1 Schubert 多項式

全単射 $w : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ であって, 有限個の点を除き identity なものを置換と呼び, その全体を S_∞ で表す. 置換の積は $(wv)(i) = w(v(i))$ で定める (関数の合成と同じ向き). $n \geq 1$ に対し $S_n = \{w \in S_\infty : w(i) = i \ (i \geq n+1)\}$, $S^{(n)} = \{w \in S_\infty : w(n+1) < w(n+2) < \cdots\}$ とおく. i と $i+1$ を入れ替えるだけの置換を s_i と書く.

$w \in S^{(n)}$ に対し w の **Lehmer code** $\mathrm{code}(w) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ を $\mathrm{code}(w)_i = \#\{j > i : w(j) < w(i)\}$ で定める. また, $\ell(w) = \#\{(i,j) : i < j, w(i) > w(j)\}$ と定める.

Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ $(w \in S_\infty)$ は divided difference と呼ばれる作用素 $\partial_i : f \mapsto \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}$ $(s_i f = f(\ldots, x_{i+1}, x_i, \ldots))$ を使って以下のように再帰的に定義される：

- $\mathfrak{S}_{w_0} = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \cdots x_{n-1}$ ($w_0 \in S_n$: 最長元, つまり $w_0(1) = n, w_0(2) = n-1, \ldots, w_0(n) = 1$ のとき)
- $\mathfrak{S}_{ws_i} = \partial_i \mathfrak{S}_w \ (w(i) > w(i+1))$

例. $\mathfrak{S}_{3142} = \partial_2 \mathfrak{S}_{3412} = \partial_2 \partial_1 \mathfrak{S}_{4312} = \partial_2 \partial_1 \partial_3 \mathfrak{S}_{4321} = \partial_2 \partial_1 \partial_3 (x_1^3 x_2^2 x_3) = x_1^2 (x_2 + x_3)$.

∂_i たちが組み紐関係式 $\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1}$, $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ $(|i-j| \geq 2)$ をみたすことから, $\mathfrak{S}_w$ は最長元 w_0 から w まで「どう降りてくるか」によらずにキチンと決まることがわかる. また, 例えば上の例では $\mathfrak{S}_{3142}$ を S_4 の最長元 4321 の Schubert 多項式から計算したが, より大きな次数の $\mathfrak{S}_{54321}$ や $\mathfrak{S}_{654321}$ をもとに計算してもちゃんと同じ多項式になることがわかる. Schubert 多項式たちは $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots]$ の基底をなす.

Schubert 多項式を考える動機 (の一つ) は旗多様体の Schubert calculus である. 旗多様体 $Fl(\mathbb{C}^n) = \{E_\bullet = (0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset \mathbb{C}^n) : E_i : i\text{-dimensional linear subspace}\}$ の中で, 固定した flag との交わりの次元に関する条件を課した部分多様体 $\Omega_w(F_\bullet) = \{E_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^n) : \dim(E_p \cap F_q) \geq n_{pq}(w)\}$ ($F_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^n)$, $w \in S_n$, $n_{pq}(w) = \#\{i \leq p : w(i) \geq n+1-q\}$) を考える (**Schubert 部分多様体**と呼ばれる). このとき, Schubert 多項式の積の展開がこれらの多様体の交わりの様子を記述するのである：$\mathfrak{S}_w \mathfrak{S}_v = \sum_u c_{wv}^u \mathfrak{S}_u$ とすると, $\ell(w) + \ell(v) = \ell(u)$ なる $w, v, u \in S_n$ および generic な flag $F_\bullet, F'_\bullet, F''_\bullet$ に対し, $\#(\Omega_w(F_\bullet) \cap \Omega_v(F'_\bullet) \cap \Omega_{w_0 u}(F''_\bullet)) = c_{wv}^u$ となる. 詳しくは例えば [Ful, §10] などを参照.

Schubert 多項式は Schur 多項式の一般化とみることができる. $w(i) > w(i+1)$ となるような i が 1 つしかない場合 [1], 対応する Schubert 多項式 $\mathfrak{S}_w$ は $x_1, \ldots, x_i$ の Schur 多項式となることが確かめられる.

[1] このような w は **Grassmannian permutation** と呼ばれる. 名前の由来は Grassmann 多様体の Schubert calculus との関連から.

Schubert 多項式についてより詳しくは [Mac] や [Man] などを参照.

2 Kraśkiewicz-Pragacz 加群

Schur 多項式は一般線形群の表現の指標として現れることが知られているが, それを Schubert 多項式へ一般化したものが Kraśkiewicz と Pragacz によって導入された ([KP87], [KP04]). これは上三角行列のなす群 B の表現であり, 指標が Schubert 多項式になるものである. 以降では **Kraśkiewicz-Pragacz 加群**もしくは **KP 加群**と呼ぶ.

以下 n を固定し, B を $n \times n$ の可逆上三角行列のなす群とする. B の表現 $\mathbb{C}^n$ (行列の掛け算で作用) の自然な基底を $u_1, \ldots, u_n$ で書く.

$w \in S^{(n)}$ に対し, w の **inversion set** $I(w) = \{(i,j) : i < j, w(i) > w(j)\}$ をもとに KP 加群を定義する [2]. 各 j に対し, $u_w^{(j)} = \bigwedge_{(i,j)\in I(w)} u_i \in \bigwedge^\bullet(\mathbb{C}^n)$ とおき, $u_w = u_w^{(1)} \otimes u_w^{(2)} \otimes \cdots \in \bigwedge^\bullet(\mathbb{C}^n) \otimes \bigwedge^\bullet(\mathbb{C}^n) \otimes \cdots$ とおく. そして, KP 加群 $\mathcal{S}_w$ を u_w の生成する B 加群として定める.

定理 ([KP04]). $\mathcal{S}_w$ の指標 (対角行列 $\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n) \in B$ の作用の trace) は $\mathfrak{S}_w$ になる.

例. $u_{3142} = (u_1 \wedge u_3) \otimes u_1$, $\mathcal{S}_{3142} = \langle (u_1 \wedge u_3) \otimes u_1, (u_1 \wedge u_2) \otimes u_1 \rangle$ ($\leftrightarrow$ $\mathfrak{S}_{3142} = x_1^2(x_2 + x_3)$).

例. $w = s_i$ のとき, $u_w = u_i$, $\mathcal{S}_w = \langle u_1, \ldots, u_i \rangle =: \mathbb{C}^i$. もっと一般に, w が Grassmannian で $w(i) > w(i+1)$ のとき, $\mathcal{S}_w$ は $GL(\mathbb{C}^i)$ の既約表現 (を適切に B 加群とみたもの) になる ($\leftrightarrow$ $\mathfrak{S}_w = (x_1, \ldots, x_i$ の Schur 多項式)).

3 KP 加群と highest weight category

KP 加群を, ひいては Schubert 多項式を調べるのに highest weight category の理論が応用できるというのが今回話したい主な内容である. [3]

以下 B-加群としてはウェイト分解をもつようなもの ($M = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Z}^n} M_\lambda$ ($M_\lambda = \{m \in M : \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)m = x^\lambda m\}$), $\dim M_\lambda < \infty$) のみを考えることにする. $M_\lambda \neq 0$ となる λ を M のウェイトと呼ぶ.

$\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に順序 $<$ を $\lambda < \mu \iff (\ell(w) = \ell(v)$ かつ $w^{-1} \underset{\mathrm{lex}}{>} v^{-1})$ で入れる ($\lambda = \mathrm{code}(w)$, $\mu = \mathrm{code}(v)$). ただし $\underset{\mathrm{lex}}{>}$ は置換の辞書式順序である.

定理. ウェイトが $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に含まれるような B-加群の全体 $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_{\geq 0}^n}$ は weight poset を $(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n, <)$ とする highest weight category の構造をもつ. $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対応する standard object は $\mathcal{S}_w$ ($w \in S^{(n)}$, $\mathrm{code}(w) = \lambda$) で与えられる. □

[2] w の **Rothe diagram** $D(w) = \{(i, w(j)) : (i,j) \in I(w)\}$ を用いてもよい. こっちのほうが手で具体例をやるときなどには実は便利.

[3] KP 加群と (GL の) Demazure 加群はなんとなく似たようなところがあり, この研究は Demazure 加群による filtration を highest weight category の理論を使って調べる話に影響を受けている. Demazure のほうの話はたとえば [vdK] の §2–3 あたりにまとまっている.

highest weight category の定義はここでは特に述べないが, 以下で重要なのは次に挙げるような性質である. $\mathcal{C}$ を highest weight category, Λ をその weight poset とし, standard object を $\Delta(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ で表す. $M \in \mathcal{C}$ の **standard filtration** とは, filtration $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$ であって, 各 M_i/M_{i-1} がある standard object と同型になっているようなものをいう.

- **costandard object** $\nabla(\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ と呼ばれる対象が自然に定まり, M が standard filtration をもつ $\iff$ $\mathrm{Ext}^i(M, \nabla(\lambda)) = 0$ $(\forall i \geq 1, \forall \lambda \in \Lambda)$.
- (上の系) M が standard filtration をもつなら M の直和因子も standard filtration をもつ. また, 短完全列 $0 \to L \to M \to N \to 0$ で M, N が standard filtration をもつなら L ももつ.
- $M \in \mathcal{C}^{\Delta}$ に対し,
  - M の (任意の) standard filtration に $\Delta(\lambda)$ が現れる回数 ($(M : \Delta(\lambda))$ と書く) は $\dim \mathrm{Hom}(M, \nabla(\lambda))$ で与えられる.
  - M の standard filtration は $i < j$, $M_i/M_{i-1} \cong \Delta(\lambda)$, $M_j/M_{j-1} \cong \Delta(\mu) \implies \lambda \not< \mu$ となるようとれる.

先の定理から, KP 加群による filtration (**KP filtration** とよぶ) について, 上のような性質が成り立つことがわかる.

4 応用

4.1 積の正値性

Schubert 多項式の積を Schubert 多項式で $\mathfrak{S}_w \mathfrak{S}_v = \sum_u c_{wv}^u \mathfrak{S}_u$ と展開したとき, $c_{wv}^u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となることが知られている. (僕の知る限り唯一の) これまで知られてきた証明は, §1 でも触れたが, c_{wv}^u が旗多様体の中の Schubert 部分多様体の交点の個数 $\#(\Omega_w \cap \Omega_v \cap \Omega_{w_0 u})$ になるというものである. c_{wv}^u の具体的な記述はわずかな場合にしか知られておらず, c_{wv}^u の組合せ論的な記述 (たとえば, Schur 関数の場合の Littlewood-Richardson rule のような) を求める問題は代数的組合せ論業界では悪名高い未解決問題である (個人の感想です).

一般に, KP filtration をもつような B-加群の指標は Schubert 多項式の非負係数結合になるので, KP 加群のテンソル積 $\mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_v$ が KP filtration をもつことがいえれば, 上の $c_{wv}^u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ という事実に別証明を与えることができる. 実際, §3 で述べた KP filtration の性質を用いることで, ざっくりと以下のように (旗多様体の幾何を経由せずに!) filtration の存在を示すことができ

るのである (詳細は [W] を参照). 細かいことをいうと以下の議論では正確には $w \in S_n$ の場合を考えているのだが, 一般の $w \in S^{(n)}$ の場合の filtration の存在もこの場合の議論を用いて示すことができる.

- まず片方の KP 加群が $\mathcal{S}_{s_i}$ の場合. この場合は Schubert 多項式の積 $\mathfrak{S}_w\mathfrak{S}_{s_i}$ の展開は具体的に知られており (Monk's formula), それに沿って具体的に $\mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_{s_i}$ の KP filtration を構成することができる.

- $\rightsquigarrow \mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_{s_i} \otimes \mathcal{S}_{s_j} \otimes \cdots$ も KP filtration をもつ.

- とくに, $(\mathcal{S}_{s_1})^{\otimes m_1} \otimes (\mathcal{S}_{s_2})^{\otimes m_2} \otimes \cdots$ は KP filtration をもち, その直和因子である $\bigwedge^{m_1}(\mathcal{S}_{s_1}) \otimes \bigwedge^{m_2}(\mathcal{S}_{s_2}) \otimes \cdots =: T$ も KP filtration をもつ.

- うまく $m_1, m_2, \ldots$ をとると, Schubert 多項式の計算をやると, $(T : \mathcal{S}_w) = 1$ かつ, $(T : \mathcal{S}_u) \neq 0 \implies u^{-1} \underset{\text{lex}}{\geq} w^{-1}$ がわかる. §3 で述べた性質から T の KP filtration を $\mathcal{S}_w$ が sub として現れるようにとれる. つまり, 完全列 $0 \to \mathcal{S}_w \to T \to T' \to 0$ (T' は $\mathcal{S}_u$ $(u^{-1} \underset{\text{lex}}{>} w^{-1})$ で filtration) がある.

- $\mathcal{S}_v$ をテンソルして完全列 $0 \to \mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_v \to T \otimes \mathcal{S}_v \to T' \otimes \mathcal{S}_v \to 0$ を得る.

- $T \otimes \mathcal{S}_v$ は $\mathcal{S}_v \otimes (\mathcal{S}_{s_1})^{\otimes m_1} \otimes (\mathcal{S}_{s_2})^{\otimes m_2} \otimes \cdots$ の直和因子なので KP filtration をもつ. また, w に関して帰納的に議論することで, $T' \otimes \mathcal{S}_v$ は KP filtration をもつとしてよい. よって $\mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_v$ も KP filtration をもつことがわかる.

また, (M の standard filtration に $\Delta(\lambda)$ が現れる回数) $= \dim \operatorname{Hom}(M, \nabla(\lambda))$ という式を今の場合に書くと, $c^u_{wv} = \dim \operatorname{Hom}_B(\mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_v, \mathcal{S}^*_{w_0u} \otimes \mathbb{C}_\rho) = \dim \operatorname{Hom}_B(\mathcal{S}_w \otimes \mathcal{S}_v \otimes \mathcal{S}_{w_0u}, \mathbb{C}_\rho)$ $(\rho = (n-1, n-2, \ldots, 0))$ と先の幾何的な記述に似た形になる.

4.2 plethysm の正値性

f を対称関数, $g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ を多項式とし, 簡単のため g の係数はすべて正である, つまり $g = x^\alpha + x^\beta + \cdots$ と書けるものとする. このとき $f[g] = f(x^\alpha, x^\beta, \ldots)$ を f と g の **plethysm** という.

f と g が Schur 関数の場合, plethysm $s_\lambda[s_\mu]$ が Schur 関数の非負係数結合になるという性質はよく知られている. 今回の結果から, これを g が Schubert 多項式の場合に一般化することができる. つまり, 次が成り立つ.

定理. 分割 λ と置換 w に対し, $s_\lambda[\mathfrak{S}_w]$ は Schubert 多項式の非負係数結合である.

略称. $s_\lambda[\mathfrak{S}_w]$ は B-加群 $\mathbf{s}_\lambda(\mathcal{S}_w)$ ($\mathcal{S}_w$ の Schur functor $\mathbf{s}_\lambda$ による像) の指標なので, この加群が KP filtration をもつことを示せばよい. これは $(\mathcal{S}_w)^{\otimes|\lambda|}$ の直和因子なので OK. $\square$

References

[Ful]: W. Fulton, *Young Tableaux.* Cambridge University Press, 1997.

[KP87]: W. Kraśkiewicz and P. Pragacz, Foncteurs de Schubert. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 304(9):209–211, 1987.

[KP04]: W. Kraśkiewicz and P. Pragacz, Schubert Functors and Schubert polynomials. *Eur. J. Comb.*, 25(8):1327–1344, 2004.

[Mac]: *Notes on Schubert Polynomials.* LACIM, Université du Québec à Montréal, 1991.

[Man]: *Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci.* American Mathematical Society, 2001.

[vdK]: W. van der Kallen. *Lectures on Frobenius Splittings and B-modules.* Springer, 1993.

[W]: M. Watanabe, Tensor product of Kraśkiewicz-Pragacz modules. *J. Algebra.* 443:422–429, 2015.