で扱ったものである．$L_{i_j} := \mathrm{Ker}(f_{i_j})$ とおく．次の完全列が得られる．

$$0 \to \Omega M_{i_j} \xrightarrow{g} \Omega M_{i_{j-1}} \to L_{i_j} \to 0.$$

この完全列に $\mathrm{Hom}_\Pi(-, M)$ を施して, 次の完全列を得る．

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Pi(L_{i_j}, M) \to \mathrm{Hom}_\Pi(\Omega M_{i_{j-1}}, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_\Pi(\Omega M_{i_j}, M). \tag{3.3}$$

写像 g_* が全射であることを示す．$\underline{\mathrm{Hom}}_{\Pi_w}(\Omega M_{i_j}, M) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\Pi_w}(M_{i_j}, M) = 0$ なので, ΩM_{i_j} から M への任意の射は射影 Π_w-加群を通過する．$L_{i_j} \in \mathsf{Sub}\,\Pi_w = {}^\perp\Pi_w$ なので, ΩM_{i_j} から射影 Π_w-加群への任意の射は g を通過する．よって g_* は全射である．完全列 (3.3) と帰納法の仮定により, $\mathrm{Hom}_\Pi(\Omega M_{i_{j-1}}, M) \in \mathcal{F}(\Delta)$ である．

(b), (c) 命題 3.3 (b), および $U \in \mathcal{F}(\Delta)$ により, U は $\mathcal{F}(\Delta)$ の中で移入的である．命題 3.3 (c) により U は傾 Γ-加群なので, U は Γ の特性傾加群である． □

この節の最後に $\mathsf{Sub}\,\Pi_w$ と $\mathcal{F}(\Delta)$ の双対を与える次の定理を述べておく．証明は省略する．

定理 3.5. [IR, Theorem 3.8] 関手 $\mathrm{Hom}_\Pi(-, M) : \mathsf{mod}\,\Pi_w \to \mathsf{mod}\,\Gamma$ 及び $\mathrm{Hom}_\Gamma(-, M) : \mathsf{mod}\,\Gamma \to \mathsf{mod}\,\Pi_w$ は $\mathsf{Sub}\,\Pi_w$ と $\mathcal{F}(\Delta)$ の双対を導く．

4 $\mathrm{End}_\Pi(M)$ のクイバー表示

この節では [BIRSm] の結果を紹介する．Q を loop と 2-cycle を持たないクイバーとする．Q の cycle によって張られる kQ の k-部分空間を kQ_{cyc} とする．以下, $\mathrm{End}_\Pi(M)$ を表示するための必要最低限の定義を与える．詳細な定義は例えば [BIRSm] の 1 章を参照せよ．

定義 4.1. (1) $\alpha \in Q_1$ に対して k-線形写像 $\partial_\alpha : kQ_{cyc} \to kQ$ を次で定める．即ち Q の cycle $p = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$, $(\alpha_i \in Q_1)$ に対して,

$$\partial_\alpha(p) := \sum_{\alpha_i=\alpha} \alpha_{i+1}\cdots\alpha_m\alpha_1\cdots\alpha_{i-1},$$

ここでもし $\alpha_i = \alpha$ なる i が存在しなければ $\partial_\alpha(p) = 0$ とする．これを kQ_{cyc} に線形に拡張する．

(2) $W \in kQ_{cyc}$, $F \subset Q_0$ に対して, 三つ組 (Q, W, F) の **frozen Jacobian algebra** $\mathsf{Jac}(Q, W, F)$ を次で定義する．

$$\mathsf{Jac}(Q,W,F) := kQ/\langle \partial_\alpha W \mid \alpha \in Q_1, s(\alpha) \notin F \text{ または } t(\alpha) \notin F\rangle$$

例 4.2. Q 及び $W \in kQ_{cyc}$ を次とする:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] & \\ 2 \arrow[rr, "\beta"'] & & 3 \arrow[ul, "\gamma"'] \end{tikzcd}, \quad W = \gamma\beta\alpha.$$

このとき, $\partial_\alpha(W) = \gamma\beta$, $\partial_\beta(W) = \alpha\gamma$, $\partial_\gamma(W) = \beta\alpha$ となる．また,

- $F = \emptyset$ のとき, $\mathsf{Jac}(Q,W,F) = kQ/\langle\gamma\beta,\ \alpha\gamma,\ \beta\alpha\rangle$,
- $F = \{1,3\}$ のとき, $\mathsf{Jac}(Q,W,F) = kQ/\langle\gamma\beta,\ \alpha\gamma\rangle$,

となる．

以下, Q を非輪状有限クイバーとし, $\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とし, $M = M(\mathbf{w})$ とする． この節では, 既約表示 $\mathbf{w}$ に対して, クイバー $Q_\mathbf{w}$ と $F_\mathbf{w} \subset (Q_\mathbf{w})_0$, $W_\mathbf{w} \in k(Q_\mathbf{w})_{cyc}$ が存在し, $\mathsf{Jac}(Q_\mathbf{w}, F_\mathbf{w}, W_\mathbf{w}) \simeq \mathrm{End}_\Pi(M)$ となることを紹介する (定理 4.8)． 以下クイバー $Q_\mathbf{w}$ と $F_\mathbf{w} \subset (Q_\mathbf{w})_0$, $W_\mathbf{w} \in k(Q_\mathbf{w})_{cyc}$ の構成を与える．まず $Q_\mathbf{w}$ の構成を与える．

定義 4.3. [BIRSc] $\mathbf{w} = s_{u_1}s_{u_2}\cdots s_{u_l}$ を既約表示とする．このときクイバー $Q_\mathbf{w}$ を次で定義する．

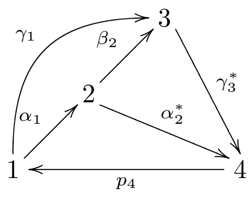
- 頂点: $(Q_\mathbf{w})_0 = \{1, 2, \ldots, l\}$.
  $u \in Q_0$ に対して, $u_i = u$ を満たす頂点 $i \in (Q_\mathbf{w})_0$ を u **型**の頂点という．
- 矢:
  - 各 $u \in Q_0$ に対して, $\{\,1 \le i \le l \mid u_i = u\,\} = \{\,i_1, i_2, \ldots, i_s\,\}$ とし, $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ とする．このとき, 各 $2 \le j \le s$ に対して, 矢 $p(i_j) : i_j \to i_{j-1}$ を引く.(この矢を**左向きの矢**という)
  - $\alpha : u \to v \in Q_1$ とする．$Q_\mathbf{w}$ の u 型および v 型の頂点が次のように並んでいるとする．

$$\underbrace{i_1 < \cdots < i_{s(1)}}_{u\,\text{型}} < \underbrace{j_1 < \cdots < j_{t(1)}}_{v\,\text{型}} < \underbrace{i_{s(1)+1} < \cdots < i_{s(2)}}_{u\,\text{型}} < j_{t(1)+1} < \cdots < j_{t(2)} < i_{s(2)+1} < \cdots .$$

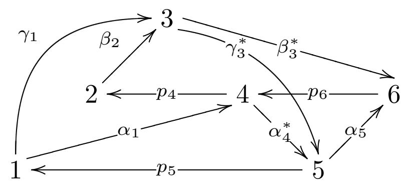
このとき, 各 $k \geq 1$ に対して, 矢 $\alpha_{s(k)} : i_{s(k)} \to j_{t(k)}$, および矢 $\alpha^*_{t(k)} : j_{t(k)} \to i_{s(k+1)}$ を引く. $j_1 < i_1$ のときも同様に矢を引く.

例 4.4. Q を次のクイバーとする: $\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ 2 \arrow[rr, "\beta"'] & & 3 \end{tikzcd}$.

(a) W_Q の元の既約表示 $\mathbf{w} = s_1 s_2 s_3 s_1$ に対して, $Q_{\mathbf{w}}$ は次となる.



(b) W_Q の元の既約表示 $\mathbf{w} = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_2$ に対して, $Q_{\mathbf{w}}$ は次となる.



次に $F_{\mathbf{w}} \subset (Q_{\mathbf{w}})_0$, $W_{\mathbf{w}} \in k(Q_{\mathbf{w}})_{cyc}$ を構成する.

定義 4.5. [BIRSm] $\mathbf{w} = s_{u_1} s_{u_2} \cdots s_{u_l}$ を既約表示とする. $v \in \{ u_1, u_2, \ldots, u_l \}$ に対して, $p_v = \max\{ 1 \leq i \leq l \mid u_i = v \}$ とおく.

(1) $F_{\mathbf{w}} = \{ p_v \mid v \in \{ u_1, u_2, \ldots, u_l \} \}$ とする.
(2) $\alpha : u \to v \in Q_1$ とする. $Q_{\mathbf{w}}$ の u 型および v 型の頂点が次のように並んでいるとする.

$$\underbrace{i_1 < \cdots < i_{s(1)}}_{u\text{ 型}} < \underbrace{j_1 < \cdots < j_{t(1)}}_{v\text{ 型}} < \underbrace{i_{s(1)+1} < \cdots < i_{s(2)}}_{u\text{ 型}} < j_{t(1)+1} < \cdots < j_{t(2)} < i_{s(2)+1} < \cdots .$$

このとき,

$$W_\alpha := p\alpha^*_{t(1)}\alpha_{s(1)} - p\alpha_{s(2)}\alpha^*_{t(1)} + p\alpha^*_{t(2)}\alpha_{s(2)} - \cdots$$

とする. ここで, 各 p は $Q_{\mathbf{w}}$ の左向きの矢の合成として一意に決まる道である. $j_1 < i_1$ のときも同様に定める.

$$W_{\mathbf{w}} := \sum_{\alpha \in Q_1} W_\alpha$$

とする.

例 4.6. 例 4.4 (a), (b) を考える.

(a) $F_{\mathbf{w}} = \{2, 3, 4\}$, $W_\alpha = p_4\alpha_2^*\alpha_1$, $W_\beta = 0$, $W_\gamma = p_4\gamma_3^*\gamma_1$ となる.
(b) $F_{\mathbf{w}} = \{3, 5, 6\}$, $W_\alpha = p_5\alpha_4^*\alpha_1 - p_6\alpha_5\alpha_4^*$, $W_\beta = p_4 p_6 \beta_3^* \beta_2$, $W_\gamma = p_5\gamma_3^*\gamma_1$ となる.

定義 4.7. $\mathbf{w} = s_{u_1} s_{u_2} \cdots s_{u_l}$ を $w \in W_Q$ の既約表示とし, $M = M(\mathbf{w})$, $\Gamma := \mathrm{End}_\Pi(M)$ とする. 環準同型 $\Psi : kQ_{\mathbf{w}} \to \Gamma$ を次で定義する.

- 各 $i \in (Q_{\mathbf{w}})_0$ に対して, $\Psi(e_i)$ を M_i に関する Γ の冪等元とする.
- 矢 $p(i_j) : i_j \to i_{j-1}$ に対して, 全射準同型 $\Psi(p_{i_j}) : M_{i_j} \to M_{i_{j-1}}$.
- 各 $\alpha \in Q_1$ に対して,

定理 4.8. [BIRSm, Theorem 6.6] $\Psi : kQ_{\mathbf{w}} \to \Gamma$ は同型 $\mathsf{Jac}(Q_{\mathbf{w}}, F_{\mathbf{w}}, W_{\mathbf{w}}) \simeq \Gamma$ を導く.

例 4.9. 例 4.4 (a) を考える. 自己準同型環 $\mathrm{End}_{\Pi}(M_{\mathbf{w}})$ のクイバー $Q_{\mathbf{w}}$ は例 4.4 (a) で与えられる. 定理 4.8 により, 次の同型が得られる.

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\Pi}(M_{\mathbf{w}}) &\simeq \mathsf{Jac}(Q_{\mathbf{w}}, F_{\mathbf{w}}, W_{\mathbf{w}}) \\ &\simeq kQ_{\mathbf{w}}/\langle p_4\alpha_2^*,\, p_4\gamma_3^*,\, \alpha_2^*\alpha_1 + \gamma_3^*\gamma_1\rangle.\end{aligned}$$

実際, $Q_{\mathbf{w}}$ の各頂点 i に例 1.8 の M_i を対応させ, 定義 4.7 の写像を計算すると, 関係式が満たされることが分かる.

参考文献

[BIRSc] A. Buan, O. Iyama, I. Reiten, J. Scott, *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups*, Compos. Math. 145 (2009), no. 4, 1035-1079.

[BIRSm] A. Buan, O. Iyama, I. Reiten, D. Smith, *Mutation of cluster-tilting objects and potentials*, Amer. J. Math. 133 (2011), no. 4, 835-887.

[IR] O. Iyama, I. Reiten, 2-*Auslander algebras associated with reduced words in Coxeter groups*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2011, no. 8, 1782-1803.

[R] C. M. Ringel, *Iyama's finiteness theorem via strongly quasi-hereditary algebras*, J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), no. 9, 1687-1692.