Summer school on quasi-hereditary algebras, 2016 8/26 - 8/30.
レジュメ : Cellular 代数
和田堅太郎 (信州大学理学部)

cellular 代数についてより詳しく書いたノートを
`http://math.shinshu-u.ac.jp/~wada/cellular.pdf`
で公開しています。興味のある人はそちらも御覧ください。

この講演では, 体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数について考える。(可換環上の代数についても適用できる部分もあるが，簡単のため，体上のもののみ考えることにする。)

§ 1. CELLULAR 代数

quasi-hereditary 代数は, heredity chain と呼ばれる両側イデアルの列が存在する代数であった。cellular 代数とは, cell chain と呼ばれる両側イデアルの列が存在する代数のことである。そこで, 次のような条件 $(\star)$ をみたす有限次元代数を出発点としよう。

条件 $(\star)$ **:** 体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ に対し, ある左 $\mathscr{A}$-加群の族 $\{\Delta_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$ と右 $\mathscr{A}$-加群の族 $\{\Delta_i^\sharp \,|\, 1 \leq i \leq m\}$ が存在し, さらに, $\mathscr{A}$ の両側イデアルの列

(1.1) $$\mathscr{A} = \mathscr{J}_1 \supset \mathscr{J}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{J}_m \supset \mathscr{J}_{m+1} = 0$$

で, 各 i に対し, $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群として,

(1.2) $$\mathscr{J}_i / \mathscr{J}_{i+1} \cong \Delta_i \otimes_{\mathbb{F}} \Delta_i^\sharp$$

となるものが存在する。

条件 $(\star)$ をみたす代数のことを **standardly based 代数** という ([DuRu])。条件 $(\star)$ はちょっと特殊な条件のように思われるかもしれないが，実はそうでもないということが, 以下の命題より分かる。

命題 1. $\mathbb{F}$ が代数的閉体であるとき, 任意の $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ は条件 $(\star)$ をみたす。

注意. 有限次元代数 $\mathscr{A}$ に対し, 条件 $(\star)$ をみたす左 (右)-加群の族と両側イデアルの列は一意的とは限らない。

補題 2. 体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ の両側イデアル $\mathscr{J}$ に対し, ある左 $\mathscr{A}$-加群 Δ と右 $\mathscr{A}$-加群 $\Delta^\sharp$ が存在して, $(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群として $\mathscr{J} \cong \Delta \otimes_{\mathbb{F}} \Delta^\sharp$ であるとする。このとき, 以下の (i), (ii) のいずれかが必ず成り立つ。

(i) $\mathscr{J}^2 = 0$.
(ii) $\mathscr{J}$ は $\mathscr{A}$ の *heredity* イデアル. さらに, ある原始ベキ等元 $e \in \mathscr{A}$ が存在し, $\mathscr{J} = \mathscr{A} e \mathscr{A}$, 左 $\mathscr{A}$-加群として $\Delta \cong \mathscr{A} e$, 右 $\mathscr{A}$-加群として $\Delta^\sharp \cong e \mathscr{A}$ となる。

補題 2 より, 条件 $(\star)$ をみたす代数 $\mathscr{A}$ の両側イデアルの列が heredity chain となるための必要十分条件が得られる。

命題 3. 体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ が条件 $(\star)$ をみたす時,

$\mathscr{A}$ の両側イデアルの列 (1.1) が *heredity chain* $\Leftrightarrow$ 全ての i に対し, $(\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1})^2 \neq 0$.

体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ が条件 $(\star)$ をみたすとする。$\Lambda = \{1, 2, \dots, m\}$ とおき, Λ 上に自然な順序関係を考える。$\Lambda_0 = \{i \in \Lambda \,|\, (\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1})^2 \neq 0\}$ とおき, $i \in \Lambda_0$ に対し, $L_i := \Delta_i/\operatorname{rad}\Delta_i$ とおく。補題 2 より, L_i は既約 $\mathscr{A}$-加群となる。このとき, 以下のことが成り立つ。

定理 4 (cf. [DuRu, Theorem 2.4.1, Proposition 2.4.4])**.** 体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ が条件 $(\star)$ をみたすとする。

(i) $\{L_i \,|\, i \in \Lambda_0\} = \{\textit{simple } \mathscr{A}\textit{-module}\}/_{\cong}$.

(ii) $i \in \Lambda$, $j \in \Lambda_0$ に対し, $[\Delta_i : L_j] \neq 0 \Rightarrow i \geq j$.
さらに, $i \in \Lambda_0$ のとき, $\operatorname{Top}\Delta_i = L_i$ かつ, $[\operatorname{rad}\Delta_i : L_j] \neq 0 \Rightarrow i > j$.

(iii) $i \in \Lambda_0$ に対し, P_i を L_i の射影被覆とする。このとき, P_i の部分加群の列

$$P_i \supset K_i = M_1 \supset M_2 \supset \cdots \supset M_k \supset M_{k+1} = 0$$

で, $P_i/K_i \cong \Delta_i$, $M_j/M_{j+1} \cong \Delta_{i_j}$ *s.t.* $i_j > i$ $(1 \leq j \leq k)$ をみたすものが存在する。

系 5. 条件 $(\star)$ をみたす代数 $\mathscr{A}$ に対し,

$\mathscr{A}$-mod が $\{\Delta_i \,|\, 1 \leq i \leq m\}$ を *standard* 加群とする最高ウェイト圏である $\Leftrightarrow$ $\Lambda = \Lambda_0$.

命題 3 (系 5) より, 条件 $(\star)$ をみたす代数 $\mathscr{A}$ が, (1.1) を heredity chain とする quasi-hereditary 代数となるには, $\Lambda = \Lambda_0$ となることが必要十分な条件であることが分かった。(逆に, $\mathscr{A}$ が quasi-hereditary 代数で $\mathbb{F}$ が代数的閉体のとき, 長さ最大の heredity chain と standard 加群は条件 $(\star)$ を満たす。) この条件を放棄する代わりに, 各 i に対し, 条件 $(\star)$ における左加群 Δ_i と右加群 $\Delta_i^\sharp$ とを入れ替えるような $\mathscr{A}$ の anti-involution の存在を仮定したものが cellular 代数である。きちんと定義すると以下のようになる。

定義 6 ([KX1])**.** $\mathscr{A}$ を条件 $(\star)$ をみたす代数とする。各 i に対し, ある $\mathscr{A}/\mathcal{J}_{i+1}$ の左イデアル $\Delta_i' \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$ が存在し, $\mathscr{A}$ の反自己同型 $\iota : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ で $\iota^2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ をみたすもので *(anti-involution)*, さらに,

$$\iota(\mathcal{J}_i) = \mathcal{J}_i, \quad \Delta_i \cong \Delta_i', \quad \Delta_i^\sharp \cong \iota(\Delta_i') \quad (1 \leq i \leq m)$$

であり, 図式

$$\begin{tikzcd}
\Delta_i' \otimes_{\mathbb{F}} \iota(\Delta_i') \arrow[r, "\cong", "(1.2)"'] \arrow[d, "x\otimes\iota(y)\mapsto y\otimes\iota(x)"'] & \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \arrow[d, "\iota"] \\
\Delta_i' \otimes_{\mathbb{F}} \iota(\Delta_i') \arrow[r, "\cong", "(1.2)"'] & \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}
\end{tikzcd}$$

が可換になるようなものが存在する時, $\mathscr{A}$ は ***cellular* 代数** であるという。また, このとき両側イデアルの列 (1.1) を $\mathscr{A}$ の ***cell chain*** といい, $\Delta_i' \cong \Delta_i$ *(resp.* $\iota(\Delta_i') \cong \Delta_i^\sharp$*)* $(1 \leq i \leq m)$ を**左 *cell* 加群** *(resp.* **右 *cell* 加群***)* という。

$\mathscr{A}$ を (1.1) を cell chain とする cellular 代数とする。$\Lambda = \{1, 2, \dots, m\}$ とし, 各 $i \in \Lambda$ に対し, $\{c_{\mathfrak{t}} \,|\, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)\}$ を Δ_i の基底とする ($\mathcal{T}(i)$ は添え字集合)。定義より, $\{\iota(c_{\mathfrak{t}}) \,|\, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)\}$ は $\Delta_i^\sharp = \iota(\Delta_i)$ の基底となる。$(\mathscr{A}, \mathscr{A})$-両側加群の準同型

$$\beta_i : \mathcal{J}_i \twoheadrightarrow \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1} \xrightarrow{(1.2)} \Delta_i \otimes_{\mathbb{F}} \iota(\Delta_i)$$

を考え, $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)$ に対し, $c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)} \in \beta_i^{-1}(c_{\mathfrak{s}} \otimes \iota(c_{\mathfrak{t}}))$ で $\iota(c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)}) = c_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{(i)}$ をみたすもの ($\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$ のときは, $\iota(c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)}) \equiv c_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{(i)} \mod \mathcal{J}_{i+1}$ をみたすもの) を 1 つ取る (定義 6 の可換図式より，そのようなものが取れる)。定義より,

(i) $\mathcal{C} = \{c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)} \,|\, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i),\, i \in \Lambda\}$ は $\mathscr{A}$ の基底である。

(ii) $c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)} \in \mathcal{C}$ に対し, $\iota(c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)}) = c_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{(i)}$ ($\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$ のときは, $\iota(c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)}) \equiv c_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{(i)} \mod \mathcal{J}_{i+1}$) である。

(iii) $a \in \mathscr{A}$, $c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)} \in \mathcal{C}$ に対し,

$$a \cdot c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)} \equiv \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(i)} r_{\mathfrak{u}}^{(a,\mathfrak{s})} c_{\mathfrak{u}\mathfrak{t}}^{(i)} \mod \mathcal{J}_{i+1} \quad (r_{\mathfrak{u}}^{(a,\mathfrak{s})} \in \mathbb{F}) \tag{1.3}$$

となる。ここで, $r_{\mathfrak{u}}^{(a,\mathfrak{s})}$ は $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)$ の取り方に依らずに定まる。

また, $\mathcal{J}_{i+1} = \langle c_{\mathfrak{s}'\mathfrak{t}'}^{(j)} \,|\, \mathfrak{s}', \mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(j),\, j > i \rangle_{\mathbb{F}\text{-span}}$ である。

上記の (i), (ii), (iii) をみたす $\mathscr{A}$ の基底 $\mathcal{C}$ のことを $\mathscr{A}$ の **cellular 基底** という。

このとき, $i \in \Lambda$ に対し, $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)$ を 1 つ固定して,

$$\Delta_{\mathfrak{t}}(i) := \langle c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{(i)} + \mathcal{J}_{i+1} \,|\, \mathfrak{s} \in \mathcal{T}(i) \rangle_{\mathbb{F}\text{-span}} \subset \mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1}$$

とおけば, 左 $\mathscr{A}$-加群として $\Delta_t(i) \cong \Delta_i$ となる。(よって, cellular 基底が与えられれば, cell 加群を構成できる。)

実際には, cellular 基底を持つような代数を cellular 代数と呼ぶというのが, [GL] による celular 代数のオリジナルな定義である。ここで, [GL] によるオリジナルな定義を与えておこう。

定義 7 ([GL]). *$\mathscr{A}$ を体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数とする。ある有限半順序集合 $(\Lambda, \geq)$ と有限集合 $\mathcal{T}(\lambda)$ ($\lambda \in \Lambda$) に対し, $\mathscr{A}$ の基底 $\mathcal{C} = \{c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda} \,|\, \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda),\, \lambda \in \Lambda\}$ が存在し, 以下の (i), (ii) をみたすとき, $\mathscr{A}$ は $\mathcal{C}$ を **cellular 基底**とする **cellular 代数**であるという：*

(i) *$\mathscr{A}$ 上の anti-involution $\iota : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ で, $\iota(c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda}) = c_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{\lambda}$ ($\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 2$ のときは, $\iota(c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda}) \equiv c_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}}^{\lambda} \mod \mathscr{A}(> \lambda)$) をみたすものが存在する。*

(ii) *$a \in \mathscr{A}$, $c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda} \in \mathcal{C}$ に対し,*

$$a \cdot c_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}}^{\lambda} \equiv \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(\lambda)} r_{\mathfrak{u}}^{(a,\mathfrak{s})} c_{\mathfrak{u}\mathfrak{t}}^{\lambda} \mod \mathscr{A}(> \lambda) \quad (r_{\mathfrak{u}}^{(a,\mathfrak{s})} \in \mathbb{F})$$

が成り立つ。ここで, $r_{\mathfrak{u}}^{(a,\mathfrak{s})}$ は $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(\lambda)$ の取り方に依らずに定まる。

(i), (ii) において, $\mathscr{A}(> \lambda) = \langle c_{\mathfrak{s}'\mathfrak{t}'}^{\lambda'} \,|\, \mathfrak{s}', \mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(\lambda),\, \lambda' \in \Lambda \text{ s.t. } \lambda' > \lambda \rangle_{\mathbb{F}\text{-span}}$ である。

定理 8 ([KX1]). *定義 6 と定義 7 は同値な定義である。*

例 9.

(i) $\mathscr{A}$ を体 $\mathbb{F}$ 上の $n\times n$ 行列のなす行列環 $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{F})$ とする。
$\Lambda=\{\lambda\}$, $\mathcal{T}(\lambda)=\{1,2,\ldots,n\}$ とし, c_{ij}^{λ} を (i,j)-成分が 1 で他は全て 0 である行列とすると, $\mathscr{A}$ は $\mathcal{C}=\{c_{ij}^{\lambda}\,|\,i,j\in\mathcal{T}(\lambda)\}$ を cellular 基底とする cellular 代数となる。このとき, 列ベクトル (resp. 行ベクトル) が 左 (resp. 右)cell 加群を与える。

(ii) $\mathscr{A}=\mathbb{F}\Big(\ 1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} 3\ \Big)\Big/\langle\alpha_1\alpha_2,\,\beta_2\beta_1,\,\beta_1\alpha_1-\alpha_2\beta_2\rangle_{\text{ ideal}}$ とする。
$\Lambda=\{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ とし, Λ 上の順序関係を $\lambda_0>\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$ によって定める。また, $\mathcal{T}(\lambda_0)=\{1\}$, $\mathcal{T}(\lambda_1)=\mathcal{T}(\lambda_2)=\{1,2\}$, $\mathcal{T}(\lambda_3)=\{1\}$ とし,

$$c_{11}^{\lambda_0}=\alpha_1\beta_1,\quad \begin{bmatrix} c_{11}^{\lambda_i} & c_{12}^{\lambda_i}\\ c_{21}^{\lambda_i} & c_{22}^{\lambda_i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_i & \alpha_i\\ \beta_i & \beta_i\alpha_i\end{bmatrix}\quad (i=1,2),\quad c_{11}^{\lambda_3}=e_3$$

とおけば, $\mathscr{A}$ は $\mathcal{C}=\{c_{ij}^{\lambda}\,|\,i,j\in\mathcal{T}(\lambda),\,\lambda\in\Lambda\}$ を cellular 基底とする cellular 代数となる。このとき,

$$\mathcal{J}(\lambda_i)=\langle c_{ij}^{\lambda_k}\,|\,i,j\in\mathcal{T}(\lambda_k),\,\lambda_k\geq\lambda_i\rangle_{\mathbb{F}\text{-span}}\quad (0\leq i\leq 3)$$

とおけば, $\mathscr{A}=\mathcal{J}(\lambda_3)\supset\mathcal{J}(\lambda_2)\supset\mathcal{J}(\lambda_1)\supset\mathcal{J}(\lambda_0)\supset 0$ は $\mathscr{A}$ の cell chain となる。このとき, $\mathcal{J}(\lambda_0)^2=0$ であるので, $\mathscr{A}$ は quasi-hereditary 代数ではない。

(iii) $\mathscr{A}=\mathbb{F}\Big(\ 0 \underset{\beta_0}{\overset{\alpha_0}{\rightleftarrows}} 1 \underset{\beta_1}{\overset{\alpha_1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{\beta_2}{\overset{\alpha_2}{\rightleftarrows}} 3\ \Big)\Big/\langle\alpha_0\beta_0,\,\alpha_i\alpha_{i+1},\,\beta_{i+1}\beta_i,\,\beta_i\alpha_i-\alpha_{i+1}\beta_{i+1}\,|\,i=0,1\rangle_{\text{ ideal}}$
とする。$\Lambda=\{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ とし, Λ 上の順序関係を $\lambda_0>\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$ によって定める。また, $\mathcal{T}(\lambda_0)=\mathcal{T}(\lambda_1)=\mathcal{T}(\lambda_2)=\{1,2\}$, $\mathcal{T}(\lambda_3)=\{1\}$ とし,

$$\begin{bmatrix} c_{11}^{\lambda_i} & c_{12}^{\lambda_i}\\ c_{21}^{\lambda_i} & c_{22}^{\lambda_i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e_i & \alpha_i\\ \beta_i & \beta_i\alpha_i\end{bmatrix}\quad (i=0,1,2),\quad c_{11}^{\lambda_3}=e_3$$

とおけば, $\mathscr{A}$ は $\mathcal{C}=\{c_{ij}^{\lambda}\,|\,i,j\in\mathcal{T}(\lambda),\,\lambda\in\Lambda\}$ を cellular 基底とする cellular 代数となる。このとき,

$$\mathcal{J}(\lambda_i)=\langle c_{ij}^{\lambda_k}\,|\,i,j\in\mathcal{T}(\lambda_k),\,\lambda_k\geq\lambda_i\rangle_{\mathbb{F}\text{-span}}\quad (0\leq i\leq 3)$$

とおけば, $\mathscr{A}=\mathcal{J}(\lambda_3)\supset\mathcal{J}(\lambda_2)\supset\mathcal{J}(\lambda_1)\supset\mathcal{J}(\lambda_0)\supset\mathcal{J}(\lambda_{-1})=0$ は $\mathscr{A}$ の cell chain となる。このとき, $\mathcal{J}(\lambda_i)/\mathcal{J}(\lambda_{i-1})$ $(0\leq i\leq 3)$ はそれぞれ 0 でないベキ等元を含むので, $(\mathcal{J}(\lambda_i)/\mathcal{J}(\lambda_{i-1}))^2\neq 0$ である。よって, $\mathscr{A}$ は quasi-hereditary 代数である。

さらに, $(e_1+e_2+e_3)\mathscr{A}(e_1+e_2+e_3)$ は (ii) の代数と同型であり, (iii) の代数は (ii) の代数の quasi-hereditary cover となる。

定義 6 より，以下のことはすぐに分かる。

補題 10. $\mathscr{A}$ を ι を *anti-involution* とする *cellular* 代数とすると, 以下のことが成り立つ。

(i) $\mathscr{A} = \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{J}_m \supset \mathcal{J}_{m+1} = 0$ を $\mathscr{A}$ の *cell chain* とすると, 商代数 $\mathscr{A}/\mathcal{J}_k$ $(2 \le k \le m)$ も *cellular* 代数である。

(ii) $e \in \mathscr{A}$ を $\iota(e) = e$ であるベキ等元とすると, $e\mathscr{A}e$ も *cellular* 代数である。

また, 森田同値における cellular 構造の不変性について, 以下のことが知られている。

定理 11 ([KX2, Theorem 8.1, Proposition 8.2])**.** $\mathscr{A}$ を体 $\mathbb{F}$ $(\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2)$ 上の有限次元代数とすると, 以下のことが成り立つ。

(i) $\mathscr{A}$ が ι を *anti-involution* とする *cellular* 代数であるとき, $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元の各同値類の中に, ι で不変なものが必ず存在する。特に, $\mathscr{A}$ の *basic* 代数は $\mathscr{A}$ の *cellular* 構造を引き継ぐ。

(ii) $\mathscr{A}$ が *cellular* 代数であることと $\mathscr{A}$ の *basic* 代数が *cellular* 代数であることとは同値である。

演習問題 1. $\mathscr{A} = \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{F} \right\}$ とおく。

(i) $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元を全て求めよ。

(ii) $\Lambda = \{\lambda\}, \mathcal{T}(\lambda) = \{\mathfrak{s}, \mathfrak{t}\}, \mathcal{C} = \left\{ c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{s}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c^{\lambda}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, c^{\lambda}_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c^{\lambda}_{\mathfrak{t}\mathfrak{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ とおくと, $\mathscr{A}$ は $\mathcal{C}$ を cellular 基底とする cellular 代数であることを示せ。(この cellular 基底は, 例 9 (i) で与えた cellular 構造とは異なる cellular 構造を与えていることに注意。)

(iii) ι を (ii) で定めた cellular 基底 $\mathcal{C}$ によって定まる $\mathscr{A}$ の anti-involution とする。$\operatorname{char}\mathbb{F} = 2$ であるとき, ι で不変となる $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元は存在しないことを示せ。

§ 2. CELLULAR 代数の表現論

この節では, $\mathscr{A}$ を体 $\mathbb{F}$ 上の ι を anti-involution とする cellular 代数とし, その表現論について述べる。$\mathscr{A} = \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{J}_m \supset \mathcal{J}_{m+1} = 0$ を cell chain とする。また, Δ_i $(i \in \Lambda = \{1, \ldots, m\})$ を 左 cell-加群とし, $\{c_{\mathfrak{t}} \mid \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)\}$ を Δ_i の基底とする。さらに, $\mathcal{C} = \{c^{(i)}_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} \mid \mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i),\, i \in \Lambda\}$ を付随する $\mathscr{A}$ の cellular 基底とする。(1.3) の $a \in \mathscr{A}$ を $\iota(a)$ に置き換えてから, ι を施すと,

$$c^{(i)}_{\mathfrak{t}\mathfrak{s}} \cdot a \equiv \sum_{\mathfrak{u} \in \mathcal{T}(i)} r^{(\iota(a), \mathfrak{s})}_{\mathfrak{u}} c^{(i)}_{\mathfrak{t}\mathfrak{u}} \mod \mathcal{J}_{i+1} \tag{2.1}$$

を得る。ここで, $r^{(\iota(a),\mathfrak{s})}_{\mathfrak{u}} \in \mathbb{F}$ は $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(i)$ の取り方に依らない。(1.3), (2.1) に注意すれば, $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(i)$ に対し,

$$c^{(i)}_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}} c^{(i)}_{\mathfrak{t}\mathfrak{v}} \equiv r_{\mathfrak{s}\mathfrak{t}} c^{(i)}_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} \mod \mathcal{J}_{i+1}$$

となる $r_{\mathfrak{st}} \in \mathbb{F}$ が $\mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(i)$ の取り方に依らずに定まる。そこで, cell 加群 Δ_i 上の双線形形式 $\langle\, , \rangle : \Delta_i \times \Delta_i \to \mathbb{F}$ を

$$c^{(i)}_{\mathfrak{us}} c^{(i)}_{\mathfrak{tv}} \equiv \langle c_{\mathfrak{s}}, c_{\mathfrak{t}} \rangle c^{(i)}_{\mathfrak{uv}} \mod \mathcal{J}_{i+1} \quad (\mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{u}, \mathfrak{v} \in \mathcal{T}(i)) \tag{2.2}$$

によって定める。定義より, $x, y, \in \Delta_i$, $a \in \mathscr{A}$ に対し,

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \langle a \cdot x, y \rangle = \langle x, \iota(a) \cdot y \rangle \tag{2.3}$$

となる。$\operatorname{rad}_{\langle , \rangle} \Delta_i := \{x \in \Delta_i \,|\, \langle x, y \rangle = 0 \text{ for all } y \in \Delta_i\}$ とおくと (2.3) より, $\operatorname{rad}_{\langle , \rangle} \Delta_i$ は Δ_i の部分 $\mathscr{A}$-加群となる。また, (2.2) より,

$$\Lambda_0 = \{i \in \Lambda \,|\, (\mathcal{J}_i / \mathcal{J}_{i+1})^2 \neq 0\} = \{i \in \Lambda \,|\, \Delta_i \neq \operatorname{rad}_{\langle , \rangle} \Delta_i\}$$

を得る。

命題 12. *$i \in \Lambda_0$ に対し, $\operatorname{rad}_{\langle , \rangle} \Delta_i$ は Δ_i の一意的な極大部分 $\mathscr{A}$-加群である。よって, $\operatorname{rad}_{\langle , \rangle} \Delta_i = \operatorname{rad} \Delta_i$ である ($\operatorname{rad} \Delta_i$ は Δ_i の Jacobson 根基)。*

$L_i := \Delta_i / \operatorname{rad} \Delta_i$ ($i \in \Lambda_0$) は絶対既約である。よって, $\operatorname{End}_{\mathscr{A}}(L_i) \cong \mathbb{F}$ となる。さらに, $\{L_i \,|\, i \in \Lambda_0\} = \{\text{simple } \mathscr{A}\text{-module}\}/_{\cong}$ である。

左 $\mathscr{A}$-加群 M に対し, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(M, \mathbb{F})$ 上に $\mathscr{A}$ の左作用を

$$(a \cdot \varphi)(x) = \varphi(\iota(x) \cdot x) \quad (a \in \mathscr{A},\, \varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(M, \mathbb{F}),\, x \in M)$$

によって定めることによって, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(M, \mathbb{F})$ は左 $\mathscr{A}$-加群となる。これを $M^{\circledast}$ と表すと, 完全反変関手 $\circledast : \mathscr{A}\text{-mod} \to \mathscr{A}\text{-mod}$ ($M \mapsto M^{\circledast}$) を得る。$\iota$ が $\mathscr{A}$ の anti-involution であることに注意すれば, $\circledast \circ \circledast \cong \operatorname{Id}_{\mathscr{A}\text{-mod}}$ を得る。また, $i \in \Lambda$ に対し, $\nabla_i := \Delta_i^{\circledast}$ とおく。

$i \in \Lambda_0$ に対し, $L_i := \Delta_i / \operatorname{rad}_{\langle , \rangle} \Delta_i$ 上の双線形形式 $\langle\, , \rangle_{L_i} L_i \times L_i \to \mathbb{F}$ が

$$\langle \overline{x}, \overline{y} \rangle_{L_i} = \langle x, y \rangle \quad (\overline{x} = x + \operatorname{rad} \Delta_i,\ \overline{y} = y + \operatorname{rad} \Delta_i \in L_i)$$

によって定まる。定義より, $\langle\, , \rangle_{L_i}$ は非退化なので,

$$L_i \to L_i^{\circledast} \text{ s.t. } \overline{x} \mapsto \langle \overline{x}, - \rangle$$

は左 $\mathscr{A}$-加群の同型写像を与える ((2.3) に注意)。さらに, 次のことが成り立つ。

命題 13.

(i) *$i \in \Lambda$ に対し, 左 $\mathscr{A}$-加群として, $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(\Delta_i^{\sharp}, \mathbb{F}) \cong \nabla_i$.*
(ii) *$i \in \Lambda_0$ に対し, 左 $\mathscr{A}$-加群として, $L_i^{\circledast} \cong L_i$.*
(iii) *$i \in \Lambda$, $j \in \Lambda_0$ に対し, $[\nabla_i : L_j] = [\Delta_i : L_j]$.*
(iv) *$i, j \in \Lambda_0$ に対し, $\mathbb{F}$-線形空間として $\operatorname{Ext}^k_{\mathscr{A}}(L_i, L_j) \cong \operatorname{Ext}^k_{\mathscr{A}}(L_j, L_i)$ ($k \geq 0$).*

演習問題 2. anti-involution を持った (cellular 代数ではない) 有限次元代数 $\mathscr{A}$ で, 既約 $\mathscr{A}$-加群 L に対し, $L^{\circledast} \not\cong L$ となる例を挙げよ。

cellular 代数 $\mathscr{A}$ に対し, $[\Delta_i : L_j]$ $(i \in \Lambda,\ j \in \Lambda_0)$ を $\mathscr{A}$ の**分解定数**という。また, $i \in \Lambda_0$ に対し, P_i を L_i の射影被覆とし,

$$\mathbf{D} := \big([\Delta_i : L_j]\big)_{i\in\Lambda, j\in\Lambda_0}, \quad \mathbf{C} := \big([P_i : L_j]\big)_{i,j\in\Lambda_0}$$

とおき, $\mathbf{D}$ を $\mathscr{A}$ の**分解行列**, $\mathbf{C}$ を $\mathscr{A}$ の **Cartan 行列**という。

定理 14 ([GL], [KX3])**.** *cellular* 代数 $\mathscr{A}$ に対し, 以下のことが成り立つ。

(i) $\{L_i \,|\, i \in \Lambda_0\} = \{simple\ \mathscr{A}\text{-}module\}/_{\cong}$.

(ii) $i \in \Lambda,\ j \in \Lambda_0$ に対し, $[\Delta_i : L_j] \neq 0 \Rightarrow i \geq j$.
さらに, $i \in \Lambda_0$ のとき, $\mathrm{Top}\,\Delta_i = L_i$ かつ, $[\mathrm{rad}\,\Delta_i : L_j] \neq 0 \Rightarrow i > j$.

(iii) $\mathscr{A}$: 半単純 $\Leftrightarrow$ 全ての $i \in \Lambda$ に対し, $\Delta_i = L_i$.

(iv) $i \in \Lambda_0$ に対し, P_i を L_i の射影被覆とする。このとき, $i, j \in \Lambda_0$ に対し,

$$[P_i : L_j] = \sum_{k\in\Lambda} [\Delta_k : L_i][\Delta_k : L_j].$$

よって, $\mathbf{C} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}$ となる。ここで, $\mathbf{D}^T$ は $\mathbf{D}$ の転置行列である。

(v) e を $\mathscr{A}$ の原始ベキ等元とするとき, e と $\iota(e)$ は同値である。

(vi) $\mathscr{A}$ の *Cartan* 行列 $\mathbf{C}$ の行列式 $\det\mathbf{C}$ は正の整数である。
さらに, $\det\mathbf{C} = 1 \Leftrightarrow \Lambda = \Lambda_0$ が成り立つ。

注意. 定理 14 の (i)-(iii) は, 定理 4 より従う。よって, 条件 $(\star)$ をみたす一般の有限次元代数に対して成り立つ主張である。一方で, 定理 14 の (iv)-(vi) の証明には, 命題 13 を使い, 命題 13 には, cellular 構造を定める anti-involution を用いている。

cellular 代数 $\mathscr{A}$ が quasi-hereditary 代数となるための条件として, 以下を得る。

定理 15 ([KX3])**.** 体 $\mathbb{F}$ 上の *cellular* 代数 $\mathscr{A}$ に対し, 以下のことは全て同値である。

(i) $\mathscr{A}$ は *quasi-hereditary* 代数である。

(ii) $\mathscr{A}$ の任意の *cell chain* は *heredity chain* である。

(iii) $\mathscr{A} = \mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{J}_m \supset \mathcal{J}_{m+1} = 0$ を $\mathscr{A}$ の *cell chain* とすると, 全ての i に対し, $(\mathcal{J}_i/\mathcal{J}_{i+1})^2 \neq 0$ である。

(iv) $\Lambda = \Lambda_0$.

(v) $\mathscr{A}$ の *Cartan* 行列 $\mathbf{C}$ に対し, $\det\mathbf{C} = 1$ である。

(vi) $\mathscr{A}$ の大域次元は有限である。

§ 3. 有限表現型である対称 CELLULAR 代数の分類

この節では, 代数的閉体 $\mathbb{F}$ $(\mathrm{char}\,\mathbb{F} \neq 2)$ 上の有限次元代数に対し, 有限表現型である対称代数の中で, さらに cellular 代数となるものを考える。

まず, $\mathbb{F}$ 上の有限表現型である対称代数の分類については, 以下のことが知られている。

定理 16 (cf. [S])**.** $\mathbb{F}$ 上の有限次元代数 $\mathscr{A}$ が有限表現型である対称代数ならば, 以下のいずれかと森田同値である。

(i) 重複度 $m \geq 1$ の例外的頂点 S を持つ *Brauer tree* T_S^m に付随した *Brauer tree* 代数 $A(T_S^m)$.

(ii) 重複度 2 の例外的頂点 S をグラフの端に持つ *Brauer tree* T_S^2 に付随した変形 *Brauer tree* 代数 $D(T_S^2)$.

(iii) *Dynkin* 型の *tilted* 代数 $\mathscr{B}$ の *trivial extension* $T(\mathscr{B})$.

そこで, 以下の方針で, 有限表現型である対称 cellular 代数を分類する。

- Theorem 11 より，$\mathscr{A}$ が cellular 代数ならば，その basic 代数も cellular 構造を引き継ぐので，Theorem 16 の分類に現れる代数の中で, cellular 代数であるものを分類すれば良い。
- Theorem 16 の分類に現れる代数の中で, cellular 代数になるものには, cellular 基底を具体的に与える。
- $\mathscr{A}$ が cellular 代数であるとすると, §1, §2 より,
  (a) 任意の既約加群 L, L' に対し, $\mathrm{Ext}^k_{\mathscr{A}}(L, L') \cong \mathrm{Ext}^k_{\mathscr{A}}(L', L)$ $(k \geq 0)$.
  (b) $\mathscr{A}$ の分解行列 $\mathbf{D}$, Cartan 行列 $\mathbf{C}$ に対し, $\det \mathbf{C} > 0$ かつ $\mathbf{C} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}$ となる。特に, Cartan 行列 $\mathbf{C}$ に対し, $\mathbf{C} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}$ となる非負整数を成分とする行列 $\mathbf{D}$ が存在する。さらに, $\mathbf{D} = (d_{ij})_{i\in\Lambda, j\in\Lambda_0}$ とすると, $d_{ij} \neq 0 \Rightarrow i \geq j$ である。
  (c) $\mathscr{A}$ が basic 代数であるとき, 任意のベキ等元 $e \in \mathscr{A}$ に対し, $e\mathscr{A}e$ も cellular 代数である。

  が成り立つ。よって, Theorem 16 の分類に現れる代数の中で, 上のいずれかが成り立たないものは cellular 代数ではない。

以上の方針に従って調べると, 以下の結果を得る。

定理 17 ([大松])**.** 有限表現型である対称 *cellular* 代数は*, Brauer tree*

$$T_S^m = \circ \text{——} \circ \text{——} \dots \text{——} \circ \quad \text{(例外的頂点 } S \text{ 及び重複度 } m \text{ は任意)}$$

に付随した *Brauer tree* 代数 $A(T_S^m)$ と森田同値である。

演習問題 3. ((i)-(iii) のヒント：上の方針の中の (a)-(c) のいずれかに矛盾することを使う)

(i) Cartan 行列が $\begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 2 \end{pmatrix}$ $(k \geq 2)$ となる cellular 代数は存在しないことを示せ。

(ii) Cartan 行列が $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるような cellular 代数は存在しないことを示せ。

(iii) 分岐をもった Brauer tree に付随する Brauer tree 代数は cellular 代数でないことを示せ。

(iv) 直線の Brauer tree (例外的頂点 S 及び重複度 m は任意) に付随した Brauer tree 代数は cellular 代数であることを示せ。

§ 4. Cellular 代数であることが知られている代数のリスト

(注意) 以下のリストのうちで, cellular 代数であるために若干の条件が必要なものもあります。

- 対称群の群環, 及び, 対称群に付随した Iwahori-Hecke 代数.
- Schur 代数, 及び, q-Schur 代数.
- Coxeter 群に付随した Iwahori-Hecke 代数.
- Ariki-Koike 代数.
- cyclotomic q-Schur 代数.
- generalized q-Schur 代数.
- Brauer 代数.
- Birman-Murakami-Wenzl 代数.
- cyclotomic Birman-Murakami-Wentzl 代数.
- Temperley-Lieb 代数.
- cyclotomic Temperley-Lieb 代数.
- Jones 代数.
- Partition 代数.
- Cyclotomic Nazarov-Wenzl 代数.
- U_q-tilting 加群の自己準同型環.
- A 型の cyclotomic Khovanov-Lauda-Rouquier 代数.
- Khovanov's diagram 代数.
- quiver Schur 代数.
- graded Temperley-Lieb 代数.

References

[DuRu] J.Du and H.Rui, *Based algebras and standard bases for quasi-hereditary algebras*, Trans. A.M.S. **350** (1998), 3207-3235.

[GL] J.J.Graham and G.I.Lehrer, *Cellular algebras*, Invent. Math. **123** (1996), 1-34.

[KX1] S.König and C.C.Xi, *On the structure of cellular algebras*, Canadian Math. Soc. Conference Proceedings **vol. 24** (1998), 365-386.

[KX2] S.König and C.C.Xi, *Cellular algebras: inflations and Morita equivalences*, J. London Math. Soc.**60** (1999), 700-722.

[KX3] S.König and C.C.Xi, *When is a cellular algebra quasi-hereditary?*, Math. Ann.**315** (1999), 281-293.

[大松] 大松 美咲, 有限表現型である対称 cellular 代数の分類, 修士論文 (2014).

[S] A.Skowroński, *Selfinjective algebras : finite type and tame type*, Contemporary Math. **406** (2006), 169-238.