

OPTIONS, FUTURES,  
AND OTHER DERIVATIVES  
*7th Edition*

第7版

# ファイナンシャル エンジニアリング

デリバティブ取引と  
リスク管理の総体系

ジョン・ハル [著]  
三菱UFJ証券 市場商品本部 [訳]

**OPTIONS,FUTURES,AND OTHER DERIVATIVES**  
**SEVENTH EDITION**

by John.C.Hull

Copyright © 2009, 2006, 2003, 2000, 1997 by Pearson Education,Inc.,  
Upper Saddle River, New Jersey, 07458.  
Japanese translation rights arranged with  
Prentice-Hall,Inc.,a Pearson Education Company  
through Japan UNI Agency,Inc.,Tokyo.

## はしがき

本書の第1版が330ページと13章だけの構成であったということが、いまとなっては信じられない。デリバティブ市場の急速な変化に歩調を合わせるべく、本書は発展し、適応してきた。

これまでの版と同様に、本書ではいくつかの市場について取り扱う。本書は、経営学、経済学や金融数学、金融工学を専攻する大学院生を対象として書いたものであるが、学生が数理的なスキルをもっている場合には、学部学生上級者に対しても利用できる。また、デリバティブ市場に従事する多くの実務家にとっても有用である。これまで本書を購入した読者の半分が、アナリスト、トレーダー、そして市場関係者であることを喜ばしく思う。

一般的に、デリバティブを取り扱った書籍を執筆する際には、どの程度の数学を用いるかということに頭をいためることが多い。というのは、あまりに高度な数学を用いれば、多くの学生や実務家にとって読みにくいものとなるが、初步的な数学では重要な事項を十分に説明することができないからである。そこで、この本では使う数学と記号について細心の注意を払い、議論の本質に直接関係しない数学的記述は極力避けるか、あるいは各章末の付録や私のWebサイトのテクニカルノートに収めることとした。また、新たな概念を紹介する場合には数値例を加えるなどして、できるだけわかりやすく説明するよう心がけた。

本書はごく初步的な金融論と確率・統計の知識を前提としているが、オプションや先物、スワップ、その他のデリバティブ商品についてはなんら予備知識を前提としていない。したがって、本書を教材に使う講義を受講する場合でも、投資理論に関する事前の講義を受ける必要はない。

本書はデリバティブの初級コース、またはより上級コースでも利用できる。授業で用いる場合には、さまざまな利用方法がある。デリバティブの入門コースを教える場合には、本書の前半部分に多くの時間を割きたいと考える教官もいるだろうし、より上級コースの場合には、本書の後半部分の章を

組み合わせて使う教官もいるであろう。私は、第34章で解説している内容は、入門コース、あるいは上級コースの最後の部分でのよい材料となると思っている。

## 変更点

第7版では、以下の内容が更新され、改善されている。

1. 従業員ストック・オプションに関する章（第14章）を追加した。従業員ストック・オプションが通常どのように組成されるか、また、役員と株主の利益の調整、会計処理の変更による影響、四つの異なる評価手法、および日付をさかのぼったスキャンダルについて説明した。
2. クレジット・デリバティブに関する章（第23章）を拡張し、米国におけるサブプライム・モーゲージの貸出、住宅ローンの証券化方法、それが引き起こした信用危機について説明した。また、CDO評価のより完全な取扱い、ガウシアン・コピュラモデルの実装とその代替モデルについて紹介した。
3. 先物オプションを株価指数オプションと通貨オプション（第15章と第16章）から分けて別の章にした。また、内容もいくつか刷新した。第15章では株価指数オプションと通貨オプションの利用例とその評価方法について記述した。これによって章の流れがよくなつた。また、先物オプションを記述した第16章では、さまざまな種類のヨーロピアン・オプションの評価方法に関して、Black-Scholes モデルにかわる Black モデルの利用方法について説明した。
4. グリークス（リスクパラメータ）について記述した第17章も刷新した。最初に、配当のない株券オプションに対するデルタ、ガンマ、セータ、ベガなどのリスクパラメータについて説明し、他のタイプのオプションのグリークスの計算式を章の終わりにかけて表で示した。教材として本書を利用する場合に、このアプローチはうまくいくことがわかった。
5. 第4章では流動性選好説、および銀行の利鞘の管理についてより詳

細な記述を追加した。

6. ヘッジのテーリングについての関連事項を第3章で説明した。これにより、本書の式とCFA資格試験での式における軽微な食い違いを解消した。
7. 多くの新しい話題を追加した。たとえば、
  - (a) VIXボラティリティ指数を第13章と第24章で説明した。
  - (b) 分散スワップ、ボラティリティ・スワップとその評価を第24章で説明した。
  - (c) クレジット指数を含む取引の詳細を第23章で説明した。
  - (d) 第18章ではボラティリティ・スマイルの題材を増やした。付録にはインプライド・ボラティリティを用いた、将来時点における資産価格の確率分布の計算方法を数値例とともに説明した。
  - (e) 第24章ではルックバック・オプションの詳細を説明した。そこでは、変動ルックバック・オプションと固定ルックバック・オプションを区別した。
  - (f) 先物スタイルのオプションを第16章で説明した。
8. 正規分布を表す記号  $\phi$  の表記に若干の変更を加えた。最近的一般的な使い方に従って、 $\phi$  の2番目の引数は分布の標準偏差ではなく分散とした。
9. 章末問題をいくつか追加した。

## ソフトウェア

幅広く賞賛をいただいているDerivaGemソフトウェア(Version 1.52)が、本書に付属されている。インストーラーが本ソフトウェアには用意されており、ファイルを正しいフォルダに自動的にインストールし、アイコンを作成して、学生がソフトウェアをさらに簡単に利用できるようになっている。DerivaGemソフトウェアは、Options CalculatorとApplications Builderという二つのExcelアプリケーションで構成されている。Options Calculatorは、さまざまなオプションの時価評価を簡単に行えるソフト

ウェアである。一方、Applications Builder は、ユーザーが自分のアプリケーションを構築できるように、Excel ベースの多くの関数で構成されている。学生がオプションの性質を調べたり、数値解析を行うことが簡単にできるような、いくつかのサンプルプログラムも含まれている。それらは、より興味のある分野に適用可能なように設計し直すこともできる。ソフトウェアについては、本書の最後により詳細に記述してある。本ソフトウェアの最新版は私の Web サイト

[www.rotman.utoronto.ca/~hull](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull)

からダウンロード可能である。

## スライド

数百に及ぶ PowerPoint のスライドが、Pearson 社の Instructor Resource Center または私の Web サイトからダウンロード可能である。テキストを採用する教官は、自分自身のニーズに合わせてこれらのスライドに自由に手を加えてもかまわない。

## 解答マニュアル

第 6 版と同様、章末問題は「章末問題」と「宿題」という二つのグループに分類した。「章末問題」の解答は、Pearson 社から出版されている Options, Futures, and Other Derivatives 7e : Solutions Manual (ISBN-10 : 0136015891 ; ISBN-13 : 9780136015895) に記載されており、これについては学生も購入することができる。

## 講師マニュアル

すべての問題（章末問題と宿題）の解答は Pearson 社から出版されている Options, Futures, and Other Derivatives 7e : Instructors Manual (ISBN-10 : 0136015875 ; ISBN-13 : 9780136015871) に記載されており、講師はそれを利用できる。本講師マニュアルには各章の指導ノート、テスト演習問題、コース編成についての注解、本書に記載されていない問題などが含まれてい

る。テスト演習問題については Pearson Instructor Resource Center でも入手できる。

## テクニカルノート

本文中で指摘した詳細部分については、テクニカルノートを利用されたい。それは私の Web サイトからダウンロードできる。本文中にテクニカルノートを挿入しないことで、学生の使い勝手がよいように、本文の記述を簡潔にすることができた。

## 謝　　辞

本書の発刊にあたっては数多くの人々の協力をいただいた。Farhang Aslani, Jas Badyal, Emilio Barone, Giovanni Barone-Adesi, Alex Bergier, George Blazenko, Laurence Booth, Phelim Boyle, Peter Carr, Don Chance, J.-P. Chateau, Ren-Raw Chen, Dan Cline, George Constantinides, Michel Crouhy, Emanuel Derman, Brian Donaldson, Dieter Dorp, Scott Drabin, Jerome Duncan, Steinar Ekern, David Forfar, David Fowler, Louis Gagnon, Richard Goldfarb, Dajiang Guo, Jörgen Hallbeck, Ian Hawkins, Michael Hemler, Steve Heston, Bernie Hildebrandt, Michelle Hull, Kiyoshi Kato, Kevin Kneafsy, Iain MacDonald, Bill Margrabe, Eddie Mizzi, Izzy Nelkin, Neil Pearson, Paul Potvin, Shailendra Pandit, Eric Reiner, Richard Rendleman, Gordon Roberts, Chris Robinson, Cheryl Rosen, John Rumsey, Ani Sanyal, Klaus Schurger, Eduardo Schwartz, Michael Selby, Piet Sercu, Duane Stock, Edward Thorpe, Yisong Tian, Alan Tucker, P.V. Viswanath, George Wang, Jason Wei, Bob Whaley, Alan White, Hailiang Yang, Victor Zak, Jozef Zemek といった研究者、学生、実務家である方々から有益な意見や提案を頂戴した。

特に Eduardo Schwartz 氏には、第 1 版の原稿をもとに数多く意見をいただき、おかげで本書の内容を大幅に改善することができたことを感謝して

いる。また、George Constantinides 氏, Ramon Rabinovitch 氏, および Richard Rendleman 氏からは、最近の版を改善するうえでの貴重なご意見を頂戴した。

本書の第1版から第6版まで、実務家の間で大変好評をいただいており、彼らからの意見や提案は本書の改良として取り入れさせていただいた。特に Dan Cline 氏, David Forfar 氏, ならびに Richard Goldfarb 氏に感謝したい。また、トロント大学における MBA および MFin の学生たちも、本書の充実のために大きな役割を果たした。特に、本版を発刊するうえで優れた研究サポートを提供してくれた MFin の学生 Derrick Knie, Nelson Arruda 両氏にも感謝したい。

トロント大学の同僚である Alan White 氏の貢献は特筆に値する。Alan 氏と私は25年間にわたってデリバティブの分野で共同研究を続けてきた。この間、私たちは、多くの時間をかけてデリバティブにかかる数多くの問題について議論を重ねてきており、その意味で、本書で紹介される多くの新しい考え方あるいは既存のアイデアに対する新しい説明は、私のものであるとともに Alan 氏のものである。原稿を大変ていねいに読んだ Alan 氏からは、数多くの提案をいただき、それらについては本書に盛り込んである。また、Alan 氏は、DerivaGem ソフトウェアの高度化にも大きく寄与してくれた。

Pearson 社スタッフの方々の熱意、助言、励ましに対して感謝したい。Donna Battista 氏（編集担当者）、Mary-Kate Murray 氏（金融編集アシスタント）には特に感謝したい。また、さまざまな局面において本書の作成に重要な役割を担ってくれた Scott Barr 氏, Leah Jewell 氏, Paul Donnelly 氏, Maureen Riopelle 氏、および David Alexander 氏に感謝する。

読者の方からの本書へのコメントを歓迎している。私の e-mail アドレスは次のとおり。

[hull@rotman.utoronto.ca](mailto:hull@rotman.utoronto.ca)

John Hull

Joseph L. Rotman School of Management

トロント大学

## 訳者はしがき

本書は、John Hull教授による“Options, Futures, and Other Derivatives (Seventh Edition), 2008”の全訳である。今回で5回目の同書の日本語出版になるが、前回の第5版翻訳から約4年半ぶりの出版となる。もともと第6版の翻訳を始めていたものの、昨年5月に第7版が現地で出版され、再度第7版の翻訳に着手し、出版がのびのびになってしまった点を、読者の皆様に深くお詫びしたい。ただし、第7版の翻訳に際しては、追加・変更箇所だけではなく、ほぼ全面にわたって翻訳の手直しを行い、日本の読者の皆様の理解を深めるために役立つものと期待している。

この4年間で金融界を取り巻く環境は大きな変化を遂げた。2007年のサブプライム危機を契機に、金融市場はかつて経験したことのないようなグローバルな金融危機に直面し、金融工学を駆使した金融商品もその余波を受ける結果となった。たとえばCDOといった商品の価値の下落がその代表的なものである。さらには複雑な金融商品を構成している原資産の市場流動性の極端な低下に伴い、アービトラージがきかない市場環境に陥り、在庫となっていたエギゾチック・デリバティブといった金融商品の損失が予想以上にふくらむことになった。本書の第5版に追加された「デリバティブにおける不幸な出来事と教訓」がまさに役立つ時代を迎えたわけである。

原書でもこうした流れを受け、サブプライム問題にも触れながらクレジット・デリバティブに関する章（第23章）が拡張されており、また従業員ストック・オプションに関する章（第14章）も新設されている。

リーマン・ショック以降、世界の金融市場は国債・社債・金利スワップといった、いわゆるプレーン・バニラと呼ばれる単純でかつ市場流動性の高い商品への回帰が顕著になり、その流れは現在まで継続している。では金融工

学を駆使した金融商品は今後どう発展していくのだろうか？　訳者はデリバティブ取引とは個々の顧客のさまざまなニーズに応えられるツールであり、それを可能にせしめるのが，“フィナンシャル・エンジニアリング”，すなわち金融工学に裏づけられた金融技術だと信じている。今回のグローバル金融危機から金融工学の限界も学んだものの、その限界を認識しながらさらに金融工学の知識を応用し、商品化していくことがきわめて重要であると考える。その観点からも、本書を通じて金融工学の基礎知識とさまざまな原資産への応用のプロセスを習得いただければと思う。

原書はカバー範囲が多岐にわたり、かつそれが体系立って説明されている良書であり、歴史的名著といえるものである。また、時代の変化の応じた改訂も行われており、幅広い層を対象にしえる、金融工学に関する素晴らしい教科書であると思える。その日本語訳である本書が、日本における多くの“デリバティブ関係者”の理論・技術の習得に有益となり、本邦におけるデリバティブ業務・市場の発展に少しでも寄与できることを願って翻訳を行った。ただし、訳者達の非才による誤訳や適切でない表現もあると思われ、それが原書のよさを減殺している点は何卒ご容赦くださるようお願い申し上げる。

なお、本書出版にあたっては、数多くの方のご協力をいただいた。特に、社団法人金融財政事情研究会・出版部の吉橋哲哉部長をはじめとする編集部の方々には、辛抱強くお付き合いいただき大変感謝している。この場をお借りしてお礼申し上げたい。

最後に、このようなすぐれた原書の翻訳の機会を得られたのは、当社においてデリバティブ業務に携わる幸運に恵まれたからにほかならない。当社が属する MUFG (三菱 UFJ グループ) は、1980年代から長きにわたってデリバティブ業務に注力してきた。本書の第1版から個々の訳者の顔ぶれは変われば、その底流に流れるデリバティブ業務やその市場の発展に寄与したいと

いう深い愛着は脈々と引き継がれていると信じている。このコミットメントを支援していただいたグループ各社と日々業務をともにしている当社の市場商品本部諸氏に心から感謝したい。

2009年8月

三菱UFJ証券常務取締役市場商品本部長

幡鎌俊行

## [訳者紹介]

### 監修

三菱 UFJ 証券株式会社 市場商品本部 本部長

### **幡鎌 俊行** (はたかま としゆき)

1978年 ㈱東京銀行（現、㈱三井東京 UFJ 銀行）入行

1998年 ㈱東京三井銀行（現、㈱三井東京 UFJ 銀行）商品開発部 トレーディング室長

2003年 三菱証券㈱（現、三菱 UFJ 証券㈱）執行役員 商品開発本部 トレーディング部長

2005年 三菱 UFJ 証券㈱ 執行役員 市場商品本部 金融市場グループ長

2009年 三菱 UFJ 証券㈱ 常務取締役 市場商品本部長（現在に至る）

早稲田大学政治経済学部経済学科卒

### 訳 (50音順)

### **桑原 善太** (くわばら よしひろ)

1988年 日興証券㈱入社

1998年 ㈱三和銀行（現、㈱三井東京 UFJ 銀行）入行

2002年 ㈱UFJ 銀行（現、㈱三井東京 UFJ 銀行）市場営業部 市場開発室 次長

2005年 三菱 UFJ 証券㈱ 研究開発部 研究開発課長

2007年 三菱 UFJ 証券㈱ 研究開発部 部長（現在に至る）

東京大学理学部物理学科卒

東京大学大学院 理学系研究科修士課程修了（相関理化学） 同博士課程中退

日本証券アナリスト協会検定会員

### **橋 博文** (たしばな ひろふみ)

1988年 ㈱三井銀行（現、㈱三井東京 UFJ 銀行）入行 國際資金為替部

1993年 同 ロンドン支店 調査役

1998年 カリフォルニア大学バークレー校 客員研究員

1999年 ㈱東京三井銀行 金融商品開発部 主任調査役

2002年 三菱証券㈱（現、三菱 UFJ 証券㈱） ニュープロダクト部 ニュープログラム開発課長

2004年 同 リスク管理部 市場リスク管理課長

2007年 三菱 UFJ 証券㈱ 研究開発部 副部長

2008年 三菱UFJ フィナンシャル・グループ CIB企画部アライアンス戦略室  
次長（現在に至る）

早稲田大学理工学部電子情報通信学科卒

早稲田大学大学院 理工学研究科修士課程修了（人口知能）

ロンドン大学大学院 修士課程修了（金融経営）

CFP、日本証券アナリスト協会検定会員

## 《目 次》

|             |              |
|-------------|--------------|
| はしがき .....  | John C. Hull |
| 訳者はしがき..... | 幡謙 俊行        |
| 訳者紹介        |              |

### 第1章 序 論 ..... 1

|                          |    |
|--------------------------|----|
| 1. 1 取引所市場 .....         | 2  |
| 1. 2 店頭市場 .....          | 3  |
| 1. 3 フォワード契約（先渡契約） ..... | 5  |
| 1. 4 先物契約 .....          | 8  |
| 1. 5 オプション .....         | 9  |
| 1. 6 トレーダーの種類 .....      | 13 |
| 1. 7 ヘッジャー .....         | 15 |
| 1. 8 スペキュレーター .....      | 17 |
| 1. 9 アービトラージャー .....     | 21 |
| 1.10 危険性 .....           | 23 |
| 要約 .....                 | 23 |
| 参考文献 .....               | 24 |
| 章末問題 .....               | 25 |
| 宿題 .....                 | 28 |

### 第2章 先物市場の仕組み ..... 31

|                 |    |
|-----------------|----|
| 2. 1 先物取引 ..... | 32 |
|-----------------|----|

|      |                   |    |
|------|-------------------|----|
| 2. 2 | 先物契約の詳細           | 35 |
| 2. 3 | 先物価格の現物価格への収束     | 38 |
| 2. 4 | 日次値洗いと証拠金         | 39 |
| 2. 5 | 新聞の市況欄            | 47 |
| 2. 6 | 受渡し               | 50 |
| 2. 7 | トレーダーのタイプおよび注文の種類 | 52 |
| 2. 8 | 取引の規制             | 54 |
| 2. 9 | 会計処理と税金           | 56 |
| 2.10 | フォワード契約と先物契約との違い  | 59 |
|      | 要約                | 61 |
|      | 参考文献              | 62 |
|      | 章末問題              | 62 |
|      | 宿題                | 65 |

|            |                    |     |
|------------|--------------------|-----|
| <b>第3章</b> | <b>先物を使ったヘッジ戦略</b> | 67  |
| 3. 1       | 基本原理               | 68  |
| 3. 2       | ヘッジに対する賛否両論        | 72  |
| 3. 3       | ベース・リスク            | 76  |
| 3. 4       | クロスヘッジ             | 81  |
| 3. 5       | 株価指数先物             | 87  |
| 3. 6       | ヘッジのロール            | 95  |
|            | 要約                 | 98  |
|            | 参考文献               | 99  |
|            | 章末問題               | 100 |
|            | 宿題                 | 103 |
|            | 付録：最小分散ヘッジ比率の公式の証明 | 105 |

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| <b>第4章 金 利 .....</b>             | 106 |
| 4. 1 金利の種類 .....                 | 107 |
| 4. 2 金利の計算 .....                 | 111 |
| 4. 3 ゼロ・レート .....                | 114 |
| 4. 4 債券の価格付け .....               | 114 |
| 4. 5 トレジャリー・ゼロ・レートの決定 .....      | 116 |
| 4. 6 フォワード・レート .....             | 120 |
| 4. 7 金利先渡契約 .....                | 124 |
| 4. 8 デュレーション .....               | 127 |
| 4. 9 コンベキシティ .....               | 132 |
| 4.10 金利期間構造の理論 .....             | 133 |
| 要約 .....                         | 137 |
| 参考文献 .....                       | 139 |
| 章末問題 .....                       | 139 |
| 宿題 .....                         | 143 |
| <b>第5章 フォワード価格と先物価格の決定 .....</b> | 145 |
| 5. 1 投資資産と消費資産 .....             | 145 |
| 5. 2 空売り .....                   | 146 |
| 5. 3 前提と記号 .....                 | 148 |
| 5. 4 投資資産に対するフォワード価格 .....       | 149 |
| 5. 5 既知の収入がある場合 .....            | 153 |
| 5. 6 利回りが既知の場合 .....             | 156 |
| 5. 7 フォワード契約の価値 .....            | 157 |
| 5. 8 フォワード価格と先物価格は同じか? .....     | 161 |
| 5. 9 株価指数の先物価格 .....             | 162 |
| 5.10 外国通貨のフォワード契約と先物契約 .....     | 165 |

|  |            |
|--|------------|
| 5.11 商品先物                              | 169        |
| 5.12 キャリー・コスト                          | 173        |
| 5.13 受渡しのオプション                         | 174        |
| 5.14 先物価格と将来の現物価格の期待値                  | 174        |
| 要約                                     | 178        |
| 参考文献                                   | 180        |
| 章末問題                                   | 180        |
| 宿題                                     | 184        |
| 付録：無リスク金利が定数のときフォワード価格と先物価格が等しくなることの証明 | 186        |
| <br>                                   |            |
| <b>第6章 金利先物</b>                        | <b>188</b> |
| 6.1 デイカウント・コンベンションと価格の表示方法             | 189        |
| 6.2 長期国債先物                             | 192        |
| 6.3 ユーロ・ドル金利先物                         | 199        |
| 6.4 デュレーションに基づくヘッジ戦略                   | 205        |
| 6.5 資産と負債のポートフォリオのヘッジ                  | 208        |
| 要約                                     | 209        |
| 参考文献                                   | 210        |
| 章末問題                                   | 211        |
| 宿題                                     | 214        |
| <br>                                   |            |
| <b>第7章 スワップ</b>                        | <b>216</b> |
| 7.1 金利スワップの仕組み                         | 217        |
| 7.2 デイカウント（日数計算）                       | 225        |
| 7.3 取引確認書（コンファームーション）                  | 226        |
| 7.4 比較優位論                              | 228        |

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 7. 5 スワップ・レートの性質 .....             | 232 |
| 7. 6 LIBOR とスワップによるゼロ・レートの決定 ..... | 233 |
| 7. 7 金利スワップの評価 .....               | 235 |
| 7. 8 通貨スワップ .....                  | 241 |
| 7. 9 通貨スワップの評価 .....               | 245 |
| 7.10 信用リスク .....                   | 249 |
| 7.11 その他のスワップ .....                | 252 |
| 要約 .....                           | 255 |
| 参考文献 .....                         | 256 |
| 章末問題 .....                         | 257 |
| 宿題 .....                           | 261 |

## 第8章 オプション市場の仕組み ..... 263

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 8. 1 オプションの種類 .....                   | 264 |
| 8. 2 オプションのポジション .....                | 267 |
| 8. 3 オプションの原資産 .....                  | 269 |
| 8. 4 株券オプションの仕組み .....                | 271 |
| 8. 5 トレーディング .....                    | 277 |
| 8. 6 委託手数料 (Commission) .....         | 278 |
| 8. 7 証拠金 (Margin) .....               | 280 |
| 8. 8 オプション清算機関 .....                  | 283 |
| 8. 9 規制 .....                         | 284 |
| 8.10 税金 .....                         | 284 |
| 8.11 ワラント, 従業員ストック・オプションおよび転換社債 ..... | 287 |
| 8.12 店頭オプション市場 .....                  | 288 |
| 要約 .....                              | 289 |
| 参考文献 .....                            | 290 |
| 章末問題 .....                            | 291 |

|                            |            |
|----------------------------|------------|
| 宿題                         | 294        |
| <b>第9章 株券オプションの特性</b>      | <b>296</b> |
| 9. 1 オプション価格に影響を与える要素      | 297        |
| 9. 2 假定および記号の定義            | 301        |
| 9. 3 オプション価格の上限と下限         | 302        |
| 9. 4 プット・コール・パリティ          | 307        |
| 9. 5 期限前行使：配当のない株式のコール     | 311        |
| 9. 6 期限前行使：配当のない株式のプット     | 313        |
| 9. 7 配当の影響                 | 316        |
| 要約                         | 317        |
| 参考文献                       | 318        |
| 章末問題                       | 319        |
| 宿題                         | 322        |
| <b>第10章 オプションを用いた取引戦略</b>  | <b>324</b> |
| 10. 1 オプションと現物株を1単位ずつ用いた戦略 | 325        |
| 10. 2 スプレッド取引              | 327        |
| 10. 3 コンビネーション             | 339        |
| 10. 4 その他のペイオフ             | 343        |
| 要約                         | 344        |
| 参考文献                       | 345        |
| 章末問題                       | 345        |
| 宿題                         | 347        |

|             |                             |       |     |
|-------------|-----------------------------|-------|-----|
| <b>第11章</b> | <b>二項ツリー</b>                | ..... | 350 |
| 11. 1       | 1期間二項モデルと無裁定の議論             | ..... | 351 |
| 11. 2       | リスク中立化法                     | ..... | 355 |
| 11. 3       | 2期間二項ツリー                    | ..... | 358 |
| 11. 4       | ブット・オプションの例                 | ..... | 361 |
| 11. 5       | アメリカン・オプション                 | ..... | 362 |
| 11. 6       | デルタ                         | ..... | 363 |
| 11. 7       | ボラティリティとパラメータ $u$ と $d$ の関係 | ..... | 365 |
| 11. 8       | 多期間の場合                      | ..... | 368 |
| 11. 9       | その他の資産に対するオプション             | ..... | 370 |
| 要約          |                             | ..... | 375 |
| 参考文献        |                             | ..... | 376 |
| 章末問題        |                             | ..... | 377 |
| 宿題          |                             | ..... | 379 |
| <b>第12章</b> | <b>ウィナー過程と伊藤の補題</b>         | ..... | 381 |
| 12. 1       | マルコフ性                       | ..... | 382 |
| 12. 2       | 連続時間の確率過程                   | ..... | 383 |
| 12. 3       | 株価過程                        | ..... | 389 |
| 12. 4       | パラメータについて                   | ..... | 394 |
| 12. 5       | 伊藤の補題                       | ..... | 395 |
| 12. 6       | 対数正規性                       | ..... | 397 |
| 要約          |                             | ..... | 398 |
| 参考文献        |                             | ..... | 399 |
| 章末問題        |                             | ..... | 400 |
| 宿題          |                             | ..... | 402 |
| 付録：伊藤の補題の導出 |                             | ..... | 404 |

## 第13章 Black-Scholes-Merton モデル ..... 407

|  |     |
|--|-----|
| 13. 1 株価の対数正規性                           | 408 |
| 13. 2 収益率の分布                             | 410 |
| 13. 3 期待収益率                              | 412 |
| 13. 4 ボラティリティ                            | 414 |
| 13. 5 Black-Scholes-Merton 微分方程式の基礎となる概念 | 419 |
| 13. 6 Black-Scholes-Merton 微分方程式の導出      | 422 |
| 13. 7 リスク中立化法                            | 425 |
| 13. 8 Black-Scholes 價格式                  | 427 |
| 13. 9 正規分布の累積分布関数                        | 431 |
| 13.10 ワラントと従業員ストック・オプション                 | 432 |
| 13.11 インプライド・ボラティリティ                     | 435 |
| 13.12 配当                                 | 438 |
| 要約                                       | 443 |
| 参考文献                                     | 445 |
| 章末問題                                     | 446 |
| 宿題                                       | 451 |
| 付録：Black-Scholes-Merton の公式の証明           | 453 |

## 第14章 従業員ストック・オプション ..... 457

|                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| 14. 1 契約上の決め                       | 458 |
| 14. 2 ストック・オプションは株主と経営者の利益を一致させるか？ | 460 |
| 14. 3 会計処理について                     | 463 |
| 14. 4 評価                           | 466 |
| 14. 5 バックデーターティング・スキャンダル           | 472 |
| 要約                                 | 475 |

|  |            |
|--|------------|
| 参考文献 .....                                   | 476        |
| 章末問題 .....                                   | 477        |
| 宿題 .....                                     | 479        |
| <br>   |            |
| <b>第15章 株価指数オプションと通貨オプション .....</b>          | <b>480</b> |
| 15. 1 株価指数オプション .....                        | 480        |
| 15. 2 通貨オプション .....                          | 484        |
| 15. 3 配当利回りが既知の株式に対するオプション .....             | 487        |
| 15. 4 ヨーロピアン株価指数オプションの評価 .....               | 491        |
| 15. 5 ヨーロピアン通貨オプションの評価 .....                 | 495        |
| 15. 6 アメリカン・オプション .....                      | 497        |
| 要約 .....                                     | 498        |
| 参考文献 .....                                   | 499        |
| 章末問題 .....                                   | 500        |
| 宿題 .....                                     | 503        |
| <br>   |            |
| <b>第16章 先物オプション .....</b>                    | <b>505</b> |
| 16. 1 先物オプションの性質 .....                       | 506        |
| 16. 2 先物オプションが好まれる理由 .....                   | 510        |
| 16. 3 ヨーロピアンの現物オプションと先物オプション .....           | 511        |
| 16. 4 プット・コール・パリティ .....                     | 512        |
| 16. 5 先物オプション価格の下限 .....                     | 514        |
| 16. 6 二項ツリーを用いた先物オプションの評価 .....              | 515        |
| 16. 7 リスク中立世界における先物価格のドリフト .....             | 518        |
| 16. 8 先物オプションに対する Black モデル .....            | 520        |
| 16. 9 アメリカン先物オプションとアメリカン現物オプション<br>の比較 ..... | 522        |

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| 16.10 先物スタイルのオプション           | 523        |
| 要約                           | 525        |
| 参考文献                         | 526        |
| 章末問題                         | 526        |
| 宿題                           | 529        |
| <br>                         |            |
| <b>第17章 グリークス</b>            | <b>531</b> |
| 17. 1 例示                     | 532        |
| 17. 2 ネイキッド・ポジションとカバード・ポジション | 533        |
| 17. 3 ストップ・ロス戦略              | 534        |
| 17. 4 デルタ・ヘッジ                | 537        |
| 17. 5 セータ                    | 546        |
| 17. 6 ガンマ                    | 549        |
| 17. 7 デルタ, セータ, ガンマの間の関係     | 554        |
| 17. 8 ベガ                     | 554        |
| 17. 9 ロー                     | 558        |
| 17.10 現実のヘッジ                 | 559        |
| 17.11 シナリオ分析                 | 561        |
| 17.12 他のヨーロピアン・オプションのグリークス   | 562        |
| 17.13 ポートフォリオ・インシュアランス       | 565        |
| 17.14 株式市場のボラティリティ           | 568        |
| 要約                           | 570        |
| 参考文献                         | 573        |
| 章末問題                         | 573        |
| 宿題                           | 577        |
| 付録：テイラー展開とヘッジ・パラメータ          | 580        |

|  |     |
|--|-----|
| <b>第18章 ボラティリティ・スマイル</b>                     | 582 |
| 18. 1 ボラティリティ・スマイルがコールとプットで同じ理由              | 583 |
| 18. 2 外国通貨オプション                              | 585 |
| 18. 3 株式オプション                                | 590 |
| 18. 4 ボラティリティ・スマイルの別の特徴付け                    | 593 |
| 18. 5 ボラティリティの期間構造とボラティリティ曲面                 | 594 |
| 18. 6 グリークス                                  | 596 |
| 18. 7 1回の大きなジャンプが想定される場合                     | 597 |
| 要約   | 600 |
| 参考文献   | 601 |
| 章末問題   | 601 |
| 宿題   | 604 |
| 付録：ボラティリティ・スマイルからのインプライドされたり<br>スク中立確率分布の求め方 | 607 |
| <b>第19章 基本的な数値計算法</b>                        | 611 |
| 19. 1 二項ツリー                                  | 612 |
| 19. 2 二項ツリーを用いた指標、通貨、先物契約に対するオプションの評価        | 622 |
| 19. 3 配当のある株式に対する二項モデル                       | 625 |
| 19. 4 その他のツリー作成法                             | 632 |
| 19. 5 パラメータが時間に依存する場合                        | 635 |
| 19. 6 モンテカルロ・シミュレーション                        | 636 |
| 19. 7 分散減少法                                  | 646 |
| 19. 8 有限差分法                                  | 651 |
| 要約   | 664 |
| 参考文献   | 665 |

|  |            |
|--|------------|
| 章末問題 .....                                       | 666        |
| 宿題 .....   | 670        |
| <br>   |            |
| <b>第20章 バリュー・アット・リスク .....</b>                   | <b>673</b> |
| 20. 1 VaR 指標 .....                               | 674        |
| 20. 2 ヒストリカル・シミュレーション法 .....                     | 677        |
| 20. 3 モデル・ビルディング法 .....                          | 680        |
| 20. 4 線形モデル .....                                | 684        |
| 20. 5 2次のモデル .....                               | 690        |
| 20. 6 モンテカルロ・シミュレーション .....                      | 693        |
| 20. 7 それぞれの手法の比較 .....                           | 694        |
| 20. 8 ストレス・テストとパック・テスト .....                     | 695        |
| 20. 9 主成分分析 .....                                | 696        |
| 要約 .....   | 701        |
| 参考文献 .....                                       | 702        |
| 章末問題 .....                                       | 704        |
| 宿題 .....   | 706        |
| 付録：キャッシュフロー・マッピング .....                          | 709        |
| <br>   |            |
| <b>第21章 ボラティリティと相関係数の推定 .....</b>                | <b>712</b> |
| 21. 1 ボラティリティの推定 .....                           | 713        |
| 21. 2 指数加重移動平均モデル .....                          | 715        |
| 21. 3 GARCH (1,1) モデル .....                      | 718        |
| 21. 4 モデルの選択 .....                               | 720        |
| 21. 5 最尤法 .....                                  | 721        |
| 21. 6 GARCH (1,1) モデルを用いた将来のボラティリティの<br>予測 ..... | 728        |

|                  |     |
|------------------|-----|
| 21. 7 相関係数 ..... | 732 |
| 要約 .....         | 736 |
| 参考文献 .....       | 737 |
| 章末問題 .....       | 737 |
| 宿題 .....         | 740 |

## **第22章 信用リスク .....**742

|                                |     |
|--------------------------------|-----|
| 22. 1 信用格付 .....               | 743 |
| 22. 2 ヒストリカルなデフォルト確率 .....     | 743 |
| 22. 3 回収率 .....                | 746 |
| 22. 4 債券価格からのデフォルト確率の推定 .....  | 747 |
| 22. 5 デフォルト確率の推定結果に関する比較 ..... | 751 |
| 22. 6 株価を用いたデフォルト確率の推定 .....   | 757 |
| 22. 7 デリバティブ取引における信用リスク .....  | 759 |
| 22. 8 信用リスクの軽減 .....           | 764 |
| 22. 9 デフォルト相関 .....            | 769 |
| 22.10 信用 VaR .....             | 775 |
| 要約 .....                       | 779 |
| 参考文献 .....                     | 780 |
| 章末問題 .....                     | 781 |
| 宿題 .....                       | 785 |

## **第23章 クレジット・デリバティブ .....**787

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| 23. 1 クレジット・デフォルト・スワップ .....    | 790 |
| 23. 2 クレジット・デフォルト・スワップの評価 ..... | 793 |
| 23. 3 クレジット指数 .....             | 800 |
| 23. 4 CDS のフォワードとオプション .....    | 802 |

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 23. 5 バスケット型クレジット・デフォルト・スワップ     | 803 |
| 23. 6 トータル・リターン・スワップ             | 804 |
| 23. 7 資産担保証券                     | 806 |
| 23. 8 CDO                        | 811 |
| 23. 9 バスケット型 CDS と CDO における相関の役割 | 815 |
| 23.10 シンセティック CDO の評価            | 816 |
| 23.11 標準的なマーケット・モデル以外のモデル        | 826 |
| 要約                               | 830 |
| 参考文献                             | 831 |
| 章末問題                             | 832 |
| 宿題                               | 835 |

## 第24章 エキゾチック・オプション 837

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 24. 1 パッケージ                   | 838 |
| 24. 2 標準的でないアメリカン・オプション       | 839 |
| 24. 3 先スタート・オプション             | 840 |
| 24. 4 コンパウンド・オプション            | 841 |
| 24. 5 チューザー・オプション             | 842 |
| 24. 6 バリア・オプション               | 843 |
| 24. 7 バイナリー・オプション             | 847 |
| 24. 8 ルックバック・オプション            | 848 |
| 24. 9 シャウト・オプション              | 851 |
| 24.10 アジアン・オプション              | 852 |
| 24.11 エクスチェンジ・オプション           | 856 |
| 24.12 複数資産に関するオプション           | 857 |
| 24.13 ボラティリティ・スワップとバリアンス・スワップ | 858 |
| 24.14 オプションの静的な複製             | 862 |
| 要約                            | 867 |

|   |            |
|---|------------|
| 参考文献 .....  | 868        |
| 章末問題 .....  | 869        |
| 宿題 .....  | 873        |
| 付録：バスケット・オプションとアジアン・オプションの評価<br>のためのモーメント計算 ..... | 877        |
| <br>  |            |
| <b>第25章 天候, エネルギー, 保険デリバティブ .....</b>             | <b>880</b> |
| 25. 1 價格付け問題についての再検討 .....                        | 881        |
| 25. 2 天候デリバティブ .....                              | 882        |
| 25. 3 エネルギー・デリバティブ .....                          | 884        |
| 25. 4 保険デリバティブ .....                              | 888        |
| 要約 .....  | 890        |
| 参考文献 .....  | 891        |
| 章末問題 .....  | 892        |
| 宿題 .....  | 894        |
| <br>  |            |
| <b>第26章 より進んだモデルと数値計算法 .....</b>                  | <b>895</b> |
| 26. 1 Black-Scholes にかわるモデル .....                 | 896        |
| 26. 2 確率ボラティリティモデル .....                          | 903        |
| 26. 3 IVF モデル .....                               | 906        |
| 26. 4 転換社債 .....                                  | 908        |
| 26. 5 経路依存型デリバティブ .....                           | 912        |
| 26. 6 バリア・オプション .....                             | 918        |
| 26. 7 相関のある二つの資産に対するオプション .....                   | 923        |
| 26. 8 モンテカルロ・シミュレーションとアメリカン・オプ<br>ション .....       | 926        |
| 要約 .....  | 932        |

|                                    |            |
|------------------------------------|------------|
| 参考文献                               | 934        |
| 章末問題                               | 936        |
| 宿題                                 | 939        |
| <br>                               |            |
| <b>第27章 マルチングールと測度</b>             | <b>941</b> |
| 27. 1 リスクの市場価格                     | 942        |
| 27. 2 複数の状態変数                      | 947        |
| 27. 3 マルチングール                      | 949        |
| 27. 4 ニューメレールに関するいくつかの選択肢          | 951        |
| 27. 5 複数ファクターへの拡張                  | 956        |
| 27. 6 Black モデル再訪                  | 957        |
| 27. 7 エクスチェンジ・オプション                | 958        |
| 27. 8 ニューメレール変換                    | 960        |
| 27. 9 従来の評価方法の一般化                  | 962        |
| 要約                                 | 963        |
| 参考文献                               | 964        |
| 章末問題                               | 964        |
| 宿題                                 | 967        |
| 付録：不確実性の要因が複数ある場合の扱い               | 969        |
| <br>                               |            |
| <b>第28章 金利デリバティブ：標準的なマーケット・モデル</b> | <b>973</b> |
| 28. 1 債券オプション                      | 974        |
| 28. 2 金利キャップとフロア                   | 980        |
| 28. 3 ヨーロピアン・スワップション               | 990        |
| 28. 4 一般化                          | 997        |
| 28. 5 金利デリバティブのヘッジ                 | 998        |

|  |       |      |
|--|-------|------|
| 要約                                     | ..... | 1000 |
| 参考文献                                   | ..... | 1000 |
| 章末問題                                   | ..... | 1001 |
| 宿題                                     | ..... | 1004 |
| <br>                                   |       |      |
| <b>第29章 コンベキシティ調整, タイミング調整, クオント調整</b> | ..... | 1006 |
| 29. 1 コンベキシティ調整                        | ..... | 1007 |
| 29. 2 タイミング調整                          | ..... | 1012 |
| 29. 3 クオント                             | ..... | 1015 |
| 要約                                     | ..... | 1020 |
| 参考文献                                   | ..... | 1021 |
| 章末問題                                   | ..... | 1021 |
| 宿題                                     | ..... | 1023 |
| 付録：コンベキシティ調整式の証明                       | ..... | 1026 |
| <br>                                   |       |      |
| <b>第30章 金利デリバティブ：短期金利モデル</b>           | ..... | 1028 |
| 30. 1 背景                               | ..... | 1029 |
| 30. 2 均衡モデル                            | ..... | 1030 |
| 30. 3 無裁定モデル                           | ..... | 1035 |
| 30. 4 債券オプション                          | ..... | 1041 |
| 30. 5 ボラティリティの期間構造                     | ..... | 1042 |
| 30. 6 金利ツリー                            | ..... | 1043 |
| 30. 7 一般的なツリー構築手順                      | ..... | 1046 |
| 30. 8 キャリブレーション                        | ..... | 1060 |
| 30. 9 1ファクター・モデルを用いたヘッジ                | ..... | 1062 |
| 要約                                     | ..... | 1063 |

|                                  |       |       |
|----------------------------------|-------|-------|
| 参考文献                             | ..... | 1064  |
| 章末問題                             | ..... | 1065  |
| 宿題                               | ..... | 1068  |
| <br><b>第31章 金利デリバティブ：HJMとLMM</b> |       | ..... |
| 31. 1 Heath-Jarrow-Morton モデル    | ..... | 1072  |
| 31. 2 LIBOR マーケット・モデル            | ..... | 1076  |
| 31. 3 政府系機関モーゲージ証券               | ..... | 1090  |
| 要約                               | ..... | 1094  |
| 参考文献                             | ..... | 1095  |
| 章末問題                             | ..... | 1097  |
| 宿題                               | ..... | 1098  |
| <br><b>第32章 スワップ再訪</b>           |       | ..... |
| 32. 1 バニラ取引の変形                   | ..... | 1100  |
| 32. 2 コンパウンド・スワップ                | ..... | 1102  |
| 32. 3 通貨スワップ                     | ..... | 1105  |
| 32. 4 より複雑なスワップ                  | ..... | 1106  |
| 32. 5 エクイティ・スワップ                 | ..... | 1112  |
| 32. 6 オプションを内包したスワップ             | ..... | 1114  |
| 32. 7 その他のスワップ                   | ..... | 1118  |
| 要約                               | ..... | 1120  |
| 参考文献                             | ..... | 1121  |
| 章末問題                             | ..... | 1121  |
| 宿題                               | ..... | 1122  |

|   |      |
|---|------|
| <b>第33章 リアル・オプション</b>                                 | 1124 |
| 33. 1 資本投資の評価   | 1125 |
| 33. 2 リスク中立化法の拡張                                      | 1127 |
| 33. 3 リスクの市場価格の推定                                     | 1129 |
| 33. 4 事業評価への応用  | 1131 |
| 33. 5 商品価格  | 1133 |
| 33. 6 投資機会のオプションの評価                                   | 1137 |
| 要約  | 1144 |
| 参考文献  | 1145 |
| 章末問題  | 1145 |
| 宿題  | 1147 |
| <b>第34章 デリバティブにおける不幸な出来事と教訓</b>                       | 1148 |
| 34.1 すべてのデリバティブ利用者に対する教訓                              | 1152 |
| 34.2 金融機関に対する教訓                                       | 1156 |
| 34.3 金融機関以外の企業に対する教訓                                  | 1163 |
| 要約  | 1166 |
| 参考文献  | 1167 |
| <b>■用語集</b>   | 1169 |
| <b>■DerivaGem ソフトウェア</b>                              | 1192 |
| <b>■先物とオプションを取り扱っている主要な取引所</b>                        | 1201 |
| <b>■<math>N(x)</math>の数表 <math>x \leq 0</math>の場合</b> | 1203 |
| <b>■<math>N(x)</math>の数表 <math>x \geq 0</math>の場合</b> | 1204 |
| <b>人名索引</b>   | 1205 |
| <b>事項索引</b>   | 1211 |

# 《ビジネス寸見》

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| 1. 1 ヘッジファンド                          | 13  |
| 1. 2 ベアリング銀行の大失敗                      | 22  |
| 2. 1 先物契約の予期せぬ現渡し                     | 34  |
| 2. 2 ロングターム・キャピタル・マネジメント (LTCM) の巨額損失 | 46  |
| 3. 1 金採掘企業によるヘッジ                      | 75  |
| 3. 2 メタルゲゼルシャフト：ヘッジの失敗                | 97  |
| 4. 1 無リスク金利とは何か？                      | 109 |
| 4. 2 オレンジ郡のイールドカーブ・プレー                | 122 |
| 4. 3 米国金融機関の高くついた失敗                   | 137 |
| 5. 1 キダー・ピーボディの恥ずかしい過ち                | 151 |
| 5. 2 システムエラー？                         | 160 |
| 5. 3 CME の日経225先物                     | 162 |
| 5. 4 1987年10月の指標裁定取引                  | 164 |
| 6. 1 デイカウントは紛らわしい                     | 190 |
| 6. 2 ワイルド・カード・プレイ (Wild Card Play)    | 196 |
| 6. 3 銀行での資産と負債の管理 (ALM)               | 208 |
| 7. 1 仮想的なスワップ取引確認書からの抜粋               | 227 |
| 7. 2 ハマースミス区とフラム区の話                   | 251 |
| 8. 1 グッチ・グループの大口配当                    | 275 |
| 8. 2 オプションを利用した税務対策                   | 286 |
| 9. 1 プット・コール・パリティと資本構造                | 309 |
| 10. 1 ボックス・スプレッドでの損失                  | 333 |
| 10. 2 ストラドルで儲ける方法                     | 341 |
| 13. 1 ミューチュアルファンドの収益率は誤解を招く           | 413 |
| 13. 2 ポラティリティの原因は何か？                  | 418 |

|   |      |
|---|------|
| 13.3 フラント、従業員ストック・オプションと希薄化                     | 434  |
| 15.1 「長期的には株式は債券をリターンで上回る」。これを裏付け<br>ることができるか？  | 493  |
| 17.1 ダイナミック・ヘッジの実際                              | 560  |
| 17.2 1987年の株価大暴落でポートフォリオ・インシュアランスは非<br>難されるべきか？ | 569  |
| 18.1 外国通貨オプションからの収益                             | 588  |
| 18.2 大暴落恐怖症                                     | 592  |
| 19.1 モンテカルロ・シミュレーションによる円周率の計算                   | 636  |
| 19.2 Black-Scholes の公式の検証                       | 639  |
| 20.1 銀行規制当局はいかに VaR を利用するのか                     | 676  |
| 22.1 ダウングレード・トリガーとエンロンの破綻                       | 767  |
| 22.2 バーゼルII                                     | 776  |
| 23.1 だれが信用リスクをもつか？                              | 789  |
| 23.2 CDS 市場は公平なゲームか？                            | 799  |
| 23.3 2007年の信用収縮                                 | 809  |
| 24.1 エキゾチック・オプションのデルタ・ヘッジは容易か、困難<br>か？          | 863  |
| 28.1 キャップとフロアに対するプット・コール・パリティ                   | 984  |
| 28.2 スワップションと債券オプション                            | 991  |
| 29.1 Siegel のパラドックス                             | 1019 |
| 31.1 IO と PO                                    | 1092 |
| 32.1 非標準的なスワップの仮想的な取引確認書                        | 1101 |
| 32.2 コンパウンド・スワップの仮想的な取引確認書                      | 1103 |
| 32.3 エクイティ・スワップの仮想的な取引確認書                       | 1113 |
| 32.4 プロクター・アンド・ギャンブルの風変わりな取引                    | 1119 |
| 33.1 Amazon.com の評価                             | 1131 |
| 34.1 金融機関による巨額損失                                | 1149 |
| 34.2 金融機関以外の組織による巨額損失                           | 1151 |

# 《TECHNICAL NOTES》

Available on the Author's Website

[www.rotman.utoronto.ca/~hull](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull)

1. Convexity Adjustments to Eurodollar Futures
2. Properties of the Lognormal Distribution
3. Warrant Valuation When Value of Equity plus Warrants Is Lognormal
4. Exact Procedure for Valuing American Calls on Stocks Paying a Single Dividend
5. Calculation of the Cumulative Probability in a Bivariate Normal Distribution
6. Differential Equation for Price of a Derivative on a Stock Paying a Known Dividend Yield
7. Differential Equation for Price of a Derivative on a Futures Price
8. Analytic Approximation for Valuing American Options
9. Generalized Tree-Building Procedure
10. The Cornish-Fisher Expansion to Estimate VaR
11. Manipulation of Credit Transition Matrices
12. Calculation of Cumulative Noncentral Chi-Square Distribution
13. Efficient Procedure for Valuing American-Style Lookback Options
14. The Hull-White Two-Factor Model
15. Valuing Options on Coupon-Bearing Bonds in a One-Factor Interest Rate Model
16. Construction of an Interest Rate Tree with Nonconstant Time Steps and Non-constant Parameters
17. The Process for the Short Rate in an HJM Term Structure Model
18. Valuation of a Compounding Swap

19. Valuation of an Equity Swap
20. A Generalization of the Risk-Neutral Valuation Result
21. Hermite Polynomials and Their Use for Integration
22. Valuation of a Variance Swap

# 第1章

## 序論

過去30年間、金融の世界において派生商品（デリバティブ）の重要性はますます増大している。いまでは世界中の取引所で先物やオプションが活発に取引されているほか、さまざまなタイプのフォワード契約やスワップ、オプション、その他のデリバティブが店頭市場（over-the-counter market）を通じて、金融機関、ファンドマネジャー、および事業会社の財務担当者との間で取引されている。デリバティブは債券に組み入れられたり、役員報酬制度で利用されたり、資本投資のなかに組み込まれたりする。いまでは金融の世界で働く人々はだれでも、デリバティブの役割や利用方法、その価格付けについて理解しなければならない段階まできている。

デリバティブは、他のなんらかの基本的な変数に基づいて（または派生して）価格が決まる金融商品として定義される。この基準となる変数は多くの場合、取引資産の価格であり、たとえば株券オプションは、株価に依存して

価値が決まるデリバティブである。しかし、デリバティブの基準となる変数は、豚の価格から特定のスキー場の降雪量に至るまで、ほとんどどんなものでもかまわない。

1988年の第1版発刊以来、デリバティブ市場は大きく発展した。現在ではクレジット・デリバティブや電力デリバティブ、天候デリバティブ、保険デリバティブなども活発に取引されている。また、新しいタイプの金利、為替、株式デリバティブ商品も開発され、それに合わせてリスク管理やリスク計測手法についての新しいアイデアが考案されている。最近では、リアル・オプション (real option) として知られるデリバティブを分析する手法についてもアナリストたちが注目している。本版ではこれら新しい技術についても紹介する。

序章として、まずフォワード、先物、そしてオプション市場に触れ、そうした取引がヘッジャーやスペキュレーター、アービトラージャーにどのように利用されるのかを概観する。続く章では、その詳細とポイントを検討していく。

## 1.1 取引所市場

デリバティブの取引所は、取引所が定めた標準的な契約を個々の市場参加者が取引する市場で、取引所自体の歴史は古い。シカゴ商品取引所 (CBOT : [www.cbot.com](http://www.cbot.com)) は農業、商業従事者を一堂に集め1848年に設立された。当初の取引所の主な業務は取引される穀物の取引量とグレードの標準化であったが、その数年後には先物形式の取引が開発され、着地取引 (to-arrive contract) として知られていた。その後すぐに、スペキュレーターが穀物の現物取引にかわるものとして、着地取引に興味を示し始めた。さらに、ライバルの先物取引所であるシカゴ・マーカンタイル取引所 (CME : [www.cme.com](http://www.cme.com)) が1919年に設立され、今日では先物取引所は世界中に存在するに至っている。

シカゴ・オプション取引所 (CBOE : [www.cboe.com](http://www.cboe.com)) は、1973年に16銘柄

の株式に対するコール・オプション取引をスタートした。オプション自体は1973年以前にも取引が行われていたが、CBOEは取引を定型化し、オーダー伝達型の市場創設に成功した。1977年にはプット・オプションも同取引所で開始され、現在では1,000以上の株式や多くの株価指数に対するオプションが取引されている。先物と同様に、オプションも活発に取引が行われており、現在では世界中の取引所で株式や株価指数に加え、外国通貨や先物契約のオプションも取引されている（巻末の表を参照）。

## 電子市場

伝統的にデリバティブの取引所は立会いシステム（open outcry system）と呼ばれる方式を利用してきた。立会いシステムとは、取引所のフロアにトレーダーが物理的に集まり、取引内容を叫んだり、手による複雑なサインを使って取引に参加するものである。多くの取引所は、この立会いシステムから電子取引（electronic trading）に移行している。電子取引では、トレーダーが希望する取引を端末から入力し、コンピュータが買手と売手をマッチさせる。立会いシステムはいまだに支持されてはいるが、時とともに電子取引に移行する取引所が増えている。

## 1.2 店頭市場

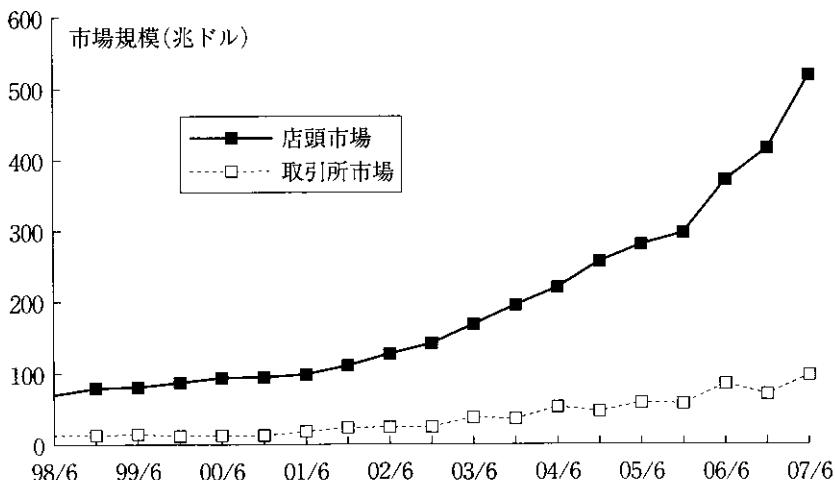
すべての取引が取引所で行われているわけではない。店頭市場（over-the-counter market）は取引所にかわる重要な市場であり、取引高においては取引所市場よりも大きくなっている。店頭市場はディーラーによる電話やコンピュータのネットワークで形成される市場である。取引は一般に電話を通じて金融機関同士または金融機関とその顧客企業1社（主として財務担当者またはファンドマネジャー）との間で行われ、よく取引されている商品については金融機関がマーケット・メーカーとして機能する。マーケット・メーカーとは、常にビッド価格（買うことのできる価格）とオファー価格（売るこことのできる価格）の両方を呈示する市場参加者である。

店頭市場における電話の通話内容は通常録音されており、契約内容に争議が発生した場合には、録音テープの内容が確認されることになる。店頭市場での取引量は取引所市場の取引量と比較して非常に大きい。店頭市場の長所は、契約の条項が取引所の指定するものに制限されず、市場参加者は相対で自由に契約内容を交渉できることである。逆に店頭市場の短所は、取引相手に対する信用リスク（すなわち、契約が不履行となるリスク）が通常発生することである。次章で述べるが、取引所取引では、すべての信用リスクが事実上除去されるような仕組みがつくられている。

### 市場規模

デリバティブの店頭市場と取引所市場はともに巨大である。二つの市場に対して集められた統計値は完全に比較できるものではないが、店頭市場は取引所市場に比べて相当大きいことは明らかである。国際決済銀行（BIS: [www.bis.org](http://www.bis.org)）は1998年より統計を取り始めている。図1.1は(a)1998年6月から2007年6月における店頭デリバティブ取引残高の想定元本ベースでの推計値、(b)同期間における上場デリバティブ取引残高の原資産価値ベースでの推計値、を比較したものである。この尺度を用いると、2007年6月には店頭市

図1.1 店頭市場と取引所市場におけるデリバティブ取引残高



場は516.4兆ドル、取引所市場は96.7兆ドルにまで成長していることがわかる。

これらの数字を解釈する際には、店頭市場での想定元本は取引の価値に等しくないことに留意しなければならない。店頭市場での取引例として、あらかじめ決められた為替レートで1年後に英ポンドで1億ドルを購入する契約を考える。この取引の想定元本は1億ドルであるが、契約の価値はわずか100万ドルであるかもしれない。BISは店頭デリバティブ取引の2007年6月時点における総市場価値残を約11.1兆ドルであると推定している(注1)。

### 1.3 フォワード契約（先渡契約）

フォワード契約または先渡取引 (forward contract) は比較的単純なデリバティブで、将来のある時点にあらかじめ定められた価格で原資産を購入、もしくは売却する契約である。それは、現時点において原資産を売買する契約であるスポット契約 (spot contract) と対比される取引である。フォワード契約は通常、金融機関同士、あるいは金融機関と顧客との間で店頭市場で取引される。

フォワード契約の一方の当事者は、相手方と合意した将来のある時点に、あらかじめ定めた価格で原資産を買い取るという買いポジション (long position) をとり、もう一方の当事者は、同じ条件で逆に原資産を売り渡すという売りポジション (short position) をとることになる。

外国為替のフォワード契約はきわめて活発に取引されている。ほとんどの大手銀行はスポットトレーダーとフォワードトレーダーを雇い入れている。スポットトレーダーは、ほぼ即日の受渡しを目的とした外国為替の取引を行う。一方、フォワードトレーダーは、将来のある時点での受渡しを目的とした取引を行う。表1.1は2007年7月20日に大手銀行によって呈示された英ポンドと米ドルの為替レートである。呈示価格は1英ポンド当りの米ドル価格

---

(注1) 片側で100万ドルの価値をもつ契約は、反対側ではマイナス100万ドルの価値をもつが、ここでの総市場価値は100万ドルとして計算されている。

表1.1 米ドル／英ポンド為替レートのスポットと  
フォワード（2007年7月20日、1英ポンド  
当たりの米ドル額）

|           | ビッド    | オファー   |
|-----------|--------|--------|
| スポット      | 2.0558 | 2.0562 |
| 1カ月物フォワード | 2.0547 | 2.0552 |
| 3カ月物フォワード | 2.0526 | 2.0531 |
| 6カ月物フォワード | 2.0483 | 2.0489 |

で示されている。表の1行目には、スポット市場（実質的な即時受渡し）で1英ポンド（スターリングとしても知られる）を買う価格2.0558ドルと売る価格2.0562ドルが示されている。2行目、3行目、4行目には、それぞれ1カ月後、3カ月後、6カ月後に1英ポンドを買う価格2.0547ドル、2.0526ドル、2.0483ドル、および売る価格2.0552ドル、2.0531ドル、2.0489ドルが示されている。

フォワード契約は、外国通貨リスクをヘッジするために利用される。2007年7月20日に、ある米国企業の財務担当者が6カ月後（2008年1月20日）に100万英ポンドを支払うことを知っており、その為替変動リスクをヘッジしたいと考えている。表1.1の表示価格に基づき、財務担当者はレート2.0489で100万英ポンドを購入する6カ月物フォワード契約を結ぶことができる。そこで、この企業は英ポンドを購入するフォワード契約を結び、2008年1月20日に204.89万ドルを支払って、銀行から100万英ポンドを買うことに合意する。逆に銀行は英ポンドを売却するフォワード契約を保有し、2008年1月20日に204.89万ドルで100万英ポンドを売却することに合意する。このように、フォワード契約によってお互いに拘束力のある義務を負うことになる。

### フォワード契約のペイオフ

先ほどの企業が保有するポジションについて考察しよう。結果はどのようになるであろうか。フォワード契約によって、この企業は2,048,900ドルで100万英ポンドを購入する義務を負う。スポット・レートが6カ月後に

2.1000まで上昇すれば、フォワード契約は51,100ドル (=2,100,000ドル - 2,048,900ドル) の価値をもつ。すなわち、レート2.1000ではなく、レート2.0489で100万英ポンドを購入することが可能である。同様にスポット・レートが6カ月後に1.9000まで下落すれば、企業は英ポンドの購入に市場実勢よりも148,900ドル余計に支払わなければならないので、フォワード契約は148,900ドルの負の価値をもつ。

一般に、原資産1単位に対するフォワード契約の買いポジションのペイオフは、

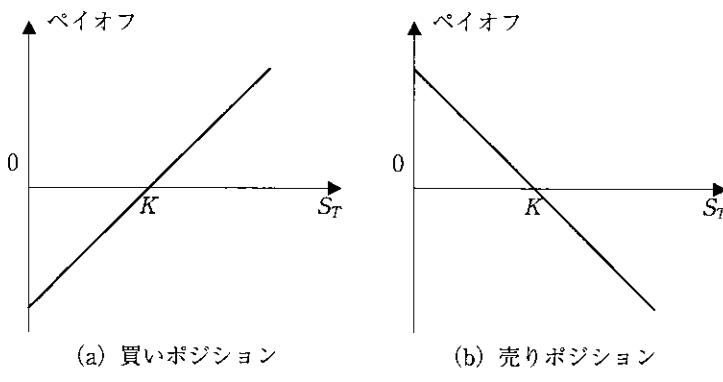
$$S_T - K$$

となる。ここで  $K$  は受渡価格、 $S_T$  は契約満期時における原資産のスポット価格である。これは、価値  $S_T$  の資産を  $K$  で購入しなければならないからである。同様に、原資産1単位に対するフォワード契約の売りポジションのペイオフは、

$$K - S_T$$

となる。これらのペイオフは正にも負にもなりうる。その様子は図1.2のようになる。フォワード契約の開始時点には現金の受払いは発生しないので、契約のペイオフがそのままトレーダーの総損益になる。

図1.2 フォワード契約のペイオフ



$K$ =受渡価格

$S_T$ =満期時における原資産価格

先ほどの例では、 $K = 2.0489$ で企業は買いポジションを保有している。 $S_T = 2.1000$ のとき、ペイオフは 1 ポンド当り 0.0511 ドルになり、 $S_T = 1.9000$ のとき、ペイオフは 1 ポンド当り -0.1489 になる。

### フォワード価格とスポット価格

スポット価格とフォワード価格との関係については、第 5 章で詳しく述べる。ここでは二つの価格に関係がある理由をざっとみてみよう。配当のない株式の価格が 60 ドルとしよう。年率 5 % で資金を貸し借りできる場合に、この株式の 1 年物フォワード価格はいくらになるであろうか。

答は、1 年間 5 % の利子のついた 60 ドル、すなわち 63 ドルである。フォワード価格がこれより高い、たとえば 67 ドルの場合、60 ドルを借りて 1 株を購入し、それを 67 ドルで売却すればよい。借入金を返済すると、1 年で 4 ドルの利益が残る。逆に、フォワード価格が 63 ドルより低い、たとえば 58 ドルの場合、ポートフォリオの一部としてこの株式を保有する投資家は、60 ドルでその株式を売却し、1 年後に 58 ドルで買い戻すフォワード契約を結べばよい。売却代金は 5 % で運用され、3 ドルを稼ぐ。したがって、投資家はポートフォリオに株式をとどめておくよりも、5 ドル余分に稼げる。

## 1.4 先物契約

先物契約 (futures contract) とは、フォワード契約と同様、将来のある時点にある決められた価格で資産を売買することの二者間契約である。しかし、先物契約はフォワード契約とは異なり、通常取引所で取引される。取引所取引を可能にするために、取引所は契約の内容を標準化している。さらに、契約の当事者同士はお互いを知っているとは限らないので、契約履行を保証する仕組みも提供している。

先物取引が行われている最大の取引所は、シカゴ商品取引所 (CBOT) とシカゴ・マーカンタイル取引所 (CME) である。これらをはじめとした世界中の取引所で、広範囲のコモディティと金融資産を原資産とするさまざま

な先物契約が取引されている。それらのコモディティには豚 (pork belly), 生牛 (live cattle), 砂糖, 羊毛, 木材, 銅, アルミ, 金, 錫が含まれ, 金融資産には株価指数, 通貨, 国債が含まれる。先物の価格は, 定期的に金融専門紙に掲載されている。たとえば, 9月1日に12月限金先物価格が680ドルと呈示されているとしよう。この価格は12月受渡しの金の手数料抜きの取引価格を表している。先物価格は, 取引所の立会場で他の商品と同様の価格原理 (すなわち, 需要と供給の原則) に基づいて決定される。つまり, 買手が売手を上回れば価格は上昇し, その逆の場合には価格は下落する。

先物取引の証拠金制度, 値洗い, 現渡し, ビッドーオファー・スプレッド, 取引所の清算機関の役割については, 第2章で詳細に説明する。

## 1.5 オプション

オプションは取引所市場と店頭市場の両方で取引されている。オプションには基本的な二つのタイプがある。コール・オプション (call option) とは, ある定められた日に, ある定められた価格で原資産を購入する権利, プット・オプション (put option) とは, ある定められた日に, ある定められた価格で原資産を売却する権利である。このある定められた価格は行使価格 (exercise price または strike price) と呼ばれ, ある定められた日は満期日 (expiration date または maturity) と呼ばれている。また, アメリカン・オプション (American option) は満期日までの間いつでも権利行使ができ, ヨーロピアン・オプション (European option) は満期日においてのみ権利行使が可能である(注2)。上場オプションのほとんどはアメリカン・オプションであり, 上場株券オプション市場では, 取引単位は通常100株を売買する権利になっている。一般的にヨーロピアン・オプションのほうがアメリカン・オプションより解析しやすいため, アメリカン・オプションの特性は同条件の

---

(注2) アメリカンとかヨーロピアンという言葉は, オプションや取引所の場所を表しているのではないことに注意してほしい。実際, アメリカの取引所で取引されているオプションにもヨーロピアンはある。

ヨーロピアン・オプションから推論されることも多い。

オプションとは、その保有者にとっての権利であって、保有者はこの権利を必ずしも行使しなくてもよいことを強調しておきたい。この点は、保有者が原資産の売買義務を負うフォワード契約や先物契約とオプションとの明らかな相違点である。また、フォワード契約や先物契約の取引には費用がかかるのに対し、オプションの購入には費用が発生する。

株券オプションを取引する世界最大の取引所はシカゴ・オプション取引所(CBOE: [www.cboe.com](http://www.cboe.com)) である。表1.2は2006年9月12日のIntelの株式に対するアメリカン・オプション(ティッカーシンボル: INTC)のビッドとオファーの仲値である。呈示価格はCBOEのWebサイトから取得されたものである。オプション価格が呈示された時点におけるIntelの株価は、19.56ドルであった。オプションの行使価格は15ドル、17.50ドル、20.00ドル、22.50ドル、および25.00ドルである。満期は2006年10月、2007年1月、および2007年4月となっている。10月限のオプションは2006年10月21日、1月限は2007年1月20日、4月限は2007年4月21日が、それぞれ満期日となっている。

表1.2をみると、いくつかのオプションの性質がわかる。行使価格が高くなるとコール・オプションの価格は低くなり、プット・オプションの価格は高くなる。どちらのタイプのオプションも、満期が長くなるにつれて価格は高くなる傾向にある。行使価格25ドルのプットは即座に行使すべきである。期限前行使が最適な状況になっているので、すべての満期に対してオプション価格が同じになっている。これらのオプションの性質については、第9章でさらに説明する。

ある投資家がブローカーに対して、行使価格20.00ドルのIntelの4月限コール・オプションの購入を注文するとしよう。ブローカーはCBOEのトレーダーに注文をつなぎ、その注文を受けたトレーダーは行使価格20.00ドルのIntelの4月限コール・オプションの売却を望んでいる別のトレーダーを探す。その後、売り買い両者で取引価格が合意される。いま考える例ではビッド-オファー・スプレッドを無視して、表1.2の価格1.65ドルで取引き

表1.2 Intelのオプション価格（2006年9月12日、株価=19.56ドル、出典：CBOE）

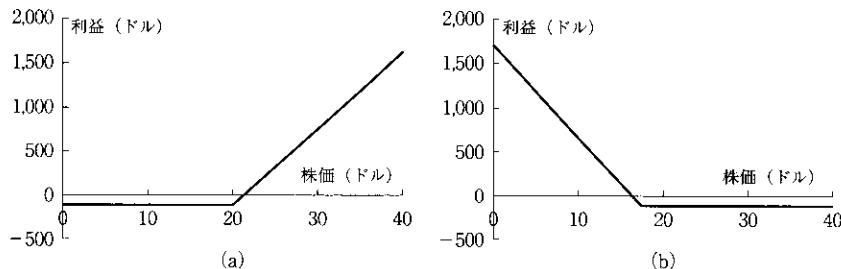
| 行使価格(ドル) | コール   |       |       | プット   |       |       |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|          | 2006年 | 2007年 | 2007年 | 2006年 | 2007年 | 2007年 |
|          | 10月限  | 1月限   | 4月限   | 10月限  | 1月限   | 4月限   |
| 15.00    | 4.650 | 4.950 | 5.150 | 0.025 | 0.150 | 0.275 |
| 17.50    | 2.300 | 2.775 | 3.150 | 0.125 | 0.475 | 0.725 |
| 20.00    | 0.575 | 1.175 | 1.650 | 0.875 | 1.375 | 1.700 |
| 22.50    | 0.075 | 0.375 | 0.725 | 2.950 | 3.100 | 3.300 |
| 25.00    | 0.025 | 0.125 | 0.275 | 5.450 | 5.450 | 5.450 |

れたとしよう。これは1株を購入するオプションの価格である。米国では、株券オプションの取引単位は現物株100株を売買する契約となっている。したがって、投資家はブローカーを通じて165ドルを取引所に送金しなければならない。入金後、取引所は取引相手方に対して同額の送金を行う。

本例では、投資家は165ドルの費用で、Intel株100株を20.00ドルで購入する権利を得た。取引相手方は165ドルを受け取り、投資家がオプションを行使した場合に、Intel株100株を20.00ドルで売却することに合意している。Intelの株価が2007年4月21日までに20.00ドル以上に上昇しなければ、オプションは行使されずに、投資家は165ドルを失う。しかし、Intelの株価が上昇し、たとえば30ドルのときにオプション行使すれば、投資家は1株30ドルのときに1株20.00ドルで100株を購入できることになる。その際の利益は1,000ドル、あるいは当初費用を勘案すると835ドルとなる。

もう一つの取引例として、行使価格17.50ドルの4月限プット・オプションを購入する投資家を考えよう。表1.2から、費用は $100 \times 0.725$ 、すなわち72.50ドルである。投資家はIntel株100株を2007年4月21日までに1株17.50ドルで売却する権利を得る。Intelの株価が17.50ドル以上にとどまれば、オプションは行使されずに、投資家は72.50ドルを失う。しかし、Intelの株価が15ドルのときにオプション行使すれば、Intel株100株を1株15ドルで購入して17.50ドルで売却することにより、投資家は250ドルの利益を得

図1.3 ネット損益(a)行使価格20.00ドルのIntel 4月限コール・オプション1単位の購入と(b)行使価格17.50ドルのIntel 4月限プット・オプション1単位の購入



る。そのとき、オプション費用を勘案したネット利益は177.50ドルとなる。

CBOEで取引されている株券オプションはアメリカンである。簡単のために、それらがヨーロピアンと仮定すると、オプションの行使は満期日のみ可能となり、上の2例における投資家の損益は満期日における株価の関数として表せ、図1.3のようになる。

オプション市場での取引についての詳細や、表1.2に示したようなオプション価格をトレーダーがどのように決定しているかについては、後の章で説明する。いまの時点では、オプション市場には四つの形態の参加者がいることを述べるためにとどめる。

1. コールの買手
2. コールの売手
3. プットの買手
4. プットの売手

買手は買いポジションの保有、売手は売りポジションの保有をそれぞれ意味する。オプションの売却は、オプションのライト (write) としても知られる。

## 1.6 トレーダーの種類

デリバティブ市場は著しい成功を遂げている。その主な理由は、デリバティブ市場がさまざまなタイプのトレーダーを惹きつけ、大きな流動性をもっているからである。投資家は売買契約のどちらか一方を行いたいときに、その反対サイドを取引したい相手方を通常簡単にみつけることができる。

トレーダーには大きく分けて三つのタイプがある。ヘッジャー、スペキュレーター、アービトラージャーである。ヘッジャーは市場変数の将来の変動から発生しうるリスクを軽減するためにデリバティブを利用する。スペキュレーターは市場変数の将来の方向性に賭けるのにデリバティブを用いる。また、アービトラージャーは二つ以上の商品を用いて、収益を確定させるようポジションを相殺する。ビジネス寸見1.1で述べるように、ヘッジファンドは三つの目的のいずれにおいてもデリバティブの大口利用者になった。

以降の節で、各トレーダーの行動について詳細に検討しよう。

### ビジネス寸見1.1 ヘッジファンド

ヘッジ、投機、および裁定取引を目的として、ヘッジファンドはデリバティブの大口利用者となっている。ヘッジファンドは、顧客向けにファンド投資を行うミューチュアルファンドと似ているが、ミューチュアルファンドとは異なり、ヘッジファンドは米国証券取引法のもとでの登録を必要としない。その理由は、ヘッジファンドは金融の玄人からのみ資金を受け入れ、証券の公募を行わないからである。一方、ミューチュアルファンドにおいては、ファンドの持分は公正に価格付けされ、いつでも買戻可能でなければならない。また、投資方針の公開やレバレッジ取引の制限、空売りの禁止などが法律で課せられている。ヘッジファンドは比較的これらの規制が課せられていない。この結果、ヘッジ

ファンドは、洗練された、慣習にとらわれない自己勘定の投資戦略を自由に開発することが可能となっている。ヘッジファンドマネジャーに支払う手数料はファンドのパフォーマンスに連動しており、投資額の1%から2%に加え、収益の20%が典型的な手数料体系となっており、比較的高額となっている。ヘッジファンドの数は増加しており、世界中の顧客相手に約1兆ドルもの金額が投資されている。“ファンド・オブ・ファンズ”は、他のヘッジファンドに投資するために設定されたファンドである。

投資戦略として、ヘッジファンドマネジャーは投機または裁定ポジションをつくるためにしばしばデリバティブを利用する。一度戦略が決められると、ヘッジファンドマネジャーは以下を行いう必要がある。

1. ファンドのエクスポートジャヤーについてのリスク評価を行う。
2. そのリスクは許容できるか、またはヘッジするかを決定する。
3. 許容できないリスクをヘッジするための（デリバティブの利用を通常伴う）戦略を考案する。

利用する取引戦略に応じて、ヘッジファンドには、たとえば以下の分類がある。

転換社債アービトラージ……転換社債の買いポジションと、原資産株式を活発に取引する売りポジションの組合せ

ディストレス債……倒産、またはそれに近い企業が発行する債券の購入エマージング市場……発展途上国または新興国の企業やその国自身が発行する債券や株式への投資

マクロまたはグローバル……金利や為替の動きに投機するためのレバレッジとデリバティブの利用

マーケットニュートラル……全体的なマーケットの動きに対するエクスポートジャヤーがゼロになるように、過小評価されていると考えられる証券の購入と過大評価されていると考えられる証券の売却の組合せ

## 1.7 ヘッジャー

本節では、フォワード契約やオプションを用いてヘッジャーがどのようにリスクを軽減するか考えてみよう。

### フォワード契約を用いたヘッジの例

現在を2007年7月20日とし、米国を基盤とするImportCoという企業が英国のサプライヤーから購入した商品の代金として、1,000万英ポンドを2007年10月20日に支払うとする。金融機関が呈示する米ドル-英ポンドの為替レートは表1.1に示されている。ImportCo社は金融機関から英ポンドを3ヶ月物フォワード市場でレート2.0531で購入することにより、為替リスクをヘッジできる。すなわちこのフォワード契約によって、英国の輸出業者に支払う代金を20,531,000ドルで確定させることができる。

米国企業の例をもう1社考えてみよう。現在を2007年7月20日とする。英国に商品を輸出している企業ExportCo社は、3ヶ月後に輸出代金として3,000万英ポンドを受け取るとする。ExportCo社は3,000万英ポンドを3ヶ月物フォワード市場でレート2.0526で売却することにより、為替リスクをヘッジできる。すなわちこのフォワード契約によって、英ポンドでの受取りを61,578,000ドルで確定させることができる。

ヘッジをしなかったほうが、ヘッジをしたときよりもよい結果になる場合もある。逆に悪くなる場合もある。ImportCo社の場合に、10月20日の為替レートが1.9000になり、ヘッジは行ていなかったとしよう。このとき、1,000万英ポンドに対する支払額は19,000,000ドルとなり、先ほどの20,531,000ドルより少ない。逆に、為替レートが2.1000になれば、1,000万英ポンドに対する支払額は21,000,000ドルとなり、結果的にヘッジを行っていればよかったですということになる。ExportCo社の場合はその逆になる。10月の為替レートが2.0526を下回ればヘッジをしておくべきだったし、2.0526を上回ればヘッジをしていなかったことを喜ぶであろう。

この例から、ヘッジに関する次の重要な点がわかる。ヘッジの目的はリス

クを軽減することにあり、ヘッジした結果のほうがヘッジなしの結果よりもよくなるという保証はない。

### オプションを用いたヘッジの例

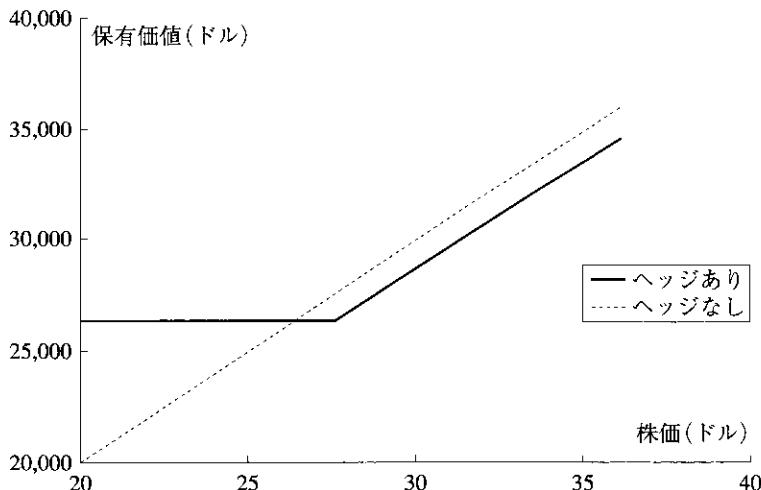
オプションもヘッジに利用できる。たとえば、ある年の5月にマイクロソフト株を1,000株所有している投資家がいるとしよう。そのときの株価は28ドルで、その投資家は2カ月後の株価下落を懸念していて、ポジションをヘッジしたいと考えているとする。そのとき投資家は、CBOEに上場されている行使価格27.50ドルのマイクロソフト株に対する7月限プット・オプションを10枚購入することで、手持ちの1,000株を行使価格27.50ドルで売却する権利を取得できる。オプション価格を1ドルとすると、各オプションの費用は $100 \times 1$ ドル=100ドルとなり、本ヘッジ戦略の総費用は $10 \times 100$ ドル=1,000ドルとなる。

この戦略には1,000ドルの費用がかかるが、オプション期間中は少なくとも27.50ドルで株を売却することが保証される。マイクロソフト株の市場価格が27.50ドルを下回った場合でも、オプションをすべて行使することで、27,500ドルを手に入れることができる。オプション料を考慮すると、差し引き26,500ドルを手に入れられる。一方、市場価格が27.50ドルを上回った場合は、オプションは行使されず、オプションの価値はなくなる。しかし、この場合は、保有している株の価値は27,500ドル以上（または、オプション料を考慮すると26,500ドル以上）となっているはずである。図1.4はポートフォリオのオプション料考慮後のネット価値を2カ月後のマイクロソフトの株価の関数として示したものである。点線はヘッジなしの場合のポートフォリオ価値である。

### 両者の比較

ヘッジにフォワード契約を用いた場合とオプションを用いた場合とには、根本的な違いがある。フォワード契約は原資産に対して受払いする価格を固定することでリスクを中立化させるのに対し、オプションは保険的手段を提

図1.4 マイクロソフト株を2カ月間保有した場合の価値（ヘッジありとヘッジなしの場合）



供する。すなわち、将来の価格変動による利益を享受しつつ、不利な価格変動から投資家を保護する手段を提供する。また、フォワード契約とは異なり、オプションでは契約時にオプション料の支払が必要となる。

## 1.8 スペキュレーター

次にスペキュレーターがどのように先物とオプションを利用するかについてみてみよう。ヘッジヤーは、原資産の価格変動リスクにさらされることを回避しようとするが、スペキュレーターは資産価格が上昇もしくは下落することに賭け、積極的にそうしたポジションをとろうとする。

### 先物を用いた投機の例

2月時点で2カ月後に英ポンドが米ドルに対して強含むと予想し、250,000英ポンドを手当てしようとしている米国のスペキュレーターを考えよう。スペキュレーターのとれる戦略の一つは、英ポンドが将来高い価格で

売却できること期待して、250,000英ポンドを直物市場で購入することである（いったん購入された英ポンドは預金勘定に預けられる）。もう一つの戦略は、英ポンドの4月限CME先物を4枚買い付けることである（先物契約の取引単位は62,500英ポンド）。表1.3に、現在の為替レートが1英ポンド当り2.0470ドル、4月限先物価格が1英ポンド当り2.0410ドルであると仮定した場合の二つの戦略をまとめた。為替レートが4月に1英ポンド当り2.1000ドルとなれば、先物契約を用いた戦略ではスペキュレーターは $(2.1000 - 2.0410) \times 250,000 = 14,750$ ドルの利益を実現することができる。一方、直物市場を用いた戦略では2月に2.0470で購入された250,000英ポンドが4月に2.1000で売却されることになるので、利益は $(2.1000 - 2.0470) \times 250,000 = 13,250$ ドルとなる。為替レートが1英ポンド当り2.0000になれば、先物契約には $(2.0410 - 2.0000) \times 250,000 = 10,250$ ドルの損失が発生し、直物市場では $(2.0470 - 2.0000) \times 250,000 = 11,750$ ドルの損失が発生する。損益は両者で若干異なるが、これらの計算において受払利子は反映されていない。第5章で説明するように、英ポンドの受取利子と英ポンド購入のために必要となったドルの支払利子を考慮すれば、両者の損益は一致する。

それでは二つの戦略の違いは何か。英ポンドを購入する最初の戦略には、511,750ドル（=250,000×2.0470）の初期投資が必要である。それに対して、二つ目の戦略では、スペキュレーターは「証拠金勘定」と呼ばれる勘定に、少額の現金の差入れを求められるだけである。証拠金勘定については第2章で述べる。表1.3では当初証拠金は先物1契約当り5,000ドルと仮定してあ

表1.3 直物と先物契約を用いた投機（先物契約の取引単位は62,500英ポンド、先物4単位の当初証拠金は20,000ドル）

| 2月の取引                |                                 |                         |
|----------------------|---------------------------------|-------------------------|
|                      | 250,000英ポンドの買い<br>スポット価格=2.0470 | 4単位の先物買い<br>先物価格=2.0410 |
| 投資額                  | 511,750ドル                       | 20,000ドル                |
| 4月のスポット=2.1000のときの損益 | 13,250ドル                        | 14,750ドル                |
| 4月のスポット=2.0000のときの損益 | -11,750ドル                       | -10,250ドル               |

り、合計20,000ドルとしているが、実際にはこれより少額の場合もある。このように、先物市場を利用すればスペキュレーターはレバレッジを効かせることができる。比較的小額の初期出費で、投資家は大きな投機的なポジションをとることが可能である。

### オプションを用いた投機の例

オプションを用いた投機も可能である。10月時点で、あるスペキュレーターが2カ月後のある株式の株価上昇を見込んでいいるとする。いま、その株式の株価が20ドル、行使価格22.50ドルの2カ月物コール・オプションの売り気配が1ドルとする。そのとき、スペキュレーターが2,000ドルを投資するものとして、二つの戦略を表1.4に示した。一つは100株の株式購入、もう一つは2,000ドル分のコール・オプション（すなわち、20枚のコール・オプション）購入である。スペキュレーターの勘が正しく、株価が12月までに27ドルまで上昇したとする。このとき、株式の購入による利益は

$$100 \times (27 - 20) = 700 \text{ ドル}$$

となる。しかし、もう一つの戦略のほうが利益がはるかに大きい。行使価格22.50ドルのコール・オプションのペイオフは、27ドルのものを22.5ドルで買えるので4.5ドルとなり、二つ目の戦略での2,000ドル分のオプションから得られる総ペイオフは

$$2,000 \times 4.5 = 9,000 \text{ ドル}$$

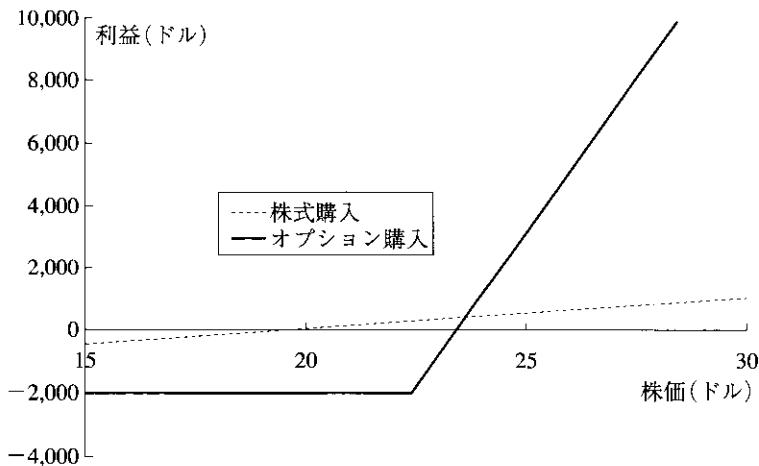
である。オプション料を差し引いたネット利益は

$$9,000 - 2,000 = 7,000 \text{ ドル}$$

表1.4 10月に2,000ドルを使って株価20ドルの株に投機する  
二つの戦略の損益比較

| 投資家の戦略           | 12月の株価  |           |
|------------------|---------|-----------|
|                  | 27ドル    | 15ドル      |
| 100株の買い          | 700ドル   | (500ドル)   |
| コール・オプション20単位の買い | 7,000ドル | (2,000ドル) |

図1.5 株価20ドルの株に対する二つの投機戦略からの損益



となる。したがって、オプションを用いる戦略は株式を購入する戦略よりも10倍の利益をあげたことになる。

オプションは大きな損失を生み出す可能性もある。株価が12月までに15ドルに下落したとしよう。株式を購入する最初の戦略での損失は

$$100 \times (20 - 15) = 500 \text{ ドル}$$

となる。一方、オプションは行使されることなく満期を迎えるため、オプションを用いる戦略は当初支払った2,000ドルの損失となる。図1.5は、二つの戦略の損益を2ヵ月後における株価の関数として示したものである。

オプションには、先物と同様に、与えられた投資に対して金融効果を増幅させるようなレバレッジ効果がある。すなわち、よい場合にはますますよい結果を生むし、悪い場合にはますます悪い結果を生み出す。

### 両者の比較

先物とオプションはスペキュレーターにとってレバレッジ効果をもたらす同じような商品である。しかし、両者には重要な相違点がある。先物の場合は潜在的な利益と同様に潜在的な損失も非常に大きい。それに対して、オプ

ションの場合はどんな逆境が起ころうとも、損失は支払オプション料に限定されている。

## 1.9 アービトラージャー

先物、フォワード、オプション市場参加者で重要な第3のグループは、アービトラージャーである。裁定取引とは二つ以上のマーケットで同時に取引を行って、リスクなしに利益を確保する取引である。後の章では、資産の先物価格が現物価格と乖離したときにどのように裁定取引が行われるかについて紹介し、オプションを利用した裁定取引についても検討する。本節では、簡単な例を用いて裁定の考え方について触れておく。

いま、ニューヨーク証券取引所（NYSE:www.nyse.com）とロンドン証券取引所（LSE:www.stockex.com）の両方に上場されている株式を考えよう。ニューヨークでの株価を200ドル、ロンドンでの株価を100ポンド、為替レートを1英ポンド当たり2.0300ドルとする。このときアービトラージャーはニューヨークで100株を買い、同時にロンドンでそれを売ることにより、取引コストを考えなければ、

$$100 \times [(2.03 \text{ ドル} \times 100) - 200 \text{ ドル}]$$

すなわち、300ドルの利益をリスクなしで得ることができる。個人投資家の場合は取引コストが相対的に高いので、利益が帳消しになってしまうことがあるが、規模の大きな投資銀行の場合には、株式市場や為替市場での取引コストは非常に低い。そのような投資家にとっては、裁定機会は非常に魅力的なものとなり、そのような機会を可能な限り利用して利益をあげようとするだろう。

上で述べたような裁定機会は長くは続かない。アービトラージャーがニューヨーク市場で株式を買うと、需要と供給の関係でドル建て株価は上がる。同様に、アービトラージャーがロンドンで株式を売ると、英ポンド建て株価は下落する。その結果、二つの株価はそのときの為替レート換算で同じ価格に速やかに調整されることになる。実際は、貪欲に収益機会を探し求め

るアービトラージャーがいるので、そもそもポンド建て株価とドル建て株価とが大きく乖離することはほとんどない。このことは他の金融商品に対しててもいえることで、アービトラージャーの存在により、ほとんどの金融市場で呈示されている価格間にはほんの小さな裁定機会しか観測されない。本書での先物価格、フォワード価格、オプション価値に関するほとんどの議論は、裁定機会がないという仮定に基づいて展開されている。

## 1.10 危険性

デリバティブは非常に用途が広い商品であり、これまでみてきたように、ヘッジ、投機、裁定取引に利用される。この利便性は問題を引き起こすこともある。リスクヘッジや裁定戦略を行う権限のあるトレーダーは、(意識しているか意識していないかにかかわらず) ときとしてスペキュレーターになることがある。その結果は破滅的ですらある。ペアリング銀行のニック・リーソンの行動はその一例である(ビジネス寸見1.2参照)(注3)。

ペアリングが遭遇したこの種の問題を回避するために重要なことは、金融会社であれ、事業会社であれ、意図された目的に沿ってデリバティブが利用されているかを確認すべく、リスク管理態勢を構築することである。すなわち、リスク限度を設定するとともに、その遵守状況を確認するために、トレーダーの行動を日々モニタリングする必要がある。

### ビジネス寸見1.2 ペアリング銀行の大失敗

デリバティブは非常に用途が広い商品であり、ヘッジ、投機、そして裁定取引に利用される。デリバティブを取引する企業が直面するリスクの一つは、ヘッジや裁定取引を行う権限をもつ従業員がスペキュレーターになってしまふことである。

1995年、ペアリング銀行シンガポール事務所の従業員であったニッ

ク・リーソンは、シンガポール取引所と大阪証券取引所で取引されていた日経225先物価格間の裁定取引を行う権限をもっていた。やがて、リーソンはアービトラージャーからスペキュレーターになり、デリバティブの利用方法を変更したが、ロンドン本社のだれもがそれを完全に理解していなかった。損失を出し始めて、彼はそれを隠すことができた。損失の穴埋めのためにさらに大きな投機ポジションを積み上げていったが、損失を拡大させるだけであった。

リーソンは発見されるまでに10億ドル近くの損失を計上した。その結果、200年の歴史をもつ銀行であるペアリングは破滅に追いやられた。ペアリング事件からの教訓の一つは、トレーダーに対して明確なリスク限度を定義し、その限度が遵守されているかどうかを確かめるために、トレーダーの行動を注意深くモニタリングすることが重要であるということである。

## 要 約

過去30年における金融でのきわめて驚くべき発展の一つが、デリバティブ市場の成長である。ヘッジャーにとっても、スペキュレーターにとっても、原資産そのものよりデリバティブで取引するほうが魅力的なことが多い。このようなデリバティブには、取引所で売買されているものもあれば、金融機関、ファンドマネジャー、事業法人によって店頭市場で売買されるもの、新規発行の債券や証券に付加されるものなどもある。本書の多くの部分は、デリバティブの価値評価に関するものである。オプションや先物契約に限らず、すべてのデリバティブを評価できる統一的なフレームワークの提供を目

(注3) 映画「Rogue Trader（邦題：マネートレーダー 銀行崩壊）」はペアリング銀行の失敗をうまくドラマ化したものである。

指している。

本章では、フォワード契約、先物契約、オプションについて簡単に説明した。フォワード契約と先物契約は、対象となる資産を決められた日に決められた価格で買い取るか、あるいは売り渡す義務を負う契約である。オプションには、コールとプットがある。コール・オプションの買手は、原資産を決められた日までに決められた価格で買う権利をもつ。プット・オプションの買手は、原資産を決められた日までに決められた価格で売る権利をもつ。フォワード契約、先物契約、オプションは、いずれもさまざまな資産を対象にしたもののが取引されている。

デリバティブは資本市場において大いに発展してきた。市場参加者には大きく分けて、ヘッジャー、スペキュレーター、アービトラージャーの三つのタイプがある。ヘッジャーは資産の価格変動リスクをデリバティブを用いて削減しようとしており、スペキュレーターは資産の価格変動に対する賭けをするにあたり、デリバティブを用いてレバレッジを効かせようとする。また、アービトラージャーは、二つの市場間の価格乖離から利益をあげようとしており、たとえば、先物価格が現物価格から考えて妥当な水準を超えて乖離したときは、双方の市場で互いに相殺しあうポジションをとることにより確定させた利益を手にする。

## 参考文献

- Chancellor, E. *Devil Take the Hindmost-A History of Financial Speculation.* New York : Farra Straus Giroux, 2000.
- Merton, R.C. "Finance Theory and Future Trends: The Shift to Integration," *Risk*, 12, 7 (July 1999) : 48-51.
- Miller, M.H. "Financial Innovation: Achievements and Prospects," *Journal of Applied Corporate Finance*, 4 (Winter 1992) : 4-11.
- Rawnsley, J.H. *Total Risk: Nick Leeson and the Fall of Barings Bank.* New

York : Harper Collins, 1995.  
Zhang, P.G. *Barings Bankruptcy and Financial Derivatives*. Singapore : World Scientific, 1995.

### 章末問題

- 1.1** フォワード契約の買いポジションと売りポジションとの違いを述べよ。
- 1.2** ヘッジと投機と裁定の違いを細かく説明せよ。
- 1.3** 價格が50ドルのフォワード契約を買い建てる場合と、行使価格が50ドルのコール・オプションの買いポジションをつくる場合の違いを述べよ。
- 1.4** コール・オプションの売却とプット・オプションの購入との違いを詳細に説明せよ。
- 1.5** ある投資家が1英ポンド当たり1.9000ドルで100,000英ポンドを売るフォワード契約を締結した。契約満期時に為替が(a)1.8900ドル、(b)1.9200ドルになったとき、投資家の損益はそれぞれいくらになるか。
- 1.6** 綿花先物を先物価格が1ポンド当たり50セントのとき1枚売り付けた。先物の取引単位は50,000ポンドの受渡しである。満期日に綿花の価格が1ポンド当たり(a)48.20セント、(b)51.30セントになったとき、損益はそれぞれいくらになるか。
- 1.7** 行使価格40ドル、満期3カ月のプット・オプションを1単位売り付けたとする。現在の株価は41ドルで、取引単位は100株である。この投資家はどのような義務を負っているか。また損益はどうなるか説明せよ。
- 1.8** 店頭市場と取引所市場との違いは何か。店頭市場でのマーケット・メーカーによるビッドとオファーの価格表示とは何か。

- 1.9** ある株式の株価上昇を予想して投機したいとする。現在の株価は29ドル、行使価格30ドルの3ヶ月物コール・オプションの価格は2.90ドルであり、投機に使える資金は5,800ドルとする。株式に投資した場合と株券オプションに投資した場合の二つの戦略を比較せよ。また、それぞれについて損益はどうなる可能性があるか。
- 1.10** 25ドルの株式を5,000株保有していたとする。今後4ヶ月の株価下落に対する保険として、ブット・オプションはどのように利用できるか。
- 1.11** 株式の新規発行により、企業は資金を調達できる。株券オプションの場合はどうか。
- 1.12** フォワード契約が投機にもヘッジにも使える理由を説明せよ。
- 1.13** 行使価格50ドル、プレミアム2.50ドルの3月限株券コール・オプションを保有しており、3月まで持ち切るものとする。どのような状況になれば、オプションの買手に利益が出るか。どのような状況になれば、そのオプションは権利行使されるか。オプションの買いポジションに対する損益が満期日の株価によって変化する様子をグラフで示せ。
- 1.14** 行使価格60ドル、プレミアム4ドルの6月限株券ブット・オプションを保有しており、6月まで持ち切るものとする。どのような状況になれば、オプションの売手（すなわち、売りポジションの側）に利益が出るか。どのような状況になれば、そのオプションは権利行使されるか。オプションの売りポジションに対する損益が満期日の株価によって変化する様子をグラフで示せ。
- 1.15** 行使価格が20ドルの9月限コール・オプションの売却するトレーダーを考える。現時点を5月、株価を18ドル、オプション価格を2ドルとする。9月までそのポジションを保有し、9月に株価が25ドルになった場合の、トレーダーのキャッシュフローを説明せよ。
- 1.16** あるトレーダーが行使価格30ドルの12月限ブット・オプションを4ドルで売った。どのような状況になれば、トレーダーは利益を得る

か。

- 1.17** ある企業が4カ月後に外貨を受け取ることになっているとする。どのようなオプションがヘッジに使えるか。
- 1.18** ある米企業が6カ月後に100万カナダドルを支払わなければならないとする。どのようにしてこの為替リスクをヘッジできるかを、(a)フォワード契約、(b)オプションを利用した場合のそれぞれについて説明せよ。
- 1.19** あるトレーダーが1億円のフォワード契約を売り建てた。フォワード為替レートを1円当たり0.0080ドルとする。為替レートが満期日に、(a)1円当たり0.0074ドル、(b)1円当たり0.0091ドルになった場合、トレーダーの損益はそれぞれいくらになるか。
- 1.20** シカゴ商品取引所には米国長期国債先物が上場されている。これを利用するのは、どのようなトレーダーと考えられるか。
- 1.21** 「オプションや先物はゼロサム・ゲームである」というのはどのような意味か。
- 1.22** ある資産に対するフォワード契約と同じ資産に対するヨーロピアン・プット・オプションを買って、ポートフォリオをつくる。オプションの満期がフォワード契約と同じで、行使価格がこのポートフォリオ設定時のフォワード価格と同じ価格のとき、ポートフォリオの損益はどのようになるか説明せよ。
- 1.23** 1980年代に Bankers Trust は、ICONs (index currency option notes)を開発した。これは、満期に債券保有者の受け取る額が外国為替レートによって変化する債券である。旧日本長期信用銀行との取引がその一例である。そのICONは、円-ドル為替レート  $S_T$  が満期(1995年)に1ドル当たり169円以上であれば債券保有者は1,000ドルを受け取れるが、1ドル当たり169円以下であれば次の額になるというものである。

$$1,000 - \max\left[0, 1,000\left(\frac{169}{S_T} - 1\right)\right]$$

満期に為替レートが84.5以下になれば、債券保有者は何も受け取れない。このICONは、通常の債券と二つのオプションの組合せであることを示す。

- 1.24** 2009年1月1日に日本円1,000万円を買うフォワード契約を2008年7月1日に結び、同じく2009年1月1日に日本円1,000万円を売るフォワード契約を2008年9月1日に結んだとする。この戦略のペイオフはどうなるか。
- 1.25** 米ドル／英ポンドのスポットとフォワードの為替レートが以下のとおりだとする。

---

|           |        |
|-----------|--------|
| スポット      | 2.0080 |
| 90日フォワード  | 2.0056 |
| 180日フォワード | 2.0018 |

---

次の状況下では、アービトラージャーにとってどのような取引機会があるか。

- (a) 1英ポンドを1.97ドルで購入する満期180日のヨーロピアン・コール・オプションの価格が2セントの場合。
- (b) 1英ポンドを2.04ドルで売却する満期90日のヨーロピアン・プット・オプションの価格が2セントの場合。

## 宿題

- 1.26** 金価格が1オンス600ドルとする。また、満期1年のフォワード価格を800ドルとする。年率10%で資金を借りりができるとき、どのような裁定取引が可能か。ただし、金の保管コストはなく、金を所有することから発生する収入もないものとする。

- 1.27** 現在の株価は94ドルで、行使価格が95ドルの3カ月物コール・オプションは4.70ドルである。株価が上がると予想する投資家が、100株の現物株式を買うのと2,000株分のコール・オプション (=20枚) を買うのでは、どちらがいいか決めかねている。どちらを選んでも、必要な資金は9,400ドルである。あなたならどのようなアドバイスをするか。オプションを買ったほうが利益が大きくなるのは株価がいくら以上のときか。
- 1.28** 2006年9月12日に、ある投資家がIntelの株式を100株保有している。表1.2に示されているように、株価は19.56ドル、行使価格17.50ドルの1月限プット・オプションの価格は0.475ドルである。このとき、投資家は株価の下落リスクを防ぐ二つの戦略を比較している。一つは行使価格17.50ドルの1月限プット・オプションを1単位購入することである。もう一つは、Intelの株価が17.50ドルに到達するやいなやブローカーに100株の売り注文を出すことである。この二つの戦略の長所と短所を議論せよ。
- 1.29** Standard Oilは以前ある債券を発行した。その債券にはクーポンがなかった。そのかわり償還時には、償還時におけるオイル価格を基準にして計算される金額を1,000ドルに加えた金額が支払われることになっていた。この追加金額は、償還時に1バレル当りのオイル価格が25ドルを超えていれば、その超過額に170を掛けたもの、ただし、最大2,550ドル（これは1バレル当りの価格が40ドルの場合に相当する）までというものである。この債券は、通常の債券に、オイル価格に対する行使価格25ドルのコール・オプションの買いと、行使価格40ドルのコール・オプションの売りを組み合わせたものであることを示せ。
- 1.30** 表1.1の状況で、ある企業の財務担当者が、「6カ月後に100万英ポンドを売却する。為替レートが2.02を下回る場合には、2.02で為替レートを仕切りたい。また、2.09を上回る場合には、為替レートは2.09でよい。また、為替レートが2.02と2.09の間にある場合には、

そのときの為替レートで英ポンドを売却したい」といっている場合に、どのようなオプションを利用すれば、この担当者を満足させられるか。

- 1.31** 1.7節で仮定した状況において、(a) ImportCo 社にとって為替レートが2.0700を下回ることが保証される、(b) ExportCo 社にとって為替レートが少なくとも2.0400であることを保証されるという条件を満たす通貨オプションを用いたヘッジ方法を述べよ。DerivaGem ソフトウェアを用いて各ケースにおけるヘッジコストを計算せよ。ただし、為替ボラティリティを12%，米国金利を5%，英国金利を5.7%とし、現在の為替レートは表1.1のビッドとオファーの平均値であると仮定する。
- 1.32** あるトレーダーが同一資産、同一行使価格、同一満期のヨーロピアン・コール・オプション1単位の買いと、ヨーロピアン・プット・オプション1単位の売りを行ったとする。そのときのトレーダーのポジションを説明せよ。また、コール・オプションの価格がプット・オプションの価格に等しくなるのはどのようなときか。

## 第2章

# 先物市場の仕組み

第1章では、先物契約とフォワード契約はともに、ある資産を将来のある時点において、あらかじめ定められた価格で売買する契約であることを説明した。先物契約は取引所で取引され、契約の条項は標準化されている。一方、フォワード契約は二つの金融機関、または金融機関とその顧客との間で結ばれる個別契約である。

本章では先物市場の機能を説明し、契約の詳細、証拠金口座の取扱い、取引所の仕組み、市場の規制、建値方法、税務・会計目的での先物契約の取扱いなどの諸問題を議論する。先物契約をフォワード契約と比較して、それから発生するペイオフの相違について説明する。

## 2.1 先物取引

第1章で触れたように、先物契約は現在、世界中で活発に取引されている。米国における2大先物取引所はシカゴ商品取引所(CBOT:www.cbdt.com)とシカゴ・マーカンタイル取引所(CME:www.cme.com)である(2007年7月に、これら二つの取引所は合併することで最終合意した)。また、欧洲における2大取引所はユーロネクスト(Euronext:www.euronext.com)とユーレックス(Eurex:www.eurexchange.com)である。ユーロネクストは2006年にニューヨーク証券取引所(www.nyse.com)との合併に合意している。また、ユーレックスはドイツ取引所とスイス取引所が共同運営している。その他の大きな取引所としては、サンパウロのボルサ商品先物取引所(www.bmf.com.br)や東京金融取引所(www.tiffe.or.jp)、シンガポール国際通貨取引所(www.sgx.com)、シドニー先物取引所(www.sfe.com.au)があげられる。取引所一覧は巻末の表を参照されたい。

CBOTに上場されているトウモロコシ先物を例にとり、先物契約の仕組みをみてみよう。ニューヨークのあるトレーダーが、3月5日に同年7月受渡しのトウモロコシ5,000ブッシュルの買い注文をプローカーに伝えるとする。プローカーは、即座に7月限トウモロコシ先物1枚(CBOTでの取引単位は5,000ブッシュル)の買い注文(買いポジションをとる注文)をトレーダーに出すだろう。ほぼ同じ時に、カンザスの別のトレーダーが7月受渡しのトウモロコシ5,000ブッシュルの売り注文をプローカーに伝えるとする。そのプローカーは即座に先物1枚の売り注文(売りポジションをとる注文)を出すだろう。価格が折り合えば、この取引はDone(締結)となる。伝統的な立会いシステムでは、それぞれの注文を執行するフロアトレーダーが物理的に会して価格を決める。電子取引ではコンピュータが取引を成立させ、価格のチェックを行っている。

購入に合意したニューヨークのトレーダーは先物1契約の買いポジション(long futures position)を保有し、売却に合意したカンザスのトレーダーは先物1契約の売りポジション(short futures position)を保有することにな

る。合意された価格を7月限トウモロコシ先物の現在価格、たとえば1ブッシュル当たり300セントとする。この価格は他の価格と同様に、需要と供給の法則に従って決まったものである。7月限トウモロコシ先物を売りたいトレーダーが買いたいトレーダーより多い場合には価格は下がるだろう。それによって新たな買手が現れて、売手と買手の均衡が保たれる。逆に7月限トウモロコシ先物を買いたいトレーダーが売りたいトレーダーより多い場合には価格は上がる。それによって新しい売手が市場に現れて、買手と売手の均衡が保たれる。

### 先物ポジションの手仕舞い

ほとんどの場合、先物契約は反対売買によって手仕舞いが行われ、原資産の受渡し（現渡し）が行われることは非常にまれである。先物ポジションを手仕舞うには、現在のポジションと反対の売買を行う。たとえば、3月5日に7月限トウモロコシ先物を1枚買ったニューヨークの投資家は、4月20日に7月限トウモロコシ先物を1枚売ることでポジションを手仕舞うことができる。3月5日に7月限トウモロコシ先物を1枚売ったカンザスの投資家は、たとえば5月25日に7月限を1枚買い戻すことでポジションを手仕舞うことができる。どちらの場合においても、この投資家のトータル損益は、3月5日から先物を手仕舞った日までの先物価格の変化によって決まる。

現渡しは非常にまれであるため、受渡しの仕組みを忘れているトレーダーもときどきいるくらいである（ビジネス寸見2.1参照）。それでも、先物取引における現渡しの仕組みについて本章である程度ページを割いて説明する。というのは、最後に現渡しの可能性があるからこそ先物価格は現物価格（注1）に連動しているからである。

---

(注1) 第1章で述べたように、現物価格とは約定からほとんど日を待たずに受渡しが行われる場合の価格である。

## ビジネス寸見2.1 先物契約の予期せぬ現渡し

この話はおそらく作り話と思われるが、ある金融機関の幹部から聞いた話である。それまで金融業界で働いたことのない、金融機関の新しい従業員にまつわる話である。ヘッジ目的で生牛の先物契約を定期的に買い付け、取引最終日にそのポジションの手仕舞い注文を出す顧客がいた（生牛先物はCMEで取引されており、取引単位は生牛40,000ポンドとなっている）。新しい従業員はその取引を任せられた。

先物契約を手仕舞う日が到来した時、顧客が1単位の買いポジションを保有していることにその従業員は気づいたが、取引所のトレーダーに1単位の売りではなく、1単位の買い注文を出してしまった。この誤発注の結果、その金融機関は生牛先物2単位の買いポジションを保有することになった。誤発注が発見された時には、その先物契約の取引は終了してしまっていた。顧客ではなく金融機関に誤発注の責任があり、その結果、それまで行った経験のない生牛先物の現物受渡しについて詳しい決めを調べることになった。契約の条項によると、牛は受渡月に米国のいろいろな場所で売手によって受渡可能となっていた。買いポジションであったため、金融機関は売手が受渡意思通知書を取引所に発行し、取引所から割当てが来るのを待つほかなかった。

最終的に取引所から通知が届き、翌週火曜日に2,000マイル離れた場所で生牛を受け取ることがわかった。新しい従業員は受取業務を行うためにその場所へ派遣された。その場所では、毎週火曜日に牛のオークションが行われていることがわかった。先物契約の売手はそのオークションで牛を購入し、即座に受渡しを行った。ついていないことに、牛は翌週火曜日の次のオークションまで転売できなかつた。そのため、その従業員はその牛を1週間保管し、餌をやるために手配という難題にぶち当たつた。これが金融業界での初仕事となつた。

## 2.2 先物契約の詳細

新規の先物契約を上場するときには、取引所は、二者間で合意されたことになる先物契約の正確な内容を詳細に示す必要がある。特に、対象となる原資産はなんであるか、取引単位（すなわち、先物 1 契約でいくつの資産の受渡しがなされるか）、どこで受け渡されるか、いつ受け渡されるかといった事項を決めなければならない。

受渡しされる資産のグレードや受渡しの場所をいくつかのなかから選べる場合がある。そのような先物契約では、売手（資産を売却することに同意した契約者）に選択権があるのが一般的である。売手は現渡しを行う際に、取引所に対して受渡意思通知書（notice of intension to deliver）を発行する。通知書には受渡しされる資産のグレードや場所が記載されている。

### 原資産

原資産が商品の場合には、同じ商品であっても市場ごとに品質にかなりのばらつきがある。したがって原資産を決めるときに、取引所は受渡可能な商品の品質基準を定めることが必要となる。ニューヨーク商品取引所（NYBOT）は冷凍濃縮オレンジジュース先物の原資産を、米国等級 A でブリックス値（糖濃度）が62.5度以上のフロリダ産かブラジル産の冷凍濃縮オレンジジュースと定めている。

商品によっては、受渡可能な品質の等級の範囲が定められており、受取金額が選ばれた等級によって決まるものもある。たとえば、CBOT のトウモロコシ先物では、標準の等級は「No.2 Yellow」とされているが、等級の異なるトウモロコシを取り引所の定めた方法に従って調整された価格で受け渡すことも認められている。No.1 Yellow は、No.2 Yellow より 1 ブッシュル当り 1.5 セント高い価格で受渡可能となっている。No.3 Yellow は、No.2 Yellow より 1 ブッシュル当り 1.5 セント安い価格で受渡可能となっている。

先物契約の原資産が金融商品の場合は、一般的に原資産の定義ははじめから明確で、曖昧さがない。たとえば、日本円に対しては等級を定める必要は

ない。しかし、CBOT に上場されている米国長期国債（Treasury bond）先物や米国中期国債（Treasury note）先物のような、原資産の範囲に興味深い取決めがなされているものもある。長期国債先物の原資産は、残存期間15年以上で15年以内に期限前償還されないものとなっている。中期国債先物では、受渡時点において残存期間が 6 年半から10年の国債がすべて原資産の対象となっている。どちらの場合においても、取引所はクーポンと満期日に応じて受取金額を調整する公式を用意している。これについての詳細は第 6 章で述べる。

### 先物契約の取引単位

先物契約の取引単位は、先物 1 契約により受け渡される原資産の数量を表している。その大きさをいくつにするかは取引所にとっての重要な判断事項である。もし取引単位が大きすぎると、比較的小さなリスク・エクスポージャーをヘッジしたいトレーダーや、少額の投機取引を試みようとするトレーダーにとっては、取引に参加できない市場になってしまふ。一方、1 契約ごとに発生するコストがあるので、取引単位が小さすぎると取引コストがかさむことになる。

適当な取引単位はこれをよく用いる投資家に合わせて決めることがある。農産物の先物契約では 1 契約当たり価値で 1 万ドルから 2 万ドルの受渡しが行われ、金融資産の先物契約ではもっと大きいこともある。たとえば、CBOT の米国長期国債先物では取引単位は額面10万ドルの国債となっている。

取引所が小口投資家のためには “ミニ” 契約を導入する場合もある。たとえば CME のミニ NASDAQ 100先物では、NASDAQ 100先物の取引単位がインデックスの100倍であるところを20倍としている。

### 受渡しの取決め

受渡しが行われる場所は取引所によって定められている。商品の取引では輸送コストが大きな意味をもつてるので、受渡場所の規定は非常に重要である。NYBOT の冷凍濃縮オレンジジュース先物の例では、受渡場所は取

引所の認可したフロリダ州、ニュージャージー州、デラウェア州の倉庫と定められている。

受渡場所が選べる場合、先物契約の売手の受取代金は、売手が選択した受渡場所に従って調整される。一般に、その商品の主要産地から相対的に離れた場所で受渡しを行うほうが、受渡代金は高くなる。

## 限 月

先物契約はその限月（受渡月）で参照される。取引所は、受渡月のうち受渡しのできる期間を正確に定めておかなくてはならない。多くの先物契約では、その月内であればいつでも受渡しができるように定められている。

限月は先物契約ごとにさまざまであり、参加者のニーズに合わせて取引所が取り決めている。たとえばCBOTのトウモロコシ先物では、3月、5月、7月、9月、12月が限月として定められている。満期の最も短い限月とそれに続く多くの限月が常時取引されている。取引所は新しい限月の取引開始日と取引最終日を定めている。受渡最終日の通常数日前が取引最終日になっている。

## 建値の方法

取引所は価格の建値方法について定めている。たとえば、ニューヨーク・マーカンタイル取引所（NYMEX）の原油先物では、1バレル当りの価格がドルでセント単位まで建値されている。また、CBOTの米国長期国債先物や中期国債先物では、ドルで32分の1単位まで建値されている。

## 値幅制限と建玉制限

ほとんどの先物契約では、1日の値幅制限が取引所により定められている。1日の間で値幅制限いっぱいまで価格が下落することを「ストップ安」（limit down）という。逆に、値幅制限いっぱいまで価格が上昇することを「ストップ高」（limit up）という。値幅制限いっぱいの値動き（limit move）とは、上下どちらかの値幅制限いっぱいまで価格が変動することをいう。通

常、一度相場がストップ安またはストップ高した場合には、その日の取引はそこで中止される。しかし、取引所が介入して値幅制限の大きさを変更する権限を有している場合もある。

1日の値幅制限は、投機的な取引で相場が過熱し、価格が極端に変動するのを防ぐために設けられている。しかし、原資産の価格が急速に上下に変動した場合には、値幅制限が先物取引の人為的な妨げになってしまふこともある。そのため、こうした値幅制限を設けることが先物市場にとってよいことかどうかについては、意見の分かれるところである。

建玉制限とは、個々のスペキュレーターが保有することのできる最大の契約数のことである。その制限は、市場がスペキュレーターの行動に過度に左右されるのを防ぐ目的で設けられている。

### 2.3 先物価格の現物価格への収束

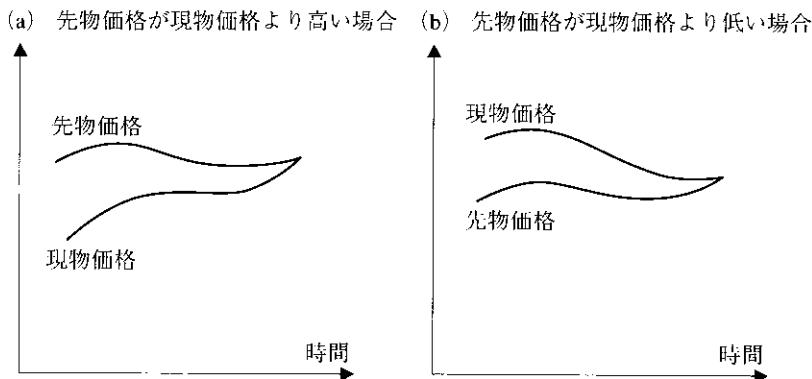
先物契約の受渡期間が近づくにつれ、先物価格は原資産の現物価格に近づいていく。そして、受渡期間に入ると先物価格は現物価格に等しく（またはきわめて近く）なる。

そうなる理由を調べるために、まず受渡期間中に先物価格が現物価格を上回っているとしよう。この場合は明らかに裁定機会があり、トレーダーは次の取引を行う。

1. 先物契約で売り付ける
2. 原資産を購入する
3. 受渡しを行う

これによって、先物価格が現物価格を上回っている分に等しい利益を確実に得ることができる。そして、トレーダーがこうした裁定取引を行うにつれて先物価格は下落していくことになる。次に受渡期間中に先物価格が現物価格を下回っているとしよう。この場合には、資産の購入を考えている企業は、先物契約を買い付けて現渡しを待つという取引を行うだろう。その結果、先物価格は上昇することになる。

図2.1 受渡時期が近づくまでの先物価格と現物価格との関係



以上のことから、先物価格は受渡期間において現物価格に非常に近くなる。図2.1は先物価格が現物価格に収束していく様子を描いている。図2.1(a)は受渡期間以前で先物価格が現物価格を上回っている場合、図2.1(b)は逆に先物価格が現物価格を下回っている場合の例である。この二つのパターンが観測される市場環境については第5章で議論する。

## 2.4 日次値洗いと証拠金

2人の投資家が直接連絡をとって、特定の価格で将来資産を売買する契約を締結するというのには、明らかにリスクがある。なぜなら、一方の投資家が契約したのを後悔して契約を破棄しようとするかもしれない。あるいは単純に、投資家に契約を履行する資金力がないということもありうる。そこで取引所の大きな役割の一つが、こうした契約の不履行を避けるような売買の仕組みをつくることである。その目的で証拠金制度が導入されている。

### 証拠金の値洗い

証拠金の役割を説明するために1人の投資家を考えてみる。この投資家は、6月5日(木)にニューヨーク・マーカンタイル取引所(NYMEX)の

COMEX 部門に上場されている金先物12月限 2 単位の買い注文をブローカーに出し、その時の金先物価格は 1 オンス当たり 600 ドルとする。金先物の取引単位は 100 オンスであるから、この投資家は 200 オンスをその価格で購入する契約を結んだことになる。この時ブローカーは、投資家に対しいくらかの資金を差し入れるように要求するが、これが証拠金と呼ばれるものである。取引を行う時点で差し入れなくてはならない資金は、当初証拠金 (initial margin) として知られている。ここでは、証拠金の額を 1 契約当たり 2,000 ドル、すなわち合計 4,000 ドルと仮定しよう。毎営業日の取引終了後、証拠金勘定は投資家の損益を反映して調整される。これを証拠金の値洗い (marking to market) と呼ぶ。

たとえば、6 月 5 日の金先物の終値が 600 ドルから 597 ドルに下落したとする。1 オンス当たり 600 ドルで購入した 200 オンスの金先物 12 月限が現在 597 ドルでしか売却できないので、投資家は 600 ドル ( $= 200 \times 3$  ドル) の損失を被ったことになる。したがって証拠金勘定は、600 ドル分減らされて 3,400 ドルとなる。同様に、先物価格が初日の終わりに 603 ドルに上昇した場合には、証拠金勘定は 600 ドル積み増され 4,600 ドルとなる。証拠金は、まず取引当日の終値で値洗いが行われ、それ以降、毎日終値をもとに値洗いが続けられる。

ここで注意してほしいのは、値洗いはブローカーと顧客との間のみで行われるものではないということである。たとえば、先物価格が値下りし、買いポジションの投資家の証拠金勘定が 600 ドル減額した場合、この投資家のブローカーは取引所に対し 600 ドルを支払い、そして取引所はこの 600 ドルを売りポジションの投資家のブローカーに受け渡す。同様に先物価格が上昇した場合には、売りポジションの投資家のブローカーが損失分を取引所へ支払い、この資金を買いポジションの投資家のブローカーが取引所から受け取る。この仕組みについては本章でさらに詳細に説明する。

投資家は、当初証拠金を超えた残高をいつでも引き出すことができるが、証拠金の残高がマイナスにならないように、当初証拠金の金額よりいくぶん低めに設定された維持証拠金 (maintenance margin) というものが定められ

ている。もし証拠金残高が維持証拠金を下回った場合には、投資家は証拠金の追加差入れの通知（margin call）を受け、翌日までに当初証拠金のレベルまで資金を積み増さなくてはならない。この新たに差し入れられる資金は追加証拠金と呼ばれ、もし投資家がこれを差し入れない場合には、プローカーはポジションを手仕舞うことになる。先の例では金先物12月限を200オンス分売却して、保有する契約のポジションを手仕舞うのである。

表2.1(次頁)は、先の投資家の場合について、先物価格の推移に伴って証拠金の操作がどのように行われるかを例示したものである。維持証拠金は1契約当り1,500ドル、すなわち全部で3,000ドルと仮定されている。この例では6月13日に証拠金残高が維持証拠金を340ドル下回っている。このため、プローカーは投資家に対し追加証拠金を1,340ドル要求し、表2.1では投資家が実際にこの追加証拠金を6月16日の取引終了までに差し入れることを仮定している。6月19日に証拠金残高は再び維持証拠金レベルを割り込み、追加証拠金が1,260ドル発生し、投資家は6月20日の取引終了までにこれを差し入れる。6月26日にこの投資家はポジションの手仕舞いを決めて、先物2契約を転売した。この日の先物価格は592.30ドルであり、この投資家は累積で1,540ドルの損を被ったことになる。なお、6月16日、23日、24日、25日に証拠金残高が当初証拠金を上回っているが、表2.1ではこの余裕資金は引き出されなかったものと仮定している。

### その他の詳細

多くのプローカーは、顧客の証拠金勘定に利子をつけている。したがって、その利子が他の金融商品の金利と遜色ないレベルにあれば、証拠金残高がそのまま費用につながるわけではない。また、当初証拠金の差入れ（追加証拠金ではない）にあたり、投資家は代用有価証券を現金のかわりに差し入れができる場合もある。たとえば、米国短期国債（T-bill）は代用有価証券として額面の約90%、株式は市場価値の約50%でもって現金に代用される。

値洗いにより、先物契約は満期日に一括ではなく日次ベースで実質清算さ

**表2.1 金先物を2単位購入した際の証拠金の動き**

当初証拠金は、1契約当り2,000ドル、全体で4,000ドルであり、維持証拠金は1契約当り1,500ドル、全体で3,000ドルとなっている。取引は6月5日の価格が600ドルのときに始められ、6月26日の価格が592.30ドルのときに手仕舞われた。先物価格は、最初と最後の行を除いてその日の終値である。

| 日付    | 先物価格<br>(ドル) | 日々損益<br>(ドル) | 累計損益<br>(ドル) | 証拠金残高<br>(ドル) | 追加証拠金<br>(ドル) |
|-------|--------------|--------------|--------------|---------------|---------------|
|       | 600.00       |              |              | 4,000         |               |
| 6月5日  | 597.00       | (600)        | (600)        | 3,400         |               |
| 6月6日  | 596.10       | (180)        | (780)        | 3,220         |               |
| 6月9日  | 598.20       | 420          | (360)        | 3,640         |               |
| 6月10日 | 597.10       | (220)        | (580)        | 3,420         |               |
| 6月11日 | 596.70       | (80)         | (660)        | 3,340         |               |
| 6月12日 | 595.40       | (260)        | (920)        | 3,080         |               |
| 6月13日 | 593.30       | (420)        | (1,340)      | 2,660         | 1,340         |
| 6月16日 | 593.60       | 60           | (1,280)      | 4,060         |               |
| 6月17日 | 591.80       | (360)        | (1,640)      | 3,700         |               |
| 6月18日 | 592.70       | 180          | (1,460)      | 3,880         |               |
| 6月19日 | 587.00       | (1,140)      | (2,600)      | 2,740         | 1,260         |
| 6月20日 | 587.00       | 0            | (2,600)      | 4,000         |               |
| 6月23日 | 588.10       | 220          | (2,380)      | 4,220         |               |
| 6月24日 | 588.70       | 120          | (2,260)      | 4,340         |               |
| 6月25日 | 591.00       | 460          | (1,800)      | 4,800         |               |
| 6月26日 | 592.30       | 260          | (1,540)      | 5,060         |               |

れている。日々の取引終了後に投資家の利益（損失）が証拠金勘定に加え（減じ）されることにより、契約の価値はゼロに洗替えされているのである。先物契約は実質的には毎日手仕舞われて、日々新しい価格で再契約されることになる。

当初証拠金と維持証拠金の最低レベルは取引所によって定められている。

個々のブローカーは取引所で規定されるより多くの証拠金を顧客に要求する場合もあるが、少ない額を要求することはできない。証拠金のレベルは原資産の価格変動性から決定され、変動性が高ければレベルも高くなる。通常、維持証拠金は当初証拠金の75%程度とされている。

トレーダーの取引目的により証拠金のレベルが異なることもある。たとえば、先物契約の原資産である商品を産出する企業のような純粋なヘッジヤーは、スペキュレーターに比べて証拠金のレベルが低いことがある。その理由は、デフォルトのリスクが少ないと考えられているからである。日計り商い(day trade) やスプレッド取引(spread transaction)では、ヘッジ取引より証拠金のレベルがさらに低くなる場合がある。日計り商いとは、トレーダーがブローカーに対し、その日のうちにポジションを手仕舞うことを通知して行う取引である。スプレッド取引とは、トレーダーがある限月の買いポジションと同じ原資産に対する他の限月の売りポジションを同時に保有する取引である。

証拠金は売りポジションでも買いポジションでも同じ金額となっている。これは、売りポジションをとるのが買いポジションをとるのと同程度に容易であることを反映したものである。現物市場ではこの売りと買いの対称性は成り立っていない。現物市場で買いポジションをとるというのは、即時受渡しで資産を購入することであり、なんら問題なく行える。現物市場で売りポジションをとるというのは、保有していない資産の売却を意味している。これについては第5章で論じることにする。

### 清算機関と証拠金の清算

清算機関(clearinghouse)は先物契約の仲介者としての役割を担い、先物契約を結ぶ投資家の契約履行を保証している。清算機関には、取引所に清算基金の預託を義務づけられている多くの清算会員が参加している。清算会員でないブローカーは、清算会員を通じて決済を行う必要がある。清算機関の主な業務は、1日に発生した取引をすべて把握することで、それにより各清

算会員のネットのポジションが計算できる。

投資家がブローカーに証拠金勘定の維持を求められるのと同様に、ブローカーは清算会員に証拠金勘定の維持を求められ、清算会員は清算機関に証拠金勘定の維持を求められている。清算機関に対する証拠金は取引証拠金 (clearing margin) として知られている。投資家の場合と同様に、清算会員の証拠金勘定も1日の取引終了後に利益と損失の調整が行われる。清算会員の場合は、初期証拠金 (original margin) というものはあるが、維持証拠金というものはない。証拠金の残高は、初期証拠金額に先物契約の未決済残高を乗じた金額に等しくなるように維持されていくなくてはならない。このため、日中の取引や先物価格の変化に従って、清算会員は取引終了後に証拠金勘定に資金を追加しなければならない場合もある。逆に、余裕資金がある場合にはそれを引き出すことも可能である。また、清算会員でないブローカーは、清算会員に対し証拠金を積まなくてはならない。

取引証拠金の決定に際し、清算機関はグロス・ベースかネット・ベースのいずれかで未決済の先物契約数を計算する。グロス・ベース (gross basis) とは顧客の買いポジションの総計と売りポジションの総計を単に合計したもので、ネット・ベース (net basis) とは買いポジションと売りポジションを相殺して集計したものである。たとえば清算会員が2人の顧客を抱えている、1人は20契約の買いポジションを、もう1人は15契約の売りポジションを保有しているとする。このとき、グロス・ベースでの証拠金は契約数35に基づいて計算され、ネット・ベースでの証拠金は契約数5に基づいて計算されることになる。現在、ほとんどの取引所ではネット・ベースが用いられている。

## 信用リスク

このような証拠金の仕組みを取り入れている目的は、利益の出ているトレーダーに対して不払いが発生するリスクを除去することである。全般的にみれば証拠金システムは非常にうまく機能しており、これまで主要な取引所ではトレーダーの先物契約は常に履行されてきた。1987年10月19日にS&P

500株価指数が20%以上下落したとき、S&P500株価指数先物の買いポジションを保有していたトレーダーの証拠金がマイナスになり、先物市場が機能するかが試される事態となった。追加証拠金の差入れに応じられなかつたトレーダーはポジションを手仕舞わされたが、それでもまだブローカーに対して借金が残った。一部のトレーダーがそれを支払わなかつたため、顧客からの入金がなく、顧客の建玉に対する追加証拠金の差入れ請求に応じることができなくなり、破産するブローカーも出てきた。しかし、取引所は十分な基金を保有していたので、S&P500株価指数先物の売りポジションを保有していたトレーダー全員への支払は履行された。

### 店頭市場における担保契約

信用リスクは店頭市場に古くからある問題である。店頭市場には、契約当事者の一方がデフォルトを起こす可能性が常に存在する。そのため店頭市場では、信用リスクを減らす試みとして、取引所の証拠金制度を手本にした担保（collateralization）として知られる手法に関心が寄せられている。

店頭市場で相対契約を交わしている企業 A と企業 B を考えよう。両企業が契約の価値を毎日評価する担保契約を結んだとする。企業 A からみた契約の価値がある日からその翌日にかけて増加したならば、企業 B はその同額だけ追加担保の差入れを企業 A から要求される。同様に、企業 A からみた契約の価値が減少したときは、企業 A は同額の担保引出しを企業 B から要求される。

担保は店頭市場取引における信用リスクを大幅に削減する。これについては22.8節さらに議論する。担保契約は、1990年代にロングターム・キャピタル・マネジメント（LTCM）というヘッジファンドでも使われていた。LTCM は担保契約を利用して高いレバレッジを掛けた取引を行っていた。担保契約は信用リスクに対する防御にはなっていたが、ビジネス寸見2.2でみるように、高いレバレッジを掛けることは他のリスクに対するもろさを露呈させる結果になった。

## ビジネス寸見2.2 ロングターム・キャピタル・マネジメント (LTCM) の巨額損失

ロングターム・キャピタル・マネジメントは1990年代半ばに設立されたヘッジファンドで、取引した証券を常に担保に使っていた。そのヘッジファンドの投資戦略は、コンバージェンス・アービトラージとして知られるものだった。非常に単純化すると、それは次のようなものである。同じ企業の発行する同じ支払をもつ二つの債券XとYがあり、YよりXのほうが流動性が低い（すなわち、あまり活発に取引されていない）とする。市場では常に流動性にプレミアムがつくので、XはYよりも低い価格で取引されることになる。LTCMは債券Xを買い、債券Yを空売りして、二つの債券価格が将来のある時点でほとんど同じになることを予想して待つという戦略をとっていた。

金利が上昇したときには両方の債券ともほぼ同じだけ価格が下落すると LTCM は予想しており、債券 X の担保価値下落により必要となる追加担保は、債券 Y の価格下落により引き出せる担保とほぼ同額になると考えていた。同様に、金利が下落したときは両方の債券ともほぼ同じだけ価格が上昇すると予想しており、債券 X の担保価値上昇により引き出せる担保は、債券 Y の価格上昇により求められる追加担保とほぼ同額になると考えていた。したがって、担保契約を結べば大きな資金が必要になることはないと考えていた。

1998年8月に発生したロシアの債務不履行により、資本市場はいわゆる“質への逃避”へと走った。その結果、投資家は流動性の高い商品に通常より高い価格をつけ、LTCM がポートフォリオとして保有する流動性の高い商品と流動性の低い商品との価格差が劇的に広がることになった。LTCM が買っていた債券の価格は下落し、空売りしていた債券の価格は上昇した。そのため、両方の債券に対して追加担保が必要となった。LTCM は高いレバレッジをかけていたので、担保契約で要求さ

れる支払に応じられなくなった。その結果、ポジションを手仕舞わなければならなくなり、総計約40億ドルもの損失を出すことになった。LTCMがそこまでレバレッジを効かせていなければ、質への逃避を生き残り、流動性の高い債券の価格と流動性の低い債券の価格が近づくのを待つことができたであろう。

## 2.5 新聞の市況欄

多くの新聞に先物の価格表が掲載されている。表2.2は、2007年1月9日(火)付ウォール・ストリート・ジャーナルに掲載された商品先物の価格である。これらは前日(すなわち2007年1月8日(月))についての価格を表示している。指数先物、通貨先物、金利先物の価格についてはそれぞれ第3章、第5章、第6章に掲載してある。

ウォール・ストリート・ジャーナルには、比較的満期の短い先物に対する価格のみ掲載されている。ほとんどの商品先物では、掲載されている先物よりずっと長い満期の先物が取引されている。しかし満期が長くなるにつれ、それらの出来高は減少する傾向にある。

先物契約に対する原資産、取引の行われる取引所、取引単位、建値の方法は表2.2の各セクションの冒頭に記載されている。たとえば、最初の資産は銅で、COMEX(ニューヨーク・マーカンタイル取引所の一部門)で取引されている。その取引単位は25,000ポンド、建値は1ポンド当たりのセント表示である。取引の行われている限月は1列目に表示されている。

### 価 格

各行の最初の三つの数字は、それぞれ始値、1日の高値、1日の安値を表している。始値とは取引開始直後の取引値段のことである。2007年1月8日の2007年3月限銅先物の始値は1ポンド当たり253.50セントで、その日は247.00から258.95セントの間で取引が行われていた。

表2.2 商品先物市況（出典：2007年1月9日付ウォール・ストリート・ジャーナル）

各列は順に限月、始値、高値、安値、安値、清算値、前日比、建玉である。

## From platinum to orange juice: futures contracts

Commodity futures prices, including open interest, or the number of contracts outstanding. Nearby-month contracts are listed first. Most-active contracts are also listed, plus other notable months.

KEY TO EXCHANGES: CBOT: Chicago Board of Trade; CME: Chicago Mercantile Exchange; COMEX: Comex; KC: Kansas City Board of Trade; MPLS: Minneapolis Grain Exchange; NYBOT: New York Board of Trade; NYM: New York Mercantile Exchange, or Nymex

### Metal & Petroleum Futures

|  | Open    | High    | Low     | Contract | Settle  | Chg     | Open Interest |  |  |  |  |
|--|---------|---------|---------|----------|---------|---------|---------------|--|--|--|--|
| <b>Copper-High (CMO)-25,000 lbs.; cents per lb.</b>          |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 255.65  | 256.50  | 252.00  | 251.45   | -0.80   | 2,527   |               |  |  |  |  |
| March  | 253.50  | 258.95  | 247.00  | 252.00   | -0.70   | 48,809  |               |  |  |  |  |
| <b>Gold (CMO)-100 troy oz.; \$ per troy oz.</b>              |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 609.30  | 612.40  | 605.00  | 607.50   | 2.60    | 514     |               |  |  |  |  |
| Feb  | 616.10  | 617.30  | 611.90  | 615.40   | 2.50    | 179,246 |               |  |  |  |  |
| April  | 622.10  | 623.50  | 615.80  | 622.20   | 2.50    | 36,615  |               |  |  |  |  |
| June   | 634.80  | 635.00  | 633.50  | 632.70   | 2.50    | 19,438  |               |  |  |  |  |
| Oct  | 638.90  | 640.50  | 638.00  | 638.30   | 2.50    | 42,082  |               |  |  |  |  |
| <b>Platinum (NYM)-50 troy oz.; \$ per troy oz.</b>           |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 1114.00 | 1132.90 | 1111.50 | 1119.40  | 10.40   | 14      |               |  |  |  |  |
| April  | 1222.00 | 1242.5  | 1209.5  | 1224.0   | 14.90   | 8,043   |               |  |  |  |  |
| <b>Silver (COMEX)-5,000 troy oz.; cents per troy oz.</b>     |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 1225.0  | 1225.0  | 1225.0  | 1226.0   | 13.0    | 115     |               |  |  |  |  |
| March  | 1222.0  | 1242.5  | 1209.5  | 1234.0   | 13.0    | 60,566  |               |  |  |  |  |
| <b>Crude Oil, Light Sweet (NYM)-1,000 bbls.; \$ per bbl.</b> |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Feb  | 56.24   | 57.72   | 55.18   | 56.00    | -0.22   | 297,617 |               |  |  |  |  |
| March  | 57.56   | 58.85   | 56.38   | 57.35    | -0.03   | 180,021 |               |  |  |  |  |
| April  | 58.30   | 59.81   | 57.40   | 58.35    | 0.03    | 63,918  |               |  |  |  |  |
| June   | 60.20   | 61.33   | 59.08   | 60.05    | 0.19    | 78,744  |               |  |  |  |  |
| Dec  | 62.78   | 64.08   | 62.10   | 62.94    | 0.26    | 143,063 |               |  |  |  |  |
| Dec'08   | 65.25   | 65.25   | 63.53   | 64.18    | 0.33    | 70,370  |               |  |  |  |  |
| <b>Heating Oil No. 2 (NYM)-42,000 gal.; \$ per gal.</b>      |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Feb  | 1,580.0 | 1,602.0 | 1,547.5 | 1,557.1  | -0.087  | 84,979  |               |  |  |  |  |
| March  | 1,613.5 | 1,638.5 | 1,585.5 | 1,595.0  | -0.083  | 51,391  |               |  |  |  |  |
| <b>Gasoline-NY RBOB (NYM)-42,000 gal.; \$ per gal.</b>       |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Feb  | 1,507.2 | 1,518.5 | 1,493.0 | 1,446.5  | -0.0246 | 58,858  |               |  |  |  |  |
| March  | 1,534.5 | 1,563.4 | 1,502.0 | 1,516.6  | -0.0201 | 35,902  |               |  |  |  |  |
| <b>Natural Gas (NYM)-10,000 MMbtu.; \$ per MMbtu.</b>        |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Feb  | 6.370   | 6.560   | 6.325   | 6.378    | .194    | 78,114  |               |  |  |  |  |
| March  | 6.547   | 6.690   | 6.496   | 6.548    | .201    | 140,874 |               |  |  |  |  |
| April  | 6.600   | 6.768   | 6.580   | 6.637    | .190    | 103,520 |               |  |  |  |  |
| May  | 6.750   | 6.857   | 6.680   | 6.732    | .175    | 44,710  |               |  |  |  |  |
| Oct  | 7.300   | 7.350   | 7.190   | 7.237    | .150    | 39,416  |               |  |  |  |  |
| March'08   | 8.735   | 8.780   | 8.680   | 8.682    | .110    | 39,031  |               |  |  |  |  |
| <b>Agriculture Futures</b>                                   |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| <b>Corn (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.</b>                   |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| March  | 349.00  | 369.75  | 361.25  | 363.50   | -4.75   | 570,439 |               |  |  |  |  |
| Dec  | 365.00  | 367.00  | 359.50  | 364.75   | -.50    | 318,645 |               |  |  |  |  |
| <b>Ethanol (CBT)-29,000 gal.; \$ per gal.</b>                |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Feb  | 2.249   | 2.249   | 2.249   | 2.249    | -.011   | 56      |               |  |  |  |  |
| <b>Oats (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.</b>                   |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| March  | 263.00  | 263.00  | 260.00  | 264.75   | -1.00   | 8,412   |               |  |  |  |  |
| Dec  | 232.50  | 233.00  | 232.50  | 232.00   | ...     | 4,039   |               |  |  |  |  |
| <b>Soybeans (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.</b>               |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 664.50  | 668.25  | 662.00  | 668.00   | -.25    | 5,812   |               |  |  |  |  |
| March  | 682.75  | 684.00  | 674.50  | 677.25   | -4.25   | 218,149 |               |  |  |  |  |
| <b>Soybean Meal (CBT)-100 tons; \$ per ton.</b>              |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 190.00  | 191.80  | 189.60  | 190.40   | -.40    | 2,614   |               |  |  |  |  |
| March  | 195.70  | 196.70  | 194.10  | 195.10   | -.80    | 74,207  |               |  |  |  |  |
| <b>Soybean Oil (CBT)-50,000 lbs.; cents per lb.</b>          |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 28.18   | 28.18   | 27.97   | 28.32    | -.28    | 1,696   |               |  |  |  |  |
| March  | 28.80   | 28.88   | 28.34   | 28.49    | -.31    | 144,012 |               |  |  |  |  |
| <b>Rough Rice (CBT)-2,000 cwt.; cents per cwt.</b>           |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 1024.50 | 1038.00 | 1017.00 | 1035.00  | 14.00   | 248     |               |  |  |  |  |
| March  | 1048.00 | 1063.00 | 1042.00 | 1069.50  | 13.00   | 10,406  |               |  |  |  |  |
| <b>Wheat (CBT)-5,000 bu.; cents per bu.</b>                  |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| March  | 470.00  | 471.25  | 455.50  | 464.00   | -6.25   | 238,277 |               |  |  |  |  |
| July   | 477.25  | 478.75  | 465.00  | 473.50   | -3.50   | 83,574  |               |  |  |  |  |
| <b>Wheat (KCO)-5,000 bu.; cents per bu.</b>                  |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| March  | 481.25  | 481.50  | 475.00  | 479.00   | -2.25   | 60,413  |               |  |  |  |  |
| July   | 485.00  | 486.00  | 479.50  | 483.50   | -2.75   | 32,604  |               |  |  |  |  |
| <b>Wheat (MPLS)-5,000 bu.; cents per bu.</b>                 |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| March  | 487.25  | 487.25  | 478.00  | 482.25   | -4.75   | 22,412  |               |  |  |  |  |
| Dec  | 502.00  | 506.00  | 501.00  | 504.00   | -2.50   | 8,571   |               |  |  |  |  |
| <b>Cattle-Feeder (CME)-50,000 lbs.; cents per lb.</b>        |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 98.80   | 99.50   | 98.625  | 99.875   | .25     | 4,530   |               |  |  |  |  |
| March  | 97.750  | 98.500  | 97.500  | 97.850   | .200    | 14,509  |               |  |  |  |  |
| <b>Cattle-Live (CME)-40,000 lbs.; cents per lb.</b>          |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Feb  | 92.600  | 93.650  | 92.600  | 93.250   | .675    | 124,905 |               |  |  |  |  |
| April  | 94.300  | 94.975  | 94.100  | 94.450   | .325    | 71,613  |               |  |  |  |  |
| <b>Hogs-Lean (CME)-40,000 lbs.; cents per lb.</b>            |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Feb  | 60.400  | 60.900  | 60.000  | 60.300   | -.100   | 82,727  |               |  |  |  |  |
| April  | 64.250  | 64.725  | 63.750  | 63.950   | -.300   | 45,227  |               |  |  |  |  |
| <b>Coffee (CBOT)-37,500 lbs.; cents per lb.</b>              |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| March  | 120.25  | 120.90  | 119.20  | 120.10   | -.35    | 82,758  |               |  |  |  |  |
| May  | 123.25  | 123.80  | 122.00  | 123.10   | -.40    | 20,611  |               |  |  |  |  |
| <b>Sugar-World (NYBOT)-112,000 lbs.; cents per lb.</b>       |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| March  | 11.20   | 11.32   | 11.09   | 11.16    | .07     | 263,326 |               |  |  |  |  |
| May  | 11.23   | 11.32   | 11.14   | 11.21    | .10     | 90,874  |               |  |  |  |  |
| <b>Sugar-Domestic (NYBOT)-112,000 lbs.; cents per lb.</b>    |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| March  | 19.95   | 19.95   | 19.95   | 19.95    | -.04    | 3,468   |               |  |  |  |  |
| May  | 19.90   | 19.90   | 19.90   | 19.90    | -.01    | 2,592   |               |  |  |  |  |
| <b>Cotton (CBOT)-50,000 lbs.; cents per lb.</b>              |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| March  | 54.15   | 54.80   | 54.15   | 54.53    | .11     | 108,341 |               |  |  |  |  |
| May  | 55.10   | 55.55   | 55.10   | 55.38    | .27     | 24,645  |               |  |  |  |  |
| <b>Orange Juice (NYBOT)-15,000 lbs.; cents per lb.</b>       |         |         |         |          |         |         |               |  |  |  |  |
| Jan  | 201.95  | 203.40  | 200.00  | 201.95   | -.05    | 430     |               |  |  |  |  |
| March  | 196.90  | 197.25  | 195.50  | 195.50   | -.15    | 21,427  |               |  |  |  |  |

Source: Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc., © 2007 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

## 清算値

4番目の数値は清算値 (settlement price) で、日々の損益や証拠金額の算出に用いられる。通常これは1日の取引終了の直前に取引された価格として算出されたものである。5番目の数値は清算値の前日比で、2007年3月限銅先物の場合、2007年1月8日の清算値は252.80セントで前日に比べ0.70セント下落した。

2007年3月限銅先物1枚の買いポジションをもつ投資家の証拠金残高は、2007年1月8日に175.00ドル ( $=25,000 \times 0.70$ セント) 減少している。逆に1枚の売りポジションをもつ投資家の証拠金残高は175.00ドル増えている。

## 建玉

表2.2の最右列は、それぞれの取引の建玉 (open interest) を表している。これは未決済の先物契約総数である。建玉は買いポジションの合計、あるいは同じことであるが、売りポジションの合計である。2007年3月限銅先物の建玉は48,809契約となっている。2007年1月限の建玉はそれよりかなり少ない。これは、ほとんどのトレーダーがすでにポジションを手仕舞ったからである。

まれに出来高がその日の終わりの建玉より大きくなることがある。これは日計り商い数が非常に多かったことを意味している。

## 先物価格のパターン

先物価格には多くのパターンがみられる。表2.2では、金、原油、天然ガスはすべて満期が長くなるほど清算値が高くなっている。このような市場を順鞘市場 (normal market) という。表2.2のオレンジジュース先物の1月限と3月限の清算値は、それぞれ201.90セントと195.80セントになっている。この表にはないが、2007年1月8日の2007年5月限、2007年7月限、2007年9月限、2007年11月限のオレンジジュース先物の清算値はそれぞれ193.00, 190.50, 187.00, 181.00セントであった。したがって、2007年1月8日のオレンジジュース先物価格は満期の減少関数になっていた。このような市場を

crude

逆鞘市場 (inverted market) という。2007年1月8日の金先物とオレンジジュース先物の清算値を満期の関数として表したグラフを図2.2に示す。

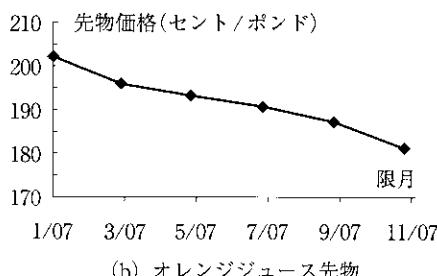
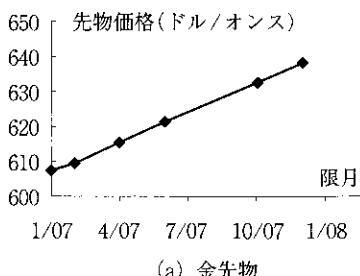
先物の価格によっては、順鞘市場と逆鞘市場との混合パターンを示すものもある。2007年1月8日の生牛先物がそのような例である。表2.2をみればわかるように、4月限の価格は2月限の価格より高い。しかし、表2.2にはないが、6月限の価格は4月限の価格より低くなっている。もっと先までみると、満期の関数として先物価格は減少を続けた後、いったんは増加に転じ、再び減少に転じている。

## 2.6 受渡し

本章の前半で述べたとおり、先物契約では原資産の受渡しが行われることはまれである。ほとんどの取引は満期前に手仕舞われる。しかし、最終的には現渡しの可能性があることから先物価格は決まってくるので、受渡しの手続を理解しておくことは重要である。

受渡しが行える期間は取引所が決めており、先物ごとに異なる。いつ受渡しを行うかは売りポジションの保有者（投資家Aとする）が決定する。投資家Aが受渡しを決めたとき、投資家Aのブローカーは取引所の清算機関に受渡意思通知書（notice of intention to deliver）を発行する。この通知書には受渡契約数が記載され、商品先物の場合には受渡場所や商品グレードも明記されている。その後、取引所は現受けする買手を選択する。

図2.2 2007年1月8日の満期に対する先物の清算値



投資家 A が先物契約を取引したときの相手方を投資家 B としよう。現受けする投資家が B であるとは限らないことに注意しよう。というのは、投資家 B は投資家 C との取引でポジションを手仕舞っているかもしれないし、投資家 C も別の投資家 D との取引でポジションを手仕舞っているかもしれないからである。取引所が採用する通常のルールは、最も古い買いポジションを保有する者に対して受渡意思通知書を割り当てるというものである。買いポジションを保有する者は受渡しの通知を必ず受け入れなければならないが、通知書が移転可能な場合には、短時間（通常30分）の間であれば、当該通知書を受け入れてくれる買いポジションをもつ別の投資家をみつけることも許されている。

商品先物の場合、倉庫証書を即日払い受け取るのが通常である。その際、受渡しを受けた側がいっさいの保管コストを負担する。家畜先物の場合は、餌や動物の世話に関するコストも含まれる（ビジネス寸見2.1参照）。また、金融先物の場合は受渡しは通常電信で行われる。すべての先物契約において、支払価格は直近の清算価格となっている。取引所によって定められている場合には、その価格はグレードや受渡しの場所などに応じて調整される。受渡意思通知書が発行されてから実際の受渡しが行われるまでの全手続には、一般に 2, 3 日かかる。

先物契約には三つの重要な日がある。第一通知日 (first notice day)、最終通知日 (last notice day)、そして最終取引日 (last trading day) である。第一通知日とは受渡意思通知書を取引所に提出できる最初の日である。最終通知日とは通知できる最後の日である。最終取引日は一般に最終通知日の数日前である。受渡しを受けるリスクを避けるためには、買いポジションをもつ投資家は第一通知日より前にポジションを手仕舞う必要がある。

## 現金決済

株価指数先物のようないくつかの金融先物契約では、原資産を受け渡すことが非常に不便かまたは不可能なため、決済は現金で行われる。たとえば S&P500 株価指数先物の場合には、原資産を受け渡すということは500銘柄

ものポートフォリオを受け渡すことを意味する。先物が現金で決済される場合には、すべての建玉はある決められた日に自動的に手仕舞われることになる。最終清算価格は、その日の原資産の始値または終値で決められている。たとえば CME の S&P500 株価指数先物の場合は、限月の第 3 金曜日に決済され、最終清算価格はその日の指数の始値となる。

## 2.7 トレーダーのタイプおよび注文の種類

取引を行うトレーダーには主に二つのタイプがある。コミッショナ・ブローカー (commission broker) とローカルズ (locals) である。コミッショナ・ブローカーは顧客の指示に従って取引を執行し、その手数料を徴求する。ローカルズは自己勘定で取引を行う。

ポジションを保有する個人は、ローカルズであれコミッショナ・ブローカーの顧客であれ、第 1 章で議論したとおり、ヘッジャー、スペキュレーター (投機家)，アービトラージャーに分類される。投機家はさらにスカルパー (scalper)，デイ・トレーダー (day trader)，ポジション・トレーダー (position trader) に分けられる。スカルパーとはきわめて短期間の相場を観察し、価格のわずかな変動で収益をあげようとする。通常彼らはほんの数分しかポジションをもたない。デイ・トレーダーは夜中に不利なニュースが流れるリスクをとらないように、その日のうちにポジションを手仕舞う。ポジション・トレーダーはもっと長い期間ポジションを保有する。彼らは市場の大きな変動から巨額な収益を生み出そうとしている。

### 注文の種類

ブローカーに出される最も単純な注文 (order) は成行注文 (market order) である。これは、市場におけるその時点での最良の価格で取引が執行される注文である。しかし、注文方法にはさまざまな種類がある。もっと一般に利用されている注文方法についてみてみよう。

指値注文 (limit order) はある特定の価格を指定する注文で、指定された

価格（指値）またはそれより有利な価格でのみ注文が執行される。したがって、指値30ドルの買い注文は30ドルまたはそれ以下で執行される。市場価格が指値に到達しないこともあるので、注文は必ず約定されるわけではない。

ストップ注文（stop order）またはストップ・ロス注文（stop-loss order）も、ある特定の価格を指定する注文である。それは、ビッドまたはオファー価格が指定された価格（ストップ価格）またはそれより不利な価格にいったん到達すると、その時点での最良な価格で執行される注文である。たとえば市場価格が35ドルのとき30ドルで売るストップ注文が出された場合、市場価格が30ドルまで下落したときに売り注文が執行される。ストップ注文は指定された価格が市場で取引された瞬間、実質的には成行注文と同じ注文になる。ストップ注文は自分に不利な方向に価格が動いたときにポジションを手仕舞う目的で通常使われ、相場変動によって生じる損失を限定することができる。

指値付ストップ注文（stop-limit order）はストップ注文と指値注文の組合せである。ストップ価格に等しいもしくはそれより不利な価格でビッドまたはオファーが出されたとき、その注文は指値注文に変わる。指値付ストップ注文ではストップ価格と指値の二つを指定しなければならない。いま市場価格が35ドルのとき、ストップ価格40ドル、指値41ドルでの買いの指値付ストップ注文が出されたとする。ビッドまたはオファー価格が40ドルになったとき、指値付ストップ注文は41ドルの指値注文になる。ストップ価格と指値が同じ場合には、この注文はストップ・アンド・リミット・オーダー（stop-and-limit order）と呼ばれることがある。

マーケット・イフ・タッチド・オーダー（market-if-touched (MIT) order）は指定された価格またはそれより有利な価格で取引が行われた後の、その時点での最良の価格で取引が執行される注文である。したがって MIT オーダーは、指定された価格で値がついたら、実質的には成行注文と同じになる。MIT オーダーはボード・オーダー（board order）としても知られている。先物の買いポジションを手仕舞うための注文を出そうとしている投資家がいるとしよう。ストップ注文は価格が望まない方向に動いたときに損失を

食い止めるための注文方法である。それに対して、MIT オーダーは価格が望む方向に動いたときに収益を確定させるための注文方法である。

ディスクレショナリー・オーダー (discretionary order) またはマーケット・ノット・ヘルド・オーダー (market-not-held order) は、よりよい価格での約定をもくろんで注文の執行タイミングをブローカーに一任する成行注文である。

注文の有効期間が指定されている場合もある。期間の指定がない場合には当日注文として、その日の取引終了時点で注文は失効する。時間指定当日注文 (time-of-day order) は、注文が執行される日中の時間が指定されている注文である。オープン・オーダー (open order) またはグッド・ティル・キャンセルド・オーダー (good-till-canceled order) とは、取引が執行されるまたはその先物契約が満期を迎えるまで有効な注文である。フィル・オア・キル・オーダー (fill-or-kill order) とは、その名のとおり即時に注文が執行されない場合には取消になる注文である。

## 2.8 取引の規制

米国の先物市場は、1974年に設立された米商品先物取引委員会 (CFTC: Commodity Futures Trading Commission, [www.cftc.gov](http://www.cftc.gov)) より規制を受けている。CFTC は先物取引所にライセンスを与えることや、先物取引の規制に関して責任を負っている。新規に先物契約を上場する場合や既存の先物契約の内容を変更する場合には、CFTC の承認が必要となる。この承認を受けるためには、その先物契約がなんらかの有益な経済目的を有している必要がある。これは通常、先物契約はスペキュレーターだけでなくヘッジャーのニーズに合ったものでなければならないということを意味している。

CFTC では公益にも注意を払っている。市場価格の公開や、未決済残高が一定のレベルを超えた先物トレーダーの残高報告が確実に実施されることにも責任を負っている。また CFTC は先物取引に関して公衆に対するサービスを提供する、あらゆる個人もしくは団体に対して免許を与え

る業務も行っている。これらの個人もしくは団体に対しては信用調査が行われ、最低限必要な資本額も定められている。一般から苦情が持ち込まれたときにはCFTCがこれに対処し、必要な場合には個人に対する懲罰処置も行う。また、取引所の規則に従わない会員に対して懲罰処置をとるよう取引所に勧告する権限を有する。

1982年に全米先物協会（NFA: National Futures Association, [www.nfa.futures.org](http://www.nfa.futures.org)）が設立され、CFTCの権限のいくつかが業界の自主規制に任せられるようになった。NFAは先物業界に携わる個人で組織される団体であり、その目的は不公正取引を防止し、先物市場が公益のために機能するようにすることにある。NFAの会員になるには試験に合格する必要がある。NFAはトレーディングを監視し、必要な場合に懲罰処置をとる権限をもっている。また、個人と会員との間の紛争を調停する効率的な仕組みも構築している。

米証券取引委員会（SEC: Securities and Exchange Commission, [www.sec.gov](http://www.sec.gov)）、米連邦準備制度理事会（FRB: Federal Reserve Board, [www.federalreserve.gov](http://www.federalreserve.gov)）、米財務省（U.S. Treasury Department, [www.treas.gov](http://www.treas.gov)）等の他の組織が先物取引に関して法律的権限に基づいてなんらかの指針を出すこともある。これは、先物取引が株式、米国短期国債、米国長期国債等の現物市場に与える影響を配慮してのものである。SECは、株価指数や債券指数の新規先物契約の承認事項に対して事実上の拒否権をもってはいるものの、すべての先物やオプションに対する基本的な権限はCFTCにある。

## 不公平取引

通常、先物市場は効率的に機能し公益に資している。しかし、時折不公平な取引が明るみに出る。典型的な不公平取引の一つは、投資家グループによる「買占め」（corner the market）<sup>(注2)</sup>である。巨大な先物買いポジションを保持する一方で、原資産商品の供給をもコントロールしようとするものである。先物の満期日が近づいたとき、未決済の先物建玉残が受渡可能な原資産数を上回ってしまうように、投資家グループはポジションを手仕舞わないで

おく。そうすると、売りポジションをもつ投資家は期日での受渡しが困難と判断して、なりふりかまわず先物を買い戻してポジションを手仕舞わざるをえなくなる。その結果、先物価格と現物価格の両方が大きく上昇することになる。規制当局はこうした不公正取引に対抗するために、証拠金率を引き上げたり、厳しいポジション制限を設けたり、スペキュレーターの未決済ポジションを増加させるような取引を禁じたり、あるいは市場参加者にポジションを手仕舞うように求めるなどの手段を講じる。

他の典型的な不公正取引に、立会場のトレーダーを巻き込んで行われるものがある。例として、FBIがCMEとCBOTでの取引を2年間にわたり内偵した後に、1989年に公表したものがある。調査は大きな農業団体の抗議を発端に始められたもので、罪状は顧客からの手数料のとりすぎ、売買益の一部しか投資家に支払っていなかった、トレーダーが顧客の注文情報をもとに事前に売買を行った（いわゆるフロントランニング）などである。

## 2.9 会計処理と税金

先物契約の会計処理や税金の取扱いの詳細は、本書の範囲を超えるため扱わない。詳細に知りたいというトレーダーの方は、専門家に助言を求めていただきたい。ここでは一般的な知識を紹介するにとどめる。

### 会計処理

会計基準では、ヘッジ目的でない先物契約の損益認識は、発生基準で行うことが求められている。先物がヘッジ目的で用いられている場合には、その会計上の損益認識はヘッジ対象の損益認識期間と同一期間で行われるのが一般的である。後者の会計処理はヘッジ会計と呼ばれている。

---

(注2) このような取引の具体例としてよく知られているものに、1979年から1980年の間にハント兄弟が行った銀の買占めがある。1979年半ばから1980年の初頭にかけて、彼らの売買により、銀先物価格は1オンス当たり9ドルから50ドルへと急騰してしまったのである。

12月決算の企業を考える。その企業が2007年9月に2008年3月限トウモロコシ先物を買い付けて、2008年2月末にそのポジションを手仕舞うとしよう。買付け時の先物価格が1ブッシュル当たり250セント、2007年末に270セント、手仕舞い時に280セントであったと仮定する。取引単位は5,000ブッシュルである。この取引がヘッジに利用されていないならば、会計上認識される利益額は2007年度に

$$5,000 \times (2.70 - 2.50) \text{ ドル} = 1,000 \text{ ドル}$$

2008年度に

$$5,000 \times (2.80 - 2.70) \text{ ドル} = 500 \text{ ドル}$$

となる。その企業が2008年2月に購入するトウモロコシ5,000ブッシュルをヘッジする目的で先物契約を買い付けていた場合にはヘッジ会計 (hedge accounting) が利用でき、利益全体の1,500ドルが2008年度の利益として計上される。

このヘッジ損益に関する会計処理は理にかなったものである。企業が2008年2月に行うトウモロコシ5,000ブッシュルの購入をヘッジしているのであれば、先物契約の購入はトウモロコシの購入価格を1ブッシュル当たり250セント付近に固定することと同じである。ヘッジ会計は、その代金が支払われるのは2008年度であるということを反映したものである。

1998年6月に米国財務会計基準審議会 (FASB : Financial Accounting Standards Board) は FASB 基準書第133号 (FAS 133) でデリバティブ商品とヘッジ操作に関する会計指針を公表した。この FAS 133 は先物、フォワード、スワップ、オプションを含むすべてのデリバティブに適用され、すべてのデリバティブを公正市場価格でバランスシートに記載する(注3)などのいっそうの情報開示が求められることとなった。また、FAS 133 はヘッジ会計を利用する際の企業の裁量を少なくした。すなわち、ヘッジ会計を利用する場合にはヘッジ取引がエクスポージャーをかなり効果的に相殺している必要があり、そのことを3カ月ごとに検証しなければならなくなつた。同様の

---

(注3) 以前はオフバランスシート取引であるということが、デリバティブ取引が好まれる理由となることもあった。

基準が国際会計基準書（IAS）第39号として国際会計基準審議会（International Accounting Standards Board）から出されている。

## 税 金

米国における課税原則には二つのポイントがある。一つは課税対象の種類であり、もう一つは損益認識のタイミングである。損益はキャピタルゲイン／ロスと通常所得に分類される。

法人の場合は、キャピタルゲインは通常所得と同じ税率で課税され、キャピタルロスの損益通算に関して制限が設けられている。キャピタルロスの損益通算はキャピタルゲインの範囲までとされ、キャピタルロスについては3年間の繰戻し、または5年間の繰延べが認められている。一方、個人の場合は、短期キャピタルゲインは通常所得と同じ税率で課税されるが、長期キャピタルゲインは最高税率15%のキャピタルゲイン税が課税される（長期キャピタルゲインは1年超保有する資本資産の譲渡益であり、短期キャピタルゲインは保有期間が1年以内の資本資産の譲渡益である）。また個人の場合は、キャピタルロスの控除はキャピタルゲインと通常所得の合計で3,000ドルまでとされ、繰延べは無期限で認められている。

一般的に、先物のポジションは課税年度の最終日に手仕舞ったものとして取り扱われる。個人の場合は、発生したキャピタルゲイン／ロスはその保有期間にかかわらず、60%が長期、40%が短期として扱われる。これは“60/40”ルールと呼ばれている。また、個人は60/40ルールのもとで発生したネット損失に関して、前3年間における課税所得から控除する繰戻しを選択することもできる。

ヘッジ取引については本ルールの適用外となる。税法上のヘッジ取引の定義は会計上のそれとは異なる。税務当局は、ヘッジ取引を主に次のいずれかの理由によってビジネス上の通常行為の一環として行われた取引と規定している。

1. 本業で保有もしくは保有予定の資産の価格変動もしくは為替の変動によるリスクを避けるためヘッジが行われるとき。

2. 借入れに関して、価格や金利、為替の変動リスクを避けるためにヘッジが行われるとき。

ヘッジ取引は取引実行日にヘッジ取引として仕訳されなければならず、ヘッジ対象の資産は35日以内にヘッジ対象として仕訳されなければならない。ヘッジ取引から発生する損益は通常所得として取り扱われる。一般的に、ヘッジ取引の損益認識時期はヘッジ対象の損益認識時期と同時期となる。

## 2.10 フォワード契約と先物契約との違い

フォワード契約と先物契約の主な違いを表2.3にまとめた。両契約とも、将来のある時点においてあらかじめ定めた価格で資産を売買する契約である。フォワード契約は店頭市場での取引であり、標準的な契約量や受渡方法は特に決まってない。通常、受渡日が1日だけ指定され、満期になるまで契約は保有され、受渡日に決済される。一方、先物契約は取引所で取引される標準的な契約で、受渡しは期間で指定される。また、先物契約は日々値洗いされ、満期前に手仕舞われるケースが多い。

### フォワード契約と先物契約から得られる収益

いま、英ポンドの90日物為替フォワード契約のレートが1.9000で、90日後

表2.3 フォワード契約と先物契約の比較

| フォワード               | 先 物             |
|---------------------|-----------------|
| 相対で取引される            | 取引所で取引される       |
| 取引は標準化されていない        | 取引は標準化されている     |
| 通常、受渡日が1日だけ指定される    | 受渡しの期間が指定される    |
| 契約満期日に決済            | 日々値洗い           |
| 通常、現渡しまたは最後に現金決済される | 契約は満期前に通常手仕舞われる |
| 信用リスクがある            | 実質的に信用リスクがない    |

受渡しの先物価格も同じレートとしよう。この二つの契約から生じる損益の違いはなんであろうか。

フォワード契約では満期時点に総損益が実現するが、先物契約は日々値洗いされるので損益は日々実現する。いま、投資家 A が満期90日のフォワード契約で100万英ポンドを買い持ち、投資家 B が満期90日の先物契約で100万英ポンドを買持ちにしているとする（先物契約の取引単位は62,500英ポンドなので、投資家 B は先物契約を16単位購入する必要がある）。90日後に為替の直物レートが2.1000となったとすれば、投資家 A は90日後に200,000ドルの利益を計上する。投資家 B も同じ利益を計上するが、その利益は90日間にばらけて計上される。つまり、ある日には投資家 B は損を計上し、別の日では益を計上するといった具合である。しかし、合計では損失は利益と相殺され、90日間では200,000ドルの利益となる。

### 外国為替の建値方法

フォワード契約と先物契約はともに外国為替市場で活発に取引されているが、二つの市場において建値の方法が異なることもある。米ドルが入る外国為替に対する先物価格は常に外国通貨1単位当たりの米ドル額、または外国通貨1単位当たりのセント額で建値される。一方、フォワード価格は常に直物価格と同じ建値方法である。すなわち、英ポンド、ユーロ、豪ドル、ニュージーランドドルのフォワード価格は外国通貨1単位当たりの米ドル額で建値され、先物価格と直接比較できるが、その他主要通貨のフォワード価格は米ドル（USD）1単位当たりの外国通貨額で建値される。たとえばカナダドル（CAD）の場合、0.9500 USD/CAD の先物価格には、1.0526 CAD/USD ( $1.0526 = 1/0.9500$ ) のフォワード価格が対応している。

## 要 約

実際に取引されているほとんどの先物契約では現渡しは行われず、受渡期日前に手仕舞われている。しかし、先物価格を決めているのは現渡しの可能性があることである。個々の先物契約に対して受渡可能期間が設けられていて、受渡しの手続も詳細に定められている。株価指数などの先物契約は現渡しではなく、現金で決済される。

先物契約の詳細を決めるることは先物取引所の重要な役割である。というのは、先物の売り方と買い方の双方に対し、受渡可能資産は何で、どこで受渡しが行われるか、いつ受渡しが行われるかについて周知しておく必要があるからである。また、売買時間、価格の呈示方法、値幅制限等についても知っておくことが必要である。新しい先物契約の導入は米商品先物取引委員会(CFTC)によって事前承認を得る必要がある。

証拠金制度は先物市場における重要な仕組みである。投資家はブローカーに対して証拠金を維持しなければならない。証拠金勘定は損益を反映して日々調整され、相場が不利に動いたときには、ブローカーから証拠金の追加差入れを要求されることもある。ブローカーは清算機関の清算会員であるか、そうでない場合は清算会員に証拠金を差し入れる必要がある。さらに、各清算会員は取引所の清算機関に対し取引証拠金を差し入れており、その清算会員が責任をもつ取引に対して損益を反映した証拠金勘定の調整が日々行われる。

取引所は価格情報を機械的に収集し、秒単位で世界中の投資家に伝達している。また、ウォール・ストリート・ジャーナル等の多くの日刊新聞には前日の売買概況が掲載されている。

フォワード契約は先物契約と多くの点で異なる。フォワード契約は二者間の相対取引であり、先物契約は取引所取引である。フォワード契約では一般に受渡日が1日だけ指定されるが、先物契約では受渡期間が指定されることが多い。フォワード契約は取引所取引ではないため、契約を標準化する必要はない。また、フォワード契約は通常満期前に決済されないため、ほとんど

の取引では満期時に原資産が受け渡されるか、その時点で現金決済される。

以下の章では、フォワード契約と先物契約がどのようにヘッジに利用されているかを詳細に論じるとともに、フォワード価格や先物価格がどのように決定されるかをみていく。

## 参考文献

- Gastineau, G.L., D.J. Smith, and R. Todd. *Risk Management, Derivatives, and Financial Analysis under SFAS No. 133*. The Research Foundation of AIMR and Blackwell Series in Finance, 2001.
- Jones, F.J., and R.J. Teweles. In : *The Futures Game*, edited by B. Warwick, 3rd edn. New York : McGraw-Hill, 1998.
- Jorion, P. "Risk Management Lessons from Long-Term Capital Management," *European Financial Management*, 6, 3 (September 2000) : 277-300.
- Kawaller, I.G., and P.D. Koch. "Meeting the Highly Effective Expectation Criterion for Hedge Accounting," *Journal of Derivatives*, 7, 4 (Summer 2000) : 79-87.
- Lowenstein, R. *When Genius Failed : The Rise and Fall of Long-Term Capital Management*. New York : Random House, 2000.

## 章末問題

**2.1** 建玉と出来高の違いは何か。

**2.2** ローカルズとコミッショナ・ブローカーの違いは何か。

**2.3** ニューヨーク商品取引所で、銀先物 7月限を 1 オンス当たり 10.20 ドルで売り付けている。取引単位は 5,000 オンス、当初証拠金が 4,000 ドル、維持証拠金は 3,000 ドルであるとする。先物価格がいくらになる

- と追加証拠金が必要となるか。また、追加証拠金を差し入れなかつた場合にはどうなるか。
- 2.4** 2009年9月に2010年5月限原油先物を1単位買い付け、2010年3月にそのポジションを手仕舞うものとする。買付け時の先物価格が1バレル当り68.30ドル、手仕舞い時の先物価格が70.50ドル、2009年12月末の先物価格が69.10ドル、取引単位は1,000バレルとする。この取引から発生する総収益はいくらか。また、それはいつ実現するか。さらに、(a)ヘッジャーの場合、(b)スペキュレーターの場合について税金はどのようになるか。ただし、12月31日を年度末とする。
- 2.5** 2ドルで売るストップ注文とは何か。それはどういうときに利用されるか。また、2ドルで売る指値注文とは何か。それはどういうときに利用されるか。
- 2.6** 清算機関により管理される証拠金とプローカーにより管理される証拠金との違いは何か。
- 2.7** 通貨先物市場、為替直物市場および為替フォワード市場における建値方法の違いは何か。
- 2.8** 先物契約の売手がもつ、受渡しを行う原資産のグレード、受渡場所、受渡日に関する選択権は、先物価格を高くするか、それとも低くするか。その理由も答えよ。
- 2.9** 新しい種類の先物契約を新設する場合に、最も重要な要素は何か。
- 2.10** デフォルト・リスクから投資家を保護するのに証拠金がどのように機能しているか述べよ。
- 2.11** あるトレーダーが、オレンジジュース先物7月限を2単位購入する。この先物契約の取引単位は15,000ポンドである。現在の先物価格が1ポンド当り160セント、当初証拠金が1契約当り6,000ドル、維持証拠金が1契約当り4,500ドルとした場合、先物価格がいくら動くと追加証拠金が必要となるか。また、証拠金勘定から2,000ドル引き出すことが可能なのは、どのような場合か。
- 2.12** 受渡期間中に商品の先物価格が現物価格よりも高いならば、裁定機

会があることを示せ。逆に低い場合はどうか。

- 2.13** マーケット・イフ・タッチド・オーダーとストップ注文との違いを説明せよ。
- 2.14** 指値20.10ドル、ストップ価格20.30ドルの売りの指値付ストップ注文とは何か。
- 2.15** ある日の取引終了後、清算会員が100契約の買いポジションを保有しており、清算価格が1契約当たり50,000ドルだったとする。当初証拠金は1契約当たり2,000ドルである。翌営業日にこの清算会員の清算する買いポジションが20契約追加され、この追加分の価格は1契約当たり51,000ドルだったとする。この日の清算価格が50,200ドルの場合、この清算会員は清算機関に対しいくらの証拠金を積み増す必要があるか。
- 2.16** 2009年の7月1日に、ある日本企業が2010年1月1日に100万ドルを購入するフォワード契約を結び、その後2009年9月1日に、2010年1月1日に100万ドルを売却するフォワード契約を結んだとする。この取引から生じる損益（円）を2009年7月1日と2009年9月1日の為替フォワードレートの関数として表せ。
- 2.17** 45日後に受渡しが行われるスイスフランのフォワード価格が1.2500で表示されている。一方、45日後に受渡しされる先物価格は0.7980である。この二つの価格を説明せよ。スイスフランを売却する投資家にとってどちらが有利であるか。
- 2.18** いま、あなたがブローカーに電話をして食用豚肉先物7月限1単位の売却を注文したとする。その後に起こることを述べよ。
- 2.19** 「先物市場における投機取引は、まさにギャンブル行為である。スペキュレーターが先物取引所で取引するのを許すのは、公益に反する」。このような見方をどのように考えるか。
- 2.20** 表2.2のなかで、先物の建玉残が最も多い商品は何か。
- 2.21** 原資産の品質定義が不完全な状態で取引所が先物取引を開始したら、どのような事態が発生するか。

- 2.22** 「取引所の立会場で先物契約が1単位取引されると、建玉が1単位増加することもあるれば、変化がないこともあるし、1単位減少することもある」。これはどういうことか説明せよ。
- 2.23** 2009年10月24日に2010年4月限生牛先物を1単位売り付け、2010年1月21日にそのポジションを手仕舞ったとする。売付け時の先物価格は1ポンド当たり91.20セント、手仕舞い時の価格は88.30セント、2009年12月末の価格は88.80セントとする。取引単位が生牛40,000ポンドの場合、総収益はいくらになるか。また、その会社が(a)ヘッジャーの場合、(b)スペキュレーターの場合で税金はどのようになるか。ただし、12月31日を年度末とする。
- 2.24** ある畜牛業者は、3カ月後に生牛120,000ポンドを売ろうと考えている。CMEの生牛先物の取引単位は生牛40,000ポンドである。この畜牛業者はこの先物を使ってどのようにヘッジを行うことができるか。畜牛業者の観点からみたヘッジのメリット、デメリットは何か。
- 2.25** 2008年7月にある鉱山会社が小規模な金鉱を発見したとしよう。採掘できるまでに6カ月、それから継続的に1年程度採掘できるものとする。金の先物契約はニューヨーク商品取引所で取引されており、限月は2008年8月限から2009年12月限まで2カ月間隔で上場されている。また、取引単位は100オンスである。この鉱山会社は先物市場を使ってどのようにヘッジを行うことができるか議論せよ。

## 宿題

- 2.26** ある企業が、1ブッシュル当たり450セントで5,000ブッシュルの小麦を売却するという先物取引を行う。当初証拠金が3,000ドルで維持証拠金が2,000ドルとすると、先物価格がいくら動くと追加証拠金が必要になるか。また、証拠金勘定から1,500ドル引き出すことが可能な

のはどのような場合か。

- 2.27 原油の保管コストをゼロ、借入・貸出金利を年率 5 %とする。2007 年 1 月 8 日の原油先物市場において2007年 6 月限と2007年12月限を用いてどのような収益をあげることができるか。表2.2を使用せよ。
- 2.28 ある資産を受渡価格  $K$  で購入するフォワード契約と、その資産に対する同じ受渡日の行使価格  $K$  のプット・オプションの買いとを合わせたポジションは、どのようなポジションと等価か。
- 2.29 著者の Web ページ ([www.rotman.utoronto.ca/~hull/data](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/data)) にアクセスすれば原油先物と金先物の日次終値を取得することができる (両先物契約とも NYMEX で取引されている)。そのデータをダウンロードして、以下の問いに答えよ。
- (a) 維持証拠金額ぎりぎりの証拠金が 2 日後にマイナスになる確率が 1 %になるような維持証拠金のレベルを原油と金について求めよ。0.1%のときはどうか。日々の価格変化は平均ゼロの正規分布に従うものとして求めよ。また、NYMEX がこのような計算に関心をもつ理由を説明せよ。
- (b) データでカバーされている期間の初めに原油先物を 1 単位購入し、データでカバーされている期間の終わりまでそのポジションを保有し続ける投資家を考えよう。当初証拠金に対する超過分は引き出されるとし、維持証拠金には(a)の 1 %リスクで求めた値を用い、維持証拠金は当初証拠金の 75 %になるように設定されているとする。マージンコールの回数と証拠金勘定がマイナスになる回数を計算せよ。証拠金勘定がマイナスになった場合には、追加証拠金は常に差し入れられたとして計算せよ。さらに、金先物を 1 単位売却した場合についても同様の計算をせよ。

## 第3章

# 先物を使ったヘッジ戦略

先物市場の多くの参加者はヘッジャーであり、彼らの目的は、先物市場を用いて自分たちが直面する特定のリスクを軽減することである。このリスクは原油価格、為替、株式、またはその他の要因にかかわるものである。完全ヘッジ（perfect hedge）とは、そうしたリスクを完全に除去するヘッジであるが、完全ヘッジが行えるのはまれである。したがって、先物契約を使ったヘッジの研究は、ほとんどの場合、いかにヘッジを完全に近いものにできるかといったものになる。

本章では、ヘッジ手法に関連する多くの一般的な問題を取り上げ、先物契約の売りポジションが適切なのはどのようなときか？ 先物契約の買いポジションが適切なのはどのようなときか？ どの先物契約を利用するべきか？ リスクを軽減するための最適な先物契約数はいくらか？ 等の検討を行う。ここでは、ヘッジ・アンド・フォゲット（hedge-and-forget）と呼ばれる戦

略のみに着目し、いったんヘッジを行えば、その後のヘッジの調整はないものと仮定する。この場合、ヘッジャーは単にヘッジの初期時点で先物のヘッジポジションをつくり、ヘッジの最終時点でそれを手仕舞うのみである。第17章ではダイナミック・ヘッジ戦略を検討する。そこではヘッジが常にモニタリングされ、頻繁にヘッジポジションが調整される。

本章では、最初は先物契約をフォワード契約として扱う（すなわち、日々の値洗いを無視することにする）。その後で、先物契約とフォワード契約との違いを考慮する、テーリング（tailing）として知られる調整について説明する。

### 3.1 基本原理

個人または企業があるリスクのヘッジに先物市場を利用する目的は、一般に、先物のポジションをとることで、極力そのリスクをなくすことにある。ある企業が、今後3カ月で商品価格が1セント上昇すれば10,000ドルの利益を得て、1セント下落すれば10,000ドルの損失を被るとする。ヘッジするためには、企業の財務担当者はこのリスクを相殺できる先物契約の売りポジションを作成すればよい。先物契約のポジションからは、今後3カ月で商品価格が1セント上昇すれば10,000ドルの損失を被り、1セント下落すれば10,000ドルの利益が得られる。すなわち、商品価格が下落すれば、先物契約の利益によって企業活動から発生する損失をカバーし、商品価格が上昇すれば、先物契約の損失は企業収益によってカバーされる。

#### 売りヘッジ

売りヘッジ（short hedge）とは、先に述べたように、先物契約の売りポジションによるヘッジである。売りヘッジは、ヘッジャーがすでに資産を所有し、将来のある時点でそれを売却する予定がある場合に適した戦略である。たとえば、養豚業者が2カ月後に地元の市場で豚を売却する場合に、売りヘッジに豚の先物契約が利用されることがある。また、売りヘッジは現時点

で資産を所有していないなくても、将来のある時点で所有することがわかっている場合にも利用できる。たとえば、ある米国の輸出業者が3カ月後にユーロを受け取ることがわかっており、米ドルに対してユーロの価値が上昇すれば利益が発生し、ユーロの価値が下落すれば損失が発生するとする。先物契約の売りポジションをとれば、ユーロが上昇すれば損失が発生し、ユーロが下落すれば利益が発生する。それによって、輸出業者のリスクは相殺できる。

具体的な例を使って、ある特定の状況における売りヘッジの操作を説明しよう。現在を5月15日とし、原油精製業者が原油100万バレルの売却契約について交渉しており、契約価格は8月15日の市場価格を適用することになったとする。そうすると、原油精製業者は、3カ月後に原油価格が1セント上昇すれば10,000ドルの利益が発生し、1セント下落すれば10,000ドルの損失が発生するポジションをもつことになる。いま、5月15日の現物価格が1バレル当たり60ドル、NYMEXの8月限原油先物価格が1バレル当たり59ドルとする。NYMEXの原油先物の取引単位は1,000バレルなので、この企業は1,000枚の8月限原油先物を売り付けることによって、抱えるエクスポートジャヤーをヘッジすることができる。原油精製業者が8月15日にポジションを手仕舞うならば、この戦略によって1バレル当たり59ドル近辺で価格を固定化できる。

8月15日の現物価格が1バレル当たり55ドルになったとして、この例で何が起ころかを見てみよう。原油精製業者は、原油の売却契約によって5,500万ドルを受け取る。一方、8月は先物の受渡月であるため、8月15日の先物価格はその日の現物価格55ドルに非常に近いものになる。したがって、この企業は先物契約から1バレル当たりおよそ

$$59 - 55 = 4 \text{ ドル}$$

の利益、すなわち先物の売りポジションから総額400万ドルの利益を得る。したがって、先物契約とともに売却契約を合わせた実現金額は、1バレル当たりおよそ59ドル、すなわち総額で5,900万ドルとなる。

今度は、8月15日の原油価格が1バレル当たり65ドルになったとしよう。そのとき企業は現物の売却に対して65ドルを受け取り、先物契約による損失は

1 パレル当りおよそ

$$65 - 59 = 6 \text{ ドル}$$

になる。したがって、この場合も総実現額はおよそ5,900万ドルである。いずれの場合でも、最終的な企業の売却額はおよそ5,900万ドルとなる。

### 買いヘッジ

先物契約の買いポジションによるヘッジは、買いヘッジ (long hedge) として知られる。買いヘッジは、企業が将来のある時点である資産を購入する必要があり、現時点での価格を固定化したい場合に適した戦略である。

現在を1月15日とし、銅精錬業者がある契約を履行するために、5月15日に100,000ポンドの銅を必要としている。銅の現物価格は1ポンド当たり340セント、5月限先物価格は1ポンド当たり320セントである。精錬業者はNYMEXのCOMEX部門に上場されている5月限先物4枚の買いポジションをとり、5月15日にそのポジションを手仕舞うことで、抱えるエクスポートヤーをヘッジすることができる。先物の取引単位は銅25,000ポンドである。この戦略は、必要とする銅の価格を1ポンド当たり320セント付近に固定化する効果をもつ。

5月15日の銅の現物価格が1ポンド当たり325セントになったとしよう。5月は先物契約の受渡月なので、先物価格はその水準に非常に近いものになる。したがって、先物契約による利益はおよそ

$$100,000 \times (3.25 - 3.20) = 5,000 \text{ ドル}$$

となる。また、銅に対しては $100,000 \times 3.25 = 325,000$ ドルの支払が発生するので、総コストはおよそ $325,000 - 5,000 = 320,000$ ドルとなる。今度は、5月15日に先物価格が1ポンド当たり305セントになったとしよう。そのとき、精錬業者は先物契約からおよそ

$$100,000 \times (3.20 - 3.05) = 15,000 \text{ ドル}$$

の損失を被る。一方、銅に対しては $100,000 \times 3.05 = 305,000$ ドルの支払が発生するので、この場合も総コストはおよそ320,000ドル、すなわち1ポンド当たり320セントとなる。

この企業にとって、1月15日に現物市場で銅を購入するよりも、先物契約を利用したほうがよかつたことになる。前者の場合、1ポンド当たり320セントのかわりに340セント支払うことになり、さらに金利コストと保管コストの両方も必要となる。通常の銅取引を行っている企業にとって、この不利益は銅を保有しているという利便性(注1)によって相殺される。しかし、5月15日まで銅を必要としない企業にとっては、先物契約を利用する方法が好まれるであろう。

買いヘッジは、既存の売りポジションを管理する目的にも利用できる。ある株式を空売りしている投資家を考えよう（空売りについては5.2節で議論する）。投資家が直面するリスクのある部分は、株式市場全体のパフォーマンスに関連する。その部分のリスクは、株式指数先物の買いポジションを使って、取らないようにすることが可能である。こうしたヘッジ戦略については、本章の後半で論じる。

ところで、これまでみてきた例では、先物ポジションは受渡月に手仕舞われるものと仮定してきた。受渡しの発生を許容しても、基本的にはヘッジは同様の効果をもつ。しかし、現受け・現渡しにはコストがかかり、利便性がない。そのため、ヘッジャーは受渡月まで先物契約を保有したとしても、受渡しは通常行わない。後で論じるが、買いポジションを保有するヘッジャーは、受渡期間より前にポジションを手仕舞うことで、受渡しの発生を避けるのが一般的である。

また、これまで二つの例では、日々の値洗いはないものとして扱った。実際には、日々の値洗いがヘッジのパフォーマンスにわずかながら影響を与える。第2章で説明したように、先物契約からの受払いは満期一括で発生するのではなく、ヘッジの全期間にわたって日々実現されるからである。

---

(注1) コンビニエンス・イールドについての説明は5.11節を参照。

### 3.2 ヘッジに対する賛否両論

ヘッジに対する賛成派の意見は、いうまでもないくらい自明である。ほとんどの企業は製造業や小売業、卸売業、サービス産業で業務を営んでおり、金利や為替、商品価格のような変数を予測する特別なスキルや専門的知識はもっていない。したがって、企業活動から生じるこうした変数からのリスクをヘッジすることは、企業にとって理にかなった行動である。ヘッジの結果、企業は自らのもつ特別なスキルや専門的知識を生かせる本業に集中でき、購入しようとしている商品の価格急騰のような不愉快な不測の事態を回避できる。

しかし、実際には、多くのリスクはヘッジされていない。以下、その理由のいくつかを調べてみる。

#### ヘッジと株式保有者

ときどき主張される意見の一つは、株主自身が望むならば、自らヘッジを行えるというものである。株主にとっては企業がヘッジを行う必要はない。しかし、この説には依然として疑問が残る。そこには、株主が企業の直面するリスクについての情報を、その企業の経営者と同じ程度もっているという仮定があるからだ。ほとんどの場合において、これは正しくない。また、この主張は手数料や取引コストを無視している。大規模な取引は小規模な取引よりも単位当たりのヘッジコストがかからないため、個人株主よりも企業によるヘッジのほうがコストは割安であろう。実際、先物の取引単位は大きすぎて、個人株主には先物はヘッジに使えないことが多い。

一方、株主が企業よりも容易に実行できることは、リスクの分散である。うまく分散させたポートフォリオを保有する株主は、企業が直面する多くのリスクの影響を受けにくい。リスク分散する投資家は、たとえば、銅を利用する企業の株式保有に加え、銅の精錬業者の株式をも保有すれば、銅の価格変化に対する全体のエクスポージャーを小さくすることができる。企業がリスク分散する投資家の株主利益を最優先して企業活動を行うならば、企業に

よるヘッジは多くの状況において不必要であると主張できるかもしれない。しかし、この種の主張に企業経営者が実際どの程度影響を受けるかには疑問が残る。

### ヘッジと競争相手

ある産業においてヘッジが一般的でない場合、他の企業と異なる行動をとって1社のみヘッジを行うのはあまり意味をなさない。その産業での商品やサービスの価格に原材料、金利、為替レートなどのコストは転嫁できることを前提にして、その産業での競争圧力は働いているかもしれない。その場合、ヘッジをしない企業は概して価格に連動した固定マージンを期待できるが、ヘッジを行えばマージンは逆に変動してしまう。

例を使って説明しよう。金宝飾の製造業者、SafeandSure社とTakeaChance社を考えよう。TakeaChance社も含めて、ほとんどの同業者は金の価格ヘッジを行わないと仮定する。しかし、SafeandSure社は他の競合他社と異なり、18ヶ月後の金購入を先物契約でヘッジすることに決めたとする。金の価格が上昇すれば、経済的な圧力として、対応する宝飾品の卸売価格も上昇する傾向にあり、TakeaChance社のマージンは影響を受けない。それとは対照的に、ヘッジの効果を考慮すれば、SafeandSure社のマージンは上昇する。一方、金の価格が下落すれば、経済的な圧力として、対応する宝飾品の卸売価格も下落する傾向にあり、この場合もTakeaChance社のマージンはやはり影響を受けない。しかし、SafeandSure社のマージンは下がってしまう。極端な場合、SafeandSure社のマージンは、ヘッジの結果としてマイナスになることもある。これらの状況を表3.1にまとめた。

この例は、ヘッジを行う際には全体像をみることが重要であることを強調

表3.1 競合他社がヘッジを行わない場合のヘッジの危険性

| 金価格の変化 | 金宝飾品価格への影響 | TakeaChance社の収益への影響 | SafeandSure社の収益への影響 |
|--------|------------|---------------------|---------------------|
| 上昇     | 上昇         | 影響なし                | 増加                  |
| 下落     | 下落         | 影響なし                | 減少                  |

したものである。すなわち、価格変化に対するヘッジ戦略を策定する際には、価格変化が企業収益にどのような影響を与えるかをしっかりと考慮する必要がある。

### その他留意点

先物を利用したヘッジは、ヘッジをしない場合のポジションに比べて、企業収益に増減をもたらす可能性があることに留意することが重要である。たとえば、先の原油精製業者の例では、原油価格が下落すれば、企業は100万バレルの売上げで損失を被る一方で、ヘッジの先物ポジションからは、それを相殺するような利益が発生する。この場合、財務担当者のヘッジを行った先見性は賞賛を受けるだろう。明らかに、ヘッジを行っていなかった場合に比べて企業業績はよかつたことになる。組織の経営者も財務担当者の貢献を評価するであろう。しかし、もし原油価格が上昇した場合はどうであろうか。企業は原油の販売で利益を計上する一方で、先物ポジションによりそれを打ち消す損失を被る。この場合、企業の業績はヘッジを行わなかった場合に比べて悪くなる。ヘッジの判断は完全に筋の通ったものではあるが、実際には、財務担当者はそれを正当化するのに骨を折ることになる。ヘッジ終了時の原油価格が69ドルであったとしよう。そのとき、企業は先物契約によって1バレル当たり10ドルの損失を被る。それをめぐって、財務担当者と社長との間での次のような会話が想像される。

社長：これはひどい。3カ月間に先物市場で300万ドルの損失を被った。

何が起きたのかきちんと説明してくれないか。

財務担当者：先物取引の目的は、それから利益を生み出そうというものではなく、原油価格に対するエクスポートジャーをヘッジすることです。原油価格の上昇による望ましい効果によって、1,000万ドルの利益を本業から得たことを忘れないでください。

社長：それとどう関係があるというのか。ニューヨークで売上げが上がっているので、カリフォルニアで売上げが下がっても心配するなどしているようなものではないか。

財務担当者：原油価格が下がっていれば……。

社長：原油価格が下がっていたならば何が起こっていたかは関係ない。

実際、価格は上がっているではないか。君が先物市場でこのようなプレイをして何をしようとしていたのか、私にはまったくわからない。株主は、この四半期でいかにわれわれがうまくやったかを期待している。私は株主に対して、君の行為によって1,000万ドルの収益が減ってしまった旨を説明しなければならない。残念ながら今年の君のボーナスはないものだと理解してくれ。

財務担当者：それは不公平な扱いです。私はただ……。

社長：不公平だと。君はくびにならないだけラッキーだ。君は1,000万ドルの損失を出したのだから。

財務担当者：すべては社長がそれをどのようにみるかによります。

多くの財務担当者がヘッジに対して気乗りしない理由が、容易に理解できるだろう。ヘッジは企業のリスクを軽減させる。しかし、何が行われているかを他の人が理解していなければ、財務担当者にとってのリスクは増大するかもしれない。この問題に対する唯一の真の解決策は、ヘッジが実際に行われる前に、組織内の経営陣からヘッジに対する十分な理解を得ておくことである。ヘッジ戦略が企業の取締役会にて定められ、企業の経営管理者と株主に対してわかりやすく情報開示されていることが理想的であろう（金の採掘企業によるヘッジについてはビジネス寸見3.1を参照）。

### ビジネス寸見3.1 金採掘企業によるヘッジ

優良な金採掘企業であれば金の価格変動ヘッジを検討するのは自然である。鉱山から金をすべて採掘するには一般的には数年かかる。一度、特定の鉱山での金の生産に着手することを決定すれば、その企業は金価格に対する大きなエクスポージャーにさらされる。実際、鉱山に当初収益が見込まれていても、金の価格が下落すれば利益はなくなってしまう

う。

金採掘企業は潜在株主に対して、ヘッジ戦略について注意深く説明を行う。ヘッジを行わない金採掘企業もある。金関連株式を購入し、金価格の上昇で利益をあげたいと考え、金価格の下落による損失リスクを許容できる株主にとっては、そうした企業が魅力的であろう。一方、ヘッジを行う企業もある。そうした企業は今後数年で毎月何オンス生産できるかを推定し、価格を固定化するために金売却の先物契約かフォワード契約を締結する。

あなたがゴールドマンサックス証券の社員で、金採掘企業との間で固定価格にて大量の金を購入するフォワード契約を締結したとしよう。このときどのようにリスクをヘッジするか。答は、中央銀行から「金」を借りて、それを現時点での市場価格で売却することである（多くの国の中央銀行は大量の金を保有している）。フォワード契約の満期時にフォワード契約に基づき金採掘企業から金を購入し、それを中央銀行に対する返却にあてる。中央銀行は金のリース・レートとして知られる手数料（おそらく年率1.5%）を徴求する。

### 3.3 ベーシス・リスク

これまでの例は、ヘッジがうまくいきすぎて真実味のないものであった。ヘッジャーは将来における資産の売買についての正確な日付を特定でき、その日の資産価格にかかるリスクのほとんどすべてを先物契約で取り除くことができるとしていた。しかし実際には、ヘッジはそれほど簡単にはいかないものである。そのいくつかの理由は、以下のとおりである。

1. ヘッジすべき資産が、先物契約の原資産と完全に同じではない場合がある。
2. ヘッジをする者にとって、資産の売却・購入時期が正確には把握できない場合がある。

3. 受渡月の前にヘッジ取引を手仕舞わなければならない場合がある。これらの問題に関連して、ベースス・リスク (basis risk) と呼ばれるリスクが生じる。この概念について、以下に説明しよう。

## ベースス

ヘッジ取引におけるベースス (basis) は、次のように定義される(注2)。

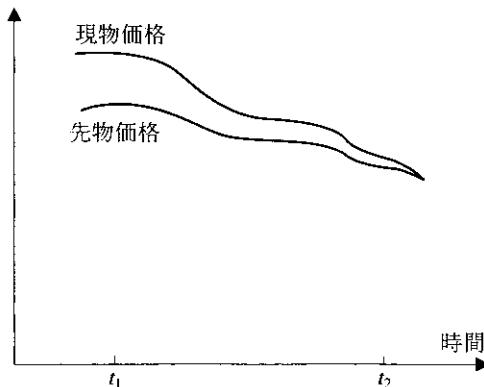
ベースス＝ヘッジ対象資産の現物価格

－ヘッジ取引に利用している先物の価格

ヘッジ対象資産と先物契約の原資産が同じ場合には、先物契約の満期ではベーススはゼロになるはずである。しかし満期前までは、ベーススは正にも負にもなりうる。満期が非常に短い先物契約の場合には、現物価格と先物価格は等しくなる。表2.2と図2.2からわかるように、たとえば2007年1月8日の金のベーススは負で、オレンジジュースのベーススは正である。

現物価格と先物価格は、時間の経過とともに必ずしも同じ大きさだけ変化するわけではない。ベーススが増加することをベーススが強まる (strengthening of the basis) という。逆に、ベーススが減少することをベーススが弱

図3.1 ベーススの時間的な変化



(注2) これは通常の定義である。他に、ベースス＝先物価格－現物価格 と定義される場合もある。特に金融先物に対しては、この定義が用いられる。

まる（weakening of the basis）という。先物契約の満期前にベースが正であるような状況において、ベースが時間とともにどのように変化するかを図3.1（前頁）に例示した。

ベース・リスクの性質を考察するために、次の記号を用いる。

$S_1$ ：時点  $t_1$  の現物価格

$S_2$ ：時点  $t_2$  の現物価格

$F_1$ ：時点  $t_1$  の先物価格

$F_2$ ：時点  $t_2$  の先物価格

$b_1$ ：時点  $t_1$  のベース

$b_2$ ：時点  $t_2$  のベース

時点  $t_1$  にヘッジを実施し、時点  $t_2$  に先物契約を手仕舞うと仮定する。例として、ヘッジを実施する時の現物価格が2.50ドルで、先物価格が2.20ドル、先物を手仕舞う時には、それぞれ2.00ドルと1.90ドルになっている場合を考えよう。つまり、 $S_1=2.50$ ,  $F_1=2.20$ ,  $S_2=2.00$ ,  $F_2=1.90$ とする。

ベースの定義から

$$b_1 = S_1 - F_1$$

$$b_2 = S_2 - F_2$$

となるので、この例では、 $b_1=0.30$ ,  $b_2=0.10$ である。

まず初めに、時点  $t_2$  に資産を売却する予定の会社が、ヘッジのために時点  $t_1$  で先物契約を売り付ける状況を考えてみよう。資産の売却価格は  $S_2$  で、先物による損益は  $F_1 - F_2$  となる。したがって、ヘッジ込みの資産の実質的な価格は次のようになる。

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

いまの例では2.30ドルとなる。時点  $t_1$  では  $F_1$  が既知であり、もし  $b_2$  もあらかじめわかっていていれば、完全なヘッジができる。ヘッジのリスクは  $b_2$  に付随する不確実性であり、これをベース・リスクという。次に、時点  $t_2$  に資産を購入する予定の会社が、時点  $t_1$  に先物で買いヘッジする場合を考えよう。資産に支払う価格は  $S_2$  で、ヘッジによる損益は  $F_1 - F_2$  であるから、ヘッジ込みの資産の実質的な購入価格は次のようになる。

$$S_2 + F_1 - F_2 = F_1 + b_2$$

これは前と同じ式であり、いまの例では2.30ドルである。 $F_1$ の値は時点 $t_1$ でわかつており、 $b_2$ の項はベース・リスクを表している。

ベース・リスクはヘッジャーのポジションを改善したり、悪化させたりすることに注意しよう。つまり、売りヘッジの場合であれば、ベースが予想以上に強くなれば（すなわち増加すれば）ヘッジャーのポジションは改善し、逆に予想以上に弱くなれば（すなわち減少すれば）悪くなる。買いヘッジの場合はこれとは逆になる。ベースが予想以上に強くなればヘッジャーのポジションは悪くなり、予想以上に弱くなれば改善する。

ヘッジャーのヘッジ対象資産が先物契約の原資産と異なる場合もある。その場合、ベース・リスクは大きくなる。 $S_2^*$ を時点 $t_2$ での先物契約の原資産価格とする。前と同様に、 $S_2$ を時点 $t_2$ での資産価格とすると、ヘッジによって、企業は資産に対して次の価格を支払う（または受け取る）ことになる。

$$S_2 + F_1 - F_2$$

この式は、次のようにも書ける。

$$F_1 + (S_2^* - F_2) + (S_2 - S_2^*)$$

$S_2^* - F_2$ と  $S_2 - S_2^*$ の項はベースの二つの要素を表している。 $S_2^* - F_2$ の項はヘッジ対象資産が先物契約の原資産と同じであった場合のベースであり、 $S_2 - S_2^*$ の項は二つの資産が異なることによるベースである。

### 先物契約の選択

ベース・リスクに影響を与える重要な要因として、どの先物契約を使ってヘッジを行うかということがある。この選択は次の二つの要素からなる。

1. 先物契約の原資産の選択
2. 限月（受渡月）の選択

ヘッジ対象資産が先物契約の原資産と完全に一致している場合は、最初の選択は容易に行える。そうでない場合には、利用可能な先物契約のうちで先物価格がヘッジ対象資産の価格と最もよく連動しているものを調べるために、入念な分析を行う必要がある。

限月の決定には、いくつかの要因が考慮される。本章の初めのほうの例では、ヘッジの期限が先物契約の限月に一致しているならば、その限月の先物契約が選択されることを仮定していた。実際には、このようなケースでも期先の先物契約が選択されるのが一般的である。これは、受渡月の先物価格はきわめて特異な動きをする場合があるためである。さらに、買いヘッジの場合では、受渡月に先物契約の建玉を保有していると、現受けしなければならない可能性がある。現受けは費用と手間を要する（そのため、買いヘッジをしているヘッジャーは先物契約を手仕舞って、通常の供給元から現物を購入するのが普通である）。

一般的に、ヘッジ期限と先物契約の限月が違うほど、ペーシス・リスクは増大する。したがって、ヘッジ期限より後の最も近い限月を利用するのが、およそその目安となる。先物契約の限月を3月、6月、9月、12月とする。12月、1月、2月がヘッジ期限だとすれば、3月限の先物契約を選べばよい。3月、4月、5月がヘッジ期限だとすれば、6月限を選べばよい、といった具合である。この目安はどの限月の先物契約もヘッジャーの要求にあつた十分な流動性があると仮定しているが、実際には近い限月のほうが流動性は高い傾向がある。したがって、場合によっては短い限月の先物契約を使ってヘッジし、それを先に延長していくほうがよいかもしれない。この手法については章の後半で述べる。

### 【例3.1】

3月1日時点で、ある米国の企業が7月末に、日本円を5,000万円受け取る予定があるとする。CMEの円先物の限月は3月、6月、9月、12月で、円先物の取引単位は1,250万円である。したがって、この企業は3月1日に9月限の円先物を4枚売り付け、7月に円を受け取った時点でこの先物を手仕舞うことにする。3月1日の先物価格が1円当たり0.7800セントで、手仕舞った時の現物価格と先物価格がそれぞれ0.7200セント、0.7250セントであるとする。

先物の利益は $0.7800 - 0.7250 = 0.0550$ セント、手仕舞い時のペーシスは $0.7200 - 0.7250 = -0.0050$ セントである。したがって、実質的な円の

売値は、現物価格と先物の利益の合計で、

$$0.7200 + 0.0550 = 0.7750$$

となる。これは、最初の先物価格と手仕舞い時のペーススの和として、

$$0.7800 - 0.0050 = 0.7750$$

と表すこともできる。したがって、この企業は合計で $5,000\text{万} \times 0.00775 = 387,500\text{ドル}$ を受け取ることになる。

### 【例3.2】

6月8日時点で、ある企業が10月か11月のいずれかに原油を20,000バレル購入する予定にある。NYMEXの原油先物は毎月が受渡月であり、取引単位は1,000バレルである。この企業は12月限原油先物を使ってヘッジすることにし、6月8日に12月限20枚を68.00ドルで買い付けた。その後、11月10日に原油購入の用意が整ったので、その日に先物を手仕舞った。11月10日の現物価格と先物価格をそれぞれ1バレル当たり70.00ドルと69.10ドルとする。

先物からの利益は1バレル当たり $69.10 - 68.00 = 1.10$ ドル、手仕舞い時のペーススは1バレル当たり $70.00 - 69.10 = 0.90$ ドルである。この場合の実質的な原油の1バレル当たりの購入価格は、最終スポット価格から先物の利益を差し引いたもの、つまり

$$70.00 - 1.10 = 68.90 \text{ ドル}$$

となる。これは、先物購入価格に最終のペースス0.90ドルを加えて、

$$68.00 + 0.90 = 68.90 \text{ ドル}$$

としても計算でき、支払総額は $68.90 \times 20,000 = 1,378,000$ ドルとなる。

## 3.4 クロスヘッジ

これまで考えてきた例では、先物契約の原資産は、価格がヘッジされている資産と同じとしていた。クロスヘッジ(cross hedging)とは、二つの資産

が異なる場合に行うヘッジである。たとえば、ジェット燃料の将来の価格に関心のある航空会社を考えよう。ジェット燃料の先物契約は存在しないので、そのエクスポートヤーをヘッジするためにヒーティングオイル（暖房油）先物を選択するかもしれない。

ヘッジ比率（hedge ratio）とは、先物ポジションの大きさとヘッジ対象資産の大きさとの比率のことである。先物契約の原資産がヘッジ対象資産と同一の場合は、ヘッジ比率を1.0とするのが自然であり、これまでの例で使ってきたヘッジ比率もそうである。たとえば、例3.2ではヘッジヤーのエクスポートヤーは原油20,000バレルで、同量の受渡しをもつ先物契約でヘッジした。

一方、クロスヘッジを利用する場合は、ヘッジ比率は必ずしも1.0が最適ではない。ヘッジヤーはヘッジ対象ポジションの価値の分散を最小化するヘッジ比率を選択する必要がある。どのようなことをヘッジヤーが行うか検討してみよう。

### 最小分散ヘッジ比率の計算

以下の表記を用いる。

$\Delta S$ ：現物価格  $S$  のヘッジ期間内の変化幅

$\Delta F$ ：先物価格  $F$  のヘッジ期間内の変化幅

$\sigma_S$ ： $\Delta S$  の標準偏差

$\sigma_F$ ： $\Delta F$  の標準偏差

$\rho$ ： $\Delta S$  と  $\Delta F$  の相関係数

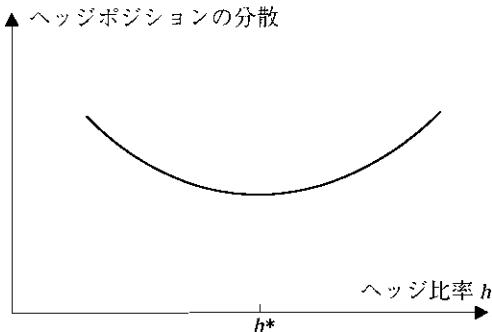
$h^*$ ：ヘッジヤーのポジションの分散を最小にするヘッジ比率

章末の付録に

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F} \quad (3.1)$$

となることを示す。最適ヘッジ比率は、 $\Delta S$  と  $\Delta F$  の相関係数に、 $\Delta S$  の標準偏差と  $\Delta F$  の標準偏差の比を乗じたものとなっている。図3.2にヘッジヤーのポジションの分散とヘッジ比率との関係を示す。

図3.2 ヘッジポジションの分散とヘッジ比率との関係



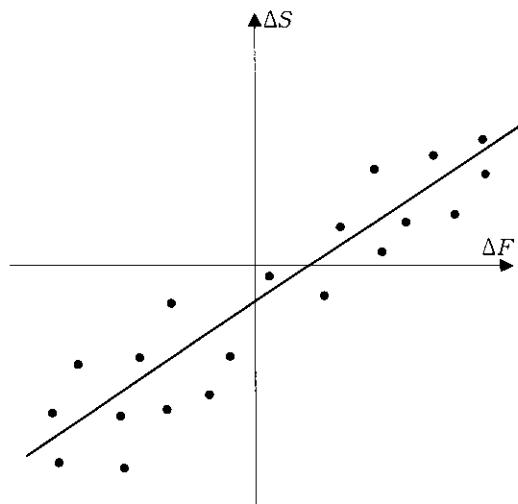
$\rho=1$ かつ  $\sigma_F=\sigma_S$  のとき、最適ヘッジ比率  $h^*$  は 1.0 となる。これは、先物価格と現物価格とがまったく同じ挙動を示すことから期待される結果である。また、 $\rho=1$ かつ  $\sigma_F=2\sigma_S$  ならば、ヘッジ比率  $h^*$  は 0.5 となる。これは先物価格が現物価格の 2 倍の変化をするケースであり、この結果も期待どおりのものである。

最適なヘッジ比率  $h^*$  は図3.3に示すように、 $\Delta S$  を  $\Delta F$  に対して回帰したときに最もフィットする直線の傾きである。われわれは  $h^*$  で  $\Delta S$  の  $\Delta F$  に対する変化率を表そうとしているので、このことは感覚的にも合っている。ヘッジ効率 (hedge effectiveness) は、ヘッジによって除去される分散の比率として定義される。これは  $\Delta S$  の  $\Delta F$  に対する回帰における  $R^2$  であり、 $\rho^2$  に等しい。すなわち

$$h^{*2} \frac{\sigma_F^2}{\sigma_S^2}$$

で表される。(3.1)式のパラメータ  $\rho$ ,  $\sigma_F$ ,  $\sigma_S$  は、通常  $\Delta S$  と  $\Delta F$  の過去データから推定される(ここには、将来もある意味で過去と同様であるという暗黙の仮定がある)。互いに重複しない長さの等しい期間をたくさん集めて、各期間での  $\Delta S$  と  $\Delta F$  の値を観測する。理想的には、ヘッジを行う期間に各期間の長さを一致させるのがよいが、観測数に限りがある場合もあり、実務

図3.3 先物価格の変化に対する現物価格の変化の回帰直線



上はもっと短い期間が使われる。

### 最適なヘッジ契約数

以下の変数を定義する。

$Q_A$  : ヘッジされるポジションの大きさ (単位)

$Q_F$  : 先物 1 契約の大きさ (単位)

$N^*$  : ヘッジのための最適な先物契約数

先物契約は  $h^* Q_A$  資産単位分が必要である。したがって、必要とする先物契約数は以下のように与えられる。

$$N^* = \frac{h^* Q_A}{Q_F} \quad (3.2)$$

#### 【例3.3】

ある航空会社が 1 カ月後に 200 万ガロンのジェット燃料の購入を考えており、ヒーティングオイル先物を使ってヘッジすることを決めてい

る(注3)。表3.2は、15カ月分にわたる1ガロン当りのジェット燃料価格の変化 $\Delta S$ とヘッジで利用するヒーティングオイル先物価格の対応する変化 $\Delta F$ を示しているものとする。観測数 $n$ は15である。いま、 $\Delta F$ と $\Delta S$ の $i$ 番目の観測値をそれぞれ $x_i$ 、 $y_i$ とすると、表3.2から

$$\sum x_i = -0.013, \quad \sum x_i^2 = 0.0138$$

$$\sum y_i = 0.003, \quad \sum y_i^2 = 0.0097$$

$$\sum x_i y_i = 0.0107$$

となる。統計学の標準的な公式から、 $\sigma_F$ の推定値は

$$\sqrt{\frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n-1} \frac{n(n-1)}{n(n-1)}} = 0.0313$$

となる。同様に、 $\sigma_S$ の推定値は

$$\sqrt{\frac{\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}{n-1} \frac{n(n-1)}{n(n-1)}} = 0.0263$$

となり、 $\rho$ の推定値は

$$\frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2][n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2]}} = 0.928$$

となる。(3.1)式より、最小分散ヘッジ比率 $h^*$ は

$$0.928 \times \frac{0.0263}{0.0313} = 0.78$$

となる。NYMEXで取引されているヒーティングオイル先物の取引単位は42,000ガロンである。したがって、(3.2)式より最適契約数は

$$\frac{0.78 \times 2,000,000}{42,000} = 37.14$$

つまり、小数点以下を丸めて37枚となる。

(注3) ヒーティングオイル先物はジェット燃料先物よりも流動性が高い。デルタ航空が実施した、将来のジェット燃料購入に対するヒーティングオイル先物を用いたヘッジについての説明は、A. Ness, "Delta Wins on Fuel", *Risk*, June 2001, p.8 を参照されたい。

表3.2 ジェット燃料購入のためのヘッジにヒーティングオイル先物が利用された場合の最小分散ヘッジ比率の計算用データ

| 月<br><i>i</i> | 1ガロン当りの<br>先物価格の変化 (=x <sub><i>i</i></sub> ) | 1ガロン当りの<br>燃料価格の変化 (=y <sub><i>i</i></sub> ) |
|---------------|--|--|
| 1             | 0.021  | 0.029  |
| 2             | 0.035  | 0.020  |
| 3             | -0.046                                       | -0.044                                       |
| 4             | 0.001  | 0.008  |
| 5             | 0.044  | 0.026  |
| 6             | -0.029                                       | -0.019                                       |
| 7             | -0.026                                       | -0.010                                       |
| 8             | -0.029                                       | -0.007                                       |
| 9             | 0.048  | 0.043  |
| 10            | -0.006                                       | 0.011  |
| 11            | -0.036                                       | -0.036                                       |
| 12            | -0.011                                       | -0.018                                       |
| 13            | 0.019  | 0.009  |
| 14            | -0.027                                       | -0.032                                       |
| 15            | 0.029  | 0.023  |

### ヘッジのテーリング

先物をヘッジに利用するとき、日次値洗いの影響を考慮して、ヘッジのテーリング (tailing the hedge) として知られるヘッジの微調整が行われる。実際、(3.2)式は

$$N^* = \frac{h^* V_A}{V_F} \quad (3.3)$$

という式に修正される(注4)。ここで  $V_A$  はヘッジされるポジションの価値、 $V_F$  は先物 1 契約の価値 ( $Q_F$  に先物価格を乗じたもの) である。例3.3で、1ガロン当りの現物価格と先物価格をそれぞれ1.94ドル、1.99ドルとしよう。こ

(注4) (3.3)式の説明については章末問題5.23を参照。

のとき、 $V_A = 2,000,000 \times 1.94 = 3,880,000$ 、 $V_F = 42,000 \times 1.99 = 83,580$ となるので、最適契約数は

$$\frac{0.78 \times 3,880,000}{83,550} = 36.22$$

となる。この値を整数に丸めると、今度の最適契約数は37枚ではなく36枚になる。ヘッジのテーリングとは、(3.2)式のヘッジレシオに現物価格と先物価格の比を掛けるというものである。したがって理想的には、ヘッジに用いる先物のポジションは  $V_A$  と  $V_F$  の変化に合わせて調整すべきであるが、実際には実行可能でないことが多い。

### 3.5 株価指数先物

次に、株価指数先物について、それがヘッジや株価に対するエクスポージャーの管理にどのように利用されるかを見てみよう。

株価指数 (stock index) は、仮想的な株式ポートフォリオの価値の動きを表している。また、ポートフォリオの構成銘柄のウェイトとは、ポートフォリオにおけるその株式への投資金額の比率のことである。ごく短期間の株価指数の変化率は、仮想ポートフォリオの価値の変化率に等しくなっている。株価指数の算出に配当は考慮されていないため、株価指数は仮想ポートフォリオに対するキャピタルゲインまたはロスを指数化したものである(注5)。

仮想株式ポートフォリオの構成銘柄の株数が一定のまま固定されていれば、ポートフォリオに含まれる各銘柄のウェイトは一定には保たれない。というのは、ポートフォリオのある特定の銘柄の価格が他より極端に上昇した場合、その株式のウェイトは自動的に高くなってしまうからである。指数のいくつかは、数多くの銘柄のそれぞれ 1 単位から構成される仮想的なポートフォリオで定義されている。その場合は、各株式に適用されるウェイトは市場価格に比例し、株式分割が行われたときは調整が行われる。また、別の指

---

(注5) 例外として、トータル・リターン指数というものがある。これは仮想ポートフォリオの配当がポートフォリオに再投資されるものとして計算される。

数では、ウェイトは市場の時価総額 (=時価×発行済株式数) に比例する形で定義されている。その場合は、計算のもととなるポートフォリオに対して、株式分割、株式配当、新株発行を反映する調整は自動的になされる。

### 株価指数

表3.3は、2007年1月9日付ウォール・ストリート・ジャーナルに掲載された、さまざまな株価指数先物の2007年1月8日の終値である。

ダウ平均 (Dow Jones Industrial Average) は、米国のブルーチップ（優良）30銘柄から構成されるポートフォリオをもとに算出される。各株式のウェイトはその価格に比例しており、CBOTではこの指標に対する二つの先物契約が取引されている。一つは先物契約の取引単位が指標の10ドル倍で、もう一つ（ミニダウ平均先物）は5ドル倍で取引されるものである。

Standard & Poor's 500 (S&P500) 指数は、一般事業法人400社、公共事業会社40社、運輸会社20社、金融機関40社の合計500銘柄からなる株価指数である。各銘柄のウェイトは、その銘柄の時価総額に比例している。この指標は、時価総額ベースでニューヨーク証券取引所上場の全株式の80%をカバーしている。CMEではこの指標に対する二つの先物契約が取引されている。

**表3.3 指数先物価格（出典：2007年1月9日付ウォール・ストリート・ジャーナル）**

各列は順に限月、始値、高値、安値、清算値、前日比、建玉である。

| Index Futures                                       |         |         |         |         |      |           |
|---|---------|---------|---------|---------|------|-----------|
| <b>DJ Industrial Average (CBT)-\$10 x index</b>     |         |         |         |         |      |           |
| March   | 12457   | 12515   | 12405   | 12492   | 42   | 64,772    |
| June  | 12530   | 12591   | 12525   | 12591   | 42   | 46        |
| <b>Mini DJ Industrial Average (CBT)-\$5 x index</b> |         |         |         |         |      |           |
| March   | 12460   | 12514   | 12405   | 12492   | 42   | 106,556   |
| June  | 12570   | 12577   | 12540   | 12591   | 42   | 21        |
| <b>S&amp;P 500 Index (CME)-\$250 x index</b>        |         |         |         |         |      |           |
| March   | 1417.30 | 1424.50 | 1413.00 | 1422.50 | 6.10 | 601,897   |
| June  | 1426.10 | 1437.00 | 1426.10 | 1435.30 | 6.20 | 13,062    |
| <b>Mini S&amp;P 500 (CME)-\$50 x index</b>          |         |         |         |         |      |           |
| March   | 1417.25 | 1424.50 | 1413.00 | 1422.50 | 6.00 | 1,525,973 |
| June  | 1430.50 | 1437.00 | 1425.50 | 1435.25 | 6.25 | 13,716    |
| <b>Nasdaq 100 (CME)-\$100 x index</b>               |         |         |         |         |      |           |
| March   | 1797.50 | 1812.50 | 1792.00 | 1803.50 | 6.25 | 45,550    |
| <b>Mini Nasdaq 100 (CME)-\$20 x index</b>           |         |         |         |         |      |           |
| March   | 1798.0  | 1812.3  | 1792.3  | 1803.5  | 6.3  | 328,990   |
| June  | 1819.8  | 1833.3  | 1814.3  | 1825.0  | 6.3  | 92        |
| <b>Russell 1000 (NYBOT)-\$500 x index</b>           |         |         |         |         |      |           |
| March   | 770.75  | 773.50  | 769.15  | 773.00  | 3.10 | 70,440    |
| <b>U.S. Dollar Index (NYBOT)-\$1,000 x index</b>    |         |         |         |         |      |           |
| March   | 84.43   | 84.62   | 84.27   | 84.37   | -.03 | 24,181    |
| June  | 84.10   | 84.30   | 84.01   | 84.12   | -.03 | 2,028     |

Source: Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc., © 2007 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

る。一つは先物契約の取引単位が指標の250ドル倍で、もう一つ（ミニS&P500）は50ドル倍である。

Nasdaq100は、NASDAQ（National Association of Securities Dealers Automatic Quotations Service、米国の店頭電子株式市場）で取引される100銘柄の株式に基づく指標である。CMEではこの指標に対する二つの先物が取引されている。一つは取引単位が指標の100ドル倍、もう一つ（ミニNasdaq100）は指標の20ドル倍である。

Russell1000指標は、米国の資本規模で上位1,000銘柄からなる株価指標である。また、米ドル指標は取引量でウェイトした六つの外国通貨（ユーロ、円、英ポンド、カナダドル、スウェーデンクローネ、スイスフラン）の価値についての指標である。

第2章で述べたように、株価指標先物の決済は原資産の受渡しではなく、現金で行われる。すべての取引は取引最終日の株価指標の始値もしくは終値で値洗いされ、ポジションはその価格で手仕舞われることになる。たとえば、S&P500先物では、受渡月の第3金曜日の指標の始値で手仕舞われる。

### 株式ポートフォリオのヘッジ

株価指標先物は、十分に分散された株式ポートフォリオのヘッジに用いることができる。以下のように定義する。

$P$ ：ポートフォリオの現在価値

$F$ ：先物1契約の現在価値（取引単位に先物価格を乗じたもの）

ポートフォリオが株価指標に完全に連動しているならば、最適ヘッジ比率 $h^*$ は1.0となり、(3.3)式より売り付けるべき先物契約の数は、

$$N^* = \frac{P}{F} \quad (3.4)$$

となる。たとえば、S&P500に連動する時価5,050,000ドルのポートフォリオがある。指標先物価格を1,010とする。先物契約の取引単位は指標の250ドル倍である。このとき、 $P=5,050,000$ 、 $F=1,010 \times 250 = 252,500$ となるから、このポートフォリオをヘッジするには20枚の先物契約を売り付ける必要

がある。

ポートフォリオが指数に完全には連動していない場合には、CAPM のパラメータであるベータ ( $\beta$ ) を用いれば、適切なヘッジ比率を決定することができる。ベータは、無リスク金利に対するポートフォリオの超過収益率を無リスク金利に対する市場の超過収益率に回帰した場合に、最もフィットする直線の傾きである。 $\beta=1.0$  のときは、ポートフォリオの収益率は市場の収益率に完全に連動する傾向にある。 $\beta=2.0$  のときは、ポートフォリオの超過収益率は市場の超過収益率の 2 倍になる傾向にある。 $\beta=0.5$  のときは、それが 0.5 倍になる、といった具合である。

$\beta=2.0$  のポートフォリオは  $\beta=1.0$  のポートフォリオに比べて、市場の動きに対して 2 倍の感応度をもつ。したがって、 $\beta=2.0$  のポートフォリオをヘッジするには 2 倍の先物契約が必要となる。同様に、 $\beta=0.5$  のポートフォリオは、 $\beta=1.0$  のポートフォリオに比べて市場の動きに対する感応度は半分のため、ヘッジに必要な先物契約数は半分でよい。一般に、 $h^*=\beta$  なので、(3.3)式より

$$N^* = \beta \frac{P}{F} \quad (3.5)$$

となる。この式では、先物契約の満期がヘッジの満期に近いことを仮定している。

この式に基づいたヘッジがうまくいくことを、先の例を少し変えて例示しよう。次のような状況下で、満期 4 カ月の S&P500 先物を用いて、今後 3 カ月のポートフォリオの価値をヘッジするとする。

S&P500 の価値 = 1,000

S&P500 先物価格 = 1,010

ポートフォリオの価値 = 5,050,000 ドル

無リスク金利 = 年率 4 %

指数の配当率 = 年率 1 %

ポートフォリオのベータ = 1.5

先物の取引単位は指数の 250 ドル倍である。このとき  $F = 250 \times 1,010 =$

252,500で、(3.5)式より、ポートフォリオのヘッジに必要な先物の売却数は

$$1.5 \times \frac{5,050,000}{252,500} = 30$$

となる。3カ月後に指数が900、先物価格が902となったと仮定する。そのとき、先物の売りポジションからの利益は

$$30 \times (1,010 - 902) \times 250 = 810,000 \text{ ドル}$$

となる。指数による損失は10%であり、指数には年率1%，すなわち3カ月で0.25%の配当がある。配当を考慮に入れると、指数に対する投資家のパフォーマンスは3カ月で-9.75%となる。ポートフォリオのベータは1.5なので、CAPMより

$$\begin{aligned} & \text{ポートフォリオの期待收益率} - \text{無リスク金利} \\ &= 1.5 \times (\text{指数の收益率} - \text{無リスク金利}) \end{aligned}$$

となる。無リスク金利は3カ月当りおよそ1%である。これより、3カ月間の指数の收益率が-9.75%のとき、3カ月間のポートフォリオの期待收益率は

$$1.0 + [1.5 \times (-9.75 - 1.0)] = -15.125$$

となる。したがって、3カ月後の（配当を含む）ポートフォリオの期待値は

$$5,050,000 \times (1 - 0.15125) = 4,286,187 \text{ ドル}$$

となる。以上より、ヘッジポジションからの利益を含めたヘッジャーのポジションの期待価値は

$$4,286,187 + 810,000 = 5,096,187 \text{ ドル}$$

となる。

以上の計算結果を満期時における指数の値が異なる場合も含めて、表3.4（次頁）にまとめた。ヘッジャーのポジションの3カ月後における総価値は、指数の値に対してほとんど独立であることがわかる。

この例でまだ説明していなかったことは、先物価格と現物価格との関係である。第5章でみるように、現時点での先物価格1,010は、仮定した金利と配当が与えられたときに導かれる理論価格にほぼ一致していることがわかる。表3.4の3カ月後の先物価格についても同様である（注6）。

表3.4 株価指数先物を使ったヘッジのパフォーマンス

|                          |           |           |           |           |           |
|--------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 3カ月後の指標の値                | 900       | 950       | 1,000     | 1,050     | 1,100     |
| 現在の指標先物価格                | 1,010     | 1,010     | 1,010     | 1,010     | 1,010     |
| 3カ月後の指標先物価格              | 902       | 952       | 1,003     | 1,053     | 1,103     |
| 先物ポジションの利益               | 810,000   | 435,000   | 52,500    | -322,500  | -697,500  |
| 市場の収益率                   | -9.750%   | -4.750%   | 0.250%    | 5.250%    | 10.250%   |
| ポートフォリオの期待収益率            | -15.125%  | -7.625%   | -0.125%   | 7.375%    | 14.875%   |
| 3カ月後の(配当を含む)ポートフォリオの期待価値 | 4,286,187 | 4,664,937 | 5,043,687 | 5,422,437 | 5,801,187 |
| 3カ月後のポジションの期待総価値         | 5,096,187 | 5,099,937 | 5,096,187 | 5,099,937 | 5,103,687 |

### 株式ポートフォリオをヘッジする理由

ヘッジ戦略によって、ヘッジャーのポジションの価値が3カ月後に当初の価値よりも約1%以上高くなつたことが表3.4に示されている。これは驚くべきことではない。無リスク金利は年率4%，すなわち3カ月で1%であり、ヘッジすることは結果的に投資家のポジションを無リスク金利で運用することと同じになる。

このとき、なぜヘッジャーは先物契約を利用するような面倒なことを行つたのかという疑問が当然生じる。単に無リスク金利を稼ぐだけならば、ポートフォリオを売却して、その売却代金を割引国債のような無リスク商品で運用することもできたからである。

この疑問に対する一つの答は、ヘッジャーが株式ポートフォリオの銘柄選択はうまく行えていると感じているならばヘッジは正当化できる、というものである。こうした状況では、概して、ヘッジャーは市場全体のパフォーマンス

(注6) 表3.4の計算では、指標の配当率は予測可能で、無リスク金利は一定、3カ月間の指標の収益率はポートフォリオの収益率と完全に相関をしていると仮定した。実際にはこの仮定は完全には成り立たず、表3.4で示したほどヘッジはうまく働かない。

ンスに対しては先行き不透明感をもっているかもしれないが、ポートフォリオの構成銘柄が（ポートフォリオのベータを適切に調整すれば）市場をアウト・パフォームすることには確信をもっている。指数先物を使ったヘッジは市場全体の変動に起因するリスクを取り除き、ポートフォリオの市場全体に対する相対的なパフォーマンスのみをエクスポートジャーとして残してくれる。ヘッジを行うもう一つの理由は、ヘッジャーは長期間ポートフォリオを保有することを計画している一方で、不確かな市場動向に対する短期的なプロテクションを必要としていることがある。ポートフォリオを売却し、後にそれを買い戻すといった代替的な戦略もあるが、それには受け入れがたい高い取引コストが伴う。

### ポートフォリオのベータの調整

表3.4の例では、ヘッジャーのポートフォリオのベータはゼロになっている（ヘッジャーの期待収益率は指数のパフォーマンスと独立である）。ポートフォリオのベータをゼロ以外のなんらかの値に変えるのに、先物契約を用いることもある。先ほどの例を用いる。

$$S\&P500 \text{の価値} = 1,000$$

$$S\&P500 \text{先物価格} = 1,010$$

$$\text{ポートフォリオの価値} = 5,050,000 \text{ ドル}$$

$$\text{ポートフォリオのベータ} = 1.5$$

前と同様に  $F = 250 \times 1,010 = 252,500$  で、ポートフォリオを完全にヘッジするのに必要な先物売却数は、

$$1.5 \times \frac{5,050,000}{252,500} = 30$$

である。ポートフォリオのベータを1.5から0.75に減少させるには、先物を30枚ではなく、15枚売却すればよい。また、ポートフォリオのベータを2.0に増加させるには、先物を10枚購入すればよい、といった具合である。一般に、ポートフォリオのベータを  $\beta$  から  $\beta^*$  に変化させるためには、 $\beta > \beta^*$  のときは

$$(\beta - \beta^*) \frac{P}{F}$$

枚の売りポジションが必要であり、 $\beta < \beta^*$  のときは、

$$(\beta^* - \beta) \frac{P}{F}$$

枚の買いポジションが必要である。

### 個別株の価格に対するエクスポート

いくつかの取引所では選ばれた個別株式に対して先物取引が行われているが、ほとんどの場合、個別株のポジションは株価指数先物を用いたヘッジしかできない。

指数先物を利用した個別株の価格ヘッジは、うまく分散された株式ポートフォリオのヘッジに似ている。ヘッジャーが売り付ける指数先物契約の枚数は、 $\beta P/F$  によって与えられる。ここで  $\beta$  は個別株のベータ、 $P$  は所有する株式の時価合計額、 $F$  は指数先物 1 契約の現在価値である。先物の契約数は、株式ポートフォリオのヘッジと同じように計算されるが、ヘッジのパフォーマンスはきわめて悪い。ヘッジは、市場全体の価格変動リスクに対してのみプロテクションを提供するが、そのリスクが個別株の全価格変動リスクに占める割合は比較的小さい。その銘柄は市場全体をアウト・パフォームするが、市場全体のパフォーマンス自体については不確かであると投資家が感じている場合には、ヘッジを行うのは適切である。こうしたヘッジは、新株発行を引き受ける投資銀行が、市場全体の価格変動リスクをヘッジしたい場合にも利用される。

ある投資家が 6 月に時価100ドルの IBM 株を20,000株保有しているとする。その投資家は、翌月にかけて市場は乱高下するものの、IBM 株が市場をアウト・パフォームするいいチャンスであると感じている。そこで投資家は 8 月限 S&P500 先物を用いて、1 カ月間のポジション・ヘッジを行うことを決心した。IBM 株の  $\beta$  は1.1と推定され、8 月限 S&P500 先物の現在価格は900とする。先物の取引単位は指数の250ドル倍である。このとき、 $P =$

$20,000 \times 100 = 2,000,000$ ,  $F = 900 \times 250 = 225,000$ となる。したがって、売り付ける先物契約数は、

$$1.1 \times \frac{2,000,000}{225,000} = 9.78$$

となる。少数点以下を四捨五入すると、ヘッジャーは10枚の先物を売り付け、1カ月後にそれを手仕舞うことになる。いま、IBMの株価とS&P500先物の価格が1カ月後にそれぞれ125ドルと1,080まで上昇したとする。そのとき、投資家はIBM株で $20,000 \times (125 - 100) = 500,000$ ドルの利益を得て、先物では $10 \times 250 \times (1,080 - 900) = 450,000$ ドルの損失を被る。

この例では、ヘッジの先物契約から発生する損失が原資産の利益を相殺している。この相殺は逆効果のように思えるが、ヘッジの目的はリスクを軽減することであり、これが十分に強調されないことがある。このように、ヘッジは不都合な損失を少なくするとともに、都合のよい利益も少なくする傾向がある。

### 3.6 ヘッジのロール

ヘッジの期限が、利用可能なすべての先物契約の満期日より先となる場合がある。このときヘッジャーは、ある先物契約を手仕舞い、それより満期日が先の先物契約で同じポジションをとることにより、ヘッジをロールしなければならない。ヘッジは何度もロールされる場合もある。ここで、時点  $T$  に受け取る資産の価格をヘッジするために、売りヘッジを行う企業について考えてみよう。満期日順に先物契約  $1, 2, 3, \dots, n$  (現時点で存在している必要はない) があるとして、企業は次のようなヘッジ戦略をとることができる。

時点  $t_1$ ：先物契約 1 を売り付ける

時点  $t_2$ ：先物契約 1 を手仕舞い、同時に先物契約 2 を売り付ける

時点  $t_3$ ：先物契約 2 を手仕舞い、同時に先物契約 3 を売り付ける

⋮

時点  $t_n$ ：先物契約  $n-1$  を手仕舞い、同時に先物契約  $n$  を売り付ける

### 時点 $T$ ：先物契約 $n$ を手仕舞う

2007年4月に、ある企業が2008年6月に売却する原油10万バレルの価格リスクをヘッジ比率1.0でヘッジすることにしたとしよう（この例では、3.4節で説明したヘッジのテーリングに伴う調整は行わないものとする）。現在の現物価格を69ドルとする。原油先物は数年先の限月まで取引されているが、この企業が必要とする十分な流動性は、期近6限月の先物までしかないと仮定する。したがって、この企業は2007年10月限の先物を100枚売り付け、2007年9月に2008年3月限の先物へロールオーバーし、2008年2月に2008年7月限の先物へ再びロールオーバーすることになる。

結果の一例を表3.5に示す。2007年10月限の先物を68.20ドルで売り付け、67.40ドルで手仕舞って1バレル当たり0.80ドルの利益を得る。2008年3月限の先物を67.00ドルで売り付け、66.50ドルで手仕舞って1バレル当たり0.50ドルの利益を得る。2008年7月限の先物を66.30ドルで売り付け、65.90ドルで手仕舞って1バレル当たり0.40ドルの利益を得る。また、現物の最終価格は66ドルである。

売り付けた先物からの1バレル当たりの利益は、

$$(68.20 - 67.40) + (67.00 - 66.50) + (66.30 - 65.90) = 1.70$$

である。原油価格は69ドルから66ドルに下落した。3ドルの価格下落に対するヘッジとして1バレル当たり1.70ドルしか受け取れないというのは不満に思われる。しかし、先物価格が現物価格を下回っているときに、価格下落をすべてカバーするというのはできない相談である。2008年6月限が活発に取引されていたならば値付けされていたであろう先物価格で固定化するというの

表3.5 原油ヘッジをロールした場合の数値例

| 日付            | 07/4  | 07/9  | 08/2  | 08/6  |
|---------------|-------|-------|-------|-------|
| 2007年10月限先物価格 | 68.20 | 67.40 |       |       |
| 2008年3月限先物価格  |       | 67.00 | 66.50 |       |
| 2008年7月限先物価格  |       |       | 66.30 | 65.90 |
| 現物価格          | 69.00 |       |       | 66.00 |

が、せいぜい望めることである。

先物契約の日々の値洗いにより、ヘッジのキャッシュフローのタイミングとヘッジ対象資産のキャッシュフローのタイミングとのミスマッチが発生することがある。ヘッジをロールし、それが長期的に継続する状況においては、これが重大な問題に発展する場合がある（ビジネス寸見3.2を参照）。

### ビジネス寸見3.2 メタルゲゼルシャフト：ヘッジの失敗

先物のロールオーバーは、資金繰りの問題を引き起こすこともある。これについては、1990年代初頭にドイツの企業メタルゲゼルシャフト（MG）が引き起こした問題が記憶に新しい。

MGは、5年から10年のヒーティングオイルとガソリンを、市場価格より6～8セント高い固定価格で顧客に大量に売却する契約を結んだ。MGはそのエクスポージャーを短期の先物をロールオーバーする買いポジションでヘッジした。そのうちにオイル価格は下落し、先物ポジションから証拠金の差入れを求められるようになった。こうして、MGは足元の資金繰りの問題を抱えることになった。この先物によるポジション・ヘッジを行っていたMGの担当者は、この短期の資金流出は最終的には長期間の固定価格での受取りにより相殺されると主張した。しかし、会社の経営者と取引銀行は、資金流出が回収不能となることを懸念した。結果的に、ヘッジポジションを手仕舞い、顧客に長期固定契約の破棄を同意してもらうことになった。その結果、MGは13億3,000万ドルの損失を被ることになった。

## 要 約

本章では、企業が先物契約を利用して、資産価格に対するエクスポージャーを相殺するさまざまな方法について論じた。資産価格が上昇したときに利益が生じ、下落したときに損失が生じるようなエクスポージャーに対しては、売りヘッジが適切である。また、エクスポージャーが逆の場合（すなわち、資産価格が下落したときに利益が生じ、上昇したときに損失が生じる場合）は買いヘッジが適切である。

ヘッジはリスクを軽減させる方法である。したがって、ほとんどの経営者に歓迎されるものであるが、実際には、企業がヘッジを行わない多くの理論的および実務上の理由がある。理論的な話としては、株主は適切に分散したポートフォリオを保有することで、企業が直面する多くのリスクを取り除くことが可能ということがある。また、実務的な話としては、競合他社がヘッジをしなければ、ヘッジによってリスクが減少するどころか、むしろ増大してしまうと考えられる場合がある。さらに、企業の財務担当者のなかには、原資産の価格が利益を生む方向に変動し、ヘッジポジションからは損失が発生した場合に、他の経営者から批判を受ける危惧を抱いている者もいるかもしれない。

先物を利用したヘッジで重要な概念の一つがペース・リスクである。ペースは資産の現物価格と先物価格との差である。ペース・リスクとは、ヘッジの満期においてペースがどの程度になるかという不確実性からくるリスクである。

ヘッジ比率とは、抱えるエクスポージャーの大きさに対する先物ポジションの大きさの比率である。1.0がヘッジ比率として最適とは限らない。ヘッジヤーがポジションの分散を最小化したいのであれば、1.0と異なるヘッジ比率が適切な場合もある。最適ヘッジ比率は、現物価格の変化を先物価格の変化に回帰して得られる、最もフィットした直線の傾きである。

株価指数先物は、株式ポートフォリオのシステムティック・リスクをヘッジするのにも利用される。必要となる先物契約数は、ポートフォリオのペー

タに、先物1契約の価値に対するポートフォリオの価値の比を乗じたものである。また、株価指数先物契約は、ポートフォリオの構成銘柄を変えることなくポートフォリオのベータを変えるのにも使われる。

ヘッジの期限より満期日が先の先物契約に流動性がない場合は、期近の先物契約を乗り換えていく、ヘッジのロール戦略が適當かもしれない。最初の先物契約が満期近くになるとそれを手仕舞って、それより期先の2番目の先物契約を取引し、2番目の先物契約が満期近くになるとそれを手仕舞って、それより期先の3番目の先物契約を取引する、といった具合である。これは、一連の短期の先物契約を取引することで、長期の先物契約をつくりだすことに等しい。

## 参考文献

- Allayannis, G. and J. Weston. "The Use of Foreign Currency Derivatives and Firm Market Value," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001) : 243-76.
- Bodnar, G.M., G.S. Hayt, and R.C. Marston. "1998 Wharton Survey of Financial Risk Management by U.S. Non-Financial Firms," *Financial Management*, 2, 4 (1998) : 70-91.
- Brown, G.W. "Managing Foreign Exchange Risk with Derivatives," *Journal of Financial Economics*, 60 (2001) : 401-48.
- Culp, C. and M.H. Miller. "Metallgesellschaft and the Economics of Synthetic Storage," *Journal of Applied Corporate Finance*, 7, 4 (Winter 1995) : 62-76.
- Ederington, L.H. "The Hedging Performance of the New Futures Market," *Journal of Finance*, 34 (March 1979), 157-70.
- Edwards, F.R. and M.S. Canter. "The Collapse of Metallgesellschaft : Unhedgeable Risks, Poor Hedging Strategy, or Just Bad Luck?" *Journal of Applied Corporate Finance*, 8, 1 (Spring 1995) : 86-105.
- Geczy, C., B.A. Minton, and C. Schrand. "Why Firms Use Currency Derivatives," *Journal of Finance*, 52, 4 (1997) : 1323-54.

- Graham, J.R. and C.W. Smith, Jr. "Tax Incentives to Hedge," *Journal of Finance*, 54, 6 (1999) : 2241-62.
- Haushalter, G.D. "Financing Policy, Basis Risk, and Corporate Hedging : Evidence from Oil and Gas Producers," *Journal of Finance*, 55, 1 (2000) : 107-52.
- Mello, A.S. and J.E. Parsons. "Hedging and Liquidity," *Review of Financial Studies*, 13 (Spring 2000) : 127-53.
- Neuberger, A.J. "Hedging Long-Term Exposures with Multiple Short-Term Futures Contracts," *Review of Financial Studies*, 12 (1999) : 429-59.
- Petersen, M.A. and S.R. Thiagarajan. "Risk Management and Hedging : With and Without Derivatives," *Financial Management*, 29, 4 (Winter 2000) : 5-30.
- Rendleman, R. "A Reconciliation of Potentially Conflicting Approaches to Hedging with Futures," *Advances in Futures and Options Research*, 6 (1993) : 81-92.
- Stulz, R.M. "Optimal Hedging Policies," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19 (June 1984), 127-40.
- Tufano, P. "Who Manages Risk? An Empirical Examination of Risk Management Practices in the Gold Mining Industry," *Journal of Finance*, 51, 4 (1996) : 1097-1138.
- Tufano, P. "The Determinants of Stock Price Exposure : Financial Engineering and the Gold Mining Industry," *Journal of Finance*, 53, 3 (1998) : 1015-52.

### 章末問題

- 3.1** (a)売りヘッジおよび(b)買いヘッジは、どのような状況下で行うのが適切か。
- 3.2** 先物契約を利用してヘッジを行う場合のベース・リスクについて説明せよ。
- 3.3** 完全ヘッジの意味を説明せよ。また、完全ヘッジは、非完全ヘッジよりも常によい結果をもたらすことになるかを説明せよ。
- 3.4** 最小分散ヘッジポートフォリオがヘッジなしのポートフォリオにな

るのはどのようなときか。

- 3.5** 企業の財務担当者は、ある特定のリスクに対する企業のエクスポージャーをヘッジしないかもしれない。その理由を三つ述べよ。
- 3.6** 商品価格の四半期変動の標準偏差が0.65ドル、その商品の先物価格の四半期変動の標準偏差が0.81ドル、二つの価格変動の相関係数が0.8であったと仮定する。3カ月物先物契約での最適ヘッジ比率はいくらになるか。それはどういうことを意味しているか説明せよ。
- 3.7** ある企業が時価2,000万ドルのポートフォリオを保有しており、そのベータは1.2である。そのリスクをヘッジするためにS&P500先物を用いる。現在の指数先物価格を1,080とする。先物の取引単位は指数の250ドル倍である。そのとき、リスクを最小にするのはどのようなヘッジか。また、ポートフォリオのベータを0.6に減らすにはどうすればよいか。
- 3.8** CBOTのトウモロコシ先物の限月は、3月、5月、7月、9月、12月である。ヘッジの期限が次の場合、どの限月を利用すべきか。(a)6月、(b)7月、(c)1月。
- 3.9** 完全ヘッジによって、将来取引する資産の価格を常に現在の現物価格に固定することができるか。それについて考えを述べよ。
- 3.10** 売りヘッジの場合には、ベースが予想外に強くなると利益を得て、逆に弱まると損失を被る。その理由を説明せよ。
- 3.11** あなたが米国に電気製品を輸出している日本企業の財務担当者であるとして、為替リスクをヘッジする戦略とそれを実行するために経営者をどう説得するかについて考えよ。
- 3.12** 3.3節の例3.2で、その企業はヘッジ比率を0.8にすると決めた。どのようなヘッジが行われ、その結果はどのようになるか。
- 3.13** 「最小分散ヘッジ比率が1.0であれば、完全ヘッジである」。この主張は正しいかを説明せよ。
- 3.14** 「ベース・リスクがなければ、最小分散ヘッジ比率は1.0である」。この主張は正しいかを説明せよ。

- 3.15** 「先物価格が現物価格よりたいてい低い資産に対しては、買いヘッジは特に魅力的にみえる」。この主張を説明せよ。
- 3.16** 生牛の価格（1ポンド当たりのセント単位）の月次変動の標準偏差は1.2、直近限月の先物価格の月次変動の標準偏差は1.4、先物価格変動と現物価格変動の相関係数は0.7とする。現在10月15日で、精肉業者が11月15日に200,000ポンドの生牛を購入する契約をしている。精肉業者は、12月限生牛先物を用いてそのリスクをヘッジしたいと考えている。先物の取引単位は生牛40,000ポンドである。精肉業者はどのようなヘッジ戦略を行うべきか。
- 3.17** あるトウモロコシ農家はいう。「ヘッジに先物契約は使わない。われわれの本当のリスクはトウモロコシの価格ではなく、作物すべてが天候によって失われることだ」。これについて論ぜよ。農家はトウモロコシの期待収穫高を予想し、その予想収穫高に対して価格の固定化を行うべきであろうか。
- 3.18** 7月1日に、ある投資家がある株式を50,000株保有している。その株価は1株30ドルである。その投資家は翌月の市場変動に対してヘッジをしたいと考えており、9月限ミニS&P500先物の利用を決めている。指数先物価格は現在1,500で、先物の取引単位は指数の50ドル倍である。保有する株式のペータが1.3であるとき、投資家はどういう戦略をとるべきか。
- 3.19** 表3.5で、その企業はヘッジ比率を1.5にすることを決めている。その決定はヘッジ方法とその結果にどのような影響を及ぼすか。
- 3.20** 先物契約はヘッジに利用される。先物契約の値洗いが資金繰りに問題を引き起こす可能性がある理由を説明せよ。
- 3.21** ある航空会社の経営者が次のようなことを主張した。「われわれが原油先物をヘッジに使用するメリットはない。なぜなら、将来の原油価格は、先物価格よりも高くなる可能性と同程度に低くなる可能性もあるからだ」。この観点について論ぜよ。
- 3.22** 1年物の金のリース・レートを1.5%，同じく1年物の無リスク金利

を5.0%とする。これらはともに1年複利である。ビジネス寸見3.1の議論をふまえ、現物価格が600ドルのときに、ゴールドマンサックス証券が提示する金の1年物フォワード価格の上限を計算せよ。

## 宿題

- 3.23 以下の表は、ある商品の現物価格と先物価格の月次変化を示したものである。最小分散ヘッジ比率を本データを用いて計算せよ。

|         |       |       |       |       |       |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 現物価格の変化 | +0.50 | +0.61 | -0.22 | -0.35 | +0.79 |
| 先物価格の変化 | +0.56 | +0.63 | -0.12 | -0.44 | +0.60 |
| 現物価格の変化 | +0.04 | +0.15 | +0.70 | -0.51 | -0.41 |
| 先物価格の変化 | -0.06 | +0.01 | +0.80 | -0.56 | -0.46 |

- 3.24 現在を7月16日とする。ある企業が時価1億ドルの株式ポートフォリオを保有しているとする。ポートフォリオのベータは1.2で、その企業はCMEの12月限S&P500先物を使って、7月16日から11月16日までの間、ポートフォリオのベータを0.5に抑えたいと思っている。現時点の指数先物価格は1,000、先物の取引単位は指数の250ドル倍である。

- (a) その企業はどのようなポジションをとるべきか。  
(b) 企業が方針を変更し、ポートフォリオのベータを1.2から1.5に増加させることを決定したとする。その企業は先物でどのようなポジションをとるべきか。

- 3.25 あるファンドマネジャーが、ベータ0.87の時価5,000万ドルのポートフォリオを保有している。そのマネジャーは今後2カ月における市場動向に关心があり、その期間のリスクを満期3カ月のS&P500先物を使ってヘッジしようと計画している。指数の現時点でのレベルは1,250で、先物の取引単位は指数の250倍、無リスク金利は年率

6 %, 指数の配当率は年率 3 %, 現在の 3 カ月物先物価格は 1,259 とする。

- (a) ファンドマネジャーは、今後 2 カ月の市場の動きに対するすべてのエクスポージャーを取り除くには、どのようなポジションをとるべきか。
- (b) 2 カ月後の指数のレベルが 1,000, 1,100, 1,200, 1,300, 1,400 となつたとき、あなたの戦略によってファンドマネジャーの収益はどのような影響を受けるかを計算せよ。1 年物の先物価格は、同時期の指数の水準に比べて 0.25 % 高いと仮定せよ。

**3.26** 2007 年 10 月に、ある企業が 2008 年 2 月、2008 年 8 月、2009 年 2 月、2009 年 8 月の各月に、銅 100 万ポンドの購入を計画しているとしよう。この企業は、将来の価格変動リスクをヘッジするために、NYMEX の COMEX 部門で取引されている先物契約の利用を決めた。先物契約の取引単位は銅 25,000 ポンドで、当初証拠金は 1 契約当たり 2,000 ドル、維持証拠金は 1 契約当たり 1,500 ドルである。また、この企業はエクスポージャーの 80 % をヘッジする方針とする。13 カ月先の限月まで先物契約の流動性は十分あるとして、ヘッジ戦略を考えよ。ただし、3.4 節で説明したヘッジのテーリングに伴う調整は行わないとする。

当日と将来時点での市場価格（1 ポンド当たりのセント表示）が以下のように与えられていると仮定せよ。

| 日付              | 07/10  | 08/2   | 08/8   | 09/2   | 09/8   |
|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 現物価格            | 372.00 | 369.00 | 365.00 | 377.00 | 388.00 |
| 2008 年 3 月限先物価格 | 372.30 | 369.10 |        |        |        |
| 2008 年 9 月限先物価格 | 372.80 | 370.20 | 364.80 |        |        |
| 2009 年 3 月限先物価格 |        | 370.70 | 364.30 | 376.70 |        |
| 2009 年 9 月限先物価格 |        |        | 364.20 | 376.50 | 388.20 |

そのとき、考えたヘッジ戦略が、実際の銅の購入価格にどのような影響を与えるかを述べよ。また、2007 年 10 月での当初証拠金はいくらか。さらに、この企業は証拠金の追加差入れが必要となるか。

## 付 錄

### 最小分散ヘッジ比率の公式の証明

時点  $t_1$  にある資産を  $N_A$  単位売却することを想定して、それと似た資産  $N_F$  単位に対する先物契約による売りヘッジを時点  $t_1$  に行うとする。そのとき、ヘッジ比率  $h$  は

$$h = \frac{N_F}{N_A} \quad (3A.1)$$

である。ヘッジポジションの損益を含めたその資産を売却したときの総実現額を  $Y$  とすると、

$$Y = S_2 N_A - (F_2 - F_1) N_F$$

すなわち

$$Y = S_1 N_A + (S_2 - S_1) N_A - (F_2 - F_1) N_F \quad (3A.2)$$

となる。ここで  $S_1$  と  $S_2$  はそれぞれ時点  $t_1$  と時点  $t_2$  での資産価格、 $F_1$  と  $F_2$  はそれぞれ時点  $t_1$  と時点  $t_2$  での先物価格である。 $(3A.1)$  式より、 $(3A.2)$  式の  $Y$  は次のように表される。

$$Y = S_1 N_A + N_A (\Delta S - h \Delta F) \quad (3A.3)$$

ここで、

$$\Delta S = S_2 - S_1, \quad \Delta F = F_2 - F_1$$

である。 $S_1$  と  $N_A$  は時点  $t_1$  で既知であるため、 $(3A.3)$  式における  $Y$  の分散は、 $\Delta S - h \Delta F$  の分散が最小になるときに最小となる。 $\Delta S - h \Delta F$  の分散は

$$v = \sigma_S^2 + h^2 \sigma_F^2 - 2h\rho\sigma_S\sigma_F$$

である。ここで  $\sigma_S$ 、 $\sigma_F$ 、 $\rho$  は 3.4 節で定義されたものである。これより、

$$\frac{dv}{dh} = 2h\sigma_F^2 - 2\rho\sigma_S\sigma_F$$

となる。 $d^2 v / dh^2$  は常に正なので、上式をゼロとおいて、分散を最小化させるヘッジ比率は  $h = \rho\sigma_S/\sigma_F$  と求まる。

# 第4章

## 金利

金利は事実上すべてのデリバティブを評価する際のファクターの一つであり、今後本書で紹介する多くのテーマのなかで際立った性質をもつものである。本章では、金利がどのように計測、分析されるかについて、関連する基本的事項を述べる。そこでは金利を定義するために用いる複利の回数や、デリバティブの分析に幅広く用いられる金利の連続複利の意味について説明する。ゼロ・レート、パー・イールド、およびイールドカーブにも言及し、債券の評価について論じる。さらに、デリバティブ・トレーディングデスクがゼロクーポン・トレジャリー・レートを計算する際の一般的な手順について、その概略を示す。また、フォワード・レートや金利先渡契約にも触れ、金利の期間構造について、異なる理論を吟味する。最後に、金利変化に対する債券価格の感応度を表している、デュレーションやコンペキシティの使い方を紹介する。

第6章では金利先物契約について言及し、金利のエクスポージャーをヘッジする際にデュレーションがどのように利用されるかを示す。なお、説明を簡単にするために、本章ではデイカウント・コンベンションを無視する。デイカウント・コンベンションの性質とそれが金利計算に与える影響については、第6章と第7章で論じる。

## 4.1 金利の種類

金利とは、個々の状況において、借手が貸手に約束する支払金額を定義するものである。どの通貨で考えるにしても、数多くのさまざまな種類の金利が常に呈示されている。そのなかには、不動産抵当貸付金利、預本金利、最優遇貸出金利などが含まれる。それぞれの状況で適用される金利は信用リスクに依存する。それは資金の借手がデフォルトし、貸手に対して元利金が約束どおりに支払われないリスクである。信用リスクが高くなればなるほど、借手が約束する金利は高くなる。

### トレジャリー・レート

トレジャリー・レートとは、投資家が短期国債や長期国債を保有することによって得る利子率のことであり、国債は政府の自国通貨での借入れで利用される商品である。たとえば、日本のトレジャリー・レートは日本政府が円を借りる際の利子率、米国のトレジャリー・レートは米国政府が米ドルを借りるときの利子率、などである。通常、政府は自国通貨での債務に関しては、デフォルトする可能性がないと仮定される。したがって、短期国債または長期国債を購入している投資家は元利金が約束どおり支払われると確信しているという意味で、トレジャリー・レートは無リスク金利とみなされる。

トレジャリー・レートは国債の価格付けで利用されるとともに、デリバティブのペイオフの定義にも利用されるので重要である。しかし、(特に、店頭市場で活発な取引を行っている) デリバティブのトレーダーは、無リスク金利としてトレジャリー・レートを使わずに、LIBOR レートを使うことが

多い。

## LIBOR

LIBOR は London Interbank Offered Rate の略である。ある特定の銀行によって呈示される LIBOR は、その銀行が他の銀行に対して大口預金を預け入れる水準を示す金利である。大手銀行やその他の金融機関は、すべての主要通貨における期間12カ月までの LIBOR を呈示している。1 カ月物 LIBOR は 1 カ月間の預金に対してオファーされる金利、3 カ月物 LIBOR は 3 カ月間の預金に対してオファーされる金利、といった具合である。

銀行への預金は銀行に対する貸出とみなすことができる。したがって、銀行は他の銀行の LIBOR を受け入れ、そのレートでの預金を受け取るために、ある程度の信用レベルを満たす必要がある。典型的なレベルとしては格付で AA が必須である(注1)。

格付 AA の金融機関は、LIBOR を自己資本の短期機会コストとみなしている。それは、他の金融機関が呈示する LIBOR で短期資金を借り入れることができるからである。一方、自社が呈示する LIBOR は、他の金融機関に余剰資金を貸し出す際の金利を決定する。LIBOR レートには完全に信用リスクがないわけではない。格付 AA の金融機関が短期の LIBOR ローンに対してデフォルトする可能性は、わずかながらある。しかし、それは無リスクに近いものである。デリバティブ・トレーダーは、LIBOR レートをトレジャリー・レートよりも“真の”無リスク金利であると考えている。それは、税金や規制上の数多くの問題がトレジャリー・レートを人為的に低くしているからである(ビジネス寸見4.1参照)。デリバティブ市場における一般的な慣習との整合をとるためにには、本書での“無リスク金利”とは LIBOR レートと解釈したほうがよい(注2)。

LIBOR レートに加え、大手銀行は LIBID レートも呈示している。LIBID

---

(注 1) 第22章で説明するように、格付機関 S&P が企業に付与する最上位の格付は AAA、その次が AA である。ライバルの格付機関 Moody's では、対応する格付はそれぞれ Aaa と Aa である。

は London Interbank Bid Rate の略であり、他の銀行から預金を受け入れるレートである。いつの時点でも、表示される LIBID レートと LIBOR レートには通常わずかな開きがある (LIBID よりも LIBOR のほうが高い)。レート自体は活発な銀行間取引によって決定され、銀行間市場での資金の需要と供給が等しくなるように、時々刻々と変化している。たとえば、米ドルを 3 カ月間借りたい銀行が米ドルを 3 カ月間貸したい銀行より増えれば、銀行が表示する 3 カ月物ドル LIBID と LIBOR は高くなる。同様に、米ドルを 3 カ月間貸したい銀行が借りたい銀行より増えれば、3 カ月物ドル LIBID と LIBOR は低くなる。LIBOR と LIBID の取引は、ユーロカレンシー市場 (Eurocurrency market) として知られる市場で行われている。ユーロカレンシー市場はどの国からも管理を受けていない。

#### ビジネス寸見4.1 無リスク金利とは何か？

金融機関で働くデリバティブ・トレーダーにとって、短期国債と長期国債の金利が無リスク金利の正しいベンチマークであると仮定するのが自然である。しかし実際には、デリバティブ・トレーダーは短期の無リスク金利として、LIBOR レートを使うことが多い。その理由は、彼らは LIBOR を資本の機会コストとみているからである (4.1節参照)。トレーダーは、国債レートは低すぎて無リスク金利として利用できない理由として、以下のことを主張している。

1. 金融機関は多くの規制によって、短期国債および長期国債を購入する必要があり、国債の需要を増大させている。その結果、債券価格は高く、債券イールドは低くなっている。
2. 国債への投資を優遇して、それに必要とされる銀行の自己資本額は、非常にリスクの小さい他の金融商品への投資に必要とされ

(注 2) 第 6 章と第 7 章で紹介するように、より正確にいうと、無リスク金利は LIBOR、スワップ、およびユーロ・ドル金利先物価格から導き出される金利として解釈される。

る自己資本額よりも相当小さい。

3. 米国では、国債投資はそれ以外のほとんどの債券に対する投資と比べ、州税が徴収されないといった税制上の優遇がある。

LIBOR は格付 AA の企業による短期借入レートにおおむね等しい。したがって、LIBOR は無リスク金利の完全な代理変数ではない。その理由は、格付 AA の借手が LIBOR レートによるローン期間中にデフォルトする可能性がわずかながらあるからである。しかしトレーダーは、LIBOR が無リスク金利の最もすぐれた代理変数であると思っている。LIBOR レートは向こう 12 カ月まで呈示されている。第 6 章と第 7 章で説明するように、無リスク金利の代理変数を 12 カ月を超えて拡張するのには、ユーロ・ドル金利先物市場とスワップ市場が使われている。

## レポ・レート

トレーディングのための活動資金は、レポ (repo) すなわち買戻条件付売却取引 (repurchase agreement) によって調達される場合もある。レポは、証券を所有する投資ディーラーが相手企業に証券を直ちに売却し、後日いくらか高い価格で買い戻すという契約である。これは、相手企業が投資ディーラーにローンを提供していることになり、証券の売却価格と買戻価格との差額が企業の稼ぎ出す利子に相当する。このときの金利がレポ・レート (repo rate) と呼ばれるものである。注意深く契約の条項を取り決めれば、この貸出にはほとんど信用リスクがない。それは、仮に借手が契約を守らなくても、貸手の企業には証券が残り、逆に貸手の企業が契約に応じなくても、証券の元の所有者には現金が残るからである。

レポとして最もよく用いられるものは、オーバーナイト・レポ (overnight repo) と呼ばれる日々契約が更新されるものである。しかし、ターム・レポ (term repo) と呼ばれる、より契約期間の長い契約が利用されることもある。

## 4.2 金利の計算

銀行による1年物預金金利年率10%という表示は、わかりやすくかつ曖昧さがないように思われる。しかし実際には、その正確な意味は金利の計測方法に依存している。

金利が1年複利で計算されているならば、銀行の金利10%の表示は、1年後に100ドルが、

$$100 \times 1.1 = 110 \text{ ドル}$$

になることを意味する。一方、金利が半年複利で計算されているならば6カ月ごとに5%の利子が入り、それが再投資される。この場合、1年後に100ドルは、

$$100 \times 1.05 \times 1.05 = 110.25 \text{ ドル}$$

になる。また、金利が四半期複利で計算されているならば、3カ月ごとに2.5%の利子が入り、それが残りの期間に再投資される。この場合、1年後に100ドルは、

$$100 \times 1.025^4 = 110.38 \text{ ドル}$$

になる。表4.1は、複利の回数をさらにあげていったときにどうなるかを示したものである。

複利の回数は金利を表示する際の単位を定義する。一つの複利回数のレートは異なる複利回数のレートに変換できる。たとえば、表4.1において1年

表4.1 金利が年率10%のとき、複利計算の回数が増加することによる1年後の100ドルの価値の変化

| 複利の回数           | 1年後の100ドルの価値（ドル） |
|-----------------|------------------|
| 1 年 ( $m=1$ )   | 110.00           |
| 半 年 ( $m=2$ )   | 110.25           |
| 3 カ月 ( $m=4$ )  | 110.38           |
| 1 カ月 ( $m=12$ ) | 110.47           |
| 1 週 ( $m=52$ )  | 110.51           |
| 1 日 ( $m=365$ ) | 110.52           |

複利10.25%は半年複利10%に等しい。複利の回数の違いは距離表示におけるキロとマイルの違いに類似している。それらは表示単位の違いである。

これまでの結果を一般化するために、投資金額  $A$ 、投資期間  $n$  年、年利率  $R$  の投資を考えよう。1年複利の場合には、この投資の最終価値は

$$A(1+R)^n$$

となる。年間  $m$  回の複利だとすると、投資の最終価値は

$$A\left(1+\frac{R}{m}\right)^{mn} \quad (4.1)$$

となる。 $m=1$ とした場合の金利は、等価1年複利金利 (equivalent annual interest rate) と呼ばれることもある。

### 連続複利

複利の回数を無限大にした極限は、連続複利 (continuous compounding) (注3) として知られる。連続複利では、金額  $A$  を利率  $R$  で  $n$  年投資すると、価値は

$$Ae^{Rn} \quad (4.2)$$

に増える。ここで、 $e=2.71828$ である。指數関数はたいていの計算機に組み入れられているので、(4.2)式は容易に計算できる。表4.1の例では  $A=100$ 、 $n=1$ 、 $R=0.1$ となるので、 $A$  の価値は連続複利の場合、

$$100e^{0.1}=110.52$$

に増える。これは（小数点以下第2位までは）1日複利での価値と等しくなっており、実用上は、連続複利は1日複利にほぼ等しいと考えてもよい。連続複利ベースの利率  $R$  で  $n$  年間複利運用したときの最終価値は、その元金に  $e^{Rn}$ を掛けねばよい。また、それを連続複利ベースの利率  $R$  で  $n$  年間割り戻すには、 $e^{-Rn}$ を掛けねばよい。

本書では特に断らなければ金利は連続複利とする。1年ベース、半年ベース、またはその他の複利計算に慣れている読者にとっては、若干違和感があ

---

(注3) 保険数理人（アクチュアリー）はしばしば連続複利を force of interest と呼ぶ。

るかもしれない。しかし、デリバティブの価格付けにおいて連続複利は広範に用いられているので、その考えにいまから慣れておくことには意味があるだろう。

$R_c$ を連続複利での金利とし、それと等価な年  $m$  回複利での金利を  $R_m$  とする。このとき、(4.1)式と(4.2)式より、

$$Ae^{R_c n} = A \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

すなわち

$$e^{R_c} = \left(1 + \frac{R_m}{m}\right)^m$$

となる。これは、

$$R_c = m \ln \left(1 + \frac{R_m}{m}\right) \quad (4.3)$$

や

$$R_m = m (e^{R_c/m} - 1) \quad (4.4)$$

とも書ける。これらは年  $m$  回複利から連続複利への変換式、あるいはその逆の変換式として用いられる。自然対数関数  $\ln$  は指數関数の逆関数で、ほとんどの計算機に組み入れられている。 $y = \ln x$  ならば  $x = e^y$  が成り立つ。

#### 【例4.1】

年率10%の半年複利の場合について考える。(4.3)式に  $m = 2$ ,  $R_m = 0.1$  を代入すると、等価な連続複利は

$$2 \ln \left(1 + \frac{0.1}{2}\right) = 0.09758$$

より、年率9.758%となる。

#### 【例4.2】

ある貸手が、年4回利払いのローン金利を連続複利で年率8%と呈示している。(4.4)式に  $m = 4$ ,  $R_c = 0.08$  を代入すると、年4回複利では

$$4(e^{0.08/4} - 1) = 0.0808$$

より、年率8.08%となる。つまり、1,000ドルのローンでは20.20ドルの利払いが3ヶ月ごとに要求されることになる。

### 4.3 ゼロ・レート

$n$ 年物ゼロクーポン・レートとは、当日スタートの $n$ 年投資に対する利子率で、元利金はすべて $n$ 年後に一括で払い戻され、途中の利払いはない。 $n$ 年物ゼロクーポン・レートは、 $n$ 年物スポット・レート、 $n$ 年物ゼロ・レート、もしくは単に $n$ 年物ゼロとも呼ばれる。いま、5年物ゼロ・レートが連続複利で年率5%とすると、100ドルを5年間これに投資すれば、

$$100 \times e^{0.05 \times 5} = 128.40$$

に増えることになる。われわれが市場で直接観測できる金利の多くは、純粹なゼロ・レートではない。クーポン6%の5年物国債を考える。この債券のリターンには、5年後の満期より前に支払われるクーポンが含まれており、この国債の価格だけからは5年物トレジャリー・ゼロ・レートは決定できない。本章の後半で、トレジャリー・ゼロ・レートを利付国債の市場価格からいかに推定するかについて論じることにする。

### 4.4 債券の価格付け

ほとんどの債券には定期的にクーポンがついている。また、債券の元本（または額面）は満期に償還される。債券の理論価格は、債券の所有者が受け取るすべてのキャッシュフローの現在価値として計算することができる。債券トレーダーは債券から生じるすべてのキャッシュフローに対して同じ割引率を適用することもあるが、より正確な手法では、それぞれのキャッシュフローに異なるゼロ・レートを用いる。

連続複利のトレジャリー・ゼロ・レートが表4.2で与えられているとする（これらがどのように求められているかについては後で説明する）。このとき、額

表4.2 トレジャリー・ゼロ・レート

| 満期<br>(年) | ゼロ・レート (%)<br>(連続複利) |
|-----------|----------------------|
| 0.5       | 5.0                  |
| 1.0       | 5.8                  |
| 1.5       | 6.4                  |
| 2.0       | 6.8                  |

面100ドル、クーポン6%，年2回利払いの2年物米国債の価格について考える。初回のクーポン3ドルの現在価値は、3ドルを5.0%で6カ月間分割り引いて求める。2回目のクーポン3ドルの現在価値は、3ドルを5.8%で1年間分割り引いて求める、という具合に計算していくと、この債券の理論価格は、

$$3e^{-0.05 \times 0.5} + 3e^{-0.058 \times 1.0} + 3e^{-0.064 \times 1.5} + 103e^{-0.068 \times 2.0} = 98.39$$

すなわち98.39ドルと求まる。

### 債券イールド

債券イールドとは、それをただ一つの割引率としてすべてのキャッシュフローに適用して計算した債券価格が、その債券の市場価値に等しくなるような割引率のことである。先に計算した債券の理論価格98.39ドルが、この債券の市場価値に等しい（すなわち、債券の市場価値がちょうど表4.2のデータに一致している）と仮定する。 $y$ を連続複利ベースの債券イールドとすると、

$$3e^{-y \times 0.5} + 3e^{-y \times 1.0} + 3e^{-y \times 1.5} + 103e^{-y \times 2.0} = 98.39$$

が成り立つ。この方程式は（試行錯誤の）反復法を用いて解くことができ、 $y=6.76\%$ が得られる（注4）。

(注4) ここに現れるような  $f(y)=0$  という形の非線形方程式を解く方法の一つに、Newton-Raphson 法がある。まず、解の推定値  $y_0$  から始めて、 $y_{i+1} = y_i - f(y_i)/f'(y_i)$  という式を繰り返し用いて、 $y_1, y_2, y_3, \dots$  とよりよい解の推定値を求めていくものである。ここで、 $f'(y)$  は  $y$  に関する  $f$  の導関数である。

## パー・イールド

与えられた満期に対するパー・イールド (par yield) とは、債券価格がその債券の額面（元本と同じ）に等しくなるようなクーポン・レートである。通常、債券は半年ごとに利払いがあると仮定する。ある 2 年利付債のクーポンが年当り  $c$  (すなわち、6 カ月ごとに  $c/2$ ) であるとする。表4.2のゼロクーポン・レートを用いると、この債券の価値は、

$$\frac{c}{2}e^{-0.05 \times 0.5} + \frac{c}{2}e^{-0.058 \times 1.0} + \frac{c}{2}e^{-0.064 \times 1.5} + \left(100 + \frac{c}{2}\right)e^{-0.068 \times 2.0} = 100$$

となるとき額面100に等しくなる。この方程式は直接解くことができ、 $c=6.87$ となる。よって、2年物パー・イールドは半年複利で年率 6.87% (すなわち連続複利で 6.75%) となる。

より一般には、 $d$  を債券の満期に受け取る 1 ドルの現在価値、 $A$  を各利払日に 1 ドル支払う現金の現在価値、 $m$  を年当りの利払回数とすると、パー・イールド  $c$  は

$$100 = A \frac{c}{m} + 100d$$

を満たす。よって、

$$c = \frac{(100 - 100d)m}{A}$$

となる。上の例では、 $m=2$ 、 $d=e^{-0.068 \times 2}=0.87284$ 、

$$A = e^{-0.05 \times 0.5} + e^{-0.058 \times 1.0} + e^{-0.064 \times 1.5} + e^{-0.068 \times 2.0} = 3.70027$$

である。この式からもパー・イールドが年率 6.87% であることが確かめられる。これは、半年複利のレートであることに注意せよ。連続複利の場合は年率 6.75% になる。

## 4.5 トレジャリー・ゼロ・レートの決定

トレジャリー・ゼロ・レートを計算する一つの方法は、いわゆるストリップス債のイールドから求めることである。ストリップス債は国債の元本部分

とクーポン部分が分離されて、それぞれの部分が販売される割引債である。

トレジャリー・ゼロ・レートを決めるもう一つの方法は、割引国債と利付国債から求める方法である。最も一般的な方法は、ブートストラップ法(bootstrap method)として知られる方法である。この方法の性質を具体例で説明するために、表4.3の五つの債券に関する価格データを用いる。初めの三つの債券にはクーポンがないので、これらの債券の満期に対応するゼロ・レートは容易に計算できる。3カ月物債券は、初期投資97.5に対し、3カ月で2.5の収益を生む。このとき、3カ月物ゼロ・レートは3カ月複利で年率 $(4 \times 2.5)/97.5 = 10.256\%$ となる。ゼロ・レートを連続複利で与えるときは、(4.3)式より、

$$4\ln\left(1 + \frac{0.10256}{4}\right) = 0.10127$$

すなわち、年率 10.127%となる。6カ月物債券は、初期投資94.9に対し、6カ月で5.1の収益を生む。このとき、6カ月物ゼロ・レートは半年複利で年率 $(2 \times 5.1)/94.9 = 10.748\%$ となる。ゼロ・レートを連続複利で与えるときは、(4.3)式より、

$$2\ln\left(1 + \frac{0.10748}{2}\right) = 0.10469$$

すなわち、年率 10.469%となる。同様に、1年物ゼロ・レートは連続複利で、

表4.3 ブートストラップ法に使用するデータ

| 債券元本<br>(ドル) | 満期<br>(年) | 年クーポン*<br>(ドル) | 債券価格<br>(ドル) |
|--------------|-----------|----------------|--------------|
| 100          | 0.25      | 0              | 97.5         |
| 100          | 0.50      | 0              | 94.9         |
| 100          | 1.00      | 0              | 90.0         |
| 100          | 1.50      | 8              | 96.0         |
| 100          | 2.00      | 12             | 101.6        |

\*半年に1回、この額の半分が支払われると仮定する。

$$\ln\left(1+\frac{10}{90}\right)=0.10536$$

すなわち、年率 10.536%となる。

四つ目の債券の満期は1.5年である。支払は次のとおりである。

6カ月後：4ドル

1年後：4ドル

1.5年後：104ドル

先に行った計算により、6カ月後の支払に対する割引率は10.469%，1年後の支払に対する割引率は10.536%と求まっている。また、この債券の価格96ドルは、債券保有者が受け取る全支払額の現在価値に等しくなければならぬ。このことから1.5年物ゼロ・レートをRで表すと、

$$4e^{-0.10469 \times 0.5} + 4e^{-0.10536 \times 1.0} + 104e^{-R \times 1.5} = 96$$

が成り立つ。これより

$$e^{-1.5R} = 0.85196$$

となり、

$$R = -\frac{\ln(0.85196)}{1.5} = 0.10681$$

と求まる。したがって、1.5年物ゼロ・レートは10.681%となる。これは6カ月物レート、1年物レート、および表4.3のデータに適合する唯一のゼロ・レートである。

同様に2年物ゼロ・レートは、6カ月物ゼロ・レート、1年物ゼロ・レート、1.5年物ゼロ・レート、および表4.3の五つ目の債券に関する情報から計算できる。Rを2年物ゼロ・レートとすると、

$$6e^{-0.10469 \times 0.5} + 6e^{-0.10536 \times 1.0} + 6e^{-0.10681 \times 1.5} + 106e^{-R \times 2.0} = 101.6$$

となり、これより  $R=0.10808$ 、すなわち10.808%が求まる。

これまで計算してきたゼロ・レートが表4.4にまとめられている。ゼロ・レートを満期の関数として表したグラフはゼロ・カーブとして知られる。一般にゼロ・カーブは、ブートストラップ法を用いて決定された点の間は線形であると仮定する（この例では、1.25年ゼロ・レートが $0.5 \times 10.536 + 0.5 \times$

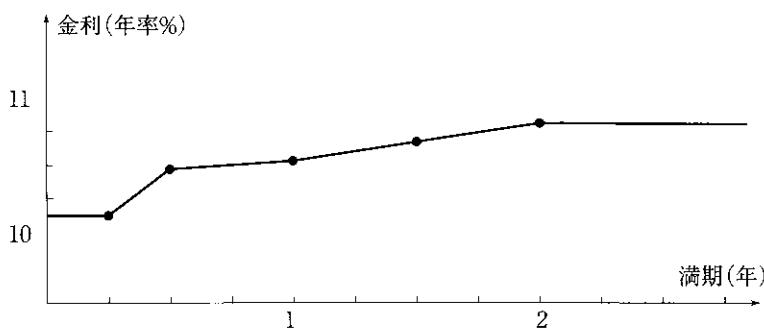
表4.4 表4.3のデータから計算された連続  
複利ベースのゼロ・レート

| 満期<br>(年) | ゼロ・レート (%)<br>(連続複利) |
|-----------|----------------------|
| 0.25      | 10.127               |
| 0.50      | 10.469               |
| 1.00      | 10.536               |
| 1.50      | 10.681               |
| 2.00      | 10.808               |

$10.681 = 10.6085\%$ となることを意味している)。また、通常ゼロ・カーブは、最初の点以前と最後の点以降は水平になると仮定する。図4.1は、この仮定を用いて、求めたデータに対するゼロ・カーブを示している。より満期の長い債券を用いれば、ゼロ・カーブは2年以上の満期に対してもより正確に決めることができる。

実際には、満期がちょうど1.5年、2年、2.5年などになる債券があることはまれである。アナリストがよく用いるアプローチは、ゼロ・カーブを計算する前に債券価格のデータを補間するというものである。たとえば、クーポン6%の2.3年物利付債の価格が98で、クーポン6.5%の2.7年物利付債の価格が99のとき、クーポン6.25%の2.5年物利付債の価格が98.5であると仮定することになる。

図4.1 ブートストラップ法によって計算されたゼロ・レート



## 4.6 フォワード・レート

フォワード・レートとは、現時点のゼロ・レートと整合的な将来の期間に適用される金利のことである。具体例として、表4.5の2列目のゼロ・レートを用いて、フォワード・レートを計算してみよう。レートを連続複利とすると、1年物ゼロ・レートが年率3%なので、現時点で100ドル投資すれば投資家は1年後ならば $100e^{0.03 \times 1} = 103.05$ ドルを受け取れ、2年物ゼロ・レートが年率4%なので、2年後ならば $100e^{0.04 \times 2} = 108.33$ ドルを受け取れる。

表4.5では、2年目のフォワード・レートは年率5%となっている。このレートは、1年目の終わりから2年目の終わりまでの期間に適用される、ゼロ・レートから決まる金利である。その値は、年率3%の1年物ゼロ・レートと年率4%の2年物ゼロ・レートから計算することができる。つまり、最初の1年間は年率3%で運用し、それを2年目につなげる運用が2年間トータルとしては年率4%の運用となるようなレートとして求まる。年率5%が正しい答であることを示すために、たとえば100ドルを投資する場合で考えてみよう。最初の1年は年率3%，次の1年は年率5%であるから、2年後の金額は

$$100e^{0.03 \times 1}e^{0.05 \times 1} = 108.33 \text{ ドル}$$

となる。一方、年率4%で2年間運用した場合には

$$100e^{0.04 \times 2}$$

となり、これも同じ108.33ドルとなる。これは、レートを連続複利で表し、

表4.5 フォワード・レートの計算

| 年<br>(n) | ゼロ・レート<br>(年率%) | n年目のフォワード・レート<br>(年率%) |
|----------|-----------------|------------------------|
| 1        | 3.0             |                        |
| 2        | 4.0             | 5.0                    |
| 3        | 4.6             | 5.8                    |
| 4        | 5.0             | 6.2                    |
| 5        | 5.3             | 6.5                    |

連続した期間に対するフォワード・レートが与えられたとき、期間全体に対するゼロ・レートは各期間のフォワード・レートの平均に等しい、という一般的な結果の一例である。この例では、最初の1年は3%，次の1年は5%で、2年間の平均は4%となっている。レートが連続複利でない場合には、このことは近似的にしか正しくない。

同様に、3年目のフォワード・レートは、年率4%の2年物ゼロ・レートと年率4.6%の3年物ゼロ・レートから計算でき、その値は年率5.8%となる。年率4%で2年間投資した後、さらに続けて年率5.8%で1年間運用すれば、年率4.6%で3年間運用したことと同じになるからである。このほかのフォワード・レートも同様の方法で計算され、それらを表の3列目に示した。一般的に、満期  $T_1$  のゼロ・レートを  $R_1$ 、満期  $T_2$  のゼロ・レートを  $R_2$  とすれば、期間  $T_1$  から  $T_2$  までのフォワード・レートは次式で与えられる。

$$R_F = \frac{R_2 T_2 - R_1 T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.5)$$

この式を用いて、表4.5のデータから4年目のフォワード・レートを計算すると、 $T_1=3$ 、 $T_2=4$ 、 $R_1=0.046$ 、 $R_2=0.05$ より  $R_F=0.062$ となる。

(4.5)式は

$$R_F = R_2 + (R_2 - R_1) \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.6)$$

と書ける。この式から、期間  $T_1$  から  $T_2$  でゼロ・レートが右上がり、すなわち  $R_2 > R_1$  の場合には、 $R_F > R_2$ となることがわかる（すなわち、満期  $T_2$  のフォワード・レートは満期  $T_2$  のゼロ・レートよりも高い）。ゼロ・レートが右下がり、すなわち  $R_2 < R_1$  の場合には、 $R_F < R_2$ となる（すなわち、フォワード・レートは満期  $T_2$  のゼロ・レートよりも低い）。(4.6)式で、 $T_2$  を  $T_1$  に近づける極限をとり、その極限の値を  $T$  と書き直すと、

$$R_F = R + T \frac{\partial R}{\partial T}$$

が得られる。ここで、 $R$  は満期  $T$  のゼロ・レートである。このようにして求められた  $R_F$  の値は、満期  $T$  における瞬間のフォワード・レート (instantaneous forward rate) である。

taneous forward rate) として知られている。これは時点  $T$  スタートの非常に短い期間に対して適用されるフォワード・レートである。 $P(0, T) = e^{-RT}$  なので、瞬間のフォワード・レートに対する式は、

$$R_F = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(0, T)$$

と表すこともできる。

借り入れと投資に適用されるゼロ・レートは同じであると仮定すると（これは大手金融機関においてはそんなに不合理な仮定ではない）、投資家は先の期間に対し、その期間の金利をフォワード・レートで固定することができる。たとえば、ゼロ・レートが表4.5で与えられているとする。投資家は100ドルを年率3%で1年間借り入れ、同時にその資金を4%で2年間投資すれば、1年後に $100e^{0.03 \times 1} = 103.05$ ドルを支払い、2年後に $100e^{0.04 \times 2} = 108.33$ ドルを受け取ることになる。 $108.33 = 103.05e^{0.05}$ なので、それは103.05ドルを2年目に1年物フォワード・レート（5%）で運用したものに等しい。次に、投資家は100ドルを年率5%で4年間借り入れ、その資金を年率4.6%で3年間投資すれば、3年目の終わりに $100e^{0.046 \times 3} = 114.80$ ドルを受け取り、4年目の終わりに $100e^{0.05 \times 4} = 122.14$ ドルを支払うことになる。 $122.14 = 114.80e^{0.062}$ なので、4年目に6.2%のフォワード・レートで1年間の資金を調達したことになる。

投資家は、将来の金利について現在のフォワード・レートと異なると見通しをもっているならば、多くの魅力的な取引戦略を見出すであろう（ビジネス寸見4.2を参照）。たとえば、金利先渡契約（forward rate agreement）として知られる契約を締結するのも一つの方法である。次節では、この金利先渡契約がどのように締結され、価格付けされるのかを論じる。

#### ビジネス寸見4.2 オレンジ郡のイールドカーブ・プレー

ある投資家が表4.5の金利で資金の貸し借りを行うことができ、1年

物金利が将来5年にわたってそんなに変わらないと予想していると仮定する。このとき、投資家は期間1年の資金を借り、期間5年の投資をするだろう。1年間の借入れは1年目が終わると、再度次の1年間にロールオーバーされる。それが2年目、3年目、4年目と続く。金利が同じ水準にとどまるのであれば、受取利子は5.3%，支払利子は3%なので、この戦略は年間約2.3%の収益を生み出すであろう。この種の取引はイールドカーブ・プレー (yield curve play) として知られる戦略である。このとき投資家は、将来の金利が市場で観測される現時点でのフォワード・レートとかなり異なることに投機している（この例では、市場で観測される現時点のフォワード・レートは、将来の1年ごとにそれぞれ5%，5.8%，6.2%，および6.5%である）。

米国カリフォルニア州オレンジ郡の財務責任者であった Robert Citron は上述と同様のイールドカーブ・プレーを利用し、1992年および1993年に大きな成功を収めた。彼の取引からの収益はオレンジ郡の予算に重要な位置を占めるほどの大きな貢献となり、彼は財務責任者として再選された（当時、彼の取引戦略がきわめてリスクの高いものであると唱える再選反対派の存在を聞くことはなかった）。

1994年に Citron 氏はイールドカーブ・プレーを拡大し、多額の資金をインバース・フローター (inverse floater) という取引に投資した。この取引は、固定金利 - 変動金利を支払うものであった。さらに彼はレポ市場で資金を借りて、ポジションにレバレッジを効かせた。短期金利が上昇しなければ収益をあげ続けることができたが、1994年に金利が急上昇した。その結果、オレンジ郡は1994年12月1日に保有する投資ポートフォリオから150億ドルの損失を計上し、その数日後財政破綻を起こした。

## 4.7 金利先渡契約

金利先渡契約 (FRA : forward rate agreement) とは、将来のある決められた期間の決められた元本に対する貸借に対して、ある決められた金利を適用するという店頭契約である。FRA は資金の貸借が通常 LIBOR で行われることを仮定している。

いま、ある企業  $X$  が別の企業  $Y$  に対して、期間  $T_1$  から  $T_2$  まで資金を貸し出す FRA を考えてみよう。以下の記号を用いる。

$R_K$  : FRA で合意された金利

$R_F$  : 現時点での、期間  $T_1$  から  $T_2$  までのフォワード LIBOR レート (注5)

$R_M$  : 時点  $T_1$  に実際に観測される、期間  $T_1$  から  $T_2$  までの LIBOR レート

$L$  : 契約の元本

ここでは連続複利を用いず、 $R_K$ ,  $R_F$ ,  $R_M$  の複利の周期はそれぞれの金利の期間に等しいとする。たとえば、 $T_2 - T_1 = 0.5$  である場合には半年複利、 $T_2 - T_1 = 0.25$  である場合には四半期複利であるとする (これは FRA の通常の市場慣習と一致している)。

通常であれば、企業  $X$  は LIBOR ローンから金利  $R_M$  を受け取るが、FRA であれば  $R_K$  を受け取ることになる。FRA を締結した結果得られる超過金利 (負にもなりうる) は  $R_K - R_M$  である。金利は時点  $T_1$  に決定され、時点  $T_2$  に支払われるため、時点  $T_2$  における企業  $X$  の超過金利のキャッシュフローは

$$L(R_K - R_M)(T_2 - T_1) \quad (4.7)$$

となる。同様に、時点  $T_2$  における企業  $Y$  の超過金利のキャッシュフローは

$$L(R_M - R_K)(T_2 - T_1) \quad (4.8)$$

となる。このとき、(4.7)式と(4.8)式から、FRA について別の解釈が可能

---

(注5) フォワード LIBOR レートは4.6節で述べたように、LIBOR とスワップのゼロ・カーブから計算される。ゼロ・カーブは7.6節で述べる方法で計算される。

である。すなわち FRA とは、企業  $X$  からみると、元本に対する期間  $T_1$  から  $T_2$  までの利子として固定金利  $R_K$  を受け取り、かわりに実際に市場で呈示された金利  $R_M$  を支払う契約である。また、企業  $Y$  からみると、元本に対する期間  $T_1$  から  $T_2$  までの利子として固定金利  $R_K$  を支払い、そのかわりに実際に市場で呈示された金利  $R_M$  を受け取る契約である。

通常、FRA は時点  $T_2$  ではなく、時点  $T_1$  で決済され、その支払額は時点  $T_2$  から時点  $T_1$  へ割り引かれる。したがって、企業  $X$  の時点  $T_1$  でのペイオフは、

$$\frac{L(R_K - R_M)(T_2 - T_1)}{1 + R_M(T_2 - T_1)}$$

となる。一方、企業  $Y$  の時点  $T_1$  でのペイオフは、

$$\frac{L(R_M - R_K)(T_2 - T_1)}{1 + R_M(T_2 - T_1)}$$

となる。

### 【例4.3】

ある企業が元本 1 億ドルに対して、3 年後スタートの 3 カ月間にに対して 4 % の固定金利を受け取る FRA を締結したとしよう。3 カ月間の金利が 3 カ月物 LIBOR で 4.5 % になったとすれば、貸手のキャッシュフローは 3.25 年後に、

$$100,000,000 \times (0.04 - 0.045) \times 0.25 = -125,000 \text{ ドル}$$

となる。これは、3 年後の次のキャッシュフローと等価である。

$$-\frac{125,000}{1 + 0.045 \times 0.25} = -123,609 \text{ ドル}$$

逆に、契約の相手方のキャッシュフローは 3.25 年後に +125,000 ドル、3 年後では +123,609 ドルとなる（ただし、金利はすべて四半期複利である）。

## FRA の評価

FRA の価値を評価するために、まず  $R_K = R_F$  のとき価値は常にゼロであることに注意したい(注6)。これは4.6節で説明したように、大手金融機関は将来の期間に対する金利を、フォワード・レートでコストなしに固定できるからである。たとえば、ある金額の借入れを2年間行い、それを3年間投資することで2年後から3年後までの期間に対するフォワード・レートでの利子受取りを確定できる。同様に、ある金額の借入れを3年間行い、それを2年間投資すれば、2年後から3年後までの期間に対するフォワード・レートでの利払いを確定できる。

二つのFRAを比較する。一つは元本  $L$  に対する期間  $T_1$  から  $T_2$  までのFRAで、LIBOR フォワード・レート  $R_F$  を受け取るもの、もう一つは同じ元本に対する同じ期間のFRAで、 $R_K$  を受け取るものとする。二つのFRAは時点  $T_2$  で受け取る金利が異なる以外は同じ取引である。したがって、最初のFRAに対する二番目のFRAの超過価値は、両取引における支払金利の差額の現在価値に等しくなる。すなわち、

$$L(R_K - R_F)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2}$$

となる。ここで  $R_2$  は満期  $T_2$  の連続複利ベースのゼロ・レートである(注7)。 $R_F$  を受け取るFRAの価値はゼロなので、 $R_K$  を受け取るFRAの価値は、

$$V_{\text{FRA}} = L(R_K - R_F)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2} \quad (4.9)$$

となる。同様に  $R_K$  を支払う場合のFRAの価値は、

$$V_{\text{FRA}} = L(R_F - R_K)(T_2 - T_1)e^{-R_2 T_2} \quad (4.10)$$

となる。(4.7)式と(4.9)式、あるいは(4.8)式と(4.10)式を比較すると、以下の手順でFRAを評価できることがわかる。

1. フォワード・レートがそのまま実現すると仮定して、すなわち  $R_M = R_F$  としてペイオフを計算する。
2. このペイオフを無リスク金利で割り引く。

(注6) FRAの契約時においては、通常  $R_K$  は  $R_F$  に等しくなるように決められる。

(注7)  $R_K$ ,  $R_M$ , および  $R_F$  は期間  $T_2 - T_1$  を周期とする複利での金利であるが、 $R_2$  に関しては連続複利での金利であることに注意せよ。

#### 【例4.4】

LIBOR ゼロ・レートと LIBOR フォワード・レートは、表4.5に与えられているレートとする。元本1億ドル、1年後スタート期間1年の1年複利6%の金利を受け取るFRAを考える。このとき、フォワード・レートは連続複利ベースで5%，すなわち1年複利ベースで5.127%となる。FRAの価値は、(4.9)式より

$$100,000,000 \times (0.06 - 0.05127) \times 0.25 e^{-0.04 \times 2} = 805,800 \text{ ドル}$$

となる。

## 4.8 デュレーション

債券のデュレーション (duration) とは、その名のとおり、債券の保有者がその債券の元利金の支払を受けるまでに、平均してどの程度の期間がかかるかを表したものである。満期  $n$  年の割引債のデュレーションは  $n$  年である。しかし、満期  $n$  年の利付債のデュレーションは、満期前に利払いがあるので、 $n$  年よりも短くなる。

債券保有者が時点  $t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) に受け取る元利金を、 $c_i$  とする。債券の価格  $B$  と連続複利債券イールド  $y$  との関係は、

$$B = \sum_{i=1}^n c_i e^{-yt_i} \quad (4.11)$$

で与えられる。このとき、デュレーションは次のように定義される。

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n t_i c_i e^{-yt_i}}{B} \quad (4.12)$$

これは、

$$D = \sum_{i=1}^n t_i \left[ \frac{c_i e^{-yt_i}}{B} \right]$$

と書き直すことができる。大カッコのなかの項は、時点  $t_i$  におけるキャッシュフローの現在価値が債券価格に占める割合を表している。債券価格は、

債券から受け取ることのできる全支払の現在価値である。したがって、デュレーションとは支払が受け取れるまでの各期間を、そのときの支払額の現在価値と債券の現在価値との比で重みづけした加重平均である。重みの総和は1になる。デュレーションの定義では、すべての割引は債券イールド  $y$  で行われていることに注意しよう（4.4節で説明したように、各キャッシュフローに対して異なるレートは用いない）。

イールドが  $\Delta y$  だけ微小変化するとき、

$$\Delta B = \frac{dB}{dy} \Delta y \quad (4.13)$$

が近似的に成り立つ。（4.11）式から、

$$\Delta B = -\Delta y \sum_{i=1}^n c_i t_i e^{-y t_i} \quad (4.14)$$

となる（ $B$  と  $y$  には負の相関があることに注意せよ。債券イールドが上昇すると、債券価格は下落する。逆に、債券イールドが下落すると、債券価格は上昇する）。（4.12）式および（4.14）式より、次のデュレーションに関する重要な関係が導かれる。

$$\Delta B = -BD\Delta y \quad (4.15)$$

これは、

$$\frac{\Delta B}{B} = -D\Delta y \quad (4.16)$$

と書き直すことができる。（4.16）式は、債券価格の変化率とイールドの変化との近似的な関係を表している。これは使いやすい関係式で、1938年にMacaulayが最初に提案したデュレーションがよく使われる尺度になった理由でもある。

額面100ドル、期間3年、クーポン10%の債券のデュレーションを考える。債券イールドを連続複利で年率12%，つまり  $y=0.12$  と仮定し、クーポンは半年ごとに5ドル支払われるとする。表4.6はデュレーションを求めるのに必要な計算結果を掲載したものである。債券イールドを割引率に用いて、各期の債券キャッシュフローの現在価値を求めたものが3列目に示してある（たとえば、最初の支払の現在価値は  $5e^{-0.12 \times 0.5} = 4.709$  である）。この3列目の合

表4.6 デュレーションの計算

| 期間(年) | キャッシュフロー(ドル) | 現在価値   | ウェイト  | 期間×ウェイト |
|-------|--------------|--------|-------|---------|
| 0.5   | 5            | 4.709  | 0.050 | 0.025   |
| 1.0   | 5            | 4.435  | 0.047 | 0.047   |
| 1.5   | 5            | 4.176  | 0.044 | 0.066   |
| 2.0   | 5            | 3.933  | 0.042 | 0.083   |
| 2.5   | 5            | 3.704  | 0.039 | 0.098   |
| 3.0   | 105          | 73.256 | 0.778 | 2.333   |
| 合計    | 130          | 94.213 | 1.000 | 2.653   |

計94.213ドルが債券の価格である。3列目の値を94.213で割ったものがウェイトで、それに期間を乗じた5列目の値の合計がデュレーションで、2.653年となっている。

金利の微小変化はしばしばベース・ポイント (basis point) で示される。前に述べたように、1ベース・ポイントは年率0.01%である。次の例は、デュレーションの関係を示した(4.15)式の精度を検証するものである。

#### 【例4.5】

表4.6の債券において、債券価格  $B$  は94.213、デュレーション  $D$  は2.653なので、(4.15)式より

$$\Delta B = -94.213 \times 2.653 \Delta y$$

すなわち

$$\Delta B = -249.95 \Delta y$$

となる。債券のイールドが10ベース・ポイント ( $=0.1\%$ ) 上昇するとき、 $\Delta y = +0.001$ である。このとき、関係式からは  $\Delta B = -249.95 \times 0.001 = -0.250$ と予測され、債券価格は  $94.213 - 0.250 = 93.963$ に下落することになる。この精度を確認しよう。債券イールドが10ベース・ポイント上昇して12.1%になれば、債券価格は

$$5e^{-0.121 \times 0.5} + 5e^{-0.121 \times 1.0} + 5e^{-0.121 \times 1.5} + 5e^{-0.121 \times 2.0} \\ + 5e^{-0.121 \times 2.5} + 105e^{-0.121 \times 3.0} = 93.963$$

になる。この結果はデュレーションの関係式から予測された価格と（小

数点以下第3位まで)一致する。

## 修正デュレーション

これまでの分析では、 $y$ は連続複利で与えられていると仮定してきた。 $y$ が1年複利で与えられるときは、(4.15)式の近似的な関係式は、

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y}$$

となることを示すことができる。さらに一般的に、 $y$ が年 $m$ 回複利で与えられた場合は、

$$\Delta B = -\frac{BD\Delta y}{1+y/m}$$

となる。

$$D^* = \frac{D}{1+y/m}$$

により定義される $D^*$ は、債券の修正デュレーション(modified duration)と呼ばれることがある。これを使えばデュレーションの関係式は、

$$\Delta B = -BD^*\Delta y \quad (4.17)$$

のように簡単に表すことができる。ただし、 $y$ は年 $m$ 回複利で与えられているものとする。次の例は、修正デュレーションに関する関係式の精度を検証するものである。

### 【例4.6】

表4.6の債券において、債券価格は94.213、デュレーションは2.653、イールドは半年複利で12.3673%なので、修正デュレーション $D^*$ は、

$$D^* = \frac{2.653}{1 + 0.123673/2} = 2.499$$

で与えられる。(4.17)式より、

$$\Delta B = -94.213 \times 2.4985 \Delta y$$

すなわち

$$\Delta B = -235.39\Delta y$$

となる。イールド（半年複利）が10ペース・ポイント（=0.1%）上昇するとき、 $\Delta y = +0.001$ である。このとき、デュレーションの関係式から  $\Delta B$  は  $-235.39 \times 0.001 = -0.235$  と予測され、債券価格は  $94.213 - 0.235 = 93.978$  に下落することになる。この精度を確認しよう。前の例と同様の正確な計算をすると、債券イールド（半年複利）が10ペース・ポイント上昇して12.4673%になれば、債券価格は93.978になる。これは、イールドの微小変化に対して修正デュレーションの計算精度がよいことを示している。

ドル・デュレーションという用語が用いられることがある。これは修正デュレーションに債券価格を乗じたものである。 $D^{**}$ をドル・デュレーションとすると、 $\Delta B = -D^{**}\Delta y$  が成り立つ。

### 債券ポートフォリオ

債券ポートフォリオのデュレーション  $D$  は、ポートフォリオを構成する個々の債券がもつデュレーションを、各債券の価格に比例したウェイトで加重平均したものとして定義される。(4.15)式から(4.17)式までは、 $B$  を債券ポートフォリオの価値として適用できる。それらの関係式を用いれば、すべての債券イールドが  $\Delta y$  だけ微小変化したときの債券ポートフォリオの価値変化を推定できる。

債券ポートフォリオのデュレーションを使うときは、すべての債券イールドはほぼ同じ値だけ変化するという暗黙の仮定が置かれている。このことを理解しておくことは重要である。さまざまな満期の債券からなるポートフォリオの場合、ゼロ・クーポン・イールドカーブがパラレルシフトする場合にのみ、その仮定が満たされる。したがって(4.15)式から(4.17)式までは、ゼロ・カーブが  $\Delta y$  だけ微小なパラレルシフトをしたときの債券ポートフォリオの価格への影響額を推定する式であると理解しなければならない。

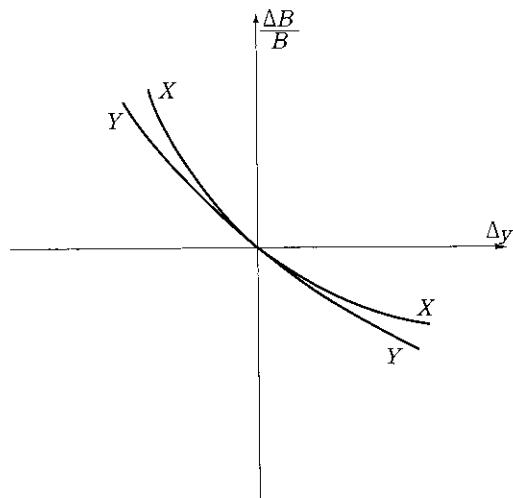
資産のデュレーションと負債のデュレーションが等しくなる（すなわち、

全体のデュレーションがゼロになる) ようなポートフォリオを保有するようになると、金融機関はイールドカーブの微小なパラレルシフトに対するエクスポージャーをなくすことができる。その場合でも、大きなパラレルシフトやパラレルでないシフトに対するエクspoージャーは依然として残っている。

## 4.9 コンベキシティ

デュレーションの関係式はイールドの微小変化に対してのみ適用できる。図4.2は、同じデュレーションをもつ二つの債券ポートフォリオにおける価値の変化率とイールドの変化との関係を示したものである。原点での二つの曲線の接線の傾きは等しい。すなわち、小さなイールドの変化に対しては、二つの債券ポートフォリオは同じ比率だけその価値が変化し、(4.16)式と整合性がとれている。大きなイールド変化に対しては、二つのポートフォリオの価値は異なる変化をする。ポートフォリオ  $X$  はポートフォリオ  $Y$  に比

図4.2 同じデュレーションをもつ二つの債券ポートフォリオ



べてイールドの変化に対する曲率が大きい。コンベキシティ (convexity) と知られるファクターはこの曲率を計測するもので、(4.16)式の精度を改善するのに用いられる。

コンベキシティは、

$$C = \frac{1}{B} \frac{d^2B}{dy^2} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i t_i^2 e^{-y t_i}}{B}$$

で与えられる。泰ラー展開を使えば、(4.13)式よりさらに精度の高い次式が得られる。

$$\Delta B = \frac{dB}{dy} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{d^2B}{dy^2} \Delta y^2$$

これより、

$$\frac{\Delta B}{B} = -D \Delta y + \frac{1}{2} C (\Delta y)^2$$

が導かれる。債券ポートフォリオに長期にわたる一定の支払があると、そのコンベキシティは大きくなる傾向がある。支払がある特定の時期に集中していると、コンベキシティは小さくなる。全体のデュレーションとコンベキシティがゼロになるような資産と負債のポートフォリオを保有するようにすることで、金融機関はゼロ・カーブの比較的大きな変化に対しても、収益変動リスクを回避することができる。しかし、パラレルでない金利シフトに対するエクスポージャーは依然として残っている。

## 4.10 金利期間構造の理論

ゼロ・カーブの形状を決定しているのは何かというのは、きわめて自然な問いである。なぜ時には右下がりになり、時には右上がりになり、また時には一部右上がりの一部右下がりになるのか。これまでいくつかの異なる説が提案されている。このうち最も簡単なものは期待仮説 (expectation theory) である。これは、長期金利は将来の短期金利の期待値を反映しているとする仮説である。より正確には、任意の期間に対するフォワード・レートは、同

じ期間に対する将来のゼロ・レートの期待値に等しいという仮説である。この他に、市場分断仮説 (market segmentation theory) という、短期、中期、長期の金利はそれぞれ独立だとする仮説がある。この仮説では、年金ファンドのような大手投資家はある特定の満期の債券に投資し、すぐには投資する債券の満期を変更しないものとされている。したがって、短期の金利は短期債市場の需給によって決定され、中期の金利は中期債市場の需給によって決定されるといった具合になる。

ある意味で最ももっともらしい説が、フォワード・レートは常に将来におけるゼロ・レートの期待値よりも高くなるという流動性選好説 (liquidity preference theory) である。この説は、投資家には流動性を重視して短期の資金運用を好む傾向があるということを基本的な前提としている。一方、資金の借手は長期固定レートでの資金調達を好むのが普通である。流動性選好説が成り立つとすると、フォワード・レートが将来のゼロ・レートの期待値よりも高いという状況が生じる。それは、イールドカーブが右下がりの場合よりも右上がりの場合が多いという経験的な事実とも整合性がとれている。

### 利鞘の管理

流動性選好説を理解するには、預金業務と貸出業務を行っている銀行が抱える金利リスクを考えてみるのがよいだろう。銀行の利鞘とは、貸出金利と預本金利の差で、慎重に管理する必要のある経営指標である。

銀行が顧客に対して表4.7にあるような1年と5年の預本金利と1年と5年の住宅ローン金利を示している、という簡単な状況を考える。単純化のために、将来の1年金利の期待値は現時点での1年金利に等しいと仮定しよう。大雑把にいうと、市場では、金利が上昇する確率と下落する確率は等し

表4.7 銀行が顧客に示す金利の例

| 満期(年) | 預本金利 | 住宅ローン金利 |
|-------|------|---------|
| 1     | 3 %  | 6 %     |
| 5     | 3 %  | 6 %     |

いと考えられていると仮定する。そうすると、表4.7のレートは市場の期待を「公平」に反映したレートということになる（すなわち、期待仮説に基づいたレートになる）。現金を1年間投資して、さらに4年間1年ごとに再投資した場合の全収益の期待値は、5年間一括で投資した場合の収益と同じである。同様に、1年間資金調達して、さらに4年間1年ごとに再調達した場合の調達コストは、5年ローンの調達コストと同じである。

預金をしたいと考えており、今後の金利動向については市場での見方と同様に、上昇する確率と下落する確率は等しいと予測しているとしよう。その場合、年率3%の1年預金と年率3%の5年預金のどちらに預けるのがよいだろうか。預金として拘束される期間が短いほうが資金として自由度があるので、1年預金を選ぶのがよいだろう。

今度は住宅ローンを借りたいとしよう。今度も金利動向については市場での見方と同様に、上昇する確率と下落する確率は等しいと予測しているとする。6%の1年住宅ローンと6%の5年住宅ローンのどちらがよいだろうか。今後5年間の借入金利が固定でき、再借入れできないリスクが少なくなるので、5年住宅ローンを選ぶのがよいだろう。

銀行が表4.7のレートと示すと、大部分の顧客は1年預金と5年住宅ローンを選ぶことになるだろう。それによって、銀行には資産と負債のミスマッチが生じ、金利リスクが生じることになる。金利が下落した場合には問題は生じない。銀行は6%の5年貸出に対して将来は3%より低いコストの預金で資金調達ができることになり、利差は拡大するだろう。しかし、金利が上昇した場合には、6%貸出に対する預金での調達コストは将来3%より高くなり、利差は縮小する。たとえば金利が3%上昇すれば、利差はゼロになる。

資産負債管理（ALM）グループの仕事は、利子を生む資産の満期と利払いの発生する負債の満期をマッチさせることである。それを行う一つの方法は、預金と住宅ローンの両方の5年金利をあげることである。たとえば、表4.8（次頁）のように5年預金金利を4%にし、5年住宅ローン金利を7%にすることである。こうすれば、5年預金と1年住宅ローンが相対的に魅力

表4.8 資産と負債の満期をマッチさせようと  
5年金利を引き上げた例

| 満期(年) | 預金金利 | 住宅ローン金利 |
|-------|------|---------|
| 1     | 3 %  | 6 %     |
| 5     | 4 %  | 7 %     |

的になる。その結果、レートが表4.7のときには1年預金を選択していた顧客で、表4.8のレートでは5年預金を選択する顧客も出てくるだろう。同様に、レートが表4.7のときには5年住宅ローンを選択していた顧客で、表4.8のレートでは1年住宅ローンを選択する顧客も出てくるだろう。これによって、資産と負債の満期はマッチするようになるだろう。預金者は1年満期を選択し、借手は5年満期を選択するというアンバランスがまだ続くようならば、5年の預金金利と住宅ローン金利はさらに引き上げられることになるだろう。そしていつかはアンバランスが解消するだろう。

すべての銀行がいま述べたように行動する結果として最終的に観測される現象が、流動性選好説が主張する内容である。長期金利は将来の短期金利の期待値から予測されるレートよりも高くなる傾向にあり、ほとんどの場合でイールドカーブは右上がりになっている。イールドカーブが右下がりになるのは、短期金利がすごく急低下すると市場で予測されているときだけである。

いまでは多くの銀行は顧客の選好をモニタリングする高度なシステムを構築しており、顧客の選好によって生じる資産の満期と負債の満期との小さなずれをみつけて、表示する金利を微調整できるようになっている。金利スワップのようなデリバティブが金利エクスポージャーの管理に利用されることもある（これについては第7章で議論する）。これらの結果、利鞘は非常に安定したものになっているが、ビジネス寸見4.3で紹介するように、これがうまく機能していなかった事例もある。

### ビジネス寸見4.3 米国金融機関の高くついた失敗

1960年代、1970年代、そして1980年代を通じて、米貯蓄貸付組合(S&L)は金利リスクの管理に失敗した。S&Lは短期の貯蓄を受け入れ、長期の固定金利住宅ローンを貸し出していた。その結果、1969年から70年と1974年の金利上昇、および1979年から84年にかけての高金利化で、S&Lは深刻な経営難に陥った。S&Lは政府保証により保護されていたが、1980年代に1,700以上が経営破綻した。破綻の主な理由は金利リスク管理の欠如であった。破綻によって米国の納税者が負担した費用は、1,000億ドルから5,000億ドルと見積もられている。

米国での過去最大の銀行の破綻となった、コンチネンタル・イリノイの破綻原因も金利リスク管理の失敗であった。1980年から83年にかけて、コンチネンタル・イリノイの期間1年超の資産(すなわち貸出)は70億ドルから80億ドルだったのに対し、期間1年超の負債(すなわち預金)は14億ドルから25億ドルにすぎなかった。コンチネンタル・イリノイは1984年に破綻し、多額の費用をかけて政府によって救済された。

### 要 約

デリバティブ・トレーダーにとって二つの重要な金利がある。一つは国債レート、もう一つはLIBORレートである。国債レートは政府が自国通貨で借入れを行った際の支払金利である。一方、LIBORレートはインターバンク市場で銀行が呈示する短期貸出金利である。デリバティブ・トレーダーは、LIBORレートを無リスク金利として使用している。

金利で使われる複利の回数は、金利の単位を定義している。1年複利と四

半期複利との違いは、距離表示におけるマイルとキロの違いに類似している。デリバティブの価値を分析する際には、トレーダーは連続複利を利用することが多い。

金融市場では多くの金利が呈示され、アナリストによって計算されている。 $n$ 年ゼロ・レートもしくは $n$ 年スポット・レートとは、すべてのリターンが投資期間の最後に一括で実現するような、 $n$ 年間投資に対して適用される金利である。与えられた満期に対する債券のパー・イールドとは、その債券の価格が額面と等しくなるようなクーポン・レートのことである。フォワード・レートとは、現時点のゼロ・レートから決まる将来スタートの期間に適用可能な金利である。

ゼロ・レートを求める最も一般的な手法はブートストラップとして知られる手法である。ブートストラップ手法とは、短期の商品から始めて、満期が次に長い商品を一つ追加し、そこまでの全商品の価格と整合性がとれるようゼロ・レートを決めるという計算ステップを繰り返すことで、徐々に長期の商品まで整合性のとれたゼロ・レートを求めていく手法である。トレーディングデスクでは、この手法を使ってトレジャリー・ゼロ・カーブを日々計算している。

金利先渡契約 (FRA) とは、あらかじめ決められた将来のある期間における、決められた元本に対する LIBOR レートでの貸借に対して適用される金利を現時点で決めるような店頭契約である。FRA の価値は、現在のフォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定した場合のペイオフを現時点まで割り引くことで求めることができる。

金利市場における一つの重要な概念はデュレーション (duration) である。それは、ゼロクーポン・イールドカーブの微小なパラレルシフトに対する債券ポートフォリオの価値の感応度を測るものである。具体的には、

$$\Delta B = -BD\Delta y$$

である。ここで  $B$  は債券ポートフォリオの価値、 $D$  はポートフォリオのデュレーション、 $\Delta y$  はゼロ・レートの微小なパラレルシフトの大きさ、 $\Delta B$  はその変化に対する債券ポートフォリオの価値への影響額である。

流動性選好説は、実際に観測される金利の期間構造を説明するのに用いることができる。この説では、ほとんどの人は借入れは長期を選好し、貸出は短期を選好するとされる。借手と貸手の期間をマッチさせるためには、金融機関は長期金利を将来の短期金利の期待値よりも高いレートにする必要がある。

## 参考文献

- Allen, S.L., and A.D. Kleinstein. *Valuing Fixed-Income Investments and Derivative Securities : Cash Flow Analysis and Calculations*. New York : New York Institute of Finance, 1991.
- Fabozzi, F.J. *Fixed-Income Mathematics : Analytical and Statistical Techniques*, 4th edn. New York : McGraw-Hill, 2006.
- Fabozzi, F.J. *Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures*. Frank J. Fabozzi Assoc., 1999.
- Grinblatt, M., and F.A. Longstaff. "Financial Innovation and the Role of Derivatives Securities: An Empirical Analysis of the Treasury Strips Program," *Journal of Finance*, 55, 3(2000) :1415-36.
- Jorion, P. *Big Bets Gone Bad : Derivatives and Bankruptcy in Orange County*. New York : Academic Press, 1995.
- Stigum, M., and F.L. Robinson. *Money Markets and Bond Calculations*. Chicago : Irwin, 1996.

## 章末問題

- 4.1** ある銀行が四半期複利で年率14%の金利を呈示してきた。この場合、(a)連続複利での金利と(b)1年複利での金利は、それぞれいくらにな

るか。

- 4.2 LIBOR と LIBID の意味を説明せよ。どちらのレートが高いか。
- 4.3 6 カ月および 1 年のゼロ・レートがともに年率 10% であるとする。残存期間 18 カ月、クーポンが年 8%（年 2 回払い、1 回目のクーポンが支払われたばかり）の債券のイールドが年率 10.4% とする。債券価格はいくらになるか。また、18 カ月物ゼロ・レートはいくらになるか。ただし、ここでのレートはすべて半年複利とする。
- 4.4 いま 1,000 ドル投資すると、1 年後に 1,100 ドルを受け取れる。この投資の年率利回りを、次のそれぞれの場合について計算せよ。
- (a) 1 年複利
  - (b) 半年複利
  - (c) 1 カ月複利
  - (d) 連続複利
- 4.5 ゼロ・レートが連続複利で次の場合に、第 2, 第 3, 第 4, 第 5, および第 6 四半期のフォワード・レートを計算せよ。

| 満期(月) | 金利(年率%) |
|-------|---------|
| 3     | 8.0     |
| 6     | 8.2     |
| 9     | 8.4     |
| 12    | 8.5     |
| 15    | 8.6     |
| 18    | 8.7     |

- 4.6 ゼロ・レートが問題 4.5 のように与えられていると仮定するとき、元本 100 万ドル、1 年後スタート期間 3 カ月の FRA で、保有者が 9.5% の金利を得られるような契約の価値はいくらか。この金利は 3 カ月複利とする。
- 4.7 金利の期間構造が右上がりの場合、以下の三つを大きい順に並べよ。
- (a) 5 年のゼロ・レート
  - (b) 5 年の利付債のイールド

- (c) 4.75年後から5年後までの期間に対応するフォワード・レートまた、金利の期間構造が右下がりになった場合にはどうなるか。
- 4.8** 金利に対する債券ポートフォリオの感応度について、デュレーションで何がわかるか。デュレーションの限界についても説明せよ。
- 4.9** 1ヶ月複利で年率15%の金利は、連続複利にするといくらになるか。
- 4.10** ある預金口座は連続複利で年率12%の利子がつくが、実際に利子が支払われるのは四半期ごとである。10,000ドルの預金に対して四半期ごとに支払われる利子額はいくらになるか。
- 4.11** 6ヶ月、12ヶ月、18ヶ月、24ヶ月、および30ヶ月のゼロ・レートがそれぞれ連続複利で年率4%，4.2%，4.4%，4.6%，および4.8%であると仮定する。クーポン年4%を半年ごとに支払う、30ヶ月満期の額面100の債券価格を求めよ。
- 4.12** 半年ごとにクーポンを8%支払う3年物の債券を考える。債券の価格が104の場合、債券イールドはいくらになるか。
- 4.13** 6ヶ月、12ヶ月、18ヶ月、および24ヶ月のゼロ・レートがそれぞれ5%，6%，6.5%，および7%であると仮定する。このとき、2年のペー・イールドはいくらになるか。
- 4.14** ゼロ・レートが連続複利で次の場合に、2年目、3年目、4年目、5年目のフォワード・レートを計算せよ。

| 満期(年) | 金利(年率%) |
|-------|---------|
| 1     | 2.0     |
| 2     | 3.0     |
| 3     | 3.7     |
| 4     | 4.2     |
| 5     | 4.5     |

- 4.15** 問題4.14の金利を用いて、2年後スタートの期間1年間に對して年率5%の利子を支払う元本100万ドルのFRAの価値を求めよ。
- 4.16** 残存期間10年、クーポン8%の債券の現在価格が90ドル、残存期間10年、クーポン4%の債券の現在価格が80ドルとする。このとき10

年のゼロ・レートはいくらになるか（ヒント：クーポン4%の債券を2単位買い、クーポン8%の債券を1単位売却したポジションを考えよ）。

- 4.17 金利の期間構造は右下がりのときよりも右上がりのときのほうが多い、という観測事実と流動性選好説は整合性がとれているとされる理由を詳しく述べよ。
- 4.18 「ゼロ・レートが右上がりの場合には、任意に与えられた満期のゼロ・レートは同じ満期のパー・イールドよりも高い。ゼロ・レートが右下がりの場合には、その逆が成り立つ」。このことを説明せよ。
- 4.19 なぜ米国債レートはそれ以外の無リスクに近いレートよりもかなり低いのか。
- 4.20 なぜレポ市場での貸出にはほとんど信用リスクがないのか。
- 4.21 なぜFRAは変動金利と固定金利との交換と等価なのかを説明せよ。
- 4.22 イールド11%（連続複利）の5年債のクーポンが年1回8%だったとする。
- この債券の価格はいくらか。
  - この債券のデュレーションはいくらか。
  - デュレーションを用いて、イールドが0.2%下がったときの債券価格への影響を計算せよ。
  - イールドを年率10.8%として債券価格を再計算し、その結果が(c)の答と一致することを確認せよ。
- 4.23 6カ月物および1年物米国短期国債の価格がそれぞれ94.0と89.0とする。また、残存期間1年半で半年ごとに4ドルのクーポンが支払われる債券が94.84ドル、残存期間2年で半年ごとに5ドルのクーポンが支払われる債券が97.12ドルで売られている。このとき、6ヶ月、1年、1年半、2年のゼロ・レートを求めよ。

## 宿題

- 4.24** ある金利が半年複利で年率 5 %と呈示されている。このとき、(a) 1 年複利、(b) 1 カ月複利、(c)連続複利ではいくらになるか。
- 4.25** 6 カ月物、12 カ月物、18 カ月物、24 カ月物のゼロ・レートが半年複利でそれぞれ 4 %, 4.5%, 4.75%, 5 %とする。
- (a) 連続複利でのレートはいくらか。
- (b) 18 カ月後スタートの 6 カ月フォワード・レートはいくらか。
- (c) 18 カ月後スタートの 6 カ月間にに対して 6 % (半年複利) を支払う元本100万ドルの FRA の価値はいくらか。
- 4.26** 問題4.25と同じゼロ・レートが与えられたとき、2 年物のパー・イールドはいくらになるか。また、そのパー・イールドに等しいクーポンを支払う2 年債のイールドはいくらか。
- 4.27** 債券の価格が次の表に与えられている。

| 債券の元本<br>(ドル) | 満期までの期間<br>(年) | 年クーポン<br>(ドル) | 債券価格<br>(ドル) |
|---------------|----------------|---------------|--------------|
| 100           | 0.50           | 0.0           | 98           |
| 100           | 1.00           | 0.0           | 95           |
| 100           | 1.50           | 6.2           | 101          |
| 100           | 2.00           | 8.0           | 104          |

\*表中のクーポンの半分が 6 カ月ごとに支払われると仮定する。

- (a) 6 カ月、12 カ月、18 カ月、および24 カ月満期のゼロ・レートを計算せよ。
- (b) 6 カ月から12 カ月まで、12 カ月から18 カ月まで、18 カ月から24 カ月までの期間に対するフォワード・レートを求めよ。
- (c) 年 2 回利払いの利付債に対する 6 カ月、12 カ月、18 カ月、および24 カ月のパー・イールドを求めよ。
- (d) 年 2 回利払いのクーポン 7 %の 2 年利付債の価格とイールドを求めよ。

**4.28** 額面2,000ドルの1年割引債と額面6,000ドルの10年割引債からなるポートフォリオAと、額面5,000ドルの5.95年割引債からなるポートフォリオBがある。現在のイールドは、すべての債券に対して年率10%とする。

- (a) この二つのポートフォリオのデュレーションは同じであることを示せ。
- (b) イールドが年率0.1%増加したとき、この二つのポートフォリオの現在価値の変化率を計算し、それが同じであることを示せ。
- (c) イールドが年率5%増加した場合には、この二つのポートフォリオの現在価値の変化率はどうなるか。

## 第5章

# フォワード価格と先物価格の決定

本章では、フォワード価格と先物価格が現物価格とどのような関係にあるのかについて述べる。フォワード契約は日々の値洗いがなく、満期に1回限りの決済であることから、先物契約よりも分析しやすい。幸い、フォワード価格と先物価格は、満期が同一の場合、通常きわめて近い値になる。

本章の前半では、フォワード価格（あるいは先物価格）と現物価格の関係におけるいくつかの重要かつ一般的な結果を導き出す。次にその結果を用いて、株価指数、外国為替、商品の先物契約について、先物価格と現物価格との関係を検討する。金利先物契約については次章で考察する。

### 5.1 投資資産と消費資産

フォワード契約と先物契約を検討する前に、まず投資資産（investment

asset) と消費資産 (consumption asset) とを区別しておくことが重要である。投資資産とは、非常に多くの投資家によって投資目的で保有される資産を指す。したがって、株式や債券は明らかに投資資産であり、金や銀もまた投資資産の一例である。投資資産は投資目的のみだけで保有される必要はない（たとえば、銀は多くの産業でも利用されている）。しかし、投資資産であるためには、投資目的のみで保有する投資家が数多くいるという要件を満たす必要がある。一方、消費資産は、投資目的よりも主として消費のために保有される資産である。たとえば、銅やオイル、養豚などの商品が消費資産である。

後述するように、投資資産のフォワード価格や先物価格は、現物価格やその他の観測される市場変数から裁定の議論によって決めることができる。しかし、消費資産に対しては同じ議論は適用できない。

## 5.2 空 売 り

この章に出てくる裁定取引戦略の中には、空売り (short selling: 通常、単に shorting と呼ばれる) が含まれる。これは、所有していない資産を売り付けることである。空売りは、すべてではないが、いくつかの投資資産において可能な取引である。以下では株式の空売りを例にとり、それがどういうものであるかみてみよう。

いま、ある投資家がブローカーに IBM 株500株の信用売り（空売り）の注文を出したとしよう。ブローカーは、即座に他の顧客から IBM 株500株を借り、それらを市場で通常どおり売却する。ブローカーが常に借株できる限り、投資家は信用売りのポジションをもち続けることができる。しかし、いずれ投資家は IBM 株を500株買い戻し、ポジションを手仕舞うであろう。そのとき、購入した株式は貸株した顧客への返却にあてられる。投資家は、株価が下がれば利益を得られ、株価が上がれば損を被る。もし信用売りのポジション保有中にブローカーが借株できなくなったような場合には、投資家は意に反していたとしても、直ちにそのポジションを手仕舞わなければなら

ない。

信用売りをしている投資家は、その証券の保有者が得られる配当や利子をプローカーに支払わなければならない。プローカーはこれを証券の貸手に支払う。いま、ある投資家が500株を4月に1株120ドルで信用売りし、7月に1株100ドルで買い戻してポジションを手仕舞った場合を考えてみよう。配当が5月に1株当たり1ドル支払われたとする。この場合、この投資家は信用売りを実施した4月に $500 \times 120 = 60,000$ ドルを受け取り、5月に配当金 $500 \times 1 = 500$ ドルを、ポジションを手仕舞った7月に $500 \times 100 = 50,000$ ドルをそれぞれ支払う。したがって、投資家のネットの収益は、

$$60,000 - 500 - 50,000 = 9,500 \text{ ドル}$$

となる。表5.1に、この例について、売りポジションからのキャッシュフローが、4月にその株式を買って7月に売ったときのキャッシュフローの逆となっていることを示した。

投資家はプローカーに対して証拠金勘定を維持する必要がある。証拠金勘定には、株価の上昇によって投資家が売りポジションから損失を被った場合の担保として、現金または市場性証券が投資家から差し入れられる。これは第2章で議論した先物契約の証拠金に類似するものである。当初証拠金の差入れが要求され、売り付けた資産の価格が不利な動き（すなわち、価格上昇）

表5.1 株式の売りポジションと買いポジションからのキャッシュフロー

| 株式の購入                                       |           |
|---|-----------|
| 4月：1株当たり120ドルで500株の購入                       | -60,000ドル |
| 5月：配当の受取り                                   | +500ドル    |
| 7月：1株当たり100ドルで500株の売却                       | +50,000ドル |
| ネット収益=-9,500ドル                              |           |
| 株式の空売り                                      |           |
| 4月：500株を借り入れ、それを1株当たり120ドルで空売り              | +60,000ドル |
| 5月：配当の支払                                    | -500ドル    |
| 7月：1株当たり100ドルで500株を購入し、借株を返却することで売りポジションを解消 | -50,000ドル |
| ネット収益=+9,500ドル                              |           |

をした場合には、さらに追加証拠金の差入れが要求されることもある。追加証拠金が差し入れられない場合は、空売りポジションは手仕舞われる。証拠金勘定の現金残高には通常利子が支払われることから、証拠金は投資家にとってのコストになるものではない。もし表示された金利が受け入れられないレベルであれば、割引国債などの代用可能な市場性証券を証拠金として差し入れればよい。空売りによる売却代金は投資家のものであるが、通常それは当初証拠金の一部分にあてられる。

2007年7月6日に、SECはアップティック・ルール(uptick rule)を廃止した。このルールは、直近の価格が一つ前の価格よりも高い場合のみ、株式の空売りを認めるというものであった。

### 5.3 前提と記号

本章では、以下の事項がある市場参加者に対しては成り立つと仮定する。

1. 市場参加者は取引を行うときに取引コストがかからない。
2. 市場参加者のすべてのネット・トレーディング収益に対する税率は一律である。
3. 市場参加者は同じ無リスク金利で資金の運用と調達ができる。
4. 市場参加者は裁定機会があれば、裁定取引を行う。

ここで、これらの仮定は必ずしもすべての市場参加者に対して成り立つ必要はないことに注意しよう。必要なのは、大手デリバティブ業者のような少数の主要な市場参加者に対して正しい、もしくは近似的に正しいということである。フォワード価格と現物価格との関係は、こうした主要な市場参加者が、裁定機会があればそれを見逃さず裁定取引を行うことによって形成される。

本章では以下の記号を用いる。

$T$  : フォワード契約または先物契約の満期までの時間(年数)

$S_0$  : フォワード契約または先物契約の原資産の現在価格

$F_0$  : 現在のフォワード価格または先物価格

$r$  : 受渡日 ( $T$  年後) に満期を迎える投資に対する連続複利のゼロ クーポン無リスク金利 (年率)

無リスク金利  $r$  は理論的には信用リスクのない現金の貸借金利であるため、必ず返済が行われることになる。第 4 章で述べたとおり、金融機関やその他のデリバティブ市場参加者は、国債レートより LIBOR レートを無リスク金利と仮定して使用している。

## 5.4 投資資産に対するフォワード価格

フォワード契約の価値算出が最も簡単なのは、原資産が所有による収入を生まない投資資産の場合である。配当のない株式や割引債がそのような投資資産の例である。

配当のない株式を 3 カ月後に購入する長期フォワード契約を考える(注1)。現在の株価を 40 ドル、3 カ月物無リスク金利を年率 5 %とする。

フォワード価格が 43 ドルと比較的高い場合を考える。アービトラージャーは、年率 5 % の無リスク金利で 40 ドルを借り入れて 1 株を購入し、同時に 3 カ月後に 1 株を売却するフォワード契約を結ぶとする。3 カ月後にアービトラージャーは株を引き渡して 43 ドルを受け取る。一方、借入金の返済に必要な現金の合計額は、

$$40e^{0.05 \times 3/12} = 40.50 \text{ ドル}$$

である。この戦略に従えば、アービトラージャーは 3 カ月後の収益  $43.00 - 40.50 = 2.50$  ドルを確定できる。

次に、フォワード価格が 39 ドルと比較的低い場合を考える。アービトラージャーは 1 株空売りし、その売却代金を 3 カ月間年率 5 % で運用すると同時に、3 カ月後に 1 株購入するフォワード契約を結ぶ。このとき、売却代金は

---

(注 1) 個別株式のフォワード契約はあまり取引されていないが、フォワード価格の考え方をみていく例としてわかりやすい。なお、米国では 2002 年 11 月に個別株式の先物取引が開始されている。

表5.2 所有による収入を生まない資産に対して、フォワード価格が現物価格から比較的乖離している場合の裁定機会について（資産価格=40ドル、金利=5%、フォワード契約の満期=3カ月）

| フォワード価格=43ドル   | フォワード価格=39ドル   |
|--|--|
| 現時点での行動：<br>5%で40ドルを3カ月間借り入れる<br>資産1単位を購入する<br>3カ月後に資産を43ドルで売却する<br>フォワード契約を締結する<br>3カ月後の行動：<br>資産を43ドルで売却する<br>利子とともに40.50ドルを返済する | 現時点での行動：<br>資産1単位を40ドルで空売りする<br>5%で40ドルを3カ月間投資する<br>3カ月後に資産を39ドルで購入する<br>フォワード契約を締結する<br>3カ月後の行動：<br>資産を39ドルで購入する<br>空売りポジションを手仕舞う<br>運用資金40.50ドルを受け取る |
| 実現益=2.50ドル   | 実現益=1.50ドル   |

3カ月後に  $40e^{0.05 \times 3/12}$ 、すなわち40.50ドルになる。3カ月後にアービトラージャーは39ドルを支払ってフォワード契約による株式を受け取り、それで空売りポジションを手仕舞う。したがって3カ月後のネット収益は、

$$40.50 - 39.00 = 1.50 \text{ ドル}$$

となる。以上の二つの取引戦略を表5.2にまとめた。

どのような状況になれば、表5.2のような裁定機会は存在しないであろうか。最初のような裁定機会はフォワード価格が40.50ドルより高い場合に発生し、2番目のような裁定機会はフォワード価格が40.50ドルを下回る場合に発生する。したがって裁定機会がないためには、フォワード価格はちょうど40.50ドルでなければならない。

## 一般化

上の例を一般化するために、価格  $S_0$  の所有による収入を生まない投資資産に対するフォワード契約を考える。最初に定義した記号を用いて、満期を  $T$ 、無リスク金利を  $r$ 、フォワード価格を  $F_0$  とすると、 $S_0$  と  $F_0$  との関係は、

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad (5.1)$$

で与えられる。 $F_0 > S_0 e^{rT}$  の場合は、アービトラージャーは資産を購入する

と同時にその資産を売却するフォワード契約を結ぶ裁定取引を行う。 $F_0 < S_0 e^{rT}$  の場合は、アービトラージャーは資産を空売りすると同時にその資産を購入するフォワード契約を結ぶ裁定取引を行う(注2)。先の例では、 $S_0 = 40$ ,  $r = 0.05$ ,  $t = 0.25$ であるから、(5.1)式により

$$F_0 = 40 e^{0.05 \times 0.25} = 40.50 \text{ ドル}$$

が得られ、前の計算結果と一致する。

フォワード契約による買いと現物買いは、ともに時点  $T$  では資産を所有していることになる。フォワード価格が現物価格よりも高いのは、現金買いのほうがフォワード契約の満期までの資金コスト負担が余分にかかるからである。1994年にキダー・ピー・ボディ (Kidder Peabody) はこの点を見落として、多大なコストを生むことになった (ビジネス寸見5.1を参照)。

### ビジネス寸見5.1 キダー・ピー・ボディの恥ずかしい過ち

投資銀行は、利付債の各キャッシュフローを別々の証券として売却することで、ストリップス債 (strip) と呼ばれる割引債をつくりだす手法を開発した。キダー・ピー・ボディのトレーダー Joseph Jett は、比較的単純なトレーディング手法を使っていた。ストリップス債を購入し、それをフォワード市場で売却するというものである。(5.1)式が示すように、所有による収入を生まない債券のフォワード価格は常に現物価格よりも高くなる。たとえば、3カ月物金利を年率 4 %, ストリップス債の現物価格を 70 ドルとすれば、ストリップス債の 3 カ月物フォワード価格は  $70 e^{0.04 \times 3/12} = 70.70$  ドルになる。

キダー・ピー・ボディのコンピュータシステムは Jett の各取引につい

(注 2) (5.1)式が正しいことは、次の戦略を考えても確認できる。資産 1 単位を購入し、時点  $T$  に価格  $F_0$  でその資産を売却するフォワード契約を締結したとする。この取引のコストは  $S_0$  で、時点  $T$  に現金  $F_0$  が収入として得られる。したがって、 $S_0$  は  $F_0$  の現在価値に等しくなければならない。したがって、 $S_0 = F_0 e^{-rT}$ 、すなわち  $F_0 = S_0 e^{rT}$  となる。

て、現物価格に対するフォワード価格の超過部分（この例では0.70ドル）を収益として報告していた。実際は、この収益はストリップス債を購入するための調達コストそのものであるが、彼はこの契約をロールオーバーすることによって、調達コストの実現を避けることができた。

その結果、実際にはおよそ3億5,000万ドルの損失であったにもかかわらず、社内のシステムはJettの取引に対して1億ドルの収益を報告していた（そのため、Jettは巨額の報酬を得ていた）。この例は、大手金融機関でさえもこうした比較的単純な過ちを犯してしまうということを示している。

### 【例5.1】

満期1年の割引債を4カ月後に購入するフォワード契約について考えてみる（すなわち、フォワード契約の満期時には、この債券の満期は8カ月である）。この債券の現在価格を930ドル、4カ月物無リスク金利（連続複利）を年率6%とする。割引債は所有による収入を生まないため、 $T=4/12$ 、 $r=0.06$ 、 $S_0=930$ として(5.1)式を用いることができ、フォワード価格は

$$F_0 = 930 e^{0.06 \times 4/12} = 948.79 \text{ ドル}$$

となる。これは現時点でのフォワード契約の受渡価格である。

### 空売りができない場合

空売りができる投資資産もある。その場合でも問題はない。(5.1)式の導出には、資産を空売りできる必要がないからである。必要なのは、純粋に投資目的で資産を保有する人々がたくさん存在するということである（定義より、これは投資資産に対しては常に成り立っている）。そういう人々はフォワード価格が低すぎるとみれば、資産を売却して、資産を購入するフォワード契約を結ぶことに魅力を感じるであろう。

原資産を金とする例で考えてみよう。金の保管コストはないものとする。

$F_0 > S_0 e^{rT}$  の場合、投資家は次の戦略を行うことができる。

1.  $T$  年間、金利  $r$  で  $S_0$  ドルを借り入れる。
2. 金 1 オンスを購入する。
3. 金 1 オンスを売却するフォワード契約を結ぶ。

$T$  年後に金 1 オンスは  $F_0$  で売却される。このとき、借入金の返済に  $S_0 e^{rT}$  の現金が必要なので、投資家は  $F_0 - S_0 e^{rT}$  の収益をあげることができる。

次に、 $F_0 < S_0 e^{rT}$  の場合を考えてみよう。金 1 オンスを所有する投資家は次の戦略を行うことができる。

1. 金 1 オンスを  $S_0$  で売却する。
2. 売却代金を  $T$  年間、金利  $r$  で運用する。
3. 金 1 オンスを購入するフォワード契約を結ぶ。

$T$  年後に運用した現金は  $S_0 e^{rT}$  になる。一方、金 1 オンスは  $F_0$  で買い戻される。したがって、投資家は金を保有し続けていた場合に比べて、 $S_0 e^{rT} - F_0$  の収益を上乗せすることができる。

配当のない株式の例と同様に、フォワード価格はこれらの二つの裁定機会が生じないように調整されるはずである。すなわち、(5.1)式の関係が成り立たなければならない。

## 5.5 既知の収入がある場合

本節では、保有者にあらかじめ決まった現金収入が入る投資資産に対するフォワード契約について考察しよう。配当の決まっている株式や利付債がその例である。前節と同様にまず数値例を考察し、その後で一般的な議論を行う。

現在の価格が 900 ドルの利付債を購入するフォワード契約を考える。フォワード契約の満期を 9 カ月とする。また、クーポンは 4 カ月後に 40 ドル支払われるものとする。さらに、4 カ月物、9 カ月物の無リスク金利（連続複利）をそれぞれ年率 3 %、4 % とする。

フォワード価格が 910 ドルと比較的高い水準にあるとしよう。そのとき、

アービトラージャーは900ドルを借り入れて債券を購入し、フォワード契約の売りポジションをとることができる。支払われるクーポンの現在価値は $40e^{0.03 \times 4/12} = 39.60$ ドルである。したがって、900ドルのうち39.60ドルは年率3%で4カ月間借り入れて、クーポンをその返済にあてればよい。残る860.40ドルは4%で9カ月間借り入れることになる。9カ月後の返済金額は $860.40e^{0.04 \times 0.75} = 886.60$ ドルである。フォワード契約満期時には債券を渡して910ドル受け取ることになる。したがって、アービトラージャーのネット収益は

$$910.00 - 886.60 = 23.40 \text{ ドル}$$

となる。

次に、フォワード価格が870ドルと比較的低い水準にあるとしよう。このとき投資家は債券を空売りして、フォワード契約の買いポジションをとる。債券の売却代金900ドルのうち、39.60ドルはクーポンの支払にあてるため、年率3%で4カ月間運用する。残る860.40ドルを年率4%で向こう9カ月間運用すると、886.60ドルになる。フォワード契約により、870ドルで債券を購入し、債券の空売りポジションを手仕舞うことになる。したがって、投資家の利益は、

$$886.60 - 870 = 16.60 \text{ ドル}$$

となる。

以上の二つの戦略を表5.3にまとめた(注3)。表中の最初の戦略では、フォワード価格が886.60ドルを上回っていれば、利益をあげることができる。一方、2番目の戦略では、フォワード価格が886.60ドルを下回っていれば、利益をあげることができる。このことより、裁定機会がないならばフォワード価格は886.60ドルにならなければならない。

---

(注3) 債券の空売りができない場合は、債券をすでに保有している投資家がそれを売却するとともに、その債券を購入するフォワード契約を結んで、ポジションの価値を16.60ドル分上乗せするだろう。これは5.4節で述べた金に対する戦略と同様のものである。

表5.3 既知の現金収入を生み出す資産に対して、9カ月物フォワード価格が現物価格から比較的乖離している場合の裁定機会について（資産価格=900ドル、4カ月後に40ドルの収入、4カ月と9カ月の金利がそれぞれ3%，4%）

| フォワード価格=910ドル  | フォワード価格=870ドル  |
|--|--|
| 現時点での行動：<br>900ドルの借入れ：39.60ドルを4カ月間、860.40ドルを9カ月間<br>資産1単位を購入する<br>9カ月後に資産を910ドルで売却する<br>フォワード契約を締結する                   | 現時点での行動：<br>資産1単位を900ドルで空売りする<br>39.60ドルと860.40ドルに分け、それぞれ4カ月間と9カ月間の運用を行う<br>9カ月後に資産を870ドルで購入する<br>フォワード契約を締結する             |
| 4カ月後の行動：<br>資産から40ドルの収入を受け取る<br>その40ドルを最初の借入れの元利金返済にあてる<br>9カ月後の行動：<br>資産を910ドルで売却する<br>そのうち886.60ドルを2番目の借入れの元利金返済にあてる | 4カ月後の行動：<br>4カ月間の運用から40ドルを受け取る<br>資産が生み出す収入40ドルを支払う<br>9カ月後の行動：<br>9カ月間の運用から886.60ドルを受け取る<br>資産を870ドルで購入する<br>売りポジションを手仕舞う |
| 実現益=23.40ドル  | 実現益=16.60ドル  |

## 一般化

これまでの例は一般化でき、投資資産がフォワード契約期間において現在価値  $I$  の収入を生み出すときは、

$$F_0 = (S_0 - I) e^{rT} \quad (5.2)$$

が成り立つ。先の例は  $S_0 = 900.00$ ,  $I = 40 e^{-0.03 \times 4/12} = 39.60$ ,  $r = 0.04$ ,  $T = 0.75$ とした場合に当たり、

$$F_0 = (900.00 - 39.60) e^{0.04 \times 0.75} = 886.60 \text{ ドル}$$

となる。これは前に示した計算結果と一致する。 $(5.2)$ 式は既知の現金収入を生む任意の投資資産に対して適用できる。

アービトラージャーは、 $F_0 > (S_0 - I) e^{rT}$ の場合は、資産を購入すると同時にその資産を売却するフォワード契約を結ぶことで収益を確定できる。ま

た， $F_0 < (S_0 - I) e^{rT}$  の場合は，資産を空売りすると同時にその資産を購入するフォワード契約を結ぶことで収益を確定できる。空売りができない場合は，資産を所有している投資家が，資産を売却すると同時にその資産を購入するフォワード契約を結ぶことによる収益機会を見出すことになる(注4)。

### 【例5.2】

株価50ドルの株式に対する10カ月物フォワード契約を考えてみる。無リスク金利はすべての満期に対して連続複利で年率8%とする。また，1株当たり0.75ドルの配当が3カ月後，6カ月後，9カ月後に支払われるとする。配当の現在価値  $I$  は，

$$I = 0.75e^{-0.08 \times 3/12} + 0.75e^{-0.08 \times 6/12} + 0.75e^{-0.08 \times 9/12} = 2.162$$

となる。変数  $T$  は10カ月なので，フォワード価格  $F_0$  は(5.2)式より，

$$F_0 = (50 - 2.162)e^{0.08 \times 10/12} = 51.14 \text{ ドル}$$

で与えられる。もしフォワード価格がこれより安ければ，アービトラージャーはこの株式を空売りすると同時にこの株式を購入するフォワード契約を結ぶだろう。逆にフォワード価格がこれより高ければ，アービトラージャーはこの株式を売却するフォワード契約を結ぶと同時にこの株式を現物市場で買うだろう。

## 5.6 利回りが既知の場合

次に，原資産の保有による収入が金額でなく利回り(率)でわかっている場合の，フォワード契約について考えてみよう。すなわち，収入をそれが支払われる時点の資産価格に対する割合で表現したとき，その割合がわかっているとする。いま，ある資産が年率5%の収入を生み出すものとしよう。こ

(注4) (5.2)式が正しいことは，次の戦略を考へても確認できる。資産の1単位を購入し，時点  $T$  に価格  $F_0$  でその資産を売却するフォワード契約を締結したとする。この取引のコストは  $S_0$  で，時点  $T$  に  $F_0$  の現金収入と，所有期間中に現在価値  $I$  の収入がある。したがって，初期投資額は  $S_0$  で，それに対する収入の現在価値は  $I + F_0 e^{-rT}$  であるから， $S_0 = I + F_0 e^{-rT}$  すなわち  $F_0 = (S_0 - I) e^{rT}$  となる。

れは、支払時点の資産価格の 5 %に等しい収入が 1 年に 1 回支払われると考えてもよい。その場合の利回りは 1 年複利で 5 %である。あるいは、資産価格の 2.5% の収入が年に 2 回支払われるとしてもよい。その場合の利回りは半年複利で年率 5 %である。4.2 節で、金利には連続複利が通常用いられる説明したが、同様に利回りにも連続複利を用いる。利回りの複利回数を変えたときの変換公式は、4.2 節で示したものと同じである。

フォワード契約期間における原資産の年平均利回りを連続複利で  $q$  とすると、フォワード価格は次のように与えられることを示すことができる（章末問題5.20を参照）。

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \quad (5.3)$$

### 【例5.3】

資産価格の 2 %の収入を 6 カ月に 1 回生み出すと期待される投資資産の 6 カ月物フォワード契約について考えてみる。無リスク金利（連続複利）を年率 10%，資産価格を 25 ドルとする。この場合、 $S_0 = 25$ ， $r = 0.10$ ， $T = 0.5$  である。また、利回りは半年複利で 4 %であるから、(4.3)式より、連続複利では 3.96%，すなわち  $q = 0.0396$  となる。 $(5.3)$  式より、フォワード価格  $F_0$  は

$$F_0 = 25 e^{(0.10 - 0.0396) \times 0.5} = 25.77 \text{ ドル}$$

で与えられる。

## 5.7 フォワード契約の価値

契約時点でのフォワード契約の価値はゼロであるが、時間がたつにつれ、その価値は正になったり負になったりする。銀行やその他の金融機関にとって、フォワード契約価値を日々評価することは重要である（これを契約の mark to market という）。これまでの記号を用いて、 $K$  を契約時に決定した受渡価格、受渡日をいまから  $T$  年後、 $r$  を  $T$  年物無リスク金利、 $F_0$  をその

契約を現時点で締結するとした場合のフォワード価格とする。さらに、

$f$  : 現時点でのフォワード契約の価値

と定義する。変数  $F_0$ ,  $K$ , および  $f$  の意味を明確にしておくことは重要である。本日を契約締結日とすると、受渡価格  $K$  はフォワード価格  $F_0$  に等しくなり、 $f$  の値はゼロになる。また、時間が経過するにつれて、 $K$  は（契約の条項の一部なので）不变であるが、 $F_0$  は変化し、 $f$  は正になったり負になったりする。

一般的に、（投資資産や消費資産の）ロング・フォワード契約（資産を購入するフォワード契約）に対して、以下の関係が成り立つ。

$$f = (F_0 - K) e^{-rT} \quad (5.4)$$

(5.4)式が正しいかどうかを確かめるために、4.7節で FRA に対してしたのと同じ議論を行う。受渡価格  $F_0$  のロング・フォワード契約と、他の条件は同一だが受渡価格が  $K$  のロング・フォワード契約を比較してみる。二つの契約の違いは時点  $T$  で原資産に対して支払われる金額のみである。その金額は、前者の契約では  $F_0$  であり、後者では  $K$  である。そして、時点  $T$  でのキャッシュフローの差額  $F_0 - K$  を現時点に割り引くと  $(F_0 - K) e^{-rT}$  になる。したがって、受渡価格  $F_0$  の契約は受渡価格  $K$  の契約より  $(F_0 - K) e^{-rT}$  だけ価値が低いことになる。受渡価格  $F_0$  のフォワード契約の価値は定義よりゼロであるから、受渡価格  $K$  のフォワード契約の価値は  $(F_0 - K) e^{-rT}$  となる。以上より (5.4) 式が成り立つ。同様に、受渡価格  $K$  のショート・フォワード契約（資産を売却するフォワード契約）の価値は、

$$(K - F_0) e^{-rT}$$

となる。

#### 【例5.4】

配当のない株式のロング・フォワード契約を考えてみる。残存期間を 6 カ月、無リスク金利（連続複利）を年率 10%，株価を 25 ドル、受渡価格を 24 ドルとする。この場合、 $S_0 = 25$ ,  $r = 0.10$ ,  $T = 0.5$ , および  $K = 24$  である。 $(5.1)$  式より、フォワード価格  $F_0$  は

$$F_0 = 25 e^{0.1 \times 0.5} = 26.28 \text{ ドル}$$

となる。したがって、フォワード契約の価値は、(5.4)式より

$$f = (26.28 - 24) e^{-0.1 \times 0.5} = 2.17 \text{ ドル}$$

となる。

(5.4)式は、フォワード契約満期時点での原資産価格がフォワード価格  $F_0$  になる、と仮定することで、ロング・フォワード契約の現在価値が計算できることを示している。実際そう仮定すると、ロング・フォワード契約の時点  $T$  におけるペイオフは  $F_0 - K$  となる。その現在価値は  $(F_0 - K) e^{-rT}$  で、これが(5.4)式での  $f$  の値である。同様に、現時点でのフォワード価格が時点  $T$  における原資産価格と仮定することで、ショート・フォワード契約の現在価値も計算することができる。以上の結果は、フォワード・レートが実現すると仮定することで FRA の価値が計算できるという、4.7節の結果と同じである。

(5.1)式と(5.4)式を使うと、所有による収入を生まない投資資産のロング・フォワード契約の価値は、

$$f = S_0 - K e^{-rT} \quad (5.5)$$

と表される。同様に、(5.2)式と(5.4)式を使うと、現在価値  $I$  の既知の収入を生む投資資産のロング・フォワード契約の価値は、

$$f = S_0 - I - K e^{-rT} \quad (5.6)$$

と表される。最後に(5.3)式と(5.4)式を使うと、利回り  $q$  が既知の投資資産のロング・フォワード契約の価値は、

$$f = S_0 e^{-qT} - K e^{-rT} \quad (5.7)$$

と表される。

先物価格が変化した場合の先物契約からの損益は、先物価格の変化にポジションの大きさを乗じることで計算される。先物契約は日々値洗いされるため、収益はほぼ即時に実現される。一方、フォワード価格が変化したときの損益は、フォワード価格の変化にポジションの大きさを乗じた額の現在価値になることを(5.4)式は示している。フォワード契約と先物契約におけるこの損益認識の違いが、外国為替取引を行っているトレーディングデスクを混

乱させる原因となることがある（ビジネス寸見5.2を参照）。

### ビジネス寸見5.2 システムエラー？

銀行の外国為替トレーダーが、3カ月後に100万英ポンドを為替レート1.9000で購入するフォワード契約を締結したとする。同時に、隣の席のトレーダーが英ポンドの3カ月物先物契約の買いポジションを16枚とったとする。先物価格は1.9000で、先物契約の取引単位は62,500ポンドである。したがって、フォワードトレーダーおよび先物トレーダーのとったポジションは同じである。数分後、フォワードと先物の価格がそれぞれ1.9040に上昇したとき、銀行のシステムは、先物トレーダーが4,000ドルの収益、フォワードトレーダーが3,900ドルの収益をあげたと報告する。そのとき、フォワードトレーダーは不平を伝えるために、即座にシステム部門に電話をするが、その不平は妥当なものか。

答はノー！である。先物トレーダーは、先物契約の日々の値洗いにより、先物価格が上昇するやいなや収益を実現させる。一方、フォワードトレーダーが1.9040でショート・フォワード契約で手仕舞った場合は、3カ月後に1.9000で100万英ポンドを購入するとともに、3カ月後に1.9040で100万英ポンドを売る契約を結んだことになる。これにより4,000ドルの収益があがるが、それは現時点ではなく、3カ月後に実現するものである。したがって、フォワードトレーダーの収益は4,000ドルの現在価値となる。これは、(5.4)式とも整合性がとれている。

フォワードトレーダーは損益が対称的に扱われるという事実を知つて少しは安堵するであろう。つまり、フォワード価格と先物価格が1.9040に上昇するかわりに、ともに1.8960に下落した場合には、先物トレーダーは4,000ドルの損失を被るが、フォワードトレーダーは3,900ドルの損失にとどまるからである。

## 5.8 フォワード価格と先物価格は同じか？

章末の付録では、無リスク金利が一定ですべての満期に対して同じ値の場合には、任意の満期に対するフォワード価格は同一満期の先物価格に等しいということを、裁定の議論を用いて説明している。この議論は金利が時間の確定的関数の場合に対しても拡張できる。

ところが、金利が確率的に変動する場合には（現実にはほとんどそうだが）、フォワード価格と先物価格は同じにはならない。原資産の価格  $S$  が金利と強い正の相関をもつ場合を考えることによって、ある程度この関係の性質を理解することができる。価格  $S$  が上昇すると、先物契約の買いポジションをもつ投資家には、日々の値洗いにより収益が実現する。このとき金利は、正の相関をもっていることより、上昇していることが多い。したがって、この実現益は平均的金利水準よりも高い金利で運用される傾向にある。同様に、価格  $S$  が下落すると投資家には実現損が発生する。この実現損は平均的金利水準よりも低い金利で調達される傾向にある。一方、先物契約でなくフォワード契約を保有している投資家は、金利変動によるこのような影響は受けない。このことは、先物契約の買いポジションはフォワード契約の買いポジションよりも魅力があることを意味している。したがって、価格  $S$  が金利と強い正の相関をもつ場合には、先物価格はフォワード価格よりも高くなる傾向にある。同様の理由で、価格  $S$  が金利と強い負の相関をもつ場合には、フォワード価格が先物価格よりも高くなる傾向にある。

満期が数カ月のフォワード価格と先物価格との理論的な差違は、ほとんどの場合無視できるほど小さい。現実には、モデルに考慮されていない税金、取引コスト、証拠金の取扱いなどの多くの要因により、フォワード価格と先物価格に差違が生じることもある。カウンターパーティーがデフォルトするリスクは、フォワード契約よりも取引所決済である先物契約のほうが一般的に小さい。また、先物契約はフォワード契約よりも流動性が高く取引が行いやすい。これらのことにもかかわらず、フォワード価格と先物価格は同じであるという仮定は、多くの目的に対して問題のない仮定である。したがつ

て、本書では通常このことを仮定して、現時点での先物価格とフォワード価格の両方に対して、記号  $F_0$ を用いる。

先物契約とフォワード契約は同じであると仮定できるとするが、その例外はユーロ・ドル金利先物である。これについては6.3節で論じる。

## 5.9 株価指数の先物価格

3.5節で株価指数先物契約について紹介し、株価指数先物契約が株式ポートフォリオを管理する有益なツールであることを示した。表3.3には、さまざまな指数の先物価格が示してある。ここでは、指数先物価格がどのように決まるかを考察する。

株価指数は通常、配当のある投資資産の価格と考えることができる(注5)。ここで投資資産とは指数を構成する株式ポートフォリオのこと、その投資資産から支払われる配当金とは、そのポートフォリオの保有者が受け取れる配当収入である。配当収入は金額ではなく、利回りがわかっていると仮定するのが通常である。配当利回りを  $q$  とすると、(5.3)式から指数先物価格  $F_0$  は

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T} \quad (5.8)$$

となる。この式より、先物価格は満期が長くなるほど  $r-q$  の割合で増加することがわかる。表3.3をみると、6月限S&P先物の価格は3月限の先物価格より約0.9%高い。これは、2007年1月8日の短期無リスク金利  $r$  は配当利回り  $q$  よりも年率で3.6%高かったことを示している。

### ビジネス寸見5.3 CME の日経225先物

指数先物価格がいかに決定されるかという本章の議論は、指数が投資資産の価値であることを仮定している。すなわち、指数は取引可能な資

(注5) 必ずしもそうではないケースもある（ビジネス寸見5.3を参照）。

産ポートフォリオの価値でなければならないことを意味している。しかし、CMEで取引される日経225先物の原資産はこの条件を満たしていない。その理由はかなり細かい話である。 $S$ を日経225指数の値としよう。これは、225銘柄の日本株ポートフォリオの円貨での価値である。一方、CMEの日経225先物の原資産の価値は $5S$ ドルである。言い換えるれば、この先物の原資産は、円ベースでの値が、あたかもドルベースでの値であるかのように扱われた変数である。

価値が常に $5S$ ドルであるようなポートフォリオに投資することはできない。せいぜいできることは、常に $5S$ 円の価値があるものに投資すること、すなわち常に $5QS$ ドルの価値があるものに投資することである。ここで、 $Q$ は1円のドル換算値である。したがって、変数 $5S$ ドルは投資資産の価格ではなく、(5.8)式は適用できない。

CMEの日経225先物はクオント(quanto)の一例である。クオントとは、ある通貨建ての原資産価格から決まる値を、そのまま別の通貨建てでのペイオフとするデリバティブの一種である。クオントについては第29章で論じる。

### 【例5.5】

3カ月物S&P500先物について考えてみる。株価指数の原資産である株式ポートフォリオの配当利回りを年率1%，株価指数の現在値を1,300，無リスク金利を連続複利で年率5%とする。この場合、 $r=0.05$ ， $S_0=1,300$ ， $T=0.25$ ， $q=0.01$ となるので、指標先物価格 $F_0$ は、

$$F_0 = 1,300 e^{(0.05 - 0.01) \times 0.25} = 1,313.07 \text{ ドル}$$

となる。

実際には、株価指数ポートフォリオの配当利回りは年を通して毎週変動する。たとえば、NYSE株式の配当のほとんどが、毎年2月、5月、8月、11月の第1週に支払われている。したがって、使用する $q$ の値は、契約満期までの配当利回りの平均年率とするのが望ましい。また、 $q$ を推定するた

めに用いられる配当は、その先物契約の満期までに配当落ち日が到来するものについて行われるべきである。

### 指数裁定取引

もし  $F_0 > S_0 e^{(r-q)T}$  ならば、株価指数の構成銘柄を時価（すなわち現物）で買い、同時に指数先物を売ることにより収益をあげることができる。反対に  $F_0 < S_0 e^{(r-q)T}$  ならば、株価指数の構成銘柄を空売りあるいは売却し、同時に指数先物を買うことにより収益をあげることができる。これらの戦略は指数裁定取引 (index arbitrage) といわれている。 $F_0 < S_0 e^{(r-q)T}$  の場合には、インデックス型の株式ポートフォリオをもつ年金ファンドが指数裁定取引を行うこともある。 $F_0 > S_0 e^{(r-q)T}$  の場合には、短期金融市場で余裕資金を運用している企業が指数裁定取引を行うこともある。株価指数の構成銘柄数はかなり多いので、株価指数に連動する比較的少ない銘柄数のポートフォリオをつくり、それを使って指数裁定取引を行うこともある。指数裁定取引は、しばしばコンピュータを用いたプログラム売買 (program trading) で行われる。

アービトラージャーの裁定取引によって、ほとんどの時間で (5.8) 式は実際に成り立っている。しかし、裁定取引が執行できない場合がまれにあり、その場合には先物価格は現物価格から乖離する (ビジネス寸見 5.4 を参照)。

#### ビジネス寸見 5.4 1987年10月の指数裁定取引

指数裁定取引を行うには、トレーダーは指数先物と指数を構成する現物株ポートフォリオの売買を、市場で呈示される価格で即時に執行しなければならない。通常の市場状況では、プログラム売買を用いてこうした裁定取引は可能であり、その結果、(5.8) 式の関係はよく成り立っている。1987年10月19日と20日は市場がとても正常とはいえない日の例である。“ブラックマンデー”と呼ばれる1987年10月19日に、株式相場は20%以上も下落し、ニューヨーク株式取引所の出来高は6億400万株と、

過去の記録をあっさりと更新した。取引所のシステムはパンクし、株式売買のオーダーを出そうにも、取引執行に2時間近くもかかるといった事態になった。

1987年10月19日のほとんどの時間帯で、指数先物価格は株価指数を大幅に下回っていた。たとえば、S&P500の終値225.06（前日比57.88下落）に対し、12月限S&P500先物価格は201.50（前日比80.75下落）となつた。これは、現物の取引執行に時間がかかるため、裁定取引が行えなかつたことが大きな原因である。翌1987年10月20日（火）、取引所はプログラム売買についての臨時の規制を行つたために、裁定取引はますます困難になり、株価指数と指数先物価格との乖離が継続した。12月限S&P500先物価格が株価指数を一時18%も下回る局面すらあつたのである。しかし、数日後には市場は正常に戻り、アービトラージャーの裁定取引によって、指数の先物価格と現物価格との関係を表す(5.8)式が成り立つようになった。

## 5.10 外国通貨のフォワード契約と先物契約

次に、米国の投資家の立場から外国通貨のフォワード契約と先物契約を考えてみよう。この場合の原資産は外国通貨1単位となる。したがつて、外国通貨1単位に対するドル建ての直物価格を $S_0$ 、ドル建てのフォワード価格または先物価格を $F_0$ と定義することになる。これは、これまでの他の資産に対する $S_0$ と $F_0$ の定義と整合性のとれた定義である。しかし、2.10節で述べたように、この定義は、市場での直物価格およびフォワード価格の表示方法とは、必ずしも一致するものではない。英ポンド、ユーロ、豪ドル、ニュージーランドドルを除く主要通貨の直物価格およびフォワード価格は、1ドルに等価なそれらの通貨単位で表示される場合が多い。

外国通貨には、その保有者は当該国の無リスク金利での利子を得ることができる、という特性がある。たとえば、外国通貨の保有者は、その通貨建て

の債券にその資金を直接投資することができる。いま、 $r_f$ を満期  $T$  の無リスク外国金利（連続複利）と定義し、 $r$  は同じ満期の無リスク米ドル金利とする。

$F_0$  と  $S_0$  の関係は、

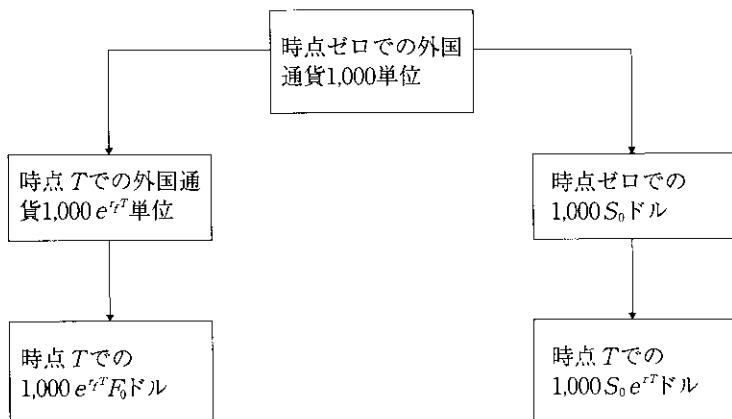
$$F_0 = S_0 e^{(r - r_f)T} \quad (5.9)$$

となる。これは、国際金融論でよく知られる金利パリティという関係である。これが成り立つ理由を図5.1に例示した。ある個人が外国通貨を1,000単位保有しているとする。時点  $T$  でその外国通貨をドルに交換する方法は二つある。一つは、外国通貨を金利  $r_f$  で  $T$  年間運用すると同時に、時点  $T$  でそれをドルに交換するフォワード契約を締結する方法である。この場合は、時点  $T$  で  $1,000e^{r_f T} F_0$  ドルとなる。別の方法は、直物市場で外国通貨をドルに交換し、そのドルを金利  $r$  で  $T$  年間運用するという方法である。この場合は、時点  $T$  で  $1,000S_0 e^{rT}$  ドルとなる。裁定機会がないとすれば、この二つの戦略は同じ結果にならなければならない。すなわち

$$1,000e^{r_f T} F_0 = 1,000S_0 e^{rT}$$

となり、

図5.1 外国通貨1,000単位を時点  $T$  でドルに交換する二つの方法  
 $S_0$  は直物為替レート、 $F_0$  はフォワード為替レート、 $r$  と  $r_f$  はそれぞれドルと外国通貨の無リスク金利。



$$F_0 = S_0 e^{(r - r_f)T}$$

が得られる。

【例5.6】

いま、豪州と米国における2年物金利をそれぞれ5%と7%とし、豪ドル(AUD)と米ドル(USD)の為替直物レートを0.6200 USD/AUDとする。(5.9)式から2年物の為替フォワード・レートは

$$0.6200 e^{(0.07 - 0.05) \times 2} = 0.6453$$

となる。

まず、2年物為替フォワード・レートがこのレートを下回った場合、たとえば0.6300だった場合を考えてみよう。このとき、アービトラージャーは以下の取引を行う。

1. 1,000豪ドルを年率5%で2年間借り入れ、それを直物レートで620米ドルに交換する。その米ドルを7%で運用する(金利は両通貨とも連続複利)。

2. 1,105.17豪ドルを購入 ( $1,105.17 \times 0.63 = 696.26$ 米ドルを売却)するフォワード契約を締結する。

7%で運用された620米ドルは2年後には $620e^{0.07 \times 2} = 713.17$ 米ドルになる。そのうち696.26米ドルは、フォワード契約で1,105.17豪ドルを購入するために使われる。これは、借り入れた1,000豪ドルの元利金返済額( $1,000e^{0.05 \times 2} = 1,105.17$ )と同額である。したがって、この戦略はリスクなしで $713.17 - 696.26 = 16.91$ 米ドルの利益をあげることができる(この戦略がそれほど魅力的でないと思うならば、1億豪ドルの借入れで同じ戦略を考えてみよ)。

次に、2年物フォワード・レートが0.6600の場合((5.9)式で与えられる0.6453よりも大きい場合)を考えてみよう。このとき、アービトラージャーは以下の取引を行う。

1. 1,000米ドルを年率7%で2年間借り入れ、それを直物レートで $1,000 / 0.6200 = 1,612.90$ 豪ドルに交換する。その豪ドルを5%で運用する。

2. 1,782.53豪ドルを売却 ( $1,782.53 \times 0.66 = 1,176.47$ 米ドルを購入) するフォワード契約を締結する。

5%で運用された1,612.90豪ドルは2年後には $1,612.90e^{0.05 \times 2} = 1,782.53$ 豪ドルになる。フォワード契約によって、これは1,176.47米ドルに交換される。借り入れた米ドルを返済するために必要な額は $1,000e^{0.05 \times 2} = 1,150.27$ 米ドルである。したがって、この戦略はリスクなしで $1,176.47 - 1,150.27 = 26.20$ 米ドルの利益をあげることができる。

表5.4は2007年1月8日の通貨先物価格を示している。価格は外国通貨1単位当りの米ドル（またはセント）価格で表示されている。これは通貨先物価格の一般的な表示方法である。(5.9)式は $r$ を米ドルの無リスク金利、 $r_f$ を外国通貨の無リスク金利として適用すればよい。

2007年1月8日の日本円、カナダドル、英ポンド、イスラエル・ペソ、ユーロの金利は米国よりも低かった。これは $r > r_f$ に対応しており、表5.4でそれらの通貨先物価格が満期が長くなるほど高くなっていることを説明できる。また、豪ドル、メキシコペソについては、それらの金利は米国金利よりも高かった。これは $r_f > r$ に対応しており、それらの通貨先物価格が満期が長く

**表5.4 通貨先物価格（出典：2007年1月9日付ウォール・ストリート・ジャーナル）**

各列は順に限月、始値、高値、安値、清算値、前日比、建玉である。

| Currency Futures                                       |        |        |        |               |         |         |
|--|--------|--------|--------|---------------|---------|---------|
| <i>Japanese Yen (CME)-¥12,500,000; \$ per 100%</i>     |        |        |        |               |         |         |
| March  | .8505  | .8546  | .8494  | <b>.8501</b>  | -.0010  | 275,923 |
| June   | .8603  | .8643  | .8593  | <b>.8599</b>  | -.0010  | 5,516   |
| <i>Canadian Dollar (CME)-CAD 100,000; \$ per CAD</i>   |        |        |        |               |         |         |
| March  | .8541  | .8549  | .8503  | <b>.8525</b>  | -.0018  | 155,395 |
| June   | .8566  | .8569  | .8528  | <b>.8549</b>  | -.0018  | 2,830   |
| <i>British Pound (CME)-£62,500; \$ per £</i>           |        |        |        |               |         |         |
| March  | 1.9308 | 1.9410 | 1.9265 | <b>1.9362</b> | .0074   | 134,588 |
| June   | 1.9326 | 1.9403 | 1.9266 | <b>1.9377</b> | .0074   | 178     |
| <i>Swiss Franc (CME)-CHF 125,000; \$ per CHF</i>       |        |        |        |               |         |         |
| March  | .8146  | .8158  | .8105  | <b>.8138</b>  | -.0007  | 70,774  |
| June   | .8207  | .8219  | .8170  | <b>.8206</b>  | -.0007  | 168     |
| <i>Australian Dollar (CME)-AUD 100,000; \$ per AUD</i> |        |        |        |               |         |         |
| March  | .7775  | .7808  | .7766  | <b>.7783</b>  | .0012   | 116,717 |
| June   | .7763  | .7784  | .7746  | <b>.7762</b>  | .0012   | 227     |
| <i>Mexican Peso (CME)-MXN 500,000; \$ per 10 MXN</i>   |        |        |        |               |         |         |
| Jan  | ..     | ..     | ..     | <b>.9129</b>  | ..      | 0       |
| March  | .90700 | .91150 | .90700 | <b>.91025</b> | -.00100 | 69,631  |
| <i>Euro (CME)-€125,000; \$ per €</i>                   |        |        |        |               |         |         |
| March  | 1.3051 | 1.3078 | 1.3013 | <b>1.3061</b> | .0009   | 174,877 |
| June   | 1.3079 | 1.3123 | 1.3061 | <b>1.3106</b> | .0009   | 1,453   |

Source: Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc. © 2007 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

なるほど低くなっていることを説明できる。

### 【例5.7】

表5.4の6月限カナダドル先物の清算価格は、3月限の清算価格よりも0.28%高くなっている。これは、(5.9)式より、2007年1月8日の米国の短期金利がカナダの短期金利をおよそ年率1.12%上回っていたことを物語っている。

### 利回りが既知の資産としての外国通貨

(5.9)式は、(5.3)式で $q$ を $r_f$ で置き換えたものに等しい。これは単なる偶然ではない。外国通貨は利回りが既知の収入を生み出す投資資産とみなすことができるからだ。その利回りとは外国通貨の無リスク金利である。

この考えを理解するために、外国通貨に支払われる利子の価値が外国通貨の価値に依存していることに注意しよう。英ポンドの金利が年率5%であると仮定する。米国の投資家にとって、英ポンドは英ポンドの価値の年率5%に等しい収益を生み出す。言い換えれば、英ポンドは米国の投資家にとって年率5%の利回りをもつ資産である。

## 5.11 商品先物

次に商品先物契約について考えよう。まず、金や銀などの投資資産<sup>(注6)</sup>の商品先物価格を取り上げ、次に消費資産の先物価格について考える。

### 収入と保管コスト

ビジネス寸見3.1で説明したように、金の採掘企業のヘッジ戦略によって、

(注6) 投資資産は、必ずしも投資目的のみで保有されるわけではないことを思い出そう。必要なのは、投資目的で現物を保有する投資家がいて、それを売却すると同時にそれを購入するフォワード契約を結ぶ取引が魅力的であれば、喜んでその取引を行うということである。これが、銀は実需でも大いに利用されているにもかかわらず、投資資産として扱われる理由である。

一部の投資銀行には金を借り入れる必要が生じる。中央銀行のような金の保有者は、金を貸し出す際に、金リース・レート (gold lease rate) と呼ばれる利子を徴求する。同じことが銀にもあてはまる。したがって、金と銀は保有者に収入をもたらす。また他の商品と同じく、保管コストもかかる。

(5.1)式は、投資資産からの収入や投資資産の保管コストがない場合に、投資資産としての商品のフォワード価格が

$$F_0 = S_0 e^{rT} \quad (5.10)$$

で与えられることを示している。保管コストは負の収入と考えることができるので、 $U$  を先物契約期間中に発生する収入を差し引いたネットでの保管コストの現在価値とすれば、(5.2)式より

$$F_0 = (S_0 + U) e^{rT} \quad (5.11)$$

となる。

#### 【例5.8】

収入を生まない投資資産の1年物先物契約を考えてみよう。1年後に支払う資産の保管コストを単位当たり2ドルとする。また、単位当たりの現物価格を450ドル、すべての満期に対して無リスク金利を年率7%とする。これは、 $r=0.07$ ,  $S_0=450$ ,  $T=1$ , および

$$U = 2e^{-0.07 \times 1} = 1.865$$

の場合に対応しているから、(5.11)式より先物の理論価格  $F_0$  は

$$F_0 = (450 + 1.865) e^{0.07 \times 1} = 484.63 \text{ ドル}$$

となる。実際の先物価格が484.63よりも高いならば、アービトラージャーは現物を買って1年物先物契約を売り付ければ、収益を確定できる。また、実際の先物価格が484.63よりも低いならば、すでに現物を保有している投資家はそれを売却し、先物契約を買い付けることによって、収益を上乗せすることができる。

保管コストが原資産の価格に比例して発生するような場合には、そのコストは負の利回りとして考えることができる。この場合は(5.3)式から、

$$F_0 = S_0 e^{(r+u)T} \quad (5.12)$$

となる。ここで  $\mu$  は、原資産からの収入の利回りを差し引いたネットでの、現物価格に対する年率保管コストを表す。

### 消費目的の商品

投資資産というより消費資産であるコモディティ（商品）には、保有による収入はないことが多い、多額の保管コストが必要となる場合がある。現物価格から先物価格を決定する際に利用される裁定戦略を注意深く見直してみよう（注7）。仮に(5.11)式のかわりに

$$F_0 > (S_0 + U) e^{rT} \quad (5.13)$$

とすると、裁定取引戦略として、以下のような取引が可能となる。

1. 無リスク金利で  $S_0 + U$  の借入れを行い、その資金で商品 1 単位を購入して保管コストも支払う。
2. その商品 1 単位を売却するフォワード契約を結ぶ。

先物契約をフォワード契約とみなせば、この戦略により時点  $T$  に  $F_0 - (S_0 + U) e^{rT}$  の収益が得られる。これは、すべての商品に対して実行可能な戦略である。このような裁定取引が行われると、(5.13)式が成り立たなくなるまで  $S_0$  は上昇し、 $F_0$  は下落する。したがって、(5.13)式の状態はそう長くは続かない。

次に、

$$F_0 < (S_0 + U) e^{rT} \quad (5.14)$$

としてみよう。商品が投資資産のときには、純粋な投資目的のみでそれを保有する投資家が多いとしてよい。彼らが(5.14)式のような状況を見出したならば、以下の戦略で収益をあげられると考えるであろう。

1. 保有している商品を売却し、保管コストを節約し、手元に入った資金を無リスク金利で運用する。
2. その商品を購入するフォワード契約を結ぶ。

その結果、フォワード契約の満期には、商品を保有し続けたよりも  $(S_0 +$

---

(注7) 現物価格が受渡場所によって異なる商品もある。ここでは、現物と先物の受渡場所は同じであると仮定する。

$U) e^{rT} - F_0$ だけ多くの収益が無リスクで得られることになる。したがって、(5.14)式の状態もそう長くは続かない。(5.13)式と(5.14)式のいずれもそう長くは続かないので、 $F_0 = (S_0 + U) e^{rT}$ という関係が成り立つ。

しかし、投資資産でなく消費資産である商品に対しては、この議論は適用できない。消費目的で商品を抱える個人や企業は、その商品の使用計画を立てているのが普通である。先物契約やフォワード契約は消費することができないので、彼らは現物を売って先物契約やフォワード契約で買うという取引をしたいとは考えていない(たとえば、原油先物を精製所に供給することはできない)。したがって、(5.14)式が成り立たないようにする作用は働かないでの、消費資産である商品に対しては、

$$F_0 \leq (S_0 + U) e^{rT} \quad (5.15)$$

の関係が成り立つことしかいえない。保管コストが現物価格に対する比率で表されるときは、

$$F_0 \leq S_0 e^{(r+u)T} \quad (5.16)$$

となる。

## コンビニエンス・イールド

消費資産である商品の現物保有には先物契約の保有では得られない利得があるので、(5.15)式または(5.16)式での等式は必ずしも成り立たない。たとえば石油精製業者は、原油先物契約を在庫として抱える原油と同等なものとは考えないであろう。というのは、在庫として保有する原油は精製過程に投入できるが、先物契約はそうした目的には利用できないからである。一般に、製造業者は現物の保有によって製造を続けることができ、それによって一時的な品不足から利益をあげることもできる。一方、先物契約では同じようなことはできない。現物を保有することによる利得は商品のコンビニエンス・イールド (convenience yield) と呼ばれることもある。保管コストの金額が既知でその現在価値が  $U$  のとき、コンビニエンス・イールドは

$$F_0 e^{yT} = (S_0 + U) e^{rT}$$

となる  $y$  で定義される。保管コストが現物価格に対する比率  $u$  で与えられ

るならば、 $y$  は

$$F_0 e^{yT} = S_0 e^{(r+u)T}$$

すなわち

$$F_0 = S_0 e^{(r+u-y)T} \quad (5.17)$$

によって定義される。コンビニエンス・イールドは、(5.15)式あるいは(5.16)式において、左辺が右辺よりもどの程度低い値になっているかを簡単に測れる指標である。投資資産の場合、コンビニエンス・イールドはゼロでなければならない。さもなければ裁定機会が発生する。第2章の図2.2は、2007年1月8日のオレンジジュース先物価格が、満期が長くなるほど低くなっていたことを示している。このパターンは、その日のオレンジジュースのコンビニエンス・イールド  $y$  が  $r+u$  より大きいことを示している。

コンビニエンス・イールドは、商品の将来の需給に関する市場の見通しを反映している。現物が不足する見込みが高いとき、コンビニエンス・イールドは高くなる。もし、商品の消費者が多く在庫を抱えていれば、短期的には不足が生じる可能性はきわめて少なく、コンビニエンス・イールドは低くなる。在庫率が低いと品不足が起こりやすく、コンビニエンス・イールドは通常高くなる。

## 5.12 キャリー・コスト

先物価格と現物価格との関係は、キャリー・コスト (cost of carry) という指標にまとめることができる。この指標は、保管コストに資金調達にかかる金利を加え、資産から得られる収入を差し引いたもので表される。たとえば配当のない株式では、保管コストも所有による収入もないので、キャリー・コストは金利  $r$  になる。株価指数では、配当利回りが  $q$  なのでキャリー・コストは  $r-q$  になる。通貨のキャリー・コストは  $r-r_f$  になる。所有による収入の利回りが  $q$  で、保管コスト率が  $u$  の商品の場合には、キャリー・コストは  $r-q+u$  になる。

キャリー・コストを  $c$  とすると、投資資産に対する先物価格は

$$F_0 = S_0 e^{cT} \quad (5.18)$$

と書ける。消費資産の先物価格については、

$$F_0 = S_0 e^{(c-y)T} \quad (5.19)$$

と書ける。ここで  $y$  はコンビニエンス・イールドである。

### 5.13 受渡しのオプション

フォワード契約では受渡日は通常ある 1 日に決められているが、先物契約では売手が受渡日を決められた期間（受渡期間）から選択できる場合がある（一般的には数日前に受渡意思を通知しておく必要がある）。この選択権が先物契約の価格付けを複雑にしている。先物契約の満期日としては、受渡期間の初日、中頃、それとも最終日のいずれを仮定するのがよいのだろうか。たとえほとんどの先物契約が満期前に手仕舞われるとしても、先物契約の理論価格を算出するうえでは、受渡しがいつ行われるのかは重要である。

もし先物価格が満期が長くなるほど高くなっているならば、(5.19)式から  $c > y$  となり、資産を保有するメリット（コンビニエンス・イールドから保管コストを差し引いたもの）は無リスク金利よりも小さいことになる。したがって、先物契約の売手にとっては現金につく利子のほうが資産を保有するメリットよりも大きいので、できる限り早く受渡しを行うことが最適になることが多い。このような場合には、一般に先物価格は受渡期間の最初に受渡しが行われるものとして計算すればよい。先物価格が満期が長くなるほど低くなっている場合 ( $c < y$ ) には、この逆が成り立つ。先物契約の売手にとってはできる限り遅く受渡しを行ったほうが最適となる場合が多く、一般に先物価格の計算はその仮定のもとで行えばよい。

### 5.14 先物価格と将来の現物価格の期待値

将来のある時点の現物価格がいくらになっているかについての市場の平均的な意見を、その時点の期待現物価格 (expected spot price) と呼ぶことに

する。いまは 6 月で、9 月限トウモロコシ先物価格が 350 セントだと仮定しよう。このとき、トウモロコシの 9 月の期待現物価格はいくらかというのは興味深い問題である。期待現物価格は 350 セントより安いか、高いか、それともちょうど 350 セントか。図 2.1 に例示したように、先物価格は満期が近づくにつれて現物価格に収束する。将来の現物価格の期待値が 350 セントよりも低ければ、市場は 9 月限先物価格が下落することを期待しているはずで、そうなれば売りポジションを保有するトレーダーは益を、買いポジションを保有するトレーダーは損を計上する。一方、将来の現物価格の期待値が 350 セントよりも高ければ、その逆が成り立つ。すなわち市場は 9 月限先物価格が上昇することを期待しているはずで、そうなれば買いポジションを保有するトレーダーは益を、売りポジションを保有するトレーダーは損を計上する。

### ケインズとヒックスの議論

経済学者のケインズ (John Maynard Keynes) とヒックス (John Hicks) は、ヘッジャーが売りポジションをとり、スペキュレーターが買いポジションをとる傾向があるならば、スペキュレーターはリスクの見合いを要求するため、先物価格は期待現物価格を下回るだろうとを論じた(注 8)。スペキュレーターは平均的に収益を生み出せると考えている場合にのみ取引を行う。ヘッジャーは平均的に損を計上することになるが、先物契約によってリスクを軽減できるので、そうしたことがわかっていても取引を行いうだろ。逆にヘッジャーが買いポジションをとり、スペキュレーターが売りポジションをとる傾向があるならば、ケインズとヒックスは同じ理由から、先物価格は期待現物価格を上回るだろうと論じた。

### リスクとリターン

先物価格と期待現物価格との関係を説明する現代的なアプローチは、経済

(注 8) J.M. Keynes, *A Treatise on Money*. London : Macmillan, 1930 と J.R. Hicks, *Value and Capital*. Oxford : Clarendon Press, 1939 を参照。

におけるリスクと期待リターンとの関係に基づくものである。一般的に、投資リスクが高いほど、より高い期待リターンを投資家は要求するものである。資本資産価格モデル (CAPM : Capital Asset Pricing Model) によると、経済にはシステムティックと非システムティックと呼ばれる二つのリスクが存在する。非システムティック・リスクは投資家にとってあまり重要ではない。というのは、そのリスクは十分に分散投資されたポートフォリオを保有することによって、ほぼ完全に消去可能だからである。したがって、投資家は非システムティック・リスクをとてリターンを高めようとしないほうがよい。これに対して、システムティック・リスクは分散投資では消去できない。システムティック・リスクは投資によるリターンと株式市場全体のリターンとの相関から生じている。一般に投資家は正の量のシステムティック・リスクをとることに対して、無リスク金利より高い期待収益を求める。同時に、投資家は負の量のシステムティック・リスクに対しては、無リスク金利よりも期待収益率が低くなつてもかまわないと考えている。

### 先物ポジションのリスク

満期日における資産の現物価格が現時点の先物価格を上回ると予想して、満期  $T$  年の先物契約の買いポジションをとるスペキュレーターについて考えてみよう。日々の値洗いは無視して、先物契約をフォワード契約として扱えるものとする。このスペキュレーターは、先物価格の現在価値相当額を無リスク金利で運用し、同時に先物契約を買い付けるとする。無リスク金利で運用した資金は、先物契約の満期日に資産を購入するのにあてられ、その際得られた資産は即座に市場価格で売却される。この結果、スペキュレーターのキャッシュフローは以下のようになる。

$$\text{現時点} : -F_0 e^{-rT}$$

$$\text{先物契約の満期時点} : +S_T$$

ここで  $F_0$  は現時点での先物価格、 $S_T$  は先物契約の満期時点  $T$  での資産の価格である。また、 $r$  を期間  $T$  の無リスク金利とする。

この投資をいかに評価したらよいだろうか。時点  $T$  における期待キャッ

シユフローに適用すべき割引率は、スペキュレーターがその投資に求める期待収益率に等しい。スペキュレーターが求める収益率を  $k$  とすると、この投資の現在価値は、

$$-F_0 e^{-rT} + E(S_T) e^{-kT}$$

となる。ここで  $E$  は期待値を表す。証券市場におけるすべての投資は、そのネットの現在価値がゼロとなるように値付けかれていると仮定すると、

$$-F_0 e^{-rT} + E(S_T) e^{-kT} = 0$$

すなわち

$$F_0 = E(S_T) e^{(r-k)T} \quad (5.20)$$

となる。これまで述べてきたように、投資家が投資に求める収益率はその投資のシステムティック・リスクに依存している。これまで考察してきた投資は本質的には先物契約の原資産に対する投資である。その資産の収益率が株式市場とまったく相関をもたないのであれば、正しい割引率として使うべきは無リスク金利  $r$  である。したがって、 $k=r$  と置くと、(5.20)式は

$$F_0 = E(S_T)$$

となる。これは、原資産の収益率が株式市場と相関をもたないときには、先物価格が将来の現物価格の期待値の不偏推定量となることを示している。

資産の収益率が株式市場と正の相関をもつならば、 $k > r$  で、(5.20)式から  $F_0 < E(S_T)$  となる。これは、先物契約の原資産が正のシステムティック・リスクをもつ場合には、先物価格は将来の現物価格の期待値よりも低くなると予測すべきことを示している。正のシステムティック・リスクをもつ資産の例は株価指数である。指数の構成銘柄に対する投資家の期待収益率は無リスク金利  $r$  よりも一般的に大きい。配当率を  $q$  とすると、指数の期待増加率は  $r-q$  より大きくなる。したがって、(5.8)式は、先物価格は株価指数の将来の期待価格よりも低くなるという予測と矛盾していない。

反対に、資産の収益率が株式市場と負の相関をもつならば、 $k < r$  で、(5.20)式から  $F_0 > E(S_T)$  となる。これは、先物契約の原資産が負のシステムティック・リスクをもつ場合には、先物価格は将来の現物価格の期待値よりも高くなると予測すべきことを示している。

## バックワードーションとコンタンゴ

先物価格が将来の現物価格の期待値を下回る状況は、バックワードーション (normal backwardation) として知られる。また、上回る状況はコンタンゴ (contango) として知られる。しかし、これらの用語は先物価格が将来の現物価格の期待値に対してではなく、現在の現物価格に対して下回っているか上回っているかを指すものとして用いられる場合もあることに注意しておこう。

### 要約

ほとんどの場合について、先物価格は満期日の同じフォワード価格に等しいと考えても問題はない。金利が完全に予測可能であれば、理論上は両者は完全に一致することを示すことができる。

先物（もしくはフォワード）価格を理解するためには、先物契約を二つのカテゴリーに分けると考えやすい。一つは多数の投資家が純粋に投資目的で保有する資産を原資産とする場合、もう一つは主に消費目的で保有される資産を原資産とする場合である。

投資資産の場合について、以下の三つの異なる場合を考察してきた。

1. 所有による収入を生まない資産
2. 金額が既知の収入をもつ資産
3. 利回りが既知の収入をもつ資産

これらの結果は表5.5にまとめてある。それらを用いて、株価指数や通貨、金、銀の先物価格を計算することができる。また、保管コストは負の収入として扱うことができる。

消費資産の場合は、先物価格を現物価格とその他の観測可能な変数の関数として表すことはできない。そのため、資産のコンビニエンス・イールドといわれる指標が重要になってくる。これは、先物の保有では得られない、現

表5.5 投資資産のフォワード/先物契約

$T$  年物無リスク金利を  $r$ , 満期日を  $T$ , 投資資産の価格を  $S_0$  とするときの各場合のまとめ

| 資 産             | フォワード/先物価格         | 受渡価格 $K$ のロング・フォワード契約の価値  |
|-----------------|--------------------|---------------------------|
| 収入なし            | $S_0 e^{rT}$       | $S_0 - K e^{-rT}$         |
| 現在価値 $I$ の既知の収入 | $(S_0 - I) e^{rT}$ | $S_0 - I - K e^{-rT}$     |
| 既知の利回り $q$      | $S_0 e^{(r-q)T}$   | $S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}$ |

物を保有することで得られる利得の度合いを測る指標である。この利得には、一時に局所的な在庫不足が起こったときの収益機会や、生産活動を継続できることも含まれている。裁定の議論を用いて消費資産の先物価格の上限は導くことができるが、先物価格と現物価格との間の関係式を導くことはできない。

先物価格を考えるうえで、キャリー・コストは便利な概念である。キャリー・コストとは、原資産の保管コストに資金調達コストを加え、原資産から得られる収入を差し引いたものである。投資資産の場合には、先物価格はキャリー・コスト分だけ現物価格より高くなる。消費資産の場合には、先物価格はキャリー・コストからコンビニエンス・イールドを差し引いた分だけ現物価格よりも高くなる。

仮に CAPM が正しいとすると、先物価格と将来の現物価格の期待値との関係は、その資産の収益率が株式市場の収益率と正の相関をもつか負の相関をもつかに依存している。正の相関をもつような場合には、先物価格は将来の現物価格の期待値よりも低くなる傾向にある。負の相関をもつ場合には、先物価格のほうが高くなる傾向にある。また、相関がゼロの場合に限り、理論先物価格は将来の現物価格の期待値に等しくなる。

## 参考文献

- Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. "The Relation between Forward Prices and Futures Prices," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981) : 321-46.
- Ghon, R.S. and R.P. Chang. "Intra-day Arbitrage in Foreign Exchange and Eurocurrency Markets," *Journal of Finance*, 47, 1 (1992) : 363-80.
- Jarrow, R.A., and G.S. Oldfield. "Forward Contracts and Futures Contracts," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981) : 373-82.
- Kane, E.J. "Market Incompleteness and Divergences between Forward and Futures Interest Rates," *Journal of Finance*, 35 (May 1980) : 221-34.
- Pindyck, R.S. "Inventories and the Short-Run Dynamics of Commodity Prices," *Rand Journal of Economics*, 25, 1 (1994) : 141-59.
- Richard, S., and S. Sundaresan. "A Continuous-Time Model of Forward and Futures Prices in a Multigood Economy," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981) : 347-72.
- Routledge, B.R., D.J. Seppi, and C.S. Spatt. "Equilibrium Forward Curves for Commodities," *Journal of Finance*, 55, 3 (2000) : 1297-1338.

## 章末問題

- 5.1** 投資家がある株を空売りしたとき、どのようなことが起こるか説明せよ。
- 5.2** フォワード価格とフォワード契約の価値との違いは何か。
- 5.3** 配当のない株式の 6 カ月物フォワード契約を、株価が30ドルで無リスク金利が連続複利で年率12%のとき締結するとする。フォワード価格はいくらになるか。
- 5.4** 株価指数の現在値は350である。無リスク金利は連続複利で年率 8 %、指数の配当利回りは年率 4 %である。このとき満期 4 カ月の先

物価格はいくらになるか。

- 5.5** 金の先物価格は現物価格とその他の観測可能な変数から計算可能であるが、銅の先物価格はそれらからは計算できない。その理由を詳細に説明せよ。
- 5.6** コンビニエンス・イールドとキャリー・コストの意味について詳細に説明せよ。また、先物価格、現物価格、コンビニエンス・イールド、およびキャリー・コストの間にある関係を説明せよ。
- 5.7** 外国通貨は、利回りが既知の収入を生み出す資産として扱うことができる。その理由を説明せよ。
- 5.8** 株価指数の先物価格は、その指数の将来の値の期待値よりも大きいか、小さいか。その理由も答えよ。
- 5.9** 配当のない株式を購入する満期 1 年のフォワード契約を、株価が 40 ドル、無リスク金利が連続複利で年率 10% のときに締結する。
- (a) フォワード価格およびフォワード契約の当初の価値はそれぞれいくらか。
- (b) 6 カ月後に株価が 45 ドルとなり、無リスク金利は 10% のままであった。このとき、フォワード価格およびフォワード契約の価値はそれぞれいくらになるか。
- 5.10** 無リスク金利が連続複利で年率 7 %、ある株価指数の配当利回りが年率 3.2 % である。指数の現在値を 150 とするとき、満期 6 カ月の先物価格はいくらになるか。
- 5.11** 無リスク金利は連続複利で年率 9 % とする。ある株価指数の配当利回りが 1 年を通して変化し、2 月、5 月、8 月、11 月は年率 5 % で、その他の月は年率 2 % とする。7 月 31 日の指数の値が 1,300 のとき、同じ年の 12 月 31 日受渡しの先物価格はいくらになるか。
- 5.12** 無リスク金利は連続複利で年率 10%，ある株価指数の配当利回りは年率で 4 % とする。指数の現在値が 400 で、満期 4 カ月の先物価格が 405 である。このとき、どのような裁定機会が生じているか。
- 5.13** 表 5.4 の情報から、2007 年 1 月 8 日のメキシコと米国の短期金利の差

を推定せよ。

- 5.14** スイスと米国の 2 カ月物金利を連続複利でそれぞれ年率 2 % と 5 % とする。スイスフランの直物価格は 0.8000 ドルである。満期 2 カ月 の先物価格が 0.8100 ドルのとき、どのような裁定機会が生じているか。

- 5.15** 銀の現物価格は 1 オンス当たり 9 ドルである。保管コストは 1 オンス 当たり年 0.24 ドルで、四半期ごとの前払いとする。すべての満期に対 して金利が年率 10 % とすると、満期 9 カ月の銀の先物価格はいくら になるか。

- 5.16**  $F_1$  と  $F_2$  は同じ商品の満期の異なる二つの先物契約で、満期までの時 間はそれぞれ  $t_1$ ,  $t_2$  ( $t_2 > t_1$ ) である。このとき、

$$F_2 \leq F_1 e^{r(t_2-t_1)}$$

を証明せよ。ここで  $r$  は無リスク金利（定数）で、保管コストはないものとする。またこの問題では、先物契約はフォワード契約と同 じであるとして考えよ。

- 5.17** 支払額がわかっている将来の外貨建てキャッシュフローをフォワー ド契約でヘッジすると、為替リスクは残らない。しかし、先物契約 を用いてヘッジを行うと、日々の値洗いからくるある種のリスクが 残る。このリスクについて説明せよ。特に以下の状況において、先 物契約とフォワード契約のどちらを使ったほうがよいか考えよ。た だし、フォワード価格と先物価格は等しいとする。

- (a) 外国通貨の価値がその契約期間中に急激に下落する場合
- (b) 外国通貨の価値がその契約期間中に急激に上昇する場合
- (c) 外国通貨の価値が最初上昇し、その後下落して当初の価値に戻 る場合
- (d) 外国通貨の価値が最初下落し、その後上昇して当初の価値に戻 る場合

- 5.18** フォワード為替レートは、将来の直物レートの期待値の不偏推定量 になるといわれることがある。どのような状況下で、これは正しい

か。

- 5.19** 指数先物価格の成長率が無リスク金利に対する指数の超過収益率に等しいことを示せ。ただし、無リスク金利と配当利回りは一定であると仮定する。
- 5.20** 先物契約の売りポジションを絡めた資産への投資を考えることで、(5.3)式が正しいことを示せ。資産からの収入はすべてその資産に再投資されると仮定する。脚注 2 および 4 と同様の議論を用いて、(5.3)式が成り立たない場合にどのような裁定取引が行われるか詳細に説明せよ。
- 5.21** ある商品の将来の現物価格の期待値について、その意味するところを注意深く説明せよ。原油の先物価格が満期が長くなるにつれて年率 2 % で下落しているとする。スペキュレーターは原油先物を売り付ける傾向があり、ヘッジャーは原油先物を買い付ける傾向があると仮定する。このとき、原油の将来の現物価格の期待値について、ケインズとヒックスの議論は何を示唆しているか。
- 5.22** Value Line Index は、1,600 を超える株式の等加重ポートフォリオの動きを反映するようにつくられている。1988 年 3 月 9 日以前は、指標の前日比は、指標の原資産を構成する株価の前日比の幾何平均として計算されていた。このような場合、先物価格を現物価格に関係づける(5.8)式は正しいか。正しくない場合、その式は先物価格を過大に評価しているか。それとも過小に評価しているか。
- 5.23** ある米国の企業が、豪ドルのエクスポートジャーナーのヘッジに CME で取引されている先物契約を利用したいと考えている。 $r$  を（すべての満期に対する）米ドルの金利、 $r_f$  を（すべての満期に対する）豪ドルの金利とする。 $r$  と  $r_f$  は定数で、企業は時点  $T$  に満期を迎える先物契約を使って時点  $t$  ( $T > t$ ) でのエクスポートジャーナーをヘッジすると仮定する。
- 最適ヘッジ比率は  $e^{(r_f - r)(T-t)}$  であることを示せ。
  - $t$  が 1 日であるとき、最適ヘッジ比率はほぼ  $S_0/F_0$  に等しいこと

を示せ。ここで  $S_0$  は現在の直物価格,  $F_t$  は時点  $T$  に満期を迎える通貨先物の現在価格である。

- (c) 1日より長い期間ヘッジを行う場合でも、ヘッジ比率が直物価格を先物価格で除した値に常に等しくなるようにヘッジ比率を調整すれば、先物契約の日次値洗いの影響をヘッジに勘案することができる。このことを示せ。

## 宿題

- 5.24** ある株式について、2カ月後と5カ月後に1株当たり1ドルの配当が支払われると予想されている。この株式の株価は50ドルであり、無リスク金利は期間を問わず連続複利で年率8%である。ある投資家がこの株式の6カ月物フォワード契約の売りポジションをとった。
- (a) フォワード価格およびフォワード契約の当初の価値はそれぞれいくらか。
  - (b) 3カ月後に株価が48ドルになり、無リスク金利は8%のままであった。このときのフォワード価格および売りポジションの価値はいくらか。
- 5.25** ある銀行がある取引先に対し、年率11%での現金の借入れと、年率2%での金の借入れの二種類の借入れを提案しているとする（金を借りた場合は、利子も金で返済しなければならない。つまり、今日100オンス借りると1年後には102オンス返済しなければならない）。無リスク金利を年率9.25%，金の保管コストを年率0.5%とする。この場合、金の借入レートは現金の借入レートに比べて高いか低いかを論ぜよ。ただし、二つの借入レートは1年複利で、無リスク金利と保管コストは連続複利で表示されているとする。
- 5.26** 外貨の受払日が不確定である場合、企業はあらかじめ決められた期

間中であればいつでも受渡しのできるフォワード契約を締結したいと考えるだろう。その企業は企業自身のキャッシュフローに合わせて受渡日を選択できる権利を保有したいと考えている。銀行の立場から、この契約の価格を考えよ。

- 5.27** あるトレーダーが長期投資のポートフォリオの一部として金を保有している。このトレーダーは金を1オンス当たり550ドルで購入し、549ドルで売却できる。また、資金を年率6%で借り入れ、年率5.5%で運用できるものとする（金利はともに1年複利）。このトレーダーにとって裁定機会が存在しないような、金の1年物フォワード価格の範囲を求めよ。ただし、フォワード価格にはビッド・オファー・スプレッドはないものとする。
- 5.28** ある企業が、時点  $T_1$  に  $K_1$  で外国通貨を売却するフォワード契約を銀行と締結する。時点  $T_1$ において為替レートが  $S_1 (> K_1)$  になったとき、その企業は銀行に対して、 $T_1$ では決済せずに  $T_2 (> T_1)$  までフォワード契約をロールできるかどうかを照会してきた。銀行は新しい受渡価格  $K_2$  で契約締結に同意したとする。 $K_2$  の求め方を説明せよ。

## 付 錄

### 無リスク金利が定数のときフォワード価格と 先物価格が等しくなることの証明

金利が定数のとき、フォワード価格と先物価格が等しくなることを示す。先物契約の満期を  $n$  日とし、第  $i$  日目 ( $0 < i < n$ ) の先物の終値を  $F_i$  とする。1 日当りの無リスク金利を  $\delta$  (定数) として、以下の戦略を考える(注9)。

1. 第 0 日目の終わり (つまり先物契約の開始時) に、 $e^{\delta}$  単位の先物の買いポジションをとる。
  2. 第 1 日目の終わりに、 $e^{2\delta}$  単位まで買いポジションを増やす。
  3. 第 2 日目の終わりに、 $e^{3\delta}$  単位まで買いポジションを増やす。
- など。

この戦略をまとめると表5A.1のようになる。第  $i$  日目の始めまでに、投資家は  $e^{\delta i}$  の買いポジションを保有している。第  $i$  日目のポジションの損益は、

$$(F_i - F_{i-1}) e^{\delta i}$$

となる。この損益は無リスク金利で第  $n$  日目の終わりまで複利で運用されるものとすると、第  $n$  日目における損益は、

$$(F_i - F_{i-1}) e^{\delta i} e^{(n-i)\delta} = (F_i - F_{i-1}) e^{n\delta}$$

となる。したがって、この投資戦略全体の第  $n$  日目における損益は、

$$\sum_{i=1}^n (F_i - F_{i-1}) e^{n\delta}$$

となる。この式は書き直すと、

$$[(F_n - F_{n-1}) + (F_{n-1} - F_{n-2}) + \cdots + (F_1 - F_0)] e^{n\delta} = (F_n - F_0) e^{n\delta}$$

となる。ここで、 $F_n$  は最終時点での現物価格  $S_T$  に等しいから、この投資戦

(注9) この戦略は、J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, "The Relation between Forward Prices and Futures Prices," *Journal of Financial Economics*, 9 (December 1981) : 321-46 による。

表5A.1 先物価格とフォワード価格が等しいことを示す投資戦略

| 日付                | 0            | 1                         | 2                         | … | $n-1$         | $n$                           |
|-------------------|--------------|---------------------------|---------------------------|---|---------------|-------------------------------|
| 先物価格              | $F_0$        | $F_1$                     | $F_2$                     | … | $F_{n-1}$     | $F_n$                         |
| 先物ポジション           | $e^{\delta}$ | $e^{2\delta}$             | $e^{3\delta}$             | … | $e^{n\delta}$ | 0                             |
| 損益                | 0            | $(F_1 - F_0) e^{\delta}$  | $(F_2 - F_1) e^{2\delta}$ | … | …             | $(F_n - F_{n-1}) e^{n\delta}$ |
| $n$ 日間複利運用した場合の損益 | 0            | $(F_1 - F_0) e^{n\delta}$ | $(F_2 - F_1) e^{n\delta}$ | … | …             | $(F_n - F_{n-1}) e^{n\delta}$ |

略の最終価値は

$$(S_T - F_0) e^{n\delta}$$

となる。金額  $F_0$  の無リスク債券への投資を先物契約を用いた上記投資戦略と組み合わせると、時点  $T$  において

$$F_0 e^{n\delta} + (S_T - F_0) e^{n\delta} = S_T e^{n\delta}$$

の収益が得られる。先物の買いポジションには初期投資は必要ないため、 $F_0$  を投資して時点  $T$  に  $S_T e^{n\delta}$  を受け取ったことになる。

次に、第 0 日目の終わりのフォワード価格を  $G_0$  とする。金額  $G_0$  を無リスク資産に投資し、 $e^{n\delta}$  単位のフォワード契約の買いポジションを締結すれば、時点  $T$  で金額  $S_T e^{n\delta}$  が確実に得られる。よって、ここに二つの投資戦略がある、一つは当初  $F_0$  の費用が必要であり、もう一つは当初  $G_0$  の費用が必要で、時点  $T$  にはどちらも  $S_T e^{n\delta}$  となる。裁定機会が存在しないならば、

$$F_0 = G_0$$

となる。言い換えると、先物価格とフォワード価格は同じである。この証明では時間間隔を 1 日刻みとしたが、これには特別な意味はない。週単位で値洗いが行われるような先物契約に対しても、対応する仮定が満たされれば、その価格はフォワード価格に一致する。

## 第6章

# 金 利 先 物

これまでコモディティや株価指数、外国通貨の先物契約について論じ、それらがどのように機能し、どのようにヘッジで利用され、先物価格がどのように決定されるのかをみてきた。ここでは、金利先物について考えてみよう。

本章では、米国で活発に取引されている米国長期国債先物とユーロ・ドル金利先物について説明する。世界中で取引されるその他の金利先物取引の多くが、それらをモデルとしている。さらに、第4章で紹介したデュレーションに基づいた金利変動に対するヘッジに、金利先物契約が企業でどのように利用されているかを示す。

## 6.1 デイカウント・コンベンションと価格の表示方法

本章の準備として、まず債券や他の金利商品に用いられるデイカウント・コンベンションと価格の表示方法について説明する。

### デイカウント

デイカウントとは、与えられた期間に対する経過利子の計算法を定義するものである。一般的に、参照期間（債券の利払期間等）に対して支払われる利子はわかっているので、その他の期間に対して支払われる利子の計算方法について説明しよう。

デイカウント・コンベンションは、通常  $X/Y$  の形で表される。与えられた期間に対して支払われる利子を計算する際に、 $X$  はその期間（二つの日付間）の日数の計算方法を定義し、 $Y$  は参照期間の全日数の測り方を定義している。二つの日付間にに対して支払われる利子は、

$$\frac{\text{二つの日付間の日数}}{\text{参照期間の日数}} \times \text{参照期間に対して支払われる利子}$$

で与えられる。米国では次の三つのデイカウント・コンベンションがよく用いられている。

1. Actual/actual (実日数/実日数)
2. 30/360
3. Actual/360 (実日数/360)

米国長期国債のデイカウントには実日数/実日数が用いられている。すなわち、経過利子は利払期間の日数に対して、実際に経過した日数の割合をもとに計算される。債券の元本が100ドル、利払日が3月1日と9月1日、クーポンが8%の場合に、3月1日から7月3日までの経過利子を計算しよう。参照期間は3月1日から9月1日までの184日間（実日数）で、その期間に対して4ドルの利子が支払われる。3月1日から7月3日までは124日間（実日数）なので、その期間に対する経過利子は、

$$\frac{124}{184} \times 4 = 2.6957$$

となる。

米国の社債と地方債のデイカウントには30/360が用いられている。このデイカウントでは、1ヶ月を30日、1年を360日と仮定している。デイカウントが30/360の場合、3月1日から9月1日までの総日数は180日となり、3月1日から7月3日までは $(4 \times 30) + 2 = 122$ 日となる。米国長期国債と同じ条件の社債の場合、3月1日から7月3日までの期間に対する経過利子は、

$$\frac{122}{180} \times 4 = 2.7111$$

となる。ビジネス寸見6.1で示すように、30/360のデイカウント・コンベンションは驚くべき結果をもたらすことがある。

米国のマネー・マーケット（短期金融市場）商品のデイカウントには実日数/360が用いられている。このデイカウントでは参考期間は360日で、経過

### ビジネス寸見6.1 デイカウントは紛らわしい

2009年2月28日から2009年3月1日の期間において米国国債か米国社債のどちらかを保有する選択をしなければならない場合に、どちらを選ぶか。両債券のクーポンと呈示価格は同じとする。

どちらを選んでもあまり関係ないように思えるが、実際は、疑いなく社債を選択すべきである。社債のデイカウント・コンベンションの30/360では、2009年2月28日から2009年3月1日の日数は3日であるが、国債のデイカウント・コンベンションの実日数/実日数ではわずか1日である。したがって、社債を保有するほうが約3倍の利子を稼ぐことができるのである！

した実日数を360で割った値に金利を乗じたものがその期間に対する利子となる。したがって、たとえば90日間の利子は呈示された金利のちょうど4分の1となり、1年の利子は呈示された金利の $365/360$ 倍となる。

デイカウント・コンベンションは国や商品によって異なる。たとえば、オーストラリア、カナダ、およびニュージーランドでは、マネー・マーケット商品のデイカウントは実日数/365である。LIBORのデイカウントは英ポンド以外に対しては実日数/360で、英ポンドに対しては実日数/365である。また、ユーロ債や英ポンド債のデイカウントは実日数/実日数がふつうである。

### 呈示価格

マネー・マーケット商品の価格は、割引率 (discount rate) を用いて呈示されることがある。これは当初商品購入時に支払われる価格に対する利率ではなく、額面に対する利子を表している。米国短期国債がその例である。たとえば、91日米国短期国債の価格が8と呈示されているとき、額面に対する利子が年率8%であることを意味している。額面を100ドルとすれば、利子は91日間で2.0222ドル ( $=100\text{ドル} \times 0.08 \times 91/360$ ) となる。これを本当の利率に直すと、91日間にに対して $2.0222/(100 - 2.0222) = 2.064\%$ となる。一般に、米国短期国債の呈示価格と取引価格との関係は、

$$P = \frac{360}{n}(100 - Y)$$

となる。ここで  $P$  は呈示価格、 $Y$  は取引価格、 $n$  は暦日ベースでの国債の残存期間である。

### 米国長期国債

米国長期国債の価格は、ドル表示で1/32ドル単位で呈示される。呈示価格 (quoted price) は額面100ドルの債券に対する価格である。たとえば、90-05と呈示されているとき、額面が100,000ドルの債券に対する呈示価格は90,156.25ドルとなる。

表示価格のことをトレーダーはクリーン・プライス (clean price) と呼び、これはトレーダーがダーティー・プライス (dirty price) と呼ぶ、債券の買手が支払う取引価格とは異なる。一般に、

$$\text{取引価格} = \text{表示価格} + \text{経過利子}$$

である。例として、満期が2018年7月10日のクーポン11%の債券を考える。2010年3月5日の表示価格が95-16、すなわち95.50ドルであったとする。国債の利払いは年2回（最後の利払いは満期時）だから、直近の利払日は2010年1月10日で、次回利払日は2010年7月10日である。2010年1月10日から2010年3月5日までの日数は54日で、2010年1月10日から2010年7月10日までの日数は181日である。額面100ドルの債券に対しては1月10日と7月10日に5.50ドルの利払いがある。2010年3月5日の経過利子は、7月10日に支払われるクーポンに対する2010年3月5日の債券保有者の取り分である。米国長期国債のデイカウント・コンベンションは実日数/実日数なので、経過利子は、

$$\frac{54}{181} \times 5.5 \text{ ドル} = 1.64 \text{ ドル}$$

となる。したがって、債券の取引価格は額面100ドル当たり

$$95.50 \text{ ドル} + 1.64 \text{ ドル} = 97.14 \text{ ドル}$$

となり、額面100,000ドルの債券の取引価格は97,140ドルとなる。

## 6.2 長期国債先物

表6.1は、2007年1月9日付ウォール・ストリート・ジャーナルに掲載された金利先物の価格を示している。最も活発に取引されている長期金利先物契約の一つは、CBOTの米国長期国債先物である。米国長期国債先物では、受渡月の初日時点で残存期間が15年以上あり、かつその日から15年以内に償還（コール）されない任意の米国国債を受渡しすることができる。後で説明するように、CBOTは受渡しされる債券の銘柄ごとに先物契約の売手が受け取れる価格を調節する仕組みを整備してきた。

表6.1 金利先物呈示価格（出典：2007年1月9日付ウォール・ストリート・ジャーナル）

(各列はそれぞれ、限月、始値、高値、安値、清算値、前日比、建玉である)

| Interest Rate Futures   |         |         |         |                |         |           |
|---|---------|---------|---------|----------------|---------|-----------|
| <b>Treasury Bonds (CBT) - \$100,000; pts 32nds of 100%</b>        |         |         |         |                |         |           |
| March   | 112-05  | 112-07  | 111-27  | <b>112-04</b>  | -1      | 777,963   |
| June  | 112-04  | 112-04  | 111-27  | <b>112-02</b>  | -1      | 7,450     |
| <b>Treasury Notes (CBT) - \$100,000; pts 32nds of 100%</b>        |         |         |         |                |         |           |
| March   | 107-280 | 107-295 | 107-215 | <b>107-260</b> | -2.0    | 2,296,674 |
| June  | 107-260 | 107-270 | 107-240 | <b>107-270</b> | -2.0    | 38,131    |
| <b>5 Yr. Treasury Notes (CBT) - \$100,000; pts 32nds of 100%</b>  |         |         |         |                |         |           |
| March   | 105-090 | 105-100 | 105-045 | <b>105-075</b> | -2.0    | 1,425,917 |
| <b>2 Yr. Treasury Notes (CBT) - \$200,000; pts 32nds of 100%</b>  |         |         |         |                |         |           |
| March   | 102-042 | 102-042 | 102-015 | <b>102-025</b> | -1.7    | 770,033   |
| <b>30 Day Federal Funds (CBT) - \$5,000,000; 100 - daily avg.</b> |         |         |         |                |         |           |
| Jan   | 94.750  | 94.760  | 94.750  | <b>94.755</b>  | ...     | 84,247    |
| Feb   | 94.755  | 94.760  | 94.755  | <b>94.760</b>  | ...     | 120,416   |
| <b>1 Month Libor (CME) - \$3,000,000; pts of 100%</b>             |         |         |         |                |         |           |
| Jan   | 94.6775 | 94.6800 | 94.6775 | <b>94.6775</b> | -0.025  | 23,569    |
| Feb   | 94.6775 | 94.6825 | 94.6775 | <b>94.6825</b> | 0.050   | 16,150    |
| <b>Eurodollar (CME) - \$1,000,000; pts of 100%</b>                |         |         |         |                |         |           |
| Jan   | 94.6375 | 94.6450 | 94.6375 | <b>94.6425</b> | ...     | 42,487    |
| June  | 94.8250 | 94.8300 | 94.7750 | <b>94.7900</b> | -0.0400 | 1,414,973 |
| Sept  | 95.0000 | 95.0000 | 94.9400 | <b>94.9550</b> | -0.0500 | 1,346,082 |
| Dec   | 95.1300 | 95.1300 | 95.0700 | <b>95.0900</b> | -0.0450 | 1,316,779 |

Source: Reprinted by permission of Dow Jones, Inc., via Copyright Clearance Center, Inc.  
© 2007 Dow Jones & Company, Inc. All Rights Reserved Worldwide.

米国中期国債先物と5年物米国中期国債先物も同様に活発に取引されている。米国中期国債先物では残存期間が6年半から10年までの長期国債（または中期国債）が受け渡され、5年物中期国債先物では残存期間が約4年または5年の債券が受渡しされる。

本節の残りでは、CBOTの米国長期国債先物に焦点を当てて説明する。米国中期国債先物や米国以外の国で取引される先物契約も、その仕組みはCBOTの米国長期国債先物の仕組みと似ている。したがって、ここで説明するポイントはこれらの債券先物契約にもあてはまるものが多い。

### 呈示価格

米国長期国債先物の価格は、米国長期国債の価格と同様の方法で呈示されている（6.1節を参照）。表6.1によると、2007年1月8日における2007年3月限の清算価格は112-04、すなわち $112\frac{4}{32}$ である。この先物契約の取引単位は額面100,000ドルの債券である。したがって、先物価格で1ドルの変化は価値としては1,000ドルの変化になる。債券の受渡しは受渡月の間であればいつでも可能である。

## 交換比率

前に述べたように、米国長期国債先物では、売手が残存期間15年以上で15年以内に償還されない任意の国債から受渡銘柄を選ぶことができる。債券を受け渡すとき、売手の受取価格は銘柄ごとに決められたコンバージョン・ファクター (conversion factor) として知られる交換比率によって決まる。受渡しに適用される価格は交換比率と先物契約の直近の清算価格を掛けた値である。経過利子を考慮すると、6.1節で述べたように額面100ドル当りの受取金額は、

$$(直近の先物価格 \times 交換比率) + 経過利子$$

となる。1契約に対して額面100,000ドルの債券が受け渡される。たとえば、直近の清算価格が90-00で、受渡銘柄の交換比率が1.3800、受渡時点でのその債券の経過利子が額面100ドル当り3.00ドルであるとすると、先物契約の売手の受取金額（買手の支払金額）は額面100ドル当り

$$(1.3800 \times 90.00) + 3.00 = 127.20 \text{ ドル}$$

となる。先物1契約の売手は、額面100,000ドルの債券を受け渡して127,200ドルを受け取ることになる。

交換比率は、すべての満期に対する金利（半年複利）が年率6%であると仮定して計算した場合の、その債券の受渡月初日における額面1ドル当りの呈示価格に等しい。計算を容易にするために、元利金の支払日は最も近い3カ月ごとの日に切り捨てられる。この実務的な方法を用いて、CBOTは広範囲の債券を網羅した表を作成している。切捨て後の残存期間がちょうど6カ月の倍数になっている場合は、最初の利払日は6カ月後となる。切捨て後の残存期間が6カ月の倍数ではない（すなわち3カ月余分にある）場合は、最初の利払日は3カ月後になり、3カ月分の経過利子を差し引くことになる。

最初の例として、クーポンが10%で残存期間が20年2カ月の債券について考えてみよう。交換比率の計算では、この債券の残存期間はちょうど20年として扱われる。最初の利払日は6カ月後で、償還する20年後の終わりまで6カ月ごとに利払日があると仮定される。額面を100ドル、割引率を年率6%（半年ごとに3%）と仮定すると、債券の価値は、

$$\sum_{i=1}^{40} \frac{5}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^{40}} = 146.23 \text{ ドル}$$

となる。これを額面100ドルで割ると、交換比率1.4623が得られる。

2番目の例として、クーポンが8%で残存期間が18年4カ月の債券について考える。交換比率の計算では、この債券の残存期間はちょうど18年3カ月として扱われる。現時点から3カ月後の時点まですべての元利金を年率6%（半年複利）で割り引いた場合の価値は、

$$4 + \sum_{i=1}^{36} \frac{4}{1.03^i} + \frac{100}{1.03^{36}} = 125.83 \text{ ドル}$$

となる。3カ月間の金利は $\sqrt{1.03} - 1$ 、すなわち1.4889%であるから、これを現時点まで割り引くと債券の価値が $125.83 / 1.014889 = 123.99$ ドルで与えられる。これからさらに経過利子2.0を差し引くと121.99ドルになる。したがって、この債券の交換比率は1.2199である。

### 最割安銘柄 (CTD: cheapest to deliver)

CBOTの米国長期国債先物では、受渡月であれば多くの銘柄がいつでも受渡可能である。それら債券のクーポンや満期は広範囲にわたっているが、売手は受渡適格銘柄のなかで「最も割安」な銘柄を受け渡すことができる。売手の受取金額は、

$$(直近の清算価格 \times 交換比率) + 経過利子$$

で、受渡債券の購入コストは、

$$\text{債券の呈示価格} + \text{経過利子}$$

であるから、最割安銘柄は、

$$\text{債券の呈示価格} - (\text{清算価格} \times \text{交換比率})$$

が最小となる債券である。先物契約の売手は現渡しを決めたら受渡適格銘柄に対して上記計算を行い、最割安銘柄を探すことになる。

#### 【例6.1】

先物契約の売手が現渡しを行うことにし、下表の三つの債券から受渡銘柄を選ぶとする。直近の清算価格は93-08、すなわち93.25とする。

| 債券 | 呈示価格(ドル) | 交換比率   |
|----|----------|--------|
| 1  | 99.50    | 1.0382 |
| 2  | 143.50   | 1.5188 |
| 3  | 119.75   | 1.2615 |

各債券の受渡しコストは以下のようになる。

$$\text{債券 } 1 : 99.50 - (93.25 \times 1.0382) = 2.69 \text{ ドル}$$

$$\text{債券 } 2 : 143.50 - (93.25 \times 1.5188) = 1.87 \text{ ドル}$$

$$\text{債券 } 3 : 119.75 - (93.25 \times 1.2615) = 2.12 \text{ ドル}$$

したがって、最割安銘柄は債券 2 である。

最割安銘柄はいくつかの要因によって決まる。債券イールドが 6 % より高い場合は、交換比率の決め方から、低クーポンで残存期間の長い債券が最割安銘柄になりやすい。イールドが 6 % より低い場合は、高クーポンで残存期間の短い債券が最割安銘柄になりやすい。また、イールドカーブが右上がりの場合は残存期間の長い債券が最割安銘柄になりやすく、逆に右下がりの場合には残存期間の短い債券が最割安銘柄になりやすい。

最割安銘柄の選択権に加えて、先物契約の売手はワイルド・カード・プレイとして知られる選択権をもつ。これについてはビジネス寸見 6.2 で述べる。

### ビジネス寸見 6.2 ワイルド・カード・プレイ (Wild Card Play)

CBOT の米国長期国債先物の取引はシカゴ時間で午後 2 時に終了する。しかし、米国長期国債の現物は午後 4 時まで取引が続けられる。さらに、先物契約の売手は午後 8 時までに清算機関に受渡意思通知書を発行すればよい。通知書が発行されると、送り状の価格がその日の清算価格に基づいて計算される。清算価格は午後 2 時のベルがなる直前に成約した取引の価格である。

この慣行によって、ワイルド・カード・プレイと呼ばれる一種の選択権がもたらされる。受渡月初日の午後2時以降に債券価格が下落すれば、先物契約の売手は、たとえば3時45分に受渡意思通知書の発行を決め、2時の先物価格で受け渡すことになる債券を購入する。また、債券価格が下落しなかった場合は、売手はポジションを手仕舞わず、翌日同じ戦略がとれる機会をうかがえればよい。

その他の売手がもつ選択権と同様に、ワイルド・カード・プレイもただではない。その価値は先物価格に反映されており、この選択権がなかった場合よりも先物価格は低くなっているはずである。

### 先物価格の算出

米国長期国債先物の正確な理論価格は、売手のもつ受渡しタイミングと受渡銘柄に関する選択権の価値が簡単に評価できないため、算出するのがむずかしい。しかし、最割安銘柄と受渡日が決まっていると仮定すれば、米国長期国債先物は既知の収入がある証券（債券）の先物契約とみなすことができる（注1）。(5.2)式より、先物価格を  $F_0$ 、現物価格を  $S_0$  とすると、

$$F_0 = (S_0 - I) e^{rT} \quad (6.1)$$

と表すことができる。ここで  $I$  は先物契約の受渡日までに支払われるクーポンの現在価値、 $T$  は先物契約の満期までの期間、 $r$  は期間  $T$  に適用される無リスク金利である。

#### 【例6.2】

ある米国長期国債先物の最割安銘柄がクーポン12%の国債で、その交換比率は1.4000であるとする。また、現渡しは270日後に行われると仮定する。クーポンは年2回払い、図6.1に例示されているように前回利払日は60日前、次回利払日は122日後、さらにその次の利払日は305日後である。金利の期間構造はフラットで（連続複利で）年率10%，債券

（注1） 実務的には、通常アナリストは先物契約の満期時点でのゼロ・レートが現時点でのフォワード・レートに等しいと仮定して、最割安銘柄を求める計算をしている。

の呈示価格は120ドルとする。取引価格はこの呈示価格に経過利子を加えて、

$$120 + \frac{60}{60+122} \times 6 = 121.978$$

となる。122日 (=0.3342年) 後に受け取る 6 ドルのクーポンの現在価値は、

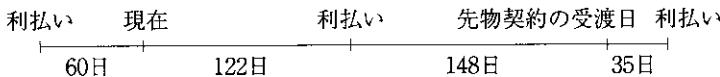
$$6e^{-0.1 \times 0.3342} = 5.803$$

である。先物契約の現渡しは270日 (=0.7397年) 後に行われるから、クーポン12%の債券の先物契約とみなすと、その取引価格は、

$$(121.978 - 5.803) e^{0.1 \times 0.7397} = 125.094$$

となる。

図6.1 例6.2のタイム・チャート



受渡時の経過利子は148日分で、クーポン12%の債券の先物契約とみなしているから、先物契約の呈示価格は経過利子を差し引いて、

$$125.094 - 6 \times \frac{148}{148+35} = 120.242$$

と求められる。交換比率の定義から、1.4000分の標準物の債券が12%の債券に等しいとされる。したがって、先物価格は、

$$\frac{120.242}{1.4000} = 85.887$$

となる。

### 6.3 ユーロ・ドル金利先物

米国で最もよく取引されている金利先物契約は、CMEで取引されているユーロ・ドル3カ月金利先物である。ユーロ・ドルとは、米国外で米国の銀行や米国以外の銀行に預金されたドルのことである。ユーロ・ドル金利とは、ある銀行が別の銀行に預金したユーロ・ドルに対して支払われる金利である。これは第4章で説明したLIBORと本質的には同じである。

ユーロ・ドル3カ月金利先物は、3カ月物(90日)ユーロ・ドル金利の先物契約である。これを使えば、投資家は100万ドルに対する将来のある3カ月間の金利を固定することができる。金利が適用される3カ月間の開始日は、受渡月の第3水曜日である。10年後までの3月、6月、9月、および12月を受渡月とする先物契約が取引されている。たとえば2008年においては、ユーロ・ドル金利先物を利用すれば、2018年までの3カ月物金利を固定することができる。満期の短い先物契約は、3月、6月、9月、および12月以外の受渡月の契約も取引されている。しかし、これらの建玉は比較的少ない。

ユーロ・ドル金利先物がどのように用いられるかを理解するために、表6.1にある2007年6月限先物契約で考えてみよう。2007年1月8日の清算価格は94.79である。ユーロ・ドル金利先物は受渡月の第3水曜日に満期を迎える。この先物契約の場合、受渡月の第3水曜日は2007年6月20日となり、その日までは通常どおり値洗いが行われる。しかし2007年6月20日には、その日の実際の3カ月物ユーロ・ドル金利 $R$ を用いて、清算価格は $100 - R$ と決められる。ここで $R$ は3カ月複利で、デイカウント・コンベンションは実日数/360である(したがって、2007年6月20日の3カ月物ユーロ・ドル金利がたとえば4%であれば、最終清算価格は96になる)。この清算価格に基づいて最後の値洗いが行われ、すべての建玉が決済される。

ユーロ・ドル金利先物は先物価格が1ペーシス・ポイント( $=0.01$ )変化すると、1契約当り25ドルの損益が発生するように取引単位が決められている。したがって、ユーロ・ドル金利先物価格が1ペーシス・ポイント上昇すれば、先物1契約の買いを保有するトレーダーは25ドルの利益を得て、先物

1契約の売りを保有するトレーダーは25ドルの損失を被る。たとえば、2007年1月8日から2007年1月9日にかけて清算価格が94.79から94.90に変化したとしよう。買いポジションを保有するトレーダーは1契約当り $11 \times 25 = 275$ ドルの利益を得て、売りポジションを保有するトレーダーは1契約当り275ドルの損失を被ることになる。1ペース・ポイント当り25ドルというルールは、先物1契約によって100万ドルに対する3カ月物金利を固定できるとした、前述の説明と整合性がとれている。実際、金利が年率1ペース・ポイント変化すれば、100万ドルに対する3カ月の利子は、

$$1,000,000 \times 0.0001 \times 0.25 = 25$$

すなわち25ドル変化する。先物価格は100から先物契約の金利を差し引いた数字で表示されるため、金利が下がれば買いポジションを保有する投資家が利益を得て、金利が上がれば売りポジションを保有する投資家が利益を得る。

### 【例6.3】

2007年1月8日にある投資家が、2007年6月20日から3カ月間運用する500万ドルに対する利子を確定させたいと考えて、2007年6月限ユーロ・ドル金利先物5枚を94.79で買い付ける。2007年6月20日に3カ月物LIBORが4%になったとすれば、先物の最終清算価格は96.00になる。投資家は先物の買いポジションから $5 \times 25 \times (9,600 - 9,479) = 15,125$ ドルの利益を得る。一方、4%の金利で500万ドルを3カ月間運用して得られる利子は、

$$5,000,000 \times 0.25 \times 0.04 = 50,000$$

すなわち50,000ドルである。これに先物契約から得られた利益を上乗せすると65,125ドルになる。これは、金利が5.21%であった場合の利子 $(5,000,000 \times 0.25 \times 0.0521 = 65,125)$ に等しい。この例から、先物取引によって金利を $(100 - 94.79)\%$ 、すなわち5.21%に実質的に固定できることがわかる。

取引所は取引価格を、

$$10,000 \times [100 - 0.25 \times (100 - Q)] \quad (6.2)$$

と定義している。ここで  $Q$  は呈示価格である。したがって、表6.1の2007年6月限の清算価格94.79に対する取引価格は、

$$10,000 \times [100 - 0.25 \times (100 - 94.79)] = 986,975 \text{ ドル}$$

となる。また、例6.3の最終清算価格に対する取引価格は、

$$10,000 \times [100 - 0.25 \times (100 - 96)] = 990,000 \text{ ドル}$$

となる。当初取引価格と最終取引価格との差は3,025ドルとなるから、先物契約5枚の買いポジションを保有する投資家は $5 \times 3,025$ ドル、すなわち15,125ドルの利益を得ることになる。これは例6.3で用いた“1ベーシス・ポイント当たり25ドル”的ルールとも一致する。

2007年1月8日の米国における金利期間構造は右肩下がりになっていたことが表6.1からわかる。2007年1月17日スタートの3カ月物金利の先物レートは5.3575%，2007年6月20日からの3カ月間に對しては5.21%，2007年9月19日からの3カ月間に對しては5.045%，2007年12月19日からの3カ月間に對しては4.91%となっている。

米国以外の国の金利に対しても、CMEのユーロ・ドル金利先物と同様の金利先物契約が取引されている。CMEではユーロ円金利先物が取引されている。ユーロネクストの一部門であるロンドン国際金融先物・オプション取引所(London International Financial Futures and Options Exchange)では、3カ月物Euribor(ユーロに対する3カ月物LIBOR)先物とユーロ・スイス3カ月金利先物が取引されている。

## フォワード・レート vs 先物レート

将来のある期間の金利を固定化するという意味で、ユーロ・ドル金利先物は金利先渡契約(FRA:4.7節参照)と類似の商品である。満期が短期(1年程度)の場合には、両契約同じとみなして、ユーロ・ドル金利先物レートは同じ期間のフォワード・レートと同じであるとしても問題ない。満期が長期の場合には、両契約の違いは重要になる。期間 $T_1$ から $T_2$ までの金利に対するユーロ・ドル金利先物と同じ期間のFRAとを比較してみよう。ユー

ユーロ・ドル金利先物は日々値洗いされる。最終決済は時点  $T_1$ に行われ、時点  $T_1$ に決まった期間  $T_1$ から  $T_2$ までの金利が清算価格として用いられる。一方、FRAは日々の値洗いはされず、最終決済は時点  $T_2$ に期間  $T_1$ から  $T_2$ までの金利を用いて行われる(注2)。

したがって、ユーロ・ドル金利先物とFRAとの間の違いは次の二つの要素からなる。

1. ユーロ・ドル金利先物と日々の値洗いを行わない同種の契約との差異。後者は、フォワード・レートと時点  $T_1$ に決まる実際の金利との差に等しい利子を、時点  $T_1$ に決済するフォワード契約である。
2. 時点  $T_1$ に決済されるフォワード契約と時点  $T_2$ に決済されるフォワード契約との差異。

契約間の差異に関するこの二つの要素は、実務ではある程度混同されている。両要素とも先物レートに対してフォワード・レートを低くさせる要因となるが、長期の契約に対しては、二つ目の差異は一つ目の差異よりも金利引下げ効果はかなり小さい。一つ目の差異(日次値洗いの有無)がフォワード・レートを低くさせる理由は5.8節で説明したとおりである。いま、時点  $T_1$ での受取額が  $R_M - R_F$  となる契約を保有しているとしよう。ここで  $R_F$  はあらかじめ決められた期間  $T_1$ から  $T_2$ までの金利、 $R_M$  はその期間に対する時点  $T_1$ での実現金利である。さらに、日次値洗いするかどうかは選択できるものとする。日次値洗いを選択した場合は、金利が高いときには現金を受け取り、金利が低いときには現金を支払うことになる。したがって、金利が高いときにより多くの現金が証拠金勘定にあることになるから、日次値洗いを選ぶほうが魅力的である。その結果、市場で取引される  $R_F$  は日次値洗いの場合のほうが高くなる(それによって、期待累積受取額は小さくなる)。逆を考えると、日次値洗いから時点  $T_1$ での一括決済に変更すれば、金利  $R_F$  を引き下げることができる。

二つ目の差異がフォワード・レートを低くさせる理由を理解するために、

---

(注2) 4.7節で述べたように、実際の決済は時点  $T_1$ で行われる。その決済額は通常のフォワード契約の時点  $T_2$ での支払額の現在価値に等しくなる。

時点  $T_1$  でなく時点  $T_2$  に  $R_M - R_F$  を受け取る（通常の FRA のような）契約を考えてみよう。 $R_M$  が高ければ受取額は正になる。その場合は金利が高くなっているときなので、受取りを時点  $T_1$  ではなく時点  $T_2$  にするコストは相対的に高くなる。逆に  $R_M$  が低ければ受取額は負になる。その場合は金利が低くなっているときなので、支払が時点  $T_1$  ではなく時点  $T_2$  になる利得は、相対的に低くなる。全体として、時点  $T_1$  で受払いを行うほうが有利である。したがって、時点  $T_1$  ではなく時点  $T_2$  で受払いを行う場合には、 $R_F$  を低くすることで利得の調整が行われるはずである（注3）。

アナリストはコンベキシティ調整（convexity adjustment）と呼ばれる方法で、二つのレート間の総金利差を説明している。最も一般的な調整は（注4），

$$\text{フォワード・レート} = \text{先物レート} - \frac{1}{2}\sigma^2 T_1 T_2 \quad (6.3)$$

とするものである。ここで  $T_1$  は先物契約の満期までの期間、 $T_2$  は先物契約が参照する金利の満期までの期間である。 $\sigma$  は 1 年間の短期金利の変化の標準偏差で、金利はともに連続複利である（注5）。たとえば 1.2%，すなわち 0.012 が  $\sigma$  の典型的な値である。

#### 【例6.4】

$\sigma=0.012$  として、満期 8 年のユーロ・ドル金利先物価格が 94 のときのフォワード・レートを計算してみよう。この場合は  $T_1=8$ 、 $T_2=8.25$  となるので、コンベキシティ調整は、

$$\frac{1}{2} \times 0.012^2 \times 8 \times 8.25 = 0.00475$$

すなわち 0.475% (47.5 ベース・ポイント) となる。先物レートは 3 カ

(注3) 受渡しタイミングの違いがデリバティブの価値へ与える影響を計量化する方法については、第29章で詳しく論じる。

(注4) 証明については、著者の Web サイトのテクニカルノート 1 を参照されたい。

(注5) この式は Ho-Lee の金利モデルに基づいており、第30章で論じる。T. S. Y. Ho and S.-B. Lee, "Term structure movements and pricing interest rate contingent claims," *Journal of Finance*, 41 (December 1986) : 1011-29 を参照。

月複利、実日数/360ベースで年率 6 %なので、90日当り 1.5% となり、連続複利、実日数/365ベースでは  $(365/90)\ln 1.015 = 6.038\%$  となる。したがって、(6.3)式で与えられるフォワード・レートは連続複利で年率  $6.038 - 0.475 = 5.563\%$  となる。下表は満期に応じて調整額が増加する様子を示したものである。

| 先物満期<br>(年) | コンベキシティ調整<br>(ベース・ポイント) |
|-------------|-------------------------|
| 2           | 3.2                     |
| 4           | 12.2                    |
| 6           | 27.0                    |
| 8           | 47.5                    |
| 10          | 73.8                    |

この表より、調整額の大きさは先物契約の満期の平方にだいたい比例していることがわかる。したがって、満期 8 年の先物契約のコンベキシティ調整は満期 2 年の先物契約の約 16 倍になっている。

### ユーロ・ドル金利先物を使った LIBOR ゼロ・レートの延長

1 年までの LIBOR ゼロ・レートは 1 カ月物、3 カ月物、6 カ月物、および 12 カ月物の LIBOR を使って決めることができた。前述のコンベキシティ調整を行うことで、ゼロ・カーブを 1 年超に延ばすのにユーロ・ドル金利先物価格がよく使われている。いま、 $i$  番目のユーロ・ドル金利先物の満期を  $T_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) としよう。 $i$  番目の先物契約から計算されたフォワード・レートは期間  $T_i$  から  $T_{i+1}$  までに適用される金利と通常仮定する（実務上はほとんど正しい）。この仮定により、ブートストラップ法を用いてゼロ・レートを求めることができる。 $F_i$  を  $i$  番目のユーロ・ドル金利先物から計算されたフォワード・レート、 $R_i$  を満期  $T_i$  のゼロ・レートとすると、(4.5)式より、

$$F_i = \frac{R_{i+1}T_{i+1} - R_i T_i}{T_{i+1} - T_i}$$

なので、

$$R_{i+1} = \frac{F_i(T_{i+1} - T_i) + R_i T_i}{T_{i+1}} \quad (6.4)$$

となる。ユーロ・スイス、ユーロ円、ユーリボーなどの他のユーロ金利もゼロ・カーブ構築に同様に使われている。

【例6.5】

満期400日のLIBOR ゼロ・レートが連続複利で4.80%と計算されている。また、ユーロ・ドル金利先物価格から、(a)400日後から90日間のフォワード・レートが連続複利で5.30%，(b)491日後から90日間のフォワード・レートが連続複利で5.50%，(c)589日後から90日間のフォワード・レートが連続複利で5.60%と計算されているとする。このとき(6.4)式を使えば、満期491日のゼロ・レートは、

$$\frac{0.053 \times 91 + 0.048 \times 400}{491} = 0.04893$$

すなわち4.893%と求まる。同様に2番目のフォワード・レートを用いて、満期589日のゼロ・レートは、

$$\frac{0.055 \times 98 + 0.04893 \times 491}{589} = 0.04994$$

すなわち4.994%と求まる。さらに次のフォワード・レート5.60%を使えば、次のユーロ・ドル金利先物の満期までのゼロ・カーブを求めることができる（ユーロ・ドル金利先物の参照金利は90日間の金利であるが、それが先物契約の満期間の日数である91日間や98日間にも適用できると仮定していることに注意せよ）。

## 6.4 デュレーションに基づくヘッジ戦略

デュレーションについては4.8節で説明した。ここでは、債券ポートフォリオやマネー・マーケット商品のような、金利に依存した資産のポジション

を金利先物契約でヘッジする場合を考えてみよう。以下の記号を用いる。

$F_c$  : 金利先物契約の取引価格

$D_F$  : 金利先物契約の満期時における金利先物契約の原資産のデュレーション

$P$  : ヘッジされたポートフォリオのヘッジの満期時におけるフォワード価値（実務上、現在のポートフォリオの価値に等しいと仮定する場合が多い）

$D_P$  : ヘッジの満期時におけるポートフォリオのデュレーション

すべての満期に対してイールドが同じ  $\Delta y$  だけ変化する、すなわちイールドカーブのパラレルシフトのみが起こると仮定すると、

$$\Delta P = -PD_F\Delta y$$

が近似的に成り立つ。同様に、

$$\Delta F_c = -F_c D_F \Delta y$$

が近似的に成り立つ。したがって、 $\Delta y$  の変化に対するヘッジに必要な先物契約数は、

$$N^* = \frac{PD_P}{F_c D_F} \quad (6.5)$$

となる。これはデュレーション・ベース・ヘッジ・レシオ (duration-based hedge ratio)、もしくはプライス・センシティビティ・ヘッジ・レシオ (price sensitivity hedge ratio) (注6) と呼ばれるものである。この手法を用いてポジション全体のデュレーションをゼロにすることができる。

米国長期国債先物でヘッジを行う場合は、特定の債券が受け渡されると仮定して  $D_F$  を計算しなければならない。つまり、ヘッジを行う際にどの債券が最割安銘柄になりそうかを推定しなければならない。金利環境が変化して最割安銘柄が変わる場合、ヘッジの調整が必要となり、期待したヘッジの効果が得られないことがある。

---

(注6) (6.5)式の詳細な検討については、R.J. Rendleman, "Duration-Based Hedging with Treasury Bond Futures," *Journal of Fixed Income*, 9, 1 (June 1999) : 84-91 を参照。

金利先物契約を用いてヘッジを行う場合に留意しなければならない重要な点は、金利と先物価格は逆方向に動くということである。金利が上昇すれば、金利先物価格は下落する。逆に金利が下落すれば、金利先物価格は上昇する。したがって、金利が下落したときに損失を被る企業は、金利先物の買いポジションでヘッジをする必要がある。同様に、金利が上昇したときに損失を被る企業は、金利先物の売りポジションでヘッジを行う必要がある。

ヘッジナーは、原資産のデュレーションがヘッジする資産のデュレーションに極力近くなるように、ヘッジのための先物契約を選択しようとする。そのため、ユーロ・ドル金利先物は短期金利のヘッジに、長期国債先物や中期国債先物は長期金利のヘッジに利用される。

#### 【例6.6】

8月2日に、国債に1,000万ドル投資しているファンドマネジャーが今後の3カ月間は金利の変動が大きいと予測し、12月限米国長期国債先物を使ってポートフォリオをヘッジすることにしたとする。先物の現在価格は93-02、すなわち93.0625である。先物契約の取引単位は額面100,000ドルの債券なので、その取引価格は93,062.50ドルとなる。

3カ月後の債券ポートフォリオのデュレーションは6.80年で、米国長期国債先物の最割安銘柄は残存期間20年のクーポン年12%の国債と予想されているとする。さらに、この債券のイールドは年率8.80%で、先物満期時のデュレーションは9.20年とする。

このファンドマネジャーは米国長期国債先物の売りポジションをとることでヘッジを行う。もし金利が上昇すれば、先物の売りポジションからは利益があがるが、債券ポートフォリオからは損失が生じる。逆に金利が下落した場合には、先物の売りポジションからは損失が生じるが、債券ポートフォリオからは利益があがる。(6.5)式から債券先物の売付け枚数を計算すると、

$$\frac{10,000,000}{93,062.50} \times \frac{6.80}{9.20} = 79.42$$

となる。これを四捨五入して、ポートフォリオ・マネジャーは先物を79

枚売り付けることになる。

## 6.5 資産と負債のポートフォリオのヘッジ

金融機関は資産の平均デュレーションと負債の平均デュレーションを一致させることで、金利リスクをヘッジしようとすることがある（負債は債券の売りポジションとみなすことができる）。この戦略は、デュレーション・マッチング (duration matching) またはポートフォリオ・イミュニゼーション (portfolio immunization) として知られるものである。この戦略を使えば、金利の微小なパラレルシフトに対して資産と負債からなるポートフォリオの価値はほとんど影響を受けない。すなわち、資産の益（損）は負債の損（益）によって相殺される。

デュレーション・マッチングは、ゼロ・カーブがパラレルシフトしないときにはポートフォリオをヘッジできていない。これがこの戦略の弱点である。実際には、短期金利は長期金利より変動が大きいことが多く、長期金利と完全に連動しているわけではない。ときには短期と長期の金利がそれぞれ別の方向に動くことさえある。このため、デュレーション・マッチングはヘッジの第一歩にすぎず、金融機関は金利エクスポージャーを管理するために他の手法を開発してきた（ビジネス寸見6.3を参照）。

### ビジネス寸見6.3 銀行での資産と負債の管理（ALM）

ビジネス寸見4.3でみたように、1960年代、1970年代、および1980年代に、米国の多くの貯蓄貸付組合といくつかの銀行が長期貸出資金を短期預金で調達するという過ちを犯した。このことが、これらの金融機関の破綻劇へと発展した。

現在では、銀行の資産負債管理（ALM）委員会が金利のエクスポ

ジャーを非常に注意深くモニターするようになった。資産と負債のデュレーション・マッチングは管理の第一歩で、イールドカーブがパラレルシフトしない場合においては無防備である。よく利用される手法としてGAP管理がある。ゼロクーポン・イールドカーブをパケットと呼ぶるいくつかの区間に分けるもので、最初のパケットを0～1ヶ月、次のパケットを1～3ヶ月とするといったものである。ALM委員会では、一つのパケットの金利のみが変化して残りのパケットの金利がそのままの場合の、資産と負債の価値変化を調査する。

その結果、資産と負債になんらかのミスマッチがあれば、それを修正する取引が一般的に行われる。現在、幸いにも銀行は、スワップ、FRA、債券先物、ユーロ・ドル金利先物、およびその他の金利デリバティブなどの金利エクスポートナーを管理するツールを1960年代に比べて多数もっている。

## 要約

非常に活発に取引されている二つの金利先物契約は、米国で取引されている米国長期国債先物とユーロ・ドル金利先物である。米国長期国債先物では、売手はいくつかの興味深い受渡しに関する選択権をもっている。

1. 受渡月の間ならばいつでも現渡しできる。
2. 多くの受渡適格銘柄のなかから受渡銘柄を選択できる。
3. 受渡期間中はいつでも、午後2時の清算価格での受渡意思確認書を午後8時までなら発行できる。

これらの選択権はすべて先物価格を引き下げる方向に働いている。

ユーロ・ドル金利先物は、受渡月の第3水曜日における3ヶ月金利に対する先物契約である。ユーロ・ドル金利先物は、LIBORゼロ・カーブを構築

する目的で LIBOR フォワード・レートを推定するのによく利用されている。長期の先物契約をフォワード・レートの推定に用いる際には、先物契約に対して行われる日次値洗いの影響を考慮するためのコンベキシティ調整を行うことが重要である。

デュレーションは金利変動リスクをヘッジするうえでの重要な概念である。デュレーションによって、ヘッジャーはイールドカーブの微小なパラレルシフトに対する債券ポートフォリオの感応度を知ることができる。デュレーションによって、ヘッジャーはイールドカーブの微小変化に対する金利先物価格の感応度も求めることができる。したがって、イールドカーブの微小なパラレルシフトに対する債券ポートフォリオのヘッジに必要な先物契約の取引量を計算することができる。

デュレーションに基づいたヘッジ・スキームでの重要な前提是、すべての金利が同じ大きさで変化するというものである。これは、金利の期間構造がパラレルシフトのみすることを意味している。実際には、短期金利は長期金利よりも一般的に変動性が高く、先物契約の原資産となる債券のデュレーションがヘッジする資産のそれと著しく異なる場合には、ヘッジ効果が薄まる傾向がある。

## 参考文献

- Burghardt, G., and W. Hoskins. "The Covexity Bias in Eurodollar Futures," *Risk*, 8, 3 (1995) : 63-70.
- Duffie, D. "Debt Management and Interest Rate Risk," in W. Beaver and G. Parker (eds.), *Risk Management : Challenges and Solutions*. New York : McGraw-Hill, 1994.
- Fabozzi, F.J. *Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures*. Frank Fabozzi Assoc., 1999.
- Grinblatt, M., and N. Jegadeesh. "The Relative Price of Eurodollar Futures and

### 章末問題

- 6.1** 利払日が1月7日と7月7日のクーポン7%の米国長期国債を考える。2009年7月7日から2009年8月9日までの期間に対する元本100ドル当りの経過利子を求めよ。また、債券が社債だった場合の経過利子はどのくらい異なるか。
- 6.2** クーポン12%，満期日2020年10月12日の米国長期国債の2009年1月9日における呈示価格を102-07とする。取引価格はいくらか。
- 6.3** CBOTでは債券の交換比率はどのように計算されているか。また、それはどのように使われているか。
- 6.4** ユーロ・ドル金利先物価格が96.76から96.82に上昇したとする。2契約の買いポジションを保有する投資家の損益はいくらになるか。
- 6.5** ユーロ・ドル金利先物レートにコンベキシティ調整を行う目的は何か。なぜコンベキシティ調整が必要なのか。
- 6.6** 満期350日のLIBORレートが連続複利で3%，満期日が350日後のユーロ・ドル金利先物から計算されるフォワード・レートが連続複利で3.2%であるとする。このとき、満期440日のゼロ・レートを求めよ。
- 6.7** 1月30日に時価600万ドルの債券ポートフォリオを運用している。6カ月後のポートフォリオのデュレーションは8.2年である。9月限米国長期国債先物の呈示価格は現在108-15で、最割安銘柄のデュレーションは9月時点で7.6年である。いまから6カ月先までの金利変動に対するヘッジをかけるにはどうしたらよいか。
- 6.8** 90日米国短期国債の価格を10.00とする。この短期国債を90日間保有したときの、連続複利ベースでの収益率（実日数/365）を求めよ。

- 6.9** 2008年5月5日に、クーポン12%，2011年7月27日満期の国債の呈示価格が110-17だったとする。このときの取引価格はいくらか。
- 6.10** 米国長期国債先物の価格が101-12のとき、どの債券が最割安銘柄になるかを示せ。

| 債券 No. | 価格     | 交換比率   |
|--------|--------|--------|
| 1      | 125-05 | 1.2131 |
| 2      | 142-15 | 1.3792 |
| 3      | 115-31 | 1.1149 |
| 4      | 144-02 | 1.4026 |

- 6.11** 2009年7月30日において、2009年9月限米国長期国債先物の最割安銘柄のクーポンは13%で、受渡しは2009年9月30日と予想されている。その債券の利払日は毎年2月4日と8月4日である。金利の期間構造はフラットで、半年複利で年率12%である。この債券の交換比率は1.5で、呈示価格は110ドルとすると、この先物契約の呈示価格はいくらになるか。
- 6.12** 米国長期国債の先物市場で、裁定機会をうかがっている市場参加者がいる。先物契約の売手には、残存期間15年以上のどんな債券でも受け渡せるという選択権がある。このことが裁定取引をむずかしくしている理由を説明せよ。
- 6.13** 9カ月LIBORが年率8%で、6カ月LIBORが年率7.5%（ともに実日数/365、連続複利）のとき、満期6カ月のユーロ・ドル3カ月金利先物の価格を推定せよ。
- 6.14** 満期300日のLIBORゼロ・レートが4%，満期を300日後、398日後、489日後に迎えるユーロ・ドル金利先物の呈示価格が、それぞれ95.83, 95.62, 95.48とする。このとき、満期398日と489日のLIBORゼロ・レートを求めよ。ただし、フォワード・レートと先物レートとの差はないものとする。
- 6.15** デュレーション12年の債券ポートフォリオを、デュレーション4年の原資産をもつ先物契約でヘッジするとする。12年物金利が4年物

金利よりも変動が小さいことによるヘッジへの影響を説明せよ。

- 6.16** 2月20日に、財務担当者はその企業が7月17日に期間180日のコマーシャルペーパーを500万ドル発行しなければならないことを知らされた。そのコマーシャルペーパーが今日発行されるとしたら、4,820,000ドルの資金調達ができる（これは、企業がコマーシャルペーパーを発行して4,820,000ドルを受け取り、180日後に5,000,000ドルで償還させることを意味する）。9月限ユーロ・ドル金利先物の呈示価格が92.00のとき、財務担当者はどのようにして企業のエクスポージャーをヘッジすればよいか。
- 6.17** 8月1日に、あるポートフォリオ・マネジャーが1,000万ドルの債券ポートフォリオを保有しているとする。そのポートフォリオの10月時点でのデュレーションは7.1年である。12月限米国長期国債先物の価格は現在91-12で、最割安銘柄のデュレーションは満期時点で8.8年とする。このポートフォリオに対して、2カ月先までの金利変動リスクをヘッジする方法を示せ。
- 6.18** 問題6.17で、どのようにすればポートフォリオ・マネジャーはポートフォリオのデュレーションを3.0に変えることができるか。
- 6.19** 2009年10月30日から2009年11月1日までの間の投資対象として、クーポン12%の国債か、クーポン12%の社債のどちらかを選択できるとする。本章で述べたデイカウント・コンベンションに注意して、どちらの債券を保有すべきかを述べよ。ただし、デフォルト・リスクはないものとする。
- 6.20** 60日後に満期を迎えるユーロ・ドル金利先物の価格が88であるとき、60日後から150日後までの期間に対するフォワード LIBOR レートを計算せよ。ただし、先物レートとフォワード・レートの違いは無視できるとする。
- 6.21** 6年後に満期を迎えるユーロ・ドル3カ月金利先物の価格が95.20と呈示されている。1年後の短期金利の変化の標準偏差を1.1%とする。6.00年後から6.25年後までの期間に対するフォワード LIBOR

レートを推定せよ。

- 6.22** フォワード・レートは、対応するユーロ・ドル金利先物から計算される先物レートより低くなる。その理由を説明せよ。

## 宿題

- 6.23** 銀行は LIBOR 市場において同じレートで資金の運用調達ができるものと仮定する。連続複利で90日物レートが年率10%，180日物レートが年率10.2%である。これらのデイカウントはともに実日数/実日数とする。また、91日後に満期を迎えるユーロ・ドル金利先物の価格が89.5である。このとき裁定機会はあるか。
- 6.24** あるカナダの企業が、米国のユーロ・ドル金利先物と外国為替フォワード契約を組み合わせて、カナダ・ドル LIBOR 先物契約をつくりたいと思っている。どのようにすればよいか、例を使って説明せよ。ただし、この問題では先物契約はフォワード契約と同じであると仮定してよい。
- 6.25** 2009年6月限 CBOT 債券先物の価格は118-23である。
- (a) クーポン10%，2025年1月1日満期の債券に対する交換比率を計算せよ。
  - (b) クーポン7%，2030年10月1日満期の債券に対する交換比率を計算せよ。
  - (c) (a)と(b)の債券の呈示価格をそれぞれ169.00と136.00とする。どちらの債券が割安か。
  - (d) 最割安銘柄が実際に受渡しされるとするとき、その債券に対する取引価格はいくらになるか。ただし、受渡日は6月25日とする。
- 6.26** あるポートフォリオ・マネジャーが米国長期国債先物を使って、債券ポートフォリオを3カ月先までヘッジしようと計画している。こ

のポートフォリオの価値は1億ドルで、3カ月後のデュレーションは4.0年である。先物価格は122で、先物契約の取引単位は額面100,000ドルの債券である。最割安銘柄になると予想される債券の先物満期時点でのデュレーションを9.0年とする。どのような先物契約のポジションが必要となるか。

- (a) 1カ月後に、最割安銘柄と予想される債券がデュレーション7年の債券に変わったとする。そのとき、ヘッジにはどのような調整が必要となるか。
- (b) 3カ月にわたってすべての金利が上昇したが、短期金利と中期金利に比べて長期金利は小幅の上昇にとどまったとする。ヘッジのパフォーマンスにはどのような影響が出るかを説明せよ。

# 第7章

## スワップ

最初のスワップ契約は1980年代初頭に締結された。それ以降、スワップ市場は驚異的な成長を遂げ、現在では店頭デリバティブ市場における最も重要な位置を占めるに至っている。

スワップとは、将来のキャッシュフローを2者間で交換する契約である。契約にはキャッシュフローの受払日や計算方法が定義されている。キャッシュフローは金利や為替レート、それ以外の市場変数の将来決まる値に基づいて計算されることが多い。

フォワード契約はスワップの簡単な例とみなすことができる。たとえば、2009年3月1日にある企業が金100オンスを1オンス当たり900ドルで1年後に購入するフォワード契約を締結するしよう。1年後、その企業は金を受け取ると同時にそれを売却することができる。したがって、このフォワード契約は2009年3月1日に現金90,000ドルを支払って現金100Sを受け取るス

ワップと等価である。ここで  $S$  はその日の金 1 オンスの市場価格である。

フォワード契約は将来の 1 日だけにおけるキャッシュフローの交換と等価であるが、スワップではふつう将来の複数日においてキャッシュフローの交換が行われる。本章ではスワップの商品性、利用法、および価格付けについて考察する。本章のほとんどの部分では、最もよく取引されているプレーン・バニラ金利スワップおよび固定一固定の通貨スワップの二つを中心に取り扱う。その他のスワップについては本書の最後で簡単に触れ、第32章でより詳細に論じる。

## 7.1 金利スワップの仕組み

最も一般的なスワップは、“プレーン・バニラ”(plain vanilla) と呼ばれる金利スワップである。このスワップでは、企業はある想定元本に対するあらかじめ決められた固定金利の利子からなるキャッシュフローを長期間支払うこととに同意する。その見返りに、その企業は同額の想定元本に対する変動金利の利子からなるキャッシュフローを同じ期間受け取る。

### LIBOR

ほとんどの金利スワップで参照される変動金利は、第4章で説明したondon銀行間貸手金利 (LIBOR) である。LIBOR は欧州通貨市場における銀行間の預本金利である。一般的に、1カ月、3カ月、6カ月、12カ月の LIBOR がすべて主要通貨で表示されている。

国内金融市场においてプライム・レート（最優遇金利）が変動金利ローンの参考金利としてよく用いられているように、LIBOR は国際金融市场における貸出の参考金利としてよく用いられている。クーポンが年率で 6 カ月 LIBOR + 0.5% と決められている 5 年変動利付債を例にとって、参考金利としての使われ方を説明しよう。その債券の満期までの期間は 6 カ月ごとに 10 期間に分割される。各期間に対して適用される金利をその期間の開始時点における 6 カ月 LIBOR に年率 0.5% を上乗せしたものにする、という形で

LIBOR は使われ、利子はその期間の終わりに支払われる。

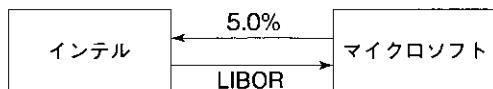
## 例　　示

仮に、マイクロソフトとインテルが2007年3月5日に3年スワップを契約したとしよう。マイクロソフトはインテルに想定元本1億ドルに対して年率5%の利子を支払い、かわりにインテルはマイクロソフトに同額の想定元本に対して6カ月LIBOR金利を支払うことで合意したとする。このスワップでは、マイクロソフトはいわゆる固定金利ペイヤー(fixed-rate payer)で、インテルは変動金利ペイヤー(floating-rate payer)である。6カ月ごとに金利は交換されるとする。また、5%は半年複利ベースでの金利とする。このスワップを図7.1に図示する。

初回の金利交換は契約開始から6カ月後の2007年9月5日に行われる。マイクロソフトはインテルに250万ドルを支払う。これは元本1億ドルに対する利率5%の期間6カ月分の金利である。インテルはマイクロソフトに元本1億ドルに対して、2007年9月5日の6カ月前、すなわち2007年3月5日の6カ月LIBORに基づいて金利を支払う。2007年3月5日の6カ月LIBORが4.2%であったとすると、インテルはマイクロソフトに $0.5 \times 0.042 \times 1\text{ 億ドル} = 210\text{ 万ドル}$ を支払うことになる(注1)。このLIBORの値は契約締結時に決まっているので、初回の金利交換金額は契約締結時点で確定していることに注意しよう。

2回目の金利交換は契約開始1年後の2008年3月5日に行われる。マイクロソフトはインテルに250万ドルを支払う。インテルはマイクロソフトに元本1億ドルに対して、2008年3月5日の6カ月前、すなわち2007年9月5日

図7.1 マイクロソフトとインテルとの金利スワップ



(注1) 計算を簡単にするため、デイカウント・コンベンションは無視している。詳細な内容については本章で少し後に説明する。

の6カ月LIBORに基づいて金利を支払う。2007年9月5日の6カ月LIBORが4.8%であったとすると、インテルはマイクロソフトに $0.5 \times 0.048 \times 1$ 億ドル=240万ドルを支払うことになる。

このスワップでは合計6回の金利交換が行われる。固定利払額は常に250万ドルである。変動利払額は支払日の6カ月前のLIBORを使って計算される。金利スワップでは一般的に支払額の差額が一方から他方へ送金される。いまの例では、マイクロソフトがインテルに40万ドル(=250万ドル-210万ドル)を2007年9月5日に支払い、10万ドル(=250万ドル-240万ドル)を2008年3月5日に支払う。

6カ月LIBORを適当に与えたときのこのスワップの全支払を表7.1に例示した。この表はマイクロソフトからみたスワップのキャッシュフローを示している。元本1億ドルは金利の支払額の計算のみに使われていることに注意しよう。元本自体は交換されていない。これが元本を想定元本と呼ぶ理由である。

もしスワップの取引期間の最後に元本交換が行われたとしても、取引の性質はなんら変わらない。元本は固定利払いと変動利払いの両方に対して同額である。したがって、スワップの取引期間の最後に1億ドルと1億ドルの交換を行うことになり、それはマイクロソフトとインテルの双方にとって金融

表7.1 マイクロソフトにおけるキャッシュフロー

5%固定金利支払・LIBOR変動金利受取り、想定元本1億ドル、期間3年のスワップ  
(単位:100万ドル)

| 日付        | 6カ月LIBOR<br>変動金利<br>(%) | キャッシュ<br>フロー受取り | 固定キャッシュ<br>フロー支払 | ネット・キャッシュフロー |
|-----------|-------------------------|-----------------|------------------|--------------|
| 2007年3月5日 | 4.20                    |                 |                  |              |
| 2007年9月5日 | 4.80                    | +2.10           | -2.50            | -0.40        |
| 2008年3月5日 | 5.30                    | +2.40           | -2.50            | -0.10        |
| 2008年9月5日 | 5.50                    | +2.65           | -2.50            | +0.15        |
| 2009年3月5日 | 5.60                    | +2.75           | -2.50            | +0.25        |
| 2009年9月5日 | 5.90                    | +2.80           | -2.50            | +0.30        |
| 2010年3月5日 |                         | +2.95           | -2.50            | +0.45        |

表7.2 表7.1で最終元本交換がある場合のキャッシュフロー

(単位：100万ドル)

| 口 付       | 6カ月 LIBOR<br>金利 (%) | 変動キャッシュ<br>フロー受取り | 固定キャッシュ<br>フロー支払 | ネット・キャッ<br>シュフロー |
|-----------|---------------------|-------------------|------------------|------------------|
| 2007年3月5日 | 4.20                |                   |                  |                  |
| 2007年9月5日 | 4.80                | +2.10             | -2.50            | -0.40            |
| 2008年3月5日 | 5.30                | +2.40             | -2.50            | -0.10            |
| 2008年9月5日 | 5.50                | +2.65             | -2.50            | +0.15            |
| 2009年3月5日 | 5.60                | +2.75             | -2.50            | +0.25            |
| 2009年9月5日 | 5.90                | +2.80             | -2.50            | +0.30            |
| 2010年3月5日 |                     | +102.95           | -102.50          | +0.45            |

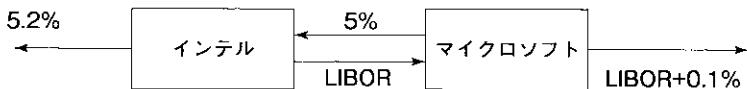
的価値のない取引となる。表7.2は、表7.1のキャッシュフローに最後の元本交換を加えたものである。この表をながめると、スワップに対しておもしろい見方ができるようになる。この表の3列目にならぶキャッシュフローは、変動利付債を買った場合のキャッシュフローと同じである。4列目にならぶキャッシュフローは、固定利付債を売った場合のキャッシュフローと同じである。したがって、スワップは固定利付債と変動利付債の交換とみなすことができる。表7.2はマイクロソフトのポジションを表しており、マイクロソフトは変動利付債を買って固定利付債を売っていることになる。また、インテルは固定利付債を買って変動利付債を売っていることになる。

スワップのキャッシュフローをこのように特徴づけると、変動金利が利払日の6カ月前に決定されるようにスワップの商品性が設計されている理由が説明しやすくなる。変動利付債では、利子は一般的にその適用期間の開始時点に決定され、その終了時点に支払われている。表7.2のような“ブレーン・パニラ”金利スワップの変動金利の金利計算は、変動利付債の金利計算に合わせたものになっている。

### スワップを用いた負債の変換

マイクロソフトは、変動金利ローンを固定金利ローンに変えるのにスワップを使ったとしよう。マイクロソフトはLIBOR+10bpsで1億ドルの借入

図7.2 マイクロソフトとインテルによるスワップを用いた負債の変換



れを行っていたとする（1ベーシス・ポイント（bp）は100分の1%であるから、レートはLIBOR+0.1%である）。マイクロソフトはスワップ取引を行った結果、次の3種類のキャッシュフローをもつことになる。

1. 外部の貸手に対してLIBOR+0.1%を支払う。
2. スワップ契約に基づいてLIBORを受け取る。
3. スワップ契約に基づいて5%を支払う。

これら3種類のキャッシュフローを差引きすると、5.1%の利払いになる。このように、マイクロソフトはスワップを用いてLIBOR+0.1%の借入れを5.1%の固定借入れに変えるのと同じ効果を得ることができる。

インテルにとって、このスワップは固定金利ローンを変動金利ローンに変えるのと同じ効果をもっている。インテルに金利5.2%，元本1億ドル，期間3年の借入れがあるとする。インテルはこのスワップ取引を行った結果、次の3種類のキャッシュフローをもつことになる。

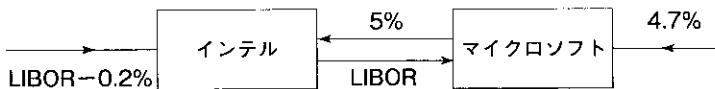
1. 外部の貸手に対して5.2%を支払う。
2. スワップ契約に基づいてLIBORを支払う。
3. スワップ契約に基づいて5%を受け取る。

これら3種類のキャッシュフローを差引きすると、LIBOR+0.2%（すなわちLIBOR+20bps）の利払いになる。このように、インテルはスワップを用いて5.2%の固定借入れをLIBOR+20bpsの借入れに変換するのと同じ効果を得ることができる。インテルとマイクロソフトによるこのようなスワップの使い方を図7.2に図示した。

### スワップを用いた資産の変換

スワップは、資産内容を変えるのにも用いることができる。上の例のマイクロソフトについて考えてみよう。スワップによって実質的に固定金利の運

図7.3 マイクロソフトとインテルによるスワップを用いた資産の変換



用を変動金利の運用に変えることができる。マイクロソフトはクーポン年4.7%の3年債を1億ドル保有しているとする。マイクロソフトはスワップ取引を行った結果、次の3種類のキャッシュフローをもつことになる。

1. 債券から4.7%を受け取る。
2. スワップ契約に基づいてLIBORを受け取る。
3. スワップ契約に基づいて5%を支払う。

これら3種類のキャッシュフローを差引きすると、LIBOR-30bpsの運用となる。このように、マイクロソフトはスワップの一つの使い方として、利回り4.7%の資産を利回りLIBOR-30bpsの資産に変えるのにスワップを用いることができる。

次にインテルについて考える。スワップによって実質的に変動金利の運用を固定金利の運用に変えることができる。インテルは1億ドルを利回りLIBOR-20bpsで運用しているとする。インテルはスワップ取引を行った結果、次の3種類のキャッシュフローをもつことになる。

1. 運用益としてLIBOR-20bpsを受け取る。
2. スワップ契約に基づいてLIBORを支払う。
3. スワップ契約に基づいて5%を受け取る。

これら3種類のキャッシュフローを差引きすると、4.8%の運用となる。このように、インテルはスワップの一つの使い方として、利回りLIBOR-20bpsの資産を利回り4.8%の資産に変えるのにスワップを用いることができる。インテルとマイクロソフトによる、このようなスワップの使い方を図7.3に図示した。

### 金融仲介業者の役割

インテルやマイクロソフトのような金融機関でない2企業は、ふつうは図

7.2や図7.3に示す形でスワップを直接取引することはない。それぞれが銀行や他の金融機関のような金融仲介業者と取引を行う。固定一変動の“ブレン・バニラ”米国金利スワップを金融機関が仲介するときは、相殺する二つのスワップを合わせると3～4ペース・ポイント（年率0.03～0.04%）の利益が得られるように取引するのが通常である。

図7.2の例で金融機関が仲介した場合の様子を、図7.4に図示する。金融機関はインテルとマイクロソフトとの間に入り、相殺する二つのスワップ取引を行う。インテルとマイクロソフトの両社が契約どおり受払いを行うと、金融機関は想定元本1億ドルに対して年0.03%（3ペース・ポイント）の利益をあげることになる。金額にすると1年当り3万ドルの利益を3年間得られることになる。その結果として、マイクロソフトは（図7.2では5.1%の借入れであったが）5.115%の借入れとなり、インテルは（図7.2ではLIBOR+20bpsの借入れであったが）LIBOR+21.5bpsの借入れとなる。

図7.3の例で金融機関が仲介した場合の様子を、図7.5に図示する。金融機関が仲介するスワップは前と同じで、両社とも倒産しなければ3ペース・ポイントの利益をあげることになる。その結果として、マイクロソフトは（図7.3ではLIBOR-30bpsの運用であったが）LIBOR-31.5bpsの運用となり、インテルは（図7.3では4.8%の運用であったが）4.785%の運用となる。

どちらの場合でも、金融機関は二つの別の契約（一つはインテルとの契約、もう一つはマイクロソフトとの契約）を行っていることに注意しよう。ほとんどの場合では、インテルは取引金融機関がマイクロソフトと相殺するような

図7.4 図7.2の金利スワップで金融機関が仲介を行った場合

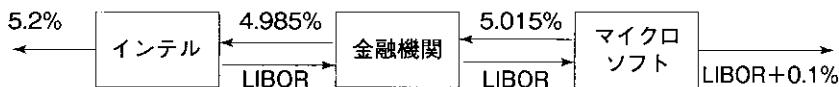
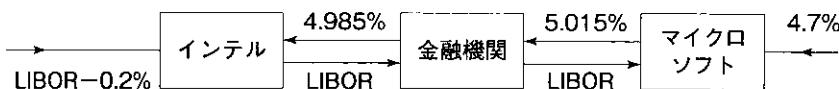


図7.5 図7.3の金利スワップで金融機関が仲介を行った場合



スワップ取引を行っていることを知らないし、逆もまた然りである。また、もしどちらかの企業が倒産した場合でも、金融機関はもう一方の企業との契約は継続しなければならない。金融機関にとっての3ペーシス・ポイントの利益の一部には、どちらかの企業がスワップの支払に関してデフォルトするリスクへの対価という意味もある。

### マーケット・メーカー

二つの企業が同時に金融機関に連絡をとり、まったく同じスワップの反対ポジションを希望するようなケースは実際には考えにくい。そのため、多くの大手金融機関はスワップのマーケット・メーカーを行っている。つまり、相殺できる他とのスワップ取引がなくても、大手金融機関はスワップ取引に応じている(注2)。マーケット・メーカーは注意深くリスクを計量化し、ヘッジを行う必要がある。債券、FRA、金利先物等の商品を用いて、スワップのマーケット・メーカーはスワップのヘッジを行う。表7.3にマーケット・メーカーによって呈示されたプレーン・バニラ米国金利スワップのレートを示す(注3)。前述のとおり、ビッド-オファー・スプレッドは3~4ペーシ

表7.3 スワップ市場における固定金利のビッドとオファーおよびスワップ・レート(年率)

| 満期(年) | ビッド  | オファー | スワップ・レート |
|-------|------|------|----------|
| 2     | 6.03 | 6.06 | 6.045    |
| 3     | 6.21 | 6.24 | 6.225    |
| 4     | 6.35 | 6.39 | 6.370    |
| 5     | 6.47 | 6.51 | 6.490    |
| 7     | 6.65 | 6.68 | 6.665    |
| 10    | 6.83 | 6.87 | 6.850    |

(注2) このことをウェアハウジング(warehousing)・スワップと呼ぶこともある。

(注3) 米国での標準的なスワップは、6カ月ごとの固定金利支払と3カ月ごとのLIBOR変動金利支払とを交換するものである。表7.1では6カ月ごとに固定金利と変動金利が交換されると仮定している。後でみると、変動金利の支払が3カ月ごとと6カ月ごとのどちらであっても、理論上は固定金利は同じ値になる。

ス・ポイントである。固定金利のビッドとオファーの平均はスワップ・レート (swap rate) と呼ばれる。表7.3の最終列にスワップ・レートを示す。

固定金利が現在のスワップ・レートに等しいスワップの新規取引を考える。その時点でのスワップの価値はゼロと考えるのが理にかなっている (マーケット・メーカーがスワップ・レートを中心にしてビッドーオファーを表示する理由が他にあるだろうか?)。スワップが固定利付債と変動利付債の差として特徴づけられることを表7.2にすでに示した。

$B_{\text{fix}}$  : このスワップに対応する固定利付債の価値

$B_{\text{fl}}$  : このスワップに対応する変動利付債の価値  
と定義する。スワップの価値はゼロなので、

$$B_{\text{fix}} = B_{\text{fl}} \quad (7.1)$$

である。LIBOR／スワップ・ゼロ・カーブの決め方を後ほど本章で論じる際に、この結果を用いる。

## 7.2 デイカウント（日数計算）

デイカウント・コンベンションについては6.1節で説明した。デイカウント・コンベンションはスワップの支払額に影響を与えるが、これまで取り上げた事例ではデイカウント・コンベンションを正確に考慮した計算は行っていなかった。たとえば、表7.1の6カ月 LIBOR の支払を考えてみよう。6カ月 LIBOR は米国のマネー・マーケット・レートなので、レートは実日数/360ベースで表示されている。表7.1では、初回の変動利払額は LIBOR レート 4.2%に基づいて210万ドルとなっている。2007年3月5日から2007年9月5日までは184日なので、正確には、

$$100 \times 0.042 \times \frac{184}{360} = 2.1467 \text{ (百万ドル)}$$

である。一般に、LIBORベースのスワップの変動サイドのキャッシュフローは  $LRn/360$  で計算される。ここで  $L$  は元本、 $R$  は対応する LIBOR レート、 $n$  は前回支払日からの実日数である。

スワップの固定レートも同様に決められたデイカウントに基づいて表示されている。その結果、固定支払額は正確には各支払日で等しい金額になるとは限らない。固定レートはふつう実日数/365または30/360で表示されている。したがって、1年全体に対してそれが適用されるため、固定レートは6カ月LIBORと直接比較できるレートではない。レート同士をだいたい比較できるようにするために、6カ月LIBORレートに365/360を乗じるか、固定レートに360/365を乗じる必要がある。

説明を簡単にするために、本章の残りではデイカウントの問題は無視することにする。

### 7.3 取引確認書（コンファメーション）

取引確認書（confirmation）とはスワップに関する法的な合意書であり、取引当事者によって署名される。取引確認書のひな型は、ニューヨークの国際スワップ・デリバティブ協会（International Swaps and Derivatives Association : ISDA ; [www.isda.org](http://www.isda.org)）によって整備されてきた。ISDAは、スワップ契約で用いられる用語の詳細を定義した条項からなる多くの基本契約書（Master Agreement）を作成している。そこには取引相手方のデフォルト時における対応なども記述されている。ビジネス寸見7.1に、図7.4中のマイクロソフトと金融機関（ゴールドマン・サックスと仮定する）との間で取り交わされたスワップの取引確認書の抜粋を示す。ほとんどの場合、正式な取引確認書には契約がISDAの基本契約書に準拠する旨が記載されている。

取引確認書には、翌営業日基準が適用される旨や米国の暦日によって営業日や休日が決められる旨が記載されている。すなわち、支払日が週末か米国の休日に当たる場合は、翌営業日に支払が行われる（注4）。2009年9月5日

---

(注4) 修正翌営業日基準（modified following）という別のビジネスデイ・コンベンション（営業日基準）が用いられることがある。この基準は、翌営業日が翌月になる場合は前営業日にする、という以外は翌営業日基準と同じものである。前営業日基準（preceding）や修正前営業日基準（modified preceding）も同様に定義される。

は土曜日なので、マイクロソフトとゴールドマン・サックスとのスワップにおける最後から2番目の金利交換は翌火曜日の2009年9月8日に行われる(9月7日月曜日は労働者の日で祝日である)。

### ビジネス寸見7.1 仮想的なスワップ取引確認書からの抜粋

|                 |                                      |
|-----------------|--------------------------------------|
| 取引日：            | 2007年2月27日                           |
| 取引開始日：          | 2007年3月5日                            |
| 営業日基準(全日付)：     | 翌営業日                                 |
| 休日指定都市：         | 米国                                   |
| 満期日：            | 2010年3月5日                            |
| 固定サイド           |                                      |
| 固定金利ペイヤー：       | マイクロソフト                              |
| 固定金利想定元本：       | 1億ドル                                 |
| 固定金利：           | 年率5.015%                             |
| デイカウント・コンベンション： | 実日数/365                              |
| 固定金利支払日：        | 2007年9月5日より2010年3月5日<br>までの3月5日と9月5日 |
| 変動サイド           |                                      |
| 変動金利ペイヤー：       | ゴールドマン・サックス                          |
| 変動金利想定元本：       | 1億ドル                                 |
| 変動金利：           | 6カ月ドルLIBOR                           |
| デイカウント・コンベンション： | 実日数/360                              |
| 変動金利支払日：        | 2007年9月5日より2010年3月5日<br>までの3月5日と9月5日 |

## 7.4 比較優位論

スワップがよく取引される理由として、比較優位の存在が一般的にその説明に用いられている。負債の変換に金利スワップを用いる場合を考えてみよう。世の中には固定金利市場での借入れに関して比較優位にある企業もあれば、変動金利市場での借入れに関して比較優位にある企業もあるといわれている。企業が新規借入れを行う場合、その企業が比較優位にある市場で資金を調達するのが理にかなっている。その結果、変動金利を望んでいる企業が固定金利で調達を行ったり、固定金利を望んでいる企業が変動金利で調達を行うということが起こる。ここに、固定金利借入れを変動金利借入れに変える、あるいはその逆方向に変えるというスワップのニーズが生まれる。

AAACorp 社と BBBCorp 社はともに1,000万ドルの5年借入れを計画しており、表7.4に示すような金利の呈示を受けているとする。AAACorp 社の格付は AAA、BBBCorp 社の格付は BBB とする(注5)。いま、BBBCorp 社は固定金利での借入れを希望しており、AAACorp 社は6カ月 LIBOR の変動金利借入れを希望しているとする。BBBCorp 社は AAACorp 社より格付が悪いので、変動金利市場と固定金利市場のいずれで借り入れても、AAACorp 社より高いレートを支払うことになる。

AAACorp 社と BBBCorp 社に呈示されたレートで重要な点は、固定金利の差のほうが変動金利の差より大きいということである。つまり、BBBCorp 社の支払う金利は、固定金利市場では AAACorp 社より年率

表7.4 比較優位が反映された借入レート

|           | 固 定  | 変 動               |
|-----------|------|-------------------|
| AAACorp 社 | 4.0% | 6 カ月 LIBOR - 0.1% |
| BBBCorp 社 | 5.2% | 6 カ月 LIBOR + 0.6% |

(注5) S&P による企業の信用格付は、信用力の高い順に AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C である。Moody's の対応する格付は、それぞれ Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa, Ca, C である。

1.2%高いが、変動金利市場では年率0.7%しか高くない。BBBCorp社は変動金利市場で比較優位にあり、AAACorp社は固定金利市場で比較優位にあるといえる(注6)。このような市場間のゆがみが、スワップが取引される誘因となっている。まず、AAACorp社は年率4%の固定金利借入れを行い、BBBCorp社はLIBOR+0.6%で変動金利借入れを行う。同時に両社間でスワップ取引を行うことによって、最終的にはAAACorp社は借入れが変動金利借入れになるようにし、BBBCorp社は借入れが固定金利借入れになるようにする。

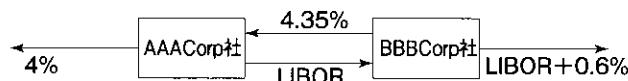
このスワップがどのように機能しているかを理解するために、最初はAAACorp社とBBBCorp社が直接取引を行う場合を考える。一つの取引例を図7.6に示す。これは図7.2の例と同様のものである。AAACorp社はBBBCorp社に元本1,000万ドルに対して6カ月LIBORを支払うことに合意し、BBBCorp社はAAACorp社に元本1,000万ドルに対して年率4.35%の固定金利を支払うことに合意する。

AAACorp社は、次の3種類のキャッシュフローをもつことになる。

1. 外部の貸手に対し、年率4%の金利を支払う。
2. BBBCorp社より、年率4.35%の金利を受け取る。
3. BBBCorp社に対し、LIBORを支払う。

AAACorp社は差引きでLIBOR-0.35%（年率）の金利を支払うことになる。

図7.6 表7.4のレートを適用したAAACorp社とBBBCorp社のスワップ取引



(注6) BBBCorp社が変動金利市場で比較優位にあるということは、同市場でのBBBCorp社の支払がAAACorp社の支払より少ないということを意味しているわけではない。変動金利市場のほうが、BBBCorp社がAAACorp社よりも多く支払う額が少ないということを意味している。筆者のある学生が、この状況を次のようにうまくまとめて表現した。「AAACorp社は固定金利市場のほうが支払う金利がmore less（相対的により少なく）で、BBBCorp社は変動金利市場のほうが支払う金利がless more（高いが相対的に低い）である」

図7.7 表7.4のスワップで金融機関が仲介した場合のAAACorp社とBBBCorp社のスワップ取引



なる。したがって、AAACorp社は変動金利市場から直接借り入れるよりも0.25%低く借り入れたことになる。BBBCorp社も同様に、次の3種類のキャッシュフローをもつことになる。

1. 外部の貸手に対し、LIBOR+0.6%（年率）の金利を支払う。
2. AAACorp社より、LIBORを受け取る。
3. AAACorp社に対し、年率4.35%の金利を支払う。

BBBCorp社は差引きで年率4.95%の金利を支払うことになる。したがって、BBBCorp社は固定金利市場から直接借り入れるよりも年率0.25%低く借り入れたことになる。

この例では、AAACorp社とBBBCorp社の双方がともに0.25%のネット利益を得るようにスワップが組まれている。常にそうである必要はないが、固定金利市場での両企業の金利差を  $a$ 、変動金利市場での金利差を  $b$  とすると、この種の金利スワップ取引によって得られる利益の合計は常に  $a - b$  になる。上のケースでは  $a = 1.2\%$ 、 $b = 0.7\%$  なので、総利益は0.5%となる。

AAACorp社とBBBCorp社が直接取引を行わないで金融機関を利用する場合は、図7.7に示したようなスワップ取引（図7.4の例と同様の取引）が行われる。この例では、AAACorp社はLIBOR-0.33%で借り入れ、BBBCorp社は4.97%で借り入れたことになる。金融機関は年率で4ペース・ポイントのスプレッドを稼いでいる。したがって、AAACorp社の利益は0.23%、BBBCorp社の利益も0.23%、金融機関の利益は0.04%となり、3社を合わせた総利益は前と同様に0.50%となる。

### 比較優位論に対する批判

金利スワップ取引が行われる理由として比較優位論を説明してきたが、こ

れには疑問の余地が残る。AACorp 社と BBBCorp 社に呈示される金利のスプレッドに、固定金利市場と変動金利市場とでなぜ表7.4のような違いがあるのか。スワップ・マーケットで取引が行われるようになってからそれなりの時間が経過しているので、その種の差異は裁定取引によって取り除かれていると考えるのが理にかなっているはずである。

スプレッドの違いが存在し続ける理由は、固定金利市場と変動金利市場とで取引される商品に性質の違いがあるためと考えられる。4.0%と5.2%というのは、AACorp 社と BBBCorp 社が固定金利市場で資金調達する際の5年物金利である（たとえば、5年固定利付債を発行できるレートである）。AACorp 社と BBBCorp 社が変動金利市場で資金調達する際の金利 LIBOR-0.1%と LIBOR+0.6%は6カ月物金利である。変動金利市場では、貸手はふつう6カ月ごとに金利を見直すことができるので、もし AACorp 社と BBBCorp 社の信用力が低下すれば、LIBOR に上乗せするスプレッドを引き上げることができる。極端な場合には、貸手はローンの継続を拒否することもできる。固定金利貸出では、このようにローンの期間を変えることはできない（注7）。

AACorp 社と BBBCorp 社に呈示された金利のスプレッドは、BBBCorp 社が AACorp 社に比べてデフォルトを起こしやすい度合いを反映したものである。次の6カ月間にデフォルトを起こす確率は、AACorp と BBBCorp 社のいずれも非常に低い。後の章で詳しくみるように、AACorp 社のような比較的高格付の会社よりも BBBCorp 社のような比較的低格付の会社のほうが、デフォルト確率は期間が長くなるとともに速く増加しやすい。これが、6カ月物金利間のスプレッドよりも5年物金利間のスプレッドのほうが大きくなる理由である。

図7.7に示されるような LIBOR+0.6%の変動金利ローンとスワップ取引を行うことによって、BBBCorp 社は4.97%の固定金利ローンを得た。しかし上の議論からわかるように、これは本当は正しくない。実際には、

---

（注7） 変動金利ローンの対 LIBOR スプレッドが企業の格付変化によらず事前に保証されている場合には、比較優位は実際のところ存在しない。

4.97%といふのは、LIBORに対する上乗セスプレッドが0.6%のままでBBBCorp社が変動金利での資金を借り続けられた場合でのみの話である。もしBBBCorp社の信用格付が下がって、たとえば変動金利ローンがLIBOR+1.6%で継続されたならば、BBBCorp社の支払う金利は5.97%に上昇する。市場は、BBBCorp社の6カ月LIBORに対する借入金利のスプレッドがスワップ期間中に平均としては上昇すると予想している。したがって、BBBCorp社がスワップ取引を行った時点でのBBBCorp社の予想平均借入金利は4.97%よりも高いということになる。

図7.7では、AAACorp社はスワップを用いて、次の6カ月だけではなく今後5年間の支払をLIBOR-0.33%で固定できている。AAACorp社にとって得な取引ではあるが、懸念材料として取引金融機関のデフォルトリスクがある。もし通常どおりに変動金利で資金調達すれば、このリスクを負うことはない。

## 7.5 スワップ・レートの性質

スワップ・レートの性質およびスワップ市場とLIBOR市場との関係について、検討してみよう。4.1節で説明したように、LIBORは格付AAの銀行が他の銀行から期間1~12カ月の借入れを行う際の金利である。一方、表7.3に示したように、スワップ・レートはスワップのマーケット・メーカーが(a)LIBORを受け取るかわりに支払う固定金利(スワップのビッド・レート)と(b)LIBORを支払うかわりに受け取る固定金利(スワップのオファー・レート)との平均レートである。

LIBORレートと同様に、スワップ・レートも無リスクの貸出金利ではないが、無リスク金利に近い。金融機関は次の取引を行うことで、ある決めた元本に対して5年スワップ・レートの金利を得ることができる。

1. 格付AAの借手にある決めた元本を最初の6カ月間貸し出し、それ以降6カ月ごとに格付AAの他の借手に再貸出を行う。
2. LIBORを5年スワップ・レートと交換するスワップ取引を行う。

のことから、5年スワップ・レートは6カ月間のLIBOR貸出を格付AAの企業に対して10回続けて行うときの信用リスクを反映した金利である。同様に、7年スワップ・レートは6カ月間のLIBOR貸出を格付AAの企業に対して14回続けて行うときの信用リスクを反映した金利である。その他の期間のスワップ・レートも同様に解釈できる。

したがって、スワップ・レートは同じ期間の格付AAの企業への貸出金利より低いことに注意しよう。5年全期間にわたって同じ借手に貸し出す場合には、借手の格付がAAであることが確かなのは5年間の期首だけである。それに対して6カ月ごとに貸し直す場合には、6カ月ごとに借手の格付をAAにできるので、こちらの貸出方法のほうが貸手にとって有利だからである。

## 7.6 LIBORとスワップによるゼロ・レートの決定

デリバティブ・トレーダーはデリバティブの価格付けを行う際に、LIBORレートを無リスク金利のかわりとして用いることが多いことを4.1節で説明した。LIBORレートがもつ問題の一つは、市場で直接観測できる満期が12カ月までということである。6.3節で述べたように、LIBORゼロ・カーブを12カ月より先に延長する一つの方法は、ユーロ・ドル金利先物を用いることである。ユーロ・ドル金利先物を用いれば、2年まで、場合によっては5年までLIBORゼロ・カーブを作成することができる。それ以上延長する場合には、トレーダーはスワップ・レートを利用する。作成したゼロ・カーブはLIBORゼロ・カーブやスワップ・ゼロ・カーブと呼ばれる。混乱を避けるために、ここではLIBOR／スワップ・ゼロ・カーブと呼ぶことにする。以下では、スワップ・レートを用いたLIBOR／スワップ・ゼロ・カーブの決め方について述べる。

最初に注意すべき点は、LIBOR／スワップ・ゼロ・カーブを割引率に用いると、6カ月LIBORを支払う新発変動利付債の価値は常に元本価値（すなわちパー）に等しいということである（注8）。その理由は、債券の支払う利

子は LIBOR で、その利子に適用する割引率も LIBOR だからである。債券の利子が割引率に正確に一致する場合は、債券の公正価値はパーになる。

(7.1)式で、新規発行のスワップでは固定金利はスワップ・レートに等しいこと、すなわち  $B_{\text{fix}} = B_{\text{fl}}$  を示した。いま  $B_{\text{fl}}$  は想定元本に等しいことを示したので、 $B_{\text{fix}}$  もスワップの想定元本に等しい。したがって、スワップ・レートは債券のパー・イールドを与えていることになる。たとえば、スワップ・レートが表7.3で与えられたときは、2年のLIBOR／スワップ・パー・イールドは6.045%，3年のLIBOR／スワップ・パー・イールドは6.225%といった具合になる(注9)。

4.5節でブートストラップ法を用いて国債価格から国債ゼロ・カーブを決定する方法を説明した。この方法は、スワップ・レートを用いて LIBOR／スワップ・ゼロ・カーブを延長するのにも同様に用いることができる。

#### 【例7.1】

6ヶ月、12ヶ月、18ヶ月のLIBOR／スワップ・ゼロ・レートが連続複利でそれぞれ4%，4.5%，4.8%と求められており、2年スワップ・レート（金利交換は半年ごと）は5%とする。このスワップ・レート5%というのは、元本100ドル、年率5%の年2回払いクーポンの債券がパーで売れるることを意味している。したがって、2年物ゼロ・レートを  $R$  とすると、

$$2.5e^{-0.04 \times 0.5} + 2.5e^{-0.045 \times 1.0} + 2.5e^{-0.048 \times 1.5} + 102.5e^{-2R} = 100$$

となる。これを解くと  $R=4.953\%$  となる（計算を簡単にするためにスワップのデイカウント・コンベンションや休日は考慮していない。7.2節を参照）。

(注8) 1ヶ月、3ヶ月、12ヶ月LIBORを支払う新発債についても同じことが成り立つ。

(注9) ゼロ・カーブの計算を行う前にスワップ・レートを補間して、6ヶ月ごとの満期に対するスワップ・レートを求める場合が多い。たとえば表7.3では、2.5年のスワップ・レートを6.135%，7.5年のスワップ・レートを6.696%と仮定するなどである。

## 7.7 金利スワップの評価

次に、金利スワップの評価について議論を進めよう。契約締結時点における金利スワップの価値はゼロ、またはゼロに近い。時間が経過するにつれてスワップの価値は正にも負にもなる。スワップの評価方法には二つの手法がある。一つ目の手法は、スワップを二つの債券の差として考えるものである。二つ目の手法は、スワップをFRAのポートフォリオとして考えるものである。

### 債券価格からの評価

金利スワップでは元本交換は行われないが、表7.2に示したように、スワップの満期時に元本の受払いを行ったとしてもスワップの価値は変わらない。そうすることによって、変動金利ペイラーからみた場合のスワップは、固定利付債の買いポジションと変動利付債の売りポジションの合成であるとみなすことができる。したがって、

$$V_{\text{swap}} = B_{\text{fix}} - B_{\text{fl}}$$

となる。ここで  $V_{\text{swap}}$  はスワップの価値、 $B_{\text{fl}}$  は（支払に対応した）変動利付債の価値、 $B_{\text{fix}}$  は（受取りに対応した）固定利付債の価値である。同様に、固定金利ペイラーからみた場合のスワップは、変動利付債の買いポジションと固定利付債の売りポジションの合成であるとみなすことができる。したがって、

$$V_{\text{swap}} = B_{\text{fl}} - B_{\text{fix}}$$

となる。固定利付債の価値  $B_{\text{fix}}$  は4.4節で述べた方法で求められる。次に変動利付債の価値を考える。まず、利払直後の変動利付債の価値は想定元本に等しいことに注意しよう。なぜなら、この時点での債券は、借手がその後の各金利計算期間に対応したLIBORを支払う「公平な取引」となるからである。

スワップの想定元本を  $L$ 、次回の金利交換時点を  $t^*$ 、時点  $t^*$  に支払われる変動金利（前回利払時に決定ずみ）を  $k^*$  とする。利払直後は前述のとおり

$B_{t_1}=L$  ので、利払直前は  $B_{t_1}=L+k^*$  となる。したがって、変動利付債は時点  $t^*$  に単一のキャッシュフロー  $L+k^*$  を生み出す商品とみなすことができる。これを割り引くと、現時点での変動利付債の価値は、

$$(L+k^*) e^{-r^* t^*}$$

となる。ここで  $r^*$  は満期  $t^*$  の LIBOR／スワップ・ゼロ・レートである。

【例7.2】

金融機関が 6 カ月 LIBOR を支払い、年率 8 % (半年複利) を受け取る想定元本 1 億ドルのスワップを取引したとしよう。このスワップの残存期間は 1.25 年である。また、3 カ月、9 カ月、15 カ月の LIBOR レートは連続複利でそれぞれ 10.0%，10.5%，11.0% である。さらに、前回支払日における 6 カ月 LIBOR は 10.2% (半年複利) であったとする。

債券の観点からスワップの価値を求める計算を表7.5 にまとめた。固定利付債の 3 回の利払日におけるキャッシュフローは 4，4，104 である。これらのキャッシュフローに対する割引率は、それぞれ、

$$e^{-0.1 \times 0.25}, e^{-0.105 \times 0.75}, e^{-0.11 \times 1.25}$$

となり、その値を表7.5 の 4 列目に示した。表に示したとおり、固定利付債の価値は 98.238 (単位: 100 万ドル) となる。

この例では、 $L=1$  億ドル、 $k^*=0.5 \times 0.102 \times 100=510$  万ドル、 $t^*=0.25$  となるので、変動利付債は 3 カ月後に 1 億 510 万ドルのキャッシュフローを生み出す商品と同じ価値をもつ。表7.5 に示すようにその値は  $105.100 \times 0.9753=102.505$  (単位: 100 万ドル) である。

スワップの価値は二つの債券の価格差:

$$V_{\text{swap}}=98.238-102.505=-4.267$$

すなわち -426.7 万ドルとなる。

金融機関は固定払い、変動受けという反対のポジションを保有しているので、そのスワップの価値は +426.7 万ドルとなる。ただし、以上の計算ではデイカウント・コンベンションや休日は考慮していない。

表7.5 債券の観点から行ったスワップの価値計算

(単位：100万ドル)

| 時間   | $B_{fix}$ のキャッシュフロー | $B_{fl}$ のキャッシュフロー | 割引率    | $B_{fix}$ のキャッシュフローの現在価値 | $B_{fl}$ のキャッシュフローの現在価値 |
|------|---------------------|--------------------|--------|--------------------------|-------------------------|
| 0.25 | 4.0                 | 105.100            | 0.9753 | 3.901                    | 102.505                 |
| 0.75 | 4.0                 |                    | 0.9243 | 3.697                    |                         |
| 1.25 | 104.0               |                    | 0.8715 | 90.640                   |                         |
| 合計   |                     |                    |        | 98.238                   | 102.505                 |

 $B_{fix}$ はスワップに対応する固定利付債、 $B_{fl}$ はスワップに対応する変動利付債

### 金利先渡契約としての評価

スワップは金利先渡契約（FRA）のポートフォリオとして特徴づけることもできる。図7.1のマイクロソフトとインテルとのスワップ契約を考えてみよう。スワップは期間3年の半年払い、2007年3月5日に開始されている。初回の金利交換額はスワップ契約締結時に確定している。その他五つの金利交換はFRAとみなすことができる。2008年3月5日における金利交換は2007年9月5日に市場で呈示される6カ月物金利と5%の金利を交換するFRA、2008年9月5日における金利交換は2008年3月5日に市場で呈示される6カ月物金利と5%の金利を交換するFRA等々である。

4.7節の終わりに示したように、FRAの価値は現在のフォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定することで求めることができる。スワップはFRAのポートフォリオにほかならないので、プレーン・バニラ金利スワップも現在のフォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定することでその価値を求めることができる。したがって、以下の手順でスワップの価値が求まる。

1. スワップのキャッシュフローを決めているそれぞれのLIBORに対して、そのフォワード・レートをLIBOR／スワップ・ゼロ・カーブを用いて計算する。

2. LIBOR レートがフォワード・レートと等しいと仮定して、スワップのキャッシュフローを計算する。
3. 上で計算したスワップのキャッシュフローを LIBOR／スワップ・ゼロ・レートを用いて現在価値に割り引き、スワップの価値を求める。

【例7.3】

例7.2について再び考えてみよう。スワップ契約に基づいて、金融機関は想定元本1億ドルに対して6カ月LIBORを支払い、年率8%（半年複利）の金利を受け取ることに合意している。このスワップの残存期間は1.25年である。3カ月、9カ月、15カ月のLIBORレートは連続複利でそれぞれ10%，10.5%，11%である。前回支払日における6カ月LIBORは10.2%（半年複利）であった。

スワップの価値を求める計算を表7.6にまとめた。表の1行目は3カ月後に交換されるキャッシュフローを表している。これらはすでに確定している。固定金利8%に基づいて $100 \times 0.08 \times 0.5 = 400$ 万ドルの現金を受け取り、変動金利10.2%（3カ月前に確定）に基づいて $100 \times 0.102 \times 0.5 = 510$ 万ドルの現金を支払うことになる。2行目はフォワード・レートが実現すると仮定した場合の9カ月後に交換されるキャッシュフローである。現金受取額は1行目と同様に400万ドルである。現金支払額を計算するためには、まず3カ月後から9カ月後までの期間のフォワード・レートを計算する必要がある。(4.5)式より、フォワード・レートは、

$$\frac{0.105 \times 0.75 - 0.10 \times 0.25}{0.5} = 0.1075$$

すなわち連続複利で10.75%となる。(4.4)式より、フォワード・レートは半年複利で11.044%となる。したがって、現金支払額は $100 \times 0.11044 \times 0.5 = 552.2$ 万ドルとなる。3行目も同様にフォワード・レートが実現すると仮定した場合の15カ月後に交換されるキャッシュフローである。それら三つの支払日に対する割引率は、それぞれ、

$$e^{-0.1 \times 0.25}, e^{-0.105 \times 0.75}, e^{-0.11 \times 1.25}$$

である。これより、3カ月後に交換される現金の現在価値は-107.3万ドルになる。9カ月後と15カ月後の金利交換に対応するFRAの価値はそれぞれ-140.7万ドルと-178.7万ドルになる。したがって、スワップの総価値は-426.7万ドルになる。この値は例7.2でスワップを債券に分解して計算した値と一致する。

表7.6 FRAの観点から行ったスワップの価値計算

(単位:100万ドル)

| 時間   | 固定サイド<br>のキャッシュフロー | 変動サイド<br>のキャッシュフロー | ネット・キャッシュフロー | 割引率    | ネット・キャッシュフローの現在価値 |
|------|--------------------|--------------------|--------------|--------|-------------------|
| 0.25 | 4.0                | -5.100             | -1.100       | 0.9753 | -1.073            |
| 0.75 | 4.0                | -5.522             | -1.522       | 0.9243 | -1.407            |
| 1.25 | 4.0                | -6.051             | -2.051       | 0.8715 | -1.787            |
| 合計   |                    |                    |              |        | -4.267            |

変動金利のキャッシュフローはフォワード・レートが実現したと仮定して計算する

金利スワップの固定金利は、契約締結時点におけるスワップの価値がゼロになるように決められている。これは、スワップを構成するFRAの価値の合計がスワップの契約締結時点ではゼロであることを意味しているのであって、個々のFRAの価値がゼロであることは意味していない。一般的に、一部のFRAは正の価値をもち、一部のFRAは負の価値をもつ。

図7.1のマイクロソフトとインテルとの間で結ばれたスワップを構成するFRAについてもう一度考えてみよう。以下の関係が成り立っている。

フォワード・レート>5.0%のとき、マイクロソフトからみたFRAの  
価値>0

フォワード・レート=5.0%のとき、マイクロソフトからみたFRAの  
価値=0

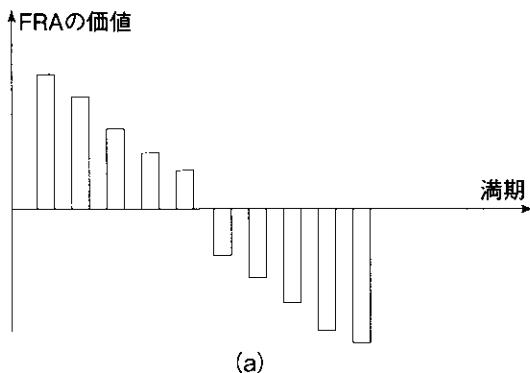
フォワード・レート<5.0%のとき、マイクロソフトからみたFRAの

価値 < 0

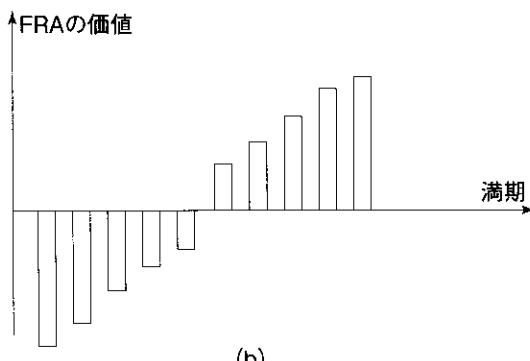
スワップ契約締結時の金利の期間構造は右上がりだったとしよう。この場合、FRA の満期が長くなるにつれてフォワード・レートは上昇する。FRA の価値の合計はゼロなので、初めのほうの支払日に対応するフォワード・レートは5.0%より低く、後のほうの支払日に対応するフォワード・レートは5.0%より高いはずである。したがって、マイクロソフトからみた FRA の価値は、初めのほうの支払日に対応するものは負となり、後のほうの支払日に対応するものは正となる。スワップ契約締結時の金利の期間構造が右下

図7.8 スワップを構成する各満期のFRAの価値

- (a)は順イールドで固定金利受けの場合、または逆イールドで変動金利受けの場合  
(b)は順イールドで変動金利受けの場合、または逆イールドで固定金利受けの場合



(a)



(b)

がりの場合はその逆になる。スワップを構成する FRA の価値は金利期間構造の形状の影響を受ける。その様子を図7.8にまとめた。

## 7.8 通貨スワップ

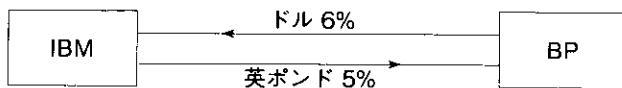
通貨スワップ (currency swap) という、広く普及しているもう一つのスワップがある。最も単純な取引形態は、一つの通貨の元本と金利を別通貨の元本と金利に交換する取引である。

通貨スワップ契約では2通貨のそれぞれに対して元本額を定める必要がある。各通貨の元本はスワップ契約の開始時と終了時に交換されるのがふつうである。その元本額はスワップ契約締結時の為替レート換算でほぼ同額に設定されることが多い。したがって、スワップの満期時に元本交換が行われるときには、それらの価値は大きく異なることもある。

### 例　示

仮に2007年2月1日に、IBMとブリティッシュ・ペトロリアム(BP)が5年通貨スワップを契約したとしよう。IBMは英ポンドで5%の固定金利を支払い、BPからドルで6%の固定金利を受け取るものとする。金利の支払は年1回、元本は1,800万ドルと1,000万英ポンドとする。両通貨とも金利は固定なので、このスワップは固定-固定(fixed-for-fixed)通貨スワップと呼ばれる。図7.9にこのスワップを図示した。契約開始時の元本の流れは図中の矢印と反対方向になる。一方、期中の利子と終了時の元本の流れは図中の矢印と同じ方向である。このように、スワップ契約開始時にIBMは1,800万ドルを支払い、1,000万英ポンドを受け取る。スワップ契約期間中は、IBMは毎年108万ドル(=1,800万ドルの6%)を受け取り、50万英ポン

図7.9 通貨スワップ



**表7.7 通貨スワップにおけるIBMからみたキャッシュフロー**

| 日付        | ドルのキャッシュフロー<br>(単位:100万) | 英ポンドのキャッシュフロー<br>(単位:100万) |
|-----------|--------------------------|----------------------------|
| 2007年2月1日 | -18.00                   | +10.00                     |
| 2008年2月1日 | +1.08                    | -0.50                      |
| 2009年2月1日 | +1.08                    | -0.50                      |
| 2010年2月1日 | +1.08                    | -0.50                      |
| 2011年2月1日 | +1.08                    | -0.50                      |
| 2012年2月1日 | +19.08                   | -10.50                     |

ド (=1,000万英ポンドの5%) を支払う。スワップ契約終了時には、IBMは元本1,000万英ポンドを支払い、元本1,800万ドルを受け取る。それらのキャッシュフローを表7.7に示す。

### ローンや資産を変換するための通貨スワップの利用方法

いま例としてみてきたような通貨スワップを用いて、ある通貨での借入れを別の通貨の借入れに変換することができる。IBMはクーポン6%のドル建て債券を1,800万ドル発行できるとしよう。上の通貨スワップを用いて、IBMはこのドル建ての借入れを金利5%の1,000万英ポンドの借入れに変えることができる。すなわち、最初の元本交換によって、債券発行で調達した資金はドルから英ポンドに交換され、その後のスワップでのキャッシュフローの交換によって、利子と元本の支払も実質的にドルから英ポンドに変わることになる。

スワップを用いて資産の性質を変えることもできる。IBMは1,000万英ポンドを英国では今後5年間年率5%で運用できるが、米ドルが英ポンドに対して今後強含むと予想し、ドル建てで投資をしたいと考えている。通貨スワップを利用すれば、この英ポンド投資を利回り6%の1,800万ドルの米ドル投資に変えることができる。

### 比較優位

通貨スワップは比較優位にある企業同士によって取引されることもある。

これについて、別の仮想的な取引例を用いて考えてみよう。ゼネラル・エレクトリック (GE) とカンタス航空の米ドルおよび豪ドルでの期間 5 年の固定金利調達コストが、表7.8のようになっているとする。この表から豪ドル金利が米ドル金利より高いことと、GE はどちらの通貨でもカンタス航空よりよいレートを呈示されていることから、GE のほうがカンタス航空より信用力が高いことがわかる。表7.8でスワップ・トレーダーが興味をもつのは、GE とカンタス航空が支払う金利のスプレッドが二つの市場で異なっているということである。カンタス航空の支払う金利は、米ドル市場では GE より 2.0% 高いが、豪ドル市場では 0.4% しか高くない。

この状況は表7.4の状況に類似している。GE は米ドル市場で比較優位にあり、カンタス航空は豪ドル市場で比較優位にあることがわかる。表7.4ではブレーン・バニラ金利スワップについて考察し、比較優位はかなりの部分は幻想であることを説明した。ここでは二つの異なる通貨に対して呈示される金利を比較しており、比較優位は本当である可能性が強い。比較優位が生じる一つの要因は税制の違いである。GE は豪ドルより米ドルで借り入れたほうが、世界中からあがる収入に対する税率が低くなるのかもしれない。カンタス航空はその逆かもしれない（表7.8の金利はこの種の税制上の優位調整後のものであることに注意せよ）。

GE は 2,000 万豪ドルの調達を計画しており、カンタス航空は 1,500 万米ドルの調達を計画しているとする。現在の為替レートを 0.75 米ドル/豪ドルとする。これは通貨スワップが取引される典型的な状況である。まず、GE とカンタス航空は各々が比較優位にある市場での借り入れを行う。つまり、GE は米ドル市場で、カンタス航空は豪ドル市場でそれぞれ借り入れを行う。それ

表7.8 通貨スワップを考える際の借入  
レート

|        | 米ドル* | 豪ドル* |
|--------|------|------|
| GE     | 5.0% | 7.6% |
| カンタス航空 | 7.0% | 8.0% |

\* 税制の違いによる影響調整込みのレート

から通貨スワップ取引を行って、GEはローンを豪ドル建てに、カンタス航空はローンを米ドル建てに変えるのである。

すでに述べたように、米ドルでの金利差は2.0%であり、豪ドルでの金利差は0.4%である。金利スワップのときと同じ議論で、取引参加者全員の利益の合計は $2.0\% - 0.4\% = 1.6\%$ （年率）になる。

スワップの取引条件はいろいろ考えられるが、図7.10に金融機関が仲介した場合の通貨スワップの一例を示す。GEは米ドルで借入れを行い、カンタス航空は豪ドルで借入れを行う。スワップ取引を行うことによって、GEは年率5.0%の米ドル金利を年率6.9%の豪ドル金利に変えることができる。その結果、GEは豪ドル市場から直接借り入れるより年率0.7%調達コストを改善することができる。同様にカンタス航空は年率8%の豪ドルローンを年率6.3%の米ドルローンに変えることで、米ドル市場から直接借り入れるより年率0.7%調達コストを改善することができる。金融機関は、米ドルで年率1.3%の利益を得て、豪ドルで年率1.1%の損失を被る。通貨の違いを無視すると、金融機関はネットで年率0.2%の利益を得る。先に述べたように、3者の利益合計は年率1.6%である。

金融機関は毎年195,000米ドル（=1,500万米ドル×1.3%）を受け取り、220,000豪ドル（=2,000万豪ドル×1.1%）を支払う。また、金融機関はスワップ満期までの各年に220,000豪ドルを購入するフォワード契約を結べば為替リスクを避けることができ、米ドルでのネット利益を固定することができる。

金融機関が米ドルで0.2%の利益が得られるように、スワップを組み直すことも可能である。図7.11と図7.12にそのような二つの方法を示した。どちらともGEやカンタス航空に為替リスクが残るので、実務上これらの方方が使われることはまれであろう（注10）。図7.11ではカンタス航空は豪ドルで年

図7.10 比較優位により取り組まれた通貨スワップ

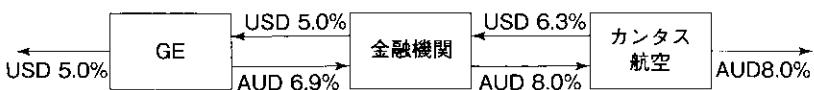
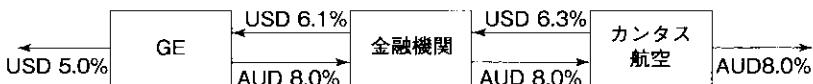


図7.11 別の通貨スワップ取引例（カンタス航空が為替リスクを負う場合）



図7.12 別の通貨スワップ取引例（GE が為替リスクを負う場合）



率1.1%の支払と米ドルで年率5.2%の支払を行うため、いくらかの為替リスクを負うことになる。図7.12ではGEは米ドルで年率1.1%の受取りと豪ドルで8%の支払を行うため、いくらかの為替リスクを負うことになる。

## 7.9 通貨スワップの評価

金利スワップと同様に、固定ー固定の通貨スワップは二つの債券の差、または外国為替フォワード契約のポートフォリオに分解できる。

### 債券価格からの評価

米ドル金利を受け取り、外国金利を支払うスワップの米ドル建ての価値を $V_{\text{swap}}$ とすると、

$$V_{\text{swap}} = B_D - S_0 B_F$$

となる。ここで $B_F$ はスワップの外国通貨キャッシュフローで定義される債券の外国通貨建ての価値、 $B_D$ はスワップの自国通貨キャッシュフローで定義される債券の価値、 $S_0$ は現在の直物為替レート（外国通貨1単位の米ドルでの価値）である。したがってスワップの価値は、二つの通貨でのLIBORレート、自国通貨における金利期間構造、および直物為替レートが与えられれば求めることができる。

(注10) 金融機関は為替リスクのヘッジに長けているので、金融機関が為替リスクをとるのが通常理にかなっている。

同様に、外国金利を受け取り、米ドル金利を支払うスワップの価値は、

$$V_{\text{swap}} = S_0 B_F - B_D$$

となる。

【例7.4】

LIBOR／スワップの金利期間構造が、日本と米国のはずれでもフラットであるとする。日本の金利は年率4%，米国の金利は年率9%（はずれも連続複利）である。ある金融機関が年1回日本円で年率5%の金利を受け取り、米ドルで年率8%の金利を支払う通貨スワップを取引していた。2通貨に対する元本はそれぞれ1,000万ドルと12億円である。スワップの残存期間は3年で、現在の為替レートを110円=1ドルとする。

表7.9に計算結果をまとめた。この例では、スワップに対応するドル建て債のキャッシュフローは2列目になる。ドルの割引率を9%としたときのキャッシュフローの現在価値を3列目に示した。スワップに対応する円建て債のキャッシュフローは4列目になる。円の割引率を4%としたときのキャッシュフローの現在価値を最右列に示した。

ドル建て債の価値 $B_D$ は964.39万ドルとなり、円建て債の価値は12億3,055万円となる。したがって、スワップのドル建ての価値は、

$$\frac{1,230.55}{110} - 9.6439 = 1.5430 \text{ (単位: 100万ドル)}$$

となる。

表7.9 債券の観点から行った通貨スワップの価値計算

(単位：100万)

| 時点 | ドル建て債のキャッシュフロー(ドル) | 現在価値(ドル) | 円建て債のキャッシュフロー(円) | 現在価値(円)  |
|----|--------------------|----------|------------------|----------|
| 1  | 0.8                | 0.7311   | 60               | 57.65    |
| 2  | 0.8                | 0.6682   | 60               | 55.39    |
| 3  | 0.8                | 0.6107   | 60               | 53.22    |
| 3  | 10.0               | 7.6338   | 1,200            | 1,064.30 |
| 合計 |                    | 9.6439   |                  | 1,230.55 |

### フォワード契約のポートフォリオとしての評価

固定ー固定通貨スワップにおける各金利交換は、外国為替フォワード契約である。5.7節で述べたように、外国為替フォワード契約の価値は、フォワード・レートが将来の為替レートとして実現すると仮定することによって求めることができる。為替フォワード・レート自体は、(5.9)式を用いて計算できる。

#### 【例7.5】

例7.4の状況を再び考察しよう。LIBOR／スワップの金利期間構造は日米とともにフラットで、日本の金利は年率4%，米国の金利は年率9%（いずれも連続複利）である。ある金融機関が年1回日本円で年率5%の金利を受け取り、米ドルで年率8%の金利を支払う通貨スワップを取引していた。2通貨に対する元本はそれぞれ1,000万ドルと12億円である。スワップの残存期間は3年、現在の為替レートを110円=1ドルとする。

表7.10に計算結果をまとめた。金融機関は毎年 $0.08 \times 1,000 = 80$ 万ドルを支払い、 $12,000 \times 0.05 = 6,000$ 万円を受け取る。加えて、3年後の満期にはドルの元本1,000万ドルを支払い、円の元本12億円を受け取る。現在の為替レートは1円当たり0.009091ドルで、 $r = 9\%$ 、 $r_f = 4\%$ であるから、(5.9)式より1年物フォワード・レートは、

$$0.009091e^{(0.09-0.04)\times 1} = 0.009557$$

となる。表7.10の2年物および3年物フォワード・レートも同様に求められる。スワップに対応するフォワード契約の価値は、フォワード・レートが将来の為替レートとして実現すると仮定することで求めることができる。1年物フォワード・レートが1年後の為替レートとして実現すれば、1年後の円のキャッシュフローは  $60,000,000 \times 0.009557 = 573,400$  ドルとなり、その時点でのネットのキャッシュフローは  $-800,000 + 573,400 = -226,600$  ドルとなる。その現在価値は、

$$-226,600e^{-0.09 \times 1} = -207,100 \text{ ドル}$$

である。これは、1年後のキャッシュフローの交換に対応するフォワード契約の価値である。他のフォワード契約の価値も同様に計算される。表7.10に示すように、フォワード契約の総価値は1,543,000ドルになる。これは例7.4で債券に分解して計算したスワップの価値と一致する。

表7.10 フォワード契約のポートフォリオとしての通貨スワップの価値計算

(単位：100万)

| 時点 | ドル・キャッシュフロー | 円・キャッシュフロー | 為替フォワード・レート | 円キャッシュフローのドル価値 | ネット・キャッシュフロー | 現在価値(ドル) |
|----|-------------|------------|-------------|----------------|--------------|----------|
| 1  | -0.8        | 60         | 0.009557    | 0.5734         | -0.2266      | -0.2071  |
| 2  | -0.8        | 60         | 0.010047    | 0.6028         | -0.1972      | -0.1647  |
| 3  | -0.8        | 60         | 0.010562    | 0.6337         | -0.1663      | -0.1269  |
| 3  | -10.0       | 1200       | 0.010562    | 12.6746        | +2.6746      | 2.0417   |
| 合計 |             |            |             |                |              | 1.5430   |

契約締結時点での通貨スワップの価値は、通常ゼロである。スワップ開始時の為替レートで換算して二つの元本額が完全に一致しているならば、期首の元本交換直後もスワップの価値はゼロである。しかし、金利スワップの場合と同じように、これはスワップを構成する個々のフォワード契約の価値がゼロになることを意味しているわけではない。2通貨の金利が大きく異なれ

ば、高金利通貨のペイヤーにとっては初めの頃のキャッシュフロー交換に対応するフォワード契約の価値は負、期末の元本交換に対応するフォワード契約の価値は正となる。低金利通貨のペイヤーにとっては、逆の状況になる。すなわち、初めの頃のキャッシュフロー交換は正の価値、期末の元本交換は負の価値をもつ。スワップ取引における信用リスクを評価する際には、これらのことことが重要になる。

## 7.10 信用リスク

スワップのような2企業間で行われる相対取引には、信用リスクが伴う。2企業との間で相殺するようなスワップ契約を結んだ金融機関について考えてみよう（図7.4、図7.5、または図7.7を参照）。両社がデフォルトしなければ、金融機関のポジションは完全にヘッジされている。一方の取引の価値の減少は、常に他方の価値の増加によって相殺される。しかし、一方の相手方が財務的困難に陥り、デフォルトする可能性もある。たとえこのような事態が発生しても、金融機関は他方の相手方との契約は継続しなくてはならない。

図7.4の取引開始後しばらく時間が経過して、金融機関からみたマイクロソフトとの取引の価値は正、インテルとの取引の価値は負になっていたとしよう。このときマイクロソフトがデフォルトにすれば、金融機関はこの取引のもつ正の価値全部を失うことになる。ポジションがヘッジされた状態を維持するためには、金融機関はマイクロソフトと同じポジションをとってくれる第三の相手方をみつける必要がある。第三の相手方にそのポジションを引き受けてもらうには、マイクロソフトとの取引のデフォルト直前の価値とほぼ等しい金額を金融機関はその第三の相手方に支払わなければならないだろう。

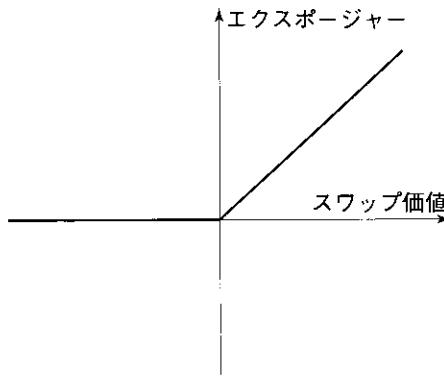
金融機関からみたスワップの価値が正のときにのみ、金融機関はスワップに対して信用リスクを負う。スワップの価値が負のときに相手方が財務的困難に陥った場合はどうなるのか。理論上はそのデフォルトにより負債がなく

なるので、金融機関は思いがけない利益を得ることになる。しかし、実際にはなんらかの方法でその相手方が第三者にその取引を売却するか資産整理が行われたりするなどにより、その取引の正の価値は放棄されない。したがって、金融機関にとっての最も現実的な仮定は次のようなものになる。相手方が倒産したとき、スワップ取引が正の価値をもつ場合には損失を被り、負の価値をもつ場合には何も影響は生じない。この様子を図7.13に図示する。

デフォルトによるスワップの潜在的損失額は、同じ元本額に対するローンの潜在的損失額よりもかなり小さい。これはスワップの価値がローンの価値に比べて非常に小さいからである。デフォルトによる通貨スワップの潜在的損失額は、金利スワップの潜在的損失額よりも大きい。その理由は、通貨スワップでは二つの異なる通貨の元本交換が契約終了時点に行われるため、通貨スワップのほうが金利スワップよりもデフォルト時における価値が大きくなりやすいからである。

いかなる契約においても、金融機関が抱える信用リスクと市場リスクとを区別することは重要である。上で述べたように、信用リスクは、金融機関からみた契約の価値が正のときに契約の相手方にデフォルトする可能性があることに起因している。市場リスクは、金利や為替レートなどの市場変数の変動により金融機関からみた契約の価値が負になってしまう可能性があることに起因している。市場リスクは相殺するような契約を取引することでヘッジ

図7.13 スワップにおける信用エクスポージャー



できるが、信用リスクのヘッジは容易ではない。

スワップ市場での一風変わった話をビジネス寸見7.2に紹介する。このコラムは英国の地方自治体であるハマースミス区とフラム区に関するもので、スワップを取引する銀行は市場リスクと信用リスクに加えて、法的リスクにもさらされうることを紹介したものである。

### ビジネス寸見7.2 ハマースミス区とフラム区の話

1987年から1989年にかけて、英國ロンドンのハマースミス区とフラム区は、想定元本で約60億英ポンドにのぼる600件もの金利スワップとその関連取引を行った。取引はヘッジ目的というより投機目的であった。ハマースミス区とフラム区の取引責任者である2人の職員は、リスクとその取引の仕組みについておおまかな理解しかもっていなかった。

1989年までに、英ポンド金利の変動により、両区はスワップ取引で数億ポンドの損失を被った。取引相手方の銀行にとっては、スワップの価値が数億ポンドになったことで信用リスクを懸念するようになった。銀行は金利リスクをヘッジするために、それらを相殺するようなスワップ取引を行っていた。もしハマースミス区とフラム区がデフォルトしたならば、銀行は相殺のために取引したスワップの契約履行義務を負うため、やはり莫大な損失を被ったであろう。

実際に起こったことはデフォルトとは少し異なるものだった。両区の監査人は、両区は取引を行う権限をもっていなかったので、取引の無効が宣言されるよう求め、裁判所もそれを認めた。この裁判は英國最高裁まで上告されて争われた。最終判決は、両区は取引権限を有していなかったものの、将来的にはリスク管理の目的での取引を行う権限はもつべきであるというものだった。いうまでもなく、裁判所によって契約の有効性がこのような形でひっくり返されたことに、銀行は激怒することになった。

## 7.11 その他のスワップ

本章では、LIBORと固定金利とを交換する金利スワップと、ある通貨の固定金利と別の通貨の固定金利とを交換する通貨スワップについて説明してきた。それ以外にも多くのスワップが取引されている。それらについては第23章、第29章、第32章で詳しく論じる。ここでは概略について紹介しよう。

### その他の標準的な金利スワップ

固定一変動の金利スワップでは、LIBORが最もよく参照される変動金利である。本章の例では、LIBORの期間（すなわち支払周期）は6カ月であったが、LIBORの期間が1カ月、3カ月、および12カ月のスワップもよく取引されている。また、変動サイドの期間と固定サイドの期間が一致している必要はない（実際、脚注3に述べたように、米国での標準的な金利スワップは3カ月ごとのLIBOR支払と半年ごとの固定金利支払を交換するものである）。LIBORは最もよく使われる変動金利であるが、コマーシャルペーパー（CP）金利が使われることもある。変動一変動の金利スワップが取引されることもある。たとえば、同じ元本に対する3カ月物CP金利+10ベーシス・ポイントと3カ月LIBORとを交換するスワップである（異なる変動金利の資産と負債をもつ企業は、この取引を用いてそのエクスポージャーをヘッジすることができる）。

スワップ契約の元本が取引相手方のニーズに合わせてスワップ期間中に変化するスワップもある。アモチ・スワップ（amortizing swap）は、あらかじめ定められた方法で元本が減額するスワップである（たとえば、元本がローンの減額スケジュールに合わせて決められている）。ステップ・アップ・スワップ（step-up swap）は、あらかじめ定められた方法で元本が増額するスワップである（たとえば、元本がローン契約に基づく引出しに合わせて決められている）。将来のある時点まで金利交換を開始しないディファード・スワップまたはフォワード・スワップ（forward swap）も時折取引されている。さらに、固定金利と変動金利に適用される元本額が異なるスワップも取引されて

いる。

コンスタント・マチュリティ・スワップ (constant maturity swap : CMS swap) は、LIBOR レートとスワップ・レートとを交換する取引である。たとえば、同じ元本に対して 6 カ月 LIBOR と 10 年スワップ・レートを 6 カ月ごとに 5 年間交換する取引である。コンスタント・マチュリティ・トレジャリー・スワップ (constant maturity Treasury swap : CMT swap) は、LIBOR レートのある特定の国債金利 (たとえば 10 年物国債金利) と交換する同様のスワップである。

コンパウンド・スワップ (compounding swap) は、あらかじめ定められたルールに基づいて、片サイドもしくは両サイドの金利がスワップの満期まで複利され、満期日でのみ支払が行われるスワップである。後払い LIBOR スワップ (LIBOR-in arrears swap) は、金利計算に使う金利が支払日における LIBOR で決まるスワップである (7.1 節で説明したように、標準的な取引では各支払日における LIBOR が次回支払日での適用金利となる)。アクルーアル・スワップ (accrual swap) は、参照する変動金利があるレンジ内に収まっている日においてのみスワップの片サイドの利子は付利される、というものである。

### その他の通貨スワップ

本章では、固定ー固定の通貨スワップを考察してきた。別のタイプとして、ある通貨の変動金利 (通常 LIBOR) と別の通貨の固定金利とを交換する固定ー変動の通貨スワップがある。これは固定ー変動の金利スワップと固定ー固定の通貨スワップの組合せであり、クロスカレンシー・金利スワップ (cross-currency interest rate swap) とも呼ばれる。さらに、ある通貨の変動金利と別の通貨の変動金利とを交換する変動ー変動の通貨スワップ (floating-for-floating currency swap) もある。

さらには、ある通貨で観測される金利が別の通貨の元本額に適用されるといったスワップもある。たとえば、米ドルの 3 カ月 LIBOR と英ポンドの 3 カ月 LIBOR を、それぞれ元本 1,000 万英ポンドに適用して得られる利子を

交換するスワップである。このタイプのスワップはディフ（アレンシャル）・スワップ (diff swap) またはクオント・スワップ (quanto swap) と呼ばれる。

### エクイティ・スワップ

エクイティ・スワップ (equity swap) は、株価指数の総リターン（配当と売買益）と固定金利または変動金利とを交換するスワップである。たとえば、同じ元本に対して連続する 6 カ月間の各期間における S&P500 の総リターンと LIBOR とを交換する取引である。エクイティ・スワップは、ポートフォリオ・マネジャーが固定金利または変動金利での運用を株価指数への投資に変えたり、その逆を行うのに利用されることもある。

### オプション

スワップ契約にオプションが内包されていることもある。たとえば、延長可能スワップ (extendable swap) では、一方の取引当事者が所定の期間を超えてスワップ期間を延長する権利をもっている。プッタブル・スワップ (puttable swap) では、一方の取引当事者がスワップを早期解約できる権利をもっている。さらに、スワップのオプション、すなわちスワップション (swaption) も取引されている。これは、あらかじめ決められた固定金利と変動金利とを交換するスワップを将来のある時点に開始する権利である。

### コモディティ・スワップ、ボラティリティ・スワップ、その他のエキゾチック商品

コモディティ・スワップ (commodity swap) は、ある商品に対する受渡価格が同じ複数の満期の一連のフォワード契約と本質的に同じである。ボラティリティ・スワップ (volatility swap) は、一連の期間に対して、各期間の終わりに一方の取引当事者があらかじめ定められたボラティリティを支払い、他方がその期間に実現したヒストリカル・ボラティリティを支払う取引である。支払額は、それぞれのボラティリティに同額の想定元本を乗じて計

算される。

スワップは金融エンジニアの想像力、エキゾチックな仕組みを求める企業の財務担当者、およびファンドマネジャーのニーズによって、いかなる形態にもなる。第32章では、プロクター・アンド・ギャンブルとバンカーズ・トラスト銀行との間で締結された有名な5/30スワップについて述べる。5/30スワップの金利交換額は、30日物コマーシャルペーパー金利、30年物米国長期国債価格、および5年物米国財務省証券イールドに複雑に依存している。

## 要約

二つの最も一般的なスワップは金利スワップと通貨スワップである。金利スワップは、ある一定の期間にわたって同じ想定元本に対する固定金利と変動金利とを2者間で交換する契約である。通貨スワップは、ある通貨の元本に対する金利と別通貨の元本に対する金利とを2者間で交換する契約である。

金利スワップではふつう元本交換は行われない。通貨スワップでは、通常スワップ期間の始めと終わりに元本交換が行われる。外貨金利の支払手はスワップ期間の開始時点に外貨建て元本を受け取り、自国通貨建て元本を支払う。スワップ期間の終了時点には、外貨建て元本を支払い、自国通貨建て元本を受け取る。

金利スワップは変動金利ローンを固定金利ローンに変える、あるいはその逆を行うのに用いることができる。同様に、金利スワップは変動金利での運用を固定金利での運用に変える、あるいはその逆を行うのに用いることができる。通貨スワップはある通貨建てローンを別通貨建てローンに変えるのに用いることができる。同様に、通貨スワップはある通貨建ての運用を別通貨建ての運用に変えるのに用いることができる。

金利スワップと通貨スワップの評価には二つの方法がある。一つはスワッ

プをある債券の買いポジションと別の債券の売りポジションに分解する方法である。もう一つはスワップをフォワード契約のポートフォリオと考える方法である。

金融機関は異なる取引相手方との間でポジションが相殺されるようなスワップ取引を行ったとき、信用リスクにさらされている。金融機関からみたスワップの価値が正になっている取引の相手方がデフォルトした場合でも、その金融機関はもう一つの取引相手方とのスワップ契約は継続しなければならないため、損失が発生する。

## 参考文献

- Baz, J., and M. Pascutti. "Alternative Swap Contracts Analysis and Pricing," *Journal of Derivatives*, (Winter 1996) : 7-21.
- Brown, K.C., and D.J. Smith. *Interest Rate and Currency Swaps : A Tutorial*. Association for Investment Management and Research, 1996.
- Cooper, I., and A. Mello. "The Default Risk in Interest Rate Swaps," *Journal of Finance*, 46, 2 (1991) : 597-620.
- Dattatreya, R.E., and K. Hotta, *Advanced Interest Rate and Currency Swaps : State-of-the-Art Products, Strategies, and Risk Management Applications*. Irwin, 1993.
- Flavell, R. *Swaps and Other Instruments*. Chichester : Wiley, 2002.
- Gupta, A., and M.G. Subrahmanyam. "An Empirical Examination of the Convexity Bias in the Pricing of Interest Rate Swaps," *Journal of Financial Economics*, 55, 2 (2000) : 239-79.
- Litzenberger, R.H. "Swaps: Plain and Fanciful," *Journal of Finance*, 47, 3 (1992) : 831-50.
- Minton, B.A. "An Empirical Examination of the Basic Valuation Models for Interest Rate Swaps," *Journal of Financial Economics*, 44, 2 (1997) : 251-77.
- Sun, T., S. Sundaresan, and C. Wang. "Interest Rate Swaps: An Empirical Investigation," *Journal of Financial Economics*, 34, 1 (1993) : 77-99.

Titman, S. "Interest Rate Swaps and Corporate Financing Choices," *Journal of Finance*, 47, 4 (1992) : 1503-16.

### 章末問題

- 7.1 A 社と B 社は元本2,000万ドルの5年ローン金利（年率）について、以下の呈示を受けている。

|     | 固定金利 | 変動金利       |
|-----|------|------------|
| A 社 | 5.0% | LIBOR+0.1% |
| B 社 | 6.4% | LIBOR+0.6% |

A 社は変動金利ローンを考えており、B 社は固定金利ローンを考えている。金融機関の仲介料が年率0.1%で、A 社と B 社がともに等しく利益を享受できるようなスワップ取引を考えよ。

- 7.2 X 社は固定金利で米ドルの調達を考えており、Y 社は固定金利で日本円の調達を考えている。それぞれの調達希望額は、現時点の為替レート換算ではほぼ同額である。両社に対して税効果調整後の金利が以下のように呈示されている。

|     | 円    | ドル    |
|-----|------|-------|
| X 社 | 5.0% | 9.6%  |
| Y 社 | 6.5% | 10.0% |

金融機関の仲介料が年率50ペース・ポイントとなるようなスワップ取引を考えよ。ただし、X 社と Y 社がともに等しく利益を享受し、為替リスクはすべて金融機関がとするものとする。

- 7.3 想定元本が1億ドル、残存期間10カ月の6カ月 LIBOR と年率7%（半年複利）の金利を交換する金利スワップがある。現在、6カ月 LIBOR と固定金利を交換するスワップ・レートのビッドとオ

ファーの平均はすべての満期に対して連続複利で年率 5 %であるとする。また、2 カ月前の 6 カ月 LIBOR は年率 4.6% だったとする。このとき、変動金利を支払う契約者からみたスワップの価値はいくらになるか。また、固定金利を支払う契約者からみたスワップの価値はいくらか。

- 7.4 スワップ・レートとは何かを説明せよ。スワップ・レートとパー・イールドの関係を述べよ。
- 7.5 元本 2,000 万英ポンドに対する 10% の金利と元本 3,000 万ドルに対する 6% の金利を年 1 回交換する残存期間 15 カ月の通貨スワップがある。現在、両通貨の金利期間構造はフラットであり、金利スワップ・レートをドルは 4%，英ポンドは 7% とする。各金利はすべて 1 年複利ベースである。為替レート（1 英ポンド当りのドル価）を 1.8500 としたときに、英ポンド固定金利支払サイドおよびドル固定金利支払サイドからみたこのスワップの現在価値をそれぞれ求めよ。
- 7.6 金融取引における信用リスクと市場リスクの違いについて説明せよ。
- 7.7 ある企業の財務担当者が、固定金利 5.2% という競争力のある水準で 5 年物ローンを締結したと話している。この財務担当者は、資金を 6 カ月 LIBOR + 150 bps で借り入れ、LIBOR を 3.7% の固定金利と交換することで 5.2% のローンを実現できたと説明している。さらに、変動金利市場での当社の比較優位性によりそれが可能となったとも話している。この説明で財務担当者が見落としている事項は何か。
- 7.8 金融機関は、互いに相殺するようなスワップ取引を行っても信用リスクにさらされている。その理由を述べよ。
- 7.9 X 社と Y 社は 500 万ドルの 10 年間の運用に対して、以下の利回りを呈示されている。

|     | 固定金利 | 変動金利  |
|-----|------|-------|
| X 社 | 8.0% | LIBOR |
| Y 社 | 8.8% | LIBOR |

X 社は固定金利での運用を、Y 社は変動金利での運用を考えている。金融機関の仲介料が年率0.2%で、X 社と Y 社がともに等しく利益を享受するようなスワップ取引を考えよ。

- 7.10** ある金融機関が X 社との間で、6 カ月ごとに年率10%の固定金利を受け取り、6 カ月 LIBOR を支払う、想定元本1,000万ドル、期間5 年の金利スワップ契約を締結した。6 回目の支払日（つまり 3 年目の終わり）に X 社がデフォルトし、そのときの金利がすべての満期に対して年率 8 %（半年複利ベース）だったとする。この金融機関の受ける損失はいくらになるか。ただし、3 年目の中間における 6 カ月 LIBOR は年率 9 %だったとする。
- 7.11** A 社と B 社は、それぞれ以下に示す金利（税効果調整後）の呈示を受けている。

|             | A            | B            |
|-------------|--------------|--------------|
| 米ドル（変動金利）   | LIBOR + 0.5% | LIBOR + 1.0% |
| カナダドル（固定金利） | 5.0%         | 6.5%         |

A 社は米ドル変動金利借入れを、B 社はカナダドル固定金利借入れを考えている。ある金融機関が50ペース・ポイントのスプレッドを抜いてスワップをアレンジしようとしている。A 社と B 社がともに等しく利益を享受するようにアレンジすると、それが支払う金利は実質いくらになるか。

- 7.12** ある金融機関は Y 社との間で、スイスフランで年率 3 %の金利を受け取り、米ドルで年率 8 %の金利を支払う、期間10年の通貨スワップを取引した。金利交換は1 年ごとに行われ、元本は700万ドルと 1,000万スイスフランである。Y 社が 6 年目の終わりに破産を宣言し、そのときの為替レートは 1 スイスフラン当り 0.80 ドルだったと

する。このとき金融機関のコストはいくらになるか。ただし、6年目の終わり時点での金利（1年複利）はすべての満期に対して、イスフランで年率3%，米ドルで年率8%であったとする。

- 7.13** 図7.10においてフォワード契約を用いて為替リスクをヘッジした場合、金融機関に残る平均スプレッドは40ペース・ポイントより大きくなるか、それとも小さくなるか。その理由についても説明せよ。
- 7.14** 「高い信用リスクをもつ企業は、市場から固定金利での資金調達が直接はできない。そのため、固定金利を支払い、変動金利を受け取る金利スワップを最も取引する傾向にある企業はそれらの企業である」。このことが正しいと仮定しよう。このとき、このことは金融機関のスワップ・ポートフォリオのリスクを増大させることになるか、あるいは減少させることになるか。金利が上昇すると企業の倒産確率は高くなると仮定して考察せよ。
- 7.15** 金利スワップのデフォルトによる期待損失のほうが、同じ元本のローンのデフォルトによる期待損失より小さいのはなぜか。
- 7.16** ある銀行で、資産と負債とがミスマッチであることがわかった。その銀行は変動金利預金で資金調達をし、固定金利ローンを行っているとする。このとき、金利リスクを相殺するにはどのようなスワップ取引を行えばよいか。
- 7.17** ある通貨の変動金利と別通貨の固定金利とを交換する通貨スワップの評価方法を説明せよ。
- 7.18** 1.5年までのLIBORゼロ・カーブを5%（連続複利）でフラット、満期2年および3年の半年払いのスワップ・レートをそれぞれ5.4%と5.6%とする。このとき、満期2.0年、2.5年、3.0年のLIBORゼロ・レートを推定せよ（2.5年スワップ・レートは2年スワップ・レートと3年スワップ・レートの平均値と仮定する）。

## 宿題

- 7.19** 1年物LIBORレートを10%とする。ある銀行が固定金利と12カ月LIBORを毎年交換するスワップを取引している。満期2年と3年のスワップ・レート（1年複利）をそれぞれ年率11%と12%とする。このとき2年と3年のLIBORゼロ・レートを推定せよ。
- 7.20** A社は英国の製造会社で、米ドル建ての資金調達を固定金利で行いたいと考えている。B社は米国の多国籍企業で、英ポンド建ての資金調達を固定金利で行いたいと考えている。両社は、それぞれ以下に示す金利（税効果調整後）の表示を受けている。

|    | 英ポンド  | 米ドル  |
|----|-------|------|
| A社 | 11.0% | 7.0% |
| B社 | 10.6% | 6.2% |

銀行の仲介料が10ペース・ポイント、両社の利益が15ペース・ポイントとなるようなスワップ取引を考えよ。

- 7.21** ある金融機関が、3ヶ月ごとに10%の固定金利を支払い、3ヶ月LIBORを受け取る想定元本1億ドルのスワップ取引を行っている。このスワップの残存期間は14ヶ月である。固定金利と3ヶ月LIBORを交換するスワップ・レートのビッドとオファーの平均値は、現在すべての満期に対して12%とする。1ヶ月前の3ヶ月LIBORが年率11.8%だったとき、このスワップの現在価値を求めよ。ただし、金利はすべて四半期複利で与えられているとする。
- 7.22** 米国とオーストラリアの金利期間構造はフラットで、米ドル金利は年率7%，豪ドル金利は年率9%とする。現在の為替レートは1豪ドル当り0.62ドルである。ある金融機関が、元本2,000万豪ドルに対して年率8%の金利を支払い、元本1,200万米ドルに対して年率4%の金利を受け取るスワップ取引を行っている。受払いは年1回で、ちょうど受払いが行われたばかりだとする。スワップの残存期間が

2年のとき、金融機関からみたこのスワップの現在価値を求めよ。  
ただし、すべての金利は連続複利とする。

- 7.23 X社は英国を基盤とする企業であり、5,000万ドルの5年固定金利借入れを米国で行いたいと考えている。この企業は米国での知名度が低いため、この資金調達は無理である。しかし、英ポンドであれば年率12%で5年固定金利借入れが可能である。一方、米国を基盤とするY社が5,000万ドル相当の5年固定金利借入れを英ポンドで行いたいと考えている。この企業は英ポンドでの借入れは困難であるが、米ドルであれば年率10.5%で借入れが可能である。米国と英国の5年物国債の現時点でのイールドがそれぞれ年率9.5%と10.5%であるとき、金融機関の仲介料を年率0.5%とする適切な通貨スワップを提案せよ。

## 第8章

# オプション市場の仕組み

オプションについては第1章で紹介した。本章ではオプション市場の仕組みや用語、取引方法、証拠金の設定などについての説明を行う。オプションを使った取引戦略、オプションの価格決定、およびオプション・ポートフォリオのヘッジ方法については後の章で考察する。本章では主に株券オプションについて説明し、通貨オプション、株価指数オプション、および先物オプションについては簡単に触れる程度にとどめる。これらオプションの詳細については第15章と第16章で扱う。

オプションは、フォワード契約や先物契約とは基本的に異なる。オプションはその保有者に何かを行う権利を与えるもので、保有者はその権利を行使しなくてもよい。それに対し、フォワード契約や先物契約では、契約の両当事者は何かを行う義務を負うことになる。フォワード契約や先物契約の締結には（証拠金を除き）コストはかかるないが、オプションの購入にはオプ

ション料を最初に支払う必要がある。

## 8.1 オプションの種類

第1章で述べたように、オプションには二つの基本的なタイプがある。一つはコール・オプション (call option) で、ある定められた日にある定められた価格である資産を購入する権利である。もう一つはプット・オプション (put option) で、ある定められた日にある定められた価格である資産を売却する権利である。このある定められた日は満期日 (expiration date または maturity date) と呼ばれ、ある定められた価格は行使価格 (exercise price または strike price) と呼ばれている。

オプションには、アメリカンとヨーロピアンがある。この違いは地理的な場所とは関係ない。アメリカン・オプション (American option) は満期日までの間いつでも権利行使が可能で、ヨーロピアン・オプション (European option) は満期日においてのみ権利行使が可能である。上場オプションのほとんどがアメリカン・オプションである。しかし、一般的にヨーロピアン・オプションのほうがアメリカン・オプションより解析しやすいため、アメリカン・オプションの特性は同条件のヨーロピアン・オプションから類推されることも多い。

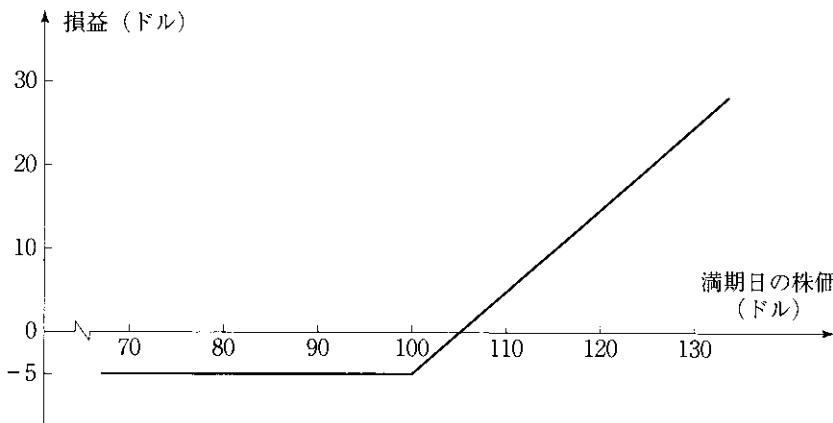
### コール・オプション

ある投資家が、ある株式を100株購入する行使価格100ドルのヨーロピアン・コール・オプションを買い付ける場合を考えてみよう。現在の株価を98ドル、オプションの満期日を4カ月後、1株購入するオプションの価格を5ドルとする。このとき初期投資額は500ドルになる。このオプションはヨーロピアンなので、投資家は満期日においてのみ権利行使が可能である。満期日における株価が100ドル未満ならば、投資家は明らかに権利行使をしないだろう（市場価値が100ドル未満の株を100ドルで購入することには何の意味もない）。この場合には、投資家は500ドルの初期投資額をすべて失うことにな

る。満期日における株価が100ドルを上回っているならば、このオプションは行使されるだろう。たとえば株価が115ドルになったとしよう。オプションを権利行使すると投資家は1株当たり100ドルで100株を買うことができ、それらを直ちに市場で売却すれば、取引コストを無視すると1株当たり15ドル、すなわち1,500ドルの利益が得られる。オプションの初期コストを考慮すると、差引き1,000ドルの利益となる。

図8.1は、1株を購入するオプションのネット損益が満期日の株価に対して変化する様子を図示したものである。投資家がオプションを行使した場合でも、全体としては損失を被ることがある。このことを理解しておくことは大切である。たとえば、オプションの満期日に株価が102ドルであったとしよう。投資家はオプションを行使して $100 \times (102 - 100) = 200$ ドルの利益を得るが、オプションの初期コストを考慮すると、全体としては300ドルの損失になる。このような状況では投資家はオプションを行使すべきではないと主張したくなるかもしれない。しかし、もし行使しなかったら損失は全部で500ドルになり、オプションを行使した場合の損失300ドルより悪い結果になる。一般的に、満期時に株価が行使価格を上回っている場合にはコール・オプションは常に行使すべきである。

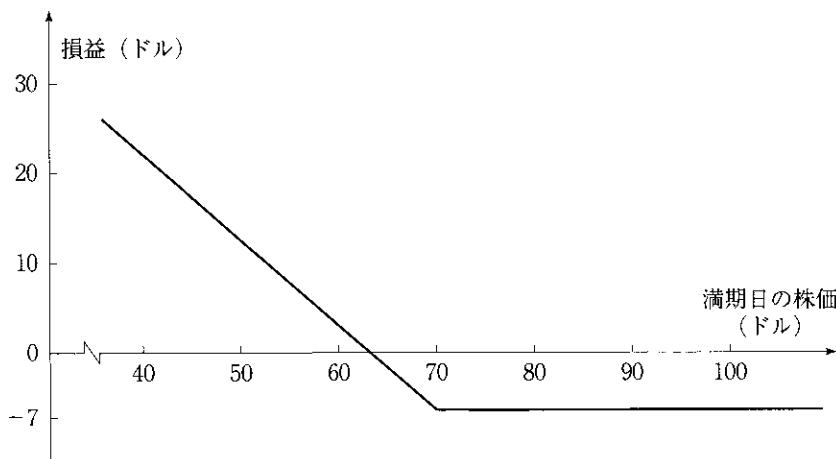
図8.1 ある株式のヨーロピアン・コール・オプション買いの損益  
オプション価格=5ドル、行使価格=100ドル



## プット・オプション

コール・オプションの買手は株価上昇を期待しているのに対し、プット・オプションの買手は株価下落を期待している。行使価格70ドルである株式を売却するヨーロピアン・プット・オプションを買い付けた投資家を考えてみよう。現在の株価を65ドル、オプションの満期日を3カ月後、1株を売却するオプションの価格を7ドルとする。このとき初期投資額は700ドルになる。このオプションはヨーロピアンなので、満期日に株価が70ドルを下回った場合にのみ権利行使される。満期日の株価が55ドルの場合を考えてみよう。100株を1株当たり55ドルで買えば、プット・オプションの契約に基づいてその株を70ドルで売却できるので、投資家は1株当たり15ドル、すなわち1,500ドルの利益を得られる（ここでも取引コストは無視した）。オプションの初期コスト700ドルを考慮すると、投資家の利益は差引き800ドルになる。投資家が利益を得られる保証はない。もし満期日の株価が70ドル以上ならばこのプット・オプションには価値がなく、投資家は700ドルを失うことになる。図8.2は、1株を売却するオプションのネット損益が満期日の株価に対して変化する様子を図示したものである。

図8.2 ある株式のヨーロピアン・プット・オプション買いの損益  
オプション価格=7ドル、行使価格=70ドル



## 期限前行使

すでに述べたように、上場株券オプションは一般的にヨーロピアンではなくアメリカンである。すなわち、先の例で投資家は満期日を待って権利行使を行う必要はない。後で説明するように、アメリカン・オプションは期限前に権利行使したほうが最適となる場合がある。

## 8.2 オプションのポジション

すべてのオプション契約には当事者が2人いる。1人は買いポジションをとる（つまりオプションを買い付ける）投資家であり、もう1人は売りポジションをとる（つまりオプションを売り付けるないし発行（write）する）投資家である。オプションの売手ははじめに現金を受け取るが、後で損失を被る可能性がある。オプションの売手の損益はオプションの買手の損益の逆になる。図8.3と図8.4は、図8.1と図8.2で考えたオプションについて、売手からみた損益が満期日の株価に対して変化する様子を図示したものである。

オプションのポジションには四つのタイプがある。

### 1. コール・オプションの買いポジション

図8.3 ある株式のヨーロピアン・コール・オプション売りの損益  
オプション価格 = 5ドル、行使価格 = 100ドル

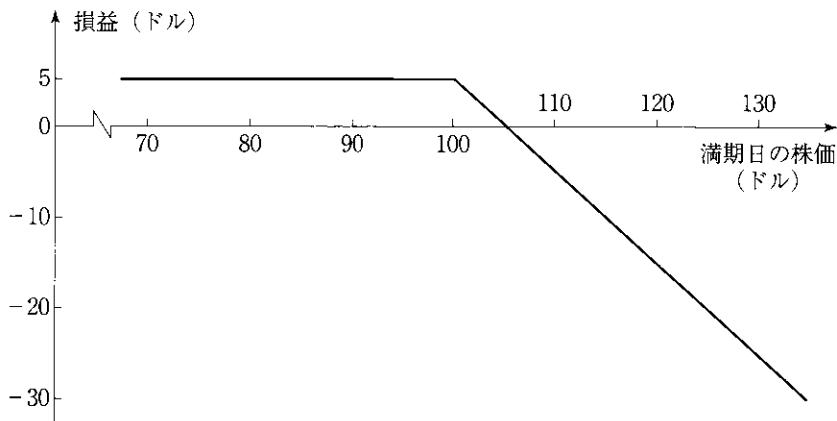
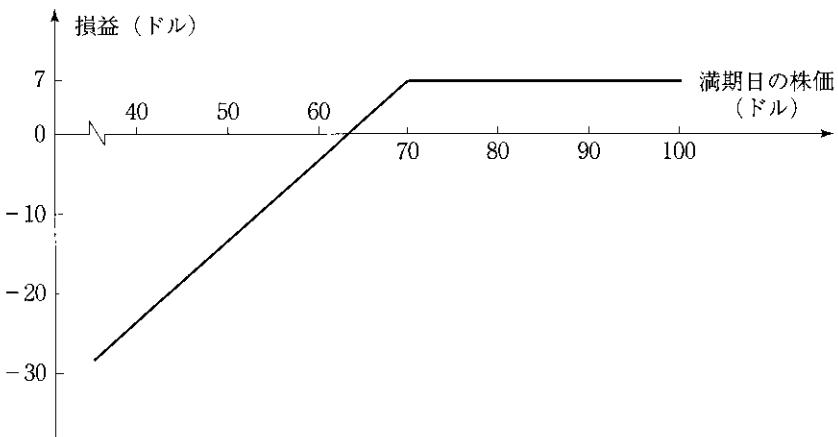


図8.4 ある株式のヨーロピアン・プット・オプション売りの損益  
オプション価格 = 7 ドル、行使価格 = 70 ドル



2. プット・オプションの買いポジション
3. コール・オプションの売りポジション
4. プット・オプションの売りポジション

ヨーロピアン・オプションのポジションは、オプションの買手からみたペイオフで考えるとわかりやすい。オプションの初期コストは以下の計算には含めないことにする。行使価格を  $K$ 、満期日における原資産の価格を  $S_T$  とすると、ヨーロピアン・コール・オプションの買いポジションのペイオフは、

$$\max(S_T - K, 0)$$

である。これは、オプションが  $S_T > K$  のとき行使され、 $S_T \leq K$  のときは行使されないことを反映したものである。ヨーロピアン・コール・オプションの売りポジションのペイオフは、

$$-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)$$

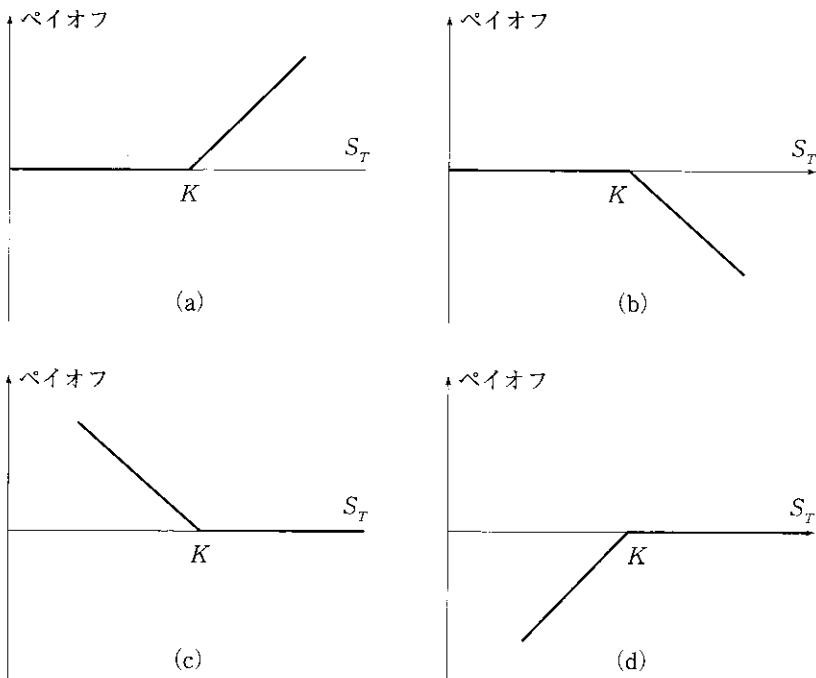
となる。ヨーロピアン・プット・オプションの買いポジションのペイオフは、

$$\max(K - S_T, 0)$$

で、ヨーロピアン・プット・オプションの売りポジションのペイオフは、

図8.5 ヨーロピアン・オプションのポジションのペイオフ

(a)コールの買い, (b)コールの売り, (c)プットの買い, (d)プットの売り  
 $K$ =行使価格;  $S_T$ =満期における資産価格



$$-\max(K - S_T, 0) = \min(S_T - K, 0)$$

となる。図8.5にこれらのペイオフをグラフで示す。

### 8.3 オプションの原資産

本節では、株式、通貨、株価指数、および先物契約を原資産とするオプションについて簡単にみておこう。

#### 株券オプション

株券オプションのほとんどの取引は、取引所で行われている。米国的主要な取引所は、シカゴ・オプション取引所 (CBOE: [www.cboe.com](http://www.cboe.com))、フィラ

デルフィア証券取引所 (PHLX : www.phlx.com), アメリカン証券取引所 (AMEX : www.amex.com), 国際証券取引所 (ISE : www.iseoptions.com), およびボストン・オプション取引所 (BOX : www.bostonoptions.com) である。1,000銘柄以上の現物株を対象にした株券オプションが取引されている。株券オプション 1 単位は100株をある行使価格で購入または売却する権利である。株券そのものが通常100株単位で取引されているので、利便性を考慮して取引単位はこのように決められている。

### 通貨オプション

現在、通貨オプションはほとんどが店頭で取引されているが、いくらかは取引所で取引されている。通貨オプションを上場している米国的主要な取引所は、フィラデルフィア証券取引所である。そこでは、さまざまな通貨を対象としたヨーロピアン・オプションとアメリカン・オプションが取引されている。取引単位は通貨によって異なる。たとえば、英ポンドの場合には31,250ポンドを購入または売却する権利、日本円の場合には625万円を購入または売却する権利となっている。通貨オプションについては、第15章で詳しく論じる。

### 株価指数オプション

世界中でさまざまな株価指数オプションが店頭市場および取引所で取引されている。米国で最もよく取引されている上場株価指数オプションは、S&P500指数 (SPX), S&P100指数 (OEX), Nasdaq100指数 (NDX), およびダウ平均指数 (DJX) に対するオプションである。これらの株価指数オプションはすべて CBOE で取引されている。そのほとんどはヨーロピアンである。S&P100オプション (OEX) は例外で、アメリカンである。通常、取引単位は指数の100倍を行使価格で購入または売却する権利である。決済は指数を構成しているポートフォリオの現渡しではなく、常に現金で行われる。たとえば、行使価格980の S&P100コール・オプション 1 単位を考えてみよう。もし指数の値が992のときにこのコール・オプションが権利行使さ

されば、このオプションの売手は買手に対して  $(992 - 980) \times 100 = 1,200$  ドルを支払うことになる。この現金の支払は、行使通知が行われた日の指数の終値に基づいて行われる（そのため当然のことながら、行使通知はその日の終値を見極めてから行われるのが通常である）。株価指數オプションについては第14章でさらに議論する。

### 先物オプション

先物契約が上場されている場合には、それを原資産とするオプションも取引されていることが多い。先物オプションは、先物契約の受渡期間の直前に満期を迎えるのが通常である。コール・オプションを権利行使すると、買手は売手から原資産の先物契約の買いポジションおよび先物価格の行使価格に対する超過額を現金で受け取ることになる。プット・オプションを権利行使すると、買手は原資産の先物契約の売りポジションおよび行使価格の先物価格に対する超過額を現金で受け取ることになる。先物オプション契約については第16章でさらに議論する。

## 8.4 株券オプションの仕組み

本章の残りでは、株券オプションに焦点を当てて説明を行う。前述したように、米国の上場株券オプションはアメリカン・オプションで、その取引単位は100株の対象株券を購入または売却できる権利である。満期日や行使価格、配当落ち日の対応、投資家の保有制限などの取引の詳細は取引所によって決められている。

### 満期日

株券オプションは満期日が属する月で参照される。すなわち、IBM の1ヶ月限コールとは、1月に満期を迎える IBM のコール・オプションである。正確な満期日は、満期月の第3金曜日の翌土曜日である。オプションの取引最終日は満期月の第3金曜日で、オプションの買手は通常その金曜日の中部

時間午後4時30分までに、プローカーに対してオプション行使の指示をしなければならない。さらに、翌日の午後10時59分までに、プローカーは取引所に権利行使を伝える事務手続を完了しなければならない。

株券オプションには、1月サイクルのもの、2月サイクルのもの、3月サイクルのものがある。1月サイクルに含まれる月は1月、4月、7月、10月である。2月サイクルは2月、5月、8月、11月からなり、3月サイクルは3月、6月、9月、12月からなる。当月の満期日が未到来であれば、当月、翌月、およびサイクルに含まれるそれに続く二つの月に満期を迎えるオプションが取引される。当月の満期日が過ぎていれば、翌月、翌々月、およびサイクルに含まれるそれに続く二つの月に満期を迎えるオプションが取引される。たとえばIBMは1月サイクルで、1月の初めには1月限、2月限、4月限、7月限のオプションが取引され、1月の終わりには、2月限、3月限、4月限、7月限のオプションが取引され、さらに5月の初めには5月限、6月限、7月限、10月限のオプションが取引される、等々である。一つの限月のオプションが満期を迎えると、別の限月のオプション取引が開始される。いわゆるLEAPS (long-term equity anticipation securities)として知られる長期オプションも、米国の約500銘柄の株券に対して取引されている。LEAPSの満期は39カ月後まで、満期月は常に1月となっている。

### 行使価格

通常、取引所はオプションの行使価格を2.50ドル、5ドル、または10ドル間隔で設定している。一般的に、株価が5ドルから25ドルの場合は2.5ドル間隔で、株価が25ドルから200ドルの場合は5ドル間隔で、株価が200ドル以上の場合は10ドル間隔で行使価格は設定されている。後で簡単に説明するように、株式分割や株式配当が行われる場合には、標準的でない行使価格が設定されることもある。

新しい満期日のオプション取引が開始されるときは、通常、その時点での株価に最も近い二つないし三つの行使価格が取引所によって選定される。その後株価が最高行使価格と最低行使価格の間より外に動くと、新しい行使価

格が設定される。これらのルールを簡単な例で説明しよう。10月限オプションの取引開始時点における株価を84ドルとする。おそらく最初は行使価格が80ドル, 85ドル, および90ドルのコール・オプションとプット・オプションが取引されることになる。その後は、株価が90ドルを上回ると95ドルの行使価格が追加設定され、株価が80ドルを下回ると75ドルの行使価格が追加設定されるといった具合である。

## 用語

一つの銘柄に対して、そのときどきで多くの異なる株券オプションが取引されている。たとえば、四つの満期日と五つの行使価格のオプションが取引されている株式について考えてみよう。コールとプットがすべての満期日とすべての行使価格に対して取引されているならば、全部で40種類のオプションが取引されていることになる。同じタイプ（すなわち、コールまたはプット）のオプションは、オプション・クラス (option class) と呼ばれる。たとえばIBM コールは一つのクラスであり、IBM プットも別の一つのクラスである。オプション・シリーズ (option series) とは、与えられたクラスのオプションで同一の満期日と行使価格をもつもの全体である。言い換れば、オプション・シリーズとは取引されている個々の契約のことである。たとえば、IBM 10月限70コールは一つのオプション・シリーズである。

オプションに対して、イン・ザ・マネー (in the money), アット・ザ・マネー (at the money), あるいはアウト・オブ・ザ・マネー (out of the money) といういい方がある。 $S$  を株価,  $K$  を行使価格とするとき、コール・オプションは  $S > K$  のときがイン・ザ・マネー,  $S = K$  のときがアット・ザ・マネー,  $S < K$  のときがアウト・オブ・ザ・マネーである。プット・オプションは  $S < K$  のときがイン・ザ・マネー,  $S = K$  のときがアット・ザ・マネー,  $S > K$  のときがアウト・オブ・ザ・マネーである。明らかにオプションはイン・ザ・マネーの場合にのみ行使される。取引コストがなければ、満期日までに行使されていないイン・ザ・マネーのオプションは満期日には必ず行使されるはずである。

オプションの本源的価値 (intrinsic value) は、即座に行使した場合にオプションがもつ価値とゼロのうち大きいほうとして定義される。したがって、コール・オプションの本源的価値は  $\max(S - K, 0)$  となる。ブット・オプションの場合は  $\max(K - S, 0)$  が本源的価値となる。イン・ザ・マネーのアメリカン・オプションは即座に行使すれば本源的価値を実現できるので、その価値は本源的価値以上でなければならない。イン・ザ・マネーのアメリカン・オプションは、即座に行使しないほうが最適な場合が多い。その場合は、オプションは時間価値 (time value) をもつといわれる。オプションの価値は本源的価値と時間価値の和からなると考えることができる。

### フレックス・オプション (FLEX Option)

CBOE では、株式と株価指数に対するフレックス・オプション（または、単に flexible）が取引されている。これは取引所の立会所 (floor) で、トレーダーが標準物とは異なる条件を交渉して決めるオプション取引である。行使価格や満期日が取引所の通常設定しているものと異なる条件であったり、アメリカンではなくヨーロピアンであったりする。フレックス・オプションは、店頭市場からオプション取引を呼び戻そうとする取引所の試みである。取引所はフレックス・オプションの最小取引単位 (たとえば、100単位) を設定している。

### 配当と株式分割

初期の店頭オプション取引では、配当による調整が行われていた。ある会社が現金配当を行う場合、その会社の株券オプションの行使価格は配当落ち日に配当額だけ引き下げられていた。上場オプションでは、現金配当に対する調整はふつう行われていない。言い換えると、現金配当が行われてもオプションの条件に関する調整は行われない。大口の現金配当が行われる場合には例外的な対応がなされることもある（ビジネス寸見8.1を参照）。

上場オプションでは、株式分割 (stock split) に対する調整は行われる。株式分割とは発行ずみの株式をいくつかに分割し、株式数を増やすことであ

## ビジネス寸見8.1 グッチ・グループの大口配当

大口の現金配当（株価の10%以上が典型例）が行われる際には、CBOEのオプション清算機関（OCC: Options Clearing Corporation）は上場オプションの条件を調整するか否かを決定できる。

2003年5月28日、グッチ・グループ NV (GUC) は1株当たり13.50ユーロ（約15.88ドル）の現金配当を発表した。この現金配当は、2003年7月16日のGUCの年次株主総会にて承認された。配当額は発表時点の株価の約16%に相当するものであった。このときは、OCC委員会はオプションの条件を調整する決定をした。その結果、権利行使したコール・オプションの保有者は、行使価格の100倍を支払って、100株に加えて1,588ドルの現金を受け取った。権利行使したプット・オプションの保有者は、行使価格の100倍を受け取り、100株に加えて1,588ドルの現金を支払った。この調整は、行使価格を15.88ドルだけ下げるのと同じ効果があった。

大口配当に対する調整は必ず行われるわけではない。たとえば、1998年3月10日にダイムラー・ベンツが株価の約12%に相当する配当を発表して市場を驚かせた際には、ドイツ先物取引所（Deutsche Terminbörsen）は上場オプションの条件を調整しない決定を行った。

る。たとえば、1対3の株式分割では発行済みの株式1株との交換で新株3株が発行される。株式分割は会社の資産や収益力になんら変化をもたらさないので、株主価値にもなんら影響がないと考えるのが自然である。したがって、その他の条件がすべて同じならば、1対3株式分割は株価を分割前の3分の1に引き下げるはずである。一般に、 $m$ 対 $n$ の株式分割は株価を分割前の $m/n$ に引き下げる。オプション契約の条件は、株式分割による予想される株価の変化を反映するように調整される。つまり、 $m$ 対 $n$ 株式分割があると、行使価格は分割前の $m/n$ に引き下げられ、1単位の対象株式数は

分割前の  $n/m$  倍に増える。株価が予想どおり下落すれば、オプションの売手と買手のポジションはともに分割前となんら変わりはない。

【例8.1】

ある会社の株式100株を1株当たり30ドルで購入できるコール・オプションについて考える。その会社が1対2の株式分割を行うとしよう。その場合、オプション契約の条件は200株を1株当たり15ドルで購入できる権利に変更される。

株券オプションでは株式配当に対する調整も行われる。株式配当とは、新株を発行して既存株主に付与することである。たとえば20%の株式配当では、株主に保有している5株ごとに新株1株が付与される。株式配当も株式分割と同様で、会社の資産や収益力になんら影響を及ぼさないから、株価は株式配当によって下落するはずである。20%の株式配当は、5対6の株式分割と本質的に同じである。したがって、他の条件が同一であれば、株価は配当前の価格の6分の5に下落することになる。そのため、オプション契約の条件は株式分割の場合と同様に、株式配当による株価の下落を反映するよう調整される。

【例8.2】

ある企業の株式100株を1株当たり15ドルで売却できるプット・オプションについて考える。その企業が25%の株式配当を発表したとしよう。これは4対5の株式分割と同等である。したがって、オプション契約の条件は125株を1株当たり12ドルで売却できる権利に変更される。

株主割当発行に対しても調整が行われる。一般的な調整方法は、新株引受権の理論価格を計算し、その額だけ行使価格を引き下げるというものである。

### 建玉制限と行使制限

CBOEは、しばしばオプション取引に対して建玉制限(position limit)を

設ける。これは、各投資家が市場の一方向に対して保有できるオプション契約の最大数を定めるものである。この目的に対しては、コールの買いとプットの売りは市場に対して同一方向とみなされる。また、コールの売りとプットの買いも市場に対して同一方向とみなされる。行使制限 (exercise limit) は、通常、建玉制限に等しくなっている。これは5連続営業日の間に各個人（あるいは行動をともにしている投資家集団）が行使することのできるオプション契約の最大数を定めるものである。たとえば、流動性の高い大型株に対するオプションの建玉制限は250,000単位である。中小型株に対しては、200,000, 75,000, 50,000, または25,000単位となっている。

建玉制限と行使制限は、市場が過度に個人投資家や投資家集団の投資行動の影響を受けないようにする意図で設けられている。しかし、これらの制限が本当に必要かという点については議論の余地がある。

## 8.5 トレーディング

取引所は伝統的に個々人が一堂に会してオプションを取引するための大きな収容スペースを確保する必要があった。しかし、最近それは変化している。多くのデリバティブ取引所は完全な電子取引市場で、トレーダーが物理的に集まる必要はない。ISE ([www.iseoptions.com](http://www.iseoptions.com)) は2000年5月に米国における最初の完全に電子化された株券オプション市場を創設した。また、CBOE はフロアでの立会い取引と併行して、電子取引システムを稼働させている。

### マーケット・メーカー

ほとんどのオプション取引所は、取引が容易に行われるようマーケット・メーカーを使用している。あるオプションのマーケット・メーカーとは、そのオプションのビッド (bid) とオファー (offer) の両方を、求めに応じていつでも呈示する者をいう。ビッドとはマーケット・メーカーが購入に応じる価格、オファーまたはアスク (ask) とは、マーケット・

メーカーが売却に応じる価格である。ビッドとオファーを呈示する際に、マーケット・メーカーは値段を聞いてきたトレーダーがオプションを買いたいのか売りたいのかを知らない。オファーはビッドよりも常に高く、オファーがビッドを上回る金額をビッドーオファー・スプレッドと呼ぶ。取引所はこのビッドーオファー・スプレッドに対して上限を設けている。たとえば、価格が0.50ドル未満のオプションに対しては上限は0.25ドル、価格が0.50ドルから10ドルの間のオプションに対しては0.50ドル、価格が10ドルから20ドルの間のオプションに対しては0.75ドル、価格が20ドル以上のオプションに対しては1ドルとなっている。

このようなマーケット・メーカーの存在によって、売買注文のある価格では遅滞なく約定させることが可能となる。したがって、マーケット・メーカーは市場に流動性を供給する役割を果たしている。マーケット・メーカー自身はビッドーオファー・スプレッドから利益をあげている。彼らは第17章で論じる手法を用いてリスクヘッジを行っている。

### 手仕舞注文 (Offsetting Order)

オプションを買い付けた投資家は、同じオプションを転売する注文を出すことにより、ポジションを手仕舞うことができる。同様にオプションを売り付けた投資家は、同じオプションを買い戻す注文を出すことによって、ポジションを手仕舞うことができる（この点については、オプション市場は先物市場と同様である）。オプション約定時に両方の投資家が既存ポジションを手仕舞わなければ、建玉は1単位増加する。一方の投資家が既存ポジションを手仕舞い、他方が手仕舞わなければ、建玉は同数のままである。両方の投資家が既存ポジションを手仕舞えば、建玉は1単位減少する。

## 8.6 委託手数料 (Commission)

ブローカーに出されるオプション取引の注文の種類は、先物取引の注文と同様である（2.7節を参照）。成行注文は即座に執行され、指値注文は売買し

たい価格を指定する注文、等々である。

個人投資家に対する委託手数料はブローカーによってまったく異なる。ディスカウント・ブローカー (discount broker) の委託手数料は、一般的にフルサービス・ブローカー (full-service broker) の手数料よりも安い。多くの場合、実際に請求される手数料は固定部分と取引金額に比例した部分からなる。表8.1にディスカウント・ブローカーの手数料一覧表の例を示す。この例では、オプション価格が3ドルのときに8単位買うと、 $20 + (0.02 \times 2,400) = 68$  ドルの委託手数料がかかることになる。

オプション・ポジションを転売・買戻しによって手仕舞う場合にも、委託手数料は支払わなければならない。オプション行使する場合は、原資産の株券の売買注文を出したときと同じ委託手数料を支払わなければならない。この株式委託手数料率は株価の1%から2%というのが一般的である。

株価が49ドルのとき、行使価格が50ドルのコール・オプションを1単位買う投資家について考えてみる。オプション価格が4.50ドルとすると、オプション契約自体にかかる費用は450ドルである。表8.1の手数料表を使うと、1単位のオプションの売買にかかる委託手数料は常に30ドルである（最初の1単位に対する最大・最小手数料はともに30ドルである）。その後株価が上昇し、60ドルとなったときにオプション行使したとする。ここで株式委託手数料率を1.5%とすると、オプション行使時にかかる委託手数料は、

$$0.015 \times 60 \times 100 = 90 \text{ ドル}$$

となる。したがって、総委託手数料は120ドルとなり、投資家の総収益は、

表8.1 ディスカウント・ブローカーの委託手数料表の例

| 取引額（ドル）      | 委託手数料*           |
|--------------|------------------|
| <2,500       | 20ドル+ドル全額の2%     |
| 2,500~10,000 | 45ドル+ドル全額の1%     |
| >10,000      | 120ドル+ドル全額の0.25% |

\* 委託手数料の上限は、最初の5単位までは1単位当たり30ドル、それ以上は1単位当たり20ドルである。委託手数料の下限は最初の1単位は30ドル、それ以上は1単位当たり2ドルである。

$$1,000 - 450 - 120 = 430 \text{ ドル}$$

となる。もし投資家がオプション行使せずに10ドルでこのオプションを転売したとすると、委託手数料を60ドルだけ節約することができる（この例では、オプション売るときに支払う委託手数料は30ドルである）。一般的にこのような委託手数料体系のもとでは、個人投資家はオプション行使するよりもオプションを転売するほうを選択するようになる。

オプション取引（あるいは株取引）の隠れたコストとして、マーケット・メーカーのビッドーオファー・スプレッドがある。先の例で、オプション購入時のビッド価格が4.00ドル、オファー価格が4.50ドルであったとする。この場合、オプションの「公正 (fair) な」価格はビッド価格とオファー価格の中間、すなわち4.25ドルであると考えるのが合理的である。したがって、マーケット・メーカー・システムでは、公正価格と実際に支払われる価格との差額が買手と売手にかかる費用と考えることができる。この例でいえば、1オプション当たり0.25ドル、すなわち1単位当たり25ドルということになる。

## 8.7 証拠金 (Margin)

米国で株式を購入するときには、投資家は株価の50%までプローカーから購入資金を借り入れができる。これは信用買い (buying on margin) として知られている。株価が下落して借入額が株価の50%をかなり上回った状況になると、プローカーが投資家に現金の追加差入れを要求する、いわゆる追い証 (margin call) が発生する。追い証に応じられない場合は、プローカーはその株式を売却する。

9カ月より満期の短いコールやプット・オプションを買う場合には、オプション価格は全額支払わなければならない。オプション取引はそれ自体にすでに相当なレバレッジがかかっており、オプションの信用買いはこのレバレッジを許容できないレベルに高めるので、オプションの信用買いは認められていない。9カ月より満期の長いオプションについては、オプション価値の25%までの借入れによる信用買いが認められている。

オプションの売手は証拠金を維持しなければならない。これは、オプションが行使されたときにその投資家が不履行を起こさないように、トレーダーのブローカーと取引所が要求するものである。証拠金の必要額はトレーダーのポジションに応じて決められている。

### オプションを単体で売る場合

単体オプション (naked option) とは、相殺するような原資産株式のポジションが組まれていないオプションのことである。単体コール・オプションの売付けに対しては、次の二つの計算結果のうち大きいほうが CBOE から当初証拠金として要求される。

1. オプションの売却価格に原資産の株価の20%を加えた額。ただし、オプションがアウト・オブ・ザ・マネーであれば、アウト・オブ・ザ・マネーになっている分をそれから差し引く。
2. オプションの売却価格に原資産の株価の10%を加えた額。

単体プット・オプションの売付けに対しては、次のうちの大きいほうとなる。

1. オプションの売却価格に原資産の株価の20%を加えた額。ただし、オプションがアウト・オブ・ザ・マネーであれば、アウト・オブ・ザ・マネーになっている分をそれから差し引く。
2. オプションの売却価格に行使価格の10%を加えた額。

広範囲の銘柄から構成される株価指数のオプションに対しては、指数のほうが個別銘柄より価格変動が小さいので、証拠金は前述の計算において20%を15%に置き換えて計算される。

#### 【例8.3】

投資家がコール・オプションを単体で4単位売り付ける。オプション価格は5ドル、行使価格は40ドル、株価は38ドルとする。オプションは2ドルアウト・オブ・ザ・マネーなので、一つ目の計算は、

$$400 \times (5 + 0.2 \times 38 - 2) = 4,240 \text{ ドル}$$

となる。二つ目の計算は、

$$400 \times (5 + 0.1 \times 38) = 3,520 \text{ ドル}$$

となる。したがって、必要となる当初証拠金は4,240ドルである。オプションがプットの場合は2ドルイン・ザ・マネーなので、必要となる当初証拠金は、

$$400 \times (5 + 0.2 \times 38) = 5,040 \text{ ドル}$$

となる。いずれの場合も、売却代金の2,000ドルは証拠金勘定の一部に充当することができる。

当初証拠金の計算に似た計算（その時の市場価格を売却価格に置き換えた計算）が毎日行われる。計算の結果、必要となる証拠金が証拠金勘定の残高よりも少ない場合には、証拠金勘定から資金を引き出すことができる。逆に、計算の結果、より多くの証拠金が必要となった場合には追い証が発生する。

### その他の規則

第10章で、カバード・コール(covered call), プロテクティブ・プット(protective put), スプレッド(spread), コンビネーション(combination), ストラドル(straddle), ストラングル(strangle)といったオプション取引戦略について説明する。CBOEでは、これらの取引戦略が用いられたときの必要証拠金を決める特別な規則が定められている。この規則は *CBOE Margin Manual* に記載されており、CBOEのWebサイト([www.cboe.com](http://www.cboe.com))より入手可能である。

この規則の例として、カバード・コールの売付けを考えよう。カバード・コールの売付けとは、行使されたときに受け渡す株券をすでに保有している場合のコール・オプションの売付けである。カバード・コールでは、最悪の場合でも保有している株券を市場より低い価格で売ればよいだけなので、そのためのリスクはコール・オプション単体の売付けよりもはるかに小さい。そのため、オプションの売付けには証拠金は必要とされない。しかし、保有株式に対してふつう0.5Sに等しい額の借入れができるが、 $0.5\min(S, K)$ に等しい額だけしか借入れができないという規則が設けられている。

## 8.8 オプション清算機関

オプション清算機関 (OCC: Options Clearing Corporation) は、清算会社 (clearinghouse) が先物市場で果たすのとほぼ同様の機能をオプション市場で果たしている（第2章を参照）。OCCはオプションの売手がオプション契約に基づいて義務を履行することを保証し、すべての買いポジションと売りポジションを記録している。OCCは多くの会員を抱えており、すべてのオプション取引は会員を通じて清算されなければならない。したがって、取引所の OCC の会員でないブローカーは会員と取引の清算を行わなければならない。会員はある一定額以上の資本金をもつことが求められ、会員がオプションの義務を履行しなかった場合に使われる特別基金へ出資しなければならない。

オプションを購入した場合、買手は翌営業日の午前中までに購入代金を全額支払わなければならぬ。基金は OCC に預託されている。前に述べたように、オプションの売手はブローカーに対して証拠金勘定を維持しなければならない（注1）。ブローカーは取引の清算を担当する OCC 会員に対して証拠金勘定を維持しなければならぬ。さらに、OCC 会員は OCC に対して証拠金勘定を維持している。

### オプションの行使

投資家がオプションの行使をブローカーに通知すると、ブローカーはこの取引を清算する OCC 会員に通知する。それから、この会員は OCC に行使注文を出す。OCC は同じオプションの未決済の売りポジションをもつ会員を無作為に抽出する。この会員はあらかじめ定めておいた方法で、オプションを売り付けている顧客を選出する。コール・オプションの場合は、この顧

---

(注1) 前節で述べた必要証拠金は、あくまで OCC が規定している証拠金の最低金額である。ブローカーが顧客に要求する証拠金はそれよりも高いこともありうる。しかし、それより低い証拠金を要求することはできない。個人顧客に対してオプション単体の売付けを認めていないブローカーもある。

客は行使価格で株券を売却しなければならない。プット・オプションの場合は、この顧客は行使価格で株券を購入しなければならない。これを顧客への割当て (assigned) という。このように、オプションが行使されるとオプションの建玉は 1 単位減少する。

オプションの満期日にイン・ザ・マネーのオプションは、取引コストがオプションの支払額を超えるほど高くない限り、すべて行使すべきである。希望する顧客に対しては、満期日にオプションを自動的に行使するプローカーもある。多くの取引所では、満期日にイン・ザ・マネーになっている株券オプションの権利行使に関する規則が設けられている。

## 8.9 規 制

オプション市場にはさまざまな規制がある。トレーダーの行動を管理する規則には、取引所と OCC が定めるものがある。それに加えて、連邦ならびに州の規制当局も存在する。概して、オプション市場はこれまで自主規制を重んじて発展してきた。これまでのところ、大きな不正行為や OCC 会員の契約不履行は発生していない。このことから、現在の市場の運営方法に対して、投資家は高い信頼を置いていると思われる。

SEC (証券取引委員会) は株式、株価指数、通貨、債券のオプション市場に対する連邦レベルでの規制に責任をもっている。CFTC (商品先物取引委員会) は先物オプション市場に対する規制に責任をもっている。また、主要なオプション市場はイリノイ州とニューヨーク州にあり、両州とも許容できない取引慣行に対してはそれぞれ法律で積極的に取締まりを行っている。

## 8.10 税 金

オプション取引関連の税務処理はやや複雑であり、疑問のある場合には税務専門家に相談することが望ましい。米国での一般的な規則では、(納税者がプロのトレーダーでない限り) 株券オプション取引から生じる利益および損

失はキャピタル・ゲインまたはキャピタル・ロスとして課税される。キャピタル・ゲインおよびキャピタル・ロスに対する米国での課税方法については2.9節で説明した。株券オプションの買手と売手の双方に対して、(a)オプションが行使されずに失効したとき、または(b)オプションが手仕舞われたときに損益認識は行われる。オプションが行使されたときは、そのオプションから生じた損益は株式のポジションに算入され、株式のポジションが手仕舞われた時点で損益が認識される。たとえば、コール・オプションが行使された場合は、オプションの買手は行使価格にコールの価格を加えた価格で株式を購入したとみなされる。この価格は、最終的に株式が売却されたときにその買手の損益を計算する基準価格として用いられる。同様に、オプションの売手は行使価格にコールの価格を加えた価格で株式を売却したとみなされる。プット・オプションが行使された場合は、オプションの売手は行使価格からもとのプットの価格を引いた価格で株式を購入したとみなされ、オプションの買手は行使価格からもとのプットの価格を引いた価格で株式を売却したとみなされる。

### ウォッシュ・セール規則 (Wash Sale Rule)

米国におけるオプション取引にかかる税制で考慮しなければならないものに、ウォッシュ・セール規則がある。この規則を理解するために、株価が60ドルの時に株式を購入し、長期間保有しようとしている投資家を考えよう。仮に株価が40ドルに下落したとすると、投資家は節税目的で20ドルの損失を実現させるために、株式を売却し即座に買い戻すことを考えるかもしれない。税務当局はこの種の行為を防ぐ目的で、売却の前後30日以内（すなわち、売却の前30日から売却の後30日までの間）に買戻しが行われた場合には、売却に伴う損失は控除できないものとしている。この規則は、その61日間に納税者がオプションのような取引で株式を取得する場合にも適用される。したがって、株式を売却して損出しをし、30日以内にコール・オプションを購入した場合には、その損失は控除できない。納税者が株式または証券のディーラーであり、かつ損失が通常業務のなかで発生したものである場合に

は、ウォッシュ・セール規則は適用されない。

### コンストラクティブ・セール (Constructive Sale)

1997年以前の米国では、納税者が実質的に同一の証券を保有しながら空売りを行った場合、その空売りポジションが手仕舞われるまで損益認識はなされなかった。これは、空売りによって税法上の利益認識が先送りできることを意味している。この状況は1997年の減税法 (Tax Relief Act of 1997) で改められた。以下の取引を行った場合には、価値のあがった資産が「税解釈上は売却された (constructively sold)」として取り扱われることになった。

1. 同一、または実質的に同等な資産の空売り
2. 同一、または実質的に同等な資産を受け渡す先物取引またはフォワード取引
3. 実質的に損失および収益機会が完全になくなるような一つ以上のポジションを保有する取引

損失リスクのみや収益機会のみを低減させる取引はコンストラクティブ・セールには当たらない。したがって、株式を保有する投資家がイン・ザ・マネー・プット・オプションを購入する行為はコンストラクティブ・セールには当たらない。

税務の専門家は、最大限の節税や税務上の恩恵を得る目的でオプションを活用する場合がある (ビジネス寸見8.2を参照)。多くの国々で、税務当局は節税目的のためのデリバティブの利用を規制する法案を提出してきている。こうした節税目的での取引を行う場合には、企業の財務担当者であっても個人であっても、法律が改正された場合にその仕組みを解消する方法、およびそれにかかる費用を詳細に検討しておくべきである。

#### ビジネス寸見8.2 オプションを利用した税務対策

オプションを利用した税務戦略の簡単な例として、利子と配当に対する

る課税が低く、キャピタル・ゲインに対する課税が高い税制の A 国と、利子と配当に対する課税が高く、キャピタル・ゲインに対する課税が低い税制の B 国がある場合を考えよう。証券からの利子ないし配当は A 国で受け取り、キャピタル・ゲインは B 国で受け取れば、企業にとって税制上有利である。また、キャピタル・ロスは A 国にとどめておき、他のキャピタル・ゲインと相殺させられるようにしておきたいと考えるだろう。これらのこととは、証券の法的な所有権を A 国の子会社に帰属させ、現在価格に等しい行使価格をもつその証券のコール・オプションを B 国の子会社が A 国の子会社から購入することで実現できる。オプションの満期まで、証券からの利子ないし配当は課税の低い A 国で認識される。証券価格が急上昇した場合は、オプション行使すればキャピタル・ゲインは課税が低い B 国で実現される。証券価格が急落した場合はオプションは行使されず、キャピタル・ロスは課税が高い A 国で実現される。

### 8.11 ワラント、従業員ストック・オプションおよび転換社債

ワラントは金融機関や事業会社が発行するオプションである。たとえば、金融機関は金100万オンスに対するプット・ワラントを発行し、そのワラントの市場をつくりだしたりしている。ワラントを使用するときは、保有者はそれを発行した金融機関に連絡をとる。事業会社によるワラントの発行は、債券の発行時に行われるのが一般的である。事業会社は新発債を投資家にとってより魅力的なものにするために、自社株に対するコール・ワラントを発行し、それを新発債に付与することがある。

従業員ストック・オプションは、株主利益の最大化を目指す経営を行いうんセンティブが働くように、企業の経営幹部に対して発行されるコール・オプションである（第14章を参照）。通常、従業員ストック・オプションは発行

時にはアット・ザ・マネーである。現在では、ほとんどの国において従業員ストック・オプションは損益計算書上に費用計上されるので、報酬の形態としては以前ほどの魅力は失われた。

転換社債 (convertible bond, あるいは単に convertibles) は、一定の期間内にあらかじめ決められた交換比率で株式に転換できる社債である。したがって、転換社債は発行企業の株式のコール・オプションが内包された債券である。

ワラント、従業員ストック・オプション、および転換社債の一つの特徴は、あらかじめ決められた数のオプションが発行されるということである。それに対し、上場オプションの建玉数はあらかじめ決められていない（特定のオプション・シリーズの売買参加者が増えると、オプションの建玉数は増加する）。企業が自社株に対して発行したワラント、従業員ストック・オプション、および転換社債は、別の重要な点でも上場オプションとは異なる。これらの商品が行使されると、企業は自社株を発行してオプション保有者に新株を行使価格で売却する。したがって、それらが行使されると企業の発行済株式数が増加することになる。それに対し、上場コール・オプションが行使されると、オプションの売手は市場で発行ずみの株式を購入し、それをオプションの買手に行使価格で売却する。したがって、オプション原資産の株式を発行する企業は、この取引にはなんらかかわっていない。

## 8.12 店頭オプション市場

これまで本章では上場オプション市場に焦点を当てて説明をしてきたが、1980年代初頭から店頭オプション市場は徐々に重要性を増し、現在では取引所市場よりも規模が大きくなっている。第1章で説明したように、店頭市場では金融機関、企業の財務担当者、ファンドマネジャーらが電話を通じて取引を行っている。取引されるオプションの原資産は多岐にわたっており、なかでも通貨と金利の店頭オプションが活発に取引されている。店頭市場に潜在的に存在する短所は、オプションの売手にデフォルトする可能性があると

いうことである。このため、オプションの買手はある種の信用リスクを負うことになる。この問題を克服するために、市場参加者は取引相手方より担保を徴求するような諸手当てを行っている。これについては2.4節で説明した。

店頭市場で取引される商品は、顧客の細かいニーズを満たすように金融機関が組成したものが多い。上場オプションとは異なる権利行使日や行使価格、取引単位のオプションも取引されている。また、標準的なコールやプットとは異なる複雑な仕組みのオプションも取引されている。それらはエキゾチック・オプション (exotic option) と呼ばれている。第24章ではいろいろなエキゾチック・オプションについて紹介する。

## 要 約

オプションにはコールとプットという二つのタイプがある。コール・オプションの保有者はある定められた日にある定められた価格で原資産を購入する権利をもつ。プット・オプションの保有者はある定められた日にある定められた価格で原資産を売却する権利をもつ。オプション市場では四つのポジションがとれる。コールの買いポジション、コールの売りポジション、プットの買いポジション、およびプットの売りポジションである。オプションの売りポジションをとることはオプションのライト (write) とも呼ばれる。現在では、株式、株価指数、外国通貨、先物契約、およびその他の資産に対してオプションが取引されている。

取引所は、取引されるオプションの契約条件を細かく規定しなければならない。特に、取引単位、満期の正確な時間、行使価格を定める必要がある。米国では株券オプションの取引単位は100株を購入または売却する権利である。株券オプションは満期月の第3金曜日の翌土曜日の米国中部時間午後10時59分に満期を迎え、いくつかの異なる限月のオプションが常時取引されている。行使価格は株価水準に応じて、2.5ドル、5ドル、10ドルの間隔で設

定されている。一般にオプションの取引開始時点では、その時の株価水準にかなり近いレベルの行使価格が設定される。

株券オプションの条件は、現金配当に対してはふつう調整は行われない。しかし、株式配当や株式分割、株主割当発行が行われた場合には調整が行われる。この調整は、オプションの売手と買手の双方のポジションが変わらないようにするために行われる。

ほとんどのオプション取引所はマーケット・メーカーを使用している。マーケット・メーカーとは、ビッド（マーケット・メーカーが購入に応じる価格）とオファー（マーケット・メーカーが売却に応じる価格）の両方を求めるに応じて表示する者をいう。マーケット・メーカーは市場の流動性を高め、市場の注文を遅滞なく約定させるという役割を果たしている。マーケット・メーカーはビッドとオファーの価格差（これをビッドーオファー・スプレッドと呼ぶ）から利益を得ている。取引所はそのビッドーオファー・スプレッドに対して上限を定めている。

オプションの売手は債務を負う可能性があることから、ブローカーに対して証拠金の維持を求められる。OCCの会員でないブローカーは会員会社に対して証拠金勘定を維持し、この会社はさらにOCCに対して証拠金勘定を維持することになる。OCCはすべての建玉を記録し続ける責任をもち、行使注文の処理などを行う。

すべてのオプションが上場されているわけではない。多くのオプションが店頭市場で電話を通じて取引されている。店頭オプション市場の長所は、企業の財務担当者やファンドマネジャーの個別のニーズに応じた商品を金融機関が提供できるという点である。

## 参考文献

Arzac, E.R. "PERCs, DECs, and Other Mandatory Convertibles," *Journal of*

章末問題

- 8.1 ある投資家が株券ヨーロピアン・プット・オプションを3ドルで購入する。そのときの株価は42ドル、行使価格は40ドルとする。どのような状況のとき、この投資家は利益をあげられるか。また、どのような場合にこのオプションは行使されるか。オプション満期日の株価によって投資家の利益がどのように変わるかをグラフで示せ。
- 8.2 ある投資家が株券ヨーロピアン・コール・オプションを4ドルで売却する。そのときの株価は47ドル、行使価格は50ドルとする。どのような状況のとき、この投資家は利益をあげられるか。また、どのような場合にこのオプションは行使されるか。オプション満期日の株価によって投資家の利益がどのように変わるかをグラフで示せ。
- 8.3 ある投資家が行使価格  $K$ 、満期  $T$  のヨーロピアン・コール・オプションを売り付け、同じ行使価格と満期のヨーロピアン・プット・オプションを買い付けたとする。この投資家のポジションを説明せよ。
- 8.4 ブローカーは顧客がオプションを売り付ける場合には証拠金を要求するが、オプションを買い付ける場合には証拠金を要求しない。その理由を説明せよ。
- 8.5 満期が2月、5月、8月、11月サイクルの株券オプションを考える。  
(a) 4月1日および(b)5月30日に取引されているオプションの限月を述べよ。
- 8.6 ある企業が1対2の株式分割を発表した。行使価格が60ドルのコール・オプションの条件はどのように修正されるか。

- 8.7 「企業の発行する従業員ストック・オプションはその企業の資本構成に影響を与えるので、その企業の株式に対する通常の上場オプションとは異なる」。この主張について説明せよ。
- 8.8 ある企業の財務担当者が通貨オプションを使ったヘッジプログラムを検討している。(a)フィラデルフィア証券取引所と(b)店頭市場を使う場合の長所と短所を述べよ。
- 8.9 100ドルで1株を購入するヨーロピアン・コール・オプションの価格が5ドルで、満期まで保有されるとする。オプションの保有者が利益を得るのはどのようなときか。また、オプションが行使されるのはどのようなときか。オプション満期日の株価によってオプションの買いポジションの損益が変わる様子をグラフで示せ。
- 8.10 60ドルで1株を売却するヨーロピアン・プット・オプションの価格が8ドルで、満期まで保有されるとする。オプションの売手(売りポジションをもつ取引当事者)が利益を得るのはどのようなときか。また、オプションが行使されるのはどのようなときか。オプション満期日の株価によってオプションの売りポジションの損益が変わる様子をグラフで示せ。
- 8.11 次のポートフォリオの満期における価値を説明せよ。ポートフォリオはある資産を購入する新規のフォワード契約と同じ資産に対するヨーロピアン・プット・オプションの買いポジションからなり、オプションの満期はフォワード契約の満期と同じで、行使価格はポートフォリオ構築時のフォワード価格に等しい。このポートフォリオの価値は、同じ行使価格と満期をもつヨーロピアン・コール・オプションの価値に等しいことを示せ。
- 8.12 あるトレーダーが、満期の同じ行使価格45ドルのコール・オプションと行使価格40ドルのプット・オプションを同時に購入する。コールの価格は3ドル、プットの価格は4ドルとする。このとき、トレーダーの損益が原資産価格によって変わる様子をグラフで示せ。
- 8.13 アメリカン・オプションの価値は、常に、同じ原資産、行使価格、

権利行使日のヨーロピアン・オプションの価値以上になることを説明せよ。

- 8.14** アメリカン・オプションの価値は常に本源的価値以上であることを説明せよ。
- 8.15** プット・オプションの売付けとコール・オプションの買付けとの違いを正確に説明せよ。
- 8.16** ある企業の財務担当者が自社の外国為替リスクをヘッジするために、オプションとフォワード契約のどちらを利用するか検討している。それぞれの長所と短所について説明せよ。
- 8.17** 行使価格40ドルで500株を購入できる満期4カ月の上場コール・オプションについて考える。以下の場合に、オプションの条件はどのように修正されるか。(a)10%の株式配当が行われる場合、(b)10%の現金配当が行われる場合、(c)1対4の株式分割が行われる場合。
- 8.18** 「ある株式のコール・オプションのほとんどがイン・ザ・マネーであるならば、その株価は過去2～3カ月の間に急速に上昇したと思われる」。この主張について議論せよ。
- 8.19** 予期せぬ現金配当が、(a)コール・オプションの価格、(b)プット・オプションの価格に与える影響を述べよ。
- 8.20** ゼネラル・モーターズの上場株券オプションの満期は、3月、6月、9月、12月サイクルである。(a)3月1日、(b)6月30日、(c)8月5日に取引されているオプションの限月を述べよ。
- 8.21** マーケット・メーカーのビッドーオファー・スプレッドがオプションの投資家にとって本当のコストとなる理由を説明せよ。
- 8.22** ある米国の投資家がコール・オプションを単体で5単位売り付けるとする。オプション価格は3.50ドルで、行使価格は60.00ドル、株価は57.00ドルである。当初証拠金はいくら必要か。

## 宿題

- 8.23 株価を40ドル、行使価格30ドルのその株式に対する1年物ヨーロピアン・プット・オプションの価格を7ドル、行使価格50ドルのその株式に対する1年物ヨーロピアン・コール・オプションの価格を5ドルとする。ある投資家が現物株を100株購入し、同時にコール・オプションを100売り付け、プット・オプションを100買い付けたとする。投資家の損益が1年後の株価によって変わる様子を図示せよ。投資家が現物株を100株購入し、同時にコール・オプションを200売り付け、プット・オプションを200買い付けた場合にはどうなるか。
- 8.24 「企業業績が競争相手より芳しくなくても株価が上昇したならば、その企業の経営者はストック・オプションから利益を得ることができる。それでは納得がいかない」。この主張について議論せよ。また、この点を考慮した通常の従業員ストック・オプションにかわる方策を考えよ。
- 8.25 DerivaGem ソフトウェアを利用して、配当のない株式のアメリカン・プット・オプションの価値を計算せよ。現在の株価を30ドル、行使価格を32ドル、無リスク金利を5%，ボラティリティを30%，満期を1.5年とする（“option type”で“Binomial American”を選択し、時間刻みを50とせよ）。
- オプションの本源的価値はいくらか。
  - オプションの時間価値はいくらか。
  - 時間価値ゼロは何を意味しているか。時間価値がゼロのときのオプションの価値とは何か。
  - どれだけ株価が下がればオプションの時間価値がゼロになるかを試行錯誤で計算せよ。
- 8.26 2004年7月20日、マイクロソフトは配当を3ドルにすることを発表し、市場を驚かせた。配当落ち日は2004年11月17日、払込み日は2004年12月2日で、そのときの株価は28ドルであった。それに伴い、

職員のストック・オプションの条項も変更され、行使価格は次のように下方修正された。

$$\text{配当落ち前の行使価格} \times \frac{\text{終値} - 3 \text{ ドル}}{\text{終値}}$$

ストック・オプションで取得できる株数は次のように上方修正された。

$$\text{配当落ち前の株数} \times \frac{\text{終値}}{\text{終値} - 3 \text{ ドル}}$$

ここでの「終値」とは、配当落ち日前日のマイクロソフト普通株のNASDAQにおける終値である。この調整の妥当性を考えよ。大口配当に対して取引所が行う調整方法と比較せよ（ビジネス寸見8.1を参照）。

## 第9章

# 株券オプションの特性

本章では、株券オプションの価格に影響を与える要素について説明し、さまざまな裁定の議論を用いて、ヨーロピアン・オプションの価格、アメリカン・オプションの価格、および原資産の株価との間に成り立つ関係を導く。最も重要な関係はヨーロピアン・コール・オプション、ヨーロピアン・プット・オプション、および原資産の株価との間で成り立つプット・コール・parityである。

次に、アメリカン・オプションの期限前行使について考える。配当のない株式のアメリカン・コール・オプションに対する期限前行使は常に最適ではないが、アメリカン・プット・オプションでは期限前行使が最適となる場合もあることを示す。

## 9.1 オプション価格に影響を与える要素

株券オプションの価格に影響を与える要素には、以下の六つがある。

1. 現在の株価,  $S_0$
2. 行使価格,  $K$
3. 満期までの時間,  $T$
4. 株価のボラティリティ,  $\sigma$
5. 無リスク金利,  $r$
6. オプション満期までの予想配当

本節では、これらの要素のうち一つだけが変化して他の要素は変化しないときに、オプションの価格がどのように変化するかを考察する。その結果を表9.1にまとめた。

図9.1（次頁）と図9.2（300頁）は、ヨーロピアン・コールとプットの価格が最初の五つの要素によってどのように変化するかを図示したものである。 $S_0=50$ ,  $K=50$ ,  $r=5\%$ （年率）,  $\sigma=30\%$ （年率）,  $T=1$ 年, 配当はないものとしており、その場合のコール価格は7.116, プット価格は4.677である。

表9.1 他の変数を固定して1変数を増加させた場合の  
株券オプションの価格変化一覧表\*

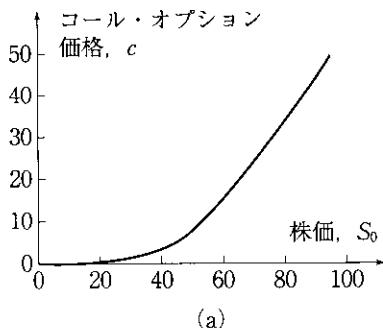
| 変数      | ヨーロピアン<br>・コール | ヨーロピアン<br>・プット | アメリカン<br>・コール | アメリカン<br>・プット |
|---------|----------------|----------------|---------------|---------------|
| 現在の株価   | +              | -              | +             | -             |
| 行使価格    | -              | +              | -             | +             |
| 満期      | ?              | ?              | +             | +             |
| ボラティリティ | +              | +              | +             | +             |
| 無リスク金利  | +              | -              | +             | -             |
| 配当      | -              | +              | -             | +             |

\* +は変数が増加したときにオプション価格が上昇することを示す；-は変数が増加したときにオプション価格が下落することを示す；?は単調な関係がないことを示す。

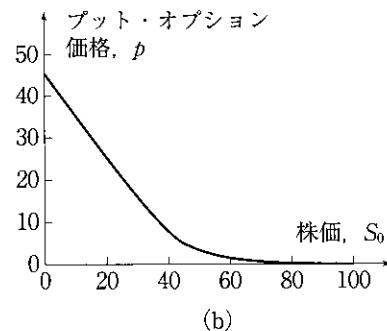
## 株価と行使価格

行使時点でのコール・オプションの損益は、株価が行使価格を超えた額である。したがって、コール・オプションの価値は株価が上昇すれば増加し、

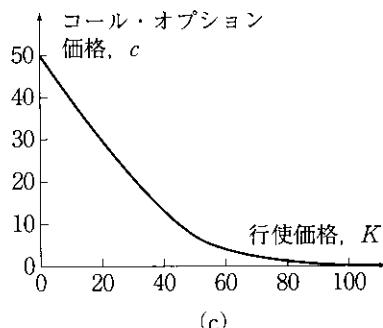
図9.1 株価、行使価格、満期までの時間の変化がオプション価格に与える影響  
 $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 5\%$ ,  $\sigma = 30\%$ ,  $T = 1$ とする。



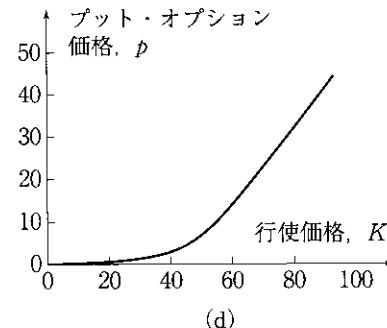
(a)



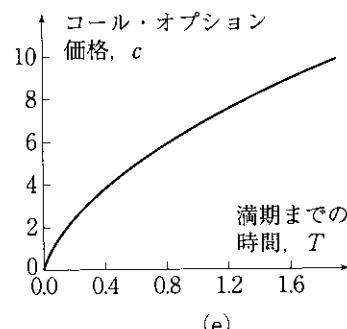
(b)



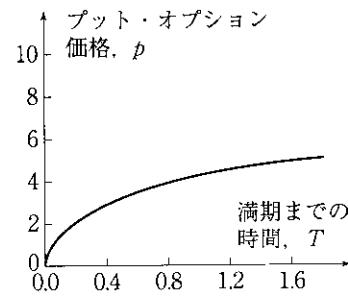
(c)



(d)



(e)



(f)

行使価格が高くなれば減少する。行使時点でのプット・オプションの損益は、行使価格が株価を上回っている額である。したがって、コール・オプションの価値とは逆の挙動を示し、プット・オプションの価値は株価が上昇すれば減少し、行使価格が高くなれば増加する。図9.1(a)~(d)に、コールとプットの価格が株価と行使価格によって変化する様子を図示する。

### 満期までの時間

次に満期日の影響について考察しよう。アメリカン・オプションの場合、プットとコールはともに満期日までの期間が長くなるとその価値は高くなる（あるいは、少なくとも減少はしない）。満期日のみが異なる二つのアメリカン・オプションを考えてみよう。満期の長いほうのオプションの所有者は、短いほうのオプションの所有者がもつ以上の行使機会をもつ。したがって、常に、満期の長いオプションの価値は満期の短いオプションの価値以上になるはずである。

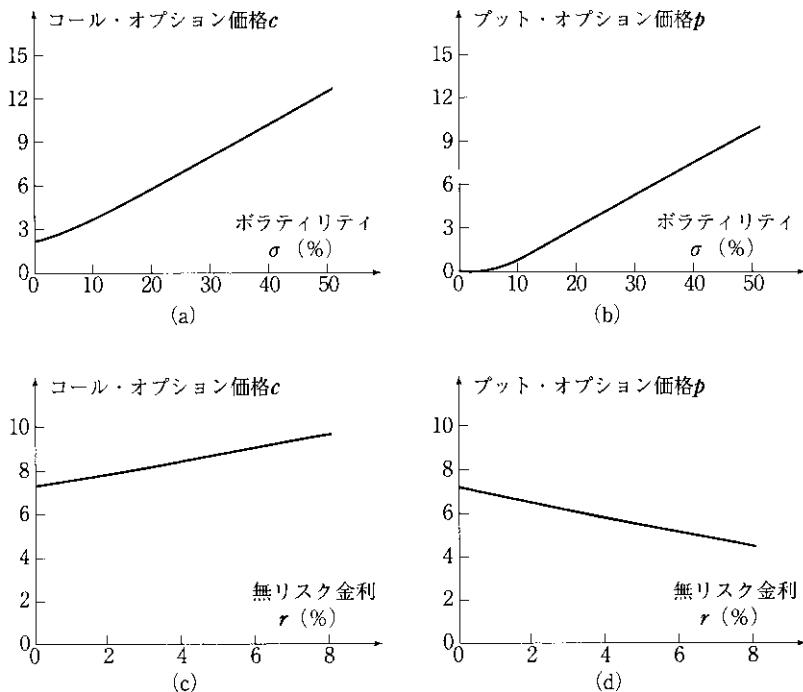
ヨーロピアン・オプションのプットとコールも、満期が長くなればその価値は高くなるのがふつうであるが（図9.1(e), (f)を参照）、常にそうなるとは限らない。株式に対する次の二つのヨーロピアン・コール・オプションを考えてみよう。一つは満期が1カ月後、もう一つは満期が2カ月後とする。6週間後に大きな配当が予想されているとすると、配当は株価を押し下げる要因となるから、期間の短いほうのオプションの価値が長いほうのオプションの価値より高くなる可能性がある。

### ボラティリティ

ボラティリティ（volatility）の正確な定義は第13章で論じるが、大雑把にいうと、ボラティリティは将来の株価変動の不確実性を測る尺度である。ボラティリティが大きくなるにつれ、株価が非常に大きく上昇あるいは下落する可能性が高まる。株式の保有者にとっては、これら二つの可能性から生じる結果は互いに相殺しあう類のものである。しかし、コールやプットの保有者にとってはそうではない。コールの所有者は株価上昇による利益を享受す

図9.2 ボラティリティと無リスク金利の変化がオプション価格に与える影響

$S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 5\%$ ,  $\sigma = 30\%$ ,  $T = 1$  とする。



る一方で、最大損失は購入時に支払ったオプション価格なので、株価下落時のダウンサイド・リスクは限定されている。同様に、プットの所有者は株価下落による利益を享受する一方で、株価上昇時のダウンサイド・リスクは限定されている。したがって、コールとプットの価値はボラティリティの上昇とともに増加する（図9.2(a), (b)を参照）。

### 無リスク金利

無リスク金利がオプション価格に与える影響はやや複雑である。金利が上昇すると、投資家が要求する株式の期待収益率も上昇する。また、オプション所有者が将来受け取るキャッシュフローの現在価値は減少する。これら二

つの影響が組み合わさった結果として、コール・オプションの価値は増加し、プット・オプションの価値は減少する（図9.2(c), (d)を参照）。

上の議論では、他の変数を固定したまま金利のみが変化するとしていたことに注意しよう。特に、金利が変化しても株価は変化しないとしていた。実際には、金利が上昇（下落）すると株価は下落（上昇）しやすい。金利上昇とそれに伴う株価下落によるネットの効果で、コール・オプションの価値が減少し、プット・オプションの価値が増加することもある。同様に、金利下落とそれに伴う株価上昇によるネットの効果で、コール・オプションの価値が増加し、プット・オプションの価値が減少することもある。

### 将来の配当額

配当落ち日に株価は配当額だけ下落する。これはコール・オプションの価値に対してはマイナス、プット・オプションの価値に対してはプラスに作用する。したがって、コール・オプションの価値は将来の予想配当の大きさと負の相関があり、プット・オプションの価値は将来の予想配当の大きさと正の相関がある。

## 9.2 仮定および記号の定義

本章では、第5章でフォワード価格と先物価格を導出したときと同様のことを仮定し、市場には大手投資銀行のような次のことを満たす市場参加者が存在するとする。

1. 取引コストはかかるない。
2. トレーディング収益（損失控除後）に対する税率は一律である。
3. 無リスク金利で資金の運用調達が可能である。

これらの市場参加者は、裁定機会が生じれば直ちに裁定取引を行うものとする。その結果、第1章および第5章で議論したように、裁定機会は一瞬のうちに消滅してしまう。したがって、われわれの分析の目的上は、裁定機会はないとしてもさしつかえない。

本章では、以下の記号を用いる。

$S_0$  : 現在の株価

$K$  : オプションの行使価格

$T$  : オプションの満期までの時間

$S_T$  : 満期日における株価

$r$  : 満期  $T$  の運用に対する連続複利での無リスク金利

$C$  : 1株を購入するアメリカン・コール・オプションの価値

$P$  : 1株を売却するアメリカン・プット・オプションの価値

$c$  : 1株を購入するヨーロピアン・コール・オプションの価値

$p$  : 1株を売却するヨーロピアン・プット・オプションの価値

ここで  $r$  は実質利子率ではなく、名目利子率である。したがって、 $r > 0$  と仮定してよい。さもなければ、無リスク資産投資は現金保有に比べてなんらメリットを生まないことになる（実際、 $r < 0$  ならば、現金は無リスク投資よりも選好されることになる）。

### 9.3 オプション価格の上限と下限

本節ではオプション価格の上限と下限を導出する。これらの導出には、 $r > 0$  という仮定を除いて、9.1節で述べた各要素に対してなんら特別な仮定を必要としない。もしオプション価格がその上限を上回っている、あるいはその下限を下回っているならば、アービトラージャーに収益機会が存在することになる。

#### 上　限

アメリカン・コール・オプションもヨーロピアン・コール・オプションも、1株をある価格で購入する権利である。したがってどのような状況でも、オプションの価値が株式の価値を上回ることはない。よって、株価がコール・オプション価格の上限となり、

$$c \leq S_0 \quad \text{かつ} \quad C \leq S_0$$

が成り立つ。これらの関係が成り立っていないならば、株式を購入し、コール・オプションを売り付けることで、アービトラージャーは簡単に無リスクで利益をあげることができる。

アメリカン・プット・オプションもヨーロピアン・プット・オプションも、1株を  $K$  で売却する権利である。したがって、株価がどれほど下落しようとも、オプションの価値は  $K$  を上回ることはない。よって、

$$p \leq K \quad \text{かつ} \quad P \leq K$$

が成り立つ。ヨーロピアン・オプションの場合には、満期時点での価値も  $K$  以下である。したがって、オプション価値は  $K$  の現在価値を上回ることはない。のことより、

$$p \leq Ke^{-rT}$$

が成り立つ。この関係が成り立っていないならば、オプションを売り付け、得られた代金を無リスク金利で運用することで、アービトラージャーは無リスクで利益をあげることができる。

### 配当のない株式のコール・オプション価格の下限

配当のない株式のヨーロピアン・コール・オプション価格の下限は、

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

で与えられる。最初に数値例をみてから、その後で一般的な議論を行う。

$S_0 = 20$  ドル、 $K = 18$  ドル、 $r = 10\%$  (年率)、 $T = 1$  年とする。このとき、

$$S_0 - Ke^{-rT} = 20 - 18e^{-0.1} = 3.71$$

すなわち 3.71 ドルとなる。ヨーロピアン・コール・オプションの価格が下限の理論値 3.71 ドルより低い 3 ドルであったとしよう。アービトラージャーは現物株を空売りし、コールを買い付けて、 $20.00 - 3.00 = 17.00$  ドルの現金を手にするだろう。これを年率 10% で 1 年間運用すると、17.00 ドルは  $17.00 e^{0.1} = 18.79$  ドルになる。1 年後にオプションは満期を迎える。その時点で株価が 18 ドル以上であれば、この投資家はオプション行使して 18 ドルで株式を買い、空売りのポジションを手仕舞って、

$$18.79 - 18.00 = 0.79 \text{ ドル}$$

の利益を得る。株価が18ドルより低い場合には、現物株を市場で購入して空売りのポジションを手仕舞う。この場合、アービトラージャーはさらに大きな利益を得ることになる。たとえば株価が17ドルならば、

$$18.79 - 17.00 = 1.79 \text{ ドル}$$

の利益が得られる。

もっと一般的な議論を行うために、次の二つのポートフォリオを考えよう。

ポートフォリオ A：ヨーロピアン・コール・オプション1単位と  $Ke^{-rT}$   
の現金

ポートフォリオ B：現物株1株

ポートフォリオ A の現金を無リスク金利で運用すれば、期間  $T$  後には  $K$  の現金になる。 $S_T > K$  ならば満期日にコール・オプションは行使され、ポートフォリオ A の価値は  $S_T$  となる。 $S_T < K$  ならばオプションは行使されず、ポートフォリオの価値は  $K$  となる。よって、期間  $T$  後のポートフォリオ A の価値は、

$$\max(S_T, K)$$

になる。ポートフォリオ B の期間  $T$  後の価値は  $S_T$  である。したがって、オプションの満期時点において、ポートフォリオ A の価値は常に B の価値以上になる。裁定機会がないならば、この関係は現時点でも成り立つなければならない。よって、

$$c + Ke^{-rT} \geq S_0$$

すなわち、

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

が成り立つ。コール・オプションは、最悪の場合でも満期での価値がゼロになるだけなので、その価値は負にはならない。したがって  $c \geq 0$  となり、

$$c \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0) \quad (9.1)$$

が成り立つ。

【例9.1】

株価51ドル、行使価格50ドル、満期6カ月、無リスク金利が年率12%

の場合で、配当のない株式のヨーロピアン・コール・オプションについて考える。この場合は  $S_0 = 51$ ,  $K = 50$ ,  $T = 0.5$ ,  $r = 0.12$  であるから、(9.1)式よりオプション価格の下限は  $S_0 - Ke^{-rT}$ , すなわち,

$$51 - 50e^{-0.12 \times 0.5} = 3.91 \text{ ドル}$$

となる。

### 配当のない株式のヨーロピアン・プット・オプションの下限

配当のない株式のヨーロピアン・プット・オプション価格の下限は、

$$Ke^{-rT} - S_0$$

で与えられる。今度も最初に数値例をみて、その後で一般的な議論を行う。

$S_0 = 37$  ドル,  $K = 40$  ドル,  $r = 5\%$  (年率),  $T = 0.5$  年とすると、

$$Ke^{-rT} - S_0 = 40e^{-0.05 \times 0.5} - 37 = 2.01 \text{ ドル}$$

となる。ヨーロピアン・プットの価格が下限の理論値 2.01 ドルより低い 1.00 ドルであったとしよう。アービトラージャーは 38.00 ドルを 6 カ月間借り入れて、プット・オプションと現物株を購入するだろう。6 カ月後にアービトラージャーは  $38e^{0.05 \times 0.5} = 38.96$  ドルの返済を求められる。その時点での株価が 40.00 ドル以下であれば、投資家はオプション行使して株を 40.00 ドルで売却し、その代金で借入れを返済すれば、

$$40.00 - 38.96 = 1.04 \text{ ドル}$$

の利益を得る。株価が 40.00 ドルより高い場合には、アービトラージャーはオプション行使せずにその時点での価格で株を売り、その代金で借入れを返済すれば、さらに大きな利益が得られることになる。たとえば株価が 42.00 ドルならば、

$$42.00 - 38.96 = 3.04 \text{ ドル}$$

の利益が得られる。

もっと一般的な議論を行うために次の二つのポートフォリオを考えよう。

ポートフォリオ C：ヨーロピアン・プット・オプション 1 単位と現物株 1 株

### ポートフォリオ D: $Ke^{-rT}$ の現金

$S_T < K$  ならば、ポートフォリオ C のオプションは満期日に行使され、ポートフォリオの価値は  $K$  となる。 $S_T > K$  ならばブット・オプションは行使されず、その時点でのポートフォリオの価値は  $S_T$  となる。よって、期間  $T$  後のポートフォリオ C の価値は、

$$\max(S_T, K)$$

になる。現金は無リスク金利で運用されるとすると、期間  $T$  後のポートフォリオ D の価値は  $K$  となる。したがって、オプションの満期時点において、ポートフォリオ C の価値はポートフォリオ D の価値以上になる。裁定機会がないならば、現時点でのポートフォリオ C の価値もポートフォリオ D の価値以上でなければならない。よって、

$$p + S_0 \geq Ke^{-rT}$$

すなわち、

$$p \geq Ke^{-rT} - S_0$$

が成り立つ。ブット・オプションは、最悪の場合でも満期の価値がゼロになるだけなので、その価値は負にはならない。したがって、

$$p \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0) \quad (9.2)$$

が成り立つ。

#### 【例9.2】

株価38ドル、行使価格40ドル、満期3カ月、無リスク金利が年率10%の場合で、配当のない株式のヨーロピアン・ブット・オプションについて考える。この場合は  $S_0 = 38$ ,  $K = 40$ ,  $T = 0.25$ ,  $r = 0.10$  であるから、(9.2)式よりオプション価格の下限は  $Ke^{-rT} - S_0$ 、すなわち、

$$40e^{-0.1 \times 0.25} - 38 = 1.01 \text{ ドル}$$

となる。

## 9.4 プット・コール・parity

次に  $c$  と  $p$  の間に成り立つ重要な関係を導くことにしよう。前節で用いた次の二つのポートフォリオについて考える。

ポートフォリオ A：ヨーロピアン・コール・オプション 1 単位と  $Ke^{-rT}$  の現金

ポートフォリオ C：ヨーロピアン・プット・オプション 1 単位と現物株 1 株

両者の価値は、オプション満期時点においてはともに、

$$\max(S_T, K)$$

である。オプションはヨーロピアンなので、満期前に行使することはできない。したがって、それらのポートフォリオの価値は現在時点でも同じでなければならない。すなわち、

$$c + Ke^{-rT} = p + S_0 \quad (9.3)$$

が成り立つ。この関係式はプット・コール・parity (put-call parity) として知られている。与えられた行使価格と満期日をもつヨーロピアン・コール・オプションの価値は、同じ行使価格と満期日をもつヨーロピアン・プット・オプションの価値から導き出すことができ、その逆も然りである。

もし (9.3) 式が成り立っていないければ、裁定機会が存在する。株価を 31 ドル、行使価格を 30 ドル、無リスク金利を年率 10%、満期 3 カ月のヨーロピアン・コール・オプションの価格を 3 ドル、満期 3 カ月のヨーロピアン・プット・オプションの価格を 2.25 ドルとしよう。この場合、

$$c + Ke^{-rT} = 3 + 30e^{-0.1 \times 3/12} = 32.26 \text{ ドル}$$

および、

$$p + S_0 = 2.25 + 31 = 33.25 \text{ ドル}$$

となり、ポートフォリオ C はポートフォリオ A に対して過大評価されている。したがって、ポートフォリオ A の証券を買い、ポートフォリオ C の証券を空売りするという裁定戦略が可能である。この戦略を行うと、コールを買い付け、プットと株式を売り付けることにより、

$$-3 + 2.25 + 31 = 30.25 \text{ ドル}$$

の現金を取引当初に受け取ることになる。これを無リスク金利で運用すれば、3カ月後には、

$$30.25e^{0.1 \times 0.25} = 31.02 \text{ ドル}$$

になる。満期日における株価が30ドルより高ければコールが行使され、30ドルより低ければプットが行使される。いずれの場合でも、投資家は1株を30ドルで購入することになる。この株式で売りポジションを手仕舞えば、ネット利益は、

$$31.02 - 30.00 = 1.02 \text{ ドル}$$

となる。

次に、コールの価格が3ドルでプットの価格が1ドルの場合を考えよう。このときは、

$$c + Ke^{-rT} = 3 + 30e^{-0.1 \times 3/12} = 32.26 \text{ ドル}$$

および、

$$p + S_0 = 1 + 31 = 32.00 \text{ ドル}$$

となる。ポートフォリオAはポートフォリオCに対して過大評価されている。したがって、アービトラージャーはポートフォリオAの証券を売り付けて、ポートフォリオCの証券を買い付けることによって、利益を確定できる。この戦略ではコールを売り付け、プットと株式を買い付けるため、

$$31 + 1 - 3 = 29 \text{ ドル}$$

の初期投資を要する。この投資資金を無リスク金利で調達すれば、3カ月後に必要な返済額は $29e^{0.1 \times 0.25} = 29.73$ ドルになる。前の例と同様にコールとプットのいずれかが行使されるから、コールの売付けとプットの買付けを合わせたポジションは、30.00ドルで株式を売却したのと同じである。よって、純利益は、

$$30.00 - 29.73 = 0.27 \text{ ドル}$$

となる。

これらの例を表9.2にまとめておく。また、企業の発行する債券および株式の保有者のポジションを理解するうえで、オプションとプット・コール・

表9.2 プット・コール・バリティが成立しない場合の裁定機会

株価=31ドル, 金利=10%, コール価格=3ドル, プットとコールの行使価格は30ドル, 満期は3カ月

| 3カ月物プット価格=2.25ドル        | 3カ月物プット価格=1ドル           |
|-------------------------|-------------------------|
| 現時点での行動：                | 現時点での行動：                |
| コールを3ドルで買い付ける           | 29ドルを3カ月間借りる            |
| プットを2.25ドルで売り付ける        | コールを3ドルで売り付ける           |
| 株式を31ドルで空売りする           | プットを1ドルで買い付ける           |
| 30.25ドルを3カ月間運用する        | 株式を31ドルで買う              |
| $S_T > 30$ の場合の3カ月後の行動： | $S_T > 30$ の場合の3カ月後の行動： |
| 運用の結果として, 31.02ドルを受け取る  | コールが行使され, 30ドルで株式を売る    |
| コールを行使し, 30ドルで株式を買う     | 29.73ドルで借入金を返済する        |
| ネット収益=1.02ドル            | ネット収益=0.27ドル            |
| $S_T < 30$ の場合の3カ月後の行動： | $S_T < 30$ の場合の3カ月後の行動： |
| 運用の結果として, 31.02ドルを受け取る  | プットを行使し, 30ドルで株式を売る     |
| プットが行使され, 30ドルで株式を買う    | 29.73ドルで借入金を返済する        |
| ネット収益=1.02ドル            | ネット収益=0.27ドル            |

バリティが役立つことをビジネス寸見9.1に示した。

### ビジネス寸見9.1 プット・コール・バリティと資本構造

オプション価格理論の先駆者は Fischer Black, Myron Scholes, および Robert Merton である。1970年代初頭, 彼らは企業の資本構造の特徴付けにオプション理論が利用できることを示した。今日, そのモデルは金融機関が企業の信用リスクを評価するのに広く利用されている。

モデルを例示するために, 資産がゼロクーポン債と株式のみで構成されている企業を考えよう。ゼロクーポン債は5年満期で元本は  $K$  とする。また, 企業は発行株式に対して配当を支払わないものとする。5年

後に資産が  $K$  以上の価値をもっているならば、株主は債券保有者に対して返済を行う。もし資産が  $K$  未満の価値になっていたならば、株主は破産を宣言し、企業は債券保有者のものになる。

したがって、5年後の株式の価値は  $\max(A_T - K, 0)$  となる。ここで  $A_T$  は5年後の企業の資産価値である。このことより、株主は企業の資産に対する行使価格  $K$  の5年物ヨーロピアン・コール・オプションを保有していることがわかる。債券保有者についてはどうであろうか。債券保有者は5年後に  $\min(A_T, K)$  を得る。これは  $K - \max(K - A_T, 0)$  と同じである。したがって債券の価値は、 $K$  の現在価値から企業の資産に対する行使価格  $K$  の5年物ヨーロピアン・プット・オプションの価値を差し引いたものに等しくなる。

$c$  と  $p$  をそれぞれ企業の資産に対するコール・オプションとプット・オプションの価値として以上の議論をまとめると、

$$\text{株式の価値} = c$$

$$\text{債券の価値} = PV(K) - p$$

となる。現在の企業の資産価値を  $A_0$  とすると、資産価値は資産保有のための資金調達に利用した金融商品の総価値、すなわち株と債券の総価値に等しいはずなので、

$$A_0 = c + [PV(K) - p]$$

となる。書き直すと

$$c + PV(K) = p + A_0$$

が得られる。これは企業の資産に対するコール・オプションとプット・オプションとの間で成り立つ、(9.3)式のプット・コール・パリティである。

## アメリカン・オプション

プット・コール・パリティはヨーロピアン・オプションに対してのみ成り立つ。しかし、アメリカン・オプションの価格に対してもある種の関係を導

き出すことはできる。株式に配当がない場合は、次の関係が成り立つ（章末問題9.18を参照）。

$$S_0 - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rt} \quad (9.4)$$

【例9.3】

配当のない株式に対する行使価格20.00ドル、満期5カ月のアメリカン・コール・オプションの価値が1.50ドルである。現在の株価は19.00ドル、無リスク金利は年率10%とする。(9.4)式より、

$$19 - 20 \leq P - C \leq 19 - 20e^{-0.1 \times 5/12}$$

すなわち、

$$1 \geq P - C \geq 0.18$$

となり、 $P - C$  は1.00ドルと0.18ドルとの間にある。 $C$  は1.50ドルなので、 $P$  の値は1.68ドルから2.50ドルの間にある。言い換えれば、そのアメリカン・コールと行使価格と満期日が同じアメリカン・プットの価格の上限と下限は、それぞれ2.50ドルと1.68ドルである。

## 9.5 期限前行使：配当のない株式のコール

この節では、配当のない株式に対するアメリカン・コール・オプションの期限前行使は常に最適ではないことを示す。

基本的な考え方を理解するために、株価が50ドルのときに、満期1カ月、行使価格40ドルの配当のない株式のアメリカン・コール・オプションを考えてみよう。このオプションは大幅にイン・ザ・マネーであり、オプションの所有者は即座にオプションを使いたいと思うだろう。しかし、もし投資家がオプション行使により取得した株式を1カ月以上保有するつもりならば、これは最良の戦略ではない。もっとよい戦略は、オプションを保有し続け、1カ月後に行使することである。そうすれば、行使価格の40ドルは即座に行使した場合に比べて1カ月遅く支払えばよく、40ドルに対する1カ月間の利子だけ得である。また、この株式には配当がないため、配当収入が犠牲にな

るということもない。さらに、直ちに行使せずに待つことにすれば、1カ月後に株価が40ドルを下回っている機会がきわめて少ないかもしれないがいるという点で有利である。40ドルを下回った場合には、投資家はオプションを1カ月後に行使せず、期限前行使しなかったことを喜ぶであろう。

上の議論は、投資家がオプションの残存期間中（この例では1カ月間）は株式を保有する予定の場合において、期限前行使が有利でないことを示したものである。もしこの投資家が現在の株価は割高と考えており、オプションを行使して株を取得し、それを売却しようと考えている場合にはどうであろうか。この場合には、投資家はオプションを行使するよりも売却したほうがよい（注1）。このオプションは、株式を保有したいと考える他の投資家が購入するだろう。このような投資家は必ず存在する。そうでなければ、この株式の現在価格は50ドルではないはずである。オプションを売却できる価格は、前に述べた理由により、本源的価値の10ドルより高いはずである。

以上のことより一般的に示すために、(9.1)式

$$c \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

を用いる。アメリカン・コール・オプションの保有者は、ヨーロピアン・コール・オプションの保有者が権利行使できるときにはいつでも権利行使ができるので、

$$C \geq c$$

となり、

$$C \geq S_0 - Ke^{-rT}$$

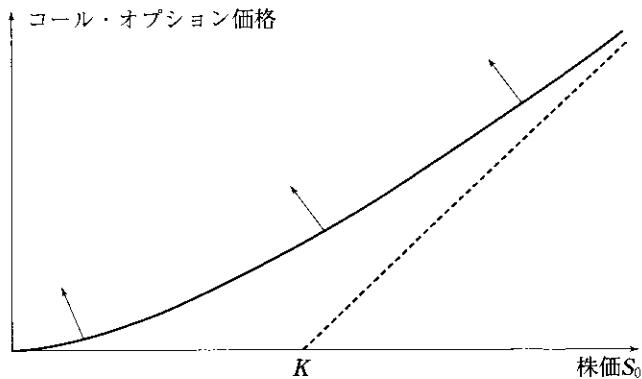
が成り立つ。 $r > 0$  とすると、上式より  $C > S_0 - K$  が成り立つ。期限前行使が最適であれば  $C$  は  $S_0 - K$  に等しくなる。このことから、期限前行使は決して最適にはならないことがわかる。

図9.3に、 $S_0$ を変化させたときにコール価格が変化する一般的な様子を示した。この図は、コール価格が常に本源的価値  $\max(S_0 - K, 0)$  を上回っていることを示している。 $r$ 、 $T$ 、またはボラティリティが増加すると、株価

---

(注1) 別の戦略として、オプションは保有し続け、株の空売りを行うことで10ドル以上の利益を確定させる方法もある。

図9.3 配当のない株式のアメリカンまたはヨーロピアン・コール・オプションの株価 $S_0$ に対する価格変化



に対するコールの価格曲線は矢印の方向へ（つまり、本源的価値から乖離する方向へ）変化する。

以上の考察を要約すると、配当のない株式のアメリカン・コール・オプションは期限前行使すべきでないこには二つの理由がある。一つの理由はその保険的性格である。現物株を保有するかわりにコール・オプションを保有すれば、行使価格を下回る株価下落に対する保険が実質的に得られている。オプションをいったん行使すると行使価格で株式を購入することになり、この保険は消滅してしまう。もう一つの理由は、現金の時間価値に関係するものである。オプションの保有者にとっては、行使価格の支払は後になればなるほど得である。

## 9.6 期限前行使：配当のない株式のプット

配当のない株式のアメリカン・プット・オプションの場合には、期限前行使が最適となることがある。実際、満期までのどの時点であっても、十分にイン・ザ・マネーのプット・オプションは期限前行使すべきである。

このことを例示するために、極端な状況を考えてみよう。行使価格が10ド

ル、現在の株価が実質ゼロであると仮定する。オプションを即座に行使すれば、投資家は直ちに10ドルの利益が得られる。株価は負にはならないから、行使しなければ、行使による利益は10ドル以下になることはあっても、決して10ドルを超えることはない。しかも、現在受け取る10ドルは将来の10ドルよりも価値がある。したがって、このオプションは即座に行使したほうがよいということになる。

コール・オプションと同様に、プット・オプションも保険的な性格をもっている。現物株とともにプット・オプションを保有すれば、ある株価水準からの株価下落に対して保険がかかる。しかし、プット・オプションはコール・オプションとは異なり、行使価格での売却を即座に実現するためにこの保険としての性格を放棄して、期限前行使するのが最適となる場合もある。一般に、 $S_0$ が低下し、 $r$ が上昇し、ボラティリティが減少するにつれ、プット・オプションの期限前行使が最適となるケースが増える。

(9.2)式より、

$$p \geq K e^{-rT} - S_0$$

が成り立っている。アメリカン・プット・オプションは即座に行使することがいつでも可能なため、その価格  $P$  に対しては、

$$P \geq K - S_0$$

というより強い条件が常に成り立っている。

図9.4に、 $S_0$ を変化させたときにアメリカン・プットの価格が変化する一般的な様子を示した。 $r > 0$ ならば、株価が十分に低いとき、アメリカン・プット・オプションは即座に行使するのが最適となる。期限前行使が最適な場合、オプションの価値は  $K - S_0$  となる。したがって、プットの価値を表す曲線は、 $S_0$ が十分に小さいある値でプットの本源的価値を表す直線  $K - S_0$  につながる。図9.4では、 $S_0$ のこの値を点Aで示している。 $r$ が低下し、ボラティリティが上昇し、 $T$ が増加すると、株価に対するプットの価格曲線は矢印の方向に変化する。

アメリカン・プット・オプションには期限前行使が望ましい状況が存在するため、その価値は同じ条件のヨーロピアン・オプションの価値よりも常に

図9.4 株価 $S_0$ に対するアメリカン・プット・オプションの価格変化

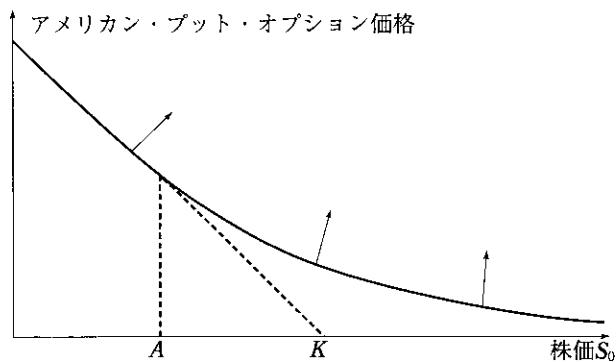
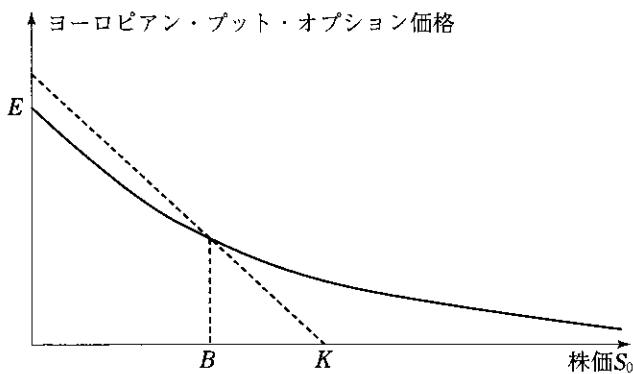


図9.5 株価 $S_0$ に対するヨーロピアン・プット・オプションの価格変化



高い。さらに、アメリカン・プット・オプションの価値は本源的価値に等しい場合もあるので（図9.4を参照）、ヨーロピアン・プット・オプションの価値は本源的価値より低くなる場合が必ずある。図9.5に、株価に対してヨーロピアン・プット・オプションの価格が変化する様子を示した。図9.5でオプション価格が本源的価値に等しくなる点  $B$  の表す株価は、図9.4の点  $A$  の表す株価よりも高くななければならない。図9.5の点  $E$  は、 $S_0=0$ でヨーロピアン・プット・オプションの価格が  $Ke^{-rT}$  となっている点である。

## 9.7 配当の影響

これまで本章で導いてきた結果は、配当のない株式のオプションに関するものである。そこで、本節では配当の影響について考えてみる。米国では、ほとんどの上場株券オプションの満期は1年未満で、オプションの満期までに支払われる配当は通常問題のない精度で予想できる。オプションの満期までに支払われる配当の現在価値を  $D$  で表すこととする。ただし、 $D$  の計算では配当は配当落ち日に発生するものと仮定する。

### コールとプットの下限

ポートフォリオ A と B を次のように定義し直す。

ポートフォリオ A：ヨーロピアン・コール・オプション 1 単位と  $D + Ke^{-rT}$  の現金

ポートフォリオ B：現物株 1 株

(9.1) 式を導出したときと同様の議論により、

$$c \geq S_0 - D - Ke^{-rT} \quad (9.5)$$

が成り立つことがわかる。さらに、ポートフォリオ C と D も次のように定義し直す。

ポートフォリオ C：ヨーロピアン・プット・オプション 1 単位と現物株 1 株

ポートフォリオ D： $D + Ke^{-rT}$  の現金

(9.2) 式を導出したときと同様の議論により、

$$p \geq D + Ke^{-rT} - S_0 \quad (9.6)$$

が成り立つことがわかる。

### 期限前行使

配当がある場合には、アメリカン・コール・オプションの期限前行使はないとは限らない。配当落ち日直前にアメリカン・コールを行使することが最適となる場合もある。これ以外のときには、コールの期限前行使は決して最

適とはならない。この点については13.12節でさらに議論する。

### プット・コール・パリティ

再定義したポートフォリオ A と C の満期時点における価値を比較することにより、配当のある場合には、(9.3)式のプット・コール・パリティは、

$$c + D + Ke^{-rT} = p + S_0 \quad (9.7)$$

となることがわかる。配当のある場合には、(9.4)式は、

$$S_0 - D - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT} \quad (9.8)$$

と修正される（章末問題9.19を参照）。

### 要 約

株券オプションの価値に影響を与える要因には、現在の株価、行使価格、満期日、株価のボラティリティ、無リスク金利、満期までに支払われる予想配当の六つがある。一般にコール・オプションの価値は、現在の株価、満期日までの時間、ボラティリティ、および無リスク金利が増加すれば高くなり、行使価格と予想配当が増加すれば低くなる。一般にプット・オプションの価値は、行使価格、満期日までの時間、ボラティリティ、および予想配当が増加すれば高くなり、現在の株価と無リスク金利が増加すれば低くなる。

株価のボラティリティになんら仮定を置かなくても、株券オプションの価値についていくつかの性質は得られる。たとえば、株券コール・オプションの価格は株価より常に低い。同様に、株券プット・オプションの価格は行使価格よりも常に低い。

配当のない株式のヨーロピアン・コール・オプションの価格は、

$$\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

以上である。ここで  $S_0$  は株価、 $K$  は行使価格、 $r$  は無リスク金利、 $T$  は満期までの時間である。配当のない株式のヨーロピアン・プット・オプション

の価格は、

$$\max(Ke^{-rt} - S_0, 0)$$

以上である。現在価値が  $D$  の配当が支払われるときは、ヨーロピアン・コール・オプションの下限は、

$$\max(S_0 - D - Ke^{-rt}, 0)$$

となり、ヨーロピアン・プット・オプションの下限は、

$$\max(Ke^{-rt} + D - S_0, 0)$$

となる。プット・コール・パリティとは、株式に対するヨーロピアン・コール・オプションの価格  $c$  とヨーロピアン・プット・オプションの価格  $p$  との間に成り立つ関係式である。配当のない株式に対するプット・コール・パリティは、

$$c + Ke^{-rt} = p + S_0$$

で与えられる。配当のある株式に対するプット・コール・パリティは、

$$c + D + Ke^{-rt} = p + S_0$$

で与えられる。

アメリカン・オプションに対しては、プット・コール・パリティは成り立たない。しかし、裁定の議論を用いて、アメリカン・コールの価格とアメリカン・プットの価格との差に対する上限と下限を与えることは可能である。

第13章では、株価の確率変動にある種の仮定を置いて、本章での分析をさらに詳しく行う。これにより、ヨーロピアン・オプションの評価式を導出することができる。さらに第11章と第19章では、数値計算手法を用いたアメリカン・オプションの評価方法について検討する。

## 参考文献

Black, F., and M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973) : 637-59.

- Broadie, M., and J. Detemple. "American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods," *Review of Financial Studies*, 9, 4 (1996) : 1211-50.
- Merton, R.C. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29, 2 (1974) : 449-70.
- Merton, R.C. "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973) : 141-83.
- Merton, R.C. "The Relationship between Put and Call Prices: Comment," *Journal of Finance*, 28 (March 1973) : 183-84.
- Stoll, H.R. "The Relationship between Put and Call Option Prices," *Journal of Finance*, 24 (December 1969) : 801-24.

### 章末問題

- 9.1 株券オプションの価格に影響を与える六つの要素を列挙せよ。
- 9.2 配当のない株式に対する満期4カ月のコール・オプション価格の下限を、株価が28ドル、行使価格が25ドル、無リスク金利が年率8%のときに求めよ。
- 9.3 配当のない株式に対する満期1カ月のヨーロピアン・プット・オプション価格の下限を、株価が12ドル、行使価格が15ドル、無リスク金利が年率6%のときに求めよ。
- 9.4 配当のない株式のアメリカン・コール・オプションに対する期限前行使が最適とならない理由を二つあげよ。一つ目は現金の時間価値に関連するものである。二つ目は金利が0%であっても成り立つ理由である。
- 9.5 「アメリカン・プット・オプションの期限前行使は、現金の時間価値とプット・オプションの保険的価値との兼ね合いである」。この主張の意味を説明せよ。

- 9.6** 配当のある株式に対するアメリカン・コール・オプションの価値が常に本源的価値以上となる理由を説明せよ。ヨーロピアン・コール・オプションに対しても同じことが成り立つかを説明せよ。
- 9.7** 配当のない株式の価格が19ドルで、行使価格20ドルのその株式に対する満期3カ月のヨーロピアン・コール・オプションの価値が1ドルである。無リスク金利は年率4%とする。このとき、満期3カ月、行使価格20ドルのヨーロピアン・プット・オプションの価格はいくらになるか。
- 9.8** ヨーロピアン・オプションに対するプット・コール・パリティを導いた議論が、アメリカン・オプションに対しては適用できない理由を説明せよ。
- 9.9** 配当のない株式に対する満期6カ月のコール・オプション価格の下限を、株価が80ドル、行使価格が75ドル、無リスク金利が年率10%のときに求めよ。
- 9.10** 配当のない株式に対する満期2カ月のヨーロピアン・プット・オプション価格の下限を、株価が58ドル、行使価格が65ドル、無リスク金利が年率5%のときに求めよ。
- 9.11** 配当のある株式に対する満期4カ月のヨーロピアン・コール・オプションが現在5ドルで売られている。株価は64ドル、行使価格は60ドル、1カ月後に0.80ドルの配当が予想されている。すべての満期に対して無リスク金利は年率12%とする。このとき、どのような裁定機会があるか。
- 9.12** 配当のない株式に対する満期1カ月のヨーロピアン・プット・オプションが現在2.50ドルで売られている。株価は47ドル、行使価格は50ドル、無リスク金利は年率6%とする。このとき、どのような裁定機会があるか。
- 9.13** 無リスク金利が上昇してボラティリティが低下すると、アメリカン・プット・オプションの期限前行使が最適となるケースが増える。その理由を直観的にわかるように説明せよ。

- 9.14** 行使価格30ドル、満期6カ月のヨーロピアン・コール・オプションの価格が2ドルである。原資産の株価は29ドル、2カ月後と5カ月後に0.50ドルの配当が予想されている。金利の期間構造はフラットで、無リスク金利は年率10%とする。このとき、行使価格30ドル、満期6カ月のヨーロピアン・プット・オプションの価格はいくらになるか。
- 9.15** 問題9.14でヨーロピアン・プット・オプションの価格が3ドルの場合、どのような裁定機会があるかを説明せよ。
- 9.16** 配当のない株式に対するアメリカン・コールの価格が4ドルである。株価は31ドル、行使価格は30ドル、満期は3カ月で、無リスク金利は年率8%とする。このとき、同じ株式に対する行使価格と満期が同じアメリカン・プット・オプションの価格の上限と下限を求めよ。
- 9.17** 問題9.16で、アメリカン・プット・オプションの価格が求めた上限よりも高かった場合、どのような裁定機会があるかを説明せよ。
- 9.18** (9.4)式を証明せよ (ヒント: 最初の不等式については、(a)ヨーロピアン・コールと  $K$  の現金からなるポートフォリオと(b)アメリカン・プット・オプションと現物株1株からなるポートフォリオを考えよ)。
- 9.19** (9.8)式を証明せよ (ヒント: 最初の不等式については、(a)ヨーロピアン・コールと  $D+K$  の現金からなるポートフォリオと(b)アメリカン・プット・オプションと現物株1株からなるポートフォリオを考えよ)。
- 9.20** 満期5年の従業員ストック・オプションを考える。オプションは1年後から行使可能である。通常の上場コール・オプションとは異なり、従業員ストック・オプションは売却することができない。この制約が期限前行使の判断に与える影響を述べよ。
- 9.21** DerivaGem ソフトウェアを使って、図9.1と図9.2が正しいことを確かめよ。

## 宿題

- 9.22 ある株式に対する行使価格20ドル、満期3カ月のヨーロピアン・コール・オプションおよびプット・オプションがともに3ドルで売られている。無リスク金利は年率10%，現在の株価は19ドルで、1カ月後に1ドルの配当が予想されている。このとき、裁定機会があるかを確認せよ。
- 9.23  $c_1, c_2, c_3$ をそれぞれ行使価格が  $K_1, K_2, K_3$ の同一満期のヨーロピアン・コール・オプションの価格とする。ただし、 $K_3 > K_2 > K_1$ かつ  $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$ である。このとき、次の関係が成り立つことを示せ。

$$c_2 \leq 0.5(c_1 + c_3)$$

(ヒント：行使価格  $K_1$ と  $K_3$ のオプションを1単位ずつ買い付け、行使価格  $K_2$ のオプションを2単位売り付けたポートフォリオを考えよ。)

- 9.24 ヨーロピアン・プット・オプションに対して、問題9.23に対応する結果を導け。
- 9.25 あなたが借入比率の非常に高い企業の経営者で唯一の所有者だとする。また、すべての借入れに対する返済期限は1年後とする。1年後に企業の価値が借入れの返済額以上であれば借入れを返済し、返済額未満であれば破産を宣言して、企業の所有権を債権者に移転するとする。
- あなたのポジションを企業価値に対するオプションとして表せ。
  - 債権者のポジションを企業価値に対するオプションを用いて表せ。
  - あなたのポジションの価値を増やすためにできることは何か。
- 9.26 株価を41ドル、行使価格を40ドル、無リスク金利を6%，ボラティリティを35%，満期を1年として、株券オプションについて考える。6カ月後に0.50ドルの配当が予想されていると仮定する。
- DerivaGem ソフトウェアを使ってヨーロピアン・コールの価値

を計算せよ。

- (b) DerivaGem ソフトウェアを使ってヨーロピアン・プットの価値を計算せよ。
- (c) プット・コール・パリティが成り立つことを確かめよ。
- (d) DerivaGem ソフトウェアを使って、満期までの時間が非常に長くなるに従ってオプション価格がどのように変わるかを調べよ。また、得られた結果について説明せよ。ただし、この問では配当はないものとする。

## 第10章

# オプションを用いた取引戦略

第8章では、株券オプション単体に投資したときの損益パターンについて論じた。本章では、複数のオプションを利用して得られるさまざまな損益パターンについて説明する。ここでは株券オプションを用いて説明を行うが、外国通貨、株価指数、および先物契約などの他の資産を原資産とするオプションについても同様の損益パターンを得ることが可能である。また、取引戦略に使われるオプションはヨーロピアン・オプションとする。アメリカン・オプションを用いた場合には、期限前行使の可能性があるため、説明するものと若干異なる結果となる。

はじめに、現物株式とその株券オプションを組み合わせたポジションについて考える。次に、同一株式に対する複数のオプションの組合せにより得られる損益パターンについて考える。オプションの魅力の一つは、非常に多くの異なるペイオフ関数（株価の関数としてのペイオフ）がつくれることであ

る。任意の行使価格のヨーロピアン・オプションが利用できるならば、理論的にはどんなペイオフ関数でもつくることが可能である。

説明を簡単にするために、取引戦略の損益を表す図表では、オプションの時間価値は無視することにする。したがって、損益としては満期での支払額から初期コストを差し引いたものが示されている（理論的には、損益は満期での支払額の現在価値から初期コストを差し引いたものとして計算すべきである）。

## 10.1 オプションと現物株を1単位ずつ用いた戦略

株券オプション単体とその現物株式との組合せによる取引戦略には多くの種類がある。図10.1(次頁)にこれらの取引による損益を図示する。本章の図では、点線でポートフォリオを構成する個々の証券の損益と株価の関係を表し、実線でポートフォリオ全体の損益と株価の関係を表すことにする。

図10.1(a)のポートフォリオは、株式の買いポジションとコール・オプションの売りポジションとの組合せである。この投資戦略はカバード・コールの売り (writing a covered call) として知られている。この名の由来は、株の買いポジションが急激な株価上昇時にコールの売りから生じる損失を「カバーする」、すなわち守ることからきている。図10.1(b)では、株式の売りポジションとコール・オプションの買いポジションが組み合わされており、カバード・コールの売りの逆になっている。図10.1(c)の投資戦略は、株券プット・オプションおよびその株式の買いから構成されている。これはプロテクティブ・プット (protective put) と呼ばれる戦略である。図10.1(d)はプロテクティブ・プットの逆で、株式の売りポジションとプット・オプションの売りポジションが組み合わされている。

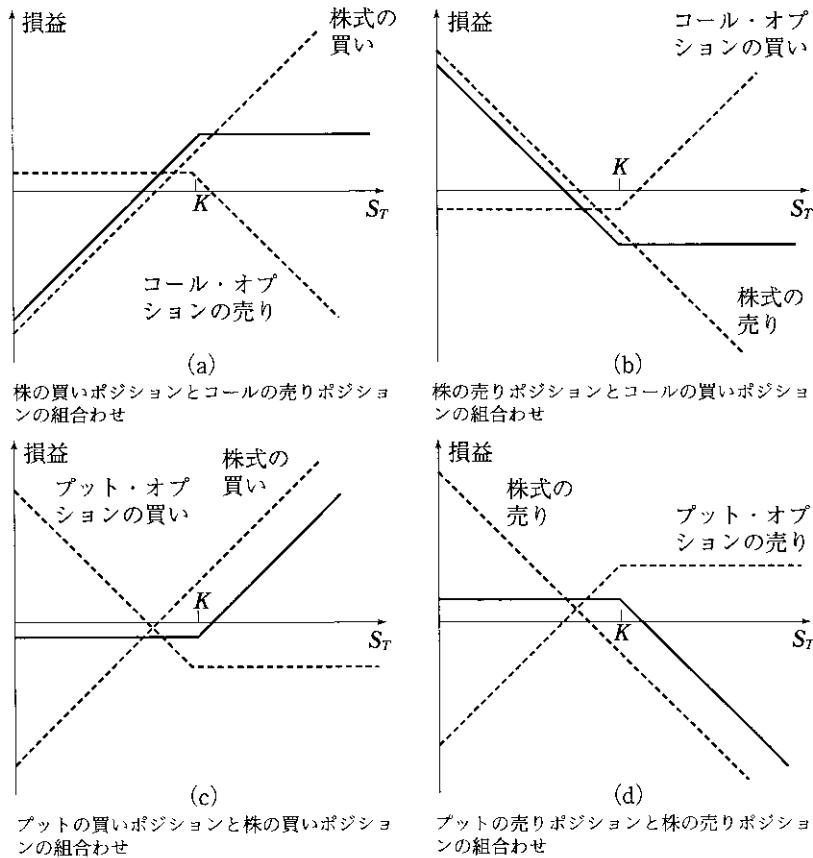
図10.1のそれぞれの損益パターンは、第8章で説明したプットの売り、プットの買い、コールの買い、コールの売りの損益パターンと基本的に同じ形をしている。その理由はプット・コール・パリティから説明できる。第9章で説明したように、プット・コール・パリティは、

$$p + S_0 = c + Ke^{-rt} + D \quad (10.1)$$

で与えられる。ここで  $\varphi$  はヨーロピアン・プットの価格,  $S_0$  は株価,  $c$  はヨーロピアン・コールの価格,  $K$  はコールおよびプットの行使価格,  $r$  は無リスク金利,  $T$  はコールおよびプットの満期までの時間,  $D$  はオプション満期までに支払われる予想配当の現在価値である。

(10.1)式は、プットの買いと株の買いの複合ポジションが、コールの買いと  $Ke^{-rT} + D$  の現金の複合ポジションに等しいことを示している。これより、図10.1(c)の損益パターンとコールの買いの損益パターンとが類似している理由が説明できる。図10.1(d)のポジションは図10.1(c)のポジションの逆な

図10.1 各取引戦略の損益パターン



ので、その損益パターンはコールの売りの損益パターンと類似している。

(10.1)式を変形すると、

$$S_0 - c = Ke^{-rT} + D - p$$

と書き換える。これは、株の買いポジションとコールの売りポジションの組合せがプットの売りポジションに  $Ke^{-rT} + D$  の現金を加えたものと同じであることを示している。これより、図10.1(a)の損益パターンとプットの売りポジションの損益パターンとが類似している理由が説明できる。図10.1(b)のポジションは図10.1(a)のポジションの逆なので、その損益パターンはプットの買いポジションの損益パターンと類似している。

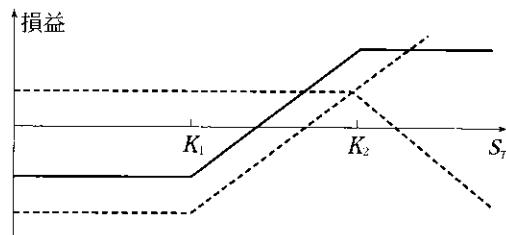
## 10.2 スプレッド取引

スプレッド取引は、二つ以上の同じタイプのオプション（すなわち、二つ以上のコールまたは二つ以上のプット）についてポジションをとる取引戦略である。

### ブル・スプレッド

最もよく取引されているスプレッドの一つはブル・スプレッド (bull spread) である。これは、ある行使価格のコール・オプションを買うと同時に、それより高い行使価格の同じ株式に対する満期の同じコール・オプションを売ることによってつくることができる。図10.2にこの戦略を図示した。

図10.2 コール・オプションを用いたブル・スプレッドの損益



点線は二つのオプションの損益を別々に表したものである。戦略全体の損益は点線で与えられた損益を足し合わせたもので、実線で表されている。行使価格が高くなるとコールの価格は低くなるので、売り付けたオプションの価格は買い付けたオプションの価格より常に低い。したがって、コールを用いてブル・スプレッドを組む場合には、初期投資資金が必要となる。

購入するコール・オプションの行使価格を  $K_1$ 、売却するコール・オプションの行使価格を  $K_2$ 、オプション満期日の株価を  $S_T$  とする。表10.1はブル・スプレッドのペイオフを株価水準別に示したものである。株価が順調に上昇してオプション満期日の株価が高いほうの行使価格を上回れば、ペイオフは二つの行使価格の差、すなわち  $K_2 - K_1$  になる。満期日の株価が二つの行使価格の間であれば、ペイオフは  $S_T - K_1$  になる。満期日の株価が低いほうの行使価格を下回れば、ペイオフはゼロになる。図10.2の損益はペイオフから初期投資額を差し引いたものである。

ブル・スプレッドは、ダウンサイド・リスクとともに投資家のアップサイドも限定する戦略である。この戦略は、投資家が行使価格  $K_1$  のコール・オプションを保有すると同時に、行使価格  $K_2$  ( $K_2 > K_1$ ) のコール・オプションを売ることで、アップサイドのある部分をあきらめる選択をした戦略ということができる。アップサイドのある部分をあきらめる見返りとして、投資家は行使価格  $K_2$  のオプションを売却した代金を受け取るのである。ブル・スプレッドは次の三つのタイプに分類できる。

1. 両方のコールが当初アウト・オブ・ザ・マネーであるタイプ
2. 一方のコールが当初イン・ザ・マネーで、他方のコールが当初アウ

表10.1 コール・オプションを用いたブル・スプレッドのペイオフ

| 株価の範囲             | コールの買いのペイオフ | コールの売りのペイオフ    | ペイオフの合計     |
|-------------------|-------------|----------------|-------------|
| $S_T \leq K_1$    | 0           | 0              | 0           |
| $K_1 < S_T < K_2$ | $S_T - K_1$ | 0              | $S_T - K_1$ |
| $S_T \geq K_2$    | $S_T - K_1$ | $-(S_T - K_2)$ | $K_2 - K_1$ |

ト・オブ・ザ・マネーであるタイプ

### 3. 両方のコールが当初イン・ザ・マネーであるタイプ

最もアグレッシブなブル・スプレッドはタイプ1である。戦略を組むのにわずかな初期投資しか必要としないが、最も大きいペイオフ ( $K_2 - K_1$ ) を得る可能性も低い。タイプ1からタイプ2、タイプ2からタイプ3へと進むにつれて、戦略は保守的になる。

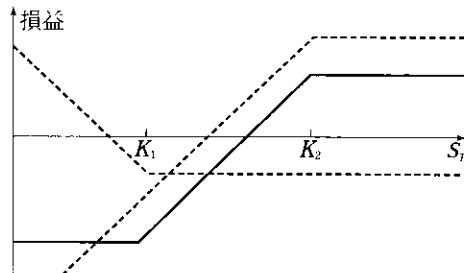
#### 【例10.1】

ある投資家が行使価格30ドルのコールを3ドルで買い、行使価格35ドルのコールを1ドルで売る。このブル・スプレッド戦略のペイオフは、株価が35ドル以上ならば5ドル、30ドル以下ならばゼロである。株価が30ドルから35ドルの間では、ペイオフは株価が30ドルを上回った額である。この戦略のコストは3ドル - 1ドル = 2ドルである。したがって、損益は次の表のようになる。

| 株価の範囲           | 損益         |
|-----------------|------------|
| $S_T \leq 30$   | -2         |
| $30 < S_T < 35$ | $S_T - 32$ |
| $S_T \geq 35$   | 3          |

図10.3に示すように、ブル・スプレッドは低い行使価格のプットを買い、高い行使価格のプットを売ることによって組むこともできる。コールを用い

図10.3 プット・オプションを用いたブル・スプレッドの損益



たブル・スプレッドと異なり、プットを用いたブル・スプレッドでは、投資家は（証拠金を無視すると）正のキャッシュフローを取引当初に受け取ることになる。そのかわり、満期時点のペイオフは負またはゼロになる。

### ベア・スプレッド

ブル・スプレッドを組む投資家は、株価の上昇を期待している。それに対し、ベア・スプレッド (bear spread) を組む投資家は株価の下落を期待している。ベア・スプレッドはある行使価格のプットを買い、別の行使価格のプットを売ることによってつくることができる。購入するオプションの行使価格のほうが、売却するオプションの行使価格より高い（これは、購入するオプションの行使価格のほうが売却するオプションの行使価格より常に低いブル・スプレッドと対照的である）。図10.4にスプレッドの損益を実線で示す。プットを用いてベア・スプレッドを組むと、売却するプットの価格のほうが購入するプットの価格より低いので、初期投資資金が必要となる。ある行使

図10.4 プット・オプションを用いたベア・スプレッドの損益

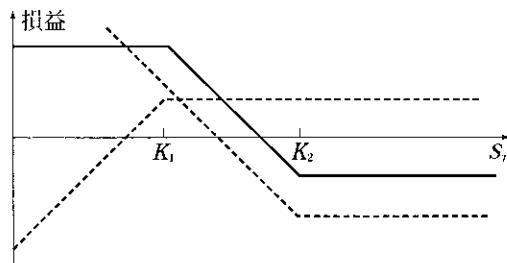


表10.2 プット・オプションを用いたベア・スプレッドのペイオフ

| 株価の範囲             | プットの買いのペイオフ | プットの売りのペイオフ    | ペイオフの合計     |
|-------------------|-------------|----------------|-------------|
| $S_r \leq K_1$    | $K_2 - S_r$ | $-(K_1 - S_r)$ | $K_2 - K_1$ |
| $K_1 < S_r < K_2$ | $K_2 - S_r$ | 0              | $K_2 - S_r$ |
| $S_r \geq K_2$    | 0           | 0              | 0           |

価格のプットを買うとともに、それより低い行使価格のプットを売ることで収益のある部分の可能性をあきらめる、というのがこの戦略の本質的な部分である。そのあきらめた収益の見返りとして、投資家はオプションの売却代金を得ることができる。

行使価格を  $K_1$ ,  $K_2$  ( $K_1 < K_2$ ) と仮定する。表10.2は、ペア・スプレッドのペイオフを株価水準別に示したものである。株価が  $K_2$  より高ければペイオフはゼロである。株価が  $K_1$  より低ければペイオフは  $K_2 - K_1$  になる。また、株価が  $K_1$  と  $K_2$  の間であればペイオフは  $K_2 - S_T$  になる。ペイオフから初期コストを差し引いたものが損益である。

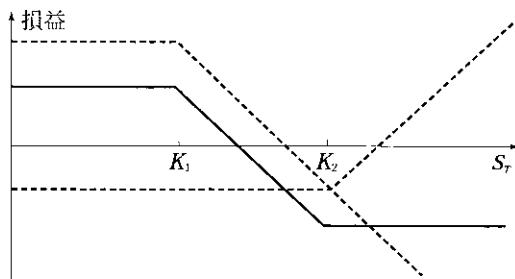
### 【例10.2】

ある投資家が 3 ドルで行使価格35ドルのプットを買い、1 ドルで行使価格30ドルのプットを売る。このペア・スプレッド戦略からのペイオフは、株価が35ドル以上であればゼロであり、30ドル以下であれば5 ドルである。もし株価が30ドルから35ドルの間であれば、ペイオフは35− $S_T$ である。オプションの初期コストは 3 ドル − 1 ドル = 2 ドルである。したがって、損益は次の表のようになる。

| 株価の範囲           | 損益         |
|-----------------|------------|
| $S_T \leq 30$   | +3         |
| $30 < S_T < 35$ | $33 - S_T$ |
| $S_T \geq 35$   | -2         |

ブル・スプレッドと同様に、ペア・スプレッドも投資家のとりうる利益と損失の両方を限定する戦略である。ペア・スプレッドは、プットのかわりにコールを用いてつくることもできる。図10.5(次頁)に示すように、高い行使価格のコールを買って、低い行使価格のコールを売ればよい。コールを用いたペア・スプレッドでは、投資家は(証拠金を無視すると)正のキャッシュフローを取引当初に受け取ることになる。

図10.5 コール・オプションを用いたペア・スプレッドの損益



### ボックス・スプレッド

ボックス・スプレッド (box spread) は、行使価格  $K_1$  と  $K_2$  のブル・コール・スプレッドと同じ行使価格のペア・プット・スプレッドとの組合せである。表10.3に示すように、ボックス・スプレッドのペイオフは常に  $K_2 - K_1$  となる。したがって、ボックス・スプレッドの価値は常にこのペイオフの現在価値、すなわち  $(K_2 - K_1)e^{-rt}$  である。この値と異なれば裁定機会が存在する。ボックス・スプレッドの市場価格が低すぎるのであれば、ボックス・スプレッドを購入して収益をあげることができる。これは、行使価格  $K_1$  のコールの買い、行使価格  $K_2$  のプットの買い、行使価格  $K_2$  のコールの売り、行使価格  $K_1$  のプットの売りからなる。ボックス・スプレッドの市場価格が高すぎるのであれば、ボックス・スプレッドを売却して収益をあげることができる。これは、行使価格  $K_2$  のコールの買い、行使価格  $K_1$  のプットの買い、行使価格  $K_1$  のコールの売り、行使価格  $K_2$  のプットの売りからなる。

ボックス・スプレッドの裁定取引はヨーロピアン・オプションでのみうまくいく、ということを認識しておくことは大事である。上場オプションのほとんどはアメリカンである。ビジネス寸見10.1で紹介するように、経験の浅いトレーダーはアメリカン・オプションをヨーロピアン・オプションとして扱ってしまい、損失を被りやすい。

表10.3 ボックス・スプレッドのペイオフ

| 株価の範囲             | ブル・コール・<br>スプレッドの<br>ペイオフ | ペア・プット・<br>スプレッドの<br>ペイオフ | ペイオフの合計     |
|-------------------|---------------------------|---------------------------|-------------|
| $S_T \leq K_1$    | 0                         | $K_2 - K_1$               | $K_2 - K_1$ |
| $K_1 < S_T < K_2$ | $S_T - K_1$               | $K_2 - S_T$               | $K_2 - K_1$ |
| $S_T \geq K_2$    | $K_2 - K_1$               | 0                         | $K_2 - K_1$ |

### ビジネス寸見10.1 ボックス・スプレッドでの損失

ある株式の株価を50ドル、そのボラティリティを30%とする。この株式に配当はないものとし、無リスク金利は8%とする。あるトレーダーがCBOEで取引する行使価格が55ドルと60ドルの2カ月物ボックス・スプレッドの売りを5.10ドルで提案してきたとしよう。この取引は行うべきか。

この取引はたしかに魅力的にみえる。 $K_1 = 55$ ,  $K_2 = 60$ とすると、2カ月後のペイオフは5ドルになる。ボックス・スプレッドを5.10ドルで売り、売却代金を2カ月間運用すれば、2カ月後には5ドルのペイオフに見合う以上の金額を得る。ちなみに現時点でのボックス・スプレッドの理論価値は $5 \times e^{-0.08 \times 2/12} = 4.93$ ドルである。

不幸にも、これには落とし穴がある。CBOEの株券オプションはアメリカンであるが、ボックス・スプレッドのペイオフ5ドルはヨーロピアン・オプションを前提としたものである。(DerivaGemソフトウェアを使って計算した)本例のオプション価格は下表のとおりである。行使価格が55ドルと60ドルのブル・コール・スプレッドのコストは $0.96 - 0.26 = 0.70$ ドルとなる(第9章でみたように、配当がない場合はヨーロピアン・コールとアメリカン・コールの価格は等しくなるため、ヨーロピアンとアメリカンの違いはない)。一方、同じ行使価格のペア・プット・スプ

レッドのコストは、ヨーロピアンであれば $9.46 - 5.23 = 4.23$ ドル、アメリカンであれば $10.00 - 5.44 = 4.56$ ドルとなる。したがって、ヨーロピアン・オプションでスプレッドを組む場合の両スプレッドを合わせた価値は $0.70 + 4.23 = 4.93$ ドルとなる。これは上で求めたボックス・スプレッドの理論価格である。一方、アメリカン・オプションの場合の両スプレッドを合わせた価値は $0.70 + 4.56 = 5.26$ ドルとなる。したがって、アメリカン・オプションで組んだボックス・スプレッドを5.10ドルで売るのはよい取引ではない。この取引には行使価格60ドルのプットの売りが含まれ、売却したほとんど直後にそれが行使されて、この取引がよくなかったことにすぐ気づかされるであろう。

| オプション<br>の種類 | 行使価格 | ヨーロピアン・<br>オプションの価格 | アメリカン・<br>オプションの価格 |
|--------------|------|---------------------|--------------------|
| コール          | 60   | 0.26                | 0.26               |
| コール          | 55   | 0.96                | 0.96               |
| プット          | 60   | 9.46                | 10.00              |
| プット          | 55   | 5.23                | 5.44               |

### バタフライ・スプレッド

バタフライ・スプレッド (butterfly spread) は、三つの異なる行使価格のオプションからなる。低い行使価格  $K_1$  のコールと高い行使価格  $K_3$  のコールを 1 単位ずつ買い、 $K_1$  と  $K_3$  の中間の行使価格  $K_2$  のコールを 2 単位売ることでつくれる。 $K_2$  は現在の株価に近い価格にするのが一般的である。この戦略の損益パターンを図10.6に示す。バタフライ・スプレッドは株価が  $K_2$  の近辺にとどまるとき利益を生むが、株価がどちらかの方向に大きく動くと少額の損失が発生する。したがって、この戦略は株価に大きな動きはないと考えている投資家に適したものである。この戦略には少額の初期投資が必要である。バタフライ・スプレッドのペイオフを表10.4に示す。

図10.6 コール・オプションを用いたバタフライ・スプレッドの損益

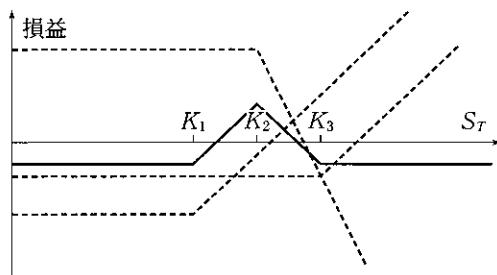


表10.4 バタフライ・スプレッドのペイオフ

| 株価の範囲             | 一つ目のコールの買いのペイオフ | 二つ目のコールの買いのペイオフ | コールの売りのペイオフ     | ペイオフの合計*    |
|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|
| $S_T \leq K_1$    | 0               | 0               | 0               | 0           |
| $K_1 < S_T < K_2$ | $S_T - K_1$     | 0               | 0               | $S_T - K_1$ |
| $K_2 < S_T < K_3$ | $S_T - K_1$     | 0               | $-2(S_T - K_2)$ | $K_3 - S_T$ |
| $S_T \geq K_3$    | $S_T - K_1$     | $S_T - K_3$     | $-2(S_T - K_2)$ | 0           |

\* これらのペイオフは  $K_2 = 0.5(K_1 + K_3)$  として計算されている。

ある株式の現在の株価を61ドルとする。今後6カ月間に株価が大きく動く可能性は低いと考えている投資家がいるとしよう。満期6カ月のコールの価格を以下のとおりとする。

| 行使価格（ドル） | コール価格（ドル） |
|----------|-----------|
| 55       | 10        |
| 60       | 7         |
| 65       | 5         |

投資家は、行使価格55ドルのコールと行使価格65ドルのコールを1単位ずつ買い、行使価格60ドルのコール2単位を売ることにより、バタフライ・スプレッドをつくることができる。このスプレッドをつくるためのコストは  $10 + 5 - (2 \times 7) = 1$  ドルである。もし6カ月後の株価が65ドル以上もしくは

55ドル以下であれば、ペイオフはゼロなので、投資家は差引き1ドルの損となる。もし株価が56ドルから64ドルの間であれば利益が得られる。6カ月後の株価が60ドルのとき、利益は最大の4ドルになる。

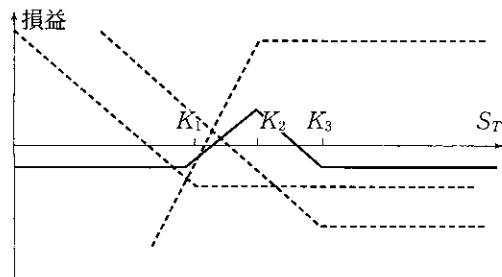
バタフライ・スプレッドはプット・オプションを用いてつくることもできる。図10.7に示すように、低い行使価格のプットと高い行使価格のプットを1単位ずつ買い、その間の行使価格のプットを2単位売ればよい。上の例のバタフライ・スプレッドは、行使価格55ドルのプットと行使価格65ドルのプットを1単位ずつ買い、行使価格60ドルのプットを2単位売ればつくられる。すべてのオプションがヨーロピアンであれば、プット・オプションを用いたバタフライ・スプレッドは、コール・オプションを用いたバタフライ・スプレッドとまったく同じになる。プット・コール・パリティを用いて、初期投資額は同じになることを示せる。

バタフライ・スプレッドは、次のような逆のポジションをとることによって、売却、すなわち売り付けることができる。行使価格  $K_1$  と  $K_3$  のオプションを1単位ずつ売り、行使価格  $K_2$  のオプションを2単位買えばよい。この戦略では、株価が大きく変動したときに少しの利益を得ることができる。

### カレンダー・スプレッド

ここまで、満期の同じオプションを用いてスプレッドを組んできた。次に、行使価格が同一で満期日の異なるオプションを用いるカレンダー・ス

図10.7 プット・オプションを用いたバタフライ・スプレッドの損益



レッド (calendar spread) について説明する。

カレンダー・スプレッドは、ある行使価格のコールを売り、それより満期の長い同じ行使価格のコールを買うことによってつくられる。オプションの価格は満期が長くなるほど高くなるのが通常である。したがって、カレンダー・スプレッドをつくるには初期投資資金が必要である。カレンダー・スプレッドの損益図は、通常、短期のオプションが満期を迎える、その時点で長期のオプションを転売したときの損益パターンで表す。コールを用いたカレンダー・スプレッドの損益パターンを図10.8に示す。これは図10.6に示したバタフライ・スプレッドの損益パターンに似ている。投資家は、短期のオプションの満期日に株価がそのオプションの行使価格に近ければ利益を得る。しかし、株価がこの行使価格を大きく上回るかまたは下回ったときには損失を被る。

カレンダー・スプレッドの損益パターンを理解するために、まず、短期のオプションが満期を迎えたときに株価が非常に低い場合について考えよう。その場合、短期のオプションには価値がなく、長期のオプションの価値もほとんどゼロである。したがって、この投資家は初期コストに近い額の損失を被る。次に、短期のオプションが満期を迎えたときに株価  $S_T$  が非常に高い場合を考える。 $K$  をオプションの行使価格とすると、投資家にとって短期のオプションは  $S_T - K$  のコストになり、長期のオプションは  $S_T - K$  に近い価値をもつ。したがってこの場合も、投資家はスプレッドをつくったときの初期コストに近い額の損失を被る。もし  $S_T$  が  $K$  に近ければ、短期のオプションでの損失額は少額かまたはゼロである。しかし、長期のオプションにはまだそれなりの価値がある。したがって、この場合には大きな利益が得られる。

現在の株価に近い行使価格を選択したカレンダー・スプレッドをニュートラル・カレンダー・スプレッド (neutral calendar spread) と呼ぶ。また、現在の株価より高い行使価格を選択したものをブル・カレンダー・スプレッド (bullish calendar spread) と呼び、現在の株価より低い行使価格を選択したものをペア・カレンダー・スプレッド (bearish calendar spread) と呼ぶ。

カレンダー・スプレッドは、コール・オプションではなく、プット・オプションを用いてつくることもできる。長期のプット・オプションを買って、短期のプット・オプションを売ればよい。図10.9に示すように、その損益パターンはコールを用いた損益パターンと同様のものになる。

リバース・カレンダー・スプレッド (reverse calendar spread) は図10.8や図10.9の戦略と反対の取引戦略で、短期オプションの買いと長期オプションの売りからなる。短期のオプションの満期日における株価が行使価格を大き

図10.8 二つのコールを用いたカレンダー・スプレッドの損益

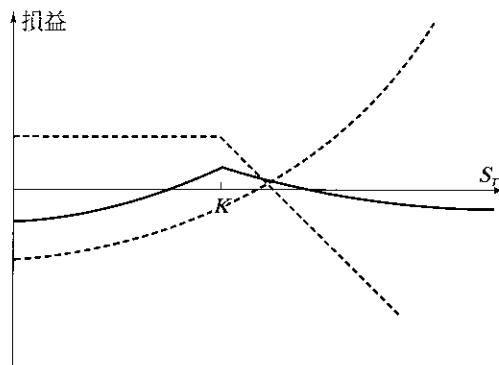
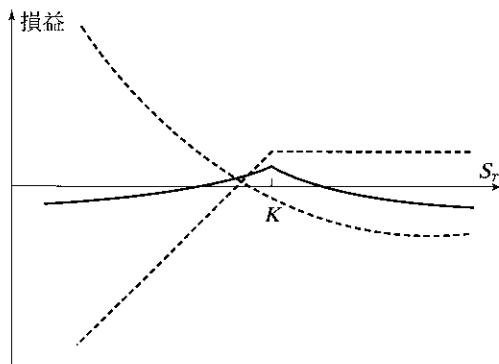


図10.9 二つのプットを用いたカレンダー・スプレッドの損益



く上回るか下回れば、少額の利益が得られる。しかし、その株価が行使価格に近ければ大幅な損失を被る。

### ダイアゴナル・スプレッド

プル・スプレッド、ペア・スプレッド、およびカレンダー・スプレッドは、いずれもコールの買いと別のコールの売りからつくられている。プル・スプレッドとペア・スプレッドの場合は、異なる行使価格の満期の同じコールからなる。カレンダー・スプレッドの場合は、同じ行使価格の満期の異なるコールからなる。

ダイアゴナル・スプレッド (diagonal spread) は、満期日と行使価格の両方が異なるコールを組み合わせたものである。その結果、より多くの損益パターンをつくることができる。

## 10.3 コンビネーション

コンビネーション (combination) とは、同じ株式に対するコールとプットの両方のポジションをとるオプションの取引戦略である。本節では、ストラドル、ストリップ、ストラップ、およびストラングルについて考察する。

### ストラドル

よく取引されているコンビネーションの一つはストラドル (straddle) という、同じ行使価格と満期のコールとプットの買いからなる取引戦略である。行使価格が  $K$  のこのポジションの損益パターンを図10.10(次頁)に示す。オプション満期日の株価が行使価格に近いと、ストラドルは損失で終わる。しかし、株価がどちらかの方向に大きく動けば、大きな利益が得られる。ストラドルのペイオフは表10.5(次頁)のようになる。

ストラドルは、株価が大きく変動することは予想されるものの、どちらの方向に動くか見当がつかない場合に適した取引戦略である。現在市場で69ドルと値付けされている株の価格が今後3ヶ月の間に大きく動くと予測してい

図10.10 ストラドルの損益

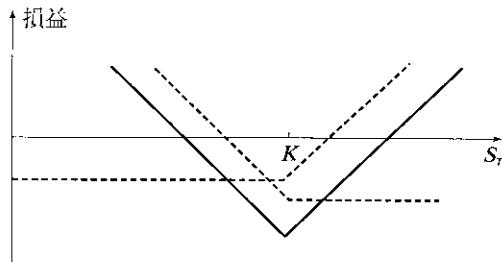


表10.5 ストラドルのペイオフ

| 株価の範囲        | コールのペイオフ  | プットのペイオフ  | ペイオフの合計   |
|--------------|-----------|-----------|-----------|
| $S_T \leq K$ | 0         | $K - S_T$ | $K - S_T$ |
| $S_T > K$    | $S_T - K$ | 0         | $S_T - K$ |

る投資家がいるとしよう。投資家は、行使価格70ドル、満期3カ月のコールとプットを買って、ストラドルをつくることができる。ここでコールの価格を4ドル、プットの価格を3ドルとしよう。もし株価が69ドルのまま動かなかったとすると、この戦略は6ドルの損失に終わることが容易にわかる（初期投資額は7ドル、満期時のコールは無価値で、プットの価値は1ドルである）。株価が70ドルになれば7ドルの損失となる（これが最悪のケースである）。しかし、株価が90ドルにまで急上昇すれば13ドルの利益が得られ、株価が55ドルまで下落すれば8ドルの利益が得られる等々である。ビジネス寸見10.2で説明するように、ストラドル取引を行う前に、投資家は予想する株価のジャンプがすでにオプション価格に織り込まれているかどうかを注意深く検討する必要がある。

図10.10のストラドルは、ボトム・ストラドル (bottom straddle) またはストラドルの買い (straddle purchase) と呼ばれることがある。トップ・ストラドル (top straddle) またはストラドルの売り (straddle write) とは、この逆のポジションである。それは、行使価格と満期が同じプットとコールを売ることによってつくれる。これはリスクの高い戦略である。もし満期日の株価が行使価格に近ければ大きな利益を生むが、大きく株価が変動した場合

## ビジネス寸見10.2 ストラドルで儲ける方法

TOB や大きな訴訟の判決が発表されることで、ある企業の株価が大きく変動すると予想されているとしよう。このときストラドルを取引すべきか。

この場合、ストラドルは自然な取引戦略のように思われる。しかし、もし企業の置かれた状況に対するこの見方が他の市場参加者の見方と似通ったものであるならば、それはすでにオプションの価格に織り込まれているだろう。株価のジャンプが予想されていない類似銘柄の株券オプションに比べて、オプション価格はきわめて高くなっているだろう。図 10.10 に示したストラドルの V 字型の損益パターンは下方にシフトし、利益を得るためにさらに大きな株価の変動が必要になる。

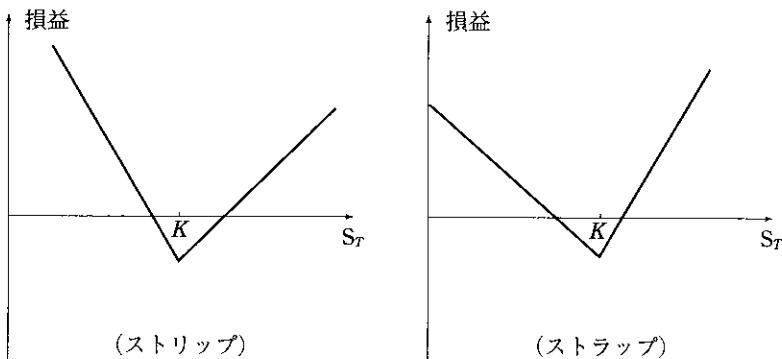
ストラドルが効果的な戦略となるには、自分は株価の大きな変動を確信しているが、他のほとんどの投資家はそう思っていないことが必要である。市場価格は市場参加者の共通の予想を織り込んでいる。投資戦略から利益を得るためにには、市場参加者のだれとも異なる考え方もち、その考えが結果的に正しいことが必要である。

の損失には限りがない。

## ストリップとストラップ

ストリップ (strip) は、行使価格と満期が同じコール 1 単位とプット 2 単位の買いからなる。ストラップ (strap) は、行使価格と満期が同じコール 2 単位とプット 1 単位の買いからなる。これらの損益パターンを図 10.11 に示す。ストリップは、株価が大きく変動し、しかも株価上昇より下落のほうが可能性が高いと予想しているときに適した戦略である。ストラップも大きな株価の動きを予想しているときに使う戦略であるが、この場合は株価の下落より上昇のほうが可能性が高いと予想している。

図10.11 ストリップとストラップの損益



### ストラングル

ストラングル (strangle) はボトム・バーティカル・コンビネーション (bottom vertical combination) とも呼ばれ、同じ満期の異なる行使価格のプットとコールを買う戦略である。損益パターンを図10.12に示す。コールの行使価格  $K_2$  は、プットの行使価格  $K_1$  よりも高い。ストラングルのペイオフは表10.6のようになる。

ストラングルはストラドルと似た戦略で、株価の大きな変動は予測しているが上昇か下落かはわからないときに用いる。図10.12と図10.10を比較すればわかるように、ストラングルで利益が得られるためには、ストラドル以上に株価が大きく動かなければならない。しかし、株価が中間の値で終わった

図10.12 ストラングルの損益

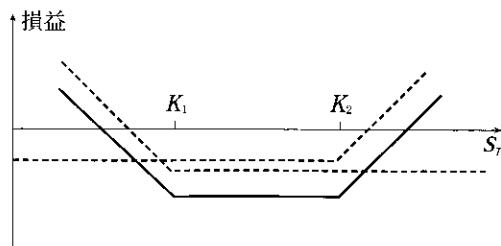


表10.6 ストラングルのペイオフ

| 株価の範囲             | コールのペイオフ    | プットのペイオフ    | ペイオフの合計     |
|-------------------|-------------|-------------|-------------|
| $S_T \leq K_1$    | 0           | $K_1 - S_T$ | $K_1 - S_T$ |
| $K_1 < S_T < K_2$ | 0           | 0           | 0           |
| $S_T \geq K_2$    | $S_T - K_2$ | 0           | $S_T - K_2$ |

場合の損失額はストラングルのほうが小さい。

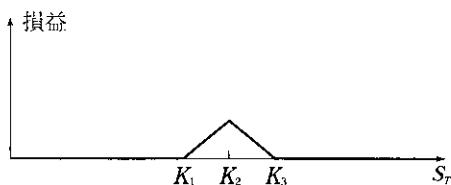
ストラングルの損益パターンは二つの行使価格の差によって決まる。行使価格の差が大きいほどダウンサイド・リスクは小さくなるが、利益を得るのに必要な株価の変動幅は大きくなる。

ストラングルの売りはトップ・パーティカル・コンビネーション (top vertical combination) とも呼ばれ、株価が大きく変動する可能性は少ないと考える場合に適した戦略である。しかし、ストラドルの売りと同様、株価変動による損失が限定されていないリスクの高い戦略である。

## 10.4 その他のペイオフ

本章では、オプションを用いて株価に依存したおもしろい損益パターンをつくる方法を、例を用いていくつか説明してきた。満期  $T$  のヨーロピアン・オプションが任意の行使価格に対して売買できるならば、理論的には時点  $T$  における任意のペイオフ関数をつくることが可能である。このことは、バタフライ・スプレッドを用いて考えれば最も簡単にわかるであろう。バタフライ・スプレッドは、行使価格が  $K_1$  と  $K_3$  のオプションを 1 単位ずつ買い、 $K_2$  のオプションを 2 単位売ったものであった。ここで  $K_1 < K_2 < K_3$ かつ  $K_3 - K_2 = K_2 - K_1$  である。図10.13(次頁)にバタフライ・スプレッドのペイオフを示す。このパターンはスパイクの形をしている。 $K_1$  と  $K_3$  を近づけると、スパイクはいくらでも小さくなる。非常に小さな多数のスパイクをうまく組み合わせると、任意のペイオフ関数を近似することができる。

図10.13 その他のペイオフをつくる部品として使うバタフライ・スプレッドによる「スパイク・ペイオフ」



### 要 約

オプション単体とその原資産の株式を組み合わせた多くのよく知られた取引戦略がある。たとえば、カバード・コールの売りは株式の買いとその株券コール・オプションの売りからなり、プロテクティブ・プットはプット・オプションの買いと株式の買いからなる。前者はプット・オプションの売り、後者はコール・オプションの買いに類似している。

スプレッドは二つ以上のコール、または二つ以上のプットのポジションをとる取引戦略である。ブル・スプレッドは、低い行使価格のコール（プット）を買い、高い行使価格のコール（プット）を売ることによってつくられる。ペア・スプレッドは、高い行使価格のプット（コール）を買い、低い行使価格のプット（コール）を売ることによってつくられる。バタフライ・スプレッドは、高い行使価格と低い行使価格のコール（プット）を1単位ずつ買い、その中間の行使価格のコール（プット）を2単位売ることによってつくられる。カレンダー・スプレッドは、満期の短いコール（プット）の売りと満期の長いコール（プット）の買いからなる。ダイアゴナル・スプレッドは、行使価格と満期日の両方が異なるオプションの買いと売りからなる。

コンビネーションは、同じ株式に対するコールとプットのポジションをと

る取引戦略である。ストラドルは行使価格と満期が同じコールとプットの買いかからなる。ストリップは行使価格と満期が同じコール 1 単位とプット 2 単位の買いかからなる。ストラップは行使価格と満期が同じコール 2 単位とプット 1 単位の買いかからなる。ストラングルは行使価格の異なる満期の同じコールとプットの買いかからなる。オプションを用いておもしろいペイオフをつくる方法は他にもいろいろある。オプション取引が絶えず人気を増し、投資家を惹きつけ続けているのも、こうした理由から不思議なことではない。

## 参考文献

- Bharadwaj, A. and J.B. Wiggins. "Box Spread and Put-Call Parity Tests for the S&P Index LEAPS Markets," *Journal of Derivatives*, 8, 4 (Summer 2001) : 62-71.
- Chaput, J.S., and L.H. Ederington. "Option Spread and Combination Trading," *Journal of Derivatives*, 10, 4 (Summer 2003) : 70-88.
- McMillan, L.G. *McMillan on Options*, 2nd edn. New Jersey : Wiley, 2004.
- Rendleman, R.J. "Covered Call Writing from an Expected Utility Perspective," *Journal of Derivatives*, 8, 3 (Spring 2001) : 63-75.
- Ronn, A.G. and E.I. Ronn. "The Box-Spread Arbitrage Conditions," *Review of Financial Studies*, 2, 1 (1989) : 91-108.

## 章末問題

- 10.1** プロテクティブ・プットとはどのような戦略かを説明せよ。また、プロテクティブ・プットと同等なコール・オプションのポジションを説明せよ。

- 10.2** ベア・スプレッドを組む方法を2通り説明せよ。
- 10.3** バタフライ・スプレッドの買いが適しているのはどのようなときか。
- 10.4** 行使価格が15ドル,  $17\frac{1}{2}$  ドル, 20ドルの満期3カ月の株券コール・オプションが、それぞれ4ドル, 2ドル,  $\frac{1}{2}$  ドルで売買できるとする。これらのオプションを用いてバタフライ・スプレッドを組む方法を述べよ。また、このバタフライ・スプレッドの利益が株価の水準によってどのように変化するかを表にまとめよ。
- 10.5** リバース・カレンダー・スプレッドの組み方を述べよ。
- 10.6** ストラングルとストラドルの違いを述べよ。
- 10.7** 行使価格50ドルのコール・オプションの価格が2ドル、行使価格45ドルのプット・オプションの価格が3ドルとする。この二つのオプションを用いたストラングルの組み方を説明せよ。また、このストラングルの損益パターンを説明せよ。
- 10.8** コールを用いてつくられたブル・スプレッドの初期投資額とプットを用いてつくられたブル・スプレッドの初期投資額との関係を、プット・コール・パリティを用いて導け。
- 10.9** プット・オプションを用いてアグレッシブなベア・スプレッドを組む方法を述べよ。
- 10.10** 行使価格が30ドルと35ドルの株券プット・オプションの価格が、それぞれ4ドルと7ドルとする。これらのオプションを用いて、(a)ブル・スプレッドと(b)ベア・スプレッドを組む方法を述べよ。また、それぞれのスプレッドの損益とペイオフを表にまとめよ。
- 10.11** ヨーロピアン・プットを用いたバタフライ・スプレッドのコストとヨーロピアン・コールを用いたバタフライ・スプレッドのコストが等しいことを、プット・コール・パリティを用いて示せ。
- 10.12** 行使価格60ドルのコールの価格が6ドルで、行使価格と満期が同じプットの価格が4ドルとする。ストラドルの損益パターンを表にまとめよ。また、株価がどのような範囲のときに、ストラドルから損

失が生じるか。

- 10.13** 行使価格  $K_1$  と  $K_2$  ( $K_2 > K_1$ ) のプットを用いて組まれたブル・スプレッドのペイオフを表にまとめよ。
- 10.14** ある投資家が、株価が上がるか下がるかはわからないが、今後大きく動くと確信している。このとき、この投資家のとりうる戦略を6通り述べ、それぞれの違いについて説明せよ。
- 10.15** 与えられた受渡価格と受渡日の株式フォワード契約をオプションの合成でつくる方法を説明せよ。
- 10.16** 「ボックス・スプレッドは四つのオプションからなる。そのうち二つを組み合わせるとフォワードの買いポジションになり、残り二つを組み合わせるとフォワードの売りポジションになる」。この主張を説明せよ。
- 10.17** ストラングルでプットの行使価格がコールの行使価格より高かったら、どのようなポジションになるか。
- 10.18** 現在、1豪ドルは0.64米ドルとする。行使価格が0.60ドル、0.65ドル、および0.70ドルのヨーロピアン・コール・オプションを用いて、満期1年のバタフライ・スプレッドをつくる。米国とオーストラリアの無リスク金利をそれぞれ5%と4%とし、為替のボラティリティを15%とする。DerivaGem ソフトウェアを使って、このバタフライ・スプレッドのポジションをつくるコストを計算せよ。また、ヨーロピアン・コールのかわりにヨーロピアン・プットを使った場合でも、コストは同じであることを示せ。

## 宿題

- 10.19** 行使価格が55ドル、60ドル、65ドルの満期の同じプット・オプションがある。それぞれの市場価格は3ドル、5ドル、8ドルとする。

バタフライ・スプレッドのつくり方を説明せよ。この戦略の損益パターンを表にまとめよ。また、株価がどのような範囲のときに損失が生じるか。

**10.20** ダイアゴナル・スプレッドは、行使価格  $K_2$ 、満期日  $T_2$  のコールの買いと、行使価格  $K_1$ 、満期日  $T_1$  のコールの売りからつくられる。ここで  $T_2 > T_1$  である。(a)  $K_2 > K_1$ , (b)  $K_2 < K_1$  のそれぞれの場合について、その損益を図示せよ。

**10.21** 満期日の株価によって、次のポートフォリオにおける投資家の損益がどのように変わるかを図示せよ。

- (a) 株式 1 単位の買いとコール・オプション 1 単位の売り
  - (b) 株式 2 単位の買いとコール・オプション 1 単位の売り
  - (c) 株式 1 単位の買いとコール・オプション 2 単位の売り
  - (d) 株式 1 単位の買いとコール・オプション 4 単位の売り
- ただし、コール・オプションの行使価格は現在の株価に等しいと仮定する。

**10.22** 配当のない株式の価格が32ドル、ボラティリティが30%，無リスク金利が満期によらず年率5%とする。DerivaGem ソフトウェアを使って、以下のポジションをつくるコストを計算せよ。

- (a) 行使価格が25ドルと30ドルで満期6カ月のヨーロピアン・コール・オプションを用いたブル・スプレッド
- (b) 行使価格が25ドルと30ドルで満期6カ月のヨーロピアン・プット・オプションを用いたペア・スプレッド
- (c) 行使価格が25ドル、30ドル、35ドルで満期1年のヨーロピアン・コール・オプションを用いたバタフライ・スプレッド
- (d) 行使価格が25ドル、30ドル、35ドルで満期1年のヨーロピアン・プット・オプションを用いたバタフライ・スプレッド
- (e) 行使価格が30ドルで満期6カ月のオプションを用いたストラドル
- (f) 行使価格が25ドルと35ドルで満期6カ月のオプションを用いた

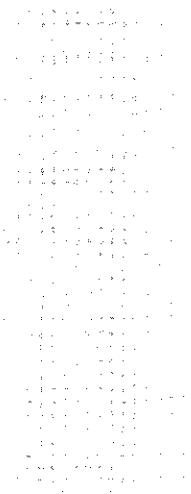
## ストラングル

それぞれの場合について、満期日の株価と損益の関係を表にまとめよ。ただし、現時点への割引は行わないものとする。

- 10.23** 満期の同じストラングルの買いとストラドルの売りを組み合わせると、どのようなポジションになるか。ただし、ストラドルの行使価格はストラングルの二つの行使価格の真ん中とする。

# 第11章

## 二項ツリー



オプションの価格を求める便利で非常によく使われる手法に、二項ツリー (binomial tree) を用いる方法がある。このツリーは、オプション満期までに株価がとりうる異なる経路を表している。その根底には、株価がランダムウォーク (random walk) に従って変化するという仮定がある。時間の各ステップでは、株価はある確率である比率だけ上昇し、ある確率である比率だけ下落する。時間の刻みを小さくしていった極限では、このモデルは第13章で説明する Black-Scholes モデルで仮定される株価の対数正規性を満たしている。

本章では二項ツリーを取り上げ、無裁定の議論とリスク中立化法として知られる重要な原理を用いて、二項ツリーを使ったオプションの価値評価について説明する。ここで述べる一般的な手法は、1979年の Cox, Ross, および Rubinstein による重要な論文で用いられた方法と同様のものである。二

項ツリーや三項ツリーを用いた数値計算の詳細については第19章で述べる。

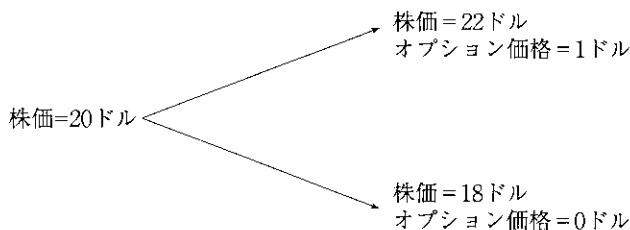
### 11.1 1期間二項モデルと無裁定の議論

単純な場合を考察することから始めよう。現在の株価を20ドルとし、3カ月後にそれが22ドルか18ドルになることがわかっているとする。このとき、3カ月後にその株式を21ドルで買うヨーロピアン・コール・オプションを付けたいとしよう。このオプションは、3カ月後に二つの値のうちどちらか一方の値をとる。株価が22ドルであればオプションの価値は1ドルであり、18ドルであればゼロである。この状況を図11.1に示す。

この例では、オプションの価格は比較的単純な議論から求まることがわかる。必要なのは裁定機会は存在しないという仮定だけである。3カ月後の値が不確実でないような、株式とオプションからなるポートフォリオを組む。そのポートフォリオは無リスクであるから、その収益率は無リスク金利に等しくなければならない。このことから、ポートフォリオを組むためのコスト、ひいてはオプションの価格が計算できる。この例では、二つの証券（株式と株券オプション）に対して起こりうる事象が2通りしかないので、無リスク・ポートフォリオを組むことは常に可能である。

△ 単位の株式の買いと1単位のコール・オプションの売りからなるポートフォリオを考え、このポートフォリオが無リスクとなるような△を求める。株価が20ドルから22ドルへ上昇した場合は、株の価値は22△、オプションの価値は1となるから、ポートフォリオ全体の価値は $22\Delta - 1$ になる。株価が

図11.1 11.1節における株価の変化の数値例



20ドルから18ドルに下落した場合は、株の価値は $18\Delta$ 、オプションの値はゼロとなるから、ポートフォリオ全体の価値は $18\Delta$ になる。どちらの場合に対してもポートフォリオの最終価値が同じになるように $\Delta$ を選べば、ポートフォリオは無リスクになる。そのような $\Delta$ は、

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

すなわち、

$$\Delta = 0.25$$

である。したがって、無リスク・ポートフォリオは、

買い：0.25株

売り：オプション1単位

からなる。このとき、株価が22ドルに上昇した場合のポートフォリオの価値は、

$$22 \times 0.25 - 1 = 4.5$$

になり、株価が18ドルに下落した場合のポートフォリオの価値は、

$$18 \times 0.25 - 1 = 4.5$$

になる。このように、株価が上がろうとも下がろうとも、オプション満期でのポートフォリオの価値は常に4.5になる。

裁定機会がないならば、無リスク・ポートフォリオの収益率は無リスク金利に等しくなければならない。無リスク金利を年率12%とすると、ポートフォリオの現在価値は4.5の現在価値、すなわち、

$$4.5e^{-0.12 \times 3/12} = 4.367$$

になる。現在の株価は20ドルである。オプション価格を $f$ とすると、ポートフォリオの値は、

$$20 \times 0.25 - f = 5 - f$$

になる。これより、

$$5 - f = 4.367$$

すなわち、

$$f = 0.633$$

が得られる。したがって、裁定機会がないならば、オプションの現在価値は

0.633ドルでなければならない。オプションの価値が0.633より高ければ、ポートフォリオを組むコストは4.367より小さくなり、無リスク金利より多くの利益が得られる。オプションの価値が0.633より低ければ、ポートフォリオを売ることによって、無リスク金利より低い金利で資金調達が可能となる。

## 一般化

株価を  $S_0$ 、株券オプションの現在価値を  $f$  として、これまでの議論を一般化する。オプション満期までの時間を  $T$ 、オプション満期までに株価は  $S_0$  から  $S_0u$  へ上昇するか、 $S_0$  から  $S_0d$  へ下落するかのどちらかとする。ここで、 $u > 1$ 、 $d < 1$ である。株価が上昇した場合の上昇率は  $u - 1$ 、下落した場合の下落率は  $1 - d$  となる。株価が  $S_0u$  に上昇した場合のオプションのペイオフを  $f_u$ 、株価が  $S_0d$  に下落した場合のペイオフを  $f_d$  としよう。この状況を図11.2に示す。

前と同様に、 $\Delta$  単位の株式の買いと 1 単位のオプションの売りからなるポートフォリオを考え、ポートフォリオが無リスクとなるような  $\Delta$  の値を求める。株価が上昇すれば、オプション満期でのポートフォリオの価値は、

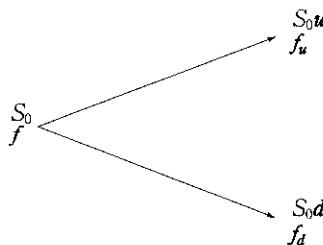
$$S_0u\Delta - f_u$$

になる。株価が下落すれば、その価値は、

$$S_0d\Delta - f_d$$

になる。これら二つの値が等しくなるのは、

図11.2 一般的な1期間ツリーにおける株価とオプション価格



$$S_0 u \Delta - f_u = S_0 d \Delta - f_d$$

すなわち,

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0 u - S_0 d} \quad (11.1)$$

のときである。このときポートフォリオは無リスクとなるから、裁定機会がないならば、収益率は無リスク金利に等しくなければならない。(11.1)式をみると、 $\Delta$  は時点  $T$  におけるノード間でのオプション価格の差と株価の差との比になっていることがわかる。

無リスク金利を  $r$  で表すと、ポートフォリオの現在価値は、

$$(S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$$

である。ポートフォリオを組むコストは、

$$S_0 \Delta - f$$

であるから、

$$S_0 \Delta - f = (S_0 u \Delta - f_u) e^{-rT}$$

すなわち、

$$f = S_0 \Delta (1 - u e^{-rT}) + f_u e^{-rT}$$

となる。 $\Delta$  に(11.1)式を代入して、式を整理すると、

$$f = e^{-rT} [p f_u + (1-p) f_d] \quad (11.2)$$

が得られる。ここで、

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} \quad (11.3)$$

である。株価の動きが 1 期間二項ツリーで与えられたときは、(11.2)式と(11.3)式よりオプションの価格付けが可能となる。

先の数値例(図11.1参照)は、 $u=1.1$ ,  $d=0.9$ ,  $r=0.12$ ,  $T=0.25$ ,  $f_u=1$ ,  $f_d=0$ としたものである。(11.3)式より、

$$p = \frac{e^{0.12 \times 3/12} - 0.9}{1.1 - 0.9} = 0.6523$$

となり、(11.2)式より、

$$f = e^{-0.12 \times 0.25} (0.6523 \times 1 + 0.3477 \times 0) = 0.633$$

が得られる。これは、本節のはじめに得られた結果と一致している。

### 株価の期待收益率の無関係性

(11.2)式のオプション価格式には、株価が上昇する確率や下落する確率は含まれていない。たとえば、上昇する確率が0.5のときも0.9のときも、同じオプション価格が得られる。これは驚きであり、直感に反すると思われる。つまり、株価が上昇する確率が増すほどコール・オプションの価値は増加し、プット・オプションの価値は減少すると考えるのが自然と思われる。それは正しくないのである。

正しくない主な理由は、オプションの価値は絶対評価として求められるものではないということである。オプションの価値は原資産の株価をもとに計算されており、将来の株価が上がる確率や下がる確率は株価にすでに織り込まれているということである。したがって、与えられた株価に対してオプションを評価する際には、それらの確率をもう一度考慮する必要はないのである。

## 11.2 リスク中立化法

(11.2)式を導く際に、株価の上昇確率や下落確率に対する仮定はなんら必要ではない。必要なのは、裁定機会がないということだけである。(11.2)式の変数  $p$  を株価の上昇確率と解釈するのは自然である。その場合、 $1-p$  は下落確率となり、

$$pf_u + (1-p)f_d$$

はオプションのペイオフの期待値を表している。 $\alpha$ をそのように解釈すれば、(11.2)式は、オプションの現在価値は将来の期待ペイオフを無リスク金利で割り引いたものに等しい、ということを表している。

ところで、上昇確率を  $\alpha$  と仮定したときの株価の期待收益率を求めてみよう。時点  $T$  における株価の期待値  $E(S_T)$  は、

$$E(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d$$

すなわち、

$$E(S_T) = pS_0(u-d) + S_0d$$

で与えられる。 $p$  に(11.3)式を代入すると、

$$E(S_T) = S_0 e^{rT} \quad (11.4)$$

が得られ、株価は平均としては無リスク金利で上昇することがわかる。したがって、株価の上昇確率を  $p$  とすることは、株式の期待収益率が無リスク金利に等しいと仮定することと等価である。

いわゆるリスク中立世界 (risk-neutral world) においては、すべての人はリスクに対して無差別である。そのような世界では、投資家はリスクに対する見返りをまったく要求しないので、すべての証券の期待収益率は無リスク金利になる。(11.4)式は、上昇確率を  $p$  と置くことはリスク中立世界を仮定することである、ということを示している。(11.2)式は、オプションの価値がリスク中立世界でのペイオフの期待値を無リスク金利で割り引いたものに等しい、ということを示している。

この結果は、リスク中立化法 (risk-neutral valuation) として知られる、オプション価格付けにおける重要な一般原理の一例である。この原理は、オプションを価格付けするときは世界がリスク中立であると仮定してもよい、ということを主張している。そうして得られた価格は、リスク中立世界だけでなく実世界でも正しい価格である。

## 1期間二項モデルの例（その2）

図11.1の例に戻って、リスク中立化法が無裁定の議論と同じ答を与えることを確かめよう。図11.1では、現在の株価は20ドルであり、3カ月後に株価は22ドルに上昇するか18ドルに下落する。考えているオプションは行使価格が21ドル、満期3カ月のヨーロピアン・コール・オプションで、無リスク金利は年率12%である。

リスク中立世界での株価の上昇確率を  $p$  とする。 $p$  は(11.3)式から得られる。あるいは、リスク中立世界では株式の期待収益率は12%の無リスク金利に等しいということから  $p$  を求めることもできる。 $p$  は、

$$22p + 18(1-p) = 20e^{0.12 \times 3/12}$$

すなわち、

$$4p = 20e^{0.12 \times 3/12} - 18$$

を満たさなければならない。これより、 $p$  は 0.6523 になる。

3カ月後、コール・オプションの価値は 0.6523 の確率で 1 になり、0.3477 の確率でゼロになる。したがって、その期待値は、

$$0.6523 \times 1 + 0.3477 \times 0 = 0.6523$$

となる。リスク中立世界では、これを無リスク金利で割り引くことになる。

したがって、オプションの現在価値は、

$$0.6523e^{-0.12 \times 3/12}$$

すなわち 0.633 ドルになる。これは先に得られた値と同じであり、無裁定の議論とリスク中立化法は同じ結果を与えることがわかる。

## 実世界とリスク中立世界

$p$  はリスク中立世界での上昇確率であることに留意する必要がある。一般的に、これは実世界での上昇確率と同じではない。前の例では  $p = 0.6523$  で、上昇確率が 0.6523 のとき、株式と株券オプションの期待収益率は無リスク金利の 12% となる。実世界における株式の期待収益率を 16% とすると、そのときの上昇確率  $p^*$  は、

$$22p^* + 18(1-p^*) = 20e^{0.16 \times 3/12}$$

より、 $p^* = 0.7041$  となる。

このときの実世界におけるオプションの期待ペイオフは、

$$p^* \times 1 + (1-p^*) \times 0$$

すなわち 0.7041 となる。残念ながら実世界での期待ペイオフに適用する正しい割引率を知ることは容易ではない。コール・オプションのポジションは株式のポジションよりもリスクが高い。そのため、コール・オプションのペイオフに適用される割引率は 16% よりも高い。オプションの価値を知らなければ、それが 16% よりどれだけ高いのかを知るよしもない(注1)。それに対し、リスク中立世界ではすべての資産に対する期待収益率(したがって、すべて

の期待ペイオフに適用される割引率) は無リスク金利となるので、リスク中立化法は便利な方法である。

### 11.3 2期間二項ツリー

これまでの分析は、図11.3に示すような2期間の二項ツリーに拡張できる。その図では、株価は20ドルから始まり、2期間の各ステップで10%上昇するか10%下落するとしている。時間の各ステップは3カ月で、無リスク金利は年率12%とする。前と同様に、行使価格21ドルのオプションを考える。

分析の目的は、ツリーの最初のノードでのオプション価格を計算することである。それには、本章の前の部分で得られた原理を繰り返し用いればよい。図11.4は図11.3と同じツリーであるが、各ノードにおける株価とオプション価格が示されている(上段の数字が株価で、下段の数字がオプション価格)。ツリーの最後のノードにおけるオプション価格は簡単に計算できる。それらはオプションのペイオフである。ノード D では株価は24.2なので、オプション価格は $24.2 - 21 = 3.2$ である。ノード E と F ではオプションはアウト・オプ・ザ・マネーなので、その価値はゼロとなる。

ノード C からはノード E またはノード F に変化し、それぞれのノードでのオプション価格はゼロだから、ノード C のオプション価格はゼロである。ノード B でのオプション価格は、図11.5に示したツリーの部分に注目すれば計算できる。本章で前に用いた記号を使うと、 $u=1.1$ ,  $d=0.9$ ,  $r=0.12$ ,  $T=0.25$ となるので、 $p=0.6523$ となり、(11.2)式よりノード B におけるオプション価格は、

$$e^{-0.12 \times 3/12} (0.6523 \times 3.2 + 0.3477 \times 0) = 2.0257$$

と求まる。

最後に、最初のノード A におけるオプション価格の計算を行う。これは、ツリーの最初の1期間に注目すれば計算できる。ノード B でのオプション

---

(注 1) オプションの正しい価値は0.633なので、正しい割引率は $0.633 = 0.7041 e^{-0.4258 \times 3/12}$ より42.58%と結論される。

図11.3 株価の2期間ツリー

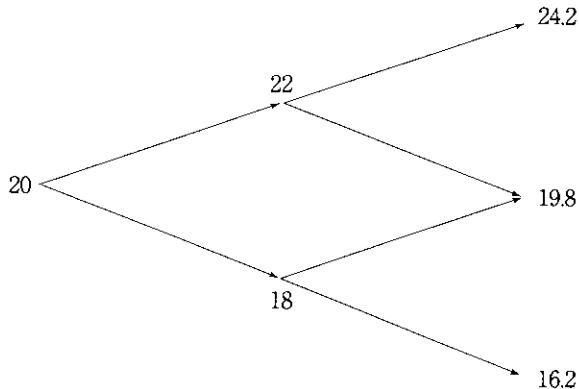


図11.4 2期間ツリー上の株価とオプション価格  
各ノードにおける上段の数字は株価、下段の数字はオプション価格

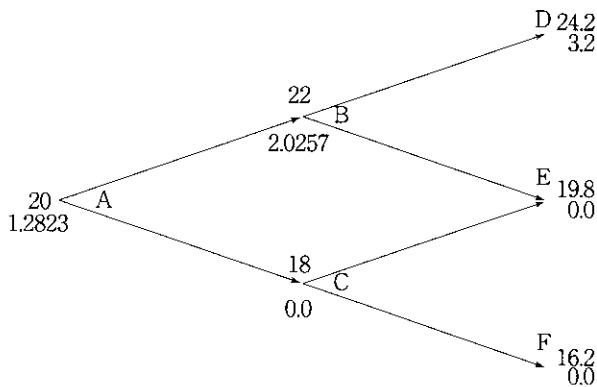
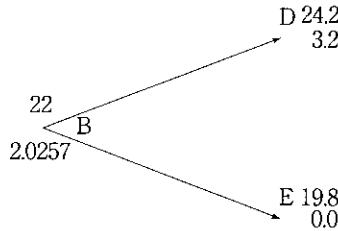


図11.5 ノードBでのオプションの評価



価格は2.0257, ノード C でのオプション価格はゼロなので, (11.2)式よりノード A における価値は,

$$e^{-0.12 \times 3/12} (0.6523 \times 2.0257 + 0.3477 \times 0) = 1.2823$$

で与えられ, オプション価格は1.2823ドルになる。

この例では  $u$  と  $d$  (上昇率と下落率) が各ノードで一定であり, 時間間隔は等間隔であることに注意しよう。その結果, (11.3)式で計算されるリスク中立確率  $p$  は各ノードで同じ値になっている。

## 一般化

図11.6のようなツリーを考えて, 2期間の一般的な場合を扱う。株価は最初  $S_0$  で, 各期間に株価ははじめの値の  $u$  倍に上昇するか  $d$  倍に下落する。オプション価格を表す記号をツリー上に示す (たとえば, 2回上昇したノードでのオプション価格は  $f_{uu}$  である)。無リスク金利を  $r$ , 時間間隔を  $\Delta t$  年とする。

時間間隔を  $T$  ではなく  $\Delta t$  としているので, (11.2)式と(11.3)式は,

$$f = e^{-r\Delta t} [pf_u + (1-p)f_d] \quad (11.5)$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad (11.6)$$

となる。(11.5)式を繰り返し用いると,

$$f_u = e^{-r\Delta t} [pf_{uu} + (1-p)f_{ud}] \quad (11.7)$$

$$f_d = e^{-r\Delta t} [pf_{ud} + (1-p)f_{dd}] \quad (11.8)$$

$$f = e^{-r\Delta t} [pf_u + (1-p)f_d] \quad (11.9)$$

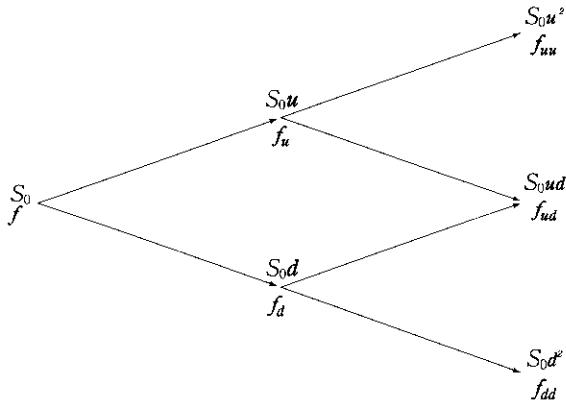
となる。(11.7)式と(11.8)式を(11.9)式に代入すると,

$$f = e^{-2r\Delta t} [p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}] \quad (11.10)$$

が得られる。これは前に述べたリスク中立化法の原理と整合性がとれている。変数  $p^2$ ,  $2p(1-p)$ ,  $(1-p)^2$  は, それぞれ最終時点での上, 真ん中, 下のノードに到達する確率である。オプション価格はペイオフのリスク中立世界における期待値を無リスク金利で割り引いたものに等しくなっている。

二項ツリーのステップ数をもっと増やしても, リスク中立化法の原理はそ

図11.6 一般的な2期間ツリーでの株価とオプション価格



のまま成り立つ。オプション価格はリスク中立世界における期待ペイオフを無リスク金利で割り引いたものに常に等しい。

#### 11.4 プット・オプションの例

本章で述べた方法で、コールと同様にプットの価格付けも可能である。現在の株価が50ドルの株式に対する、行使価格52ドルの満期2年のヨーロピアン・プットについて考えよう。1年間隔の2期間ツリーを考え、各期間において株価は20%上昇するか20%下落するとする。また、無リスク金利は5%とする。

図11.7(次頁)にこのツリーを示す。この場合は  $u=1.2$ ,  $d=0.8$ ,  $\Delta t=1$ ,  $r=0.05$ となるので、(11.6)式より、リスク中立確率  $p$  は、

$$p = \frac{e^{0.05 \times 1} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.6282$$

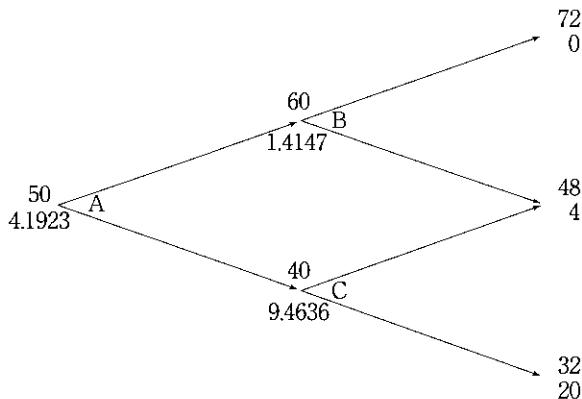
で与えられる。最終的な株価は72ドル, 48ドル, 32ドルのいずれかであり、 $f_{uu}=0$ ,  $f_{ud}=4$ ,  $f_{dd}=20$ となる。(11.10)式より、

$$f = e^{-2 \times 0.05 \times 1} (0.6282^2 \times 0 + 2 \times 0.6282 \times 0.3718 \times 4 + 0.3718^2 \times 20) = 4.1923$$

となるので、プットの価値は4.1923ドルになる。同じ結果は、(11.5)式を用

図11.7 2期間ツリーを用いたヨーロピアン・プット・オプションの評価

各ノードにおける上段の数字は株価、下段の数字はオプション価格



いてツリーに沿って1ステップずつ引き戻すことによっても得られる。図11.7には、途中のオプション価格も示されている。

## 11.5 アメリカン・オプション

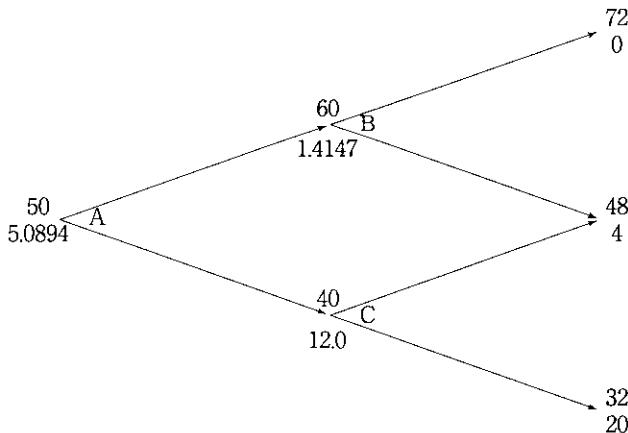
これまで、ヨーロピアン・オプションについて検討してきた。次に、図11.4や図11.7のような二項ツリーを用いて、アメリカン・オプションを評価する方法について考えよう。評価の手順は、各ノードで期限前行使が最適かどうかを確認しながら、ツリーを後ろから前へさかのぼっていくというものである。最終ノードでのオプションの価値は、ヨーロピアン・オプションに対する価値と同じである。それより前のノードでは、オプションの価値は次のうちの大きいほうになる。

1. (11.5)式で与えられる値
2. 期限前行使によって得られるペイオフ

図11.8は、図11.7でオプションをヨーロピアンでなくアメリカンとした場合のものである。株価と推移確率は同じである。最終ノードでのオプション

図11.8 2期間ツリーを用いたアメリカン・プット・オプションの評価

各ノードにおける上段の数字は株価、下段の数字はオプション価格



の価値も同じである。ノード B では、(11.5)式から求まるオプションの価値は1.4147で、期限前行使によるペイオフは負(= -8)である。ノード B では明らかに期限前行使は最適とならないから、このノードでのオプションの価値は1.4147になる。ノード C では、(11.5)式から求まるオプションの価値は9.4636で、期限前行使によるペイオフは12である。この場合は期限前行使が最適となり、このノードでのオプションの価値は12になる。最初のノード A では、(11.5)式から求まる価値は、

$$e^{-0.05 \times 1} (0.6282 \times 1.4147 + 0.3718 \times 12.0) = 5.0894$$

で、期限前行使によるペイオフは2である。この場合、期限前行使は最適ではない。したがって、オプションの価値は5.0894ドルになる。

## 11.6 デルタ

この段階までくると、オプションの評価およびヘッジにおいて重要なリスク・パラメータである、デルタ (delta) について説明しておいたほうがよい

だろう。

株券オプションのデルタとは、株券オプションの価格変化と原資産である株式の価格変化との比である。これは、株券オプション 1 単位の売りからなるポートフォリオを無リスクにするのに必要となる株数である。それは、本章のはじめのほうで導入した  $\Delta$  と同じものである。無リスク・ヘッジを行うことは、デルタ・ヘッジ (delta hedging) と呼ばれることもある。コール・オプションのデルタは正、プット・オプションのデルタは負になる。

図11.1の例では、コール・オプションのデルタは、

$$\frac{1-0}{22-18} = 0.25$$

になる。これは、株価が18ドルから22ドルに変化するとき、オプション価格は0ドルから1ドルに変化するからである。

図11.4の例では、1期間目の株価の動きに対するデルタは、

$$\frac{2.0257-0}{22-18} = 0.5064$$

である。2期間目の株価の動きに対するデルタは、1期間目で株価が上昇した場合は、

$$\frac{3.2-0}{24.2-19.8} = 0.7273$$

であり、1期間目で株価が下落した場合は、

$$\frac{0-0}{19.8-16.2} = 0$$

である。

図11.7の例では、1期間目に対応するデルタは、

$$\frac{1.4147-9.4636}{60-40} = -0.4024$$

になり、2期間目に対応するデルタは、

$$\frac{0-4}{72-48} = -0.1667$$

もしくは、

$$\frac{4-20}{48-32} = -1.0000$$

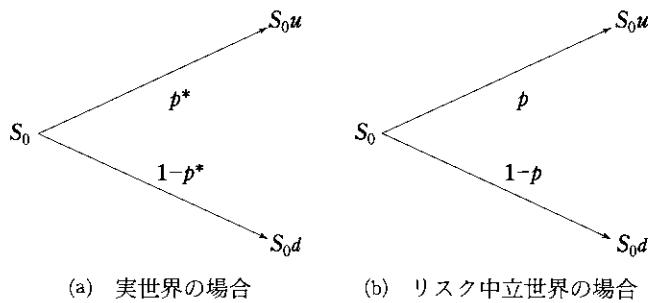
になる。

2期間の例からわかるように、デルタは時間とともに変化する（図11.4では、デルタは0.5064から0.7273もしくは0に変化している。図11.7では、デルタは-0.4024から-0.1667もしくは-1.0000に変化している）。このように、オプションと原資産である株式を用いた無リスク・ヘッジを続けるためには、株式の保有数を定期的に調整する必要がある。こうしたオプションの性質については、第17章で再び検討する。

## 11.7 ボラティリティとパラメータ $u$ と $d$ の関係

実際に二項ツリーを使って株価の動きを表現するときは、株価のボラティリティに合うようにパラメータ  $u$  と  $d$  を選ぶ必要がある。どのように選ぶかを説明するために、（実世界における）株価の期待收益率を  $\mu$ 、ボラティリティを  $\sigma$  と仮定する。図11.9は、二項ツリーの1期間目における株価の動きを表している。1期間の長さを  $\Delta t$  とする。株価は  $S_0$  から始まり、 $S_0u$  に上昇するか、 $S_0d$  に下落する。また、実世界における上昇確率を  $p^*$  とし、リスク中立世界における上昇確率はこれまでと同様に  $p$  とする。

図11.9 微小時間  $\Delta t$  における株価の変化



1期間目の終わりでの期待株価は  $S_0 e^{\mu dt}$  である。ツリー上ではその時点での期待株価は、

$$p^* S_0 u + (1-p^*) S_0 d$$

である。したがって、株式の期待収益率を合わせるには、ツリーのパラメータは、

$$p^* S_0 u + (1-p^*) S_0 d = S_0 e^{\mu dt}$$

すなわち、

$$p^* = \frac{e^{\mu dt} - d}{u - d} \quad (11.11)$$

を満たさなければならない。第13章で説明するように、株価のボラティリティ  $\sigma$  は、微小時間  $\Delta t$  における株価収益率の標準偏差が  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  になるものとして定義される。同じことであるが、収益率の分散は  $\sigma^2\Delta t$  になる。図 11.9(a)のツリーでは、株価収益率の分散は、

$$p^* u^2 + (1-p^*) d^2 - [p^* u + (1-p^*) d]^2$$

である(注2)。したがって、株価のボラティリティを合わせるには、ツリーのパラメータは、

$$p^* u^2 + (1-p^*) d^2 - [p^* u + (1-p^*) d]^2 = \sigma^2 \Delta t \quad (11.12)$$

を満たさなければならない。(11.11)式を(11.12)式に代入すると、

$$e^{\mu dt}(u+d) - ud - e^{2\mu dt} = \sigma^2 \Delta t$$

が得られる。 $\Delta t^2$  の項と  $\Delta t$  に関してそれより高次の項を無視すると、

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (11.13)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (11.14)$$

がこの方程式の一つの解を与える(注3)。これらの  $u$  と  $d$  の値は、Cox, Ross および Rubinstein が1979年の論文で与えたものと同じである。

11.2節で行った考察から、図11.9(a)のツリーは、上昇確率を  $p$  とするリ

(注2) 変数  $X$  の分散が  $E(X^2) - [E(X)]^2$  で与えられることを用いた。ここで  $E$  は期待値を表す。

(注3) ここで、級数展開  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$  を用いている。

スク中立世界における図11.9(b)のツリーで置き換えてよい。変数 $p$ は(11.6)式より、

$$p = \frac{a-d}{u-d} \quad (11.15)$$

で与えられる。ここで、

$$a = e^{rt} \quad (11.16)$$

である。(11.4)式からわかるように、図11.9(b)では1期間目の終わりにおける期待株価は $S_0 e^{rt}$ になる。株価収益率の分散は、

$$pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 = [e^{rt}(u+d) - ud - e^{2rt}]$$

となる。 $u$ と $d$ に(11.13)式と(11.14)式を代入し、 $\Delta t^2$ の項と $\Delta t$ に関してそれより高次の項を無視すると、上式は $\sigma^2 \Delta t$ に等しくなる。

以上の考察からわかるように、実世界からリスク中立世界へ移るとき、株価の期待収益率は変化するが、ボラティリティは(少なくとも $\Delta t$ がゼロに近づく極限では)不变である。これは、ギルサノフの定理(Girsanov's theorem)として知られる重要な一般的結果の一例である。あるリスク選好の世界から別のリスク選好の世界へ移るとき、変数の期待成長率は変化するが、そのボラティリティは不变である。リスク選好が市場変数のふるまいに与える影響の詳細については、第27章で考察する。あるリスク選好から別のリスク選好へ移ることは、測度変換(changing the measure)と呼ばれることがある。実世界での測度を $P$ -測度( $P$ -measure)、リスク中立世界での測度を $Q$ -測度と呼ぶこともある(注4)。

図11.8のアメリカン・ブット・オプションをもう一度考察しよう。株価は50ドル、行使価格は52ドル、無リスク金利は5%、オプション満期は2年、ツリーは2期間となっている。この場合、 $\Delta t=1$ である。ボラティリティ $\sigma$ を30%とし、(11.13)式から(11.16)式を用いると、

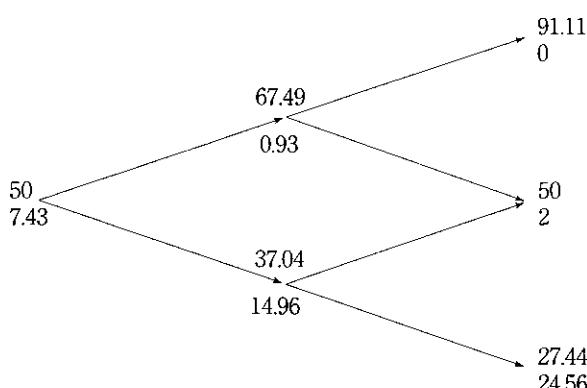
$$u = e^{0.3 \times 1} = 1.3499, \quad d = \frac{1}{1.3499} = 0.7408, \quad a = e^{0.05 \times 1} = 1.0513$$

---

(注4) これまでの記号では、 $p$ が $Q$ -測度のもとでの確率で、 $p^*$ が $P$ -測度のもとでの確率である。

図11.10 2期間ツリーを用いた満期2年のアメリカン・プット・オプションの評価

株価を50、行使価格を52、無リスク金利を5%、ボラティリティを30%とする



となり、

$$p = \frac{1.0513 - 0.7408}{1.3499 - 0.7408} = 0.5097$$

となる。したがって、ツリーは図11.10のようになり、プット・オプションの価値は7.43になる（これは、図11.8で  $u=1.2$ ,  $d=0.8$ とした場合に得られた値とは異なる）。

## 11.8 多期間の場合

これまで説明してきた二項モデルは、非現実的な単純なものである。オプション満期までの株価の動きを1期間または2期間の二項ツリーで表した場合、得られるオプション価格は非常に粗い近似でしかないことは明らかであろう。

二項ツリーを実際に用いるときは、オプション満期までの期間を30以上に分割するのが一般的である。各時間ステップでは、株価は上昇または下落の2通りの動きをする。30期間の場合、満期時点には31通りの株価があり、

<sup>230</sup>通り、すなわち約10億通りの株価の経路が想定されることになる。

時間のステップ数によらず、ツリーは(11.13)式から(11.16)式で定義される。たとえば図11.10で考察した例で、ツリーを2期間でなく5期間としよう。パラメータは、 $\Delta t=2/5=0.4$ ,  $r=0.05$ ,  $\sigma=0.3$ となる。これらの値を用いると、 $u=e^{0.3\times\sqrt{0.4}}=1.2089$ ,  $d=1/1.2089=0.8272$ ,  $a=e^{0.05\times0.4}=1.0202$ ,  $p=(1.0202-0.8272)/(1.2089-0.8272)=0.5056$ になる。

### DerivaGem ソフトウェアの利用について

本書に付属しているソフトウェア DerivaGem は、二項ツリーになじむのに役立つツールである。本書の最後に記載されている方法に従ってソフトウェアを起動し、Equity\_FX\_Index\_Futures\_Options ワークシートを表示する。Underlying Type を Equity にし、Option Type を Binomial American にする。株価、ボラティリティ、無リスク金利、満期までの時間、行使価格、ツリーのステップ数として、それぞれ50, 30%, 5%, 2, 52, 2 を入力する。「Put」ボタンをクリックしてから「Calculate」ボタンをクリックすると、Price とするされた領域にオプション価値が7.428と表示される。次に「Display Tree」ボタンをクリックすると、図11.10と同じツリーが表示される（赤い数字はオプションが行使されるノードを表している）。

Equity\_FX\_Index\_Futures\_Options シートに戻り、ツリーのステップ数を5に変更する。「Enter」ボタンを押してから「Calculate」ボタンをクリックすると、オプション価値が7.671に変わるのがわかる。「Display Tree」ボタンをクリックすると、5期間ツリーが上で計算した  $u$ ,  $d$ ,  $a$ ,  $p$  の値とともに表示される。

DerivaGem ソフトウェアは10ステップまでのツリーしか表示できないが、計算自体は500ステップまで可能である。いまの例で500ステップとした場合、オプション価格は（小数点以下第2位まで）7.47になる。これは正確な答である。Option Type を Binomial European に変更すると、ヨーロピアン・オプションの価値がツリーで計算できる。時間ステップ数を500として、アメリカン・オプションと同じパラメータでヨーロピアン・オプションの価

値を計算すると6.76になる（Option Type を Analytic European に変更すると、第13章で説明する Black-Scholes 式を用いて計算したオプションの価値が表示される。その値も6.76になる）。

Underlying Type を変更すると、株式以外の資産に対するオプションも扱える。それについては次節で説明する。

## 11.9 他の資産に対するオプション

株価指数、通貨、先物契約に対するオプションについてはすでに第8章で簡単に触れ、第15章と第16章でさらに詳細に説明を行う。それらのオプションに対しても、 $p$ に関する式を変える以外は株券オプションとまったく同じ方法で二項ツリーを構築でき、それをオプションの価格計算に使えることがわかる。株券オプションの場合と同様に(11.2)式を適用して、各ノードでの（期限前行使の可能性を考慮する前の）価値は、上昇したときの価値の $p$ 倍に下落したときの価値の $1-p$ 倍を加え、それを無リスク金利で割り引くことで求められる。

### 連続配当がある場合の株券オプション

配当利回りが $q$ の株式を考える。リスク中立世界では、配当とキャピタルゲインを合わせた総期待収益率が $r$ となる。配当の期待収益率が $q$ だから、キャピタルゲインの期待収益率は $r-q$ になる。はじめの株価を $S_0$ とすると、1期間 $\Delta t$ 後の株価の期待値は $S_0 e^{(r-q)\Delta t}$ である。したがって、

$$pS_0 u + (1-p)S_0 d = S_0 e^{(r-q)\Delta t}$$

より、

$$p = \frac{e^{(r-q)\Delta t} - d}{u - d}$$

となる。配当のない株式のオプションのときと同様に、 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  および $d = 1/u$ としてボラティリティを合わせる。以上より、配当のある株券オプションに対しても、(11.13)式から(11.16)式は、 $a = e^{(r-q)\Delta t}$ とする以外はそ

のまま使える。

### 株価指数オプション

株価指数先物価格を第5章で計算した際に、指標を構成する株式は利回り $q$ の配当をもつと仮定した。ここでも同様の仮定を置く。したがって、株価指標オプションの評価は、配当利回りが既知の株式に対するオプションの評価と非常に似たものになる。

#### 【例11.1】

株価指標の現在の値を810、そのボラティリティを20%、配当利回りを2%とする。無リスク金利は5%とする。図11.11は、DerivaGem ソフトウェアで2期間ツリーを用いて行った、行使価格800、満期6カ月のヨーロピアン・コール・オプションの価格計算結果である。この場合には、

$$\Delta t = 0.25, \ u = e^{0.20 \times \sqrt{0.25}} = 1.1052$$

$$d = 1/u = 0.9048, \ a = e^{(0.05 - 0.02) \times 0.25} = 1.0075$$

$$p = (1.0075 - 0.9048) / (1.1052 - 0.9048) = 0.5126$$

となり、オプションの価値は53.39になる。

図11.11 2期間ツリーを用いた6カ月物ヨーロピアン・コール・オプションの評価

指標を810、行使価格を800、無リスク金利を5%、ボラティリティを20%、配当利回りを2%とする(DerivaGem ソフトウェアの計算結果)。

各ノード：

上段=原資産価格

下段=オプション価格

網掛けはオプションが行使されるノード

行使価格=800

時間ステップごとの割引率=0.9876

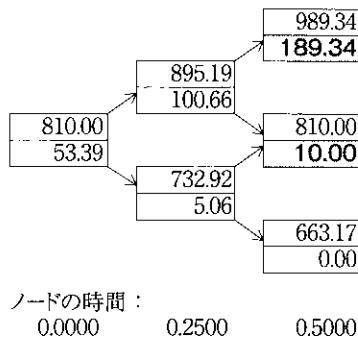
時間ステップ、 $dt=0.2500$ 年、91.25日

時間ステップごとの成長係数、 $a=1.0075$

上昇確率、 $p=0.5126$

上昇幅,  $u=1.1052$

下落幅,  $d=0.9048$



## 通貨オプション

5.10節で説明したように、外国通貨は外国の無リスク金利  $r_f$  の収入を生み出す資産とみなせる。株価指数の場合から類推されるように、 $a = e^{(r - r_f)dt}$  と置いて(11.13)式から(11.16)式を用いれば、通貨オプションを評価するためのツリーを構築できる。

### 【例11.2】

1豪ドルが現在0.6100米ドルで、この為替レートのボラティリティを12%とする。豪州の無リスク金利は7%，米国の無リスク金利は5%とする。図11.12は、DerivaGem ソフトウェアで3期間ツリーを用いて行った、行使価格0.6000、満期3カ月のアメリカン・コール・オプションの価格計算結果である。この場合は、

$$\Delta t = 0.08333, \ u = e^{0.12 \times \sqrt{0.08333}} = 1.0352$$

$$d = 1/u = 0.9660, \ a = e^{(0.05 - 0.07) \times 0.08333} = 0.9983$$

$$p = (0.9983 - 0.9660) / (1.0352 - 0.9660) = 0.4673$$

となり、オプションの価値は0.019になる。

図11.12 3期間ツリーを用いた3ヶ月物アメリカン・コール・オプションの評価

通貨の価値を0.6100, 行使価格を0.6000, 無リスク金利を5%, ボラティリティを12%, 外国の無リスク金利を7%とする (DerivaGem ソフトウェアの計算結果)。

各ノード：

上段=原資産価格

下段=オプション価格

網掛けはオプションが行使されるノード

行使価格=0.6

時間ステップごとの割引率=0.9958

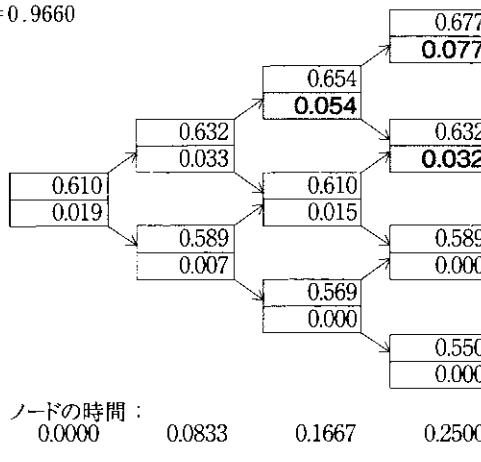
時間ステップ,  $dt = 0.0833$ 年, 30.42日

時間ステップごとの成長係数,  $\alpha = 0.9983$

上昇確率,  $p = 0.4673$

上昇幅,  $u = 1.0352$

下落幅,  $d = 0.9660$



ノードの時間：

0.0000

0.0833

0.1667

0.2500

### 先物オプション

先物契約の買いまたは売りポジションをとるのにコストはかかるない。このことより、リスク中立世界では先物価格の期待成長率はゼロになるはずである（この点に関する詳細は16.7節で論じる）。これまでの例と同様に,  $p$  を先

物価格の上昇確率,  $u$  を上昇率,  $d$  を下落率とする。はじめの先物価格を  $F_0$  とすると, 1期間  $\Delta t$  後の期待先物価格も  $F_0$  のはずである。したがって,

$$pF_0u + (1-p)F_0d = F_0$$

より,

$$p = \frac{1-d}{u-d}$$

となる。先物オプションに対しても,  $a=1$ として(11.13)式から(11.16)式が利用できる。

### 【例11.3】

先物価格が現在31で, そのボラティリティを30%とする。無リスク金利は5%とする。図11.13は, DerivaGem ソフトウェアで3期間ツリーを用いて行った, 行使価格30, 満期9カ月の先物に対するアメリカン・ブット・オプションの価格計算結果である。この場合には,

$$\Delta t = 0.25, \ u = e^{0.3 \times \sqrt{0.25}} = 1.1618$$

$$d = 1/u = 1/1.1618 = 0.8607, \ a = 1$$

$$p = (1 - 0.8607) / (1.1618 - 0.8607) = 0.4626$$

となり, オプションの価値は2.84になる。

図11.13 3期間ツリーを用いた先物に対する9カ月物アメリカン・ブット・オプションの評価

先物価格を31, 行使価格を30, 無リスク金利を5%, ボラティリティを30%とする。(DerivaGem ソフトウェアの計算結果)

各ノード:

上段=原資産価格

下段=オプション価格

網掛けはオプションが行使されるノード

行使価格=30

時間ステップごとの割引率=0.9876

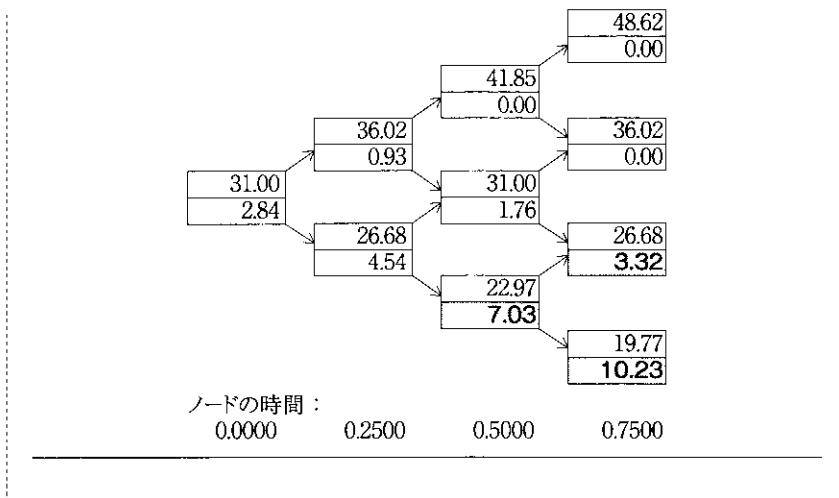
時間ステップ,  $dt=0.2500$ 年, 91.25日

時間ステップごとの成長係数,  $a=1.000$

上昇確率,  $p=0.4626$

上昇幅,  $u=1.1618$

下落幅,  $d=0.8607$



## 要 約

本章では、株式およびそれ以外の資産に対するオプションの評価方法について簡単に説明した。株券オプションの満期までの株価の動きが1期間二項ツリーで表される単純な場合には、株券オプションと株式からなる無リスク・ポートフォリオを組むことができる。裁定機会のない世界では、無リスク・ポートフォリオの収益率は無リスク金利に等しくならなければならない。このことから、株券オプションの価格が株価をもとに計算できるようになる。そのとき、ツリーの各ノードにおける株価の上昇確率と下落確率に関する仮定を必要としないことが興味深い点である。

株価の動きが多期間二項ツリーで表されている場合には、各二項分岐を個々に扱って、オプション満期からはじめの時点まで引き戻せば、オプションの現在価値が得られる。この場合も、無裁定の議論だけが使われており、各ノードにおける株価の上昇確率と下落確率に関する仮定は必要としない。

オプションを評価するときは、世界はリスク中立であるとしてよいという非常に重要な原理が成り立っている。本章では、無裁定の議論とリスク中立化法は等価であり、同一のオプション価格が導かれることを数値例と簡単な計算で示した。

株券オプションのデルタ  $\Delta$  は、原資産価格である株価の微小変化がオプション価格に与える影響を表している。それは、オプション価格の変化と株価の変化との比である。ポジションを無リスクにするためには、オプション 1 単位の売りに対して  $\Delta$  単位の株式を買えばよい。典型的な二項ツリーをみてみると、オプションの満期までにデルタは変化することがわかる。このことから、オプションのポジションをヘッジするためには、原資産である株式の保有株数を定期的に変える必要がある。

株価指数や通貨、先物契約に対するオプションを評価するための二項ツリーも、株券オプションの場合とほとんど同じように構築できる。第19章で二項ツリーを再度取り上げ、それが実際にどのように使われるかをより詳しく説明する。

## 参考文献

- Coval, J.E. and T. Shumway. "Expected Option Returns," *Journal of Finance*, 56, 3 (2001) : 983-1009.
- Cox, J.C., S.A. Ross, and M. Rubinstein. "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7 (October 1979) : 229-64.
- Rendleman, R. and B. Bartter. "Two State Option Pricing," *Journal of Finance*, 34 (1979) : 1092-1110.

## 章末問題

- 11.1** 現在の株価は40ドルである。1カ月後に株価は42ドルか32ドルになるとする。無リスク金利は連続複利で年率8%とする。このとき、行使価格39ドル、満期1カ月のヨーロピアン・コール・オプションの価値を求めよ。
- 11.2** 1期間の二項ツリーを用いて、無裁定の議論とリスク中立化法によるヨーロピアン・オプションの評価方法について説明せよ。
- 11.3** 株券オプションのデルタとは何か。
- 11.4** 現在の株価は50ドルである。6カ月後に株価は45ドルか55ドルになるとする。無リスク金利は連続複利で年率10%とする。このとき、行使価格50ドル、満期6カ月のヨーロピアン・プット・オプションの価値を求めよ。
- 11.5** 現在の株価は100ドルである。続く2回の6カ月間のそれぞれに、株価は10%上昇するか10%下落するとする。無リスク金利は連続複利で年率8%とする。このとき、行使価格100ドル、満期1年のヨーロピアン・コール・オプションの価値を求めよ。
- 11.6** 問題11.5において、行使価格100ドル、満期1年のプット・オプションの価値を求めよ。また、ヨーロピアン・コールとヨーロピアン・プットの価格がプット・コール・パリティを満たすことを確認せよ。
- 11.7** ボラティリティを用いて $u$ と $d$ を表す式を示せ。
- 11.8** ヨーロピアン・オプションの満期までの株価の動きが、2期間二項ツリーで与えられている場合を考える。オプション満期までの全期間で無リスクとなるような、株式とそのオプションからなるポジションがつくれない理由を説明せよ。
- 11.9** 現在の株価は50ドルである。2カ月後に株価は53ドルか48ドルになるとする。無リスク金利は連続複利で年率10%とする。このとき、行使価格49ドル、満期2カ月のヨーロピアン・コール・オプションの価値はいくらになるか。無裁定の議論を用いて求めよ。

- 11.10** 現在の株価は80ドルである。4カ月後に株価は75ドルか85ドルになるとする。無リスク金利は連続複利で年率5%とする。このとき、行使価格80ドル、満期4カ月のヨーロピアン・プット・オプションの価値はいくらになるか。無裁定の議論を用いて求めよ。
- 11.11** 現在の株価は40ドルである。3カ月後に株価は45ドルか35ドルになるとする。無リスク金利は3カ月複利で年率8%とする。このとき、行使価格40ドル、満期3カ月のヨーロピアン・プット・オプションの価値はいくらになるか。無裁定の議論による方法とリスク中立化法から同じ結果が得られることを確かめよ。
- 11.12** 現在の株価は50ドルである。続く2回の3カ月間のそれぞれに、株価は6%上昇するか5%下落するとする。無リスク金利は連続複利で年率5%とする。このとき、行使価格51ドル、満期6カ月のヨーロピアン・コール・オプションの価値を求めよ。
- 11.13** 問題11.12において、行使価格51ドル、満期6カ月のヨーロピアン・プット・オプションの価値を求めよ。また、ヨーロピアン・コールとヨーロピアン・プットの価格がプット・コール・パリティを満たすことを確認せよ。もしプット・オプションがアメリカンであれば、ツリー上のいずれかのノードで期限前行使が最適となることはあるか。
- 11.14** 現在の株価は25ドルである。2カ月後に株価は23ドルか27ドルになるとする。無リスク金利は連続複利で年率10%とする。 $S_T$ を2カ月後の株価とするとき、満期に  $S_T^2$  を支払うデリバティブの価値を求めよ。
- 11.15** 通貨オプションの評価に用いる二項ツリーを構築する時の  $u$ ,  $d$ ,  $p$  を計算せよ。ただし、ツリーの1期間は1カ月、国内金利は年率5%，外国金利は年率8%，ボラティリティは年率12%とする。

## 宿題

- 11.16** 現在の株価は50ドルである。6カ月後に株価は60ドルか42ドルになるとする。無リスク金利は連続複利で年率12%とする。このとき、行使価格48ドル、満期6カ月の株式に対するヨーロピアン・コール・オプションの価値を求めよ。また、無裁定の議論による方法とリスク中立化法から同じ結果が得られることを確かめよ。
- 11.17** 現在の株価は40ドルである。続く2回の3カ月間のそれぞれに、株価は10%上昇するか10%下落するとする。無リスク金利は連続複利で年率12%とする。
- 行使価格42ドル、満期6カ月のヨーロピアン・プット・オプションの価値を求めよ。
  - 行使価格42ドル、満期6カ月のアメリカン・プット・オプションの価値を求めよ。
- 11.18** 問題11.17で行使価格がいくら以上であれば、オプションの即時行使が最適となるか。試行錯誤してみることで推定せよ。
- 11.19** 現在の株価は30ドルである。次の4カ月間の2カ月ごとに、株価は8%上昇するか10%下落するとする。無リスク金利は5%とする。このとき、 $[\max(30 - S_T, 0)]^2$  のペイオフをもつデリバティブの価値を、2期間ツリーを用いて計算せよ。ここで  $S_T$  は4カ月後の株価である。もしデリバティブがアメリカンならば、期限前行使すべきか。
- 11.20** 配当のない株式に対するヨーロピアン・コール・オプションを考える。株価は40ドル、行使価格も40ドル、無リスク金利は年率4%，ボラティリティは年率30%，満期は6カ月とする。
- 2期間ツリーに対する  $u, d, p$  を計算せよ。
  - 2期間ツリーを用いてオプションの価値を求めよ。
  - DerivaGem ソフトウェアでも同じ結果が得られるか確認せよ。
  - DerivaGem ソフトウェアを用いて、時間ステップ数を5, 50, 100および500としたときのオプションの価値を求めよ。

- 11.21** 先物契約に対するアメリカン・プット・オプションに対して、問題 11.20と同じ問題を考えよ。ただし、行使価格と先物価格は50ドル、無リスク金利は年率10%，満期は6カ月、ボラティリティは年率40%とする。
- 11.22** 図11.1のコール・オプションに対して、実世界での期待ペイオフに適用すべき正しい割引率は42.6%であることを脚注1で示した。コールではなくプットの場合には、割引率は-52.5%になることを示せ。また、実世界での二つの割引率がそれほど異なる理由を説明せよ。

## 第12章

# ウィナー過程と伊藤の補題

時間とともに値が不確実性を伴って変化するような変数を、確率過程 (stochastic process) に従う変数という。確率過程には、離散時間 (discrete time) のものと連続時間 (continuous time) のものがある。離散時間確率過程はあらかじめ決められた離散的な時点でのみ値が変化しうる確率過程である。一方、連続時間確率過程は任意の時間に値が変化しうる確率過程である。また、確率過程には連続値をとるものと離散値をとるものがある。連続値確率過程は与えられた範囲の任意の値をとりうる確率過程で、離散値確率過程は決められた離散値のみをとりうる確率過程である。

本章では、株価を連続値をとる連続時間確率過程としてモデル化する。確率過程の学習は、オプションおよび他のより複雑なデリバティブの価格付けを理解するための第一歩である。実際には、株価は連続値をとる連続時間確率過程として観測されるものではない。株価は離散的な値（たとえばセント

の倍数) しかとれないし、市場が開いている間のみ値は変化する。しかし、連続値をとる連続時間確率過程は、多くの目的に対して有用なモデルであることがわかっている。

多くの人々は、連続時間確率過程は複雑なので、いわゆる「ロケット・サイエンティスト」に完全に任せておけばよいものと思っているようである。しかし、そんなことはない。連続時間確率過程を理解するための一番のハードルは記号に慣れることである。したがって、本章ではこのハードルを越えられるように、ステップ・バイ・ステップで説明を行っていく。また、デリバティブの価格付けで中心的な役割を果たしている伊藤の補題 (Itô's lemma) として知られる重要な結果についても説明を行う。

## 12.1 マルコフ性

マルコフ過程 (Markov process) とは、将来の予測に関係するのは変数の現在の値のみであるという性質をもった確率過程である。したがって、マルコフ過程は変数の過去の履歴には依存しない。

株価はマルコフ過程に従うと仮定することが多い。IBM の株価が現在100ドルであるとしよう。株価がマルコフ過程に従うとすれば、将来の株価は1週間前、1カ月前、1年前の株価には依存しない。関係する情報は、株価が現在100ドルであるということのみである(注1)。将来の株価は不確実性を伴うので、確率分布で表現される。マルコフ性は、将来の任意の時点における株価の確率分布が、過去の株価の特定の履歴には依存していないことを意味している。

株価のマルコフ性は弱い形での市場の効率性と整合性がある。これは、過去の株価に含まれている情報はすべて現在の株価に織り込まれている、ということを主張するものである。弱い形での市場の効率性が正しくなければ、

---

(注1) IBM の過去の株価の統計的性質は、株価の従う確率過程の性質（たとえば、ボラティリティ）を決定するのに役立つ。ここで主張していることは、将来の株価は過去の株価の特定の履歴とは無関係であるという性質である。

株価のヒストリカル・チャートを分析して、テクニカル・アナリストたちが平均を上回るパフォーマンスをあげられることになるだろう。しかし、そのような実例はほとんどみかけられない。

市場での競争が、弱い形での市場の効率性を成り立たせるように働いている。数多くの投資家が株式市場をよくみている。株式市場から利益を得ようとする投資家の行動を通じて、過去の株価の情報は常に現在の株価に織り込まれていく。65%の確率でその後の株価が急上昇するような株価のパターンが発見されたとしよう。投資家はこのパターンをみつけるとすぐに株式を買おうとするので、株式の買い需要がすぐに高まる。その結果、利益の得られるすべての取引機会がそうであるように、すぐに株価が上昇して、観測された効果は消えてなくなるだろう。

## 12.2 連続時間の確率過程

マルコフ過程に従う変数を考える。変数の現在の値は10で、1年間での変化が $\phi(0,1)$ に従うとする。ここで $\phi(m,v)$ は平均 $m$ 、分散 $v$ の正規分布である(注2)。このとき、この変数の2年間での変化はどのような確率分布に従うであろうか。

2年間での変化は、平均ゼロ、標準偏差1.0の正規分布に従う二つの変数の和である。変数がマルコフ性をもっているので、二つの確率分布は互いに独立である。二つの独立な正規分布に従う変数の和は、平均と分散がそれぞれ二つの分布の平均の和と分散の和に等しい正規分布に従う変数となる。したがって、この変数の2年間での変化の平均はゼロ、分散は2.0になり、2年間での変化は分布 $\phi(0,2)$ に従う。また、分布の標準偏差は $\sqrt{2}$ になる。

次に、6ヶ月間での変数の変化について考える。1年間での変数の変化の分散は、最初の6ヶ月間での変化の分散と次の6ヶ月間での変化の分散の和である。それらは等しいと仮定しているので、6ヶ月間での変数の変化の分

---

(注2) 分散は標準偏差の2乗である。したがって、いま考えている変数の1年間ににおける変化の分散は1.0となる。

散は0.5になる。同じことであるが、標準偏差は $\sqrt{0.5}$ になり、変数の6カ月間での変化は確率分布 $\phi(0, 0.5)$ に従う。

同様の議論から、変数の3カ月間での変化は確率分布 $\phi(0, 0.25)$ に従うことがわかる。もっと一般に、長さ $T$ の期間での変数の変化は $\phi(0, T)$ に従う。特に、微小時間 $\Delta t$ での変数の変化は $\phi(0, \Delta t)$ に従う。

マルコフ過程では、連続する時間区間での変化の分散が加法的であることに注意しよう。標準偏差は加法的ではない。いまの例では、変数の変化の分散は1年当たり1.0なので、2年間では2.0、3年間では3.0になる。したがって、標準偏差は2年間で $\sqrt{2}$ 、3年間で $\sqrt{3}$ になる。1年当たり標準偏差が1.0という言い方は厳密には適切ではない。不確実性は時間の平方根に比例して増加するといわれるのは、こうしたことからである。

## ウィナー過程

これまで考えてきた確率過程はウィナー過程(Wiener process)として知られる確率過程で、平均がゼロ、分散が年換算で1.0であるマルコフ確率過程の代表的なものである。これは、多数の小さな分子から衝撃を受けている微粒子の動きを記述するのに物理学で用いられてきた確率過程で、ブラウン運動(Brownian motion)とも呼ばれる。

形式な定義を与えると、以下の二つの性質を満たす確率過程 $z$ をウィナー過程という。

性質1. 微小時間 $\Delta t$ での変化 $\Delta z$ は、

$$\Delta z = \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (12.1)$$

で与えられる。ここで $\varepsilon$ は標準正規分布 $\phi(0, 1)$ に従う変数である。

性質2. 微小時間 $\Delta t$ の任意の異なる二つの時間区間における $\Delta z$ の値は互いに独立である。

最初の性質から、 $\Delta z$ の分布は、

$$\Delta z \text{ の平均} = 0$$

$$\Delta z \text{ の標準偏差} = \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta z \text{ の分散} = \Delta t$$

の正規分布になる。また、2番目の性質から、 $z$  はマルコフ過程になる。

$T$  というある程度長い時間における  $z$  の変化  $z(T) - z(0)$  について考えよう。これは長さ  $\Delta t$  の  $N$  個の小さな時間区間における  $z$  の変化の和と考えることができる。ここで、

$$N = \frac{T}{\Delta t}$$

である。したがって、

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (12.2)$$

と書ける。ここで  $\epsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) は標準正規分布  $\phi(0, 1)$  に従う変数である。ウィナー過程の2番目の性質から  $\epsilon_i$  は互いに独立なので、(12.2)式より  $z(T) - z(0)$  は正規分布に従い、

$$[z(T) - z(0)] \text{ の平均} = 0$$

$$[z(T) - z(0)] \text{ の分散} = N \Delta t = T$$

$$[z(T) - z(0)] \text{ の標準偏差} = \sqrt{T}$$

となる。これは、本節のはじめのほうで説明した性質と一致している。

【例12.1】

ウィナー過程に従う変数  $z$  の初期値を25、時間の単位を年とする。

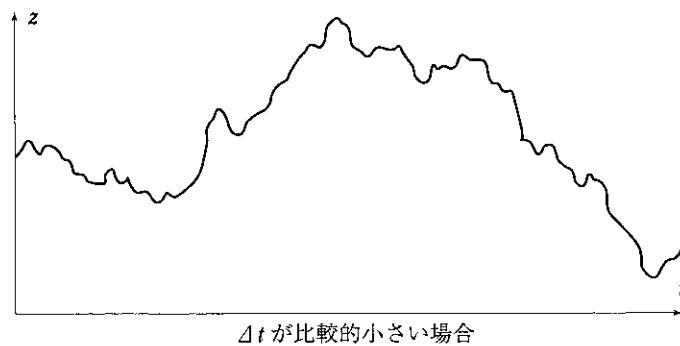
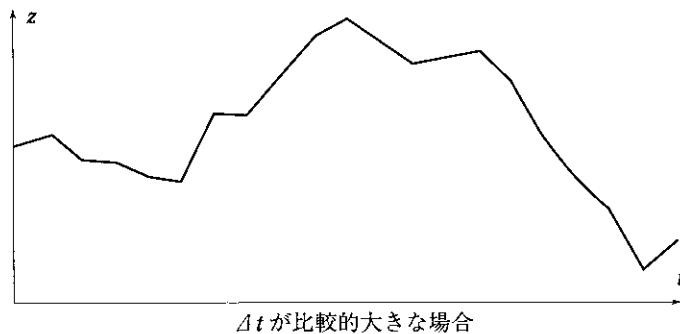
1年後の  $z$  の値は平均25、標準偏差1.0の正規分布に従う。5年後の  $z$  の値は平均25、標準偏差  $\sqrt{5}$ 、すなわち2.236の正規分布に従う。将来の与えられた時点における変数の値の不確実性を標準偏差で計ることになると、不確実性は経過時間の平方根に比例して増加する。

通常の微積分学では、微小変化をゼロに近づけた極限を考えるのがふつうである。その場合、 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限で  $\Delta x = a \Delta t$  となることを示すために、 $dx = adt$  という記号が用いられる。確率解析でも同様の記号が用いられる。

ウィナー過程に対して  $dz$  を用いるときは、上で定義した  $\Delta z$  の性質をもつ、 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限での確率過程を表している。

図12.1は、 $\Delta t \rightarrow 0$ としたときに  $z$  の経路（見本過程）がどのように変わる

図12.1 (12.1)式で  $\Delta t \rightarrow 0$ としたときにウィナー過程が得られる様子



かを例示したものである。経路はかなりギザギザしていることに注意しよう。これは、時間  $\Delta t$  での変数  $z$  の変動幅が  $\sqrt{\Delta t}$  に比例しており、 $\Delta t$  が小さくなるとき  $\sqrt{\Delta t}$  が  $\Delta t$  よりも大きくなるからである。この  $\sqrt{\Delta t}$  の性質に関係して、ウィナー過程は次の二つの興味深い性質をもっている。

1. 任意の時間区間において、 $z$  がとりうる経路の長さの期待値は無限大になる。
2. 任意の時間区間において、 $z$  が任意に与えられた値に等しくなる回数の期待値は無限大になる。

### 一般化されたウィナー過程

確率過程に対して単位時間当りの平均的な変化をドリフト率 (drift rate) といい、単位時間当りの分散を分散率 (variance rate) という。ここまで説明してきた基本的なウィナー過程  $dz$  のドリフト率はゼロ、分散率は1.0である。ドリフト率ゼロは、将来の任意の時点における  $z$  の期待値が現在の値に等しいことを意味している。分散率1.0は、長さ  $T$  の時間区間における  $z$  の変化の分散が  $T$  に等しいことを意味している。一般化されたウィナー過程 (generalized Wiener process)  $x$  は、 $dz$  を用いて、

$$dx = adt + bdz \quad (12.3)$$

で定義される。ここで  $a$  と  $b$  は定数である。

(12.3)式は右辺の二つの項を別々に考えるとわかりやすい。 $adt$  の項は、 $x$  の単位時間当りの期待ドリフト率が  $a$  であることを表している。 $bdz$  の項がないとすると、(12.3)式は  $dx = adt$  となり、これは  $dx/dt = a$  を意味している。これを時間に関して積分すると、

$$x = x_0 + at$$

が得られる。ここで  $x_0$  は時点 0 における  $x$  の値である。時間が  $T$  だけ経過すると、 $x$  の値は  $aT$  だけ増加する。(12.3)式の右辺の  $bdz$  の項は、 $x$  の経路にノイズ、あるいは確率変動を加える働きをしていると考えられる。このノイズ、あるいは確率変動の大きさは、ウィナー過程の  $b$  倍になっている。ウィナー過程の標準偏差は1.0なので、ウィナー過程の  $b$  倍は標準偏差  $b$  の

確率過程になる。したがって、微小時間  $\Delta t$  における  $x$  の変化  $\Delta x$  は、(12.1)式と(12.3)式から、

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}$$

になる。ここで  $\varepsilon$  は前と同様に標準正規分布に従う。したがって、 $\Delta x$  は、

$$\Delta x \text{ の平均} = a\Delta t$$

$$\Delta x \text{ の標準偏差} = b\sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta x \text{ の分散} = b^2\Delta t$$

の正規分布に従う。

ウィナー過程に対して行ったのと同様の議論から、任意の時間区間  $T$  における  $x$  の変化は、

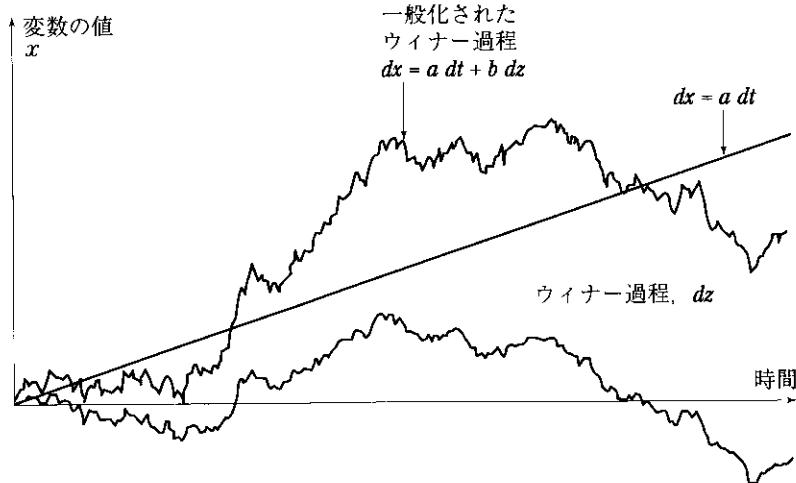
$$x \text{ の変化の平均} = aT$$

$$x \text{ の変化の標準偏差} = b\sqrt{T}$$

$$x \text{ の変化の分散} = b^2 T$$

の正規分布に従う。このように、(12.3)式で与えられる一般化されたウィナー過程は、期待ドリフト率（単位時間当たりの平均ドリフト）が  $a$ 、分散率（単位時間当たりの分散）が  $b^2$  の確率過程である。図12.2にその経路を例示した。

図12.2 一般化されたウィナー過程 ( $a=0.3$ ,  $b=1.5$ の場合)



### 【例12.2】

ある会社の現金ポジション（単位1,000ドル）が年当り20のドリフトと年当り900の分散をもつウィナー過程に従って変化するとしよう。当初の現金ポジションを50とする。1年後の現金ポジションは、平均70、標準偏差 $\sqrt{900}=30$ の正規分布に従う。6カ月後の現金ポジションは、平均60、標準偏差 $30\sqrt{0.5}=21.21$ の正規分布に従う。将来時点での現金ポジションに対する不確実性を標準偏差で計ると、それは経過時間の平方根に比例して増加している。現金ポジションは負になることもある（その場合は、会社は借入れをしているものと解釈する）。

### 伊藤過程

伊藤過程 (Itô process) として知られる、さらに拡張された確率過程も定義できる。これは、パラメータ  $a$  と  $b$  が  $x$  と  $t$  の関数になっている一般化されたウィナー過程である。伊藤過程を式で表すと、

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz \quad (12.4)$$

となる。伊藤過程の期待ドリフト率と分散率は時間とともに変化する。 $t$  から  $t + \Delta t$  までの微小時間に、変数が  $x$  から  $x + \Delta x$  へ変化したとすると、 $\Delta x$  は、

$$\Delta x = a(x, t) \Delta t + b(x, t) \epsilon \sqrt{\Delta t}$$

で与えられる。ここでは、 $t$  から  $t + \Delta t$  までの微小時間では  $x$  のドリフト率と分散率は一定で、それぞれ  $a(x, t)$  と  $b(x, t)^2$  に等しいと仮定している。

### 12.3 株価過程

本節では、配当のない株式の価格に対してよく用いられる確率過程について考察する。

株価は一般化されたウィナー過程に従うと仮定してみることがすぐに思いつくことだろう。この場合、期待ドリフト率と分散率が一定であると仮定す

ることになる。しかし、このモデルでは株価のもつ重要な特徴がとらえられていない。その特徴とは、投資家の要求する期待収益率は株価とは独立であるという特徴である。株価が10ドルのとき年率14%の期待収益率を求める投資家は、他の条件が同じであれば、株価が50ドルのときも年率14%の期待収益率を求めるだろう。

明らかに、期待ドラフト率が一定という仮定は適切ではなく、期待収益率（すなわち、期待ドリフトを株価で除したもの）が一定であるという仮定に置き換える必要がある。時点  $t$  における株価が  $S$  のとき、 $S$  の期待ドリフト率はある定数  $\mu$  を用いて  $\mu S$  で与えられると仮定すべきである。これは、微小時間  $\Delta t$  での  $S$  の増加額に対する期待値が  $\mu S \Delta t$  であることを意味している。したがって、パラメータ  $\mu$  は株式の期待収益率を小数で表したものになっている。

株価のボラティリティが常にゼロであると仮定すると、このモデルは、

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

になる。 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限では、

$$dS = \mu S dt$$

すなわち、

$$\frac{dS}{S} = \mu dt$$

となる。これを時点 0 から時点  $T$  まで積分すると、

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \quad (12.5)$$

が得られる。ここで  $S_0$  と  $S_T$  は、それぞれ時点 0 と時点  $T$  における株価である。(12.5)式より、株価の分散率がゼロのときは、株価は連続複利で単位時間当たり  $\mu$  の割合で増加することがわかる。

もちろん、実際には株価のボラティリティはゼロではない。微小時間  $\Delta t$  における収益率の変動性は株価によらず同じであるとするのが妥当であろう。言い換えると、株価が50ドルのときも10ドルのときも、投資家にとって、収益率に対する不確実さは変わらないということである。このことより、微小時間  $\Delta t$  における株価変動の標準偏差は株価に比例しているとすれ

ばよく、

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

すなわち、

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (12.6)$$

というモデルが得られる。(12.6)式は株価変動のモデルとして最も広く用いられているものである。パラメータ  $\sigma$  は株価のボラティリティ、パラメータ  $\mu$  は期待収益率である。(12.6)式で与えられるモデルは、第11章で説明した二項ツリーで表現されるランダムウォークで時間の刻み幅を小さくした極限とみなすことができる。

### 離散時間モデル

これまで説明してきた株価変動のモデルは、幾何ブラウン運動 (geometric Brownian motion) として知られているものである。このモデルに対応する離散時間モデルは、

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (12.7)$$

すなわち、

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (12.8)$$

である。変数  $\Delta S$  は微小時間  $\Delta t$  における株価  $S$  の変化幅、 $\epsilon$  は標準正規分布 (平均がゼロ、標準偏差が1.0の正規分布) に従う変数である。パラメータ  $\mu$  は株式の単位時間当たりの期待収益率、 $\sigma$  は株価のボラティリティである。本章では、これらのパラメータは定数であると仮定する。

(12.7)式の左辺は、微小時間  $\Delta t$  における株価  $S$  の収益率である。 $\mu \Delta t$  の項はこの収益率の期待値を表し、 $\sigma \epsilon \sqrt{\Delta t}$  の項は収益率の確率変動成分を表している。この確率変動成分の分散 (したがって、収益率の分散) は  $\sigma^2 \Delta t$  である。これは11.7節で与えたボラティリティ  $\sigma$  の定義と一致している。すなわち、 $\sigma$  は微小期間  $\Delta t$  における収益率の標準偏差が  $\sigma \sqrt{\Delta t}$  になるものとして定義されている。

(12.7)式は、 $\Delta S/S$  が平均  $\mu\Delta t$ 、標準偏差  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  の正規分布に従うことを見ている。言い換えると、

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t) \quad (12.9)$$

が成り立つ。

【例12.3】

配当がなく、ボラティリティが年率30%，期待収益率が連続複利で年率15%の株式を考える。この場合、 $\mu=0.15$ 、 $\sigma=0.30$ となるので、株価過程は、

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.30dz$$

で与えられる。 $S$  をある時点の株価、その直後の微小時間における株価の変化を  $\Delta S$  とすると、

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15\Delta t + 0.30\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

が成り立つ。ここで  $\epsilon$  は標準正規分布に従う変数である。考える期間を1週間、すなわち0.0192年とすると、

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.00288 + 0.0416\epsilon$$

すなわち、

$$\Delta S = 0.00288S + 0.0416S\epsilon$$

となる。

### モンテカルロ・シミュレーション

確率過程のモンテカルロ・シミュレーションは、その過程に従う乱数を発生させる手法である。(12.6)式で表された株価過程の性質に対する理解を深めるのに、モンテカルロ・シミュレーションを使ってみよう。

例12.3について考える。株式の期待収益率は年率15%，ボラティリティは

年率30%である。すでに示したように、1週間での株価の変化は、

$$\Delta S = 0.00288S + 0.0416S\epsilon \quad (12.10)$$

である。株価の経路は、分布  $\phi(0,1)$  に従う  $\epsilon$  のサンプルを繰り返し抽出し、(12.10)式に代入することでシミュレーションできる。Excel で式 =RAND() を用いると、0 と 1 の間の乱数が発生できる。NORMSINV という標準正規分布の累積分布関数の逆関数があるので、Excel で標準正規分布に従う乱数を発生させるためには、=NORMSINV(RAND()) とすればよい。表12.1に、このようにして発生させた株価の一つのサンプルパスを示す。はじめの株価は100ドル、最初の期間に対して抽出された  $\epsilon$  の値は0.52である。(12.10)式より、最初の期間での変化は、

$$\Delta S = 0.00288 \times 100 + 0.0416 \times 100 \times 0.52 = 2.45$$

となる。したがって、2番目の期間のはじめの株価は102.45ドルになる。次の期間に対して抽出された  $\epsilon$  の値は1.44である。(12.10)式より、2番目の期間での変化は、

$$\Delta S = 0.00288 \times 102.45 + 0.0416 \times 102.45 \times 1.44 = 6.43$$

となる。したがって、次の期間のはじめの株価は108.88ドルになる、等々である。シミュレーションしている確率過程はマルコフ過程なので、 $\epsilon$  の値として抽出したサンプルは互いに独立でなければならない(注3)。

表12.1(次頁)では株価はセント単位に丸められている。この表の数値はあくまで株価変動のありうるパターンの一つにすぎない。この点は重要である。異なる無作為抽出からは異なる株価変動のパターンが得られる。任意の微小な時間間隔  $\Delta t$  を用いてシミュレーションを行うことができる。 $\Delta t \rightarrow 0$  の極限をとると、その確率過程を完全に表したもののが得られる。表12.1の最終株価111.54ドルは、10週間後の株価の分布から無作為抽出されたものとみなせる。このシミュレーションを繰り返し行えば、10週間後の株価の完全な確率分布が得られる。モンテカルロ・シミュレーションについては、第19章でもっと詳しく論じる。

---

(注3) 実際には、19.6節で論じるように、 $S$ ではなく  $\ln S$  のサンプルパスを発生させたほうが効率的である。

表12.1  $\mu=0.15$ ,  $\sigma=0.30$ としたときの、1週間ごとの株価のシミュレーション例

| 期間はじめの株価 | $\varepsilon$ の無作為抽出 | 当該期間の株価の変化 |
|----------|----------------------|------------|
| 100.00   | 0.52                 | 2.45       |
| 102.45   | 1.44                 | 6.43       |
| 108.88   | -0.86                | -3.58      |
| 105.30   | 1.46                 | 6.70       |
| 112.00   | -0.69                | -2.89      |
| 109.11   | -0.74                | -3.04      |
| 106.06   | 0.21                 | 1.23       |
| 107.30   | -1.10                | -4.60      |
| 102.69   | 0.73                 | 3.41       |
| 106.11   | 1.16                 | 5.43       |
| 111.54   | 2.56                 | 12.20      |

## 12.4 パラメータについて

本章で扱ってきた株価過程には、二つのパラメータ  $\mu$  と  $\sigma$  が含まれている。 $\mu$  は短期間に投資家が得る期待収益率（年率）である。ほとんどの投資家は、より高いリスクに対してはより高い期待収益率を要求する。したがって、 $\mu$  の値は株式の収益に対するリスクの大きさに依存して決まる（注<sup>4</sup>）。 $\mu$  は金利水準にも依存しているはずである。金利が高くなれば、どの株式も求められる期待収益率が高くなるからである。

幸いなことに、一般的にデリバティブの価値は  $\mu$  の値とは関係なく決まるので、 $\mu$  の決定要因についてはまったく考える必要がない。それとは対照的に、株価のボラティリティ  $\sigma$  は多くのデリバティブの価格を決めるうえで決定的に重要な量である。 $\sigma$  を推定する方法については、第13章で説明する。株式の  $\sigma$  は、0.15から0.60（すなわち、15%から60%）が典型的な値である。

---

（注<sup>4</sup>） より正確には、 $\mu$  は投資家が分散投資で消去できない部分のリスクに依存している。

微小時間  $\Delta t$  における株価変化率の標準偏差は  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  である。粗い近似では、比較的長い時間  $T$  における株価変化率の標準偏差は  $\sigma\sqrt{T}$  になる。つまり、ボラティリティは 1 年間の株価変化率の標準偏差であると近似的には解釈できる。株価のボラティリティは、正確には、株式の 1 年間における連續複利ベースでの収益率の標準偏差に等しいということを第13章で示す。

## 12.5 伊藤の補題

株券オプションの価格は、原資産である株式の価格と時間の関数である。もっと一般的に、すべてのデリバティブの価格は原資産を表す確率過程と時間の関数であるということができる。したがって、デリバティブを研究する場合には、確率過程の関数の性質についてある程度理解しておく必要がある。この分野での一つの重要な結果は、1951年に数学者伊藤清によって発見された、伊藤の補題である(注5)。

変数  $x$  が伊藤過程に従い、

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz \quad (12.11)$$

を満たすとする。ここで  $dz$  はウィナー過程、 $a$  と  $b$  は  $x$  と  $t$  の関数である。すなわち、変数  $x$  のドリフト率は  $a$ 、分散率は  $b^2$  である。伊藤の補題によると、 $G$  が  $x$  と  $t$  の関数のとき、 $G$  は、

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (12.12)$$

を満たす確率過程になる。ここで  $dz$  は(12.11)式に現れたウィナー過程である。したがって、 $G$  も伊藤過程となり、そのドリフト率は、

$$\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2$$

分散率は、

(注5) K.Ito, "On Stochastic Differential Equations," *Memoirs of the American Mathematical Society*, 4 (1951) :1-51 を参照。

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 b^2$$

で与えられる。伊藤の補題の完全に厳密な証明は本書の範囲を超える。本章の付録では、この補題が微分学でのよく知られた結果の拡張とみなせることを示す。

前のほうで、 $\mu$  と  $\sigma$  を定数として、

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (12.13)$$

という確率過程が株価変動を記述する妥当なモデルであることを述べた。伊藤の補題より  $S$  と  $t$  の関数  $G$  は、

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S dz \quad (12.14)$$

を満たしている。したがって、 $S$  と  $G$  の不確定性はともに同じ  $dz$  に由来するものである。このことは、Black-Scholes 式の導出において非常に重要である。

### フォワード契約への応用

伊藤の補題の応用例として、配当のない株式のフォワード契約について考えよう。無リスク金利はすべての期間に対して一定で、 $r$  に等しいとする。 $F_0$  を時点ゼロでのフォワード価格、 $S_0$  を時点ゼロでの現物価格、 $T$  をフォワード契約の満期までの時間とすると、(5.1)式より、

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

が成り立つ。

時間の経過とともにフォワード価格はどのように変動するかを考えたい。そこで、 $F$  を時点  $t$  ( $t < T$ ) におけるフォワード価格、 $S$  を時点  $t$  における株価とする。このとき、 $F$  と  $S$  の関係は、

$$F = S e^{r(T-t)} \quad (12.15)$$

で与えられる。 $S$  の確率過程が(12.13)式で与えられるとすると、伊藤の補題から確率過程  $F$  の満たす式が導ける。(12.15)式より、

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}$$

となるから、(12.14)式より、 $F$  は、

$$dF = [e^{r(T-t)}\mu S - rSe^{r(T-t)}]dt + e^{r(T-t)}\sigma Sdz$$

を満たすことがわかる。 $Se^{r(T-t)}$ に  $F$  を代入すると、

$$dF = (\mu - r)Fdt + \sigma Fdz \quad (12.16)$$

が得られる。したがって、 $S$  と同様にフォワード価格  $F$  も幾何ブラウン運動に従っている。 $F$  の期待成長率は  $\mu$  ではなく  $\mu - r$  となり、無リスク金利に対する  $S$  の超過収益率に等しい。

## 12.6 対数正規性

次に、 $S$  が(12.13)式で与えられるとき、伊藤の補題を用いて  $\ln S$  の満たす方程式を導く。

$$G = \ln S$$

と置く。

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

が成り立つから、(12.14)式より  $G$  は、

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz \quad (12.17)$$

を満たす。 $\mu$  と  $\sigma$  は定数なので、この式から  $G = \ln S$  が一般化されたウィナー過程に従うことがわかる。そのドリフト率は定数  $\mu - \sigma^2/2$  で、分散率は定数  $\sigma^2$  である。したがって、時点 0 から時点  $T$  までの  $\ln S$  の変化は、平均  $(\mu - \sigma^2/2)T$ 、分散  $\sigma^2 T$  の正規分布に従う。このことより、

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right] \quad (12.18)$$

あるいは、

$$\ln S_T \sim \phi \left[ \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (12.19)$$

となる。ここで  $S_T$  は将来の時点  $T$  における株価,  $S_0$  は時点ゼロにおける株価,  $\phi(m, v)$  は平均  $m$ , 分散  $v$  の正規分布である。

(12.19)式は  $\ln S_T$  が正規分布に従っていることを示している。自然対数をとると正規分布に従う変数は、対数正規分布に従っているといわれる。したがって、本章で説明してきた株価変動のモデルでは、現在の株価を与えたとき、時点  $T$  における株価は対数正規分布に従うことになる。株価の対数の標準偏差は  $\sigma\sqrt{T}$  で、経過時間の平方根に比例している。

## 要 約

確率過程は確率的に時間発展する変数の記述に用いられる。マルコフ過程とは、現在の値のみが将来の予測に関係しているという性質を満たす確率過程である。それは、過去の値や経路に依存しない確率過程である。

ウィナー過程  $dz$  は、正規分布に従う変数の時間発展を記述する確率過程である。そのドリフトはゼロ、分散率は単位時間当たり 1.0 である。したがって、時点 0 における変数の値が  $x_0$  ならば、時点  $T$  における変数の値は平均が  $x_0$ 、標準偏差が  $\sqrt{T}$  の正規分布に従う。

一般化されたウィナー過程は、単位時間当たりのドリフトが  $a$ 、単位時間当たりの分散率が  $b^2$  の正規分布に従う変数の時間発展を記述している。 $a$  と  $b$  は定数である。前の場合と同様に、時点 0 における変数の値が  $x_0$  ならば、時点  $T$  における変数の値は平均が  $x_0 + aT$ 、標準偏差が  $b\sqrt{T}$  の正規分布に従う。

伊藤過程は、 $x$  のドリフトと分散率が  $x$  自身と時間の関数になっている確率過程である。微小時間での  $x$  の変化は、よい近似として、正規分布に従っているが、長い時間での変化の分布はふつう正規分布にはならない。

確率過程を直感的に理解する一つの方法は、変数のふるまいをシミュレーションしてみることである。これは、時間区間を多くの微小区間に分割し、変数のとりうる経路を無作為抽出することである。それによって、将来における変数の確率分布を計算することもできる。モンテカルロ・シミュレーションについては第19章でさらに論じる。

伊藤の補題は、確率過程の関数が従う確率過程を計算する方法を与える。第13章でみると、伊藤の補題はデリバティブの価格付けで非常に重要な役割を果たしている。変数が従う確率過程に現れるウィナー過程  $dz$  が、変数の関数が従う確率過程に現れるウィナー過程とまったく同じであるということが大切な点である。つまり、両者の不確実性は同じものに由来しているということである。

株価に対する確率過程としては幾何ブラウン運動がふつう用いられる。その仮定のもとでは、微小時間に株式保有者が得る収益率は正規分布に従い、重なり合わない2期間における収益率は独立である。将来時点での株価は対数正規分布に従っている。次章で扱う Black-Scholes モデルでは、株価は幾何ブラウン運動に従うと仮定されている。

## 参考文献

### ○効率的市場と株価のマルコフ性について

Brealey, R.A. *An Introduction to Risk and Return from Common Stock*, 2nd edn. Cambridge, MA : MIT Press, 1986.

Cootner, P.H.(ed.) *The Random Character of Stock Market Prices*. Cambridge, MA : MIT Press, 1964.

### ○確率過程について

Cox, D.R. and H.D. Miller. *The Theory of Stochastic Processes*. London : Chapman & Hall, 1977.

Feller, W. *Introduction to Probability Theory and Its Applications*. New York :

- Wiley, 1968.
- Karlin, S., and H.M. Taylor. *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd edn. New York : Academic Press, 1975.
- Neftci, S. *Introduction to Mathematics of Financial Derivatives*, 2nd edn. New York : Academic Press, 2000.

### 章末問題

- 12.1** ある場所の気温がマルコフ過程に従うという主張は、何を意味しているか。実際に気温はマルコフ過程に従うと思うか。
- 12.2** 過去の株価に基づいたトレーディング・ルールを用いて、安定的に平均を上回る収益をあげ続けられるか。このことについて議論せよ。
- 12.3** ある会社の現金ポジション（単位100万ドル）が、四半期当たりのドリフト率0.5、四半期当たりの分散率4.0の一般化されたウィナー過程に従うとする。1年後に現金ポジションが負になる確率を5%以下にするためには、当初の現金ポジションはいくらなければならないか。
- 12.4** 変数  $X_1$  と  $X_2$  はいずれも一般化されたウィナー過程に従い、ドリフト率はそれぞれ  $\mu_1$  と  $\mu_2$ 、分散率はそれぞれ  $\sigma_1^2$  と  $\sigma_2^2$  とする。次の各場合について、 $X_1 + X_2$  はどのような確率過程に従うか。
- 任意の微小時間における  $X_1$  と  $X_2$  の変化が無相関の場合
  - 任意の微小時間における  $X_1$  と  $X_2$  の変化の相関が  $\rho$  の場合
- 12.5** 次のような確率過程に従う変数  $S$  がある。
- $$dS = \mu dt + \sigma dz$$
- はじめの3年間は  $\mu=2$ ,  $\sigma=3$ , 次の3年間は  $\mu=3$ ,  $\sigma=4$  とする。 $S$  のはじめの値を5とするとき、6年後のこの変数の確率分布を求めよ。
- 12.6**  $G$  を株価  $S$  と時間の関数とする。 $\sigma_S$  と  $\sigma_G$  をそれぞれ  $S$  と  $G$  のボラ

ティリティとする。 $S$  の期待収益率が  $\lambda\sigma_s$ だけ増加するとき、 $G$  の成長率は  $\lambda\sigma_G$ だけ増加することを示せ。ただし、 $\lambda$  は定数とする。

- 12.7** 株式 A と株式 B は、どちらも株価が幾何ブラウン運動に従って変化している。任意の微小時間におけるそれぞれの株価の変化には相関はないものとする。株式 A と株式 B それぞれ 1 単位ずつからなるポートフォリオの価値は幾何ブラウン運動に従うか。その理由も説明せよ。

- 12.8** (12.8)式では、株価の確率過程は、

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

で与えられている。ここで、 $\mu$  と  $\sigma$  は定数である。このモデルと次のそれぞれのモデルとの違いを注意深く説明せよ。

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

$$\Delta S = \mu \Delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

また、(12.8)式のモデルが他の三つのモデルより株価のモデルとして適している理由を述べよ。

- 12.9** 短期金利  $r$  は確率過程、

$$dr = a(b - r) dt + r cdz$$

に従うとされてきた。ここで  $a$ ,  $b$ ,  $c$  は正の定数で、 $dz$  はウィナー過程である。この確率過程の性質について述べよ。

- 12.10** 株価  $S$  が期待収益率  $\mu$ , ポラティリティ  $\sigma$  の幾何ブラウン運動、

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

に従うとする。このとき、変数  $S^n$  の従う確率過程を導け。また、 $S^n$  も幾何ブラウン運動に従うことを見せよ。

- 12.11** 時点  $T$  に 1 ドルで償還する割引債の連続複利ベースでのイールドを  $x$  とする。 $x$  は確率過程、

$$dx = a(x_0 - x) dt + s x dz$$

に従うとする。ここで  $a$ ,  $x_0$ ,  $s$  は正の定数で、 $dz$  はウィナー過程である。このとき、債券の価格が従う確率過程を導け。

## 宿題

**12.12** ある株価の期待収益率を年率16%，ボラティリティを年率30%とする。ある日の株価の終値が50ドルのとき，以下の値を計算せよ。

- (a) 翌日の終値の期待値
- (b) 翌日の終値の標準偏差
- (c) 翌日の終値の95%信頼区間

**12.13** ある会社の現金ポジション（単位100万ドル）が，月当りのドリフト率0.1，月当りの分散率0.16の一般化されたウィナー過程に従っている。当初の現金ポジションを2.0とする。

- (a) 1カ月後，6カ月後，1年後の各時点における現金ポジションの確率分布を求めよ。
- (b) 6カ月後と1年後のそれぞれについて，現金ポジションが負になる確率を求めよ。
- (c) 現金ポジションが負になる確率が最も高いのはいつの時点か。

**12.14** 年間1ドルの割合で利子が支払われる永久国債のイールドを  $x$  とする。 $x$  は連続複利ベースで表されており，利子は連続的に支払われ， $x$  は確率過程，

$$dx = a(x_0 - x)dt + sxdz$$

に従うとする。ここでは  $a$ ,  $x_0$ ,  $s$  は正の定数で， $dz$  はウィナー過程である。このとき，債券の価格が従う確率過程を導け。また，債券保有者の瞬間的な期待収益率（利子とキャピタルゲインを含む）を求めよ。

**12.15**  $S$  が(12.6)式の幾何ブラウン運動に従うとき，以下の各変数が従う確率過程を導け。

- (a)  $y = 2S$
- (b)  $y = S^2$
- (c)  $y = e^S$
- (d)  $y = e^{r(T-t)}/S$

それぞれの場合について、 $dt$  と  $dz$  の係数は、 $S$  ではなく  $y$  を用いて表せ。

- 12.16** 現在の株価は50である。その株式の期待収益率とボラティリティをそれぞれ12%，30%とする。2年後の株価が80を超える確率を求めよ（ヒント： $\ln S_T > \ln 80$  のとき  $S_T > 80$  である）。

## 付 錄

### 伊藤の補題の導出

この付録では、伊藤の補題が他のより簡単な結果の自然な拡張とみなせることを示す。変数  $x$  の連続かつ微分可能な関数  $G$  について考える。 $x$  が  $\Delta x$  だけ微小変化したとき  $G$  が  $\Delta G$  だけ変化したとすると、通常の微積分学でよく知られていることとして、

$$\Delta G \approx \frac{dG}{dx} \Delta x \quad (12A.1)$$

が成り立つ。言い換えると、 $\Delta G$  は  $x$  に関する  $G$  の変化率に  $\Delta x$  を乗じたものに近似的に等しい。その誤差は  $\Delta x^2$  のオーダーの項を含む。もっと高い精度が必要ならば、 $\Delta G$  をテイラー級数展開した、

$$\Delta G = \frac{dG}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2G}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3G}{dx^3} \Delta x^3 + \dots$$

を使えばよい。

2変数  $x$  と  $y$  の連続かつ微分可能な関数  $G$  に対しては、(12A.1)式と同様の、

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y \quad (12A.2)$$

が成り立つ。 $\Delta G$  をテイラー級数展開したものは、

$$\begin{aligned} \Delta G = & \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \Delta y^2 + \dots \end{aligned} \quad (12A.3)$$

である。 $\Delta x$  と  $\Delta y$  をゼロに近づける極限をとると、(12A.3)式は、

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy \quad (12A.4)$$

になる。

さて、(12A.4)式を伊藤過程に従う変数をもつ関数に適用できるように拡張しよう。変数  $x$  が伊藤過程,

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz \quad (12A.5)$$

に従うとし、 $G$  を  $x$  と時間  $t$  の関数とする。(12A.3)式との類推で、

$$\begin{aligned} \Delta G &= \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \end{aligned} \quad (12A.6)$$

と書ける。(12A.5)式を離散化すると、

$$\Delta x = a(x, t) \Delta t + b(x, t) \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

もしくは引数を省略して、

$$\Delta x = a \Delta t + b \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (12A.7)$$

となる。この式から、(12A.6)式と(12A.3)式が使われる状況には重要な違いがあることがわかる。(12A.3)式から(12A.4)式を導く際の引数の極限操作では、 $\Delta x^2$  の項は 2 次の項であることから無視された。(12A.7)式より、

$$\Delta x^2 = b^2 \varepsilon^2 \Delta t + \Delta t \text{ の高次の項} \quad (12A.8)$$

となる。したがって、(12A.6)式の  $\Delta x^2$  を含む項は  $\Delta t$  のオーダーの成分をもつので、無視できないことがわかる。

標準正規分布の分散は 1 であるから、

$$E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = 1$$

となる。ここで  $E$  は期待値を表す。 $E(\varepsilon) = 0$  より  $E(\varepsilon^2) = 1$  となる。したがって、 $\varepsilon^2 \Delta t$  の期待値は  $\Delta t$  となる。 $\varepsilon^2 \Delta t$  の分散は  $\Delta t^2$  のオーダーになることが示せるので、 $\Delta t$  がゼロに近づくとき、 $\varepsilon^2 \Delta t$  は確率的な変数ではなく、その値は期待値  $\Delta t$  に等しいとしてよい。(12A.8)式より  $\Delta t$  がゼロに近づくとき、 $\Delta x^2$  は確率的な変数ではなくなり、 $b^2 dt$  に等しくなる。(12A.6)式で  $\Delta x$  と  $\Delta t$  をゼロに近づける極限をとり、上の結果を用いると、

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt \quad (12A.9)$$

が得られる。これが伊藤の補題である。 $dx$  に(12A.5)式を代入すると、(12A.9)式は、

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} bdz$$

になる。

## 第13章

# Black-Scholes-Merton モデル

1970年代初頭、Fischer Black, Myron Scholes, および Robert Merton の3人は、株券オプションの価格付けにおいて一大進展をもたらした(注1)。この業績には、Black-Scholes（またはBlack-Scholes-Merton）モデルとして知られるようになったモデルの導出も含まれている。そのモデルは、トレーダーがオプションの価格付けやヘッジを行う方法に多大な影響をもたらした。そして、過去30年のフィナンシャル・エンジニアリングの発展と成功にも重要な影響を与え続けてきた。この重要なモデルの業績に対して、1997年に Myron Scholes と Robert Merton はノーベル経済学賞を受賞した。残

---

(注1) F. Black and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973) : 637-59 および R.C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (spring 1973) : 141-83 を参照。

念なことに Fischer Black は1995年に他界したが、そうでなければ彼もこのノーベル賞を間違いなく受賞したであろう。

この章では、配当のない株式のヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションの評価を与える Black-Scholes モデルの導出を行う。ボラティリティに関して、過去データから推定する方法とモデルを利用してオプションの市場価格から逆算する方法について説明する。また、第11章で導入したリスク中立化法の議論がここでも使えることを説明する。さらに、Black-Scholes モデルは配当のある株式のヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションの評価にも拡張できることを示すとともに、配当のある株式のアメリカン・コール・オプションの価格付けについてもいくつかの結果を紹介する。

### 13.1 株価の対数正規性

Black, Scholes, および Merton が用いた株価変動のモデルは、第12章で説明したモデルである。そのモデルでは、微小時間における株価の変化率は正規分布に従うと仮定されている。

$\mu$  : 株式の期待収益率 (年率)

$\sigma$  : 株価のボラティリティ (年率)

と定義する。時間  $\Delta t$  における変化率の平均は  $\mu\Delta t$ , 変化率の標準偏差は  $\sigma\sqrt{\Delta t}$  となるので,

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t) \quad (13.1)$$

となる。ここで、 $\Delta S$  は時間  $\Delta t$  における株価  $S$  の変化、 $\phi(m, v)$  は平均  $m$ , 分散  $v$  の正規分布である。

12.6節で示したように、このモデルでは、

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma^2 T\right]$$

が成り立つ。これは、

$$\ln \frac{S_T}{S_0} \sim \phi \left[ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (13.2)$$

あるいは、

$$\ln S_T \sim \phi \left[ \ln S_0 + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (13.3)$$

と書くこともできる。ここで、 $S_T$ は将来の時点  $T$  における株価、 $S_0$ は時点 0 における株価である。(13.3)式より  $\ln S_T$  が正規分布に従っているので、 $S_T$  は対数正規分布に従っている。 $\ln S_T$  の平均は  $\ln S_0 + (\mu - \sigma^2/2) T$ 、標準偏差は  $\sigma\sqrt{T}$  である。

【例13.1】

はじめの価格が40ドル、期待収益率が年率16%、ボラティリティが年率20%の株式を考える。(13.3)式より 6 カ月後の株価  $S_T$  の確率分布は、

$$\ln S_T \sim \phi [\ln 40 + (0.16 - 0.2^2/2) \times 0.5, 0.2^2 \times 0.5]$$

$$\ln S_T \sim \phi (3.759, 0.02)$$

で与えられる。正規分布に従う変数が平均から1.96標準偏差内に値をとる確率は95%である。標準偏差はいまの場合  $\sqrt{0.02} = 0.141$  となるので、95%の信頼性でもって、

$$3.759 - 1.96 \times 0.141 < \ln S_T < 3.759 + 1.96 \times 0.141$$

となる。これは書き直すと、

$$e^{3.759 - 1.96 \times 0.141} < S_T < e^{3.759 + 1.96 \times 0.141}$$

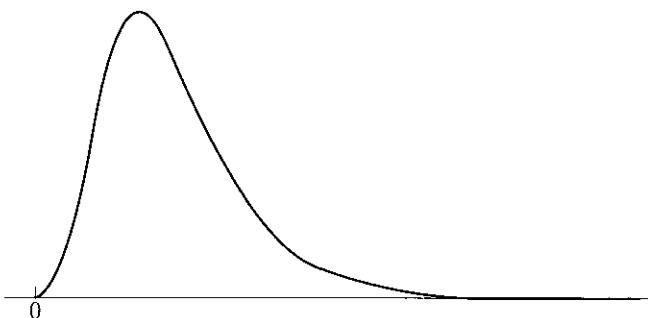
すなわち、

$$32.55 < S_T < 56.56$$

となる。したがって、6 カ月後の株価は95%の確率で32.55から56.56までの値をとることがわかる。

対数正規分布に従う変数は、ゼロから無限大までの任意の値をとりうる。図13.1（次頁）は対数正規分布の形状を描いたものである。正規分布とは異なり、対数正規分布は歪んでおり、平均値、中央値、最頻値はすべて異なる値になる。(13.3)式と対数正規分布の性質から、 $S_T$  の期待値  $E(S_T)$  は、

図13.1 対数正規分布



$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \quad (13.4)$$

で与えられることが示せる。この式から  $\mu$  を期待収益率と定義することの妥当性がわかる。 $S_T$  の分散  $\text{var}(S_T)$  は、

$$\text{var}(S_T) = S_0^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1) \quad (13.5)$$

で与えられる(注2)。

【例13.2】

現在の価格が20ドル、期待収益率が年率20%、ボラティリティが年率40%の株式を考える。1年後の株価の期待値  $E(S_T)$  と分散  $\text{var}(S_T)$  は、

$$E(S_T) = 20 e^{0.2 \times 1} = 24.43, \quad \text{var}(S_T) = 400 e^{2 \times 0.2 \times 1} (e^{0.4^2 \times 1} - 1) = 103.54$$

で与えられる。したがって、1年後の株価の標準偏差は  $\sqrt{103.54}$ 、すなわち 10.18 になる。

## 13.2 収益率の分布

株価が対数正規分布に従っていることを用いて、時点 0 から時点  $T$  まで

(注2) (13.4)式と(13.5)式の証明については、著者の Web サイトのテクニカルノート 2 を参照されたい。また、対数正規分布の性質についてのより詳細な議論については、J. Aitchison and J.A.C. Brown, *The Lognormal Distribution*. Cambridge University Press, 1966 を参照。

の株式の連続複利ベースでの収益率の確率分布を求めることができる。時点 0 から時点  $T$  までに実現した連続複利ベースでの収益率（年率）を  $x$  とすると、

$$S_T = S_0 e^{xT}$$

となるので、

$$x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0} \quad (13.6)$$

となる。（13.2）式から、

$$x \sim \phi\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T}\right) \quad (13.7)$$

が得られる。したがって、連続複利ベースでの収益率（年率）は平均  $\mu - \sigma^2/2$ 、標準偏差  $\sigma/\sqrt{T}$  の正規分布に従う。 $T$  の値が大きくなると  $x$  の標準偏差は小さくなる。その理由を理解するためには、 $T=1$  と  $T=20$  の二つの場合を考えてみればよい。任意の 1 年間における収益率よりも 20 年間にわたる平均収益率のほうがより確かなことがいえるからである。

### 【例13.3】

期待収益率が年率 17%，ボラティリティが年率 20% の株式を考える。

3 年間に実現する（連続複利ベースでの）平均収益率の確率分布は、平均が、

$$0.17 - \frac{0.2^2}{2} = 0.15$$

すなわち年率 15%，標準偏差が、

$$\sqrt{\frac{0.2^2}{3}} = 0.1155$$

すなわち年率 11.55% の正規分布である。正規分布に従う変数が平均から 1.96 標準偏差内に値をとる確率は 95% なので、3 年間に実現する平均収益率は 95% の信頼性をもって年率 -7.6% から +37.6% の範囲に収まる。

### 13.3 期待収益率

投資家が要求する株式の期待収益率  $\mu$  は株式のリスクの大きさに依存している。リスクが高くなると、求められる期待収益率も高くなる。期待収益率はその経済の金利水準にも依存している。金利水準が高くなると、どの株式も求められる期待収益率が高くなる。幸いにも、 $\mu$  の決定要因についてはまったく考える必要はない。株券オプションの価値を原資産である株式の価値を用いて表すときには、株券オプションの価値は  $\mu$  にはまったく依存しないからである。しかし、株式の期待収益率という用語にはしばしば混乱を引き起こす面がある。それについて説明しておこう。

(13.1)式は、 $\mu\Delta t$  が微小時間  $\Delta t$  における株価変化率の期待値であることを示している。このことから、 $\mu$  を株式の連続複利ベースでの収益率の期待値であると考えてしまうのも無理はない。しかし、それは正しくない。長さ  $T$  の期間に実際に実現した連続複利ベースでの収益率  $x$  は、(13.6)式で与えたように、

$$x = \frac{1}{T} \ln \frac{S_T}{S_0}$$

であり、(13.7)式からわかるように、 $x$  の期待値  $E(x)$  は  $\mu - \sigma^2/2$  である。

連続複利ベースでの収益率の期待値が  $\mu$  と異なる理由は、わかりにくく重要である。期間を長さが微小時間  $\Delta t$  の非常に多くの区間に分割して考えよう。 $S_i$  を  $i$  番目の区間の終わりにおける株価とし、 $\Delta S_i$  を  $S_{i+1} - S_i$  とする。いま考えている株価変動に対する仮定のもとでは、各区間の株価収益率の平均は  $\mu$  に近似的に等しい。言い換えると、 $\mu\Delta t$  は  $\Delta S_i/S_i$  の算術平均に近似的に等しい。しかし、複利の間隔を  $\Delta t$  とした場合のデータ全期間に対する期待収益率は、 $\mu$  ではなく  $\mu - \sigma^2/2$  に近似的に等しい(注3)。ビジネス寸見13.1では、ミューチュアルファンド業界における数値例を用いて、ここ

---

(注3) 本節の議論からわかるように、「期待収益率」という用語には曖昧さがある。 $\mu$  を指す場合もあれば、 $\mu - \sigma^2/2$  を指す場合もある。特に断わらない限り、本書では  $\mu$  を期待収益率と呼ぶことにする。

で行った議論のポイントを説明する。数式を用いた説明を行うために、(13.4)式に戻ろう。

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

の両辺の対数をとると、

$$\ln[E(S_T)] = \ln(S_0) + \mu T$$

になる。ここで  $\ln[E(S_T)] = E[\ln(S_T)]$  としたくなる。そうすると  $E[\ln(S_T)] - \ln(S_0) = \mu T$ , もしくは  $E[\ln(S_T/S_0)] = \mu T$  となり、 $E(x) = \mu$  が得られる。しかし、 $\ln$  は非線形な関数なのでそれはできない。実際、 $\ln[E(S_T)] > E[\ln(S_T)]$  となるので、 $E[\ln(S_T/S_0)] < \mu T$  である。これより  $E(x) < \mu$  が導かれる（上述のように  $E(x) = \mu - \sigma^2/2$  である）。

### ビジネス寸見13.1 ミューチュアルファンドの収益率は誤解を招く

$\mu$  と  $\mu - \sigma^2/2$  の違いは、ミューチュアルファンドの収益報告の問題と密接な関係がある。次の数字は、あるミューチュアルファンドマネジャーが報告した過去 5 年間の収益率（1年複利ベース）であるとしよう。

15%, 20%, 30%, -20%, 25%

収益率の合計を 5 で割った算術平均は 14% である。しかし、このファンドに 5 年間資金を投資した投資家が実際に得た収益率は年率 14% より少ない。100 ドルを投資した場合の 5 年後の価値は、

$$100 \times 1.15 \times 1.20 \times 1.30 \times 0.80 \times 1.25 = 179.40 \text{ ドル}$$

になる。これに対し、1 年複利で年率 14% の運用をすると、

$$10 \times 1.14^5 = 192.54 \text{ ドル}$$

になる。5 年後に 179.40 ドルとなる収益率は 12.4% である。実際、

$$100 \times (1.124)^5 = 179.40$$

となるからである。ファンドマネジャーが報告すべき平均収益率はどちらであるべきだろうか。ファンドマネジャーにしてみれば、「過去 5 年で実現した 1 年当たりの収益率の平均は 14% である」と報告したいところ

であろう。間違ってはいないにしろ、この報告は誤解を招く。ある程度誤解を避けるのであれば、「過去 5 年間われわれに投資した投資家が得た平均収益率は年率 12.4% である」であろう。一部の国の金融当局は、ファンドマネジャーに対して後者の方針での収益率の報告を義務づけている。

この現象は数学者がよく知っている結果の一例である。(すべてが同一ではない) 数の集合に対する幾何平均は算術平均よりも常に小さいというものである。本例では、各年の収益率は 1.15, 1.20, 1.30, 0.80, 1.25 である。その算術平均をとると 1.140 になるが、幾何平均をとると 1.124 にしかならない。

### 13.4 ボラティリティ

株式のボラティリティ  $\sigma$  は、株式から得られる収益の不確実性を表す尺度である。株式のボラティリティの典型的な値は、15% から 60% である。

(13.7) 式より、株価のボラティリティは連続複利ベースでの 1 年間の収益率の標準偏差として定義できる。

$\Delta t$  が小さいとき、(13.1) 式より、 $\sigma^2 \Delta t$  は時間  $\Delta t$  における株価の変化率の分散に近似的に等しい。すなわち、 $\sigma \sqrt{\Delta t}$  は時間  $\Delta t$  における株価の変化率の標準偏差に近似的に等しい。 $\sigma = 0.3$ 、すなわちボラティリティを年率 30% とし、現在の株価を 50 ドルとしよう。このとき、1 週間での株価の変化率の標準偏差はおよそ、

$$30 \times \sqrt{\frac{1}{52}} = 4.16\%$$

である。したがって、株価が 1 週間に 1 標準偏差だけ動くとすると、それは  $50 \times 0.0416$ 、すなわち 2.08 ドルだけ動くことになる。

将来の株価に対する不確実性は、それを標準偏差で測るとすると、(少なくとも近似的には) 経過時間の平方根に比例して増加する。たとえば、4 週

間での株価変化率の標準偏差は、1週間での株価変化率の標準偏差の約2倍になる。

### 過去データによるボラティリティの推定

株価のボラティリティの実証的な推定には、通常、固定間隔（たとえば、日次、週次、月次）で観測された株価が用いられる。

$n+1$ ：観測データの数

$S_i$ ：第*i*区間の終わりにおける株価 ( $i=0, 1, \dots, n$ )

$\tau$ ：1区間の長さ（年単位）

と定義し、

$$u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right), \quad i=1, 2, \dots, n$$

と置く。

$u_i$ の標準偏差の推定値  $s$  は、通常、

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}$$

もしくは、

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2}$$

で与えられる。ここで  $\bar{u}$  は  $u_i$  の平均である（注4）。

(13.2)式より  $u_i$  の標準偏差は  $\sigma\sqrt{\tau}$  なので、 $s$  は  $\sigma\sqrt{\tau}$  の推定値となる。したがって、 $\sigma$  自体の推定値を  $\hat{\sigma}$  と書くと、それは、

$$\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$$

で与えられる。この推定値の標準誤差は、およそ  $\hat{\sigma}/\sqrt{2n}$  になることが示せる。

$n$  の適切な値を選ぶのは決して容易ではない。一般にデータが多いほど推

---

(注4) ヒストリカル・ボラティリティの推計では、 $\bar{u}$  はゼロであると仮定されることが多い。

定値は正確になるが、 $\sigma$ は時間とともに変化するので、古すぎるデータは将来の予測には適切でない可能性がある。ある程度うまくいっていると思われる妥協案は、直近の90日間から180日間の日次データの終値を用いるというものである。また、 $n$ をボラティリティの適用期間の日数にする方法も経験的によく用いられている。たとえば満期2年のオプションの評価に使うボラティリティの推定には、直近2年間の日次データが用いられる。GARCHモデルなどのもっと高度な推定方法については、第21章で説明する。

【例13.4】

表13.1は、連続した21取引日における株価推移の例である。この例では、

表13.1 ボラティリティの計算

| 日付 | 株価終値<br>(ドル) | 株価変化率<br>$S_i/S_{i-1}$ | 日次收益率<br>$u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$ |
|----|--------------|------------------------|-----------------------------------|
| 0  | 20.00        |                        |                                   |
| 1  | 20.10        | 1.00500                | 0.00499                           |
| 2  | 19.90        | 0.99005                | -0.01000                          |
| 3  | 20.00        | 1.00503                | 0.00501                           |
| 4  | 20.50        | 1.02500                | 0.02469                           |
| 5  | 20.25        | 0.98780                | -0.01227                          |
| 6  | 20.90        | 1.03210                | 0.03159                           |
| 7  | 20.90        | 1.00000                | 0.00000                           |
| 8  | 20.90        | 1.00000                | 0.00000                           |
| 9  | 20.75        | 0.99282                | -0.00720                          |
| 10 | 20.75        | 1.00000                | 0.00000                           |
| 11 | 21.00        | 1.01205                | 0.01198                           |
| 12 | 21.10        | 1.00476                | 0.00475                           |
| 13 | 20.90        | 0.99052                | -0.00952                          |
| 14 | 20.90        | 1.00000                | 0.00000                           |
| 15 | 21.25        | 1.01675                | 0.01661                           |
| 16 | 21.40        | 1.00706                | 0.00703                           |
| 17 | 21.40        | 1.00000                | 0.00000                           |
| 18 | 21.25        | 0.99299                | -0.00703                          |
| 19 | 21.75        | 1.02353                | 0.02326                           |
| 20 | 22.00        | 1.01149                | 0.01143                           |

$$\sum u_i = 0.09531, \sum u_i^2 = 0.00326$$

となるから、日次収益率の標準偏差の推定値は、

$$\sqrt{\frac{0.00326}{19} - \frac{0.09531^2}{380}} = 0.01216$$

すなわち1.216%になる。1年間の取引日を252日と仮定すると、 $\tau=1/252$ となり、ボラティリティ（年率）の推定値は $0.01216\sqrt{252}=0.193$ 、すなわち年率19.3%になる。この推定値の標準誤差は、

$$\frac{0.193}{\sqrt{2 \times 20}} = 0.031$$

すなわち年率3.1%である。

これまでの分析は株式に配当がない場合のものであるが、配当のある株式にも使えるように修正できる。配当落ち日を含む時間区間の収益率 $u_i$ を、

$$u_i = \ln \frac{S_i + D}{S_{i-1}}$$

で与えればよい。ここで $D$ は配当金額である。それ以外の時間区間での収益率については今までと同じ、

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

を用いればよい。しかし、配当落ち日前後の収益率を決定するには税金の影響を考慮する必要があるので、配当落ち日を含む区間のデータはすべて無視するというのが最良の方法であろう。

## 取引日と暦日

ボラティリティ・パラメータを推定するときおよび利用するときに、時間を暦日ベースで測るべきか、それとも取引日ベースで測るべきかという重要な問題がある。ビジネス寸見13.2（次頁）でみるように、ボラティリティは取引所が休みのときよりも開いているときのほうが高いという研究結果がある。その結果、過去データからボラティリティを推定するときおよびオプ

ションの残存期間を計算するときに、取引所が休みの日を無視する実務家が多い。その場合は、年率のボラティリティは1取引日のボラティリティから、年率のボラティリティ = 1取引日のボラティリティ ×  $\sqrt{\text{年間の取引日数}}$  を用いて計算される。これは、例13.4で表13.1のデータからボラティリティを求めるときに行った計算である。1年間の株式の取引日数は252日とすることが多い。

オプションの残存期間も暦日ではなく、取引日で計算する場合が多い。その場合は、オプションの残存期間  $T$  (年) は、

$$T = \frac{\text{オプション満期までの取引日数}}{252}$$

で計算される。

### ビジネス寸見13.2 ボラティリティの原因は何か？

新しい情報が次々に市場に到来することによって株式のボラティリティが生じている、と考えるのはごく自然であろう。新しい情報は株価に対する市場参加者の考えを修正し、その結果、株価が変化して、ボラティリティが発生する。しかし、これがボラティリティの原因となっていることを実証する研究結果は得られていない。数年にわたる株価の日次データを用いて、次の量が計算できる。

1. 市場の休日を挟まないときの、取引終了時点から翌日の取引終了時点までの株価収益率の分散
2. 金曜日の取引終了時点から月曜日の取引終了時点までの株価収益率の分散

二つ目の分散は3日間の収益率に対する分散である。一つ目は1日間の分散である。したがって、二つ目の分散は一つ目の分散よりも3倍大きいと予想するのはおかしいことではない。しかし、Fama (1965), French (1980), French と Roll (1986) はこれが正しくないことを示し

た。これら三つの研究での推定結果は、二つ目の分散は一つ目の分散よりそれぞれ22%，19%，10.7%高いというものであった。

この段階では、市場が開いて取引が行われているときにより多くのニュースが市場に届く、ということでこれら結果は説明できると主張したくなるかもしれない。しかし、Roll (1984) の研究はこの解釈を支持しなかった。Roll はオレンジジュースの先物価格に着目した。これまでオレンジジュースの先物価格に最も影響を与えた重要なニュースは天候に関するニュースであり、それはいつでも同程度に報道されているからである。Roll は株式に対するのと同様の分析を行い、二つ目の（金曜日から月曜日までの）オレンジジュース先物に対する分散が一つ目の分散に対してわずか1.54倍であるという結果を得た。

これらすべてから得られる唯一の妥当な結論は、ボラティリティは、その大部分が取引そのものから発生しているというものである（トレーダーはふつうこの結論を容易に受け入れる！）。

### 13.5 Black-Scholes-Merton 微分方程式の基礎となる概念

Black-Scholes-Merton 微分方程式は、配当のない株式に対するすべてのデリバティブの価格が満たさなければならない方程式である。この方程式の導出は次節で行う。ここでは、その際に用いられる議論の本質について考えよう。

ここで議論は、株価変動が二項ツリーで表される場合に第11章で行った、株券オプションの価格付けに用いた無裁定の議論と同様のものである。デリバティブのポジションと株式のポジションからなる無リスク・ポートフォリオを考え、裁定機会がないならば、そのポートフォリオの収益率は無リスク金利  $r_f$  に等しくなければならないとする議論である。この議論から Black-Scholes-Merton 微分方程式は導出される。

無リスク・ポートフォリオを構成できる理由は、株価とデリバティブの価格がともに株価変動という同じ要因からくる不確定性の影響を受けていることがある。任意の短時間におけるデリバティブの価格と原資産である株式の価格とは、完全に相関している。株式とデリバティブからなる適切なポートフォリオを組めば、株式ポジションからの利益または損失はデリバティブ・ポジションの利益または損失と常に相殺し、この短時間の終わりでのポートフォリオ全体の価値は確定的になる。

たとえば、ある一時点における株価の微小変化  $\Delta S$  と、その結果生じるヨーロピアン・コール・オプションの価格の微小変化  $\Delta c$  との関係が、

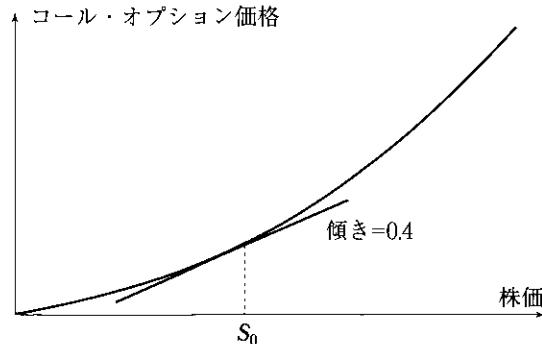
$$\Delta c = 0.4 \Delta S$$

で与えられたとする。これは図13.2に示すように、 $c$  と  $S$  の関係を表す直線の傾きが0.4であることを意味している。このとき、無リスク・ポートフォリオは、

1. 現物株式0.4株の買いポジション
2. コール・オプション1単位の売りポジション

から構成される。たとえば、株価が10セントだけ上昇したとしよう。そのときオプション価格は4セント上昇し、株式から得られる  $0.4 \times 0.10 = 0.04$  ドルの利益はオプションの売りポジションに生じる0.04ドルの損失に等しい。

図13.2 現在の株価を  $S_0$ としたときのコール・オプションの価格と株価との関係



Black-Scholes-Merton モデルでの分析と第11章の二項モデルでの分析とでは、重要な違いが一つある。Black-Scholes-Merton モデルでは、株式とデリバティブからなるポジションはごく微小時間においてのみ無リスクである（理論的には、瞬間に無リスクとなるだけである）。無リスク状態を保つためにはポジションの調整、いわゆるリバランスを頻繁に行わなくてはならない（注5）。たとえば、 $\Delta c$  と  $\Delta S$  の関係が2週間後に現在の  $\Delta c=0.4\Delta S$  から  $\Delta c=0.5\Delta S$  に変化したとしよう。そうすると、ポジションを無リスクの状態に保つためには、コール・オプションの売り1単位当たり、現物株式を0.1株追加購入する必要がある。リバランスが必要だとしても、任意の微小時間における無リスク・ポートフォリオの収益率は無リスク金利でなければならぬ。これが Black-Scholes-Merton モデルの分析での重要なポイントで、このことから彼らのオプション価格式が導出される。

## 仮 定

Black-Scholes-Merton 微分方程式を導出する際に用いられる仮定は、以下のとおりである。

1. 株価は  $\mu$  と  $\sigma$  が定数の第12章で説明した確率過程に従う。
2. 証券は空売りが可能で、売却代金は全額利用することができる。
3. 取引コストと税金はない。すべての証券はいくらでも分割して取引可能である。
4. デリバティブの満期までの期間に配当はない。
5. 無リスクの裁定機会は存在しない。
6. 証券は連続的に取引される。
7. 無リスク金利  $r$  は定数で、すべての満期に対して同一である。

後の章で議論するように、これらの仮定のうち、いくつかは緩めることができる。たとえば、 $\sigma$  と  $r$  は  $t$  の関数であってもよい。さらに、オプション満期時点での株価の分布が対数正規分布になるならば、金利は確率変動を

---

(注5) ポートフォリオのリバランスについては、第17章でもっと詳しく説明する。

してもよい。

## 13.6 Black-Scholes-Merton 微分方程式の導出

株価が12.3節で説明した確率過程

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (13.8)$$

に従うと仮定する。 $f$  を  $S$  で条件づけられたコール・オプション、もしくはその他のデリバティブの価格とする。 $f$  は  $S$  と  $t$  の関数になると考えられる。したがって(12.14)式より、

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz \quad (13.9)$$

が成り立つ。また、(13.8)式と(13.9)式の離散形は、

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z \quad (13.10)$$

および、

$$\Delta f = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z \quad (13.11)$$

で与えられる。ここで、 $\Delta S$  と  $\Delta f$  は微小時間  $\Delta t$  における  $f$  と  $S$  の変化量である。12.5節の伊藤の補題のところで示したように、 $f$  と  $S$  の確率変動成分に現れるウィナー過程は同一であるということを思い出そう。言い換えば、(13.10)式と(13.11)式における  $\Delta z (= \varepsilon \sqrt{\Delta t})$  は同一のものである。このことより、株式とデリバティブのポートフォリオを適当に選択すれば、ウィナー過程の項を消去することができる。

そのポートフォリオとは、

$$\begin{aligned} -1 &: \text{デリバティブ} \\ + \partial f / \partial S &: \text{株式} \end{aligned}$$

となるものである。このポートフォリオの保有者は、デリバティブ1単位の売りに対し、株式を  $\partial f / \partial S$  株買うことになる。このポートフォリオの価値を  $\Pi$  とすると、定義より、

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (13.12)$$

である。時間  $\Delta t$  でのポートフォリオの価値の変化  $\Delta\Pi$  は、

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \quad (13.13)$$

となる。(13.10)式と(13.11)式を(13.13)式に代入すると、

$$\Delta\Pi = \left( -\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \quad (13.14)$$

になる。この式には  $\Delta z$  が含まれていないので、ポートフォリオ  $\Pi$  は時間  $\Delta t$  の間は無リスクになっている。したがって、前節にあげた仮定から、ポートフォリオの瞬間的な収益率は他の短期無リスク証券の収益率と同じになる。もしポートフォリオの収益率が無リスク証券の収益率より高いならば、アービトラージャーはお金を借りてポートフォリオを買うことで無リスクで利益をあげることができる。逆に、もしポートフォリオの収益率が無リスク証券の収益率より低いならば、ポートフォリオを売って無リスク証券を購入することで、無リスクで利益をあげることができる。したがって、

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t \quad (13.15)$$

が成り立つ。ここで  $r$  は無リスク金利である。(13.12)式と(13.14)式を(13.15)式に代入すると、

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t = r \left( f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t$$

となり、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (13.16)$$

が得られる。

(13.16)式が Black-Scholes-Merton 微分方程式である。この微分方程式は多くの解をもち、それらは原資産を表す変数が  $S$  であるすべての異なるデリバティブに対応している。この方程式を解いて得られるデリバティブがどういうデリバティブであるかは、用いられた境界条件によって決まる。境

界条件とは、境界上の各  $S$  と  $t$  に対してデリバティブの価値を指定する条件である。ヨーロピアン・コール・オプションの場合の境界条件は、

$$f = \max(S - K, 0) \quad t = T \text{ のとき}$$

である。ヨーロピアン・プット・オプションの場合の境界条件は、

$$f = \max(K - S, 0) \quad t = T \text{ のとき}$$

である。

(13.16)式の導出で用いたポートフォリオ  $\Pi$  について強調しておくべきことは、そのポートフォリオは永久に無リスクであるわけではないという点である。そのポートフォリオは無限小時間においてのみ無リスクである。 $S$  と  $t$  が変化すると、 $\partial f / \partial S$  も変化する。そのため、ポートフォリオを無リスク状態に保つためには、ポートフォリオのデリバティブと株式の相対比率を絶えず変える必要がある。

#### 【例13.5】

配当のない株式のフォワード契約は株式のデリバティブである。したがって、その価格は(13.16)式を満たしているはずである。(5.5)式により、時点  $t$  におけるフォワード契約の価値  $f$  は株価  $S$  を用いて、

$$f = S - Ke^{-r(T-t)}$$

で与えられる。ここで  $K$  は受渡価格である。このとき、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0$$

となる。(13.16)式の左辺にこれらを代入すると、

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS$$

が得られる。これは  $rf$  に等しいので、(13.16)式を満たしていることがわかる。

### 取引可能なデリバティブの価格

微分方程式(13.16)を満たす任意の関数  $f(S, t)$  は、ある取引可能なデリバティブの理論価格である。その価格をもつデリバティブが存在する場合、そ

のデリバティブは裁定機会をつくりだしてはいないだろう。逆に、関数  $f(S, t)$  が微分方程式(13.16)を満たしていないときは、裁定機会が存在していないならば、それはデリバティブの価格にはなりえない。

この点について例を示そう。最初に関数  $e^S$  について考える。これは微分方程式(13.16)を満たしていない。したがって、株価に依存するなんらかのデリバティブの価格にはなっていない。もし価格が常に  $e^S$  になっている商品があれば、裁定機会が存在するだろう。2番目の例として、

$$\frac{e^{(\sigma^2 - 2r)(T-t)}}{S}$$

という関数を考える。この関数は微分方程式を満たしているので、理論的にはなんらかの取引可能な証券の価格である（これは、時点  $T$  でのペイオフが  $1/S_T$  となるデリバティブの価格である）。その他の取引可能なデリバティブの例については、章末問題13.11, 13.12, 13.23, 13.28を参照せよ。

## 13.7 リスク中立化法

第11章では、二項モデルに関連してリスク中立化法を紹介した。リスク中立化法はデリバティブの価格分析で一番重要な方法であることには疑いの余地がない。それは、Black-Scholes-Merton 微分方程式(13.16)の重要な性質にも関係している。その性質とは、投資家のリスク選好の影響を受ける変数が方程式に一つも含まれていないことである。方程式に現れる変数は、現在の株価、時間、株価のボラティリティ、無リスク金利である。それらはすべてリスク選好から独立している。

もし Black-Scholes-Merton 微分方程式に株式の期待收益率  $\mu$  が含まれているならば、方程式はリスク選好から独立ではなくなる。それは、 $\mu$  の値がリスク選好に依存しているからである。投資家のリスク回避度が高ければ、すべての株式に対して求められる  $\mu$  の水準は高くなると思われる。幸いなことに、 $\mu$  は方程式の導出過程で消去されている。

Black-Scholes-Merton 微分方程式がリスク選好から独立しているので、

巧妙な議論が可能となる。方程式がリスク選好に依存していないならば、その解もリスク選好の影響を受けない。したがって、 $f$  を評価する際にはどのようなリスク選好を仮定してもよい。特に、すべての投資家はリスク中立である、というきわめて単純な仮定を置いててもよい。

投資家がリスク中立である世界においては、すべての投資資産に対する期待收益率は無リスク金利  $r$  に等しくなる。その理由は、リスク中立な投資家はリスクをとることに対する見返りとしてのプレミアムを要求しないからである。また、リスク中立世界では、任意のキャッシュフローの現在価値は期待値を無リスク金利で割り引くことによって求められる、ということも成り立つ。したがって、リスク中立の仮定を置くことによって、デリバティブの分析はかなり簡単なものになる。

ある決まった時点にペイオフが発生するデリバティブについて考えよう。そのデリバティブは、以下の手順によって、リスク中立化法を用いて評価することができる。

1. 原資産の期待收益率を無リスク金利  $r$  (すなわち,  $\mu = r$ ) と仮定する。
2. デリバティブのペイオフの期待値を計算する。
3. ペイオフの期待値を無リスク金利で割り引く。

リスク中立化法（すなわち、すべての投資家はリスク中立であると仮定すること）は、Black-Scholes 微分方程式の解を得るために人為的な手法にすぎない、ということを正しく理解しておくことは重要である。得られた解は、リスク中立世界だけでなく、すべての世界で正しい解である。リスク中立世界からリスク回避的な世界に移ると、二つのことが同時に起こる。株価の期待成長率が変わるとともに、デリバティブのペイオフに適用すべき割引率も変わる。そしてこれら二つの変化は、常に互いを完全に相殺し合うように生じるのである。

## 株式のフォワード契約への適用

配当のない株式のフォワード契約の評価については、5.7節すでに説明

した。また、例13.5でその価格式が Black-Scholes 微分方程式を満たすことを示した。この節では、リスク中立化法を用いた価格式の導出を行う。金利は定数で  $r$  に等しいと仮定する。これは第5章よりいくぶん強い仮定になっている。

受渡価格が  $K$  の時点  $T$  に満期を迎える長期フォワード契約を考える。図1.2に示されているように、満期時点での契約の価値は、

$$S_T - K$$

である。ここで  $S_T$  は時点  $T$  における株価である。リスク中立化法の議論より、時点 0 でのフォワード契約の価値は、リスク中立世界での時点  $T$  における期待値を無リスク金利で割り引いたものに等しい。したがって、時点 0 におけるフォワード契約の価値を  $f$  とすると、

$$f = e^{-rT} \hat{E}(S_T - K)$$

になる。ここで  $\hat{E}$  はリスク中立世界における期待値を表す。 $K$  は定数なので、この式は、

$$f = e^{-rT} \hat{E}(S_T) - K e^{-rT} \quad (13.17)$$

になる。リスク中立世界では株価の期待収益率  $\mu$  は  $r$  になるので、(13.4) 式より、

$$\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT} \quad (13.18)$$

である。(13.18)式を(13.17)式に代入すると、

$$f = S_0 - K e^{-rT} \quad (13.19)$$

が得られる。これは(5.5)式と一致している。

## 13.8 Black-Scholes 価格式

配当のない株式のヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションの時点 0 における価格に対する Black-Scholes の公式は、

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (13.20)$$

と、

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1) \quad (13.21)$$

で与えられる。ここで、

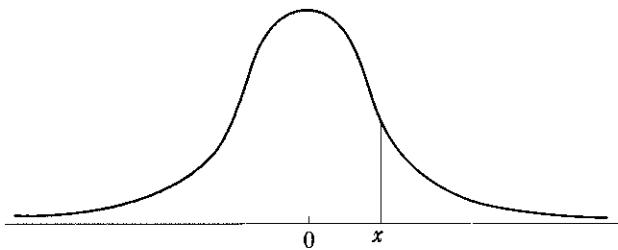
$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

である。関数  $N(x)$  は標準正規分布の累積分布関数である。すなわち、標準正規分布  $\phi(0, 1)$  に従う変数が  $x$  以下の値をとる確率である。これを図13.3 に図示する。その他の変数はこれまでどおりで、 $c$  はヨーロピアン・コールの価格、 $p$  はヨーロピアン・プットの価格、 $S_0$  は時点 0 での株価、 $K$  は行使価格、 $r$  は連続複利ベースでの無リスク金利、 $\sigma$  は株価のボラティリティ、 $T$  はオプション満期までの時間である。

Black-Scholes の公式を導く一つの方法は、13.6節で述べた境界条件のもとで微分方程式(13.16)を解くことである(注6)。もう一つはリスク中立化法を用いる方法である。ヨーロピアン・コール・オプションを考える。リスク中立世界での満期時点におけるオプションの価値の期待値は、

図13.3 影をつけた部分の面積が  $N(x)$  を表す



(注 6) 微分方程式を解くと、任意の時点  $t$  におけるコールとプットの価格が得られる。たとえば、微分方程式を満たすコールの価格は  $c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$  で与えられる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

で、 $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$  である。これが微分方程式を満たすことについては、章末問題13.17を参照のこと。

$$\hat{E}[\max(S_T - K, 0)]$$

である。ここで  $\hat{E}$  は前と同様にリスク中立世界における期待値を表す。リスク中立化法の議論より、ヨーロピアン・コール・オプションの価格  $c$  は、この期待値を無リスク金利で割り引いた値、すなわち、

$$c = e^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)] \quad (13.22)$$

になる。章末の付録で、この式から(13.20)式を導く。

(13.20)式の各項の意味を考えるために、(13.20)式を

$$c = e^{-rT} [S_0 N(d_1) e^{rT} - K N(d_2)] \quad (13.23)$$

と書き直そう。 $N(d_2)$  は、リスク中立世界でのオプションが行使される確率を表している。 $K N(d_2)$  は行使価格にその価格が支払われる確率を乗じたものである。 $S_0 N(d_1) e^{rT}$  は、 $S_T > K$  ならば  $S_T$  に等しく、それ以外の場合はゼロである変数のリスク中立世界での期待値を表している。

配当のない株式に対するヨーロピアン・コールの期限前行使は常に最適ではないので(9.5節を参照)、(13.20)式は配当のない株式のアメリカン・コール・オプションの価格式でもある。残念ながら、配当のない株式のアメリカン・プット・オプションの価格に対する厳密な解析式は知られていない。アメリカン・プットの価値を計算するための数値計算法については第19章で説明する。

実務で Black-Scholes の公式が使われる場合、 $r$  には満期  $T$  のゼロクーポン無リスク金利が用いられている。後の章で示すように、 $r$  が時間の既知関数の場合には、これは理論的に正しい。また、金利が確率変動する場合でも、時点  $T$  における株価が対数正規分布に従っており、ボラティリティ・パラメータを適切に選ぶならば、それは理論的に正しい。前述したように、時間はオプション満期までの取引日数を 1 年間の取引日数で除した値で通常測られる。

### Black-Scholes の公式の性質

さて、いくつかのパラメータを極端な値にしたときにどうなるかを考えることで、Black-Scholes の公式が然るべき一般的な性質を満たしていること

を示そう。

株価  $S_0$  の値が非常に高くなると、コール・オプションはほぼ確実に行使されることになる。したがって、コールは受渡価格  $K$  のフォワード契約にきわめて近くなる。(5.5)式から、コールの価格は、

$$S_0 - Ke^{-rT}$$

となることが期待される。実際、(13.20)式で与えられるコールの価格はこの性質を満たしている。それは、 $S_0$  が非常に大きくなると  $d_1$  および  $d_2$  はともに非常に大きくなり、 $N(d_1)$  と  $N(d_2)$  が 1.0 に近づくからである。株価が非常に高くなると、ヨーロピアン・プット・オプションの価格  $\varphi$  はゼロに近づく。 $N(-d_1)$  と  $N(-d_2)$  がともにゼロに近づくので、このことも(13.21)式と整合性がとれている。

次に、ボラティリティ  $\sigma$  がゼロに近づいたときどうなるかについて考えてみよう。株式は実質的に無リスク状態となるので、株価は年率  $r$  で上昇して時点  $T$  には  $S_0 e^{rT}$  となり、コール・オプションのペイオフは、

$$\max(S_0 e^{rT} - K, 0)$$

になる。金利  $r$  で割り引くと、コールの現在価値は、

$$e^{-rT} \max(S_0 e^{rT} - K, 0) = \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$$

になる。このことが(13.20)式と整合性がとれていることを示すために、まず  $S_0 > Ke^{-rT}$  の場合について考えよう。 $\ln(S_0/K) + rT > 0$  なので、 $\sigma$  がゼロに近づくと、 $d_1$  と  $d_2$  は  $+\infty$  に発散する。したがって、 $N(d_1)$  と  $N(d_2)$  は 1.0 に近づき、(13.20)式は、

$$c = S_0 - Ke^{-rT}$$

になる。 $S_0 < Ke^{-rT}$  のときは  $\ln(S_0/K) + rT < 0$  となる。 $\sigma$  がゼロに近づくと、 $d_1$  と  $d_2$  は  $-\infty$  に発散するので  $N(d_1)$  と  $N(d_2)$  は 0 に近づき、(13.20)式のコールの価格はゼロになる。したがって、 $\sigma$  がゼロに近づくとコール価格は常に  $\max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$  になる。同様にして、 $\sigma$  がゼロに近づくとプットの価格は常に  $\max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$  になることが示せる。

### 13.9 正規分布の累積分布関数

(13.20)式と(13.21)式を実装する際の唯一の問題は、正規分布の累積分布関数  $N(x)$  の計算方法である。本書の巻末に  $N(x)$  の数値表を添付した。Excel には関数 NORMSDIST が用意されている。また、小数点以下第 6 位までの精度をもつ次の多項式近似が知られている(注7)。

$$N(x) = \begin{cases} 1 - N'(x) (a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3 + a_4 k^4 + a_5 k^5) & x \geq 0 \text{ のとき} \\ 1 - N(-x) & x < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

ここで、

$$k = \frac{1}{1 + \gamma x}, \quad \gamma = 0.2316419$$

$$a_1 = 0.319381530, \quad a_2 = -0.356563782$$

$$a_3 = 1.781477937, \quad a_4 = -1.821255978, \quad a_5 = 1.330274429$$

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

である。

#### 【例】13.6】

現在の株価が42ドル、オプションの満期が6カ月、行使価格が40ドル、無リスク金利が年率10%、ボラティリティが年率20%とする。すなわち  $S_0 = 42$ ,  $K = 40$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $T = 0.5$ となるので、

$$d_1 = \frac{\ln(42/40) + (0.1 + 0.2^2/2) \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.7693$$

$$d_2 = \frac{\ln(42/40) + (0.1 - 0.2^2/2) \times 0.5}{0.2\sqrt{0.5}} = 0.6278$$

$$Ke^{-rT} = 40e^{-0.05} = 38.049$$

(注7) M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover Publications, 1972 を参照。

となる。したがって、オプションがヨーロピアン・コールならば、その価値  $c$  は、

$$c = 42N(0.7693) - 38.049N(0.6278)$$

で与えられる。オプションがヨーロピアン・プットならば、その価値  $\rho$  は、

$$\rho = 38.049N(-0.6278) - 42N(-0.7693)$$

で与えられる。ここで上の多項式近似またはExcelのNORMSDIST関数を用いれば、

$$N(0.7693) = 0.7791, \quad N(-0.7693) = 0.2209$$

$$N(0.6278) = 0.7349, \quad N(-0.6278) = 0.2651$$

となるから、

$$c = 4.76, \quad \rho = 0.81$$

が得られる。現金の時間価値を無視すると、コール・オプションの買手にとっての損益分岐点は株価が2.76ドル上昇したところで、プット・オプションの買手にとっての損益分岐点は株価が2.81ドル下落したところになる。

### 13.10 ワラントと従業員ストック・オプション

ある企業に対する通常のコール・オプションは、それが行使されてもその企業の発行済株式数には影響を与えない。オプションの売手がその企業の株式を所有していない場合は、通常の方法で市場で株式を購入し、それをオプションの買手に行使価格で売却することになる。第8章で説明したように、ワラントや従業員ストック・オプションは通常のオプションとは異なり、権利行使に伴って株式が追加発行され、それが行使価格でオプション保有者に売却される。行使価格は市場価格よりも低いので、権利行使によって既存株主の権利が希薄化される。

潜在的な希薄化は発行までのワラントや従業員ストック・オプションの価

格付けにどのような影響を与えるであろうか。影響はないはずである、というのが答である。市場が効率的であることを仮定しているので、株価はすべての発行済みのワラントや従業員ストック・オプションから生じる潜在的な希薄化を織り込んでいるだろう。このことについては、ビジネス寸見 13.3 (次頁) で説明する(注8)。

次に、ある企業がワラント（または、従業員ストック・オプション）の新規発行を計画している状況を考えてみよう。この企業は、発行に伴う補完的な利益はないものと仮定して、ワラントの発行コストを計算したいと思っているとする。その企業の発行済株式数は  $N$ 、株価は  $S_0$ 、計画している新発オプション数は  $M$ 、各オプションには保有者が価格  $K$  で 1 株を購入する権利が付与されているとする。現在の企業の価値は  $NS_0$  であり、ワラントを発行してもこの価値は変わらない。ワラントの発行がない場合には、ワラントの満期における株価は  $S_T$  であると仮定する。すなわち、(ワラントの発行があるとなかろうと) 時点  $T$  における株式とワラントの総価値を  $NS_T$  とする。ワラントが権利行使されたとすると、行使価格の支払に伴う現金収入により、企業の総価値は  $NS_T + MK$  に増加する。この価値は  $N+M$  株分の価値なので、権利行使の直後の株価は、

$$\frac{NS_T + MK}{N + M}$$

になる。したがって、オプション行使した場合のオプション保有者のペイオフは、

$$\frac{NS_T + MK}{N + M} - K$$

すなわち、

(注8) ワラントの価格式は、(株式の価値単独ではなく) ワラントと株式の価値の合計が対数正規分布に従うと仮定して導出されることもある。その場合、ワラントの価値に対する Black-Scholes 型の価格式はワラントの価値の関数として与えられる。このモデルの説明については著者の Web サイトのテクニカルノート 3 を参照されたい。

$$\frac{N}{N+M}(S_t - K)$$

になる。これより、各オプションの価値は、その企業の株式に対する通常のコール・オプションの価値の、

$$\frac{N}{N+M}$$

倍に等しいことがわかる。したがって、オプションの総コストはこれを  $M$  倍したものになる。

### ビジネス寸見13.3 ワラント、従業員ストック・オプションと希薄化

発行済株式数が10万株で、株価が50ドルの企業を考えよう。この企業は行使価格50ドル、権利確定期間3年の10万株のストック・オプションを従業員に対して付与することを発表し、市場に驚きを与えた。従業員に対するストック・オプションが、人件費削減や管理職の企業業績向上への動機付けをもっと高めるという形での株主への利益をほとんどもたらさないと市場がみるならば、ストック・オプション発行が発表されるやいなや株価は下落するであろう。株価が45ドルに下落するのであれば、現時点での株主に対する希薄化コストは1株当たり5ドル、すなわち総額で50万ドルになる。

この企業の業績は好調で、3年後に株価が100ドルになったとしよう。さらに、この時点ですべてのオプションが行使されるとする。従業員のペイオフは1オプション当たり50ドルになる。ここで、1株当たり100ドルの価値をもつ10万株が、わずか50ドルの支払で発行された10万株と併合されるため、さらなる希薄化が生じ、(a)株価が75ドルに下落し、(b)オプション保有者のペイオフは1オプション当たり25ドルだけになる、といった議論がなされるかもしれない。しかし、この議論には間違いがある。

市場ではオプション行使は予測されており、すでに株価に織り込み済みである。したがって、オプション行使によるペイオフは50ドルである。

この例は、市場が効率的であれば、従業員ストック・オプションやワラントによる希薄化の影響は発表後すぐに株価に反映され、オプションを評価する時にその影響をもう一度考慮する必要はないことを示している。

### 【例13.7】

発行済株式数が100万株で株価が40ドルの企業が、5年後に行使価格60ドルで1株が取得できる権利を付与するワラントを20万発行したいと考えている。このワラントの発行コストを計算してみよう。金利を年率3%，ボラティリティを年率30%とし、株式には配当がないものとする。(13.20)式より、その企業の株式に対する満期5年のヨーロピアン・コール・オプションの価値は7.04ドルになる。いまの場合、 $N=1,000,000$ 、 $M=200,000$ となるから、各ワラントの価値は、

$$\frac{1,000,000}{1,000,000+200,000} \times 7.04 = 5.87$$

すなわち5.87ドルになる。したがって、ワラントの総発行コストは $200,000 \times 5.87 = 117$ 万ドルになる。ワラントの発行による利益はないと思われるが、株価は1.17ドル下落して、38.83ドルになると予想される。

## 13.11 インプライド・ボラティリティ

Black-Scholes価格式に含まれるパラメータのなかで、株価のボラティリティだけは直接観測することができない。13.4節では、株価の過去データからボラティリティを推定する方法を説明した。実務では、トレーダーはイン

プライド・ボラティリティ (implied volatility) として知られる値をふつう用いている。これは、マーケットで観測されるオプションの価格から逆算したボラティリティである。

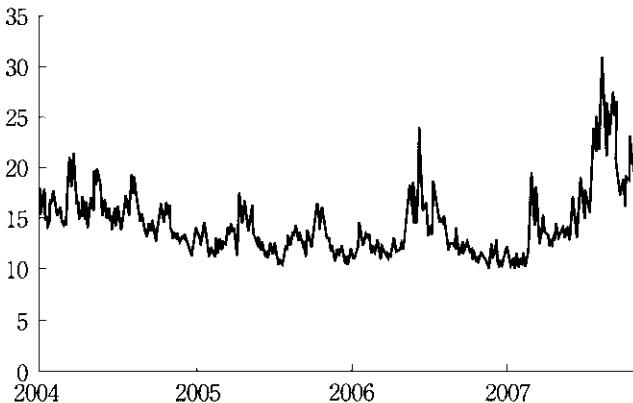
インプライド・ボラティリティの計算方法を例示するために、配当のない株式に対するヨーロピアン・コール・オプションの価値が、 $S_0=21$ ,  $K=20$ ,  $r=0.1$ ,  $T=0.25$ のときに1.875であるとしよう。インプライド・ボラティリティとは、(13.20)式に値を代入したときに  $c=1.875$  を与える  $\sigma$  の値のことである。残念なことに、 $\sigma$  を  $S_0$ ,  $K$ ,  $r$ ,  $T$ ,  $c$  の関数として (13.20)式を解くことはできない。しかし、反復探索法を用いて  $\sigma$  を逆算することはできる。たとえば、 $\sigma=0.20$  を試してみることから始める。この値を代入すると  $c$  は1.76となり、これでは値が低すぎる。 $c$  は  $\sigma$  の増加関数なので、 $\sigma$  はもっと大きくする必要がある。次に  $\sigma$  の値として0.30を試してみる。この値を代入すると  $c$  は2.10となり、これは大きすぎるので、 $\sigma$  は0.20と0.30の間にあることがわかる。次に  $\sigma$  の値として0.25を試してみる。今度も大きすぎることがわかるので、 $\sigma$  は0.20と0.25の間にあることになる。このように進めていくと、1回の反復ごとに  $\sigma$  の範囲が半分にでき、任意の精度で  $\sigma$  の正確な値を求めることができる(注9)。この例では、インプライド・ボラティリティは0.235、すなわち年率23.5%と求まる。同様の方法を二項ツリーと合わせて用いれば、アメリカン・オプションのインプライド・ボラティリティを求めることができる。

インプライド・ボラティリティは、特定の株式のボラティリティに対する市場の見方を知るのにも用いられる。ヒストリカル・ボラティリティ (13.4節を参照) は過去を振り返ったときの値であるのに対し、インプライド・ボラティリティは将来を予測したときの値である。トレーダーは、オプションの価格ではなく、インプライド・ボラティリティを呈示することが多い。これは、オプションの価格よりもインプライド・ボラティリティのほうが変動

---

(注9) この方法はあくまで例示のために説明したものである。実際には、Newton-Raphson 法などのもっと効率的な方法がふつう用いられる (第4章の脚注4を参照)。DerivaGem ソフトウェアでもインプライド・ボラティリティが計算できる。

図13.4 VIX指數（2004年1月～2007年10月）



が少なく、呈示に適しているからである。また、第18章で説明するように、トレーダーは流動性の高いオプションのインプライド・ボラティリティをその他のオプションのインプライド・ボラティリティの推定に利用している。

### VIX指數

CBOEはインプライド・ボラティリティ指数を公表している。最も一般的な指標はSPX VIX指標で、広範なコールとプットの価格から求められた、残存期間が30日のS&P500指標オプションのインプライド・ボラティリティ指標である（注10）。指標の計算方法は24.13節で説明する。VIX指標先物は2004年に、VIX指標オプションは2006年に取引が開始された。S&P500指標先物やオプションはS&P500の将来の値やボラティリティに対する取引であるのに対し、VIX指標先物やオプションはボラティリティのみに対する取引である。取引単位は、指標の1,000倍である。図13.4は、2004年から2007年までのVIX指標のグラフである。

#### 【例13.8】

4月限VIX指標先物を先物価格が18.5（満期30日のS&P500指標オプ

（注10） 同様に、VXNはNASDAQ100指標に対するボラティリティ指標、VXDはダウ平均に対するボラティリティ指標である。

ションのボラティリティとして18.5%に対応) のときに購入し、先物価格が19.3 (満期30日のS&P500指数オプションのボラティリティとして19.3%に対応) のときに手仕舞ったとする。このとき、利益は800ドルになる。

## 13.12 配 当

これまで、オプションの原資産である株式に配当がないことを仮定してきた。本節では配当を考慮できるように、Black-Scholesモデルを修正する。オプション満期までに支払われる配当の金額とタイミングは完全にわかっていると仮定して議論を進める。短期オプションに対しては、これは非現実的な仮定ではない(長期オプションに対しては、配当金額でなく、配当利回りがわかっていると仮定するのが一般的である。オプションの評価方法については第15章で説明する)。配当支払日は配当落ち日と仮定する。配当落ち日には株価は配当額分だけ下落する(注11)。

### ヨーロピアン・オプション

株価がオプション満期までの既知の配当に対応する無リスク成分およびリスク成分の二つの成分の和からなると仮定して、ヨーロピアン・オプションの分析を行う。無リスク成分は、任意の時点において、オプション満期までのすべての配当を配当落ち日から現時点まで無リスク金利で割り引いた現在価値である。オプションの満期までには配当は支払われ、無リスク成分は存在しなくなる。したがって、 $S_0$ を株価のリスク成分とし、 $\sigma$ をリスク成分の従う確率過程のボラティリティとすれば、Black-Scholesの公式がそのまま成り立つ(注12)。これをBlack-Scholesの公式の使い方として述べると、オ

(注11) 税金の影響により、下落幅は実際の配当額よりいくぶん小さくなる。この現象を考慮するために、オプションの価格評価では、「配当」という言葉を配当落ち日にその配当分として株価が下落する金額であると解釈する必要がある。したがって、1株当たり1ドルの配当が予想されており、株価は配当落ち日に配当額の80%だけ通常は下落するとすれば、分析上は、配当は0.80ドルであると考えることになる。

オプション満期までのすべての配当の現在価値を株価から差し引いて、その値を株価として用いればよいということになる。ここでの現在価値とは配当落ち日から無リスク金利で割り引いた価値である。また、前述したように、オプション満期までに配当落ちがある配当のみ、オプション満期までに支払われる配当とみなす。

【例13.9】

2カ月後と5カ月後に配当落ちのある株式のヨーロピアン・コール・オプションを考える。各配当落ち日での配当額は0.50ドルと予想されている。現在の株価を40ドル、行使価格を40ドル、ボラティリティを年率30%、無リスク金利を年率9%、オプション満期までの時間を6カ月とする。このとき、配当の現在価値は、

$$0.5e^{-0.1667 \times 0.09} + 0.5e^{-0.4167 \times 0.09} = 0.9741$$

となる。したがって、オプション価格は  $S_0 = 40 - 0.9741 = 39.0259$ ,  $K = 40$ ,  $r = 0.09$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T = 0.5$  として Black-Scholes の公式を用いて計算できる。

$$d_1 = \frac{\ln(39.0259/40) + (0.09 + 0.3^2/2) \times 0.5}{0.3\sqrt{0.5}} = 0.2017$$

$$d_2 = \frac{\ln(39.0259/40) + (0.09 - 0.3^2/2) \times 0.5}{0.3\sqrt{0.5}} = -0.0104$$

となり、13.9節の多項式近似またはExcelのNORMSDIST関数を用いると、

$$N(d_1) = 0.5800 \quad N(d_2) = 0.4959$$

が得られる。(13.20)式より、コールの価格は、

$$39.0259 \times 0.5800 - 40e^{-0.09 \times 0.5} \times 0.4959 = 3.67$$

(注12) 理論的には、これは株価自体が従う確率過程のボラティリティとまったく同じではない。リスク成分のボラティリティは、株価のボラティリティに  $S_0/(S_0 - D)$  を乗じたものにほぼ等しい。ここで  $D$  は配当の現在価値である。しかし、この調整はボラティリティを過去データから推定する場合にのみ必要である。インプライド・ボラティリティは株価から配当の現在価値を引いた後に計算されるので、それはリスク成分のボラティリティになっている。

すなわち3.67ドルになる。

## アメリカン・オプション

次にアメリカン・コール・オプションについて考える。9.5節では、配当がない場合にはアメリカン・コール・オプションは期限前行使されないということを説明した。その議論を拡張すると、配当がある場合には配当落ちの直前にのみ期限前行使が最適になりうることがわかる。 $n$ 回の配当落ち日が予想されており、それらを時点  $t_1, t_2, \dots, t_n$  とする。ここで  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  である。これらの時点での配当額をそれぞれ  $D_1, D_2, \dots, D_n$  とする。

最後の配当落ち日（すなわち時点  $t_n$ ）の直前における、期限前行使の可能性を考えることから始める。時点  $t_n$  でオプション行使したとすると、投資家は、

$$S(t_n) - K$$

を受け取れる。ここで  $S(t)$  は時点  $t$  における株価である。オプションが行使されないとき、株価は  $S(t_n) - D_n$  に下落する。そのとき、(9.5)式で示したように、オプションの価値は、

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)}$$

以上である。したがって、もし、

$$S(t_n) - D_n - Ke^{-r(T-t_n)} \geq S(t_n) - K$$

すなわち、

$$D_n \leq K(1 - e^{-r(T-t_n)}) \quad (13.24)$$

ならば、時点  $t_n$  での権利行使は最適ではない。一方、株価の従う確率過程がそれなりの仮定を満たしているすると、

$$D_n > K(1 - e^{-r(T-t_n)}) \quad (13.25)$$

のときは、十分大きな  $S(t_n)$  に対して時点  $t_n$  での権利行使が最適となることが示せる。最後の配当落ち日がオプションの満期日にかなり近く（すなわち  $T - t_n$  が小さく）、かつ配当が大きい場合には、不等式(13.25)は成り立つやすい。

次に時点  $t_{n-1}$ , すなわち最後から 2 番目の配当落ち日について考える。時点  $t_{n-1}$  の直前にオプションを行使すると, 投資家は  $S(t_{n-1}) - K$  を受け取れる。時点  $t_{n-1}$  にオプションが行使されなければ, 株価は  $S(t_{n-1}) - D_{n-1}$  に下落し, 次に最も早く行使されうる時点は  $t_n$  となる。よって, (9.5)式から, 時点  $t_{n-1}$  で行使されない場合のオプション価格の下限は,

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n - t_{n-1})}$$

で与えられる。したがって, もし,

$$S(t_{n-1}) - D_{n-1} - Ke^{-r(t_n - t_{n-1})} \geq S(t_{n-1}) - K$$

すなわち,

$$D_{n-1} \leq K(1 - e^{-r(t_n - t_{n-1})})$$

ならば, 時点  $t_{n-1}$  の直前の権利行使は最適ではない。同様に任意の  $i < n$  に対して,

$$D_i \leq K(1 - e^{-r(t_{i+1} - t_i)}) \quad (13.26)$$

ならば, 時点  $t_i$  の直前の行使は最適ではない。

不等式(13.26)は近似的に,

$$D_i \leq Kr(t_{i+1} - t_i)$$

と書ける。 $K$  が現在の株価にかなり近いとすると, この不等式が成り立たないのは, 配当利回りが無リスク金利に近いかそれを上回っている場合である。しかし, このような状況はあまり起こらない。

以上の分析から, 多くの場合について, アメリカン・コールの期限前行使が最も起こりうるのは, 最後の配当落ち日  $t_n$  の直前であるということがわかる。不等式(13.26),  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , と不等式(13.24)が満たされているならば, 期限前行使は決して最適にはならない。

## Black の近似

Black はコール・オプションに対して期限前行使を考慮する次の近似的な方法を提案している(注13)。これは, 本節の前のほうで述べたように, 満期

---

(注13) F. Black, "Fact and Fantasy in the Use of Options," *Financial Analysts Journal*, 31 (July/August 1975) : 36-41, 61-72 を参照。

$T$  と満期  $t_n$  のヨーロピアン・オプションの価格を計算し、両者の大きいほうをアメリカン・オプションの価格とするというものである。この近似は多くの場合にうまく機能するようである(注14)。

### 【例13.10】

例13.9と同じ条件で、オプションをヨーロピアンでなくアメリカンとした場合について考える。この場合、 $D_1=D_2=0.5$ ,  $S_0=40$ ,  $K=40$ ,  $r=0.09$ ,  $t_1=2/12$ ,  $t_2=5/12$ である。

$$K(1-e^{-r(t_2-t_1)}) = 40(1-e^{-0.09 \times 0.25}) = 0.89$$

は0.5よりも大きいので、オプションは最初の配当落ち日の直前には決して行使されない(不等式(13.26)を参照)。次に、

$$K(1-e^{-r(T-t_2)}) = 40(1-e^{-0.09 \times 0.0833}) = 0.30$$

は0.5よりも小さいので、十分にイン・ザ・マネーになっている場合には、2番目の配当落ち日の直前にオプションは行使される(不等式(13.25)を参照)。

さて、Black の近似を用いてこのオプションを評価してみよう。最初の配当の現在価値は、

$$0.5e^{-0.1667 \times 0.09} = 0.4926$$

になるから、最後の配当落ち日の直前に満期を迎えると仮定した場合のオプションの価値は、Black-Scholes の公式に  $S_0=40 - 0.4926 = 39.5074$ ,  $K=40$ ,  $r=0.09$ ,  $\sigma=0.30$ ,  $T=0.4167$  を代入すれば計算できる。その値は3.52ドルとなる。Black の近似は、この値と6カ月後におけるのみ行使できる場合のオプションの価値を比較し、大きいほうをとるというものである。例13.9から後者の価値は3.67ドルである。したがって、Black の近似ではアメリカン・コールの価値は3.67ドルになる。

DerivaGem ソフトウェアの“Binominal American”を用いて、時

(注14) Roll, Geske, Whaley が提案した、配当落ち日が1日のみの場合のコール・オプション価格に対する厳密な公式については、著者の Web サイトのテクニカルノート 4 を参照されたい。それは2次元標準正規分布の累積分布関数を用いた公式である。この関数の計算方法は、著者の Web サイトのテクニカルノート 5 に与えている。

間刻みを500にしてオプションの価値を計算すると3.72ドルとなる（DerivaGem ソフトウェアでは、配当はテーブルに時間順に入力する必要がある。1列目には配当落ち日までの時間を入力し、2列目には配当額を入力する）。二項モデル（BM）と Black の近似（BA）との間の違いには二つの理由がある。一つ目は期限前行使を判断するタイミングで、二つ目はボラティリティの適用のされ方である。期限前行使を判断するタイミングは BM を BA より大きくする要因となる。BA の場合にはオプション保有者は行使の時期を5ヵ月後にするか6ヵ月後にするかを今日決めなければならないのに対して、BM の場合には5ヵ月後に期限前行使するかどうかを5ヵ月後の株価をみて判断することができる。ボラティリティの適用のされ方については、BA を BM より大きくする要因となる。BA の場合には、5ヵ月後に権利行使があると仮定するときには、ボラティリティは株価から最初の配当の現在価値を差し引いたものに適用され、6ヵ月後に権利行使があると仮定するときには、ボラティリティは株価から両方の配当の現在価値を差し引いたものに適用されている。

## 要 約

本章では、第12章で導入した株価過程の性質を調べることから始めた。株価がその確率過程に従うとすると、現在の株価が与えられたとき、将来の時点における株価は対数正規分布に従う。それは、与えられた期間における株価の連続複利ベースでの収益率が正規分布に従うということでもある。将来の株価に対する不確実性は時間が長くなるにつれ大きくなる。株価の対数の標準偏差は、観測時点までの期間の平方根に比例している。

株価のボラティリティの実証的な推定には、固定間隔（たとえば、日次、

週次、月次）で観測された株価が用いられる。各時間区間にに対して、時間区間の終わりにおける株価の時間区間のはじめにおける株価に対する比の自然対数を計算する。これらの数値の標準偏差を年単位での期間の長さの平方根で除した値が、ボラティリティの推定値になる。ボラティリティを計算するときは、市場の休日を入れずに期間の長さを測るのが一般的である。

株式に対する任意のデリバティブの価格が満たす微分方程式は、そのオプションと株式を用いた無リスク・ポートフォリオを構築することによって導出することができる。デリバティブと株価はどちらも同じ要因による不確実性に依存していることから、無リスク・ポートフォリオをつくることが常に可能である。このポートフォリオはごく短い時間でしか無リスクではない。しかし、裁定機会がないならば、無リスク・ポートフォリオの収益率は常に無リスク金利に等しくなければならない。

株式の期待収益率は、Black-Scholes 微分方程式には現れない。このことから、リスク中立化法という便利な方法が使えることがわかる。それは、株価に依存するデリバティブを評価するときにはリスク中立世界を仮定してもよい、というものである。したがって、デリバティブの価値を求めるには、株価の期待収益率を無リスク金利とし、ペイオフの期待値を無リスク金利で割り引けばよいことになる。ヨーロピアン・コール・オプションやプット・オプションに対する Black-Scholes の価格式は、Black-Scholes 微分方程式を解く方法とリスク中立化法を用いる方法のどちらでも導出することができる。

インプライド・ボラティリティとは、Black-Scholes のオプション価格式に代入した場合にオプションの市場価格が得られるようなボラティリティのことである。トレーダーはインプライド・ボラティリティを常にモニターしている。オプションでは、価格ではなくインプライド・ボラティリティが呈示されることが多い。トレーダーは、流動性の高いオプションのインプライド・ボラティリティを他のオプションに使うボラティリティの推定に利用する方法を開発している。

Black-Scholes の結果は、配当のある株式のヨーロピアン・コール・オプ

ションとプット・オプションにも拡張できる。その方法は、Black-Scholes式に代入する株価をオプション満期までに支払が予想される配当の現在価値を差し引いた値とし、ボラティリティを株価から配当の現在価値を差し引いた値のボラティリティとすればよい、というものである。

理論的には、アメリカン・コール・オプションは配当落ち日の直前に行使される可能性がある。実際には、最後の配当落ち日のみを考慮すればよい場合が多い。このことに基づいて、Fischer Black はアメリカン・コール・オプションの価格の近似として、次の二つのヨーロピアン・コール・オプションの価格の高いほうを用いる方法を提案した。一つ目は、アメリカン・コール・オプションの満期日に満期を迎えるヨーロピアン・コール・オプションである。二つ目は、最後の配当落ち日の直前に満期を迎えるヨーロピアン・コール・オプションである。

## 参考文献

### ○株価変動の確率分布に関して

Blattberg, R., and N. Gonedes. "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices," *Journal of Business*, 47 (April 1974) : 244-80.

Fama, E.F. "The Behavior of Stock Prices," *Journal of Business*, 38 (January 1965) : 34-105.

Kon, S.J. "Models of Stock Returns—A Comparison," *Journal of Finance*, 39 (March 1984) : 147-65.

Richardson, M., and T. Smith. "A Test for Multivariate Normality in Stock Returns," *Journal of Business*, 66 (1993) : 295-321.

### ○Black-Scholes モデルに関して

Black, F. "Fact and Fantasy in the Use of Options and Corporate Liabilities," *Financial Analysts Journal*, 31 (July/August 1975) : 36-41, 61-72.

Black, F. "How We Came Up with the Option Pricing Formula," *Journal of*

- Portfolio Management*, 15, 2 (1989) : 4-8.
- Black, F., and M. Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, 81 (May/June 1973) : 637-59.
- Merton, R.C. "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973) : 141-83.
- リスク中立化法に関して
- Cox, J.C., and S.A. Ross. "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3 (1976) : 145-66.
- Smith, C.W. "Option Pricing: A Review," *Journal of Financial Economics*, 3 (1976) : 3-54.
- ボラティリティの原因に関して
- Fama, E.F. "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business*, 38 (January 1965) : 34-105.
- French, K.R. "Stock Returns and the Weekend Effect," *Journal of Financial Economics*, 8 (March 1980) : 55-69.
- French, K.R., and R. Roll. "Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders," *Journal of Financial Economics*, 17 (September 1986) : 5-26.
- Roll, R. "Orange Juice and Weather," *American Economic Review*, 74, 5 (December 1984) : 861-80.

### 章末問題

- 13.1** Black-Scholes の株券オプション価格モデルでは、1年後の株価の確率分布に対してどのような仮定が置かれているか。また、1年間の連続複利ベースでの株価収益率に対してはどのような仮定が置かれているか。
- 13.2** 株価のボラティリティを年率30%とする。このとき、1取引日における株価の変化率の標準偏差を求めよ。
- 13.3** リスク中立化法の原理について説明せよ。

- 13.4** 現在の株価を50ドル、無リスク金利を年率10%、ボラティリティを年率30%とする。配当はないものとして、この株式に対する満期3カ月、行使価格50ドルのヨーロピアン・プット・オプションの価格を求めよ。
- 13.5** 問題13.4において、2カ月後に1.50ドルの配当が予想されているとする。このとき、オプションの価格計算はどのように変わってくるか。
- 13.6** インプライド・ボラティリティとは何か。それはどのように計算して求められるかについて説明せよ。
- 13.7** 現在の株価を40ドル、株式の期待収益率を15%、ボラティリティを25%とする。このとき、2年間に得られる連続複利ベースでの収益率の確率分布はどのようになるか。
- 13.8** 株価は期待収益率16%、ボラティリティ35%の幾何ブラウン運動に従っているとする。現在の株価は38ドルである。
- 行使価格40ドル、満期6カ月の株券ヨーロピアン・コール・オプションが行使される確率を求めよ。
  - 行使価格と満期日が同じ株券ヨーロピアン・プット・オプションが行使される確率を求めよ。
- 13.9** 本章で用いた記号を用いて、 $S_T$  の95%信頼区間が、 $S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T - 1.96\sigma\sqrt{T}}$  から  $S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)T + 1.96\sigma\sqrt{T}}$ までの区間になることを示せ。
- 13.10** あるポートフォリオ・マネジャーが、過去10年間のそれぞれの年に実現した収益率の平均が年率20%であると公表している。この表現が誤解を招きやすい点について説明せよ。
- 13.11** 配当のない株式の期待収益率が  $\mu$ 、ボラティリティが  $\sigma$  であると仮定する。ある革新的な金融機関が、時点  $T$  に  $\ln S_T$  に等しい金額（ドル）を支払う証券を売り出すという発表をしたとしよう。ここで  $S_T$  は時点  $T$  における株価である。
- リスク中立化法を用いて、時点  $t$  におけるこの証券の価格を時

点  $t$  における株価  $S$  の関数として求めよ。

- (b) 求めた価格が微分方程式(13.16)を満たしていることを確かめよ。

- 13.12** 時点  $T$  におけるペイオフが  $S_T^n$  のデリバティブについて考える。ここで  $S_T$  は時点  $T$  における株価である。株価が幾何ブラウン運動に従うとき、時点  $t$  ( $t \leq T$ ) におけるデリバティブの価格は、

$$h(t, T) S^n$$

の形に書けることが示せる。ここで  $S$  は時点  $t$  における株価、 $h$  は  $t$  と  $T$  のみの関数である。

- (a) Black-Scholes-Merton 微分方程式に代入して、 $h(t, T)$  の満たす常微分方程式を導出せよ。  
(b)  $h(t, T)$  に対する微分方程式の境界条件は何か。  
(c)  $r$  を無リスク金利、 $\sigma$  を株価のボラティリティとするとき、

$$h(t, T) = e^{(0.5\sigma^2 n(n-1) + r(n-1))(T-t)}$$

となることを示せ。

- 13.13** 株価を52ドル、行使価格を50ドル、無リスク金利を年率12%，ボラティリティを年率30%，満期を3カ月とする。このとき、配当のない株式に対するヨーロピアン・コール・オプションの価格を求めよ。

- 13.14** 株価を69ドル、行使価格を70ドル、無リスク金利を年率5%，ボラティリティを年率35%，満期を6カ月とする。このとき、配当のない株式に対するヨーロピアン・プット・オプションの価格を求めよ。

- 13.15** ある株式に対するアメリカン・コール・オプションを考える。現在の株価を70ドル、満期を8カ月、無リスク金利を年率10%，行使価格を65ドル、ボラティリティを年率32%とする。さらに、3カ月後と6カ月後に1ドルの配当が予想されているとする。これら2回のいずれの配当日においても、オプションの行使は最適ではないことを示せ。また、DerivaGem ソフトウェアを用いてこのオプションの価格を計算せよ。

- 13.16** 配当のない株式に対するあるコール・オプションの市場価格が  $2\frac{1}{2}$  ドル

ルである。株価を15ドル、行使価格を13ドル、満期を3カ月、無リスク金利を年率5%とする。このとき、インプライド・ボラティリティはいくらになるか。

**13.17** 本章で使った記号を用いる。

- (a)  $N'(x)$  は何か。
- (b)  $SN'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}N'(d_2)$  を示せ。ここで  $S$  は時点  $t$  における株価で、

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

である。

- (c)  $\partial d_1 / \partial S$  と  $\partial d_2 / \partial S$  を計算せよ。
- (d) 配当のない株式に対するコール・オプションの価格  $c$  が、

$$c = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

で与えられるとき、

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}N(d_2) - SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

となることを示せ。

- (e)  $\partial c / \partial S = N(d_1)$  を示せ。
- (f)  $c$  が Black-Scholes 微分方程式を満たすことを示せ。
- (g)  $c$  がヨーロピアン・コール・オプションの境界条件を満たすこと、すなわち、 $t \rightarrow T$  のとき  $c = \max(S - K, 0)$  となることを示せ。

**13.18** コール・オプションとプット・オプションに対する Black-Scholes の公式がプット・コール・パリティを満たしていることを示せ。

**13.19** 現在の株価を50ドル、無リスク金利を5%とする。この株式に対するヨーロピアン・コール・オプションの価格が次表に与えられている。DerivaGem ソフトウェアを用いて、対応するインプライド・ボ

ラティリティの表を作成せよ。ただし、配当はないものとする。また、これらのオプション価格は Black-Scholes モデルの仮定と整合性がとれているか。

| 行使価格（ドル） | 満期（月数） |     |      |
|----------|--------|-----|------|
|          | 3      | 6   | 12   |
| 45       | 7.0    | 8.3 | 10.5 |
| 50       | 3.7    | 5.2 | 7.5  |
| 55       | 1.6    | 2.9 | 5.1  |

- 13.20** 配当のある株式に対するアメリカン・コール・オプションを Black の方法で評価したとき、その値は配当が 1 回しかない場合でも近似的なものである。その理由を注意深く述べよ。また、Black の方法による値は本当のオプションの価値より大きくなるか、あるいは小さくなるか。その理由も説明せよ。
- 13.21** ある株式に対するアメリカン・コール・オプションを考える。現在の株価を 50 ドル、満期を 15 カ月、無リスク金利を年率 8 %、行使価格を 55 ドル、ボラティリティを年率 25 % とする。さらに、4 カ月後と 10 カ月後に 1.5 ドルの配当が予想されているとする。これら 2 回のいずれの配当日においても、オプションの行使は最適ではないことを示せ。また、このオプションの価格を計算せよ。
- 13.22** リスク中立世界でのヨーロピアン・コール・オプションが行使される確率は、本章の記号を用いると、 $N(d_2)$  であることを示せ。また、時点  $T$  における株価が  $K$  よりも高いならば 100 ドルを支払うというデリバティブの価格式を求めよ。
- 13.23**  $S^{-2r/\sigma^2}$  は取引可能な証券の価格であることを示せ。
- 13.24** ある企業が従業員ストック・オプションを発行している。そのオプションを評価する際に、希薄化を考慮する必要はあるか。
- 13.25** ある企業の株価を 50 ドル、発行済株式数を 1,000 万株とする。その企業は従業員に対して、アット・ザ・マニーの 5 年物コール・オプションを 300 万株分付与しようと考えている。オプションが行使され

ると新株が発行されるとする。株価のボラティリティを25%，5年物無リスク金利を5%，企業に配当の支払はないものとする。このとき，企業にとっての従業員ストック・オプションの発行コストを推定せよ。

## 宿題

**13.26** 現在の株価を50ドル，株式の期待収益率を年率18%，ボラティリティを年率30%とする。このとき，2年後の株価の確率分布はどのようになるか。分布の平均と標準偏差を計算せよ。また，95%信頼区間を求めよ。

**13.27** 連続した15週間の週末の株価終値（単位ドル）が，以下のように推移したとする。

30.2, 32.0, 31.1, 30.1, 30.2, 30.3, 30.6, 33.0, 32.9, 33.0,  
33.5, 33.5, 33.7, 33.5, 33.2

株価のボラティリティを推定せよ。また，その標準誤差を求めよ。

**13.28** ある金融機関が，時点  $T$  に  $S_T^2$  に等しい金額（ドル）を支払う証券の売出しを計画しているとする。

(a) リスク中立化法を用いて，時点  $t$  におけるこの証券の価格を時点  $t$  の株価  $S$  の関数として求めよ（ヒント： $S_T^2$  の期待値は，13.1節で与えた  $S_T$  の平均と分散から計算できる）。

(b) 求めた価格が微分方程式(13.16)を満たしていることを確かめよ。

**13.29** 株価を30ドル，行使価格を29ドル，無リスク金利を年率5%，ボラティリティを年率25%，満期を4カ月として，配当のない株式のオプションを考える。

(a) オプションがヨーロピアン・コールの場合の価格を求めよ。

- (b) オプションがアメリカン・コールの場合の価格を求めよ。
- (c) オプションがヨーロピアン・プットの場合の価格を求めよ。
- (d) プット・コール・パリティが成り立っていることを示せ。

**13.30** 問題13.29で、株式には $1\frac{1}{2}$ カ月後に配当落ちがあるとする。予想配当額は50セントである。

- (a) オプションがヨーロピアン・コールの場合の価格を求めよ。
- (b) オプションがヨーロピアン・プットの場合の価格を求めよ。
- (c) オプションがアメリカン・コールの場合、期限前行使されるような状況はあるか。

**13.31** 現在の株価を18ドル、行使価格を20ドル、満期を6カ月、ボラティリティを年率30%，無リスク金利を年率10%として、アメリカン・コール・オプションについて考える。オプション満期までに同額の配当が2回あると予想されている。配当落ち日は2カ月後と5カ月後で、配当額は40セントである。Blackの近似とDerivaGemソフトウェアを用いた場合のオプションの価値を求めよ。また、このアメリカン・オプションの価値が同条件のヨーロピアン・オプションの価値よりも高くならないような配当額の上限を求めよ。

## 付 錄

### Black-Scholes-Merton の公式の証明

Black-Scholes の結果を証明する前に、以後の章でも用いる主結果を証明する。

#### 主 結 果

$V$  が対数正規分布に従い、 $\ln V$  の標準偏差が  $w$  であるとき、

$$E[\max(V - X, 0)] = E(V)N(d_1) - KN(d_2) \quad (13A.1)$$

が成り立つ。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln[E(V)/K] + w^2/2}{w}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E(V)/K] - w^2/2}{w}$$

であり、 $E$  は期待値を表す。

#### 証 明

$g(V)$  を  $V$  の確率密度関数とする。このとき、

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_K^\infty (V - K)g(V)dV \quad (13A.2)$$

である。変数  $\ln V$  は標準偏差  $w$  の正規分布に従う。対数正規分布の性質から、 $\ln V$  の平均  $m$  は、

$$m = \ln[E(V)] - w^2/2 \quad (13A.3)$$

になる(注15)。新しい変数を、

$$Q = \frac{\ln V - m}{w} \quad (13A.4)$$

---

(注15) 証明については著者の Web サイトのテクニカルノート 2 を参照されたい。

で定義する。この変数は平均ゼロ、標準偏差1.0の正規分布に従う。したがって、 $Q$  の密度関数を  $h(Q)$  とすると、

$$h(Q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-Q^2/2}$$

になる。(13A.4)式を用いて、(13A.2)式の右辺の積分で  $V$  を  $Q$  に変数変換すると、

$$E[\max(V - K, 0)] = \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} (e^{Qw+m} - K) h(Q) dQ$$

すなわち、

$$\begin{aligned} E[\max(V - K, 0)] &= \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} e^{Qw+m} h(Q) dQ \\ &\quad - K \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q) dQ \end{aligned} \quad (13A.5)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} e^{Qw+m} h(Q) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-Q^2+2Qw+2m)/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-(Q-w)^2+2m+w^2)/2} \\ &= \frac{e^{m+w^2/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{-(Q-w)^2/2} \\ &= e^{m+w^2/2} h(Q-w) \end{aligned}$$

となるので、(13A.5)式は、

$$\begin{aligned} E[\max(V - K, 0)] &= e^{m+w^2/2} \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q-w) dQ \\ &\quad - K \int_{(\ln K - m)/w}^{\infty} h(Q) dQ \end{aligned} \quad (13A.6)$$

になる。

$N(x)$  を平均ゼロ、標準偏差1.0の正規分布に従う変数が  $x$  以下になる確

率とすると、(13A.6)式の最初の積分は、

$$1 - N[(\ln K - m)/w - w]$$

すなわち、

$$N[(-\ln K + m)/w + w]$$

と表される。 $m$  に(13A.3)式を代入すると、この式は、

$$N\left(\frac{\ln[E(V)/K] + w^2/2}{w}\right) = N(d_1)$$

になる。同様に、(13A.6)式の 2 番目の積分は  $N(d_2)$  になる。したがって、(13A.6)式は、

$$E[\max(V - K, 0)] = e^{m+w^2/2} N(d_1) - K N(d_2)$$

になる。 $m$  に(13A.3)式を代入すると、主結果が得られる。

### Black-Scholes-Merton の結果

さて、時点  $T$  に満期を迎える配当のない株式に対するコール・オプションを考える。行使価格を  $K$ 、無リスク金利を  $r$ 、現在の株価を  $S_0$ 、ボラティリティを  $\sigma$  とする。(13.22)式で示したように、コールの価格  $c$  は、

$$c = e^{-rT} \hat{E}[\max(S_T - K, 0)] \quad (13A.7)$$

で与えられる。ここで  $S_T$  は時点  $T$  における株価、 $\hat{E}$  はリスク中立世界における期待値を表している。Black-Scholes が仮定した確率過程のもとでは、 $S_T$  は対数正規分布に従う。さらに、(13.3)式と(13.4)式より  $\hat{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$  となり、 $\ln S_T$  の標準偏差は  $\sigma\sqrt{T}$  になる。

主結果より、(13A.7)式は、

$$c = e^{-rT} [S_0 e^{rT} N(d_1) - K N(d_2)]$$

すなわち、

$$c = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

になることがわかる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln[\hat{E}(S_T)/K] + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[\hat{E}(S_T)/K] - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

である。これが Black-Scholes-Merton の公式である。

## 第14章

# 従業員ストック・オプション

従業員ストック・オプションは、企業が従業員に付与する、その企業の株式に対するコール・オプションである。このオプションは従業員に対する企業の財産の分与である。企業業績がよく、株価が上昇して行使価格を上回れば、従業員はオプション行使し、取得した株式を市場価格で売却して利益を得る。

従業員ストック・オプションは過去20年の間に広く普及した。多くの企業、特に技術系の企業は、優秀な従業員を惹きつけて確保するための唯一の手段は、非常に魅力のあるストック・オプション制度を従業員に提供することであると感じている。ある企業では上級経営管理者のみにストック・オプションを付与している。また、組織のすべての職層の従業員にストック・オプションを付与している企業もある。マイクロソフトは従業員ストック・オプションを導入した最初の企業の一つである。マイクロソフトの全従業員は

ストック・オプションを付与され、その後の株価上昇により、1万人を超える従業員が億万長者になったと推定されている。なお、2003年にマイクロソフトはストック・オプションの利用を止めて、そのかわりに従業員に対して同社株を付与することを発表した。しかし、世界中の多くのその他の企業は従業員ストック・オプションを熱心に利用し続けている。

従業員ストック・オプションは新興企業に人気がある。新興企業は、要となる従業員に対して大企業が支払うほどの報酬が支払える原資をもっていないため、ストック・オプションで従業員への給与を補うことにより、こうした問題を解決している。企業業績が好調で、新規公開によって株式の売却が可能になれば、ストック・オプションの価値は非常に高いものになるだろう。新興企業によっては、夏休みの数カ月間のみ働く学生に対してもストック・オプションを付与してきた。その結果、場合によっては、数十万ドルを思いがけず手にした学生もいる。

本章では、ストック・オプション制度の仕組みと会計処理方法がその普及にいかに影響を与えてきたかについて説明する。また、従業員ストック・オプションが株主の利益と企業の経営上層部の利益を一致させるのに役立つかについて議論する。さらに、ストック・オプションの評価方法について述べ、日付をさかのぼってストック・オプションを付与するバックデータティング・スキャンダルについても触れる。

## 14.1 契約上の取決め

従業員ストック・オプションは通常10年から15年の満期をもつ。多くの場合、行使価格は付与日の株価に等しく設定されるため、オプションは当初アット・ザ・マネーになる。以下は、一般的な従業員ストック・オプションによくみられる特徴である。

1. オプションが行使できない権利確定期間が設けられている。その期間は最長4年程度である。
2. 権利確定期間中に従業員が（自己都合または会社都合にかかわらず）

退職した場合は、オプションは没収される。

3. 権利確定期間後に従業員が（自己都合または会社都合にかかわらず）  
退職した場合は、オプションはアウト・オブ・ザ・マネーであれば没  
収され、イン・ザ・マネーであれば即時に行使されなければならな  
い。
4. 従業員はオプションを売却してはならない。
5. 従業員がオプション行使した場合は、企業は新株を発行し、それ  
を行使価格で従業員に売却する。

### 早期行使の選択

上記の従業員ストック・オプションの4番目の性質は重要な意味をもつ。従業員がどのような理由であれ、与えられたオプションの現金化を希望するのであれば、オプション行使して、取得した株式を市場で売却しなければならない。ストック・オプションは他人に売却できないことから、類似の上場コール・オプションまたは店頭コール・オプションよりも早期に行使される傾向が強い。

配当のない株式のコール・オプションを考えよう。9.5節で示したように、通常のコール・オプションであれば決して期限前行使は行われない。満期前では、オプション保有者は行使するよりもオプションを売却したほうが常に得である。しかし、ストック・オプションは売却できないため、9.5節で用いた議論は従業員ストック・オプションには適用できない。従業員がオプションを現金化する（または、保有量を減らす）唯一の方法は、オプション行使して、取得した株式を売却することである。したがって、通常の上場オプションや店頭オプションであれば行使がまだ最適となっていないときに従業員ストック・オプションが行使されるということは、そんなにないことではない。

従業員がストック・オプションを期限前行使し、取得した株式を売却せずに保有し続けるという行動にはメリットがあるだろうか。オプションの行使価格は満期まで一定で、オプションはいつでも行使できるとする。この問

題を検討するために、従業員ストック・オプションおよび市場で売却可能なそれと同条件の通常のオプションの二つのオプションを考える。最初のオプションをオプションA、2番目のオプションをオプションBと呼ぶことにする。株式に配当がないならば、9.5節より、オプションBは決して期限前行使すべきではない。このことから、オプションAを行使して、取得した株式を保有し続けるのは最適な行動ではないことがわかる。自分の会社に投資し続けたいのであれば、ストック・オプションを保有し続けるほうがもっとよい戦略である。9.5節で説明したように、この戦略のほうが行使価格を支払う時期が遅くなるうえに、オプションの保険的価値も保有し続けられるからである。オプションBの行使が最適となる場合のみ、オプションAを行使して、取得した株式を保有し続けるという戦略が、従業員にとって合理的なものになる(注1)。13.12節で議論したように、オプションBの期限前行使が最適になるのは、比較的高い配当が支払われる直前のみである。

実際のところは、従業員が早期行使を行うかどうかは企業によってまちまちである。早期行使が行われないカルチャーの企業もあれば、権利確定期間後はオプションが少ししかイン・ザ・マネーでなくともオプションを直ちに行使して、取得した株式を売却する従業員が多い企業もある。

## 14.2 ストック・オプションは株主と経営者の利益を一致させるか？

資本市場に信頼を置く投資家にとって、株主と経営者の利益がほどよく一致していることが重要である。すなわち、経営者は株主の最大利益のために経営判断するように動機づけられているべきである。経営者は株主の代理人であり、経営者が株主の最大利益のために行動しないことによって株主が被る損失のことを、経済学者は代理人コスト(agency cost)と呼んでいる。株主利益を無視する経営をした経営者に米国では長期服役の判決が下されるの

---

(注1) この唯一の例外は、経営者が株主権のために株式を所有したい場合であろう。

は、エンロンやその他のスキャンダルが発生したけれども、米国は断固として代理人コストを低くとどめていく考え方であることの証を投資家に示そうとするものであるとも解釈できる。

従業員ストック・オプションは従業員と株主の利益を一致させるのに役立っているのだろうか。その答は単純ではない。新興企業の場合は、ストック・オプションが利益一致に役立っていることに疑問の余地はない。主要株主は上級経営管理者でもある場合が多く、ストック・オプションは従業員の長時間労働を動機づけるすぐれた方法である。企業が成功して株式が新規公開されれば、従業員も十分に報われることになる。しかし、企業が失敗に終われば、オプションは紙くずになる。

上場企業の上級経営管理者にストック・オプションを付与する場合が最も議論になる。米国では、従業員ストック・オプションの約50%は経営上層部の報酬として付与されたものであると見積もられている。経営者に付与されるストック・オプションは経営者に対する「成功報酬」といわれることもある。企業の株価が上がれば、株主の利益は増大し、その対価として経営者は報酬が得られるからである。しかし、この見方はオプションのペイオフが対称的でないことを見落としている。企業業績が悪かった場合、株主は損失を被るが、経営者にとっては儲け損なったというだけである。株主とは異なり、経営者は損失を被らない<sup>(注2)</sup>。成功報酬のもっとよい形態は、経営者に株式を付与するというもっと単純な戦略である。そうすれば、株主の利益は経営者にとっても利益になり、株主の損失は経営者にとっても損失になる。

ストック・オプションは上級経営管理者をどんな誘惑に駆り立てるだろうか。経営者が3カ月後に大量のストック・オプション行使するつもりでいるとしよう。オプション行使する直前に株価が上昇するように、経営者は

---

(注2) ストック・オプションがアウト・オブ・ザ・マネーになったとき、企業が新しいアット・ザ・マネーのストック・オプションを付与し直す場合もある。この再付与(repricing)が行われる場合は、経営者の利害と株主の利害との関係はさらに希薄になる。

よいニュースを発表するタイミングを合わせたり、利益の計上を四半期ずらすことまでするような誘惑に駆られるかもしれない。また、3ヵ月後にアット・ザ・マネーのストック・オプションが経営者に付与される場合には、経営者は付与日の直前に株価が下落するような行動をとる誘惑に駆られるかもしれない。いま述べたような行動は当然まったく許されないものであり、おそらく違法行為になる。しかし、本章の後のほうで紹介するバックデーティング・スキャンダルをみればわかるように、ストック・オプションに関連する問題への経営者の対応には遺憾な点が多い。

上で述べたような不正が行われていない場合でも、経営者へのストック・オプションには、長期的な成長を犠牲にして短期収益に重きを置くように経営者を動機づける可能性がある。オプションの非対称なペイオフを保有していなければとらなかったようなリスク（しかも株主の不利益になるリスク）をとってしまう場合も起こりうる。ストック・オプションは経営者の報酬の非常に大きな部分を占めているので、大きなファンドのマネジャーは、本来の経営がうわの空になる危険性を危惧している。実際、上級経営管理者が株主利益とはまったく別の観点から報酬を増やす方法を考えるのに多くの時間を費やし、企業経営に十分な時間を割かなくなる可能性もある。

経営者は内部情報を保有しており、業績や情報公開に影響を与える立場にあるので、経営者による自社株の売買は常にその他の株主の不利益につながる可能性がある。この問題を軽減する方法は、経営者が自社株を売買するときは、たとえば売買の1週間前に、売買する意思を市場へ通知すること（売買の通知を行った場合は売買を実行すること）を要求することである、という過激な意見もある（注3）。この通知がなされると、経営者が自社株を売買する理由に関する市場のコンセンサスが形成される。その結果として、経営者が自社株を購入する前に株価が上昇したり、経営者が自社株を売却する前に株価が下落することも起こるだろう。

---

(注3) 経営者がストック・オプション行使し、取得した株式を売却したいと考えるならば、売却の意思を通知する必要があるので、この要求はストック・オプションの行使にも適用されることになる。

### 14.3 会計処理について

従業員ストック・オプションは企業にとっては費用であり、従業員にとっては他の形態の報酬と同様に利益になるものである。この点は多くの人にとて自明と思われるが、実際にはかなり議論の対象となっている。多くの企業の経営者は、オプションはイン・ザ・マネーでなければ無価値であると信じているように見受けられる。そのため、多くの経営者は、企業の発行するアット・ザ・マネーのストック・オプションは企業にとっての費用ではないと主張している。しかし、本当のところは、ストック・オプションが従業員にとって価値のあるものであれば、それはその企業の株主にとっては費用になるはずであり、したがって、企業にとっての費用となる。ただ飯は存在しない。企業にとってのストック・オプションという費用は、株価が上昇した場合に、市場で購入するよりも低い価格で従業員に自社株を売却することに企業が合意しているという事実から発生する費用である。

1995年以前は、ストック・オプションを発行した企業はその本源的価値を損益計算書に費用計上していた。ほとんどのストック・オプションはアット・ザ・マネーで発行されていたため、発行時の費用はゼロとして計上されていた。1995年に会計基準 FAS 123が公表された。多くの関係者はストック・オプションを公正価値で費用計上することが要求されるだろうと期待していたが、強いロビー活動を受けて、FAS 123の1995年版では、付与したストック・オプションの公正価値を損益計算書に費用計上することが企業に奨励されるだけにとどまった。公正価値を費用計上することは要求されず、公正価値を損益計算書に費用計上しない場合は、財務諸表の脚注に明記することが義務づけられた。

現在では会計基準が改正され、ストック・オプションは公正価値で損益計算書に計上することが要求されている。2004年2月、国際会計基準理事会(IASB)はIAS 2を公表し、企業に対してストック・オプションを2005年より費用計上するよう求めている。また、2004年12月にはFAS 123が改定され、2005年から米国での従業員ストック・オプションを費用計上することが

求められた。

新しい会計基準では、ストック・オプションは付与日に評価し、その公正価値の総額を付与した年度の損益計算書に費用計上することが求められているが、その後の時価評価は求められていない。ストック・オプションは、行使されるか消滅するまで各会計年度末（あるいは四半期ごと）に再評価すべきであるという意見もある（注4）。これは、ストック・オプションを企業が行う他のデリバティブ取引と同様に取り扱おうというものである。そうすると、ストック・オプションの価値がある年度から翌年度に増加すれば、翌年度末の損益計算書には追加費用が計上されることになる。逆に、価値が減少した場合には、以前計上された費用の一部が繰り戻され、損益計算書には利益が計上されることになる。この方法には多くの利点がある。たとえば、企業の計上した累積費用がストック・オプションの実際の費用（ストック・オプションが消滅した場合はゼロ、行使された場合はストック・オプションのペイオフ）を反映したものになる。各年度に計上される費用はオプションの時価評価モデルに依存したものであるが、最終的な累積費用はモデルに依存しないものになる（注5）。また、本章の後のほうで紹介するバックデーターティングを企業が行うインセンティブも間違いなく減るだろう。一方、このような会計処理に対してよくいわれる短所は、損益計算書の損益が変動しやすくなるので望ましくないというものである（注6）。

---

(注4) J. Hull and A. White, "Accounting for Employee Stock Options: A Practical Approach to Handling the Valuation Issues," *Journal of Derivatives Accounting*, 1, 1 (2004) : 3-9 を参照されたい。

(注5) 興味深いことに、ストック・オプションが企業の新株発行でなく現金で決済される場合には、ここで提案している会計処理が求められている（しかし、ストック・オプションの決済を現金で行おうと従業員への新株の割当てで行おうと、経済効果には違いはない）。

(注6) 実際には、ストック・オプションを再評価したほうが損益計算書の損益の変動は小さくなるだろう。企業業績が好調なときはストック・オプションの価値増加により企業収益は押し下げられ、企業業績が悪いときはストック・オプションの価値減少により企業収益は押し上げられるからである。

## 新しいタイプのストック・オプション

2005年以前の従業員ストック・オプションが付与日にアット・ザ・マネーになるように発行され、オプション満期まで行使価格が変更されなかつた理由は容易に理解できる。この標準的な条件以外のストック・オプションを発行すると、ストック・オプションは経費処理を求められたからである。会計基準が変わり、すべてのストック・オプションは公正価値で経費処理されることになったので、多くの企業は標準的な条件以外のストック・オプションを検討するようになった。

標準的な条件が好ましくないとされる一つは、自社の株価が市場全体よりも低調であっても、株式市場全体が好調で自社の株価も上昇していれば、従業員はその恩恵にあずかれるという点である。この課題を解決する一つの方法は、ストック・オプションの行使価格をS&P500のパフォーマンスに連動させることである。たとえば、ストック・オプションの付与日の株価を30ドル、S&P500の値を1,500とする。このとき、行使価格は当初30ドルに設定され、S&P500が10%上昇して1,650になれば、行使価格も10%上がって33ドルになり、S&P500が15%下落して1,275になれば、行使価格も15%下がって25.50ドルになる。その結果、企業の株価のパフォーマンスがS&P500のパフォーマンスを上回ったときのみストック・オプションはイン・ザ・マネーになる。参照する指標として、S&P500を用いるかわりに、その企業が属するセクターの株価指数を使うこともできる。

標準的な条件と異なるストック・オプションのもう一つの例は、ストック・オプションがイン・ザ・マネーになるのは株価の年率収益率があらかじめ設定した最低収益率を上回った場合のみになるように、決められた方法で行使価格が上昇していくというタイプである。また、収益の目標値が設定されていて、その目標値が達成されたときのみ権利が確定するストック・オプションもある(注7)。

---

(注7) この種のストック・オプションは、ペイオフが株価だけでなく財務諸表の値に依存しているので、その価値を評価するのはむずかしい。

## 14.4 評 價

会計基準では、従業員ストック・オプションの評価方法の選択に関して、企業にかなりの裁量が認められている。本節では、それらの評価方法のいくつかを説明する。

### 簡便法

よく用いられる方法は、ストック・オプションの「予想残存期間 (expected life)」に基づいて評価する方法である。予想残存期間とは、ストック・オプションが行使されるか消滅するまでの平均保有期間である。この期間は、従業員の早期行使に関する過去データからおおよその値が見積もられ、権利確定期間や従業員の退職による影響、14.1節で述べたような従業員ストック・オプションが通常のオプションより早期に行使される傾向を反映したものになっている。ストック・オプションの価値は、予想残存期間をオプションの満期までの時間として Black-Scholes モデルを用いて計算される。その際のボラティリティには、13.4節で説明したような方法で、過去数年間のデータから見積もられたものがふつう用いられる。

Black-Scholes の公式のこのような使い方には理論上の妥当性はない、ということは強調しておくべきであろう。満期までの時間が予想残存期間に等しい株式のヨーロピアン・オプションの価値が、いま評価したいアメリカンタイプの従業員ストック・オプションの価値と大体同じになるという根拠はない。しかし、このようにモデルを使って得られた結果はまったく的外れな値になるというわけでもない。企業がストック・オプションの費用を報告する際には、Black-Scholes モデルに用いたボラティリティと予想残存期間が付記されることも多い。

#### 【例14.1】

2008年11月1日に、ある企業が経営者に対して1,000,000単位のストック・オプションを付与するとする。その日の株価は30ドルで、オプションの行使価格も30ドルである。また、オプションの満期は10年で、

3年後に権利が確定する。その企業はこれまでに同じような満期10年のアット・ザ・マネー・オプションを発行してきており、行使されるか消滅するまでの平均期間は4.5年となっている。したがって、企業は予想残存期間として4.5年を用いることにした。株価の長期ボラティリティは過去5年のデータから25%と推定されている。今後4.5年間における配当の現在価値は4ドルと見積もられており、4.5年物無リスク・ゼロ・レートは5%である。したがって  $S_0 = 30 - 4 = 26$ ,  $K = 30$ ,  $r = 5\%$ ,  $\sigma = 25\%$ ,  $T = 4.5$ , として Black-Scholes モデルを(13.12節で述べたように配当を調整して)用いれば、ストック・オプションの評価が得られる。Black-Scholes の公式からオプション1単位の価値は6.31ドルとなるので、損益計算書に計上される費用は $1,000,000 \times 6.31$ 、すなわち6,310,000ドルになる。

## 二項ツリー・アプローチ

従業員ストック・オプションを評価するもっと高度なアプローチは、第11章で説明したような二項ツリーを作成し、(a)オプションの権利が確定しているかどうか、(b)従業員が退職する確率、(c)従業員がオプションを行使する確率を考慮して、ツリーに沿った引き戻し計算を行う方法である。ツリーの各ノードでオプションの権利が確定しているかどうかは、ストック・オプションの条項から判断できる。従業員の退職によってオプションが早期行使または没収される確率は、従業員の離職率に関する過去データから推定される。ツリーの各ノードで従業員がオプションを行使する確率の推定はもっと困難である。明らかに、この確率は株価の行使価格に対する比が増加すると増加し、オプションの残存期間が減少するとともに増加する。十分な過去データがあれば、少なくとも近似的には、行使確率をこれら2変数の関数として推定することは可能である。

### 【例14.2】

ある企業が3年後に権利が確定する満期8年のストック・オプション

を付与するとする。株価と行使価格はともに40ドルである。株価のボラティリティは35%，無リスク金利は5%で、株式に配当はない。このオプションの評価に用いる4期間ツリーを図14.1に示す（このツリーは例示目的のものであり、実際にはもっと多期間のツリーが用いられる）。いまの場合、 $\sigma=0.3$ 、 $\Delta t=2$ 、 $r=0.05$ となるので、第11章の記号を用いると、 $a=e^{0.05\times 2}=1.1052$ 、 $u=e^{0.3\sqrt{2}}=1.5285$ 、 $d=1/u=0.6543$ 、 $p=(a-d)/(u-d)=0.5158$ となる。したがって、「上の枝」にいく確率は0.5158、「下の枝」にいく確率は0.4842になる。ノードD、G、およびHでオプションが行使される確率（それまでに早期行使されていないという条件のもとでの確率）をそれぞれ40%，80%，および30%と仮定する。また、各期間に従業員が退職する確率を5%とする（これは従業員の離職率が年率約2.5%であることに相当している）。さらに、オプションの価値を計算するときは、従業員は常に各期間の終わりに退職すると仮定する。オプションの権利確定前、あるいはオプションがアウト・オブ・ザ・マネーのときに従業員が退職すると、オプションは消滅する。それ以外のときに退職すると、オプションは即時に行使されなければならぬ。

最終ノードにおけるオプションの価値は本源的価値に等しい。6年後のノードについて考える。ノードIとJは簡単である。それらのノードから分岐するノードでのオプションの価値はすべてゼロなので、それらのノードでのオプションの価値もゼロである。ノードHでは、従業員がオプション行使する確率は30%である。オプションが早期行使されなかった場合のうち、5%は退職に伴って行使されることになる。したがって、行使確率は全体で $0.3+0.7\times 0.05=0.335$ になる。オプションが行使された場合の価値は $61.14-40=21.14$ である。オプションが行使されなかった場合の価値は、

$$e^{-0.05\times 2}(0.5158\times 53.45 + 0.4842\times 0) = 24.95$$

である。したがって、ノードHにおけるオプションの価値は、

$$0.335\times 21.14 + 0.665\times 24.95 = 23.67$$

になる。同様に、ノード G におけるオプションの価値は、

$$0.81 \times 102.83 + 0.19 \times 106.64 = 103.56$$

になる。

次に 4 年後のノードについて考える。ノード F ではオプションの価値は明らかにゼロである。ノード E では従業員の退職によってオプションが消滅する確率は 5 % であり、95% の確率でオプションは保有し続けられる。その場合におけるオプションの価値は、

$$e^{-0.05 \times 2} (0.5158 \times 23.67 + 0.4842 \times 0) = 11.05$$

である。したがって、オプションの価値は  $0.95 \times 11.05 = 10.49$  になる。

ノード D では 0.43 の確率でオプションは行使され、0.57 の確率でオプションは保有し続けられる。したがって、オプションの価値は 56.44 になる。

最後に、はじめのノードと 2 年後のノードについて考える。これらのノードではオプションの権利は確定していない。したがって、5 % の確率でオプションは消滅し、95% の確率でオプションはさらに 2 年間保有されることになる。この結果、オプションの価値は図 14.1 のようになり、はじめのノードにおけるオプションの価値は 14.97 になる（通常のオプションを同じツリーを用いて評価すると、その価値は 17.98 になる）。

図 14.1 例 14.2 の従業員ストック・オプションの評価

---

各ノード：

上段 = 原資産価格

下段 = オプション価格

太字の数字は早期行使の結果

行使価格 = 40

時間ステップごとの割引率 = 0.9048

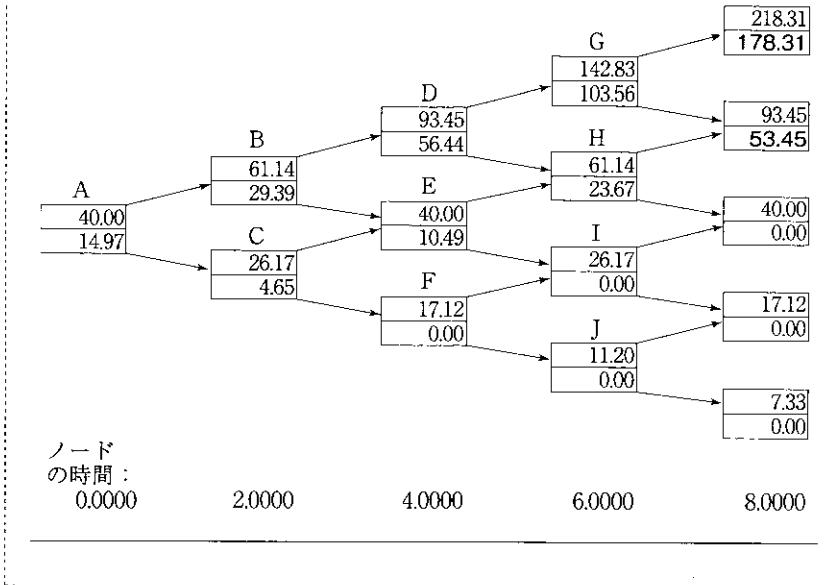
時間ステップ、 $dt = 2.0000$  年、730.00 日

時間ステップごとの成長係数、 $a = 1.1052$

上昇確率、 $p = 0.5158$

上昇幅、 $u = 1.5285$

下落幅、 $d = 0.6543$



### 行使乗数アプローチ

ストック・オプションの権利確定後、株価の行使価格に対する比があるレベルを超えると従業員はすぐにオプションを行使するとする、単純なモデルが Hull と White によって提案されている<sup>(注8)</sup>。行使を判断する株価の行使価格に対する比は「行使乗数 (exercise multiple)」と呼ばれる。このアプローチに従えば、オプションは二項ツリーや三項ツリーを用いて評価できる。その際には、26.6節で説明するように、オプションが行使される株価上にノードが乗るよう二項ツリーまたは三項ツリーを構築することが重要である。たとえば、行使価格を30ドルとし、株価の行使価格に対する比が1.5のときに従業員がオプションを行使すると仮定すると、株価が45ドルのレベルにノードが乗るようツリーを構築すべきである。ツリーを用いた評価は例14.2と同様で、従業員の退職確率を考慮して計算を行う<sup>(注9)</sup>。行使時点

(注8) J. Hull and A. White, "How to value employee stock options," *Financial Analysts Journal*, 60, 1 (January/February 2004) :3-9 を参照されたい。

における株価の行使価格に対する比の平均値を過去データから計算して、それを行使乗数の推定値とする（満期時と退職時における行使は平均値の計算に含めない）。予想残存期間は株価の過去の経路にかなり依存しているので、その推計は困難であるが、行使乗数の推計はそれに比べて容易である。

## 市場アプローチ

従業員ストック・オプションを評価する方法の一つは、市場がそれに対してもいくら払うかをみるとことである。Cisco は2006年に最初にこれを試した企業である。Cisco は機関投資家に対して従業員ストック・オプションとまったく同じ条件のオプションを売却することを提案した。オプションを購入する投資家層が十分広くなかったという理由で、この方法は SEC に認められなかった。

Zions Bancorp は別の方法を提案した。それは、従業員が実際に行使して得た利益に連動するペイオフをもつ証券を売却することである。たとえば、従業員に付与されるオプションの行使価格が40ドルで、株価が60ドルになつたちょうど 5 年後に従業員の 1 % がオプションを使用し、株価が65ドルになつたちょうど 6 年後に従業員の 2 % がオプションを使用するなどがわかつたと仮定する。そうすると、投資家が保有する当該証券の 1 % が 5 年後に 20 ドルのペイオフを与え、2 % が 6 年後に 25 ドルのペイオフを与えるなどとなる。

Zions Bancorp は自社の従業員に付与するストック・オプションに対して、このアイデアを試してみた。その証券はダッチ・オークション方式で売り出された。この方式では、オークションに参加する個人または企業は、オプションの購入希望価格と購入希望数量を入札する。落札価格は、その価格またはそれより高い価格での購入希望数量の合計が売り出されるオプションの数量に等しくなるか、それを上回るようなビッドのうち、最も高いもので決まる。落札価格より高い価格で入札した買手は購入希望全数量を落札価格

---

(注 9) このアプローチを実装したソフトウェアが [www.rotman.utoronto.ca/~hull](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull) にある。

で購入し、落札価格で入札した買手は残りの数量から割当てを受ける。2007年10月、Zions Bancorp はその市場アプローチが SEC に承認されたと発表した。そのアプローチが広く普及するかどうかは、現在関係者に見守られている。

## 希薄化

従業員ストック・オプションが行使されると企業は新株を発行し、その新株は従業員にその時の株価より低い価格で売却されることになる。そのため、既存株主にとっては株式の希薄化が生じる。この希薄化はオプションが行使された時点に発生すると仮定するのが自然であるようと思われる。しかし、これは正しくない。13.10節で説明したように、ストック・オプションの付与が市場に最初に公表された時点で、希薄化は株価に織り込まれる。オプションの起こりうる行使が予想され、直ちに株価に反映されることになる。この点については、ビジネス寸見13.3で例を用いてわかりやすく説明している。

ストック・オプションの付与が発表されると、希薄化は株価にすぐに織り込まれる。オプションの評価にはこの織り込みずみの株価が用いられるため、希薄化を考慮したオプション価格の調整は必要ではない。多くの場合には、企業による通常のストック・オプションの付与は事前に市場で予想されており、公表前に予測される希薄化の影響は株式の市場価格に織り込まれている。

市場が驚くようなストック・オプションの付与を企業が計画している場合には、例13.7で説明したような方法でそのコストを見積もることができる。このコストは、従業員の通常の給料を低く抑えたまま従業員の離職率を低くできることによる利得と比較されることがある。

## 14.5 バックデーティング・スキャンダル

従業員ストック・オプションに関する説明を、バックデーティング・ス

キャンダルに触れずに終わるわけにはいかないだろう。バックデーティングとは、文書の日付を現在よりさかのぼった日付にする慣行である。

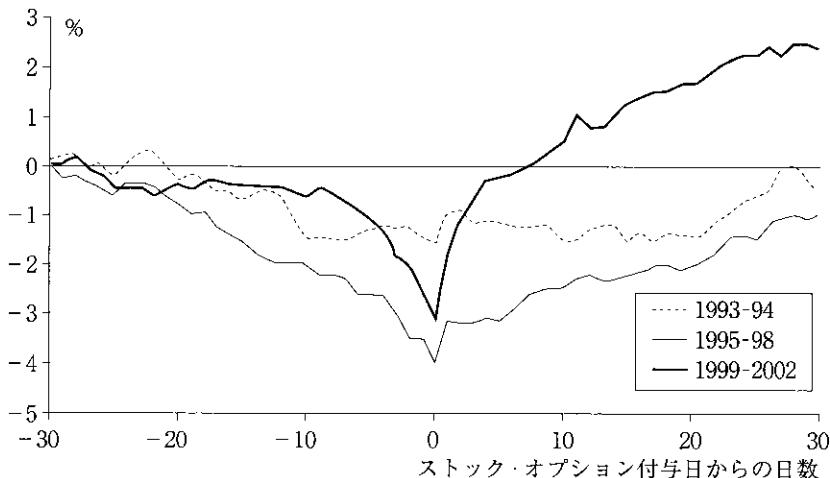
ある企業が、株価が50ドルの4月30日に、従業員に対してアット・ザ・マネーのストック・オプションの付与を決めたとする。4月3日の株価が42ドルだったとすると、オプションを4月3日に付与していたことにして、行使価格として42ドルを用意したいと思う場合もある。ストック・オプションの付与を決めた4月30日に8ドルだけイン・ザ・マネーのオプションを付与したとその企業が報告すれば、これは合法的な行為である。しかし、アット・ザ・マネーのストック・オプションを4月3日に付与したとその企業が報告すれば、これは違法行為になる。行使価格42ドルのストック・オプションの4月3日における価値は、4月30日における価値よりもずっと低い。そのため、ストック・オプションを4月3日に付与したと報告すると、ストック・オプション付与の決定に伴う本当の費用に関して、株主を欺くことになるからである。

バックデーティングはどのくらい行われているのだろうか。この疑問に答えるために、企業が報告したストック・オプションの付与日における企業の株価が低いという傾向が平均的にみられるかどうかについて、研究がなされてきた。Yermackによる初期の研究は、株価は報告された付与日後に上昇する傾向があることを示している(注10)。LieはYermackの研究を拡張して、株価は報告された付与日前に下落する傾向もあることを示した(注11)。さらに、付与日前後の株価のパターンは後になるほど顕著になることをLieは示した。その結果は図14.2(次頁)にまとめられており、1993~94, 1995~98, 1999~2002の各期間において付与日前後に異常な平均リターンがみられる(それらの異常なリターンは、市場ポートフォリオのリターンと株式のベータに関する調整をして求められたりターンである)。標準的な統計学の検定結果

(注10) D. Yermack, "Good timing: CEO stock option awards and company news announcements," *Journal of Finance*, 52 (1997) : 449-76 を参照。

(注11) E. Lie, "On the timing of CEO stock option awards," *Management Science*, 51, 5 (May 2005) : 802-12 を参照。

図14.2 バックデーティングの証拠を与える Erik Lie の結果



(出典) [www.biz.uiowa.edu/faculty/elie/backdating.htm](http://www.biz.uiowa.edu/faculty/elie/backdating.htm)

から、図14.2のようなパターンが偶然観測されることはほとんどありえない、ということがわかっている。この結果を受けて、2002年に学者と規制当局はともに、バックデーティングは常態化していたと結論づけた。2002年8月に、SECは公開企業に対してストック・オプションを付与したときは2営業日以内に報告することを要請した。その結果、ストック・オプション付与日前後の異常なリターンが、特にこの要請に応じた企業について、劇的に減少したことを Heron と Lie は示した(注12)。図14.2のパターンは経営者が単に悪いニュースの後またはよいニュースの前に付与日を選んだということで説明できる、という主張がなされるかもしれないが、Heron と Lie の研究はそうでないということの非常に興味深い根拠を示している。

米国でストック・オプションの付与日に関する不正を行っていた企業の数は、見積もりによって大きく異なる。数十、もしかしたら数百の企業が不正

(注12) R. Heron and E. Lie, "Does backdating explain the stock price pattern around executive stock option grants," *Journal of Financial Economics*, 83, 2 (February 2007) : 271-95 を参照。

を行っていたと思われている。多くの企業は、1カ月までのバックデーティングは問題ないと考えていたようである。バックデーティングを行っていたことが明るみに出たとき、辞任した最高経営責任者もいる。2007年8月に、Brocade Communications Systems の Gregory Reyes は、ストック・オプションのバックデーティングに関して裁判で有罪判決を受けた最初の最高経営責任者になった。伝えられるところでは、Reyes 氏は人事部門の従業員に「捕まらなければ違法ではない」といったそうである。2008年1月に、Reyes 氏に対して懲役21カ月、罰金1,500万ドルが科せられた。

バックデーティングにかかわった企業は過去の財務諸表の修正を行わなければならず、バックデーティングの結果不利益を被った株主から集団訴訟を受けることになる。たとえば、2007年12月に McAfee は1995年から2005年の間の所得に関して13,740万ドルの修正を発表した。そして、McAfee は2006年に訴訟費用として1,380万ドルを積み立てている。

## 要約

経営者に対する報酬は過去20年間に急速に増加した。その増加のほとんどは経営者に付与されたストック・オプションの行使によるものである。2005年までは、アット・ザ・マネーのストック・オプションの付与は報酬の形態として非常に魅力的であった。ストック・オプションの付与は損益計算書に影響を与える、しかも従業員にとっては非常に価値のあるものであった。現在の会計基準ではストック・オプションの費用計上が求められており、その人気が衰えるかどうかが見守られている。

従業員ストック・オプションの評価には多くの異なるアプローチがある。一般的なアプローチは、予想残存期間をオプションの満期にしてBlack-Scholes モデルを使うというものである。別のアプローチとして、株価の行使価格に対する比があるバリアに到達するや否やオプションは行使されると

仮定して、オプションを評価する方法がある。それら以外のアプローチとして、行使確率、株価の行使価格に対する比、およびオプション満期までの時間の間にある関係について推定を試み、その関係を考慮して二項ツリーで評価する方法がある。

ストック・オプションをアット・ザ・マネーで付与したと主張しつつ行使価格を下げるために、ストック・オプション付与日のバックデーティングを不正に行っている企業が多いという疑惑は、学術的な研究によって疑い以上のものであることが裏付けられた。2007年にこの不正行為に対する初めての起訴が行われた。

## 参考文献

- Carpenter, J. "The Exercise and Valuation of Executive Stock Options," *Journal of Financial Economics*, 48, 2 (May) :127-58.
- Core, J.E., and W.R. Guay. "Stock Option Plans for Non-Executive Employees," *Journal of Financial Economics*, 61, 2 (2001) :253-87.
- Heron, R., and E. Lie. "Does Backdating Explain the Stock Price Pattern around Executive Stock Option Grants," *Journal of Financial Economics*, 83, 2 (February 2007) :271-95.
- Huddart, S., and M. Lang. "Employee Stock Option Exercises: An Empirical Analysis," *Journal of Accounting and Economics*, 21, 1 (February) :5-43.
- Hull, J., and A. White. "How to Value Employee Stock Options," *Financial Analysts Journal*, 60, 1 (January/February 2004) :3-9.
- Lie, E. "On the Timing of CEO Stock Option Awards," *Management Science*, 51, 5 (May 2005) :802-12.
- Rubinstein, M. "On the Accounting Valuation of Employee Stock Options," *Journal of Derivatives*, 3, 1 (Fall 1996) :8-24.
- Yermack, D. "Good Timing: CEO Stock Option Awards and Company News Announcements," *Journal of Finance*, 52 (1997) :449-76.

## 章末問題

- 14.1** 2005年より以前は、企業にとってアット・ザ・マネーのストック・オプションを付与することは魅力的であった。その理由を述べよ。  
また、2005年以降、それはどのように変わったか。
- 14.2** 典型的な従業員ストック・オプションと取引所あるいは店頭市場で取引されているアメリカン・コール・オプションとの主な違いを述べよ。
- 14.3** 配当のない株式に対する従業員ストック・オプションが満期前に行使されることはよくあるが、配当のない株式の上場コール・オプションは決して期限前行使されない。その理由を説明せよ。
- 14.4** 「ストック・オプションの付与は、経営者が株主の最大利益のために行動することを動機づけるので、よいことである」。これはどういう観点から述べられた意見であるかを議論せよ。
- 14.5** 「経営者に対するストック・オプションの付与は、プロのフットボール選手が自分のゲームにお金を賭けるのを許可するようなものである」。これはどういう観点から述べられた意見であるかを議論せよ。
- 14.6** 2002年より以前は、米国ではいくつかの企業はストック・オプションの付与日を実際よりもさかのぼった日付にしていた。その理由を説明せよ。また、2002年にこの状況はどう変わったか説明せよ。
- 14.7** 各四半期末にストック・オプションを再評価しなければならなくなつた場合に、バックデーティングによる利得がどのように減じるかを説明せよ。
- 14.8** 図14.2のグラフはどのような分析をしてつくられているかを説明せよ。
- 14.9** 5月31日におけるある企業の株価は70ドル、発行済株式数は1,000,000株である。その企業の経営者が行使価格50ドルのストック・オプションを100,000株分行使したとする。これが株価に与える影響について説明せよ。

**14.10** ある企業の財務諸表に次のことが付記されている。「経営者に付与したストック・オプションの満期は10年、権利確定期間は4年である。今年度付与したストック・オプションの価値は、予想残存期間を5年、ボラティリティを20%として、Black-Scholesモデルを用いて評価した」。この付記の意味を説明せよ。また、その企業が用いている評価方法について議論せよ。

**14.11** オプション10,000単位に対するダッチ・オークションで入札されたビッドは以下のとおりである。

- A : 30ドル 3,000単位
- B : 33ドル 2,500単位
- C : 29ドル 5,000単位
- D : 40ドル 1,000単位
- E : 22ドル 8,000単位
- F : 35ドル 6,000単位

このオークションの結果はどのようになるか。だれがいくらで何単位落札することになるか。

**14.12** ある企業が500,000株分のストック・オプションを経営者に付与した。付与日の株価と行使価格はともに40ドルで、満期は12年、権利確定期間は4年である。この企業は、予想残存期間を5年、ボラティリティを年率30%としてオプションを評価することにした。この企業は配当を支払っておらず、無リスク金利は4%である。この企業が損益計算書に報告するストック・オプションの費用はいくらになるか。

**14.13** ある企業の最高財務責任者は次のように語った。「ストック・オプションの会計処理はばかげている。昨年株価が30ドルのときに従業員に対してアット・ザ・マネーのストック・オプションを10,000,000株分付与した。付与日における1株当たりのオプションの価値を評価すると5ドルであった。年度末に株価は4ドルに下落したにもかかわらず、損益計算書には5,000万ドルの費用が計上された

ままである」。この意見について議論せよ。

## 宿題

- 14.14** 例14.2において、従業員ストック・オプションに対するリスク中立確率のもとでの予想残存期間を求めよ。また、求めた予想残存期間を用いて、Black-Scholes モデルを使ってストック・オプションの価値を計算せよ。
- 14.15** ある企業が2,000,000株分のストック・オプションを従業員に付与した。付与日の株価と行使価格はともに60ドルで、満期は8年、権利確定期間は2年である。この企業は、予想残存期間を6年、ボラティリティを年率22%としてオプションを評価することにした。株式の配当は年1ドルで、中間配当があり、無リスク金利は5%である。この企業が損益計算書に報告するストック・オプションの費用はいくらになるか。
- 14.16** ある企業が1,000,000株分のストック・オプションを従業員に付与した。付与日の株価と行使価格はともに20ドルで、満期は10年、権利確定期間は3年である。株価のボラティリティを30%，無リスク金利を5%とし、この企業は配当を支払っていないとする。このストック・オプションの価値を、以下のことを仮定して、4期間ツリーを用いて評価せよ。ツリーの各期間の終わりに従業員が退職する確率は4%とする。各ノードにおいて、まだ行使されていないオプションが、(a)オプションの権利が確定しており、(b)オプションがイン・ザ・マネーのときに自発的に早期行使される確率は、

$$1 - \exp(-\alpha(S/K - 1)/T)$$

であると仮定する。ここでは  $S$  は株価、 $K$  は行使価格、 $T$  は満期までの時間、 $\alpha=2$  である。

## 第15章

# 株価指数オプションと 通貨オプション



株価指数オプションと通貨オプションについては第8章すでに触れたが、本章ではそれらについてもっと詳しく論じる。それらの商品性や使われ方について説明するとともに、残り半分を使って、第13章で得られたオプションの価値評価に関する結果を、配当利回りが既知の株式に対するヨーロピアン・オプションに拡張する。そのうえで、株価指数と通貨が配当利回りが既知の株式に類似した資産であることを示す。それによって、配当利回りが既知の株券オプションに対して得られた結果が、それらのオプションの評価にも適用できるようになる。

### 15.1 株価指数オプション

いくつかの取引所で株価指数オプションが取引されている。指数には、市

場全体の動きを反映しているものもあれば、特定の業種（セクター）（たとえば、コンピュータ・テクノロジー関連、石油・ガス関連、運輸や通信関連等）のパフォーマンスに基づくものもある。シカゴ・オプション取引所（CBOE）で取引されている指数オプションには、S&P100のアメリカン・オプションとヨーロピアン・オプション（それぞれOEXとXEO）、S&P500のヨーロピアン・オプション（SPX）、ダウ平均のヨーロピアン・オプション（DJKX）、Nasdaq100のヨーロピアン・オプション（NDX）がある。CBOEでは、個別株式のLEAPSとフレックス・オプションが取引されていることを第8章で述べた。指数に対するこれらのオプションも取引されている。

指数オプションの取引単位は指数の100倍である（指数オプションで使われるダウ平均は通常のダウ平均の0.01倍であることに注意）。指数オプションは現金で決済される。したがって、オプションが行使されると、コール・オプションの保有者は $(S - K) \times 100$ の現金を受け取り、売手は同額の現金を支払う。ここで $S$ は行使された日の引け時点での指数の値で、 $K$ は行使価格である。同様に、プット・オプションの保有者は $(K - S) \times 100$ の現金を受け取り、売手は同額の現金を支払う。

## ポートフォリオ・インシュアランス

ポートフォリオ・マネジャーは、ダウンサイド・リスクを限定するために株価指数オプションを用いることがある。指数の現在値を $S_0$ とする。ベータ値が1.0のよく分散されたポートフォリオを担当しているマネジャーについて考える。ベータ値が1.0ということは、ポートフォリオの収益率と指数の収益率とはおおむね同じであることを意味している。ポートフォリオの配当利回りと指数の配当利回りが同じであると仮定すると、ポートフォリオの価値の変化率と指数の値の変化率はおおむね一致することが期待される。S&P500オプションの取引単位は指数の100倍である。したがって、ポートフォリオ $100S_0$ ドルごとに行使価格 $K$ のプット・オプションを1単位購入すれば、指数が $K$ よりも下落する可能性に対してポートフォリオの価値を守ることができる。たとえば、マネジャーのポートフォリオの価値を500,000

ドル、指標の値を1,000としよう。ポートフォリオは指標の500倍の価値をもっている。行使価格900の3カ月物プット・オプションを5単位購入することで、マネジャーはポートフォリオの価値が3カ月後に450,000ドル以下になることに対して保険をかけることができる。

保険がどのように働くかを例示するために、指標が3カ月後に880に下落する場合を考えよう。ポートフォリオの価値は約440,000ドルになる。オプションのペイオフは $5 \times (900 - 880) \times 100 = 10,000$ ドルとなるので、ポートフォリオの総価値は保証された450,000ドルになる。

### ポートフォリオのベータ値が1.0でない場合

ポートフォリオのベータ ( $\beta$ ) が1.0でない場合は、ポートフォリオ $100S_0$ ドルごとにベータ単位のプット・オプションを購入しなければならない。ここで  $S_0$  は指標の現在値である。上で考えた500,000ドルのポートフォリオのベータ値が1.0ではなく2.0の場合を考えよう。前と同様に、S&P 500指標の現在値を1,000とする。このとき、必要となるプット・オプションの単位数は前の場合の5単位ではなく、

$$2.0 \times \frac{500,000}{1,000 \times 100} = 10$$

になる。

適切な行使価格を計算するために、資本資産価格モデル (CAPM) を用いる。無リスク金利は12%，指標とポートフォリオの配当利回りはともに4%，ポートフォリオの価値が3カ月後に450,000ドル以下になることに対して保険をかけたいとする。資本資産価格モデルによると、ポートフォリオの無リスク金利に対する期待超過収益率は、指標ポートフォリオの無リスク金利に対する超過収益率のベータ倍に等しい。このモデルを用いると、3カ月後の異なる指標の値に対してポートフォリオの期待価値を計算することができる。3カ月後の指標の値が1,040となる場合の計算を表15.1に示す。この場合には、3カ月後のポートフォリオの期待価値は530,000ドルになる。同様の計算を3カ月後の指標のその他の値に対して行った結果を、表15.2に示

表15.1 3カ月後の指標の値が1,040で $\beta=2.0$ の場合の  
ポートフォリオの期待価値計算

---

|   |
|---|
| 3カ月後の指標の値：1,040                                     |
| 指標の変化から得られるリターン：3カ月当り $40/1,000$ , すなわち 4 %         |
| 指標から得られる配当：3カ月当り $0.25 \times 4 = 1$ %              |
| 指標から得られる総リターン：3カ月当り $4 + 1 = 5$ %                   |
| 無リスク金利：3カ月当り $0.25 \times 12 = 3$ %                 |
| 指標の無リスク金利に対する超過リターン：3カ月当り $5 - 3 = 2$ %             |
| ポートフォリオの無リスク金利に対する超過リターン：3カ月当り $2 \times 2 = 4$ %   |
| ポートフォリオから得られるリターン：3カ月当り $3 + 4 = 7$ %               |
| ポートフォリオから得られる配当：3カ月当り $0.25 \times 4 = 1$ %         |
| ポートフォリオの価値の増加：3カ月当り $7 - 1 = 6$ %                   |
| ポートフォリオの価値： $500,000$ ドル $\times 1.06 = 530,000$ ドル |

---

表15.2  $\beta=2.0$ のときの指標の値とポートフォリオの価値  
の関係

---

| 3カ月後の指標の値 | 3カ月後のポートフォリオの価値 |
|-----------|-----------------|
| 1,080     | 570,000         |
| 1,040     | 530,000         |
| 1,000     | 490,000         |
| 960       | 450,000         |
| 920       | 410,000         |
| 880       | 370,000         |

---

す。購入すべきオプションの行使価格は、ポートフォリオの保証レベルに対応する指標のレベルである。いまの場合は保証レベルを450,000ドルとしているので、プット・オプション10単位の購入すべき行使価格は960ドルである(注1)。

期待する結果が得られていることを例示するために、指標の値が880に下

(注1) 次の3カ月間で500,000ドルの約1%，すなわち5,000ドルが配当として得られる。配当も含めた価値として保証レベルを450,000ドルとしたいのであれば、450,000ドルではなく445,000ドルに対応する行使価格を選択すればよい。その場合は955ドルになる。

落した場合にどうなるかを考えてみよう。表15.2に示したように、ポートフォリオの価値は約370,000ドルになる。プット・オプションのペイオフは $(960-880) \times 10 \times 100 = 80,000$ ドルになり、これはまさしく、ポートフォリオ・マネジャーのポジションの総価値を370,000ドルから要求される水準の450,000ドルまで上げるのに必要な金額である。

本章の例からわかるように、ポートフォリオのベータが大きくなるとヘッジコストが増える。その理由は二つある。必要となるプット・オプションの単位数が増えることと、オプションの行使価格が高くなることである。

## 15.2 通貨オプション

通貨オプションは主として店頭市場で取引されている。店頭市場の長所は、行使価格、満期、その他の条件を企業の財務担当者のニーズに合わせて決めた大きな取引が可能な点である。米国のフィラデルフィア証券取引所ではヨーロピアンとアメリカンの通貨オプションが取引されているが、取引所市場は店頭市場に比べて規模がきわめて小さい。

ヨーロピアン・コール・オプションの例として、オプション保有者が1ユーロ当り1.2000米ドルで100万ユーロを購入する権利をもつ契約を考える。オプション満期日における実際の為替レートが1.2500になったとすると、ペイオフは $1,000,000 \times (1.2500 - 1.2000) = 50,000$ ドルになる。同様に、ヨーロピアン・プット・オプションの例として、オプション保有者が1豪ドル当り0.7000米ドルで1,000万豪ドルを売却する権利をもつ契約を考える。オプション満期日における実際の為替レートが0.6700になったとすると、ペイオフは $10,000,000 \times (0.7000 - 0.6700) = 300,000$ ドルになる。

外国為替リスクをヘッジしたいと思っている企業にとって、通貨オプションはフォワード契約と並ぶヘッジ・ツールである。将来のある日に英ポンドを受け取る予定の企業は、その日に満期を迎える英ポンドのプット・オプションを購入することにより、そのリスクをヘッジできる。このヘッジ戦略では、英ポンドの価値が行使価格未満にならないという保証を受けながら、

為替が有利に動いた場合にはその恩恵も享受できる。同様に、将来のある日に英ポンドを支払う予定の企業は、その日に満期を迎える英ポンドのコール・オプションを購入することにより、そのリスクをヘッジできる。このヘッジ戦略では、英ポンドの購入コストがある価格を超えないという保証を受けながら、為替が有利に動いた場合にはその恩恵も享受できる。フォワード契約が将来の為替レートを固定する取引であるのに対し、オプションは一種の保険的な取引である。保険は無料ではない。フォワード契約を結ぶのにコストはかかるないのに対し、オプション取引を行うにはプレミアムを前払いする必要がある。

## レンジ・フォワード

レンジ・フォワード契約 (range forward contract) は外国為替リスクをヘッジする標準的なフォワード契約の変形である。3カ月後に100万ポンドを受け取る米国の企業を考えよう。3カ月物フォワード為替レートが1ポンド当り1.9200ドルとする。その企業は3カ月後に100万ポンドを売却するフォワード契約を結べば、ドルでの受取りをこの為替レートで固定することができる。すなわち、100万ポンドに対するドルでの受取額は1,920,000ドルに確定できる。

別のヘッジとして、行使価格  $K_1$  のヨーロピアン・プット・オプションを購入して、行使価格  $K_2$  のヨーロピアン・コール・オプションを売却する方法がある。ここで、 $K_1 < 1.9200 < K_2$  である。これはショート・レンジ・フォワード契約として知られている。そのペイオフは図15.1(a) (次頁) のようになる。二つのオプションは100万ポンドに対するオプションである。3カ月後の為替レートが  $K_1$  を下回った場合には、プット・オプションを行使して、企業は為替レート  $K_1$  で100万ポンドを売却することができる。為替レートが  $K_1$  と  $K_2$  の間になった場合には、どちらのオプションも行使されず、企業はその時の為替レートで100万ポンドを売却することになる。為替レートが  $K_2$  を上回った場合には、コール・オプションが行使されて、企業は為替レート  $K_2$  で100万ポンドを売却することになる。したがって、100万

ポンドが売却される為替レートは図15.2のようになる。

その企業が3カ月後に100万ポンドを受け取るのではなく支払う場合には、行使価格  $K_1$  のヨーロピアン・プット・オプションを売却し、行使価格  $K_2$  のヨーロピアン・コール・オプションを購入すればよい。これはロング・レンジ・フォワード契約として知られ、そのペイオフは図15.1(b)のようになる。3カ月後の為替レートが  $K_1$  を下回った場合には、プット・オプションが行

図15.1 レンジ・フォワード契約のペイオフ

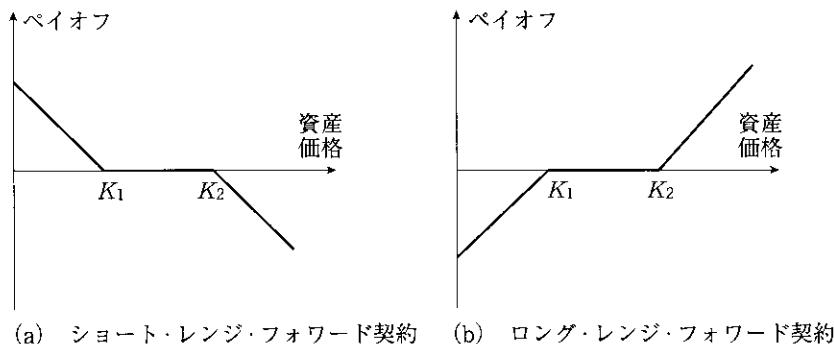
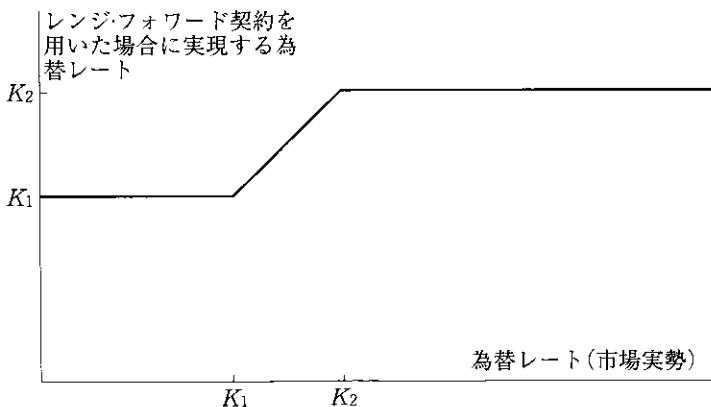


図15.2 レンジ・フォワード契約を用いた場合に実現する為替レート

- (a) 外国通貨の受取りのヘッジにショート・レンジ・フォワード契約を用いた場合、または(b)外国通貨の支払のヘッジにロング・レンジ・フォワード契約を用いた場合



使されて、その結果、企業は為替レート  $K_1$  で必要としている100万ポンドを購入することになる。為替レートが  $K_1$  と  $K_2$  の間になった場合には、どちらのオプションも行使されず、企業はその時の為替レートで100万ポンドを購入することになる。為替レートが  $K_2$  を上回った場合には、コール・オプション行使して、企業は為替レート  $K_2$  で100万ポンドを購入することができる。したがって、100万ポンドを支払う場合の為替レートは前の例で100万ポンド受け取る場合の為替レートと同じになり、図15.2のようになる。

実際の取引では、レンジ・フォワード契約は、プット・オプションの価格とコール・オプションの価格が等しくなるように組まれる。米国と英国の金利をともに 5 % とする。このとき、為替直物レートは（為替フォワード・レートと同じ）1.9200 になる。さらに、為替レートのボラティリティを 14 % とする。このとき、DerivaGem ソフトウェアを用いて計算すると、1 ポンドを売却する行使価格 1.9000 のプット・オプションの価格と 1 ポンドを購入する行使価格 1.9413 のコール・オプションの価格は同じ価格 0.04338 になることがわかる。したがって、いまの仮定のもとでは、 $K_1 = 1.9000$ 、 $K_2 = 1.9413$  とすれば、ゼロコストのレンジ・フォワード契約が組める。

レンジ・フォワード契約のコール・オプションとプット・オプションの行使価格を近づけていくと、レンジ・フォワード契約は通常のフォワード契約になる。ショート・レンジ・フォワード契約はショート・フォワード契約になり、ロング・レンジ・フォワード契約はロング・フォワード契約になる。

### 15.3 配当利回りが既知の株式に対するオプション

本節では、配当のない株式のヨーロピアン・オプションに対する結果を、配当利回りが既知の株式に対するヨーロピアン・オプションにも適用できるように拡張する簡単な規則を紹介する。この結果を用いて、後で株価指數オプションと通貨オプションの評価を行う。

配当は配当落ち日に配当額だけ株価を下落させる。したがって、年率  $q$  の配当利回りの支払は、配当がなかった場合に比べて株価の成長率を  $q$  だ

け低下させる。配当利回り  $q$  の株式の株価が現在の  $S_0$  から時点  $T$  に  $S_T$  になつたとすると、配当がなければ、現在  $S_0$  の株価は時点  $T$  には  $S_T e^{qT}$  になるはずである。あるいは、現在  $S_0 e^{-qT}$  の株価は時点  $T$  には  $S_T$  になるはずであるという言い方もできる。

この議論から、次の二つの場合の時点  $T$  における株価の確率分布は同じであることがわかる。

1. 配当利回りが年率  $q$  で、価格が  $S_0$  から始まる株式
2. 配当がなく、価格が  $S_0 e^{-qT}$  から始まる株式

これより、次の簡単な規則が導かれる。配当利回りが既知で  $q$  に等しい株式に対する残存期間  $T$  のヨーロピアン・オプションの価値を評価するときは、現在の株価を  $S_0$  から  $S_0 e^{-qT}$  に減じ、配当のない株式のオプションとして評価すればよい(注2)。

### オプション価格の下限

この規則の最初の適用例として、配当利回りが  $q$  の株式に対するヨーロピアン・オプションの価格の下限を求める問題について考える。(9.1)式の  $S_0$  に  $S_0 e^{-qT}$  を代入すると、ヨーロピアン・コール・オプションの価格  $c$  の下限は、

$$c \geq \max(S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}, 0) \quad (15.1)$$

で与えられる。この不等式を、次の二つのポートフォリオを考えることによって直接示すこともできる。

ポートフォリオ A：ヨーロピアン・コール・オプション 1 単位と  $K e^{-rT}$  の現金

ポートフォリオ B： $e^{-qT}$  単位の現物株と得られる配当の株式への再投資  
同様に、ヨーロピアン・プット・オプション価格の下限は、(9.2)式で  $S_0$

(注2) この規則は、13.12節で検討した配当額が既知の株式に対するヨーロピアン・オプションの評価方法と同様のものである(13.12節の場合は株価から配当額の現在価値を減じる修正を行うのに対し、いまの場合は配当利回りで株価を割り引く修正を行う)。

を  $S_0 e^{-qT}$  に置き換えることで、

$$p \geq \max(K e^{-rT} - S_0 e^{-qT}, 0) \quad (15.2)$$

と求まる。この不等式を、次のポートフォリオを考えることによって直接示すこともできる。

ポートフォリオ C：ヨーロピアン・プット・オプション 1 単位および  
 $e^{-qT}$  単位の現物株と得られる配当の株式への再投資

ポートフォリオ D :  $K e^{-rT}$  の現金

### プット・コール・パリティ

(9.3) 式で  $S_0$  を  $S_0 e^{-qT}$  に置き換えることで、配当利回りが  $q$  に等しい株式のオプションに対するプット・コール・パリティ

$$c + K e^{-rT} = p + S_0 e^{-qT} \quad (15.3)$$

が得られる。この等式を、次の二つのポートフォリオを考えることによって直接示すこともできる。

ポートフォリオ A : ヨーロピアン・コール・オプション 1 単位と  $K e^{-rT}$  の現金

ポートフォリオ C : ヨーロピアン・プット・オプション 1 単位および  
 $e^{-qT}$  単位の現物株と得られる配当の株式への再投資

二つのポートフォリオは時点  $T$  においてともに  $\max(S_T, K)$  の価値をもつ。したがって現時点における価値も等しくなければならないことから、(15.3) 式のプット・コール・パリティが導かれる。アメリカン・オプションの場合は、プット・コール・パリティの関係は、

$$S_0 e^{-qT} - K \leq C - P \leq S_0 - K e^{-rT}$$

になる（章末問題 15.12 を参照）。

### オプションの価格式

Black-Scholes の公式、すなわち (13.20) 式と (13.21) 式で  $S_0$  を  $S_0 e^{-qT}$  に置き換えると、配当利回りが  $q$  の株式に対するヨーロピアン・コールの価格  $c$  とヨーロピアン・プットの価格  $p$  が、

$$c = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (15.4)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1) \quad (15.5)$$

として得られる。

$$\ln \frac{S_0 e^{-qT}}{K} = \ln \frac{S_0}{K} - qT$$

より、パラメータ  $d_1$  と  $d_2$  は、

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-q-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

で与えられる。これらの結果は Merton によって初めて導出された(注3)。第13章で議論したように、オプションの評価においては、「配当」という言葉は配当落ち日に配当分として株価が下落する額として定義する必要がある。配当利回りがオプション期間中一定でない場合でも、 $q$  をオプション期間での平均年率配当利回りとすれば、(15.4)式と(15.5)式はそのまま成り立つ。

### 微分方程式とリスク中立化法

(15.4)式と(15.5)式をもっと厳密に証明するには、オプションの価格が満たす微分方程式を解くか、リスク中立化法を用いればよい。

13.6節での分析を配当利回り  $q$  を考慮して行うと、微分方程式(13.16)は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (15.6)$$

になる(注4)。(13.16)式と同様に、この式にはリスク選好の影響を受ける変数は含まれていない。したがって、13.7節で説明したように、リスク中立化法を用いることができる。

(注3) R.C. Merton, "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973) : 141-83を参照。

(注4) この証明については著者の Web サイトのテクニカルノート 6 を参照されたい。

リスク中立世界では、この株式の総収益率は  $r$  に等しい。配当として収益率  $q$  の収益が得られるので、この株式の期待成長率は  $r - q$  になるはずである。これより、リスク中立世界での株価過程は、

$$dS = (r - q) S dt + \sigma S dz \quad (15.7)$$

で与えられる。したがって、配当利回りが  $q$  の株式のデリバティブの価値を求めるには、その株式の期待成長率を  $r - q$  として計算したペイオフの期待値を、金利  $r$  で割り引けばよい。株価の期待成長率が  $r - q$  のとき、時点  $T$  における株価の期待値は  $S_0 e^{(r-q)T}$  である。第13章の付録と同様の分析を行うと、リスク中立世界におけるペイオフの期待値は、

$$e^{(r-q)T} S_0 N(d_1) - K N(d_2)$$

になる。ここで  $d_1$  と  $d_2$  は上で定義したものである。金利  $r$  で時間  $T$  だけ割り引くと、(15.4)式が得られる。

## 15.4 ヨーロピアン株価指数オプションの評価

第5章で指標先物を評価する際に、指標は配当利回りが既知の株式として扱えることを説明した。指標オプションの評価も同様に行う。そうすると、(15.1)式と(15.2)式からヨーロピアン指標オプションの価値の下限が得られ、指標オプションのプット・コール・パリティは(15.3)式で表される。また、(15.4)式と(15.5)式をヨーロピアン指標オプションの価格式として用いることができる。アメリカン指標オプションに対しては二項ツリーを用いることができる。すべての式において、 $S_0$  は指標の値、 $\sigma$  は指標のボラティリティ、 $q$  はオプション期間における指標の平均年率配当利回りとする。

### 【例15.1】

S&P500に対する満期2カ月のヨーロピアン・コール・オプションを考える。指標の現在値を930、行使価格を900、無リスク金利を年率8%、指標のボラティリティを年率20%とする。配当利回りは、最初の月は0.2%、次の月は0.3%と予想されている。したがって、 $S_0 = 930$ 、 $K = 900$ 、 $r = 0.08$ 、 $\sigma = 0.20$ 、 $T = 2/12$ となる。オプション期間中の

総配当利回りは $0.2+0.3=0.5\%$ である。これは年率で $3\%$ なので、 $q=0.03$ になる。以上より、

$$d_1 = \frac{\ln(930/900) + (0.08 - 0.03 + 0.2^2/2) \times 2/12}{0.2\sqrt{2/12}} = 0.5444$$

$$d_2 = \frac{\ln(930/900) + (0.08 - 0.03 - 0.2^2/2) \times 2/12}{0.2\sqrt{2/12}} = 0.4628$$

$$N(d_1) = 0.7069, \quad N(d_2) = 0.6782$$

となり、コール・オプションの価格  $c$  は(15.4)式から、

$$c = 930 \times 0.7069 e^{-0.03 \times 2/12} - 900 \times 0.6782 e^{-0.08 \times 2/12} = 51.83$$

となる。したがって、契約 1 単位の価格は 5,183 ドルになる。

$q$  を計算するときは、オプションの満期までに配当落ち日を迎える配当のみを対象にする。米国では、2月、5月、8月、11月の第1週に配当落ち日のある銘柄が多い。したがって、任意の時点における  $q$  の正確な値はオプション期間に依存することになる。外国の指標には、さらにその傾向が強いものもある。たとえば、日本では多くの企業の配当落ち日が同じ日に集中している。

指数の構成銘柄に支払われる配当の（利回りではなく）絶対額が既知であるならば、株価から配当の現在価値を差し引いた値を当初の株価として用いることで、基本的な Black-Scholes の公式をそのまま利用することができる。これは第13章で紹介した配当が既知の株券オプションに対するアプローチである。しかし、指数のすべての構成銘柄に対する配当の予想値を知る必要があるため、構成銘柄が市場全体にわたるような株価指標に対してこのアプローチを実際に適用するのはむずかしいかもしれない。

長期的には、株式の収益率は債券の収益率を確実に上回るという意見を聞くことがある。これが本当であるならば、行使価格を債券ポートフォリオの将来価値に等しくなるように設定した長期のポートフォリオ・インシュアランスには、それほどコストがかからないであろう。しかし、実際にはビジネス寸見15.1で指摘するように、それはかなり高価なものになる。

## ビジネス寸見15.1 「長期的には株式は債券をリターンで上回る」。これを裏付けることができるか？

長期スタンスの投資家は債券ではなく株式を購入すべきである、としばしばいわれる。いま、長期投資としてS&P500連動型エクイティファンドを購入するように、投資家を説得しようとしている米国のファンドマネジャーを考えてみよう。そのマネジャーは、ファンドの購入者に対して少なくとも無リスク債券のリターンを今後10年間保証することを提案したいと考えるであろう。歴史的にも、米国ではどの10年間においても株式は債券のパフォーマンスを上回ってきた。したがって、それを保証することによるファンドマネジャーの持ち出しはあるまいであろう。

実際には、この手の保証は驚くほど高くつく。現時点の株価指数を1,000、指数の配当利回りを年率1%、指数のボラティリティを年率15%、10年物無リスク金利を年率5%とする。債券のパフォーマンスを上回るために、指数の構成銘柄は年率で5%以上を稼がないといけない。配当利回りは年率1%である。したがって、株式のキャピタルゲインとして年率4%が必要である。このことから、10年後の指数の水準は、少なくとも $1,000e^{0.04 \times 10} = 1,492$ でなければならない。

以上のことから、1,000ドルを指数に10年間投資したときのリターンが1,000ドルを債券に10年間投資したときのリターンを上回るというのを保証するということは、10年後に指数を1,492で売却する権利を与えることと等価である。これは指数に対するヨーロピアン・プット・オプションであり、(15.5)式で  $S_0 = 1,000$ ,  $K = 1,492$ ,  $r = 5\%$ ,  $\sigma = 15\%$ ,  $T = 10$ ,  $q = 1\%$  とすればその価値が評価できる。プット・オプションの価値は169.7と求まる。ファンドマネジャーがつけようとしている保証の価値はファンドの約17%になり、ただでつけられる類のものではない。

## フォワード価格

満期  $T$  の指指数フォワード価格を  $F_0$  とすると、(5.3)式より  $F_0 = S_0 e^{(r-\eta)T}$  である。これより、(15.4)式と(15.5)式のヨーロピアン・コールの価格  $c$  とヨーロピアン・プットの価格  $p$  は、

$$c = F_0 e^{-rT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad (15.8)$$

$$p = K e^{-rT} N(-d_2) - F_0 e^{-rT} N(-d_1) \quad (15.9)$$

と書ける。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma \sqrt{T}}$$

である。(15.3)式のプット・コール・パリティは、

$$c + K e^{-rT} = p + F_0 e^{-rT}$$

あるいは、

$$F_0 = K + (c - p) e^{rT} \quad (15.10)$$

と書ける。一つの満期日に対する同一行使価格のプットとコールのペアが活発に取引されるのは、取引所市場ではまれなことではない。そのような場合には、この式からその満期日の指指数フォワード価格が推定できる。多くの異なる満期日の指指数フォワード価格が得られると、フォワード価格の期間構造が推定でき、(15.8)式と(15.9)式を用いて他のオプションの評価が行えるようになる。この方法の利点は、指指数の配当利回りを明示的に推定しなくてすむことである。

## インプライド配当利回り

配当利回りの推定値が必要となる場合（たとえば、アメリカン・オプションを評価したい場合）は、行使価格と満期が同じコールとプットを用いて見積ることもできる。(15.3)式より、

$$q = -\frac{1}{T} \ln \frac{c - p + K e^{-rT}}{S_0}$$

が成り立つ。この式を用いて1組だけの行使価格と満期に対して計算した  $q$  の値は信頼性が低い場合が多い。しかし、コールとプットの多くのペアを用

いて計算した結果を組み合わせると、市場で仮定されている配当利回りがはつきりと得られる。

## 15.5 ヨーロピアン通貨オプションの評価

直物為替レートを  $S_0$  として、通貨オプションの評価を考えよう。正確にいうと、 $S_0$  は外国通貨 1 単位の価値を米ドルで表示したものとする。5.10節で説明したように、外国通貨は配当利回りが既知の株式と類似の資産である。外国通貨の保有者は、外国通貨の無リスク金利  $r_f$  に等しい利回りを受け取る。(15.1)式および(15.2)式で  $q$  を  $r_f$  に置き換えると、ヨーロピアン・コールの価格とヨーロピアン・プットの価格  $p$  に対して、

$$c \geq \max(S_0 e^{-r_f T} - K e^{-r T}, 0)$$

$$p \geq \max(K e^{-r T} - S_0 e^{-r_f T}, 0)$$

という下限が得られる。(15.3)式で  $q$  を  $r_f$  に置き換えると、通貨オプションに対するプット・コール・パリティ

$$c + K e^{-r T} = p + S_0 e^{-r_f T}$$

が得られる。最後に(15.4)式と(15.5)式で  $q$  を  $r_f$  に置き換えると、通貨オプションの価格式式、

$$c = S_0 e^{-r_f T} N(d_1) - K e^{-r T} N(d_2) \quad (15.11)$$

$$p = K e^{-r T} N(-d_2) - S_0 e^{-r_f T} N(-d_1) \quad (15.12)$$

が得られる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f + \sigma^2/2) T}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - r_f - \sigma^2/2) T}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

である。自国金利  $r$  および外国金利  $r_f$  のどちらも満期  $T$  に対する金利である。通貨に対するコール・オプションとプット・オプションには、行使価格  $K$  で通貨 A を売って通貨 B を受け取るプット・オプションは、行使価格  $1/K$  で通貨 B を通貨 A で買うコール・オプションと同一であるという対称

性がある。

【例15.2】

英ポンドに対する満期4カ月のヨーロピアン・コール・オプションを考える。現在の為替レートを1.6000、行使価格を1.6000、米国の無リスク金利を年率8%，英国の無リスク金利を年率11%，オプション価格を4.3セントとする。この場合、 $S_0=1.6$ ,  $K=1.6$ ,  $r=0.08$ ,  $r_f=0.11$ ,  $T=0.3333$ ,  $c=0.043$ である。インプライド・ボラティリティは反復探索で求めることができる。ボラティリティを20%とするとオプション価格は0.0639になり、ボラティリティを10%とすると0.0285になる、等々である。インプライド・ボラティリティは14.1%と求まる。

### 為替フォワード・レートを用いた価格式

外国為替に対するフォワード契約は銀行や他の金融機関の間で盛んに取引されているので、為替フォワード・レートはオプションの評価によく使われている。

(5.9)式から満期  $T$  のフォワード・レート  $F_0$  は、

$$F_0 = S_0 e^{(r - r_f)T}$$

で与えられる。したがって、(15.11)式と(15.12)式は、

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - K N(d_2)] \quad (15.13)$$

$$p = e^{-rT} [K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (15.14)$$

のように簡単になる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

である。これらは(15.8)式および(15.9)式と同じ式である。第16章で説明するように、任意の資産に対するヨーロピアン・オプションは、その資産のフォワード契約または先物契約を用いて(15.13)式および(15.14)式で評価す

ることができる。ただし、フォワード契約または先物契約の満期はオプションの満期と同じでなければならない。

## 15.6 アメリカン・オプション

第11章で説明したように、二項ツリーを用いて指数と通貨に対するアメリカン・オプションを評価することができる。配当のない株式に対するアメリカン・オプションの場合と同様に、上昇幅を決めるパラメータ  $u$  は  $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  に等しくする。ここで  $\sigma$  はボラティリティで、 $\Delta t$  は1期間の長さである。下落幅を決めるパラメータ  $d$  は  $1/u$ 、すなわち  $e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$  に等しくする。配当のない株式に対しては、上昇確率は、

$$p = \frac{a-d}{u-d}$$

で与えられる。ここで  $a = e^{r_d t}$  である。指数および通貨に対するオプションの場合は、 $p$  に対する式は同じであるが、 $a$  の定義は異なるものになる。指数オプションの場合には、

$$a = e^{(r-q)\Delta t}$$

である。ここで  $q$  は指数の配当利回りである。通貨オプションの場合には、

$$a = e^{(r-r_f)\Delta t}$$

である。ここで  $r_f$  は外国の無リスク金利である。11.9節の例11.1には、指數オプションを評価するための2期間ツリーの構築方法が示されている。例11.2には、通貨オプションを評価するための3期間ツリーの構築方法が示されている。第19章では、二項ツリーを用いた指數オプションと通貨オプションの評価例をさらに与える。

アメリカン通貨オプションでは、期限前行使が最適となる場合がある。したがって、アメリカン通貨オプションは条件が同じヨーロピアン通貨オプションより価値が高くなる。一般に、高金利通貨に対するコール・オプションと低金利通貨に対するプット・オプションは期限前行使される可能性が高い。その理由は、高金利通貨の価値の期待値は時間とともに低下し、低金利

通貨の価値の期待値は時間とともに上昇するからである。

## 要 約

取引所で取引される指数オプションは現金で決済される。指数コール・オプションを行使すると、保有者は指数が行使価格を上回っている金額を受け取れる。同様に、指数プット・オプションを行使すると、保有者は行使価格が指数を上回っている金額を受け取れる。指数オプションはポートフォリオ・インシュアランスにも用いられる。ポートフォリオの価値が指数に連動している場合は、指数の値が  $S_0$  のとき、ポートフォリオ  $100S_0$  ドルごとにプット・オプションを 1 単位購入すればよい。ポートフォリオが指数に連動していない場合は、資本資産価格モデルを用いて計算されたポートフォリオのベータを  $\beta$  として、ポートフォリオ  $100S_0$  ドルごとにプット・オプションを  $\beta$  単位購入すればよい。購入するプット・オプションの行使価格は必要とされる保証の水準に応じて決められる。

ほとんどの通貨オプションは店頭市場で取引されており、企業の財務担当者が為替リスクをヘッジするのにも用いられている。たとえば、将来のある時点に英ポンドを受け取ることがわかっている米国企業の財務担当者は、受取時点を満期とする英ポンドに対するプット・オプションを購入することでヘッジを行うことができる。同様に、将来のある時点に英ポンドを支払うことがわかっている米国企業の財務担当者は、支払時点を満期とする英ポンドに対するコール・オプションを購入することでヘッジを行うことができる。通貨オプションを用いてレンジ・フォワード契約を組むこともできる。これは、アップ・サイドのある部分を放棄することでダウン・サイドの保証を得るゼロコストの契約である。

配当のない株式のヨーロピアン・オプションの評価に対する Black-Scholes の公式は、配当利回りが既知の株式に対するヨーロピアン・オプ

ションも評価できるように拡張できる。この拡張は、以下の理由により、株価指数および通貨に対するヨーロピアン・オプションの評価にも用いることができる。

1. 株価指数は配当利回りが既知の株式に類似した資産である。この場合の配当利回りは、指数の構成銘柄に対する配当利回りである。
  2. 外国通貨は配当利回りが既知の株式に類似した資産である。この場合は、外国の無リスク金利が配当利回りに相当する。
- 株価指数および通貨に対するアメリカン・オプションは二項ツリーを用いて評価することができる。

## 参考文献

- Amin, K., and R.A. Jarrow. "Pricing Foreign Currency Options under Stochastic Interest Rates," *Journal of International Money and Finance*, 10 (1991) : 310-29.
- Biger, N., and J.C. Hull. "The Valuation of Currency Options," *Financial Management*, 12 (Spring 1983) : 24-28.
- Bodie, Z. "On the Risk of Stocks in the Long Run," *Financial Analysts Journal*, 51, 3 (1995) : 18-22.
- Garman, M.B., and S.W. Kohlhagen. "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance*, 2 (December 1983) : 231-37.
- Giddy, I.H., and G. Dufey. "Uses and Abuses of Currency Options," *Journal of Applied Corporate Finance*, 8, 3 (1995) : 49-57.
- Grabbe, J.O. "The Pricing of Call and Put Options on Foreign Exchange," *Journal of International Money and Finance*, 2 (December 1983) : 239-53.
- Jorion, P. "Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market," *Journal of Finance* 50, 2 (1995) : 507-28.
- Merton, R.C. "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4 (Spring 1973) : 141-83.

## 章末問題

- 15.1** ポートフォリオの現在の価値は1,000万ドル、ベータは1.0である。また、指標の値は現在800である。行使価格が700の指標プット・オプションを用いてポートフォリオ・インシュアランスを行う方法を説明せよ。
- 15.2** 「配当利回りが既知の株式に対するオプションの評価方法がわかれば、株価指標と通貨に対するオプションの評価方法もわかる」。この主張について説明せよ。
- 15.3** ある株価指標の現在の値を300、この指標の配当利回りを年率3%、無リスク金利を年率8%とする。行使価格が290のとき、この指標に対する6カ月物ヨーロピアン・コール・オプションの価格の下限を求めよ。
- 15.4** ある通貨の価値が現在0.80ドル、ボラティリティが12%である。自国と外国の無リスク金利をそれぞれ6%と8%とする。2期間の二項ツリーを用いて、(a)行使価格が0.79ドルの4カ月物ヨーロピアン・コール・オプションの価値、(b)同じ行使価格の4カ月物アメリカン・コール・オプションの価値を求めよ。
- 15.5** 企業がレンジ・フォワード契約を用いて外為替リスクをヘッジする方法を説明せよ。
- 15.6** 株価指標を250、無リスク金利を年率10%、指標のボラティリティを年率18%、指標の配当利回りを年率3%とする。このとき、指標に対する満期3カ月のアット・ザ・マネー・ヨーロピアン・コール・オプションの価値を求めよ。
- 15.7** ある通貨に対する行使価格が0.50の8カ月物ヨーロピアン・プット・オプションの価格を計算せよ。ただし、現在の為替レートは0.52、為替レートのボラティリティは年率12%、自国の無リスク金利は年率4%、外国の無リスク金利は年率8%とする。
- 15.8** 1単位の通貨Aを行使価格 $K$ で売却して通貨Bを受け取るプ

ト・オプションを(15.12)式で評価した価値は、 $K$  単位の通貨 B を通貨 A で購入する行使価格  $1/K$  のコール・オプションを(15.11)式で評価した価値に等しくなることを示せ。

- 15.9** ある外国通貨の価値は現在1.50ドルである。自国と外国の無リスク金利はそれぞれ5%と9%である。(a)ヨーロピアン、(b)アメリカンの場合に、この通貨に対する行使価格が1.40ドルの6カ月物コール・オプションの価値の下限を求めよ。
- 15.10** ある株価指数が現在250である。この指数の配当利回りは年率4%，無リスク金利は年率6%である。この指数に対する行使価格245の3カ月物ヨーロピアン・コール・オプションの現在価値を10ドルとする。このとき、同じ指数に対する行使価格245の3カ月物ヨーロピアン・プット・オプションの価値はいくらになるか。
- 15.11** ある指数の現在の値を696、ボラティリティを年率30%，無リスク金利を年率7%，指数の配当利回りを年率4%とする。このとき、行使価格700の3カ月物ヨーロピアン・プット・オプションの価値を求めよ。
- 15.12** 配当利回り  $q$  の株式に対する行使価格  $K$ 、満期  $T$  のアメリカン・コール・オプションの価格を  $C$ 、同じ株式に対する行使価格と満期が同じアメリカン・プット・オプションの価格を  $P$  とするとき、

$$S_0 e^{-qT} - K \leq C - P \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

が成り立つことを示せ。ここで  $S_0$  は株価、 $r$  は無リスク金利で、 $r > 0$  である（ヒント：最初の不等式を導くためには、次の二つのポートフォリオの価値を考えよ。

ポートフォリオ A：ヨーロピアン・コール・オプション 1 単位と  $K$   
の現金の無リスク金利での運用

ポートフォリオ B：アメリカン・プット・オプション 1 单位と株式  
 $e^{-qT}$  単位の保有（配当はその株式に再投資）

また、2番目の不等式を導くためには、次の二つのポートフォリオの価値を考えよ。

ポートフォリオ C：アメリカン・コール・オプション 1 単位と  $Ke^{-rt}$   
の現金の無リスク金利での運用

ポートフォリオ D：ヨーロピアン・プット・オプション 1 単位と株式  
1 単位の保有（配当はその株式に再投資）。

- 15.13** フォワード価格と行使価格が同じならば、通貨に対するヨーロピアン・コール・オプションの価格とヨーロピアン・プット・オプションの価格は等しくなることを示せ。
- 15.14** 株価指数のボラティリティは代表的な個別株のボラティリティよりも大きくなるか、それとも小さくなるか。その理由も説明せよ。
- 15.15** ポートフォリオのベータ値が増加すると、ポートフォリオ・インシュアランスのコストは増加するか、それとも減少するか。その理由も説明せよ。
- 15.16** あるポートフォリオの価値が6,000万ドルで、S&P500が1,200とする。ポートフォリオの価値が指数の値に連動するとして、1年後のポートフォリオの価値が5,400万ドルより下落することを防ぐには、どのようなオプションを購入すればよいか。
- 15.17** 問題15.16で、ポートフォリオのベータ値が2.0、無リスク金利が年率5%，配当利回りがポートフォリオと指数のどちらも年率3%の場合を考えよう。1年後のポートフォリオの価値が5,400万ドルより下落することを防ぐには、どのようなオプションを購入すればよいか。
- 15.18** ある指数の現在の値は1,500である。行使価格が1,400の6カ月物ヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションの市場価格をそれぞれ154.00と34.25とし、6カ月物無リスク金利を5%とする。このとき、インプライド配当利回りを求めよ。
- 15.19** トータル・リターン指数とは、あるポートフォリオの配当も含めた収益率を指数化したものである。この指数に対する、(a)フォワード契約、(b)ヨーロピアン・オプションの評価方法を説明せよ。
- 15.20** ヨーロピアン通貨オプションに対するプット・コール・パリティを

示せ。

- 15.21** ユーロ／円に対する通貨オプションは、ドル／ユーロに対する通貨オプションとドル／円に対する通貨オプションの二つのオプションからつくることができるか。その理由も説明せよ。
- 15.22** (15.1)式, (15.2)式, および(15.3)式を, それぞれの式の後に述べられているポートフォリオを考えることによって証明せよ。

## 宿題

- 15.23** 2007年1月12日のダウ平均は12,556, 3月限126コールの価格は2.25ドルであった。DerivaGem ソフトウェアを用いて, このオプションのインプライド・ボラティリティを計算せよ。ただし, 無リスク金利は5.3%, 配当利回りは3%とする。また, オプションの満期日は2007年3月20日である。次に, 3月限126プットの価格を評価せよ。さらに, 求めた価格のインプライド・ボラティリティを求めよ(オプションはダウ平均の100分の1に対するものであることに注意して計算せよ)。
- 15.24** ある株価指数の現在の値を300, ボラティリティを20%, 無リスク金利を8%, 指数の配当利回りを3%とする。このとき, 3期間二項ツリーを用いて, (a)ヨーロピアン, (b)アメリカンのそれぞれの場合について, この指数に対する行使価格が300の6カ月物プット・オプションの価値を求めよ。
- 15.25** カナダドルの直物価格を0.85米ドル, カナダドル／米ドルの為替レートのボラティリティを年率4%とする。また, カナダと米国の無リスク金利をそれぞれ年率4%と5%とする。このとき, 9カ月後に1カナダドルを0.85米ドルで購入するヨーロピアン・コール・オプションの価値を求めよ。プット・コール・パリティを用いて,

9カ月後に1カナダドルを0.85米ドルで売却するヨーロピアン・プット・オプションの価格を求めよ。9カ月後に0.85米ドルを1カナダドルで購入するコール・オプションの価格はいくらか。

- 15.26** ある投信会社が、ファンドマネジャーの給与をファンドのパフォーマンスに連動させると発表した。ファンドに損失が発生すれば給与はゼロになり、ファンドに利益が生じれば利益に比例した給与が支払われるというものである。このファンドマネジャーの給与をオプションとして表せ。また、このような報酬制度のもとでは、ファンドマネジャーはどのような行動をとるよう動機づけられるか。

- 15.27** 通貨Aの通貨Bで表した価格が次の過程に従うとする。

$$dS = (r_B - r_A) S dt + \sigma S dz$$

ここで、 $r_A$ は通貨Aの無リスク金利、 $r_B$ は通貨Bの無リスク金利である。このとき、通貨Bの通貨Aで表した価格はどのような過程に従うか。

- 15.28** 現在、米ドル／ユーロの3カ月物為替フォワード・レートは1.3000、為替レートのボラティリティは15%である。3カ月後に100万ユーロを支払わなければならない米国の企業を考える。ユーロと米ドルの無リスク金利をそれぞれ5%と4%とする。その企業が、低いほうの行使価格が1.2500のレンジ・フォワード契約を取引することにした場合に、次の間に答えよ。

- ゼロコストにするためには、高いほうの行使価格はいくらにすればよいか。
- その企業がとるべきコールとプットのポジションを述べよ。
- ユーロの無リスク金利が変わると、とるべきポジションも変わるか。
- 米ドルの無リスク金利が変わると、とるべきポジションも変わるか。

## 第16章

# 先物オプション

これまで考えてきたオプションは、特定の資産を特定の日に購入または売却する権利を保有者に与えるというものであった。それらのオプションは、行使されるとあらかじめ合意された価格での資産の売却または購入が直ちに行われる所以、現物オプション（option on spot または spot option）と呼ばれている。本章では、先物オプション（option on futures または futures option）について考察する。この契約では、オプションが行使されるとオプションの保有者に先物契約のポジションが発生する。

米商品先物取引委員会は1982年に先物オプション取引を暫定的に認可し、1987年に正式に承認した。それ以来、先物オプション取引は急速に広まった。

本章では、先物オプションの仕組みおよび現物オプションとの違いについて考える。また、二項ツリーおよび株券オプションに対する Black-Scholes-

Merton の公式と同様の価格式を用いた、先物オプションの評価について検討する。さらに、先物オプションと現物オプションとの相対的な価格についても詳しく調べる。

## 16.1 先物オプションの性質

先物オプションは、ある定められた日に、ある定められた先物価格で先物契約を取引する権利であり、義務ではない。もっと正確にいうと、先物コール・オプションはある定められた価格で先物契約を買い付ける権利であり、先物プット・オプションはある定められた価格で先物契約を売り付ける権利である。先物オプションは一般的にアメリカン、すなわち満期日までいつでも行使が可能である。

先物コール・オプションが行使されると、オプション保有者は原資産の先物契約の買いポジションと直近の先物清算価格から行使価格を引いた額の現金を受け取る。先物プット・オプションが行使されると、オプション保有者は原資産の先物契約の売りポジションと行使価格から直近の先物清算価格を引いた額の現金を受け取る。以下の例で示すように、先物コール・オプションの実質的なペイオフは、行使時点の先物価格から行使価格を引いた金額である。先物プット・オプションの実質的なペイオフは、行使価格から行使時点の先物価格を引いた金額である。

### 【例16.1】

今日を 8月15日とし、ある投資家が、行使価格が 1 ポンド当たり 240 セントの 9月限銅先物コール・オプションを 1 単位保有しているとする。先物の取引単位は銅 25,000 ポンドである。9月限先物の現在の価格を 251 セント、8月14日（直近の清算日）の終値を 250 セントとする。このオプションを行使すると、投資家は、

$$25,000 \times (250 - 240) \text{ セント} = 2,500 \text{ ドル}$$

と 9 月に 25,000 ポンドの銅を買う先物契約の買いポジションを受け取ることになる。先物のポジションは直ちに手仕舞うこともできる。そうし

た場合、投資家には2,500ドルの現金に、先物価格の直近清算価格からの変化分に相当する、

$$25,000 \times (251 - 250) \text{ セント} = 250 \text{ ドル}$$

を加えた現金が残ることになる。したがって、8月15日に行使した場合のペイオフ合計は2,750ドルとなり、これは $25,000(F-K)$ に等しい。ここで $F$ は行使時点における先物価格、 $K$ は行使価格である。

### 【例16.2】

ある投資家が、行使価格が1ブッシュル当たり400セントの12月限トウモロコシ先物プット・オプションを1単位保有しているとする。先物の取引単位はトウモロコシ5,000ブッシュルである。12月限先物の現在の価格を380セント、直近の清算価格を379セントとする。このオプション行使すると、投資家は、

$$5,000 \times (400 - 379) \text{ セント} = 1,050 \text{ ドル}$$

と12月に5,000ブッシュルのトウモロコシを売る先物契約の売りポジションを受け取ることになる。先物のポジションは直ちに手仕舞うこともできる。そうした場合、投資家には1,050ドルの現金から、先物価格の直近清算価格からの変化分に相当する、

$$5,000 \times (380 - 379) \text{ セント} = 50 \text{ ドル}$$

を差し引いた現金が残ることになる。したがって、行使した場合のネットのペイオフは1,000ドルとなり、これは $5,000(K-F)$ に等しい。ここで $F$ は行使時点における先物価格、 $K$ は行使価格である。

## 限 月

先物オプションは、オプションの満期月ではなく、原資産の先物契約の満期月で参照される。前述したように、先物オプションは一般的にアメリカンである。先物オプションの満期日は、通常、原資産の先物契約の受渡開始日またはその数日前に設定されている（たとえば、CBOTの米国長期国債先物オ

プションは、先物契約の満期月の前月末から5営業日以上前の最終金曜日に満期を迎える)。CMEのミッドカーブ・ユーロ・ドル金利先物は例外で、先物契約はオプションの満期から1年ないしは2年後に満期を迎える。

米国で最も活発に取引されている契約は、トウモロコシ、大豆、綿、砂糖、原油、天然ガス、金、米国長期国債、米国中期国債、5年物米国債、30日フェデラル・ファンド、ユーロ・ドル金利、1年物および2年物のミッドカーブ・ユーロ・ドル金利、Euribor、ユーロ債、S&P500に対するものである。

### 金利先物オプション

米国の取引所において最も活発に取引されている金利オプションは、米国長期国債先物、米国中期国債先物、ユーロ・ドル金利先物に対するオプションである。

米国長期国債先物オプションはCMEで取引されており、米国長期国債先物を締結する選択権である。第6章で述べたように、米国長期国債先物の取引単位は額面100,000ドルの長期国債の受渡しである。米国長期国債先物オプションの価格は、原資産の長期国債の額面に対するパーセンテージで、1%の64分の1刻みで呈示される。

ユーロ・ドル金利先物オプションはCMEで取引されており、ユーロ・ドル金利先物を締結する選択権である。第6章で説明したように、ユーロ・ドル金利先物の価格が1ベーシス・ポイント、すなわち0.01%変化すると、ユーロ・ドル金利先物1単位には25ドルの損益が生じる。同様に、ユーロ・ドル金利先物オプションでも、1ベーシス・ポイントは25ドルを表している。

金利先物オプションの仕組みは、本章で説明した他の先物オプションと同様の仕組みである。たとえば、オプションが行使されると、現金のペイオフに加えて、コール・オプションの保有者は先物の買いポジションを受け取り、オプションの売手は対応する売りポジションを受け取ることになる。先物ポジションの価値も含めたコール・オプションの全ペイオフは $\max(F -$

$K, 0$ ) になる。ここで  $F$  は行使時の先物価格,  $K$  は行使価格である。

金利の先物価格は債券価格が上昇する（すなわち、金利が低下する）と上昇する。逆に債券価格が下落する（すなわち、金利が上昇する）と金利の先物価格は下落する。したがって、短期金利が上昇すると思っている投資家は、ユーロ・ドル金利先物プット・オプションを購入することでそれに賭けることができる。逆に、短期金利が低下すると思っている投資家は、ユーロ・ドル金利先物コール・オプションを購入することでそれに賭けることができる。長期金利が上昇すると思っている投資家は、中期国債先物もしくは長期国債先物のプット・オプションを購入することでそれに賭けることができる。逆に、長期金利が低下すると思っている投資家は、それらのコール・オプションを購入することでそれに賭けることができる。

#### 【例16.3】

今日を2月とし、6月限ユーロ・ドル金利先物価格を93.82（3カ月物ユーロ・ドル金利で年率6.18%に相当）とする。この先物に対する行使価格94.00のコール・オプションの価格が0.1、すなわち10ペース・ポイントで示されているとする。金利が低下すると考えている投資家にとって、このオプションは魅力的である。短期金利が約100ペース・ポイント下がり、ユーロ・ドル金利先物価格が94.78（3カ月物ユーロ・ドル金利で年率5.22%に相当）になったときに、この投資家がコール・オプション行使したとしよう。行使時のペイオフは $25 \times (94.78 - 94.00) = 1,950$  ドルである。オプションの購入コストは $10 \times 25 = 250$  ドルなので、投資家の利益は1,700 ドルになる。

#### 【例16.4】

今日を8月とし、CBOTで取引されている12月限米国長期国債先物の価格を96-09（すなわち $96\frac{9}{32} = 96.28125$ ）とする。長期国債のイールドを年率約6.4%とする。12月までにはこのイールドは低下するだろうと考えている投資家が、行使価格98のコール・オプションを買う場合を考える。コール・オプションの価格は1-04（すなわち $1\frac{4}{64} =$ 額面の1.0625

%) とする。もし、長期金利が年率 6 %まで下がり、米国長期国債先物価格が100-00に上がったとすると、この投資家は長期国債先物100ドル当たりネットで、

$$100.00 - 98.00 - 1.0625 = 0.9375$$

の利益をあげることができる。オプションの取引単位は額面100,000ドルの国債の購入または売却なので、この投資家の利益は購入したオプション 1 単位当たり 937.50 ドルになる。

## 16.2 先物オプションが好まれる理由

なぜ現物オプション取引よりも先物オプション取引が、選択されるのであろうか。その主な理由は、先物契約は多くの状況において原資産より流動性が高く、取引しやすいからである。さらに、先物の場合は先物取引所で取引された価格を即座に知ることができるが、現物価格はそこまですぐには入手できないといったこともある。

米国長期国債を考えてみよう。米国長期国債先物市場は、どの長期国債の現物市場と比較しても、きわめて活発に取引が行われている。また、米国長期国債先物の場合は、CBOT で取引された価格を即座に知ることができる。それに対し、現物債券の現在価格は、一つないしは複数の証券会社と契約することによってのみ入手可能となる。したがって、投資家が米国長期国債の現物よりも先物契約の受渡しを選択するのは驚くようなことではない。

商品先物も商品そのものより取引が容易である場合が多い。たとえば、生牛の先物契約を受け渡すほうが、生牛そのものを受け渡すよりもずっと簡単であるし、便利である。

先物オプションについての重要な点は、オプションを行使しても現物の受渡しにはふつう至らないということである。というのは、原資産の先物契約はほとんどの場合に受渡し前に手仕舞われるからである。したがって、先物オプションは、通常、最終的には現金で決済されることになる。これは、多

くの投資家、特にオプションが行使されたとき原資産の購入資金の調達が困難な、限られた資本しかもたない投資家にとって魅力的である。もう一つのよく指摘される先物オプションの利点は、先物と先物オプションは同じ取引所の並んだピットで取引されているということである。これは、ヘッジや裁定取引、スペキュレーションを容易にし、市場をより効率的にするのにも役立っている。最後に、多くの場合で先物オプションの取引コストは現物オプションの取引コストより安い傾向にある、ということも先物オプションが好まれる点である。

### 16.3 ヨーロピアンの現物オプションと先物オプション

ある資産の現物価格に対する行使価格  $K$  のヨーロピアン・コール・オプションのペイオフは、

$$\max(S_t - K, 0)$$

で与えられる。ここで  $S_t$  はオプションの満期における現物価格である。一方、その資産の先物価格に対する同じ行使価格のヨーロピアン・コール・オプションのペイオフは、

$$\max(F_t - K, 0)$$

で与えられる。ここで  $F_t$  はオプションの満期における先物価格である。したがって、先物契約の満期がオプションの満期と同じならば  $F_t = S_t$  となり、二つのオプションは等価になる。同様に、先物契約の満期とオプションの満期が同じ場合は、ヨーロピアン先物プット・オプションの価値は対応するヨーロピアン現物プット・オプションの価値と同じになる。

取引されているほとんどの先物オプションはアメリカンである。しかし、後でみるように、ヨーロピアン先物オプションの評価に関する結果は対応するヨーロピアン現物オプションの評価に用いることができるので、ヨーロピアン先物オプションの評価を検討することは無駄にはならない。

## 16.4 プット・コール・パリティ

第9章で、ヨーロピアン株券オプションに対するプット・コール・パリティの関係式を導出した。ここでは同様の議論を用いて、ヨーロピアン先物オプションに対するプット・コール・パリティの関係式を導出する。先物に対する行使価格  $K$ 、満期  $T$  のヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションを考える。次の二つのポートフォリオをつくることができる。

ポートフォリオ A：ヨーロピアン先物コール・オプション 1 単位と  $Ke^{-rT}$  の現金

ポートフォリオ B：ヨーロピアン先物プット・オプション 1 单位と先物 1 単位の買い、および  $F_0 e^{-rT}$  の現金 ( $F_0$  は先物価格)

ポートフォリオ A では、現金は無リスク金利  $r$  で運用され、時点  $T$  には  $K$  に等しくなる。オプション満期時の先物価格を  $F_T$  とする。 $F_T > K$  ならばポートフォリオ A のコール・オプションは行使され、ポートフォリオ A の価値は  $F_T$  になる。 $F_T \leq K$  ならばコール・オプションは行使されず、ポートフォリオ A の価値は  $K$  になる。したがって、時点  $T$  におけるポートフォリオ A の価値は、

$$\max(F_T, K)$$

になる。ポートフォリオ B では、現金は無リスク金利で運用され、時点  $T$  には  $F_0$  に等しくなる。プット・オプションから得られるペイオフは  $\max(K - F_T, 0)$  であり、先物契約から得られるペイオフは  $F_T - F_0$  である（注1）。したがって、時点  $T$  におけるポートフォリオ B の価値は、

$$F_0 + (F_T - F_0) + \max(K - F_T, 0) = \max(F_T, K)$$

になる。時点  $T$  における二つのポートフォリオの価値は等しく、期限前行使の機会はないので、現時点における価値も等しくなければならない。ポー

---

(注1) ここで分析では先物契約をフォワード契約と同じようなものと考え、日次値洗いは考慮せず、先物契約は満期に決済されるものとしている。

トフォリオ A の現時点での価値は,

$$c + Ke^{-rT}$$

である。ここで  $c$  は先物コール・オプションの価格である。先物契約は値洗いが行われているので、ポートフォリオ B の先物契約の価値はゼロである。したがって、ポートフォリオ B の現時点での価値は,

$$p + F_0 e^{-rT}$$

になる。ここで  $p$  は先物プット・オプションの価格である。以上より,

$$c + Ke^{-rT} = p + F_0 e^{-rT} \quad (16.1)$$

が成り立つ。これは、株価  $S_0$  が先物の割引価格  $F_0 e^{-rT}$  に置き換えられていく点を除いて、(9.3)式の配当のない株式のオプションに対するプット・コール・パリティと同じである。

16.3節で説明したように、原資産の先物契約の満期とオプションの満期が同じ場合は、ヨーロピアン先物オプションとヨーロピアン現物オプションは同じになる。したがって、オプションの満期が先物契約の満期と同じ場合には、(16.1)式は現物コール・オプションの価格、現物プット・オプションの価格、および先物価格の間に成り立つ関係を与えている。

【例16.5】

銀現物に対する満期 6 カ月、行使価格 8.50 ドルのヨーロピアン・コール・オプションの価格が、1 オンス当たり 0.56 ドルであるとする。また、6 カ月後受渡しの銀先物価格は現在 8.00 ドル、満期 6 カ月の無リスク金利は年率 10% であるとする。(16.1)式を並べ替えて用いると、そのコール・オプションと満期および行使価格が同じ銀現物に対するヨーロピアン・プット・オプションの価格は、

$$0.56 + 8.50 e^{-0.1 \times 6/12} - 8.00 e^{-0.1 \times 6/12} = 1.04$$

と求まる。ここで(16.1)式を現物オプションに対して用いることができるのは、先物の満期とオプションの満期が同じだからである。

アメリカン先物オプションに対しては、プット・コールの関係は、

$$F_0 e^{-rT} - K < C - P < F_0 - Ke^{-rT} \quad (16.2)$$

で与えられる（章末問題16.19を参照）。

## 16.5 先物オプション価格の下限

プット・コール・パリティの関係式(16.1)より、ヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションの価格に対する下限が得られる。プットの価格  $p$  は負にはならないので、(16.1)式より、

$$c + Ke^{-rT} \geq F_0 e^{-rT}$$

すなわち、

$$c \geq (F_0 - K) e^{-rT} \quad (16.3)$$

が成り立つ。同様に、コールの価格は負にはならないので、(16.1)式より

$$Ke^{-rT} \leq F_0 e^{-rT} + p$$

すなわち、

$$p \geq (K - F_0) e^{-rT} \quad (16.4)$$

が成り立つ。これらの下限は、第9章で導出したヨーロピアン株券オプションに対する下限と同様のものである。オプションがディープ・イン・ザ・マネーになると、ヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションの価格はそれらの下限に非常に近い値になる。このことは、プット・コール・パリティの関係式(16.1)をみればすぐにわかる。コール・オプションがディープ・イン・ザ・マネーになれば、対応するプット・オプションはディープ・アウト・オブ・ザ・マネーになり、 $p$  はほとんどゼロになる。 $c$  とその下限の差は  $p$  に等しいので、コール・オプションの価格は下限にほとんど等しいはずである。同様のことがプット・オプションに対しても成り立つ。

アメリカン先物オプションはいつでも行使ができるので、

$$C \geq F_0 - K$$

および、

$$P \geq K - F_0$$

が成り立つ。したがって、金利が正ならば、アメリカン・オプションの価格

の下限はヨーロピアン・オプションの価格の下限より常に高い。このことから、アメリカン先物オプションには期限前行使が最適となる可能性が常に存在する。

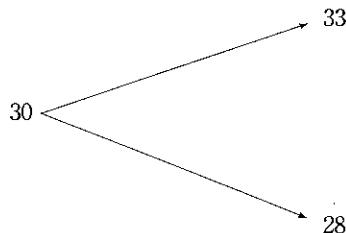
## 16.6 二項ツリーを用いた先物オプションの評価

この節では、二項ツリーを用いた先物オプションの価格付けについて、第11章よりももっと形式的な議論を行う。先物オプションと株券オプションとの重要な違いは、先物は契約締結時に前払いのコストがかからないということである。

現在の先物価格を30とし、翌月には33に上昇するか、または28に下落するかのどちらかであるとする。満期1カ月、行使価格29の先物コール・オプションを考える。日々の値洗いは無視するものとする。この状況を図16.1に示す。先物価格が33になった場合は、オプションのペイオフは4で、先物契約の価値は3である。先物価格が28になった場合は、オプションのペイオフはゼロで、先物契約の価値は-2である(注2)。

無リスク・ヘッジを行うために、オプション1単位の売りポジションと先

図16.1 先物価格変動の数値例



(注2) ここでは、時点  $T$  まで先物契約の損益は実現しないという近似をしている。損益は、時点0から時点  $T$ までの間、日々実現する。しかし、二項ツリーの時間間隔が短くなればこの近似はよくなり、時間間隔がゼロになる極限では、完全に正確なものになる。

物契約  $\Delta$  単位の買いポジションからなるポートフォリオを考える。先物価格が33に上昇した場合はポートフォリオの価値は  $3\Delta - 4$  になり、28に下落した場合はポートフォリオの価値は  $-2\Delta$  になる。これらが一致するとき、すなわち、

$$3\Delta - 4 = -2\Delta$$

となる  $\Delta = 0.8$  のとき、ポートフォリオは無リスクになる。

$\Delta$  がこの値をとるとき、1カ月後のポートフォリオの価値は  $3 \times 0.8 - 4 = -1.6$  になる。無リスク金利を 6 % とすると、ポートフォリオの現在価値は、

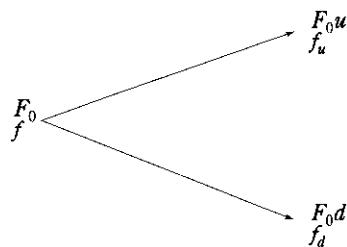
$$-1.6e^{-0.06 \times 1/12} = -1.592$$

となる。ポートフォリオはオプション 1 単位の売りと先物契約  $\Delta$  単位の買いからなっており、先物の価値はゼロだから、オプションの現在価値は 1.592 になる。

## 一般化

先物価格が期間  $T$  において  $F_0$  から  $F_0u$  に上昇するか  $F_0d$  に下落するかのどちらかである場合を考えることで、これまでの考察は一般化できる。期間の終わりに満期を迎えるオプションを考え、先物価格が上昇したときのペイオフを  $f_u$ 、下落したときのペイオフを  $f_d$  とする。その状況を図16.2に示す。

図16.2 一般的な状況での先物価格とオプション価格



この場合の無リスク・ポートフォリオは、オプション1単位の売りポジションと先物契約 $\Delta$ 単位の買いポジションからなる。ここで、

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{F_0 u - F_0 d}$$

である。時点 $T$ におけるポートフォリオの価値は、常に、

$$(F_0 u - F_0) \Delta - f_u$$

になる。無リスク金利を $r$ とすると、ポートフォリオの現在価値は、

$$[(F_0 u - F_0) \Delta - f_u] e^{-rt}$$

になる。 $f$ をオプションの現在価値とすると、ポートフォリオの現在価値は $-f$ である。したがって、

$$-f = [(F_0 u - F_0) \Delta - f_u] e^{-rt}$$

が成り立つ。 $\Delta$ の定義式をこの式に代入して整理すると、

$$f = e^{-rt} [pf_u + (1-p)f_d] \quad (16.5)$$

が得られる。ここで、

$$p = \frac{1-d}{u-d} \quad (16.6)$$

である。これは11.9節の結果と一致しており、(16.6)式は先物価格が上昇するリスク中立確率を与えている。

図16.1の数値例では、 $u=1.1$ ,  $d=0.9333$ ,  $r=0.06$ ,  $T=1/12$ ,  $f_u=4$ ,  $f_d=0$ である。(16.6)式から、

$$p = \frac{1-0.9333}{1.1-0.9333} = 0.4$$

となり、(16.5)式から、

$$f = e^{-0.06 \times 1/12} [0.4 \times 4 + 0.6 \times 0] = 1.592$$

となる。これは前に得られた結果とも一致している。

## 多期間ツリー

多期間二項ツリーは、株券オプションの価格付けとほとんど同じような方法で、アメリカン先物オプションの価格付けにも用いられている。これにつ

いては11.9節で説明した。先物価格の上昇率を決めるパラメータ  $u$  は  $e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$  で与えられる。ここで  $\sigma$  は先物価格のボラティリティ,  $\Delta t$  は1期間の長さである。先物価格の上昇確率は(16.6)式で与えられ,

$$p = \frac{1-d}{u-d}$$

である。例11.3に、多期間二項ツリーを用いた先物オプションの価格付けの例が示されている。また第19章の例19.3には、別の例がある。

## 16.7 リスク中立世界における先物価格のドリフト

15.3節で行った分析が先物オプションに対しても適用できるようになる、一般的な結果がある。その結果とは、リスク中立世界では、先物価格は配当利回りが自国通貨の無リスク金利  $r$  に等しい株式と同じふるまいをする、というものである。

先物価格に対する二項ツリーでの  $p$  に関する式が、配当利回りが  $q$  の株式に対する同じ式で  $q=r$  としたものに等しいことから、そうなっていそうなことがわかる。また、先物オプション価格に対するブット・コール・パリティの関係式が、配当利回りが  $q$  の株券オプションに対するブット・コール・パリティの関係式で、株価を先物価格に置き換えて  $q=r$  とすれば得られる、ということからもそのことは推察される。

この結果を厳密に証明するには、リスク中立世界での先物価格のドリフトを計算すればよい。時点  $t$  における先物価格を  $F_t$  とする。いま先物を買い付けたとすると、その価値はゼロである。時点  $\Delta t$  (最初の値洗い時点とする) でのペイオフは  $F_{\Delta t} - F_0$  である。 $r$  を時点 0 におけるきわめて短期間 ( $\Delta t$  期間) の金利とすると、リスク中立化法により、時点 0 における先物契約の価値は,

$$e^{-rt} \hat{E}[F_{\Delta t} - F_0]$$

になる。ここで  $\hat{E}$  はリスク中立世界における期待値を表す。したがって,

$$e^{-rt} \hat{E}(F_{\Delta t} - F_0) = 0$$

となり、

$$\hat{E}(F_{dt}) = F_0$$

が成り立つ。同様に、 $\hat{E}(F_{2dt}) = F_{2dt}$ 、 $\hat{E}(F_{3dt}) = F_{3dt}$ などが成り立つ。これらを一つにまとめると、任意の時点  $T$  において、

$$\hat{E}(F_T) = F_0$$

が成り立つことがわかる。

以上より、リスク中立世界での先物価格のドリフトはゼロである。したがって、(15.7)式より、先物価格は配当利回り  $q$  が  $r$  に等しい株式の価格と同じふるまいを示す。この結果はきわめて一般的なもので、すべての先物価格に対して成り立ち、金利やボラティリティなどに対する仮定にも依存していない(注3)。

先物価格  $F$  は、通常、リスク中立世界では確率過程

$$dF = \sigma F dz \quad (16.7)$$

に従っていると仮定される。ここで  $\sigma$  は一定である。

## 微分方程式

先物価格が配当利回り  $r$  の株式と同様のふるまいをすることを確かめるもう一つの方法は、13.6節で配当のない株式に依存するデリバティブに対する微分方程式を導出したやり方で、先物価格に依存するデリバティブが満たす微分方程式を導出することである。微分方程式は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial F^2} \sigma^2 F^2 = rf \quad (16.8)$$

になる(注4)。これは(15.6)式で  $q$  を  $r$  に置き換えたものに等しい。この式により、デリバティブを評価する目的に対しては、先物価格は配当利回りが  $r$

(注3) 第27章でわかるように、この結果をもっと正確にいうと、「ニューメレールをマネー・マーケット・アカウントとする伝統的なリスク中立世界において、先物価格のドリフトはゼロである」になる。ドリフトがゼロの確率過程はマルチングルとして知られる確率過程である。フォワード価格は、時点  $T$  が満期の割引債をニューメレールとする異なるリスク中立世界においてマルチングルになる。

(注4) 証明は著者の Web サイトのテクニカルノート 7 を参照されたい。

の株式と同じであるとしてよいことがわかる。

## 16.8 先物オプションに対する Black モデル

ヨーロピアン先物オプションは、これまで得られた結果を拡張して評価することができる。Fischer Black が1976年の論文で初めてこれを示した(注5)。先物価格が(16.7)式の(対数正規)確率過程に従うと仮定すると、ヨーロピアン先物コール・オプションの価格  $c$  とヨーロピアン先物プット・オプションの価格  $p$  は、(15.4)式と(15.5)式で  $S_0$  を  $F_0$  に置き換え、 $q=r$  とすれば得られる、

$$c = e^{-rT} [F_0 N(d_1) - K N(d_2)] \quad (16.9)$$

$$p = e^{-rT} [K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (16.10)$$

になる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_0/K) - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

であり、 $\sigma$  は先物価格のボラティリティである。キャリー・コストおよびコンビニエンス・イールドが時間のみの関数である場合は、先物価格のボラティリティは原資産のボラティリティに等しいことが示せる。Black のモデルでは、オプションの満期と先物の満期が同じである必要はない。

### 【例16.6】

原油に対するヨーロピアン先物プット・オプションについて考える。オプションの満期を 4 カ月、現在の先物価格を 20 ドル、行使価格を 20 ドル、無リスク金利を年率 9 %、先物価格のボラティリティを年率 25 % とする。この場合、 $F_0=20$ 、 $K=20$ 、 $r=0.09$ 、 $T=4/12$ 、 $\sigma=0.25$  で、 $\ln(F_0/K)=0$  となるので、

(注5) F.Black, "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976) : 167-79 を参照。

$$d_1 = \frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = 0.07216, \quad d_2 = -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2} = -0.07216$$

$$N(-d_1) = 0.4712, \quad N(-d_2) = 0.5288$$

となり、プット・オプションの価格  $p$  は、

$$p = e^{-0.09 \times 4/12} (20 \times 0.5288 - 20 \times 0.4712) = 1.12$$

すなわち 1.12 ドルになる。

### Black-Scholes モデルのかわりとしての Black モデルの利用

16.3節で説明したように、オプションの満期と先物契約の満期が一致する場合は、先物オプションと現物オプションは等価である。したがって、(16.9)式と(16.10)式を用いてヨーロピアン現物オプションの価格を計算することができる。

#### 【例16.7】

金の現物価格に対する満期 6 カ月のヨーロピアン・コール・オプション、すなわち 6 カ月後に金 1 オンスを購入できるオプションを考える。行使価格を 600 ドル、満期 6 カ月の金先物価格を 620 ドル、無リスク金利を年率 5%、先物価格のボラティリティを 20% とする。このオプションは満期 6 カ月の先物価格に対するヨーロピアン・オプションと同一である。したがって、オプションの価値は(16.9)式より、

$$e^{-0.05 \times 0.5} [620N(d_1) - 600N(d_2)]$$

で与えられる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(620/600) + 0.2^2 \times 0.5/2}{0.2 \times \sqrt{0.5}} = 0.3026$$

$$d_2 = \frac{\ln(620/600) - 0.2^2 \times 0.5/2}{0.2 \times \sqrt{0.5}} = 0.1611$$

である。これを計算すると、オプションの価格は 44.19 ドルになる。

幅広い資産に対して、ヨーロピアン・オプションの評価に Black-Scholes

モデルではなく Black モデルを用いるトレーダーが多い。その場合、(16.9)式と(16.10)式の変数  $F_0$ には、オプション満期と満期が同じ先物契約またはフォワード契約の価格を用いる。(15.13)式と(15.14)式は、通貨のヨーロピアン現物オプションに対する Black モデルでの価格式である。それらを用いる場合には、外国の無リスク金利を明示的に推定する必要はない。(15.8)式と(15.9)式は、指数のヨーロピアン現物オプションに対する Black モデルでの価格式である。それらを用いる場合には、配当利回りを明示的に推定する必要はない。

15.4節で説明したように、Black モデルを用いて活発に取引されている指数オプションの価格からフォワード価格の期間構造を推定することができる。さらに、そのフォワード価格は、その指数に対する他のオプションの評価に用いることができる。指数以外の資産に対しても、同じ方法を用いることができる。

## 16.9 アメリカン先物オプションとアメリカン現物オプションの比較

実際に取引されている先物オプションはアメリカンであることが多い。無リスク金利  $r$  が正ならば、アメリカン先物オプションには期限前行使が最適となる可能性が常に存在する。したがって、アメリカン先物オプションは、条件の同じヨーロピアン先物オプションよりも価値が高い。

先物契約の満期とオプションの満期が同じときでも、アメリカン先物オプションの価値は、対応するアメリカン現物オプションの価値と一般的には同じにならない(注6)。たとえば、満期前は終始一貫して先物価格が現物価格よりも高い、順調市場を考えよう。ほとんどの株価指数、金、銀、低金利の通貨、およびいくつかの商品に対しては、そうなっている。この場合、アメ

---

(注6) 先物オプションに対応する現物オプションとは、満期と行使価格が同じ現物オプションのことである。

リカン先物コール・オプションは、対応するアメリカン現物コール・オプションより価値が高くなるはずである。なぜなら、先物オプションの期限前行使が最適となる状況が存在し、そのような状況で行使したときは、現物オプションより多くの利益が得られるからである。同様に、アメリカン先物プット・オプションは、対応するアメリカン現物プット・オプションより価値が低いはずである。一方、高金利の通貨やいくつかの商品でみられるよう、先物価格が終始一貫して現物価格よりも低い逆軸市場では、この逆になる。すなわち、アメリカン先物コール・オプションは、対応するアメリカン現物コール・オプションより価値が低く、アメリカン先物プット・オプションは、対応するアメリカン現物プット・オプションより価値が高い。

このようなアメリカン先物オプションとアメリカン現物オプションとの価値の違いは、先物の満期がオプションの満期よりも先の場合でも、先物契約の満期とオプションの満期が一致する場合と同様に成り立っている。実際、その差は先物の満期が先になるほど大きくなる傾向にある。

## 16.10 先物スタイルのオプション

いくつかの取引所では、先物スタイルのオプション (futures-style option) と呼ばれる商品が取引されている。これらは、オプションのペイオフに対する先物契約である。オプションを買い付け (売り付け) たトレーダーは、現物オプションの場合でも先物オプションの場合でも、オプション料を取引当初に支払う (受け取る) のが通常である。これに対し、先物スタイルのオプションを買い付けたり売り付けたりしたトレーダーは、通常の先物契約と同様の方法 (第2章を参照) で証拠金を納めることになる。他の先物契約と同様に、この契約も日々値洗いされ、最後の清算価格はオプションのペイオフになる。先物契約が資産の将来の価格に対して賭ける取引であったように、先物スタイルのオプションはオプションのペイオフに対して賭ける取引である(注<sup>7</sup>)。金利が定数ならば、先物スタイルのオプションの価格はオプションのペイオフに対するフォワード契約の価格に等しい。このこと

より、先物スタイルのオプションの価格はオプション料が後払いのオプションの価格になる。したがって、先物スタイルのオプションの価格は通常のオプションの価値を無リスク金利で満期まで複利運用した値になる。

通常のヨーロピアン現物オプションに対する Black モデルによる価格は、 $F_0$ をオプション満期と満期が同じ先物契約（またはフォワード契約）の価格として、(16.9)式と(16.10)式で与えられる。したがって、先物スタイルのコール・オプションの価格は、

$$F_0 N(d_1) - K N(d_2)$$

になり、先物スタイルのプット・オプションの価格は、

$$K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)$$

になる。ここで  $d_1$  と  $d_2$  は(16.9)式と(16.10)式に現れたものと同じである。これらの価格式は、先物契約に対する先物スタイルのオプションと現物に対する先物スタイルのオプションの両方に対して成り立つ。前者の場合には、 $F_0$  はオプションの原資産である先物契約の現在価格である。後者の場合には、 $F_0$  はオプション満期と満期が同じ原資産に対する先物契約の現在価格である。

先物スタイルのオプションに対するプット・コール・パリティの関係式は、

$$p + F_0 = c + K$$

で与えられる。先物スタイルのアメリカン・オプションは期限前行使が可能であり、行使した場合には、オプションの本源的価値で最終清算が直ちに行われる。先物スタイルの先物オプションの価格は本源的価値よりも常に大きいので、先物スタイルのアメリカン先物オプションの期限前行使が最適になることはない。したがって、この種の先物スタイルのアメリカン・オプショ

(注 7) 先物スタイルのオプションに関するもっと詳しい議論については、D. Lieu, "Option Pricing with Futures-style Margining," *Journal of Futures Markets*, 10, 4 (1990) : 327-38 を参照。金利が確率変動する場合の評価については、R. R. Chen and L. Scott, "Pricing Interest Rate Futures Options with Futures-style Margining," *Journal of Futures Markets*, 13, 1 (1993) : 15-22 を参照。

ンは、対応する先物スタイルのヨーロピアン・オプションとして扱うことができる。

## 要約

先物オプションは、行使されると原資産である先物契約の受渡しが行われる。コール・オプションが行使されると、保有者は先物契約の買いポジションと先物価格が行使価格よりも超過した額の現金を受け取ることになる。同様に、プット・オプションが行使されると、保有者は先物契約の売りポジションと行使価格が先物価格よりも超過した額の現金を受け取ることになる。受け渡される先物契約の満期は、オプションの満期よりも少しだけ先になっているのが一般的である。

先物価格は、配当利回りが無リスク金利  $r_f$  に等しい株式の価格と同じふるまいをする。したがって、株価を先物価格に置き換え、配当利回りを無リスク金利に等しくすれば、第15章で配当利回りが既知の株式のオプションに対して導出した結果が、先物オプションに対しても用いることができるようになる。ヨーロピアン先物オプションに対する価格式は、1976年に Black によって初めて示された。それらの価格式は、オプションの満期における先物価格が対数正規分布に従うという仮定のもとで導かれている。

オプションと先物契約の満期が同じならば、ヨーロピアン先物オプションの価値は、対応するヨーロピアン現物オプションの価値とまったく同じになる。しかし、これはアメリカン・オプションに対しては成り立たない。先物市場が順調市場の場合は、アメリカン先物コール・オプションの価値は、対応するアメリカン現物コール・オプションの価値よりも高い。一方、アメリカン先物プット・オプションの価値は、対応するアメリカン現物プット・オプションの価値よりも低い。先物市場が逆調市場の場合は、その逆になる。

## 参考文献

- Black, F. "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3 (1976) : 167-79.
- Hilliard, J.E., and J. Reis. "Valuation of Commodity Futures and Options under Stochastic Convenience Yields, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 1 (March 1998) : 61 -86.
- Miltersen, K.R., and E.S. Schwartz. "Pricing of Options on Commodity Futures with Stochastic Term Structures of Convenience Yields and Interest Rates," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 1 (March 1998) : 33-59.

## 章末問題

- 16.1** 円に対するコール・オプションと円先物に対するコール・オプションの違いについて説明せよ。
- 16.2** 債券先物オプションが債券現物オプションよりも活発に取引されている理由を述べよ。
- 16.3** 「先物価格は配当利回りのある株式のようなものである」。この場合の配当利回りは何か。
- 16.4** 現在の先物価格は50である。6カ月後に、この価格は56または46のいずれかになるとする。無リスク金利は年率6%である。この先物に対する行使価格が50の6カ月物ヨーロピアン・コール・オプションの価格はいくらになるか。
- 16.5** 先物オプションに対するプット・コール・パリティの関係式は、配当のない株式のオプションに対するプット・コール・パリティの関係式とどのように違うか。
- 16.6** 先物契約とオプションの満期が同じ場合に、アメリカン先物コー

ル・オプションについて考える。どのような状況のとき、先物オプションの価値は、対応するアメリカン現物オプションの価値よりも高くなるか。

- 16.7** 先物価格が19ドル、行使価格が20ドル、無リスク金利が年率12%、先物価格のボラティリティが年率20%のとき、満期5カ月のヨーロピアン先物プット・オプションの価値を求めよ。
- 16.8** 1オンス当たりの行使価格が700ドルの10月限金先物プット・オプションを購入したとする。取引単位は100オンスの受渡しである。10月限先物価格が680ドルの時にこのオプション行使したらどうなるか。
- 16.9** 行使価格が1ポンド当たり90セントの4月限生牛先物コール・オプションを売却したとする。取引単位は40,000ポンドの受渡しである。先物価格が95セントの時にこのオプションが行使されたらどうなるか。
- 16.10** 無リスク金利が年率10%のとき、行使価格40の2カ月物先物コール・オプションを考える。現在の先物価格は47とする。(a)ヨーロピアン、(b)アメリカンのそれぞれの場合について、先物オプションの価値の下限を求めよ。
- 16.11** 無リスク金利が年率10%のとき、行使価格50の4カ月物先物プット・オプションを考える。現在の先物価格は47とする。(a)ヨーロピアン、(b)アメリカンのそれぞれの場合について、先物オプションの価値の下限を求めよ。
- 16.12** ある先物価格が現在60で、そのボラティリティが30%である。無リスク金利は年率8%とする。2期間二項ツリーを用いて、この先物に対する行使価格60の6カ月物ヨーロピアン・コール・オプションの価値を求めよ。このコールがアメリカンである場合、期限前行使したほうがよい場合はあるか。
- 16.13** 問題16.12で、その先物に対する行使価格60の6カ月物ヨーロピアン・プット・オプションの価値を二項ツリーを用いて求めよ。このプットがアメリカンである場合、期限前行使したほうがよい場合は

あるか。問題16.12で求めたコールの価格とここで求めたプットの価格がプット・コール・パリティの関係を満たすことを確かめよ。

- 16.14** ある先物価格が現在25, そのボラティリティが年率30%, 無リスク金利が年率10%であるとする。この先物に対する行使価格が26の9カ月物ヨーロピアン・コールの価値を求めよ。
- 16.15** ある先物価格が現在70, そのボラティリティが年率20%, 無リスク金利が年率6%であるとする。この先物に対する行使価格65の5カ月物ヨーロピアン・プットの価値を求めよ。
- 16.16** 満期1年のある先物の価格が現在35であるとする。この先物に対する行使価格34の1年物ヨーロピアン・コール・オプションと1年物ヨーロピアン・プット・オプションの市場価格がともに2である。無リスク金利は年率10%とする。このとき, 裁定機会が存在することを示せ。
- 16.17** 「アット・ザ・マネーのヨーロピアン先物コール・オプションの価格は, 同じ条件のアット・ザ・マネーのヨーロピアン先物プット・オプションの価格に常に等しい」。これが成り立つ理由を説明せよ。
- 16.18** ある先物価格が現在30である。無リスク金利は年率5%である。行使価格28の3カ月物アメリカン先物コール・オプションの価値は4であるとする。この先物に対する行使価格28の3カ月物アメリカン先物プット・オプションの価値の上限と下限を求めよ。
- 16.19** ある先物契約に対する行使価格  $K$ , 満期  $T$  のアメリカン・コール・オプションの価格を  $C$ , 同じ先物契約に対する行使価格と満期日が同じアメリカン・プット・オプションの価格を  $P$  とするとき,
- $$F_0 e^{-rT} - K \leq C - P \leq F_0 - K e^{-rT}$$
- が成り立つことを示せ。ここで  $F_0$  は先物価格,  $r$  は無リスク金利である。さらに  $r > 0$  とし, フォワード契約と先物契約との間に差はないものとする (ヒント: 問題15.12に示したのと同様の方法を用いよ)。
- 16.20** 銀現物に対する満期3カ月のヨーロピアン・プット・オプションの価格を計算せよ。ただし, 満期3カ月の先物価格を12ドル, 行使価

格を13ドル、無リスク金利を4%，銀の価格のボラティリティを25%とする。

- 16.21** ある企業が3ヶ月後に入ってくる500万ドルをLIBOR-50bpsで90日間運用する予定である。その企業が少なくとも6.5%の金利を確保したいと思っている場合、上場金利オプションを用いてどのようなポジションをつくればよいか。

## 宿題

- 16.22** ある先物価格が現在40である。3ヶ月後に先物価格は35または45のいずれかになることがわかっているとする。無リスク金利が年率7%のとき、この先物に対する行使価格42の3ヶ月物ヨーロピアン・コール・オプションの価値を求めよ。
- 16.23** 現在を2月4日とする。7月限トウモロコシ先物コール・オプションの価格が、行使価格260, 270, 280, 290, 300に対してそれぞれ26.75, 21.25, 17.25, 14.00, 11.375であるとする。同じ行使価格に対して、7月限プット・オプションの価格はそれぞれ8.50, 13.50, 19.00, 25.625, 32.625であるとする。オプションの満期日は6月19日、7月限トウモロコシ先物の現在価格は278.25、無リスク金利は1.1%である。DerivaGem ソフトウェアを用いて、それらのオプションのインプライド・ボラティリティを計算せよ。また、得られた結果から何がわかるか。
- 16.24** 次の大豆先物に対するヨーロピアン・プット・オプションのデータから、大豆先物価格のインプライド・ボラティリティを計算せよ。

現在の先物価格 525

行使価格 525

無リスク金利 年率6%

満期 5 カ月

プットの価格 20

- 16.25** S&P500に対する満期 6 カ月のヨーロピアン現物プット・オプションの価格を計算せよ。ただし、指数に対する 6 カ月物フォワード価格を1,400 ドル、行使価格を1,450 ドル、無リスク金利を 5 %、指数のボラティリティを15%とする。

## 第17章

# グリークス

店頭市場で顧客にオプションを販売している金融機関は、オプションのリスク管理の問題に直面している。販売したオプションがたまたま上場オプションと同一のものであれば、金融機関は販売したのと同じオプションを取り所で買うことによって、そのエクスポージャーを消すことができる。しかし、オプションが顧客のニーズに合わせたオーダー・メードのもので、上場されている標準物に対応していない場合には、エクスポージャーのヘッジはずっとむずかしくなる。

本章では、この問題に対するいくつかの代替的なアプローチについて論じる。そのなかには、グリークス(Greek letters または単に Greeks)と一般的に呼べるもの用いる方法も含まれる。各ギリシャ文字(グリーク)は、異なる角度から計測されたオプションのポジションがもつリスクを表しており、すべてのリスクが許容範囲に収まるようにグリークスを管理することが

トレーダーの目標になる。本章で紹介する分析は、金融機関で働く店頭市場のトレーダーだけでなく、取引所にいるオプションのマーケット・メーカーにも利用できるものである。

本章の終わりにかけて、オプションを合成してつくる方法について考える。これはオプションのヘッジときわめて密接に関係していることがわかる。オプションのポジションを合成してつくることは、オプションの反対ポジションをヘッジすることと本質的に同一である。たとえば、コール・オプションの買いを合成することは、コール・オプションの売りポジションをヘッジすることと同等である。

## 17.1 例　　示

以下の数節では、配当のない株式に対する10万株分のヨーロピアン・コール・オプションを30万ドルで売り付けた、金融機関のポジションを例に用いて説明を行う。株価を49ドル、オプションの行使価格を50ドル、無リスク金利を年率5%，株価のボラティリティを年率20%，満期までを20週間(0.3846年)，この株式の期待收益率を年率13%であるとする(注1)。これまでの記号を用いると、

$$S_0 = 49, \quad K = 50, \quad r = 0.05, \quad \sigma = 0.20, \quad T = 0.3846, \quad \mu = 0.13$$

である。このオプションのBlack-Scholes価格は約24万ドルになる。したがって、金融機関は理論価格よりも6万ドル高く売ったことになるが、この金融機関はリスクをどうヘッジするかという問題に直面することになる(注2)。

---

(注1) 第11章と第13章で示したように、期待收益率はオプションの価格には影響を与えない。しかし、ヘッジ・スキームの有効性といくらか関係がありうるので、期待收益率にも仮定をおいた。

(注2) 配当のない株式のコール・オプションを例にとって説明を行うのは、考え方を発展させやすいからである。これから説明する考え方は、他のオプションやデリバティブにも適用できるものである。

## 17.2 ネイキッド・ポジションとカバード・ポジション

金融機関のとりうる一つの戦略は、何もしないというものである。このときのポジションはネイキッド・ポジション (naked position) とも呼ばれる。これは、20週間後の株価が50ドルを下回っている場合にはうまくいく戦略である。その場合、金融機関はコール・オプションから損失を被らず、30万ドルの利益をあげることになる。一方、コール・オプションが行使された場合は、金融機関は20週間後の時価でその株式を10万株購入してコールをカバーしなければならないので、ネイキッド・ポジションはあまりうまくいかない。金融機関の損失は、株式の時価が行使価格を上回った額の10万倍である。たとえば、20週間後の株価が60ドルになったとすると、金融機関のオプションからの損失は100万ドルになる。これは、オプション料として受け取った30万ドルよりはるかに大きい。

ネイキッド・ポジションにかわる戦略として、金融機関はカバード・ポジション (covered position) をとることもできる。これは、オプションを売り付けると同時に10万株の株式を購入する戦略である。オプションが行使されるならば、この戦略はうまくいくが、そうでなければ深刻な損失を招くこともあります。たとえば、株価が40ドルに下落すれば、金融機関は株式ポジションから90万ドルもの損失を被ることになる。これはオプション料として受け取った30万ドルよりはるかに大きい(注3)。

ネイキッド・ポジションもカバード・ポジションもよいヘッジではない。Black-Scholes の公式が導かれたときの仮定のもとでは、金融機関に発生するコストはどちらのポジションでも平均としては常に24万ドルになるはずである(注4)。しかし、個々の場合には、コストはゼロから100万ドルを超える範囲を変動する。よいヘッジとは、コストが常に24万ドル付近になるような

---

(注3) カバード・コールの売却によるエクスポージャーは、ネイキッド・プットの売却によるエクスポージャーと同じであることが、プット・コール・パリティからわかる。

(注4) もっと正確にいようと、適切なリスク調整後の割引率を用いて計算した場合の期待コストの現在価値は、どちらの戦略でも24万ドルになる。

戦略である。

### 17.3 ストップ・ロス戦略

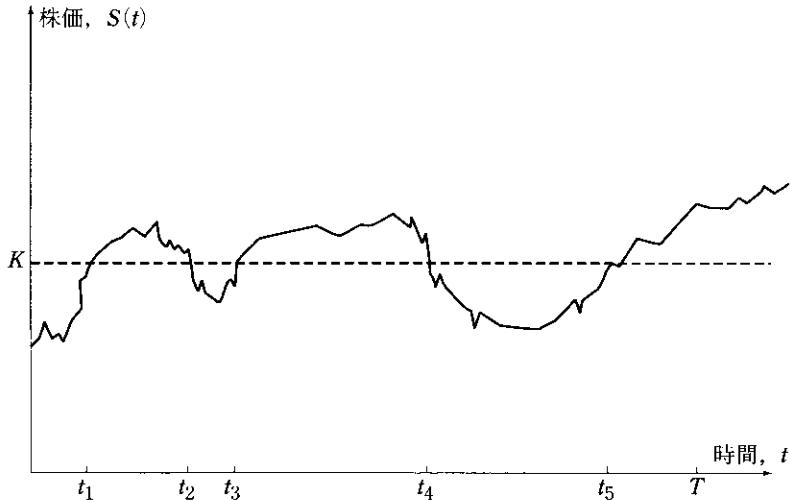
ときどき提案される興味深いヘッジ手法に、ストップ・ロス戦略 (stop-loss strategy) と呼ばれるものがある。基本的な考え方を説明するために、ある株式 1 株を行使価格  $K$  で購入するヨーロピアン・コール・オプションを売却した金融機関を考えよう。そのヘッジ戦略は、株価が  $K$  を上回ると同時にその株式を 1 株買い、株価が  $K$  を下回ると同時にその株式を 1 株売るというものである。この戦略の目標は、株価が  $K$  よりも低いときにはネイキッド・ポジションをとり、株価が  $K$  よりも高いときにはカバード・ポジションをとるようにするというものである。この手法は、満期時にオプションがイン・ザ・マネーのときは株式を保有しており、アウト・オブ・ザ・マネーのときは株式を保有していないように設計されている。この戦略から生み出されるペイオフは、オプションのペイオフとまったく同じであるように思われる。図17.1に示した例では、この戦略を行うと、株式を時点  $t_1$  で買い、時点  $t_2$  で売り、時点  $t_3$  で買い、時点  $t_4$  で売り、時点  $t_5$  で買って、時点  $T$  でそれを受け渡すことになる。

これまでと同様に、はじめの株価を  $S_0$  とする。ヘッジ・ポジションをはじめにつくるときのコストは  $S_0 > K$  ならば  $S_0$  で、そうでなければゼロである。オプションを売却してそれをヘッジすることの総コスト  $Q$  はオプションの本源的価値

$$Q = \max(S_0 - K, 0) \quad (17.1)$$

になるように思われる。なぜなら、時点 0 以降の売買はすべて価格  $K$  で行われるからである。もしこれが実際に正しいとすれば、取引コストがない場合には、このヘッジ戦略は完全にうまくいくだろう。このヘッジ・コストは Black-Scholes 価格より常に小さい。したがって、オプションを売却してそれをヘッジすることによって、投資家はリスクなしで利益を得られることになる。

図17.1 ストップ・ロス戦略



(17.1) 式は二つの基本的な点で正しくない。1点目は、ヘッジから生じるキャッシュフローは異なる時点で発生しているため、それらは割り引く必要があるということである。2点目は、売りと買いを厳密に同一価格  $K$  で行なうことはできないというものである。この2点目は非常に重要である。もし金利がゼロのリスク中立世界を仮定するならば、現金の時間価値を無視することは正当化できる。しかし、まったくの同一価格で買いと売りが行えることを筋を通った形で仮定することはできない。市場が効率的ならば、株価がちょうど  $K$  のとき、次に株価が  $K$  より上にいくのか下にいくのかをヘッジナーは知るよしもないからである。

$\epsilon$  をある小さな正数とし、購入は価格  $K + \epsilon$  で行われ、売却は価格  $K - \epsilon$  で行われるとするのが現実的である。そうすると、売買一組で  $2\epsilon$  のコスト（取引コストは除く）がかかることになる。ヘッジナーはおのずと  $\epsilon$  をできるだけ小さくしようと、株価の動きをもっと細かくモニターするようになるだろう。株価が連続的に変化すると仮定すると、株価を細かくモニターすることで、 $\epsilon$  はいくらでも小さくすることができる。しかし、 $\epsilon$  を小さくすれば

するほど取引回数は多くなる。したがって、1取引当りのコスト減少の効果は取引回数の増加で打ち消されることになる。 $\epsilon \rightarrow 0$  とすると、取引回数の期待値は無限大に近づく(注5)。

ストップ・ロス戦略は表面的には魅力的にうつるが、ヘッジ手法としてはそれほどうまくいくものではない。アウト・オブ・ザ・マネーのオプションに対してこの戦略を用いる場合を考えよう。株価が行使価格  $K$  に一度も到達しなければ、ヘッジにかかるコストはゼロである。株価が行使価格の水準を何度も横切って変動する場合には、この手法はかなり高くつくものになる。モンテカルロ・シミュレーションを用いて、ストップ・ロス戦略の全体のパフォーマンスを評価することができる。表17.1は、先のオプションに対するシミュレーション結果である。株価は、長さ  $\Delta t$  の各時間区間の終わりに観測されるものとする(注6)。ヘッジ・パフォーマンスは、オプションのヘッジ・コストの標準偏差と Black-Scholes オプション価格の比で測られている。各結果は1,000個の株価のサンプルパスに基づいて求められており、標準誤差は約 2 %である。完全なヘッジに対しては、ヘッジ・パフォーマンスはゼロになる。いまの場合には、 $\Delta t$  をどんなに小さくしても、ヘッジ・パフォーマンスを0.7よりもよくするのは不可能なように思われる。

表17.1 ストップ・ロス戦略のパフォーマンス

(パフォーマンスはオプションの売却とそのヘッジにかかるコストの標準偏差のオプションの理論価格に対する比率)

| $\Delta t$ (週) | 5    | 4    | 2    | 1    | 0.5  | 0.25 |
|----------------|------|------|------|------|------|------|
| ヘッジ・パフォーマンス    | 1.02 | 0.93 | 0.82 | 0.77 | 0.76 | 0.76 |

(注5) 12.2節で述べたように、与えられた時間区間において、ウィナー過程が任意の特定の値に等しくなる回数の期待値は無限大である。

(注6) 用いたヘッジルールは正確には次のとおりである。株価が長さ  $\Delta t$  のある時間区間に  $K$  を下から上に横切ったならば、その区間の終わりに株式を購入する。株価がある時間区間に  $K$  を上から下に横切ったならば、その区間の終わりに株式を売却する。その他の場合は何もしない。

## 17.4 デルタ・ヘッジ

ほとんどのトレーダーは、これまで述べたものよりもっと複雑なヘッジ手法を用いている。それらはデルタやガンマ、ベガといった指標を計算して行うヘッジである。本節ではデルタの役割について考察する。

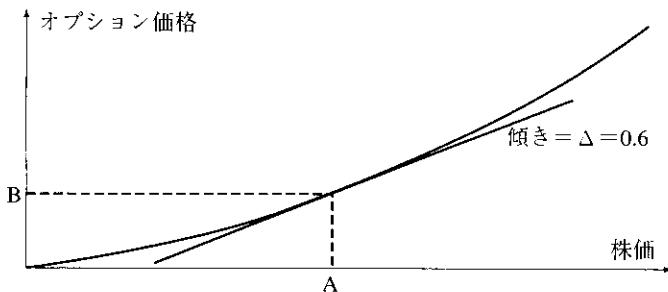
オプションのデルタ ( $\Delta$ ) は、第11章で説明したとおり、原資産の価格変化に対するオプション価格の変化率で定義される。それは、原資産価格の関数として表したときのオプション価格曲線の傾きである。いま、コール・オプションのデルタが0.6であるとする。これは、株価が微小変化したとき、オプション価格はその変化額の約60%だけ変化することを意味している。図17.2は、コール価格と原資産株式の価格との関係を示している。株価が点Aに対応する値をとると、オプション価格は点Bに対応する値をとり、 $\Delta$ は図に示されている直線の傾きになる。一般に、

$$\Delta = -\frac{\partial c}{\partial S}$$

である。ここで  $c$  はコール・オプションの価格、 $S$  は株価である。

図17.2で、株価は100ドル、オプション価格は10ドルとしよう。コール・オプション20単位（すなわち、2,000株を購入する権利）を売り付けた投資家を考えてみる。投資家のポジションは、 $0.6 \times 2,000 = 1,200$ 株の株式を買うことでヘッジできる。そうすると、オプション・ポジションによる利益（損

図17.2 デルタの計算



失) は、株式ポジションによる損失(利益)で相殺されるだろう。たとえば、株価が1ドル上昇すると(購入した株式に1,200ドルの利益が生じ)，オプション価格は $0.6 \times 1$ ドル=0.6ドル上昇する(売り付けたオプションに1,200ドルの損失が生じる)。株価が1ドル下落すると(購入した株式に1,200ドルの損失が生じ)，オプション価格は0.6ドル下落する(売り付けたオプションに1,200ドルの利益が生じる)。

この例では、投資家のオプション・ポジションのデルタは、

$$0.6 \times (-2,000) = -1,200$$

である。言い換えると、株価が $\Delta S$ だけ上昇すると、投資家はオプションの売りポジションから $1,200\Delta S$ の損失を被る。株式のデルタは1.0なので、1,200株の買いポジションのデルタは+1,200である。したがって、投資家の総ポジションのデルタはゼロになる。株式ポジションのデルタがオプション・ポジションのデルタを相殺しているのである。デルタがゼロのポジションをデルタ・ニュートラル(delta neutral)であるという。

デルタは時間とともに変化するので、比較的短い時間の間でしか投資家のポジションはデルタがヘッジされた状態(すなわち、デルタ・ニュートラルな状態)ではないことを知っておくことは重要である。ヘッジは定期的に調整する必要がある。これをリバランシング(rebalancing)と呼ぶ。いまの例で、3日後に株価が110ドルに上昇するとしよう。図17.2をみると、株価が上昇するとデルタも増加する。デルタが0.6から0.65になるとしよう。その場合、ヘッジを維持するためには、 $0.05 \times 2,000 = 100$ 株を追加購入しなければならないだろう。

上で説明したデルタ・ヘッジ手法は、ダイナミック・ヘッジ(dynamic hedging)の一例である。これは、最初にヘッジ・ポジションを組んだ後はいっさい調整を行わないスタティック・ヘッジ(static hedge)と対照的な手法である。スタティック・ヘッジは「ヘッジ・アンド・フォゲット(hedge-and-forget)」としても知られている。デルタの考え方は、Black-Scholes-Mertonの分析と密接な関係にある。第13章で説明したように、Black, Scholes, および Merton は、株券オプションと株式からなる無リスクポー

トフォリオが作成できることを示した。Black-Scholes のポートフォリオを  $\Delta$  を用いて表現すると、

-1 : オプション

+ $\Delta$  : 株式数

となる。この新しい用語を用いると、Black と Scholes は、デルタ・ニュートラルなポジションをつくり、そのポジションの収益率は無リスク金利になるはずである、という議論を用いてオプションの価値を求めたと言え表すことができる。

### ヨーロピアン株券オプションのデルタ

配当のない株式のヨーロピアン・コール・オプションに対しては、

$$\Delta(\text{コール}) = N(d_1)$$

となることが示せる（章末問題13.17を参照）。ここで  $d_1$  は(13.20)式のものと同じである。この式はヨーロピアン・コール・オプション 1 単位の買いポジションのデルタを与えるものである。これより、ヨーロピアン・コール・オプション 1 単位の売りポジションのデルタは  $-N(d_1)$  となる。したがって、ヨーロピアン・コール・オプション 1 単位の売りポジションをデルタ・ヘッジするには、株数が  $N(d_1)$  になるような株式の買いポジションを保有し続ければよい。同様に、ヨーロピアン・コール・オプション 1 単位の買いポジションをヘッジするには、売付け株数が  $N(d_1)$  になるような株式の売りポジションを保有し続ければよい。

配当のない株式のヨーロピアン・プット・オプションに対しては、デルタは、

$$\Delta(\text{プット}) = N(d_1) - 1$$

で与えられる。デルタは負になるので、プット・オプションの買いポジションは原資産株式の買いポジションでヘッジを行い、プット・オプションの売りポジションは原資産株式の売りポジションでヘッジすることになる。図17.3は、株価が変化したときのコール・オプションとプット・オプションのデルタが変化する様子を示している。図17.4は、イン・ザ・マネー、アッ

図17.3 配当のない株式の(a)コール・オプションと(b)プット・オプションの株価に対するデルタ

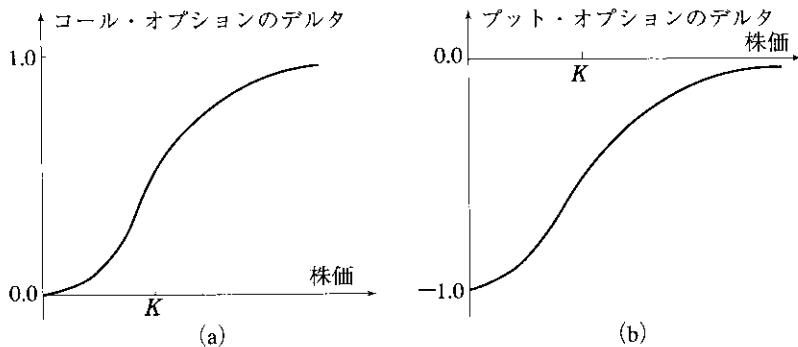
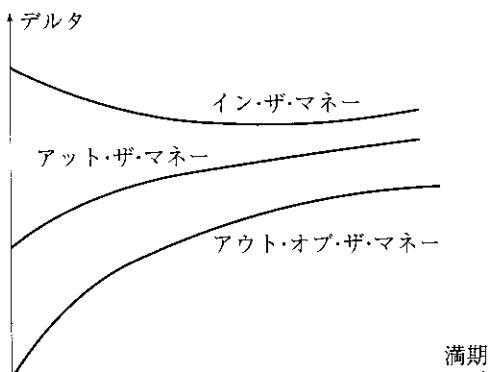


図17.4 コール・オプションのデルタの満期までの時間に対する変化の典型例



ト・ザ・マネー, アウト・オブ・ザ・マネーのそれぞれの場合について, 満期の長さに対してデルタが変化する様子を示している。

【例17.1】

17.1節の配当のない株式に対するコール・オプションについて考える。株価は49ドル, 行使価格は50ドル, 無リスク金利は5%, 満期までの時間は20週間 ( $=0.3846$ 年), ボラティリティは20%とする。このとき,

$$d_1 = \frac{\ln(49/50) + (0.05 + 0.2^2/2) \times 0.3846}{0.2 \times \sqrt{0.3846}} = 0.0542$$

となり、デルタは  $N(d_1)$ 、すなわち 0.522 になる。したがって、株価が  $\Delta S$  だけ変化したとき、オプション価格は  $0.522\Delta S$  だけ変化する。

### デルタ・ヘッジのダイナミック性

表17.2（次頁）と表17.3（次々頁）に、17.1節の例に対して行ったデルタ・ヘッジの二つの例を示している。ヘッジは週次で調整、すなわちリバランスされるものとする。売り付けたオプションのデルタの初期値は例17.1で 0.522 と求められている。これは、オプションの売りポジションのデルタが、最初は -52,200 であることを意味している。したがって、オプションを売り付けると同時に 2,557,800 ドルを借り入れて、株式 52,200 株を 1 株 49 ドルで購入しなければならない。金利は 5 % とする。したがって、約 2,500 ドルの金利コストが最初の週に発生する。

表17.2では、株価は最初の週の終わりに 48.12 ドルに下落する。デルタは 0.458 に減少し、オプション・ポジションのデルタは -45,800 になる。したがって、ヘッジを維持するために、最初に購入した株式のうち 6,400 株を売却することになる。その結果、売却代金 308,000 ドルが入金され、第 1 週の終わり時点での借入残高は 2,252,300 ドルに減る。第 2 週には株価はさらに 47.37 ドルに下落し、デルタは再度減少する、等々である。満期が近づくにつれてオプションの行使が確実になり、デルタは 1.0 に近づいていく。したがって、第 20 週までにヘッジャーはポジションを完全にカバーすることになる。ヘッジャーは保有株式の対価として 5,000,000 ドルを受け取るので、オプションの売付けとヘッジの総コストは 263,300 ドルになる。

表17.3は、オプションがアウト・オブ・ザ・マネーで終わる、別のシミュレーション結果である。オプションが行使されそうにないことが明らかになるにつれて、デルタはゼロに近づいていく。第 20 週にはネイキッド・ポジションとなり、総コストは 256,600 ドルになる。

表17.2 デルタ・ヘッジのシミュレーション（オプションがイン・ザ・マネーで終了し、ヘッジ・コストが263,300ドルの場合）

| 週  | 株価    | デルタ   | 購入<br>株式数 | 購入コスト<br>(単位:1,000ドル) | 累積コスト<br>(含む金利コスト)<br>(単位:1,000ドル) | 金利コスト<br>(単位:1,000ドル) |
|----|-------|-------|-----------|-----------------------|------------------------------------|-----------------------|
| 0  | 49.00 | 0.522 | 52,200    | 2,557.8               | 2,557.8                            | 2.5                   |
| 1  | 48.12 | 0.458 | (6,400)   | (308.0)               | 2,252.3                            | 2.2                   |
| 2  | 47.37 | 0.400 | (5,800)   | (274.7)               | 1,979.8                            | 1.9                   |
| 3  | 50.25 | 0.596 | 19,600    | 984.9                 | 2,996.6                            | 2.9                   |
| 4  | 51.75 | 0.693 | 9,700     | 502.0                 | 3,471.5                            | 3.3                   |
| 5  | 53.12 | 0.774 | 8,100     | 430.3                 | 3,905.1                            | 3.8                   |
| 6  | 53.00 | 0.771 | (300)     | (15.9)                | 3,893.0                            | 3.7                   |
| 7  | 51.87 | 0.706 | (6,500)   | (337.2)               | 3,559.5                            | 3.4                   |
| 8  | 51.38 | 0.674 | (3,200)   | (164.4)               | 3,398.5                            | 3.3                   |
| 9  | 53.00 | 0.787 | 11,300    | 598.9                 | 4,000.7                            | 3.8                   |
| 10 | 49.88 | 0.550 | (23,700)  | (1,182.2)             | 2,822.3                            | 2.7                   |
| 11 | 48.50 | 0.413 | (13,700)  | (664.4)               | 2,160.6                            | 2.1                   |
| 12 | 49.88 | 0.542 | 12,900    | 643.5                 | 2,806.2                            | 2.7                   |
| 13 | 50.37 | 0.591 | 4,900     | 246.8                 | 3,055.7                            | 2.9                   |
| 14 | 52.13 | 0.768 | 17,700    | 922.7                 | 3,981.3                            | 3.8                   |
| 15 | 51.88 | 0.759 | (900)     | (46.7)                | 3,938.4                            | 3.8                   |
| 16 | 52.87 | 0.865 | 10,600    | 560.4                 | 4,502.6                            | 4.3                   |
| 17 | 54.87 | 0.978 | 11,300    | 620.0                 | 5,126.9                            | 4.9                   |
| 18 | 54.62 | 0.990 | 1,200     | 65.5                  | 5,197.3                            | 5.0                   |
| 19 | 55.87 | 1.000 | 1,000     | 55.9                  | 5,258.2                            | 5.1                   |
| 20 | 57.25 | 1.000 | 0         | 0.0                   | 5,263.3                            |                       |

表17.2と表17.3では、ヘッジ・コストをオプション取引のスタート時点まで割り引くと、Black-Scholes価格の240,000ドルに近くはなるが、正確には一致しない。ヘッジが完全であるならば、シミュレーションで発生させた株価のどのパスに対しても、ヘッジ・コストの現在価値はBlack-Scholes価格に正確に等しくなるはずである。デルタ・ヘッジのコストにはらつきがある理由は、ヘッジを週1回しかリバランスしないからである。リバランスをもっと頻繁に行えば、ヘッジ・コストのはらつきは小さくなっていく。も

表17.3 デルタ・ヘッジのシミュレーション（オプションがアウト・オブ・ザ・マネーで終了し、ヘッジ・コストが256,600ドルの場合）

| 週  | 株価    | デルタ   | 購入<br>株式数 | 購入コスト<br>(単位:1,000ドル) | 累積コスト<br>(含む金利コスト)<br>(単位:1,000ドル) | 金利コスト<br>(単位:1,000ドル) |
|----|-------|-------|-----------|-----------------------|------------------------------------|-----------------------|
| 0  | 49.00 | 0.522 | 52,200    | 2,557.8               | 2,557.8                            | 2.5                   |
| 1  | 49.75 | 0.568 | 4,600     | 228.9                 | 2,789.2                            | 2.7                   |
| 2  | 52.00 | 0.705 | 13,700    | 712.4                 | 3,504.3                            | 3.4                   |
| 3  | 50.00 | 0.579 | (12,600)  | (630.0)               | 2,877.7                            | 2.8                   |
| 4  | 48.38 | 0.459 | (12,000)  | (580.6)               | 2,299.9                            | 2.2                   |
| 5  | 48.25 | 0.443 | (1,600)   | (77.2)                | 2,224.9                            | 2.1                   |
| 6  | 48.75 | 0.475 | 3,200     | 156.0                 | 2,383.0                            | 2.3                   |
| 7  | 49.63 | 0.540 | 6,500     | 322.6                 | 2,707.9                            | 2.6                   |
| 8  | 48.25 | 0.420 | (12,000)  | (579.0)               | 2,131.5                            | 2.1                   |
| 9  | 48.25 | 0.410 | (1,000)   | (48.2)                | 2,085.4                            | 2.0                   |
| 10 | 51.12 | 0.658 | 24,800    | 1,267.8               | 3,355.2                            | 3.2                   |
| 11 | 51.50 | 0.692 | 3,400     | 175.1                 | 3,533.5                            | 3.4                   |
| 12 | 49.88 | 0.542 | (15,000)  | (748.2)               | 2,788.7                            | 2.7                   |
| 13 | 49.88 | 0.538 | (400)     | (20.0)                | 2,771.4                            | 2.7                   |
| 14 | 48.75 | 0.400 | (13,800)  | (672.7)               | 2,101.4                            | 2.0                   |
| 15 | 47.50 | 0.236 | (16,400)  | (779.0)               | 1,324.4                            | 1.3                   |
| 16 | 48.00 | 0.261 | 2,500     | 120.0                 | 1,445.7                            | 1.4                   |
| 17 | 46.25 | 0.062 | (19,900)  | (920.4)               | 526.7                              | 0.5                   |
| 18 | 48.13 | 0.183 | 12,100    | 582.4                 | 1,109.6                            | 1.1                   |
| 19 | 46.63 | 0.007 | (17,600)  | (820.7)               | 290.0                              | 0.3                   |
| 20 | 48.12 | 0.000 | (700)     | (33.7)                | 256.6                              |                       |

もちろん、表17.2と表17.3の例は、ボラティリティが一定で、取引コストはないという意味で理想化されたものである。

上の例に対して行った、1,000個のランダムな株価のパスから得られるデルタ・ヘッジのパフォーマンスに関する統計の結果を、表17.4（次頁）に示す。表17.1と同様に、パフォーマンスはオプションのヘッジ・コストの標準偏差とBlack-Scholes価格の比で測られている。デルタ・ヘッジは、明らかにストップ・ロス戦略よりも大幅にパフォーマンスが改善している。ま

表17.4 デルタ・ヘッジのパフォーマンス（パフォーマンスはオプションを売却してそれをヘッジするコストの標準偏差のオプションの理論価格に対する比率）

| リバランスの間隔(週) | 5    | 4    | 2    | 1    | 0.5  | 0.25 |
|-------------|------|------|------|------|------|------|
| パフォーマンス     | 0.43 | 0.39 | 0.26 | 0.19 | 0.14 | 0.09 |

た、ストップ・ロス戦略とは異なり、ヘッジの見直し頻度を多くすればするほど、デルタ・ヘッジのパフォーマンスは安定的に改善している。

デルタ・ヘッジの目標は、金融機関のポジションの価値をできるだけ変化させずに維持することにある。当初売却したオプションの価格は240,000ドルである。ところが、表17.2のように株価が推移すると、第9週におけるオプションの価値を計算すると414,500ドルになる。したがって、金融機関は、オプションの売りポジションで174,500ドルの損失を被っている。現金収支を累積コストでみると、第9週は第0週より1,442,900ドル悪化している。保有株式の価値は2,557,800ドルから4,171,100ドルに増えている。これらをすべて合計すると、金融機関のポジションの価値は9週間でわずか4,100ドルしか変化していないことがわかる。

### コストの原因

表17.2と表17.3のデルタ・ヘッジを行うことによって、オプションの買いポジションと等価なポジションがつくられている。これがオプション売却による金融機関の売りポジションを打ち消している。表をみればわかるように、売りポジションのデルタ・ヘッジは、株価が下がると売って、上がると買うという操作であるため、高値買い・安値売りの戦略ともいえる。240,000ドルのコストは、売りと買いの価格差の平均から生じているものである。

### ポートフォリオのデルタ

価格  $S$  の単一資産に依存するオプションまたは他のデリバティブのポー

トフォリオのデルタは、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S}$$

である。ここで  $\Pi$  はポートフォリオの価値である。

ポートフォリオのデルタは、ポートフォリオ内の個々のデリバティブのデルタから計算できる。オプション  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) の量が  $w_i$  のポートフォリオのデルタは、次のように与えられる。

$$\Delta = \sum_{i=1}^n w_i \Delta_i$$

ただし、 $\Delta_i$  は  $i$  番目のオプションのデルタである。この式を用いて、ポートフォリオのデルタをゼロにするのに必要な原資産のポジションを計算することができる。このようなポジションをとったとき、ポートフォリオはデルタ・ニュートラル (delta neutral) であるという。

ある金融機関が株券オプションの次の三つのポジションを保有しているものとする。

1. 行使価格が55ドル、満期3カ月のコール・オプション100,000単位の買いポジション。オプション1単位のデルタは0.533。
2. 行使価格が56ドル、満期5カ月のコール・オプション200,000単位の売りポジション。オプション1単位のデルタは0.468。
3. 行使価格が56ドル、満期2カ月のプット・オプション50,000単位の売りポジション。オプション1単位のデルタは-0.508。

このとき、ポートフォリオ全体のデルタは次のようになる。

$$100,000 \times 0.533 - 200,000 \times 0.468 - 50,000 \times (-0.508) = -14,900$$

つまり、14,900株を購入することにより、ポートフォリオをデルタ・ニュートラルにすることができます。

## 取引コスト

デリバティブのディーラーはポジションをデルタ・ニュートラルに保つため、通常日に1回、ポジションをリバランスする。特定の資産に対するオプ

ションを少量しか保有していないときは、売買にかかる取引コストのために、リバランスは費用がかかりすぎてできない場合が多い。オプションのポートフォリオが大きい場合は、リバランスは実行可能である。原資産の1回のみの取引でポートフォリオ全体のデルタをゼロにすることができる。そのため、ヘッジのための取引コストは、多種多様な取引から生み出される収益で吸収される。

## 17.5 セータ

オプションのポートフォリオに対するセータ (theta)  $\Theta$  は、他の条件が不変で時間のみが経過した場合のポートフォリオの価値の変化率である。セータは、ポートフォリオのタイム・ディケイ (time decay) とも呼ばれる。配当のない株式のヨーロピアン・コール・オプションに対しては、Black-Scholes の公式より、

$$\Theta(\text{コール}) = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

となる。ここで  $d_1$  と  $d_2$  は(13.20)式のものと同じである。また、

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (17.2)$$

は標準正規分布の確率密度関数である。

株式のヨーロピアン・プット・オプションに対しては (章末問題13.17を参照)，

$$\Theta(\text{プット}) = -\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2)$$

となる。 $N(-d_2) = 1 - N(d_2)$  より、プットのセータは対応するコールのセータより  $rKe^{-rT}$ だけ大きい。

以上の式では時間は年数をベースとして計算しているが、通常、セータは他の条件が同じまま 1 日が経過したときのポートフォリオの価値変化として計算される。セータは暦日ベースか取引日ベースかで計算される。暦日ペー

スの場合はセータの式を365で割り、取引日ベースの場合は252で割る必要がある (DerivaGem ソフトウェアは暦日ベースでセータを計算している)。

【例17.2】

例17.1のように、配当のない株式に対するコール・オプションについて考える。株価は49ドル、行使価格は50ドル、無リスク金利は5%，満期までの時間は20週間 ( $=0.3846$ 年)、ボラティリティは20%とする。この場合、 $S_0=49$ 、 $K=50$ 、 $r=0.05$ 、 $\sigma=0.2$ 、 $T=0.3846$ である。

オプションのセータは、

$$-\frac{S_0 N'(d_1) \sigma}{2\sqrt{T}} - r K e^{-rT} N(d_2) = -4.31$$

になり、暦日ベースのセータは $-4.31/365=-0.0118$ 、取引日ベースのセータは $-4.31/252=-0.0171$ になる。

オプションのセータはほとんどの場合、負の値をとる(注7)。これは、他の条件が変わらないまま満期までの期間が短くなると、オプションの価値は減少していくからである。株式のコール・オプションのセータが株価水準によってどのように変わるかを、図17.5(次頁)に示す。株価が非常に低い場合は、セータはゼロに近い。アット・ザ・マネーのコール・オプションの場合、セータは負の大きな値をとる。株価が大きくなるにつれて、セータは $-rK e^{-rT}$ に近づく。図17.6(次頁)はイン・ザ・マネー、アット・ザ・マネー、アウト・オブ・ザ・マネーのそれぞれの場合について、コール・オプションの満期までの期間に対するθの変化の典型例を示したものである。

セータは、デルタと同じタイプのヘッジ・パラメータではない。というのは、将来の株価については不確実性があるが、時間の経過には不確実性はないからである。原資産の価格変化に対してヘッジを行うことはあるが、オプション・ポートフォリオの時間の経過に対してヘッジを行うということはある。

(注7) 配当のない株式に対するイン・ザ・マネーのヨーロピアン・プット・オプションや、高金利通貨に対するイン・ザ・マネーのヨーロピアン・コール・オプションが例外となりうる。

図17.5 株価に対するヨーロピアン・コール・オプションのセータの変化

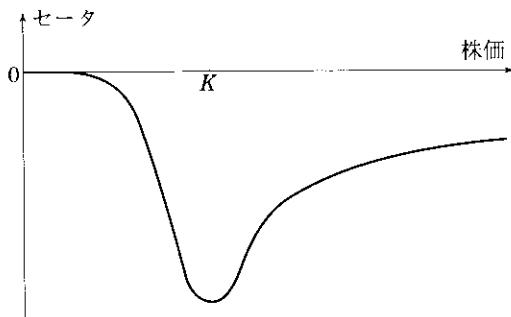
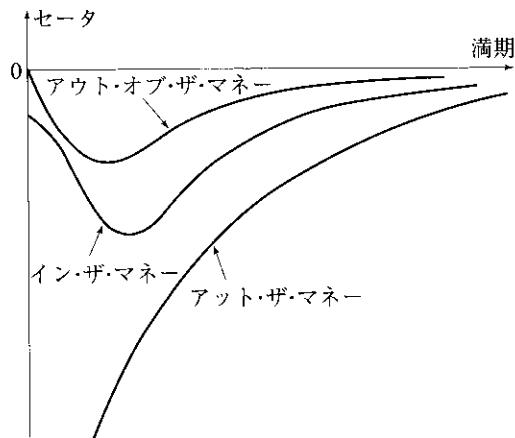


図17.6 満期までの期間に対するヨーロピアン・コール・オプションの価値の変化の典型例



まり意味がない。それにもかかわらず、多くのトレーダーはセータをポートフォリオに対する有益な指標として利用している。これは後述するように、デルタ・ニュートラルなポートフォリオにおいては、セータはガンマのかわりの指標になるからである。

## 17.6 ガンマ

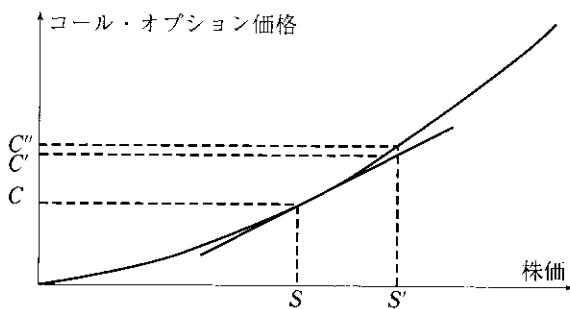
ある原資産に対するオプション・ポートフォリオのガンマ (gamma)  $\Gamma$  は、原資産価格の変化に対するそのポートフォリオのデルタの変化率である。これはポートフォリオの価値の資産価格に関する 2 階偏導関数

$$\Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

である。

ガンマが小さければ、デルタはゆっくりとしか変化しないため、ポートフォリオをデルタ・ニュートラルに保つための調整も比較的頻繁に行わなくてよい。しかし、ガンマの絶対値が大きい場合には、デルタの原資産価格に対する感応度が高いため、デルタ・ニュートラルなポートフォリオを長い間調整せずにそのままにしておくのは大変危険である。図17.7はこのことを例示したものである。株価が  $S$  から  $S'$  に動くとき、実際のオプション価格は  $C$  から  $C''$  に変化するが、デルタ・ヘッジではオプション価格が  $C$  から  $C'$  に変化すると仮定してヘッジしている。 $C$  と  $C'$  の差がヘッジ誤差になる。誤差の大きさはオプション価格と株価との関係式の曲率に依存している。ガンマはこの曲率を測るものである(注8)。

図17.7 非線形性によるヘッジ誤差



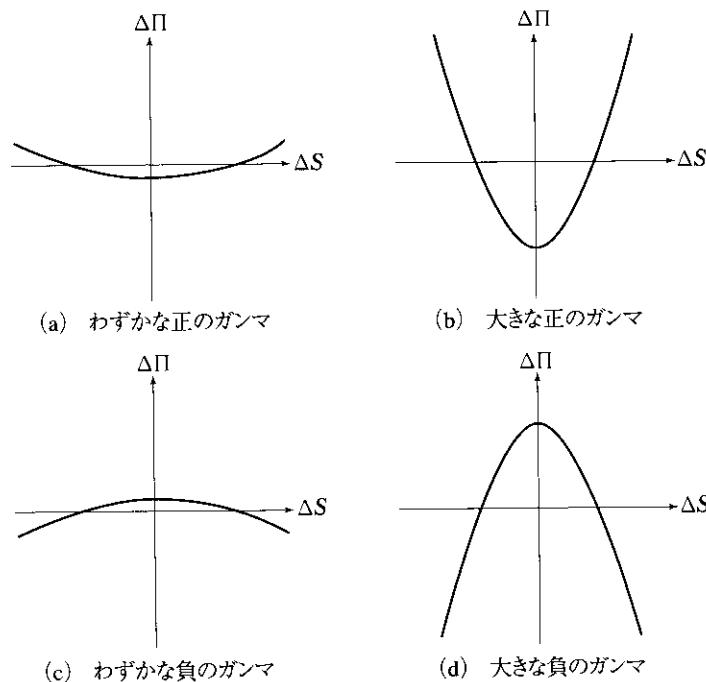
(注8) 実際、実務家はオプションのガンマを曲率 (curvature) と呼ぶこともある。

$\Delta S$  を微小時間  $\Delta t$  における原資産の価格変化、 $\Delta\Pi$  をそれに対応するポートフォリオの価値の変化とする。章末の付録に示すように、 $\Delta t$  より高次の項を無視すると、デルタ・ニュートラルなポートフォリオに対して、

$$\Delta\Pi = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2 \quad (17.3)$$

が成り立つ。ここで  $\Theta$  はポートフォリオのセータである。図17.8に  $\Delta\Pi$  と  $\Delta S$  の関係を示す。ガンマが正のときは、セータは負になる傾向がある。したがって、 $S$  が変化しないとポートフォリオの価値は減少するが、 $S$  がいずれかの方向に大きく変化するとポートフォリオの価値は増加する。逆にガンマが負のときは、セータは正になる傾向がある。したがって、 $S$  が変化しないとポートフォリオの価値は増加するが、 $S$  がいずれかの方向に大きく変化

図17.8 テルタ・ニュートラルなポートフォリオに対する  $\Delta\Pi$  と  $\Delta S$  の間の関係



するとポートフォリオの価値は減少する。ガンマの絶対値が大きくなると、ポートフォリオの価値の  $S$  に対する感応度は大きくなる。

【例17.3】

ある資産に対するオプションのデルタ・ニュートラルなポートフォリオのガンマが、 $-10,000$ であるとする。(17.3)式から、短い時間の間に資産価格が $+2$ または $-2$ だけ変化をすると、ポートフォリオはデルタ・ニュートラルにもかかわらず、価値が約 $0.5 \times 10,000 \times 2^2 = 20,000$ ドルだけ減少することがわかる。

### ガンマ・ニュートラルなポートフォリオの構築

原資産からなるポジションはガンマがゼロなので、ポートフォリオのガンマ調整に用いることはできない。ガンマの調節には、原資産価格に対して線型でない変化をする、オプションのような商品のポジションが必要である。

デルタ・ニュートラルなポートフォリオのガンマを  $\Gamma$ 、上場オプションのガンマを  $\Gamma_T$ とする。このとき、上場オプションを  $w_T$ だけポートフォリオに追加すると、ポートフォリオ全体のガンマは、

$$w_T\Gamma_T + \Gamma$$

になる。したがって、ポートフォリオをガンマ・ニュートラルにするために必要な上場オプションのポジションは $-\Gamma/\Gamma_T$ になる。オプションを追加することによりデルタも変化するので、デルタ・ニュートラルを保つには原資産のポジションを再調整する必要がある。ポートフォリオは短い間だけガンマ・ニュートラルな状態にあることに注意しよう。時間が経過すると、ガンマ・ニュートラルな状態を保つには、上場オプションのポジションを常に $-\Gamma/\Gamma_T$ に等しくなるように調整する必要がある。

ポートフォリオをデルタ・ニュートラルかつガンマ・ニュートラルにすることは、図17.7に例示したヘッジ誤差に対する修正であると考えることができる。デルタ・ニュートラルは、リバランス間の比較的小さな株価変動からポジションを守るものである。一方、ガンマ・ニュートラルは、ヘッジのリ

バランス間の大きな株価変動からポジションを守るものである。ポートフォリオはデルタ・ニュートラルで、そのガンマは-3,000であるとする。さらに、ある上場コール・オプションのデルタとガンマが、それぞれ0.62と1.50であるとする。このとき、ポートフォリオに、

$$\frac{3,000}{1.5} = 2,000$$

単位のオプションの買いポジションを追加すれば、ポートフォリオはガンマ・ニュートラルにできる。しかし、ポートフォリオのデルタはゼロから $2,000 \times 0.62 = 1,240$ に変化してしまうので、デルタ・ニュートラルを保つには、ポートフォリオから1,240単位の原資産を売却する必要がある。

### ガンマの計算

配当のない株式のヨーロピアン・コールヒット・オプションのガンマは、

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

で与えられる。ただし、 $d_1$ は(13.20)式、 $N'(x)$ は(17.2)式で定義されたものである。買いポジションのガンマは常に正で、 $S_0$ が変化すると図17.9のように変化する。アウト・オブ・ザ・マネー、アット・ザ・マネー、イン・ザ・マネーの各場合について、満期までの時間に対してガンマが変化する様

図17.9 株価に対するオプションのガンマの変化

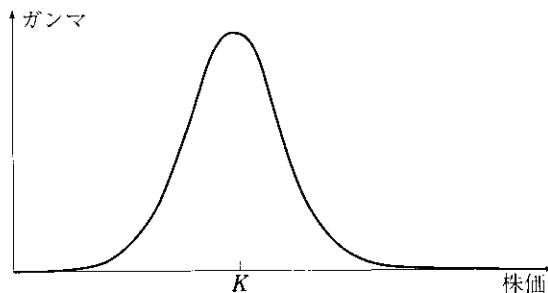
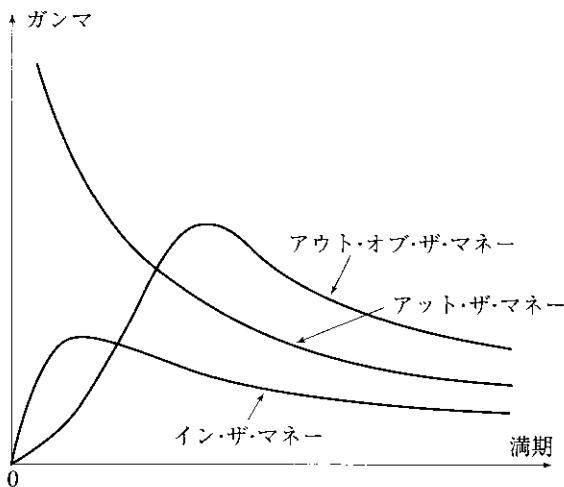


図17.10 満期までの期間に対する株券オプションの  
ガンマの変化



子を図17.10に示す。アット・ザ・マネーのオプションは、満期が近づくにつれガンマが上昇する。短期のアット・ザ・マネーのオプションのガンマは非常に大きく、オプション保有者のポジションの価値は、株価のジャンプに対して感応度が非常に高い。

【例17.4】

例17.1のように、配当のない株式に対するコール・オプションについて考える。株価は49ドル、行使価格は50ドル、無リスク金利は5%、満期までの時間は20週間 ( $=0.3846$ 年)、ボラティリティは20%とする。この場合、 $S_0=49$ 、 $K=50$ 、 $r=0.05$ 、 $\sigma=0.2$ 、 $T=0.3846$ である。

オプションのガンマは、

$$\frac{N'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}} = 0.066$$

になる。したがって、株価が  $\Delta S$  だけ変化するとき、オプションのデルタは  $0.066\Delta S$  だけ変化する。

## 17.7 デルタ, セータ, ガンマの間の関係

配当のない株式に対するデリバティブ単体の価格は、微分方程式(13.16)を満たさなければならない。したがって、そのようなデリバティブからなるポートフォリオの価値  $\Pi$  も微分方程式

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + rS \frac{\partial \Pi}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2} = r\Pi$$

を満たしている。ここで、

$$\Theta = \frac{\partial \Pi}{\partial t}, \quad \Delta = \frac{\partial \Pi}{\partial S}, \quad \Gamma = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial S^2}$$

であるから、

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi \quad (17.4)$$

が成り立つ。他の原資産についても同様の関係が得られる（章末問題17.19を参照）。

デルタ・ニュートラルなポートフォリオに対しては、 $\Delta = 0$  となるため、

$$\Theta + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma = r\Pi$$

が成り立つ。この式から、 $\Theta$  が正の大きな値をとるとき  $\Gamma$  は負の大きな値をとり、その逆も成り立つことがわかる。このことは、図17.8のグラフの様子とも整合性がとれており、デルタ・ニュートラルなポートフォリオでは、セータがある程度ガンマのかわりになる理由である。

## 17.8 ベガ

ここまででは、デリバティブの原資産のボラティリティが一定であることを暗に仮定してきた。実際には、ボラティリティは時間とともに変化する。したがって、原資産価格の変化や時間経過だけでなく、ボラティリティの変化によってもデリバティブの価値は変化する。

デリバティブのポートフォリオに対するベガ (vega)  $V$  は、原資産のボラティリティ変化に対するポートフォリオの価値の変化率を表している（注9）。

$$V = \frac{\partial \Pi}{\partial \sigma}$$

ベガの絶対値が大きい場合は、ポートフォリオの価値はボラティリティの小さな動きに対しても敏感に変化する。逆に、ベガの絶対値が小さい場合は、ボラティリティの変化がポートフォリオの価値に与える影響は比較的小さい。

原資産からなるポジションのベガは、ゼロである。しかし、上場オプションのポジションを加えることで、ポートフォリオのベガを調整することができる。 $V$  をポートフォリオのベガ、 $V_T$  を上場オプションのベガとすると、 $-V/V_T$  単位の上場オプションのポジションをとれば、このポートフォリオを瞬間的にベガ・ニュートラルにすることができる。ただし、ガンマ・ニュートラルなポートフォリオは一般的にはベガ・ニュートラルではなく、逆も然りである。したがって、ガンマもベガもニュートラルにするには、一般的に同一の原資産に対する 2 種類以上のデリバティブをヘッジに使わなければならない。

#### 【例17.5】

ガンマが -5,000、ベガが -8,000 のデルタ・ニュートラルなポートフォリオを考える。表にあるオプションが取引できるとする。オプション 1 について 4,000 単位の買いポジションをとれば、ポートフォリオをベガ・ニュートラルにできる。これに伴い、デルタは 2,400 に増加するので、デルタ・ニュートラルに保つには、原資産を 2,400 単位売却する必要がある。また、ポートフォリオのガンマは -5,000 から -3,000 に変わる。

(注9) ベガはギリシャ文字の一つではないが、グリークスの名前の一つとして用いられている。

|         | デルタ | ガンマ   | ベガ    |
|---------|-----|-------|-------|
| ポートフォリオ | 0   | -5000 | -8000 |
| オプション1  | 0.6 | 0.5   | 2.0   |
| オプション2  | 0.5 | 0.8   | 1.2   |

オプション1とオプション2を用いれば、ポートフォリオのガンマとベガをニュートラルにできる。 $w_1$ と $w_2$ をオプション1とオプション2のポートフォリオへの組入量とすると、次の連立方程式を満たす必要がある。

$$-5,000 + 0.5w_1 + 0.8w_2 = 0$$

$$-8,000 + 2.0w_1 + 1.2w_2 = 0$$

これを解くと、 $w_1=400$ 、 $w_2=6,000$ になる。したがって、オプション1を400単位、オプション2を6,000単位だけ組み入れると、ポートフォリオのガンマとベガをニュートラルにすることができる。二つの上場オプションを加えた後のポートフォリオのデルタは、 $400 \times 0.6 + 6,000 \times 0.5 = 3,240$ になる。よって、3,240単位の原資産を売却すればデルタ・ニュートラルに保つことができる。

配当のない株式に対するヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションのベガは、

$$V = S_0 \sqrt{T} N'(d_1)$$

で与えられる。ここで $d_1$ は(13.20)式のものと同じである。 $N'(x)$ は(17.2)式で与えられている。ヨーロピアン・オプションとアメリカン・オプションの買いポジションのベガは常に正である。 $S_0$ が変化した時にベガが変化する様子を図17.11に示す。

#### 【例17.6】

例17.1のように、配当のない株式に対するコール・オプションについて考える。株価は49ドル、行使価格は50ドル、無リスク金利は5%、満期までの時間は20週間 (=0.3846年)、ボラティリティは20%とする。こ

の場合、 $S_0=49$ ,  $K=50$ ,  $r=0.05$ ,  $\sigma=0.2$ ,  $T=0.3846$ である。

オプションのベガは、

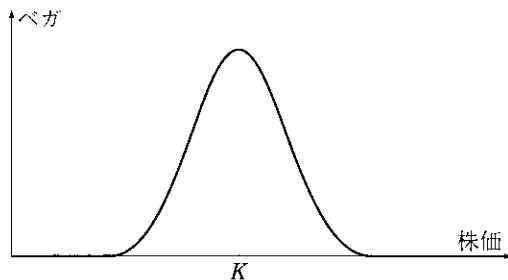
$$S_0\sqrt{T}N'(d_1)=12.1$$

になる。したがって、ボラティリティが20%から21%へ1% (0.01) 増加すると、オプションの価値は約 $0.01 \times 12.1 = 0.121$ だけ増加する。

Black-Scholes モデルおよびその拡張を用いてベガを計算するのは奇妙に感じられるかもしれない。Black-Scholes モデルではボラティリティは一定と仮定されているからである。ボラティリティが確率変動すると仮定しているモデルを用いてベガを計算するのが、理論的にはより正しいと思われる。しかし、確率ボラティリティモデルから計算されたベガと Black-Scholes のベガは非常に似通ったものであることがわかっているので、ボラティリティを一定とするモデルからベガを計算しても実務上問題はない(注10)。

ガンマ・ニュートラルは、ヘッジのリバランスから次のリバランスまでの間に起こる原資産価格の大きな変動に対するヘッジである。ベガ・ニュートラルはパラメータ  $\sigma$  の変化に対するヘッジである。ベガやガンマのヘッジに取引可能な上場オプションを用いるのが最善かどうかは、ヘッジのリバラ

図17.11 株価に対するオプションのベガの変化



(注10) J.C. Hull and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42 (June 1987) : 281-300 および J.C. Hull and A. White, "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility," *Advances in Futures and Options Research*, 3 (1988) : 27-61を参照。

ンス間隔やボラティリティのボラティリティに依存している(注11)。

ボラティリティが変化するとき、短期オプションのインプライド・ボラティリティは長期オプションのインプライド・ボラティリティよりも大きく変化する傾向がある。したがって、ポートフォリオのベガを計算するときは、長期オプションのボラティリティは短期オプションのボラティリティよりも少なく変化させることが多い。そのようなやり方の一つを21.6節で議論する。

## 17.9 ロー

オプション・ポートフォリオのロー(rho)は、金利の変化に対するポートフォリオの価値の変化率、すなわち、

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r}$$

である。これは他の要素が変化しない状態での、ポートフォリオの金利に対する感応度を測るものである。配当のない株式に対するヨーロピアン・コール・オプションの場合には、

$$\text{rho(コール)} = KTe^{-rT}N(d_2)$$

となる。ここで  $d_2$  は(13.20)式のものと同じである。ヨーロピアン・プット・オプションの場合には、

$$\text{rho(プット)} = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

となる。

### 【例】17.7】

例17.1のように、配当のない株式に対するコール・オプションについて考える。株価は49ドル、行使価格は50ドル、無リスク金利は5%，満期までの時間は20週間( $=0.3846$ 年)、ボラティリティは20%とする。この場合、 $S_0=49$ 、 $K=50$ 、 $r=0.05$ 、 $\sigma=0.2$ 、 $T=0.3846$ である。

(注11) このことに関する議論は J.C. Hull and A. White, "Hedging the Risks from Writing Foreign Currency Options," *Journal of International Money and Finance*, 6 (June 1987) : 131-52を参照。

オプションのローは、

$$KTe^{-rT}N(d_2) = 8.91$$

になる。したがって、無リスク金利が5%から6%へ1%（0.01）増加すると、オプションの価値は約 $0.01 \times 8.91 = 0.0891$ だけ増加する。

## 17.10 現実のヘッジ

理想的な世界では、金融機関のトレーダーはすべてのグリークスをゼロに保つために、何度もポートフォリオをリバランスすることができる。しかし、実際にはこれは不可能である。一つの原資産に依存する大きなポートフォリオを管理している場合には、通常、トレーダーは原資産を取引することで少なくとも1日に1回はデルタをゼロ、あるいはゼロ近くにすることができる。しかし、オプションやその他の非線形性をもつデリバティブを競争力のある価格で必要な量だけ取引するのは困難なため、ガンマとベガをゼロにすることはそれほど容易ではない。ビジネス寸見17.1（次頁）では、金融機関でダイナミック・ヘッジがどのように行われているかについて紹介する。

デリバティブ取引には規模の経済が働く。一つの資産に対する少量のオプションからなるポートフォリオを日々の取引によってデルタ・ニュートラルに保つのは、通常、経済的に実行不可能である。ヘッジするオプション当りの取引コストが高いからである（注12）。しかし、一つの資産に対するオプションからなる大きなポートフォリオをデルタ・ニュートラルに保つ場合には、ヘッジするオプション当りの取引コストはずっと割に合ったものになる。

（注12）取引コストは、ヘッジヤーが日々原資産をいくらかオファー価格で買うか、ピップ価格で売る、ということから生じる。

## ビジネス寸見17.1 ダイナミック・ヘッジの実際

金融機関における典型的な取り決めとして、ある特定の原資産価格に依存するデリバティブ・ポートフォリオの管理は、1人のトレーダーまたは一緒に取引を行っているトレーダーのチームに任せられる。たとえば、ゴールドマン・サックスのトレーダーの1人が、豪ドルの価値に依存するすべてのデリバティブの管理責任をもつ場合もある。コンピュータ・システムがポートフォリオの価値やグリークスを計算する。それぞれのグリークスに対して限度が設定され、トレーダーは1日の終わりに限度額の超過を希望するのであれば、特別な許可が必要となる。

デルタ限度枠は、原資産に換算した最大ポジションで表されることが多い。たとえば、ゴールドマン・サックスにおけるマイクロソフト株に対するデルタ限度枠が1,000万ドルである場合に、マイクロソフトの株価が50ドルであれば、デルタの絶対値は200,000を超えてはならないことになる。一方、ベガ限度枠は、ボラティリティの1%変化当たりの最大のドル・エクスポートージャーで表されることが多い。

もちろんのこと、オプション・トレーダーは1日の終わりにはポジションをデルタ・ニュートラルかそれに近い形にする。ガンマとベガはモニタリングされるが、日次ではニュートラルにしないのが一般的である。金融機関は顧客との取引でオプションを売却することが多い。その結果、ネガティブ・ガンマやネガティブ・ベガのポジションを積み上げることになる。そのため、オプション・トレーダーは、競争力のある価格でのオプション購入による、ガンマ・リスクやベガ・リスクをヘッジする機会を常にうかがっている。

オプションのポートフォリオには、ガンマやベガのリスク管理の問題は時間とともにいくぶん緩和されていくという一つの特長がある。オプションは売却当初はアット・ザ・マネーに近いことが多いため、ガンマやベガは比較的大きい。しかし、少し時間が経過すると、原資産価格が

変化して、ディープ・アウト・オプ・ザ・マネーかディープ・イン・ザ・マネーになることが多い。その場合、ガンマやベガは非常に小さくなる。逆に、オプション・トレーダーにとって最悪のシナリオは、満期が近づいたときにオプションがアット・ザ・マネー近辺にあるような場合である。

### 17.11 シナリオ分析

デルタ、ガンマ、およびベガのようなリスクをモニタリングすることに加え、オプション・トレーダーはしばしばシナリオ分析も行う。この分析では、さまざまなシナリオのもとで、特定の期間におけるポートフォリオの損益が計算される。この期間は、リスクを測る金融商品の流動性に応じて決められる。シナリオは、経営者が選んだり、モデルで生成したりする。

通貨オプションのポートフォリオをもつ銀行について考えよう。このポートフォリオの価値に影響を与える変数は、主に二つある。それは、為替レートと為替レートのボラティリティである。為替レートが現在1.0000で、ボラティリティが年率10%であるとする。銀行は、さまざまなシナリオのもとで2週間後に発生する損益について、表17.5のような表を作成することができる。この表では、七つの異なる為替レートと三つの異なるボラティリティが

表17.5 さまざまなシナリオのもとで2週間後に実現する損益

(単位：100万ドル)

| ボラティリティ | 為替レート |      |      |      |      |      |      |
|---------|-------|------|------|------|------|------|------|
|         | 0.94  | 0.96 | 0.98 | 1.00 | 1.02 | 1.04 | 1.06 |
| 8%      | +102  | +55  | +25  | +6   | -10  | -34  | -80  |
| 10%     | +80   | +40  | +17  | +2   | -14  | -38  | -85  |
| 12%     | +60   | +25  | +9   | -2   | -18  | -42  | -90  |

考えられている。2週間における為替レートの動きの1標準偏差は約0.02なので、およそ1, 2, 3標準偏差の為替レートの変動が考慮されていることになる。

表17.5では、最大損失はこの表の下段右隅である。これは、ボラティリティが12%に増加し、為替レートが1.06に上昇する場合に対応する。表17.5のような表では、最大損失は表の四隅のいずれかで起こることが多いが、常にそうなるとは限らない。たとえば、銀行のポートフォリオがバタフライ・スプレッド(10.2節を参照)の売りポジションからなる場合、為替レートが動かない時、最大損失が実現する。

## 17.12 他のヨーロピアン・オプションのグリークス

これまで導出してきたデルタ、セータ、ガンマ、ベガ、およびローに関する公式は、配当のない株式のオプションに対するものであった。株式に配当利回り  $q$  の連続配当がある場合には、これらの公式は表17.6のようになる。それらの公式に現れる  $d_1$  と  $d_2$  は、(15.4)式と(15.5)式に現れたものと同じである。 $q$  を株価指数の配当利回りにすると、ヨーロピアン指標オプションのグリークスが得られる。 $q$  を外国の無リスク金利にすると、ヨーロピアン通貨オプションのグリークスが得られる。 $q=r$  とすると、ヨーロピアン先物オプションのグリークスが得られる。ただし、ヨーロピアン先物オプションのローは例外で、ヨーロピアン先物コール・オプションのローは $-cT$ ,

表17.6 利回り  $q$  の資産のオプションに対するグリークス

| グリークス | コール・オプション   | プット・オプション   |
|-------|---|---|
| デルタ   | $e^{-qT}N(d_1)$   | $e^{-qT}[N(d_1)-1]$   |
| ガンマ   | $\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$                                      | $\frac{N'(d_1)e^{-qT}}{S_0\sigma\sqrt{T}}$  |
| セータ   | $-S_0N'(d_1)\sigma e^{-qT}/(2\sqrt{T})$<br>$+qS_0N(d_1)e^{-qT}-rKe^{-rT}N(d_2)$ | $-S_0N'(d_1)\sigma e^{-qT}/(2\sqrt{T})$<br>$-qS_0N(-d_1)e^{-qT}+rKe^{-rT}N(-d_2)$ |
| ベガ    | $S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT}$   | $S_0\sqrt{T}N'(d_1)e^{-qT}$   |
| ロー    | $KT e^{-rT}N(d_2)$  | $-KT e^{-rT}N(-d_2)$  |

ヨーロピアン先物プット・オプションのローは $-pT$  になる。

通貨オプションの場合は、2種類の金利に対応する2種類のローが定義される。国内金利に対するローは表17.6にある式で与えられる ( $d_2$  は(15.11)式のものと同じである)。通貨に対するヨーロピアン・コール・オプションの外国金利に対するローは、

$$\text{rho} = -Te^{-r_f T} S_0 N(d_1)$$

である。ヨーロピアン・プットに対するローは、

$$\text{rho} = Te^{-r_f T} S_0 N(-d_1)$$

である。ここで  $d_1$  は(15.11)式のものと同じである。

### フォワード契約のデルタ

デルタの概念は、オプション以外の金融商品にも適用できる。配当のない株式のフォワード契約について考えてみよう。(5.5)式よりフォワード契約の価値は  $S_0 - Ke^{-r_f T}$  である。ここで  $K$  は受渡価格、 $T$  はフォワード契約の満期までの時間である。株価が  $\Delta S$  だけ変化するとき、他の条件が変わらなければ、その株式のフォワード契約の価値も  $\Delta S$  だけ変化する。したがって、株式1株に対するロング・フォワード契約のデルタは常に1.0になる。このことより、1株に対するフォワード契約の買いポジションは、株式1株の売付けでヘッジできる。また、1株に対するフォワード契約の売りポジションは、株式1株の買いでヘッジできる(注13)。

配当利回り  $q$  の資産に対しては、(5.7)式よりフォワード契約のデルタは  $e^{-qT}$  になることがわかる。株価指数フォワード契約のデルタの場合は、 $q$  を指数の配当利回りにすればよい。外国為替フォワード契約のデルタの場合は、 $q$  を外国の無リスク金利  $r_f$  にすればよい。

### 先物契約のデルタ

(5.1)式から、配当のない株式に対する先物価格は  $S_0 e^{r_f T}$  である。ここで

(注13) これらはヘッジ・アンド・フォゲット戦略である。デルタが常に1.0であることから、契約の満期まで株式のポジションを調整する必要がない。

$T$  は先物契約の満期までの時間である。これより、株価が  $\Delta S$  だけ上昇するとき、他の条件が変わらなければ、先物価格は  $\Delta Se^{rT}$  だけ変化することがわかる。先物契約は日々値洗いされるため、先物契約の買手にはほとんどその瞬間にこの額の利益が実現する。したがって、先物契約のデルタは  $e^{rT}$  である。配当利回りが  $q$  の資産に対する先物契約の場合は、(5.3)式よりデルタは  $e^{(r-q)T}$  になる。

興味深いことに、値洗いの影響で、先物契約とフォワード契約のデルタはわずかにがら異なる。このことは、金利が一定でフォワード価格と先物価格が等しくなる場合でもそうである。

先物契約は、ポジションをデルタ・ニュートラルにするのに使われることもある。以下の記号を用いる。

$T$  : 先物契約の満期

$H_A$  : デルタ・ヘッジに必要な現物資産のポジション

$H_F$  : 現物のかわりとしてデルタ・ヘッジに必要な先物契約のポジション

原資産が配当のない株式の場合には、これまでに行ってきた分析から、

$$H_F = e^{-rT} H_A \quad (17.5)$$

が成り立つ。原資産の配当利回りが  $q$  の場合には、

$$H_F = e^{-(r-q)T} H_A \quad (17.6)$$

が成り立つ。株価指数に対しては、 $q$  を指数の配当利回りにする。また、通貨に対しては、 $q$  を外国無リスク金利  $r_f$  にすればよく、

$$H_F = e^{-(r-r_f)T} H_A \quad (17.7)$$

となる。

#### 【例17.8】

ある米銀が、458,000英ポンドの売りポジションでデルタ・ニュートラルにできる通貨オプションのポートフォリオを保有しているとする。米国の無リスク金利を年率 4 %、英国の無リスク金利を年率 7 % とする。(17.7)式より、ヘッジに 9 カ月物通貨先物を用いる場合は、先物の売りポジションは、

$$e^{-(0.04 - 0.07) \times 9/12} 458,000$$

すなわち468,442英ポンド必要になる。先物契約の取引単位は62,500ポンドの購入または売却なので、7単位（468,442/62,500に最も近い単位数）の先物を売り付ける必要がある。

### 17.13 ポートフォリオ・インシュアランス

ポートフォリオ・マネジャーは、ときにポートフォリオに対してプット・オプションを保有したいと思うことがある。そうすることで、ポートフォリオの価値がある一定水準よりも下がることを防ぐ一方で、市場が上昇したときに収益を得る余地を残すことができる。これを実現する（15.1節で議論した）一つの方法は、S&P 500のようなマーケット指数に対するプット・オプションを買うことである。もう一つの方法は、オプションを複製することである。

ポジションのデルタを必要とするオプションのデルタに等しくなるように原資産（または原資産の先物）のポジションを維持すれば、オプションを複製することができる。オプションの複製に必要なポジションは、ヘッジに必要なポジションの逆になる。オプションをヘッジするということは、同じオプションの反対ポジションを複製することに他ならないからである。

必要なプット・オプションを市場で購入するよりも複製するほうが、ポートフォリオ・マネジャーには魅力的である理由が二つある。一つ目は、大規模なポートフォリオを運用しているファンドマネジャーが取引に必要とするだけの流動性が、オプション市場にない場合があるという理由である。二つ目は、ファンドマネジャーが必要とする行使価格と行使日のオプションが、上場オプション市場では取引されていない場合があるという理由である。

株式ポートフォリオあるいは指標先物を取引することによって、オプションを複製することができる。まず、ポートフォリオによるプット・オプションの複製を考えてみよう。表17.6より、ポートフォリオに対するヨーロピア

ン・プットのデルタは、

$$\Delta = e^{-qT} [N(d_1) - 1] \quad (17.8)$$

である。ここで、これまでの記号どおり、

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q + \sigma^2/2) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$S_0$ はポートフォリオの価値、 $K$ は行使価格、 $r$ は無リスク金利、 $q$ はポートフォリオの配当利回り、 $\sigma$ はポートフォリオのボラティリティ、 $T$ はオプション期間である。ポートフォリオのボラティリティは、よく分散されたマーケット指数のボラティリティにベータを乗じた値と仮定されることが多い。

プット・オプションを複製するには、当初ポートフォリオに対して、

$$e^{-qT} [1 - N(d_1)]$$

の割合の株式を常に売却している状態に保ち、その売却代金を無リスク資産で運用すればよい。当初ポートフォリオの価値が下落した場合は、(17.8)式で与えられるプットのデルタのマイナスはさらに大きくなり、売却するポートフォリオの割合は増加する。当初ポートフォリオの価値が増加した場合は、プットのデルタのマイナスが小さくなり、売却するポートフォリオの割合は減少する（すなわち、当初ポートフォリオの一部分を買い戻すことになる）。

この戦略を用いてポートフォリオ・インシュアランスを行うということは、ファンドを、価格の下落リスクを回避する対象となる株式ポートフォリオと無リスク資産の二つに常に分割することである。株式ポートフォリオの価値が上昇すると、無リスク資産が売却されて株式ポートフォリオのポジションが追加される。逆に、株式ポートフォリオの価値が下落すると、株式ポートフォリオのポジションが減らされて無リスク資産が購入される。インシュアランスのコストは、ポートフォリオ・マネジャーによる取引が、常に売るのが相場下落後で、買うのが相場上昇後になることから生じるものである。

【例17.9】

ポートフォリオの価値を9,000万ドルとする。価格下落リスクをヘッジするために、ポートフォリオ・マネジャーは行使価格8,700万ドル、

満期 6 カ月のプット・オプションを必要としているとする。無リスク金利を年率 9 %, 配当利回りを年率 3 %, 指数のボラティリティを年率 25 % とする。S&P 500 指数が 900 であり、ポートフォリオが S&P 500 に非常によく連動しているとすれば、15.1 節で議論したように、一つの方法は行使価格 870 の S&P 500 プット・オプションを 1,000 単位購入することである。もう一つの方法は、必要とするプット・オプションを複製することである。いまの場合には、 $S_0 = 90,000,000$ ,  $K = 87,000,000$ ,  $r = 0.09$ ,  $q = 0.03$ ,  $\sigma = 0.25$ ,  $T = 0.5$  となるので、

$$d_1 = \frac{\ln(90/87) + (0.09 - 0.03 + 0.25^2/2)0.5}{0.25\sqrt{0.5}} = 0.4499$$

となり、必要とするオプションのデルタは、

$$e^{-qT}[N(d_1) - 1] = -0.3215$$

になる。したがって、必要とするオプションのデルタに一致させるためには、はじめはポートフォリオの 32.15% を売却すればよい。売却するポートフォリオの金額は定期的にモニターする必要がある。たとえば、ポートフォリオの価値が 1 日後に 8,800 万ドルに下落した場合には、オプションのデルタは 0.3679 に変化するため、当初ポートフォリオの 4.64 % をさらに売却する必要がある。一方、ポートフォリオの価値が 9,200 万ドルに上昇した場合には、オプションのデルタは -0.2787 に変化するため、当初ポートフォリオの 4.28% を買い戻す必要がある。

## 指数先物の利用

指数先物の取引コストは、対応する指数の構成銘柄の取引コストよりも一般的に安いため、現物よりも指数先物を用いてオプションを複製するほうが好まれることが多い。売り付ける先物契約の金額をポートフォリオの価値に対する割合で表すと、(17.6)式と(17.8)式より、

$$e^{-qT} e^{-(r-q)T^*} [1 - N(d_1)] = e^{q(T^*-T)} e^{-rT^*} [1 - N(d_1)]$$

になる。ここで  $T^*$  は先物契約の満期である。ポートフォリオの価値が指数

の  $A_1$  倍、指数先物の取引単位が指數の  $A_2$  倍とすると、売り付ける先物契約の単位数は、

$$e^{q(T^*-T)} e^{-rT^*} [1 - N(d_1)] A_1 / A_2$$

になる。

【例17.10】

前の例で、満期 9 カ月の S&P 500 先物を用いてオプションを複製することにする。この場合は、 $T = 0.5$ ,  $T^* = 0.75$ ,  $A_1 = 100,000$ ,  $A_2 = 250$ ,  $d_1 = 0.4499$ となるので、売り付ける先物契約の単位数は、

$$e^{q(T^*-T)} e^{-rT^*} [1 - N(d_1)] \frac{A_1}{A_2} = 122.96$$

あるいは四捨五入すると 123 になる。時間の経過と指數の変化に伴って、先物契約のポジションは調整する必要がある。

これまで分析では、ポートフォリオが指數に完全に連動していると仮定してきた。そうでない場合は、(a)ポートフォリオのベータを計算し、(b)必要とする保険の水準を満たす指數オプションのポジションを求め、(c)オプションを複製するための指數先物のポジションを算出することが必要である。15.1 節で検討したように、オプションの行使価格は、ポートフォリオの価値が保証したい水準に達した時のマーケット指數の予想レベルに等しくなるように設定すればよい。また、必要となる指數オプションの単位数は、ポートフォリオのベータが 1.0 のときに必要なオプションの単位数をベータ倍したものである。

## 17.14 株式市場のボラティリティ

第13章では、ボラティリティは新しい情報の到来のみによって生じているのか、あるいは取引そのものがボラティリティを生み出しているのか、という問題について議論した。上述したように、ポートフォリオ・インシュアランス戦略は、ボラティリティを大きくする可能性がある。たとえば、相場が

下落した時は、ポートフォリオ・インシュアランスを行っているポートフォリオ・マネジャーは、現物株式または株価指数先物を売ることになる。どちらの取引も相場の下落に拍車をかけるだろう（ビジネス寸見17.2を参照）。現物株式の売りはマーケット指数を直接押し下げる。指数先物の売りは先物価格を押し下げ、これが指数裁定取引のメカニズム（第5章を参照）を通じて株式の売り圧力に転じ、この場合もマーケット指数を押し下げることになる。同様に相場が上昇した時は、ポートフォリオ・インシュアランスを行っているポートフォリオ・マネジャーは、現物株式または株価指数先物を買うことになる。これが相場の上昇に拍車をかけるだろう。

正式なポートフォリオ取引戦略に加えて、多くの投資家は意識的か無意識かは別にして、それぞれのやり方でポートフォリオ・インシュアランス的な取引を行っている。たとえば、相場上昇時に買いに出て、下落時にはダウンサイド・リスクを抑えるために売りに出る投資家もいる。

ポートフォリオ・インシュアランス取引戦略（正式な戦略も、そうでないものも含めて）がボラティリティに影響を与えるかどうかは、ポートフォリオ・インシュアランスによって発生する売買を市場がどの程度簡単に吸収できるかに依存している。もしポートフォリオ・インシュアランスによる取引が、全体の取引量に比べて非常に小さければ、ほとんど影響はないだろう。しかし、ポートフォリオ・インシュアランスが広く普及するにつれて、それは市場の不安定化要因となるだろう。

#### ビジネス寸見17.2 1987年の株価大暴落でポートフォリオ・インシュアランスは非難されるべきか？

1987年10月19日月曜日、ダウ平均は20%以上も下落した。多くの人々は、この大暴落にポートフォリオ・インシュアランスが大きくかかわっていたと思っている。1987年10月当時、600億から900億ドルの株式資産に対してポートフォリオ・インシュアランスが行われていたと推定されており、17.13節で論じた方法でプット・オプションが複製されていた。

1987年10月14日水曜日から1987年10月16日金曜日までの間に相場は約10%下落し、その大部分は金曜日の午後に起こった。この下落の結果、ポートフォリオ・インシェアランスによる現物株式または指數先物の売りが少なくとも120億ドル発生した。実際には、40億ドルしか売却する時間がなく、モデルから出された大量の売却指示をかかえたまま翌週に臨むことになった。10月19日月曜日には、ポートフォリオ・インシェアランスを運用する三つの業者からの売りがNYSEの出来高の約10%に及び、指數先物市場ではポートフォリオ・インシェアランスに係る売りが全体の21.3%に及んだと推定されている。ポートフォリオ・インシェアランスを行うトレーダー以外の投資家で、ポートフォリオ・インシェアランスによる売却を予想した投資家が株式を激しく売却したことが、株価の下落に拍車をかけたようである。

相場が急落し、証券取引所のシステムに過大な負荷がかかったために、多くのポートフォリオ・マネジャーはモデルが指示した取引を執行できず、必要とするポートフォリオの保証に失敗した。いうまでもなく、1987年以降、ポートフォリオ・インシェアランスの仕組みは急速に人気を失うこととなった。この出来事の教訓は、市場参加者の多くが同じ行動を起こす場合に、それがヘッジ戦略であったとしても、特定の取引戦略に追随することは危険である、ということである。

## 要 約

金融機関は、オプションに関連したさまざまな商品を顧客に提供している。それらのオプションは、取引所で取引されている標準的なものではないことが多い。そのため、金融機関はそれらのエクスポージャーのヘッジという問題に直面する。ネイキッド・ポジションやカバード・ポジションでは、

許容できないレベルのリスクが残る。ときどき提案される方策に、ストップ・ロス戦略というものがある。これは、オプションがアウト・オブ・ザ・マネーのときはネイキッド・ポジションにしておき、オプションがイン・ザ・マネーになったらすぐにカバード・ポジションに変えるという戦略である。一見魅力的に思える戦略であるが、この戦略はよいヘッジ戦略ではない。

オプションのデルタ ( $\Delta$ ) は、原資産の価格変化に対するオプション価格の変化率である。デルタ・ヘッジとは、デルタがゼロのポジション（デルタ・ニュートラルなポジションともいわれる）をつくることである。原資産のデルタは1.0なので、デルタ・ヘッジを行う一つの方法は、ヘッジする各ロング・オプションに対して、 $-\Delta$  の原資産のポジションをとることである。また、オプションのデルタは時間とともに変化するので、原資産のポジションは頻繁に調整しなければならない。

オプションのポジションをデルタ・ニュートラルにした後は、ガンマ ( $\Gamma$ ) に注目することが多い。オプションのガンマは、原資産の価格変化に対するデルタの変化率であり、オプション価格と資産価格との関係の曲率に関する尺度になっている。オプションのポジションをガンマ・ニュートラルにすることにより、デルタ・ヘッジのパフォーマンスに対するこの曲率の影響を減らすことができる。ヘッジするポジションのガンマを  $\Gamma$  とすると、ガンマが $-\Gamma$  の上場オプションのポジションをとることによって、ガンマ・ニュートラルにすることが多い。

デルタ・ヘッジとガンマ・ヘッジは、ともに原資産のボラティリティが一定という仮定に基づいたものである。実際には、ボラティリティは時間とともに変化している。オプションあるいはオプション・ポートフォリオのベガは、ボラティリティに関するオプション価格の変化率を測る指標である。ボラティリティの変化に対してオプションのポジションをヘッジしたいトレーダーは、ベガ・ニュートラルなポジションをつくることになる。ガンマ・ニュートラルなポジションをつくるときと同様に、ベガを相殺する上場オプションのポジションをとることでベガ・ニュートラルにすることが多い。ガ

ンマ・ニュートラルかつベガ・ニュートラルにしたい場合には、通常、二つの上場オプションが必要になる。

オプションのポジションに対するリスク指標には、他にセータとローがある。セータは、他の条件が不变で時間のみが経過した場合のポジションの価値の変化率である。ローは、他の条件が変わらない場合の金利に対するポジションの価値の変化率である。

実務的には、オプション・トレーダーは少なくとも1日に1回はポートフォリオのリバランスを行って、デルタ・ニュートラルに保つことが多い。一方、ガンマとベガを定期的にニュートラルにするのは一般的に困難である。通常、トレーダーはこうしたリスク指標をモニタリングし、リスクが大きくなりすぎた場合は、ポジションを修正するか、トレーディングを縮小させる。

ポートフォリオ・マネジャーは、株式ポートフォリオの価格下落リスクを回避する目的で、ブット・オプションを複製することがある。この複製は、ポートフォリオまたは指数先物を取引することによって行われる。ポートフォリオを取引する場合は、ポートフォリオは株式の部分と無リスク証券の部分に分割されることになる。相場が下落すると無リスク証券への投資額が増加し、相場が上昇すると株式への投資額が増加する。指数先物を取引する場合は、株式ポートフォリオはそのままにしておいて、指数先物を売り付けることになる。相場が下落すると指数先物の売却単位が多くなり、相場が上昇すると指数先物の売却単位は少なくなる。この種のポートフォリオ・インシュアランスは、通常の市場環境のときにはうまく機能する。しかし、ダウ平均が暴落した1987年10月19日月曜日には、ほとんど機能しなかった。これは、ポートフォリオ・マネジャーがポジションを守るために必要な株式または指数先物を迅速に売却できなかつたためである。

## 参考文献

Taleb, N.N. *Dynamic Hedging : Managing Vanilla and Exotic Options.* New York : Wiley, 1996.

### 章末問題

- 17.1** アウト・オプ・ザ・マネーのコール・オプションを売手が行うストップ・ロス戦略について説明せよ。この戦略がヘッジとして相対的にうまくいかない理由を述べよ。
- 17.2** コール・オプションのデルタが0.7であるというのは何を表しているか。また、各オプションのデルタが0.7の場合に、オプション1,000単位の売りポジションをデルタ・ニュートラルにするにはどうすればよいか。
- 17.3** 配当のない株式に対する満期6カ月のアット・ザ・マネーのヨーロピアン・コール・オプションのデルタを、無リスク金利が年率10%で株価のボラティリティが年率25%のときに計算せよ。
- 17.4** 時間が年単位の場合、オプションのポジションのセータが-0.1であるとはどういうことか。トレーダーが株価もインプライド・ボラティリティも変化しないと予想している場合には、どのようなオプションのポジションが適切か。
- 17.5** オプション・ポジションのガンマは何を表しているか。また、ポジションのガンマが大きく負で、デルタがゼロであるような場合、どのようなリスクがあるか。
- 17.6** 「オプションのポジションを複製する方法は、オプションのポジションをヘッジする方法の逆である」。この主張について説明せよ。
- 17.7** 1987年10月19日にポートフォリオ・インシュアランスがうまく機能

しなかった理由を説明せよ。

- 17.8** 行使価格が40ドルのアウト・オプ・ザ・マネーのコール・オプションのBlack-Scholesモデルによる価格が4ドルである。オプションを売却したトレーダーが、トップ・ロス戦略を行おうとしている。このトレーダーは、株式を40.10ドルで買い30.90ドルで売るつもりである。株式の売買回数の期待値を推定せよ。
- 17.9** 現在の株価は20ドルで、行使価格25ドルのコール・オプションを、株式のポジションを連続的に変化させて複製するとする。次の二つのシナリオを考える。(a)オプション期間中に株価が20ドルから35ドルへだんだんと増加する。(b)株価が上下に大きく振れ、最後は35ドルになる。どちらのシナリオのほうが、オプションの複製にコストがかかるか。その理由も説明せよ。
- 17.10** 次の場合に、銀先物に対するヨーロピアン・コール・オプション1,000単位の売りポジションのデルタを求めよ。オプションの満期は8カ月、原資産の銀先物の満期は9カ月とする。また、現在の満期9カ月の先物価格を1オンス当たり8ドル、オプションの行使価格を8ドル、無リスク金利を年率12%、銀のボラティリティを年率18%とする。
- 17.11** 問題17.10でデルタ・ヘッジを行う場合、満期9カ月の銀先物のポジションは当初どれだけ必要になるか。また、銀の現物を使う場合は、どれだけのポジションが当初必要になるか。さらに、満期1年の銀先物を使う場合は、どれだけのポジションが当初必要になるか。ただし、銀には保管コストがかからないと仮定する。
- 17.12** ある企業が、通貨のプット・オプションとコール・オプションの買いポジションからなるポートフォリオを、デルタ・ヘッジでヘッジしようとしている。次のどちらの場合が、よい結果を与えるか説明せよ。
- 為替のスポットレートがほとんど一定の場合
  - 為替のスポットレートが激しく動く場合

- 17.13** プット・オプションとコール・オプションの売りポジションからなるポートフォリオをもつ金融機関について、問題17.12をもう一度考えよ。
- 17.14** ある金融機関が、日本円に対する満期 7 カ月のヨーロピアン・コール・オプションを1,000単位売却したとする。直物為替レートを1円当たり0.80セント、行使価格を1円当たり0.81セント、米国の無リスク金利を年率8%，日本の無リスク金利を年率5%，円のボラティリティを年率15%とする。金融機関がもつポジションのデルタ、ガンマ、ベガ、セータ、ローを計算せよ。また、それぞれの値の意味を説明せよ。
- 17.15** ヨーロピアン株価指數オプションのポジションを、別の一つのヨーロピアン・オプションを用いてガンマ・ニュートラルかつベガ・ニュートラルにできるのはどういう場合か。
- 17.16** あるファンドマネジャーが S&P 500に連動するよく分散されたポートフォリオを保有しており、その価値は3億6,000万ドルである。S&P 500の値は1,200で、ポートフォリオ・マネジャーは今後6カ月間にポートフォリオの価値が5%以上下落することに対する保険を購入したいと考えている。無リスク金利は年率6%，ポートフォリオと S&P 500の配当利回りはともに3%，指数のボラティリティは年率30%である。
- (a) ファンドマネジャーが上場ヨーロピアン・プット・オプションを購入する場合、その保険料はいくらになるか。
  - (b) ファンドマネジャーが実行可能な、上場ヨーロピアン・コール・オプションを使った代替的な戦略について、詳細に説明せよ。また、それらが同じ結果になることを示せ。
  - (c) ファンドマネジャーが、ポートフォリオの一部を無リスク証券で保有することによりポートフォリオに保険をかけることにした場合、当初のポジションはどのようになるか。
  - (d) ファンドマネジャーが、満期9カ月の指數先物を使って保険を

かけることにした場合、当初のポジションはどのようになるか。

- 17.17** ポートフォリオのベータが1.5という仮定のもとで、問題17.16をもう一度考えよ。ただし、ポートフォリオの配当利回りは年率4%とする。
- 17.18** 以下の場合について、(17.4)式の各項に代入することで、その式が成り立っていることを確かめよ。
- 配当のない株式に対するヨーロピアン・コール・オプション
  - 配当のない株式に対するヨーロピアン・プット・オプション
  - 配当のない株式に対するヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションからなる任意のポートフォリオ
- 17.19** (17.4)式に対応する式を、(a)通貨に対するデリバティブ・ポートフォリオ、(b)先物に対するデリバティブ・ポートフォリオのそれぞれについて導け。
- 17.20** 700億ドルの株式資産がポートフォリオ・インシュアランス・スキームの対象になっているとする。このスキームは、今後1年以内に資産価値が5%以上下落しないように設計されているとする。必要となるパラメータの値はすべて適当に仮定したうえで、DerivaGemソフトウェアを用いて、市場が1日で23%下落した場合にポートフォリオ・インシュアランス・スキームの管理者が売ろうとする株式または先物契約の数量を計算せよ。
- 17.21** 株価指数フォワード契約のデルタは対応する先物契約のデルタと同じ値になるか。その理由も説明せよ。
- 17.22** 銀行が保有しているドル/ユーロに対する通貨オプションのポジションのデルタが30,000、ガンマが-80,000である。この数字の意味を説明せよ。為替レート（1ユーロ当りのドル）を0.90とする。デルタ・ニュートラルにするにはどのようなポジションをとればよいか。すぐ後に、為替レートが0.93に変動したとする。新しいデルタはいくつになるか。また、ポジションをデルタ・ニュートラルに保つに

は、どのような取引を追加する必要があるか。さらに、銀行がポジションを当初デルタ・ニュートラルにしていたと仮定すると、この為替の変動によって銀行の損益はどのようになるか。

**17.23** プット・コール・パリティの関係式を用いて、配当のない株式に対して、次の量の間に成り立つ関係を導け。

- (a) ヨーロピアン・コールのデルタとヨーロピアン・プットのデルタ
- (b) ヨーロピアン・コールのガンマとヨーロピアン・プットのガンマ
- (c) ヨーロピアン・コールのベガとヨーロピアン・プットのベガ
- (d) ヨーロピアン・コールのセータとヨーロピアン・プットのセータ

## 宿題

**17.24** 株式に対する満期 1 年のヨーロピアン・コール・オプションを考える。株価を 30 ドル、行使価格を 30 ドル、無リスク金利を年率 5 %、ボラティリティを年率 25 % とする。DerivaGem ソフトウェアを用いて、オプションの価格、デルタ、ガンマ、ベガ、セータ、およびローを計算せよ。株価を 30.1 ドルに変えてオプション価格を再計算し、デルタの値が正しいことを検証せよ。また、株価を 30.1 ドルに変えてデルタを再計算し、ガンマの値が正しいことを検証せよ。同様の計算を行って、ベガ、セータ、ローも正しいことを検証せよ。DerivaGem Application Builder の関数を用いて、株価に対する株券オプションの価格、デルタ、ガンマ、ベガ、セータ、およびローのグラフを描け。

**17.25** ある金融機関が、以下のような英ポンドに対する店頭オプションの

ポートフォリオを保有している。

| 種類  | ポジション  | デルタ   | ガンマ | ベガ  |
|-----|--------|-------|-----|-----|
| コール | -1,000 | 0.50  | 2.2 | 1.8 |
| コール | -500   | 0.80  | 0.6 | 0.2 |
| プット | -2,000 | -0.40 | 1.3 | 0.7 |
| コール | -500   | 0.70  | 1.8 | 1.4 |

デルタが0.6、ガンマが1.5、ベガが0.8の上場オプションが取引できるとする。

- (a) ポートフォリオをガンマ・ニュートラルかつデルタ・ニュートラルにするには、上場オプションと英ポンドのポジションをどれだけとればよいか。
- (b) ポートフォリオをベガ・ニュートラルかつデルタ・ニュートラルにするには、上場オプションと英ポンドのポジションをどれだけとればよいか。

**17.26** 問題17.25をもう一度考える。デルタが0.1、ガンマが0.5、ベガが0.6のもう一つの上場オプションも取引できるとする。ポートフォリオをデルタ、ガンマ、ベガ・ニュートラルにするにはどうすればよいのか。

**17.27** 投資家が6カ月間のリターンとして、(a)ゼロと(b)マーケット指標のリターンの40%のうち、大きいほうを受け取れる預金商品を、銀行が販売している。ある投資家が、この商品に100,000ドル投資しようと計画している。この商品のペイオフを指標オプションとして説明せよ。また、無リスク金利を年率8%，指標の配当利回りを3%，ボラティリティを年率25%とした場合、投資家にとってこの商品はよい取引といえるか。

**17.28** ヨーロピアン先物コール・オプションの価格  $c$  を先物価格  $F_0$  を用いて表した公式が、第16章で、

$$c = e^{-rt} [F_0 N(d_1) - K N(d_2)]$$

と与えられている。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(F_0/K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

で、 $K$ ,  $r$ ,  $T$ ,  $\sigma$  はそれぞれ行使価格、無リスク金利、満期までの時間、ボラティリティである。

- (a)  $F_0 N'(d_1) = K N'(d_2)$  であることを証明せよ。
- (b) 先物価格に関するコール価格のデルタが  $e^{-rT} N(d_1)$  であることを証明せよ。
- (c) コール価格のベガが  $F_0 \sqrt{T} N'(d_1) e^{-rT}$  であることを証明せよ。
- (d) 17.12節で与えられた先物コール・オプションのローに対する公式を証明せよ。

先物コール・オプションのデルタ、ガンマ、セータ、ベガが、配当利回りが  $q$  の株式のコール・オプションに対するそれらの公式で、 $r$  を  $q$  に、 $S_0$  を  $F_0$  に置き換えたものと同じになる。先物コール・オプションのローについてはこのことが成り立たない。その理由を説明せよ。

- 17.29** DerivaGem ソフトウェアを使って、17.1節で考察したオプションに対して (17.4) 式が成り立っていることを確認せよ (注意: DerivaGem ソフトウェアは暦日ベースのセータの値を計算している。(17.4) 式のセータは年ベースである)。
- 17.30** DerivaGem Application Builder の関数を用いて、表17.2を再現せよ (表17.2では、株式のポジションは100株単位で四捨五入されている)。また、各週におけるポジションのガンマとセータを計算せよ。さらに、各週におけるポートフォリオの価値の変化を計算し、(17.3) 式が近似的に成り立っていることを確認せよ (注意: DerivaGem ソフトウェアは暦日ベースのセータの値を計算している。(17.3) 式のセータは年ベースである)。

## 付 錄

### ティラー展開とヘッジ・パラメータ

微小時間におけるポートフォリオ価値の変化についてティラー展開してみることで、各グリークスの意味を考えてみよう。原資産のボラティリティは一定であると仮定すると、ポートフォリオ  $\Pi$  の価値は資産価格  $S$  と時間  $t$  の関数になる。これをティラー展開すると、

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Pi}{\partial t^2}\Delta t^2 + \frac{\partial^2\Pi}{\partial S\partial t}\Delta S\Delta t + \dots \quad (17A.1)$$

が得られる。ここで、 $\Delta\Pi$  と  $\Delta S$  はそれぞれ微小時間  $\Delta t$  における  $\Pi$  と  $S$  の変化である。デルタ・ヘッジにより右辺第1項を消去することができる。第2項は確定的な項である。第3項（この項は  $\Delta t$  のオーダーである）は、ポートフォリオをデルタ・ニュートラルかつガンマ・ニュートラルにすることにより、ゼロにすることができる。それら以外の項は、 $\Delta t$  よりも高次の項である。

デルタ・ニュートラルなポートフォリオでは、(17A.1)式の右辺第1項はゼロになるから、 $\Delta t$  よりも高次の項を無視すると、

$$\Delta\Pi = \Theta\Delta t + \frac{1}{2}\Gamma\Delta S^2$$

となる。これは、(17.3)式にほかならない。

原資産のボラティリティが変動するときは、 $\Pi$  は  $\sigma$ ,  $S$ , および  $t$  の関数である。このとき(17A.1)式は、

$$\Delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial\Pi}{\partial\sigma}\Delta\sigma + \frac{\partial\Pi}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Pi}{\partial S^2}\Delta S^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\Pi}{\partial\sigma^2}\Delta\sigma^2 + \dots$$

になる。ここで  $\Delta\sigma$  は時間  $\Delta t$  における  $\sigma$  の変化である。この場合、デルタ・ヘッジにより右辺第1項を消去することができる。第2項は、ポート

フォリオをベガ・ニュートラルにすれば消去できる。第3項は確定的な項である。第4項は、ポートフォリオをガンマ・ニュートラルにすれば消去できる。また、テイラー展開のより高次の項に対応したその他のグリークスを定義するトレーダーもいる。

## 第18章

# ボラティリティ・スマイル

Black-Scholes モデルで求められたオプションの価格は市場価格とどの程度近いのだろうか。トレーダーはオプションの価格を決めるとき、本当に Black-Scholes モデルを使っているのだろうか。資産価格の確率分布は本当に対数正規分布に従っているのだろうか。本章ではこうした疑問に答える。トレーダーは、Black と Scholes がもともと意図した方法とは異なる形で、Black-Sholes モデルを利用している。トレーダーは、行使価格と満期に依存するボラティリティを用いてオプションを価格付けしているからである。

オプションのインプライド・ボラティリティを行使価格の関数として表したもの、ボラティリティ・スマイルと呼ぶ。本章では、株式市場や外国通貨市場でトレーダーが使っているボラティリティ・スマイルについて論じ、ボラティリティ・スマイルと将来の資産価格に対して仮定されるリスク中立な確率分布との関係について説明する。また、オプション・トレーダーが、

ボラティリティをどのようにオプション満期の関数として扱い、ボラティリティ曲面をどのようにプライシングのツールとして使っているかについても検討する。

## 18.1 ボラティリティ・スマイルがコールとプットで同じ理由

本節では、行使価格と満期が同じならば、ヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションのインプライド・ボラティリティは等しくなることを示す。

第9章で説明したように、プット・コール・パリティから、行使価格と満期が同じヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションの価格の間に成り立つ関係式が導かれる。原資産の配当利回りを  $q$  とすると、その関係式は、

$$p + S_0 e^{-qT} = c + K e^{-rT} \quad (18.1)$$

で与えられる。ここで、これまでと同様に、 $c$  と  $p$  はそれぞれヨーロピアン・コールとヨーロピアン・プットの価格である。また、 $K$  はコールとプットに共通の行使価格、 $T$  は満期までの時間、 $S_0$  は現在の資産価格、 $r$  は満期  $T$  に適用される無リスク金利、 $q$  は資産の利回りである。

プット・コール・パリティの関係式について重要な点は、比較的簡単な無裁定の議論から導かれた関係式であるということである。その導出には、将来の原資産価格の確率分布に対する仮定はなんら用いられていない。したがって、この関係式は、資産価格の分布が対数正規であろうとなかろうと成り立つ。

あるボラティリティに対して Black-Scholes モデルで計算したヨーロピアン・プットとコールの価格を  $p_{BS}$  と  $c_{BS}$  とし、 $p_{mkt}$  と  $c_{mkt}$  をこれらのオプションの市場価格とする。Black-Scholes モデルに対してプット・コール・パリティが成り立つのので、

$$p_{BS} + S_0 e^{-qT} = c_{BS} + K e^{-rT}$$

となる。裁定機会がないならば、プット・コール・パリティは市場価格に対しても成り立つので、

$$p_{\text{mkt}} + S_0 e^{-qT} = c_{\text{mkt}} + K e^{-rT}$$

となる。これらの二つの式の差をとると、

$$p_{\text{BS}} - p_{\text{mkt}} = c_{\text{BS}} - c_{\text{mkt}} \quad (18.2)$$

が得られる。これより、ヨーロピアン・プット・オプションの市場価格と Black-Scholes モデルによる価格の差は、行使価格と満期が同じヨーロピアン・コール・オプションの市場価格と Black-Scholes モデルによる価格の差に厳密に一致することがわかる。

プット・オプションのインプライド・ボラティリティを22%とする。このとき、ボラティリティを22%として Black-Scholes モデルを用いれば、 $p_{\text{BS}} = p_{\text{mkt}}$  となる。 $(18.2)$ 式より、同じボラティリティを用いると  $c_{\text{BS}} = c_{\text{mkt}}$  となる。したがって、ヨーロピアン・コール・オプションのインプライド・ボラティリティも22%である。この議論から、行使価格と満期が同じ場合、ヨーロピアン・コール・オプションのインプライド・ボラティリティとヨーロピアン・プット・オプションのインプライド・ボラティリティは常に一致することがわかる。別のいい方をすると、与えられた行使価格と満期に対して、Black-Scholes モデルを用いてヨーロピアン・コールを価格付ける際の正しいボラティリティは、ヨーロピアン・プットを価格付ける際の正しいボラティリティでもある、ということになる。したがって、ボラティリティ・スマイル（特定の満期に対するインプライド・ボラティリティと行使価格との関係）は、コールとプットで同じものになる。また、ボラティリティの期間構造（特定の行使価格に対するインプライド・ボラティリティと満期の関係）も、コールとプットで同じものになる。

#### 【例18.1】

豪ドルの価値を0.60ドル、無リスク金利を米国は年率5%，オーストラリアは年率10%とする。また、豪ドルに対する満期1年、行使価格0.59ドルのヨーロピアン・コール・オプションの市場価格を0.0236とする。DerivaGem ソフトウェアを用いて、このコールのインプライド・

ボラティリティを計算すると14.5%になる。裁定機会がないとして、プット・コール・パリティの関係式(18.1)を、 $q$ をオーストラリアの無リスク金利に等しいとして用いる。行使価格0.59ドル、満期1年のヨーロピアン・プット・オプションの価格 $p$ は、

$$p + 0.60e^{-0.10 \times 1} = 0.0236 + 0.59e^{-0.05 \times 1}$$

を満たす。これより、 $p=0.0419$ となる。DerivaGem ソフトウェアを用いて、このプットの価格から計算したインプライド・ボラティリティも14.5%になる。これは、上で行った分析から期待されるとおりの結果である。

## 18.2 外国通貨オプション

外国通貨オプションの価格付けでトレーダーが用いるボラティリティ・スマイルは、一般に図18.1に示したような形をしている。インプライド・ボラティリティはアット・ザ・マネーでは相対的に低い値をとり、オプションがイン・ザ・マネーあるいはアウト・オブ・ザ・マネーになるにつれて次第に高くなっていく。

章末の付録では、将来時点における資産価格のリスク中立確率分布を、そ

図18.1 外国通貨オプションのボラティリティ・スマイル

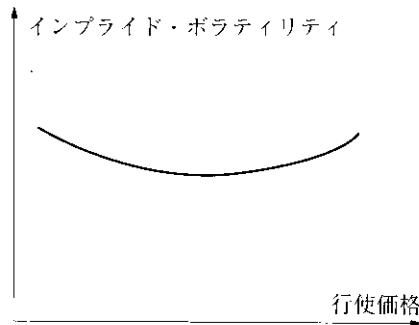
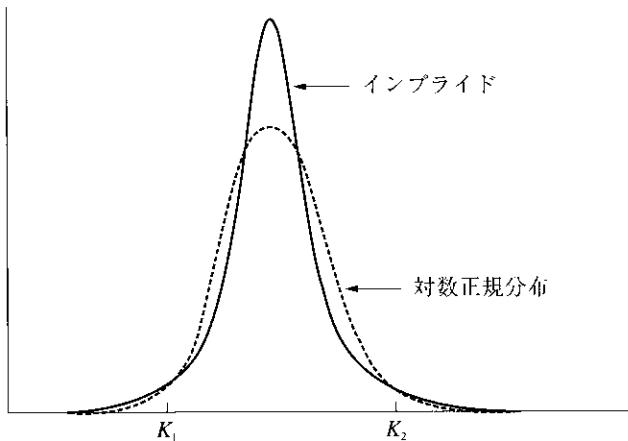


図18.2 外国通貨オプションのインプライドされた分布と対数正規分布の比較



の時点を満期とするオプションのボラティリティ・スマイルから決定する方法について説明する。その分布をインプライドされた分布 (implied distribution) と呼ぶことにする。図18.1のボラティリティ・スマイルは、図18.2の実線で示された確率分布に対応している。図18.2の点線の分布は、このインプライドされた分布と同じ平均と分散をもつ対数正規分布である。インプライドされた分布は対数正規分布よりも裾が厚くなっていることがわかる（注1）。

図18.1と図18.2とは互いに整合性がとれていることをみるために、まず  $K_2$  という高い行使価格のディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのコール・オプションについて考える。このオプションは、為替レートが  $K_2$  を上回った場合にのみ支払が発生する。図18.2より、支払が発生する確率は、対数正規分布よりもインプライドされた確率分布のほうが高くなることがわかる。

(注1) これは尖度 (kurtosis) として知られている。裾がより厚くなっているのに加え、インプライドされた分布はより「尖って」いる。対数正規分布に従っている場合と比べて、為替レートは小さい動きと大きい動きがともに多くなる傾向にあり、中程度の動きは少なくなる傾向にある。

したがって、インプライドされた分布のほうがオプションの価格は相対的に高くなる。価格が相対的に高いということは、インプライド・ボラティリティが相対的に高いということを意味する。これは、図18.1に示すようなオプションに対して観測される結果と完全に一致している。したがって、高い行使価格に対しては、二つの図は互いに整合性がとれていることがわかった。次に、 $K_1$ という低い行使価格のディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのプット・オプションについて考える。このオプションは、為替レートが $K_1$ を下回った場合にのみ支払が発生する。図18.2より、支払が発生する確率は、対数正規分布よりもインプライドされた確率分布のほうが高くなることがわかる。したがって、このオプションに対しても、インプライドされた分布のほうが価格は相対的に高くなり、インプライド・ボラティリティも相対的に高くなる。今度の場合も、図18.1の観測結果と完全に一致している。

## 実証分析の結果

これまでみてきたことから、外国通貨オプションに対してトレーダーが用いているボラティリティ・スマイルは、対数正規分布では為替レートが大きく動く確率を低く見積ることになるということを示唆している。表18.1は、これを実証するために、12種類の為替レートについて10年間の日次変化を検証したものである(注2)。表を作成するには、まず、各為替レートに対して日次変化率の標準偏差を求める。次に、実際の変化率が、1標準偏差、2標準偏差などを超える頻度について調べる。最後に、変化率が正規分布に従っているとした場合の対応する頻度を計算すると、表が作成できる(対数正規モデルを仮定すると、日次変化率はほぼ正規分布に従う)。

日次変化は観測日数の1.34%で3標準偏差を超えており、対数正規モデルでは、これは0.27%になるはずである。また、日次変化は観測日数の0.29%, 0.08%, 0.03%でそれぞれ4標準偏差、5標準偏差、6標準偏差を超え

(注2) この表は、J.C. Hull and A. White, "Value at Risk When Daily Change in Market Variables Are Not Normally Distributed," *Journal of Derivatives*, 5, 3 (Spring 1998) : 9-19 より抜粋。

表18.1 為替レートの日次変化が、1標準偏差、2標準偏差、…、6標準偏差を上回る日数の割合(%) (SD=日次変化の標準偏差)

|       | 実際の割合 | 対数正規モデル |
|-------|-------|---------|
| >1 SD | 25.04 | 31.73   |
| >2 SD | 5.27  | 4.55    |
| >3 SD | 1.34  | 0.27    |
| >4 SD | 0.29  | 0.01    |
| >5 SD | 0.08  | 0.00    |
| >6 SD | 0.03  | 0.00    |

ている。対数正規モデルでは、これらはほとんど発生しないはずである。したがって、表の結果は、裾の厚い分布の存在(図18.2)と、トレーダーが用いているボラティリティ・スマイル(図18.1)を支持している。ビジネス寸見18.1で説明するように、市場に先がけて表18.1の分析を行っていたならば、多額の収益をあげることができたであろう。

### ビジネス寸見18.1 外国通貨オプションからの収益

ほとんどの市場参加者が、為替レートは対数正規分布に従うと考えているとしよう。彼らは与えられた為替レートに対して、同じボラティリティですべてのオプションを評価することに問題を感じないであろう。もしあなたが表18.1の分析を行い、対数正規分布は為替レートに対してよい仮定ではないとわかったとする。その場合、何をすべきだろうか。

その答は、さまざまな通貨に対するディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのコール・オプションとプット・オプションを購入して、じっと待つ、ということである。これらのオプションは相対的に安価であり、対数正規分布モデルの予想よりもイン・ザ・マネーで終了する可能性が高

いであろう。したがって、ペイオフの現在価値はオプションのコストより平均的に大きくなるだろう。

1980年代半ばには、一部のトレーダーは為替レートの確率分布の裾が厚いことを知っていた。それ以外のトレーダーは皆、Black-Scholes モデルの対数正規性の仮定は妥当であると考えていた。その一部のトレーダーは上述の戦略によって多額の収益をあげた。しかし、1980年代後半には、ボラティリティ・スマイルを考慮して外国通貨オプションを価格付けすべきであることにすべてのトレーダーが気づき、先の取引機会は消滅した。

### 外国通貨オプションにおけるボラティリティ・スマイルの発生理由

なぜ為替レートが対数正規分布に従わないのだろうか。資産価格が対数正規分布に従うための条件には、次の二つがある。

1. 資産のボラティリティは一定である。
2. 資産価格はジャンプがなく連続的に変化する。

実際には、為替レートはこれらの条件をどちらも満たしていない。為替レートのボラティリティは一定からはほど遠く、為替レートは頻繁にジャンプもしている(注3)。ボラティリティが一定でないこととジャンプがあることの影響で、大きな変動が起りやすくなっていることがわかる。

ジャンプやボラティリティが一定でないことの影響は、オプションの満期によって変わる。ボラティリティが一定でないことの影響(変化率)は、オプションの満期が長くなるにつれて、価格でみるとより顕著になるが、インプライド・ボラティリティでみると顕著ではなくなることが多い。ジャンプの与える影響(変化率)は、オプションの満期が長くなるにつれて、価格とインプライド・ボラティリティのどちらでみても顕著ではなくなる(注4)。

---

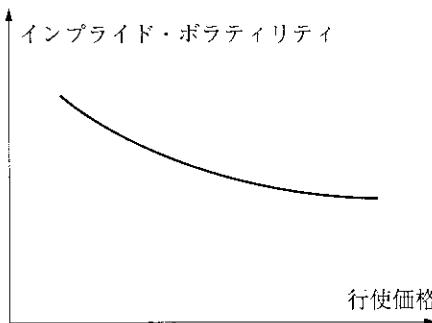
(注3) 中央銀行の介入によってジャンプが発生することもある。

これらの結果、オプションの満期が長くなるにつれて、ボラティリティ・スマイルは顕著にはみられなくなる。

### 18.3 株式オプション

株式オプションのボラティリティ・スマイルは、Rubinstein (1985, 1994), Jackwerth と Rubinstein (1996) によって研究されている。1987年以前は、ボラティリティ・スマイルは明白にはみられなかつた。1987年以降は、図 18.3 のような形のボラティリティ・スマイルが株式オプション（株券オプションと株価指数オプションの両方）の価格付けの際にトレーダーに用いられるようになった。このボラティリティ・スマイルはボラティリティ・スキー（volatility skew）と呼ばれることもある。行使価格が高くなるにつれて、ボラティリティは減少している。行使価格の低いオプション（すなわち、ディープ・アウト・オプ・ザ・マネーのプットやディープ・イン・ザ・マネーのコール）の価格付けに用いられるボラティリティは、行使価格の高いオプション（すなわち、ディープ・イン・ザ・マネーのプットやディープ・アウ

図18.3 株式オプションのボラティリティ・スマイル



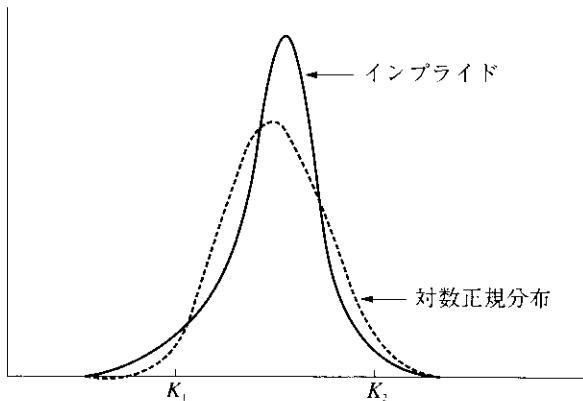
(注4) 十分に長期のオプションを考えるときには、ジャンプの影響は「平均化」されて消え、ジャンプがある場合の為替レートの分布は、為替レートが連続的に変化する場合の分布とほとんど区別がつかない。

ト・オブ・ザ・マネーのコール) のボラティリティよりもかなり高くなる。

株式オプションのボラティリティ・スマイルは、図18.4の実線で示されるインプライドされた確率分布に対応している。点線の分布は、このインプライドされた分布と同じ平均と分散をもつ対数正規分布である。インプライドされた分布は対数正規分布よりも左側の裾が厚く、右側の裾が薄くなっていることがわかる。

図18.3と図18.4とは互いに整合性がとれていることをみるために、図18.1と図18.2に対して行ったのと同様に、ディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションについて考える。図18.4より、行使価格が  $K_2$  のディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのコール・オプションに対しては、対数正規分布を用いるより、インプライドされた分布を用いるほうが価格は低くなる。これは、株価が  $K_2$  を上回った場合にのみ支払が発生し、その確率は対数正規分布よりもインプライドされた確率分布のほうが低くなるからである。したがって、インプライドされた分布のほうがオプションの価格は相対的に低くなる。価格が相対的に低いということは、インプライド・ボラティリティが相対的に低いということを意味する。これは、図18.3に示すようなオプションに対して観測される結果と完全に一致している。次に、行使価格が  $K_1$  の

図18.4 株式オプションのインプライドされた分布と対数正規分布の比較



ディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのプット・オプションについて考える。このオプションは、株価が  $K_1$  を下回った場合にのみ支払が発生する。図18.4より、その確率は、対数正規分布よりもインプライドされた確率分布のほうが高くなる。したがって、このオプションに対しては、インプライドされた分布のほうが価格は相対的に高くなり、インプライド・ボラティリティも相対的に高くなる。今度の場合も、図18.3の観測結果と完全に一致している。

### 株式オプションにおけるボラティリティ・スマイルの発生理由

株式オプションでボラティリティ・スマイルが観測されることの一つの説明として、レバレッジ効果があげられる。企業の株式価値が下落するにつれて、その企業のレバレッジは高くなる。その結果、株式のリスクが高くなり、そのボラティリティは増加する。逆に、企業の株式価値が増加するとレバレッジは低くなる。その結果、株式のリスクが低くなり、そのボラティリティは減少する。この議論から、株式のボラティリティは株価の減少関数となることが期待され、そのことは図18.3および図18.4と整合していることがわかる。もう一つの説明は「大暴落恐怖症 (crashophobia)」である（ビジネス寸見18.2を参照）。

#### ビジネス寸見18.2 大暴落恐怖症

興味深いことに、株式に対して図18.3のようなパターンが観測されるようになったのは、1987年10月の株式市場大暴落以後である。1987年10月以前は、インプライド・ボラティリティは行使価格にそれほど依存していなかった。これが、Mark Rubinstein が株式に対してボラティリティ・スマイルがみられる原因の一つに、「大暴落恐怖症」をあげる理由である。トレーダーは1987年10月と同様の大暴落が再び起こることを心配しており、それがオプションの価格に反映しているというものであ

る。

この説明には、いくつかの妥当と思われる実証分析がある。S&P 500が下落したとき、ボラティリティ・スキーの傾きには大きくなる傾向がみられ、上昇したとき、スキーの傾きには小さくなる傾向がみられるというものである。

#### 18.4 ボラティリティ・スマイルの別の特徴付け

これまででは、ボラティリティ・スマイルをインプライド・ボラティリティと行使価格との関係として定義してきた。この関係は、資産の現在価格に依存している。たとえば、図18.1でボラティリティ・スマイルが最も低くなる点は、現時点の為替レート付近であることが多い。為替レートが高くなるとボラティリティ・スマイルは右に動き、為替レートが低くなるとボラティリティ・スマイルは左に動く傾向がある。同様に、図18.3で株価が上昇するとボラティリティ・スキーは右に動き、株価が下落するとボラティリティ・スキーは左に動く傾向がある(注5)。このため、ボラティリティ・スマイルをインプライド・ボラティリティと  $K$  との関係ではなく、インプライド・ボラティリティと  $K/S_0$  との関係として定式化することも多い。そうすると、スマイルはより安定したものになる。

この改良として、ボラティリティ・スマイルをインプライド・ボラティリティと  $K/F_0$  との関係として定式化することもある。ここで  $F_0$  は対象としているオプションと満期が同じ原資産のフォワード価格である。トレーダーは、アット・ザ・マネーのオプションを  $K=S_0$  のオプションではなく、 $K=F_0$  のオプションとして定義することも多い。その理由は、リスク中立世界でのオプション満期における株価の期待値は、 $S_0$  ではなく  $F_0$  だからと

(注5) Derman の上場オプションに関する研究によると、これに基づく調整が適していない時期もある。これについては、E. Derman, "Regimes of Volatility," *Risk*, April 1999: 55-59 を参照。

いうものである(注6)。

ボラティリティ・スマイルを定義するもう一つの方法は、インプライド・ボラティリティとオプションのデルタとの関係として定式化するやり方である(デルタは第17章で定義されている)。この方法を用いると、ヨーロピアン・オプションやアメリカン・オプション以外のオプションに対しても、ボラティリティ・スマイルが適用できる場合がある。また、この方法が用いられるときは、アット・ザ・マネーのオプションは、デルタが0.5のコール・オプションかデルタが-0.5のプット・オプションを指している。それらは、「50デルタ・オプション」とも呼ばれている。

## 18.5 ボラティリティの期間構造とボラティリティ曲面

ボラティリティ・スマイルに加えて、トレーダーはオプションを価格付ける際にボラティリティの期間構造を用いている。すなわち、アット・ザ・マネーのオプションの価格付けに用いられるボラティリティは、オプションの満期によって異なっている。短期のボラティリティが過去の水準より低いときは、ボラティリティは満期の増加関数になる傾向がある。これは、ボラティリティはそのうち上昇すると予想されるからである。同様に、短期のボラティリティが過去の水準より高いときは、ボラティリティは満期の減少関数になる傾向がある。これは、ボラティリティはそのうち低下すると予想されるからである。

ボラティリティ・スマイルとボラティリティの期間構造を組み合わせて、与えられた行使価格と満期ごとにオプションの価格付けに用いる適切なボラティリティを表したもののが、ボラティリティ曲面である。表18.2は、通貨オプションのボラティリティ曲面の例である。

表18.2の横軸は  $K/S_0$ 、縦軸は満期である。表のなかの数字は、Black-

---

(注6) 第27章で説明するように、資産の先物価格またはフォワード価格がリスク中立世界での価格の期待値になるかどうかは、厳密にはリスク中立世界の定義に依存している。

表18.2 ボラティリティ曲面

|    | $K/S_0$ |      |      |      |      |
|----|---------|------|------|------|------|
|    | 0.90    | 0.95 | 1.00 | 1.05 | 1.10 |
| 1月 | 14.2    | 13.0 | 12.0 | 13.1 | 14.5 |
| 3月 | 14.0    | 13.0 | 12.0 | 13.1 | 14.2 |
| 6月 | 14.1    | 13.3 | 12.5 | 13.4 | 14.3 |
| 1年 | 14.7    | 14.0 | 13.5 | 14.0 | 14.8 |
| 2年 | 15.0    | 14.4 | 14.0 | 14.5 | 15.1 |
| 5年 | 14.8    | 14.6 | 14.4 | 14.7 | 15.0 |

Scholes モデルから算出されるインプライド・ボラティリティである。表のいくつかの数字は、その時点での信頼できる市場データが入手可能なオプションに対応したもので、市場価格から直接計算されたそれらのオプションのインプライド・ボラティリティになっている。表のその他の数字は、一般的に補間してつくられたものである。

新規のオプションを価格付けするとき、金融エンジニアは適切なボラティリティを表で調べる。たとえば、行使価格の資産価格に対する比が1.05の満期9カ月のオプションを価格付けするときには、金融エンジニアは表18.2にある13.4%と14.0%を補間して、13.7%というボラティリティを得る。これが、Black-Scholes の公式や二項ツリーに用いられるボラティリティになる。 $K/S_0$ が0.925の満期1.5年のオプションを価格付けするときには、二次元の補間を行って、14.525%というインプライド・ボラティリティが得られる。

ボラティリティ・スマイルの形状はオプションの満期に依存している。表18.2の例のように、オプションの満期が長くなるにつれてスマイルはあまり顕著ではなくなる。 $T$  を満期までの時間、 $F_0$ をその資産に対する満期がオプションと同じフォワード価格とする。ボラティリティ・スマイルをインプライド・ボラティリティと  $K$  との関係ではなく、インプライド・ボラティリティと、

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \ln\left(\frac{K}{F_0}\right)$$

との関係として定義する金融エンジニアもいる。そうすると、スマイルの満期に対する依存がずっと小さくなることが多い(注7)。

## モデルの役割

トレーダーがすべてのオプションに対して異なるボラティリティを使用しているとすれば、プライシング・モデルはどの程度重要なものなのであろうか。Black-Scholes モデルは、トレーダーが他の流動性の高いオプションの市場価格と整合するようにオプションを価格付けするための補間ツールにすぎない、といえるかもしれない。もしトレーダーが Black-Scholes モデルを使うのをやめて他の妥当なモデルへ乗り換えたとすると、ボラティリティ曲面とスマイルの形状は変化するだろうが、ドルベースでの市場価格はおそらく気づくほどには変化しないだろう。

## 18.6 グリークス

ボラティリティ・スマイルによってグリークスの計算は複雑になる。ある満期のオプションに対するインプライド・ボラティリティと  $K/S$  の関係が変化しないとする(注8)。原資産価格が変化するにつれて、インプライド・ボラティリティはオプションの“マネーネス (moneyness)” (イン・ザ・マネーまたはアウト・オブ・ザ・マネーの度合い) を反映して変化する。

(注7) この方法については、S. Natenberg, *Option Pricing and Volatility : Advanced Trading Strategies and Techniques*, 2nd edn. McGraw-Hill, 1994 および R. Tompkins, *Options Analysis : A State of the Art Guide to Options Pricing*, Burr Ridge, IL : Irwin, 1994 を参照。

(注8) この自然そうなモデルが内的整合性をもつのは、すべての満期に対してボラティリティ・スマイルがフラットなときのみである、という興味深い結果が知られている。たとえば、T. Daglish, J. Hull, and W. Suo, “Volatility Surfaces : Theory, Rules of Thumb, and Empirical Evidence,” *Quantitative Finance*, 7, 5 (October 2007) : 507-24 を参照。

したがって、第17章で与えたグリークスの公式はもはや正しくない。たとえば、コール・オプションのデルタは、

$$\frac{\partial c_{BS}}{\partial S} + \frac{\partial c_{BS}}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial S}$$

で与えられることになる。ここで、 $c_{BS}$ はオプションの Black-Scholes モデルによる価格を資産価格  $S$  とインプライド・ボラティリティ  $\sigma_{imp}$  の関数として表したものである。株式のコール・オプションのデルタに対して、この公式の影響を考える。ボラティリティは  $K/S$  の減少関数である。したがって、インプライド・ボラティリティは資産価格が増加すると増加するので、

$$\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial S} > 0$$

となる。その結果、デルタは Black-Scholes モデルによるものより高い値になる。

実務では、銀行は最も共通に観測されるボラティリティ曲面の変動に対するエクスポートジャーをかなり小さくしようと努めている。共通の変化を特定する一つの技法は、第20章で議論する主成分分析である。

## 18.7 1回の大きなジャンプが想定される場合

次に、株式市場では特異なボラティリティ・スマイルが発生しうることについて、例を用いて考えよう。現在の株価が50ドルであり、ここ数日のうちに重要なニュース（たとえば、買収や重要な訴訟の評決の結果など）の発表によって、株価は8ドル上昇するか、8ドル下落すると予想されているとする。その場合、たとえば1カ月後の株価の確率分布は、好ましいニュースと好ましくないニュースに対応した二つの対数正規分布の混合分布になっているかもしれない。図18.5（次頁）は、このような状況を例示したものである。実線は1カ月後の株価の混合対数正規分布を、点線は同じ平均と標準偏差をもつ対数正規分布を示したものである。

真の確率分布は（明らかに対数正規分布ではなく）二峰性分布（bimodal dis-

図18.5 1回の大きなジャンプの影響  
実線：眞の分布 点線：対数正規分布

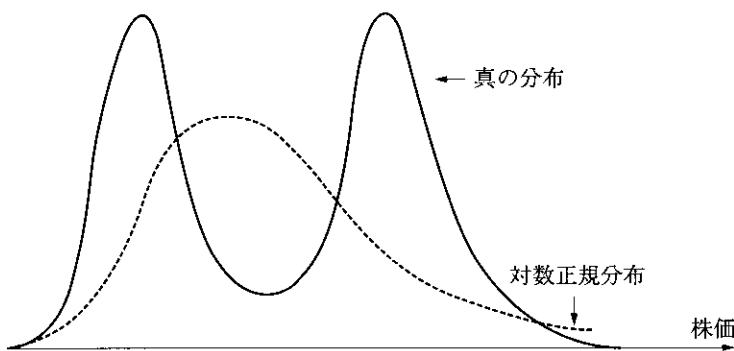
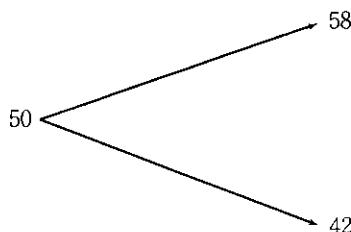


図18.6 1カ月後の株価の変化



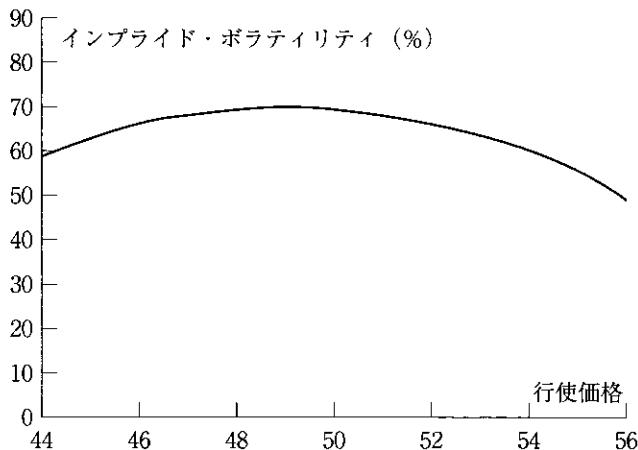
tribution) である。株価が二峰性分布に従うことによる一般的な影響を調べる一つの簡単な方法は、分布が二項分布となる極端な場合を考えることである。以下、それについて考察してみよう。

現在の株価は50ドルで、1カ月後に42ドルか58ドルに変化することがわかっているとする。無リスク金利は年率12%とする。図18.6にその状況を示した。オプションの価値は第11章の二項モデルを用いて計算することができる。この場合は、 $u=1.16$ ,  $d=0.84$ ,  $a=1.0101$ ,  $p=0.5314$ となる。ある範囲の行使価格に対するオプション価格の計算結果を表18.3にまとめた。第1列は行使価格、第2列は満期1カ月のヨーロピアン・コール・オプションの価格、第3列は満期1カ月のヨーロピアン・プット・オプションの価格、第4列はインプライド・ボラティリティである(18.1節で示したように、行使

表18.3 真の分布が二項分布の場合のインプライド・ボラティリティ

| 行使価格<br>(ドル) | コール価格<br>(ドル) | プット価格<br>(ドル) | インプライド・<br>ボラティリティ<br>(%) |
|--------------|---------------|---------------|---------------------------|
| 42           | 8.42          | 0.00          | 0.0                       |
| 44           | 7.37          | 0.93          | 58.8                      |
| 46           | 6.31          | 1.86          | 66.6                      |
| 48           | 5.26          | 2.78          | 69.5                      |
| 50           | 4.21          | 3.71          | 69.2                      |
| 52           | 3.16          | 4.64          | 66.1                      |
| 54           | 2.10          | 5.57          | 60.0                      |
| 56           | 1.05          | 6.50          | 49.0                      |
| 58           | 0.00          | 7.42          | 0.0                       |

図18.7 表18.3の場合のボラティリティ・スマイル



価格と満期が同じ場合には、ヨーロピアン・プット・オプションとヨーロピアン・コール・オプションのインプライド・ボラティリティは同じになる）。図18.7は表18.3のボラティリティ・スマイルを描いたものである。その形状は実際に「しかめっ面」（通貨オプション市場で観測されるものとは逆向き）で、アウト・オブ・ザ・マネーまたはイン・ザ・マネーになるにつれてボラティリ

ティは低くなっている。行使価格50のオプションのインプライド・ボラティリティは、行使価格が44と56のオプションのインプライド・ボラティリティより高い。

## 要 約

Black-Scholes モデルおよびその拡張では、将来の与えられた時点における原資産価格の確率分布は対数正規分布であると仮定されている。この仮定はトレーダーの置く仮定とは異なる。トレーダーの仮定する株価の確率分布は、対数正規分布よりも左の裾が厚く、右の裾が薄い。また、為替レートの確率分布は、対数正規分布よりも左右の裾が厚い。

トレーダーは、対数正規でない分布を扱うためにボラティリティ・スマイルを用いている。ボラティリティ・スマイルは、オプションのインプライド・ボラティリティと行使価格との関係を定義するものである。株式オプションのボラティリティ・スマイルは右下がりになる傾向がある。したがって、アウト・オブ・ザ・マネーのプットとイン・ザ・マネーのコールのインプライド・ボラティリティは高くなる傾向があり、アウト・オブ・ザ・マネーのコールとイン・ザ・マネーのプットのインプライド・ボラティリティは低くなる傾向がある。外国通貨オプションのボラティリティ・スマイルはU字型をしている。したがって、アット・ザ・マネーのオプションよりも、アウト・オブ・ザ・マネーとイン・ザ・マネーのオプションのほうがインプライド・ボラティリティが高くなる。

トレーダーはボラティリティの期間構造を用いることも多い。この場合は、オプションのインプライド・ボラティリティはオプションの残存期間に依存することになる。ボラティリティ・スマイルとボラティリティの期間構造を組み合わせたものが、ボラティリティ曲面である。これによって、インプライド・ボラティリティは行使価格と満期の関数として定義される。

## 参考文献

- Bakshi, G., C. Cao, and Z. Chen. "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models," *Journal of Finance*, 52, 5 (December 1997) : 2004-49.
- Bates, D.S. "Post '87 Crash Fears in the S&P Futures Market," *Journal of Econometrics*, 94 (January/February 2000) : 181-238.
- Derman, E. "Regimes of Volatility," *Risk*, April 1999 : 55-59.
- Ederington, L.H., and W. Guan. "Why Are Those Options Smiling," *Journal of Derivatives*, 10, 2 (2002) : 9-34.
- Jackwerth, J.C., and M. Rubinstein. "Recovering Probability Distributions from Option Prices," *Journal of Finance*, 51 (December 1996) : 1611-31.
- Lauterbach, B., and P. Schultz. "Pricing Warrants : An Empirical Study of the Black-Scholes Model and Its Alternatives," *Journal of Finance*, 4, 4 (September 1990) : 1181-1210.
- Melick, W.R., and C.P. Thomas. "Recovering an Asset's Implied Probability Density Function from Option Prices : An Application to Crude Oil during the Gulf Crisis," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, 1 (March 1997) : 91-115.
- Rubinstein, M. "Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976, through August 31, 1978," *Journal of Finance*, 40 (June 1985) : 455-80.
- Rubinstein, M. "Implied Binomial Trees," *Journal of Finance*, 49, 3 (July 1994) : 771-818.
- Xu, X., and S.J. Taylor. "The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29 (1994) : 57-74.

## 章末問題

**18.1** 次の場合、どのようなボラティリティ・スマイルが観測されるか。

- (a) 株価の分布の左右の裾が対数正規分布よりも薄い場合
  - (b) 株価の分布の裾が、対数正規分布よりも右は厚く、左は薄い場合
- 18.2** 株式に対しては、どのようなボラティリティ・スマイルが観測されるか。
- 18.3** 原資産価格の変動にジャンプがある場合、どのようなボラティリティ・スマイルになりやすいか。また、そのパターンは、満期 3 カ月のオプションよりも満期 2 年のオプションのほうが顕著にみられるか。
- 18.4** 行使価格と満期が同じヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションがある。インプライド・ボラティリティはコールが 30%，プットが 25% であるとする。このとき、どのような取引を行うべきか。
- 18.5** 分布が対数正規分布よりも左の裾は厚く、右の裾は薄い場合、ボラティリティ・スマイルが右下がりになる理由を詳細に説明せよ。
- 18.6** ヨーロピアン・コールの市場価格が 3.00 ドルで、ボラティリティを 30% としたときの Black-Scholes モデルによる価格は 3.50 ドルであるとする。また、行使価格と満期が同じヨーロピアン・プット・オプションの Black-Scholes モデルによる価格は 1.00 ドルであるとする。このとき、プット・オプションの市場価格はいくらであるべきか。その理由も説明せよ。
- 18.7** 「大暴落恐怖症」の意味するところを説明せよ。
- 18.8** 現在の株価を 20 ドルとする。結果がわかると株価が 5 ドル上昇するか 5 ドル下落するニュースの発表が、明日行われると予想されているとする。この株式に対する満期 1 カ月のオプションを Black-Scholes モデルで評価する場合の問題点について述べよ。
- 18.9** ボラティリティが確率変動し、株価と正の相関をもつ場合、満期 6 カ月のオプションに対してどのようなボラティリティ・スマイルが観測されやすいか。

- 18.10** 株式オプションの評価モデルを実証分析する際に、どのようなことが問題になってくると思うか。
- 18.11** 中央銀行の政策によって、為替レートの変動幅が0.97から1.03までと決められているとする。このとき、通貨オプションのインプライド・ボラティリティにはどのようなパターンが観測されると思うか。
- 18.12** オプション・トレーダーは、ディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションをボラティリティのオプションと呼ぶことがある。その理由を考えよ。
- 18.13** ある株式に対する行使価格30ドル、満期1年のヨーロピアン・コール・オプションのインプライド・ボラティリティが30%である。同じ株式に対する行使価格30ドル、満期1年のヨーロピアン・プット・オプションのインプライド・ボラティリティが33%である。このとき、どのような裁定取引が可能か。その裁定取引は、Black-Scholes モデルの仮定する対数正規性が成り立つ場合のみ可能な取引か。その理由についても詳細に説明せよ。
- 18.14** ある企業に重大な影響を及ぼす訴訟の結果が、明日発表されることになっているとする。その企業の株価は現在60ドルである。企業にとって有利な判決が出た場合には株価は75ドルにジャンプし、不利な判決が出た場合には株価は50ドルにジャンプすると予想されている。有利な判決が出るリスク中立確率を計算せよ。判決が出た後の6カ月間におけるその企業の株価のボラティリティは、有利な判決が出た場合は25%，不利な判決が出た場合は40%になると仮定する。DerivaGem ソフトウェアを用いて、その企業に対する満期6カ月のヨーロピアン・オプションについて、現時点におけるインプライド・ボラティリティと行使価格との関係を求めよ。ただし、その企業は配当を支払っておらず、6カ月物無リスク金利は6%であるとする。また、行使価格が30ドル、40ドル、50ドル、60ドル、70ドル、80ドルのコール・オプションを考えよ。
- 18.15** ある為替レートが現在0.8000、その為替レートのボラティリティが

12%と呈示されており、二国の金利は同一であるとする。対数正規性を仮定して、3カ月後の為替レートが次の範囲の値になる確率を推定せよ。(a)0.7000未満、(b)0.7000と0.7500の間、(c)0.7500と0.8000の間、(d)0.8000と0.8500の間、(e)0.8500と0.9000の間、(f)0.9000超。外国為替市場で通常観測されるボラティリティ・スマイルに基づいて考えた場合、これらの推定値のうち、低すぎるものと高すぎるものはどれか。

- 18.16** ある株式の株価は40ドル、その株式に対する行使価格30ドル、満期6カ月のヨーロピアン・コール・オプションのインプライド・ボラティリティは35%，行使価格50ドル、満期6カ月のヨーロピアン・コール・オプションのインプライド・ボラティリティは28%である。6カ月物無リスク金利は5%で、株式には配当はないとする。二つのインプライド・ボラティリティが異なる理由を説明せよ。また、DerivaGem ソフトウェアを用いて、これら二つのオプションの価格を計算せよ。さらに、ブット・コール・パリティを用いて、行使価格が30ドルと50ドルに対して、満期6カ月のヨーロピアン・ブット・オプションの価格を求め、DerivaGem ソフトウェアを使って、これら二つのブット・オプションのインプライド・ボラティリティを計算せよ。
- 18.17** 「トレーダーは、Black-Scholes モデルを補間ツールとして用いている」という見方について議論せよ。
- 18.18** 表18.2を使って、満期8カ月、 $K/S_0=1.04$ のオプションに対してトレーダーが用いるインプライド・ボラティリティを計算せよ。

## 宿題

- 18.19** ある企業の株式が4ドルで売られている。その企業には負債はない。

アナリストは、この企業の清算価値を少なくとも3万ドルと考えており、発行済株式数は10万株である。この場合、どのようなボラティリティ・スマイルが観測されると考えられるか。

- 18.20** ある企業が現在大きな訴訟の判決を待っている。判決は1ヶ月以内に出される予定である。株価は現在20ドルである。有利な判決が出れば1ヶ月後の株価は24ドルになり、不利な判決が出れば1ヶ月後の株価は18ドルになると予想されている。1ヶ月物無リスク金利は年率8%とする。

- (a) 有利な判決が出るリスク中立確率を求めよ。
- (b) 行使価格19ドル、20ドル、21ドル、22ドル、23ドルに対して、満期1ヶ月のコール・オプションの価格を求めよ。
- (c) DerivaGem ソフトウェアを用いて、満期1ヶ月のコール・オプションのボラティリティ・スマイルを計算せよ。
- (d) 満期1ヶ月のプット・オプションに対しても、同じボラティリティ・スマイルが得られることを確かめよ。

- 18.21** ある先物価格が現在40ドル、無リスク金利が5%であるとする。明日のニュースによって、今後3ヶ月間のボラティリティが10%または30%のいずれかになると予想されているとする。前者になる可能性は60%，後者になる可能性は40%である。DerivaGem ソフトウェアを用いて、満期3ヶ月のオプションに対するボラティリティ・スマイルを計算せよ。

- 18.22** 多くの外国為替のデータが著者の Web サイト

<http://www.rotman.utoronto.ca/~hull>

から入手可能である。そのなかから通貨を選択し、そのデータを使って、表18.1と同様の表を作成せよ。

- 18.23** 多くの株価指数のデータが著者の Web サイト

<http://www.rotman.utoronto.ca/~hull>

から入手可能である。そのなかから指数を選択し、3標準偏差を超える下落が、3標準偏差を超える上昇より多く発生しているかを検

証せよ。

- 18.24** 行使価格と満期が同じヨーロピアン・コールとヨーロピアン・プットを考える。短い期間でボラティリティの値が水準  $\sigma_1$  から新しい水準  $\sigma_2$  に上昇するとき、それらの価値は同じ値だけ変化することを示せ（ヒント：プット・コール・バリティを用いよ）。
- 18.25** 為替レートが現在 1.0 で、満期 6 カ月のヨーロピアン・オプションのインプライド・ボラティリティが行使価格 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.1, 1.2, 1.3 に対して、それぞれ 13%, 12%, 11%, 10%, 11%, 12%, 13% である。自国および外国の無リスク金利はともに 2.5% とする。本章付録の例 18A.1 と同様の方法を用いて、インプライドされた確率分布を求めよ。この分布と、すべてのインプライド・ボラティリティを 11.5% としたときのインプライドされた分布とを比較せよ。
- 18.26** 表 18.2 を使って、満期 11 カ月、 $K/S_0 = 0.98$  のオプションに対してトレーダーが用いるインプライド・ボラティリティを計算せよ。

## 付 錄

### ボラティリティ・スマイルからの インプライドされたリスク中立確率分布の求め方

ある資産に対する、行使価格  $K$ 、満期  $T$  のヨーロピアン・コール・オプションの価格は、

$$c = e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} (S_T - K) g(S_T) dS_T$$

で与えられる。ここで、 $r$  は金利（定数）、 $S_T$  は時点  $T$  における資産価格、 $g$  は  $S_T$  のリスク中立確率密度関数である。 $K$  に関して微分すると、

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} g(S_T) dS_T$$

が得られる。 $K$  に関してもう一度微分すると、

$$\frac{\partial^2 c}{\partial K^2} = e^{-rT} g(K)$$

が得られる。これより、確率密度関数  $g$  は、

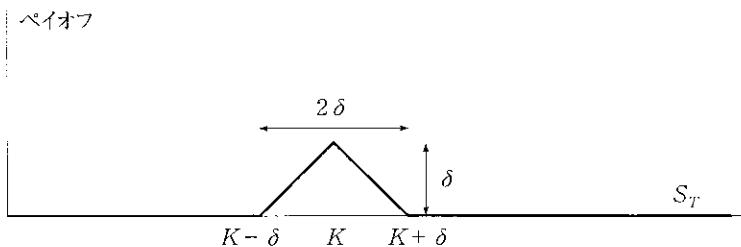
$$g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}$$

で与えられる。Breeden と Litzenberger (1978) によって得られたこの結果を用いると、ボラティリティ・スマイルからリスク中立確率分布が推定できるようになる（注9）。 $c_1, c_2, c_3$  を、行使価格をそれぞれ  $K-\delta, K, K+\delta$  とする満期  $T$  のヨーロピアン・コール・オプションの価格とする。 $\delta$  が小さいと仮定すると、 $g(K)$  の推定値を、

$$e^{rT} \frac{c_1 + c_3 - 2c_2}{\delta^2}$$

(注9) D.T. Breeden and R.H. Litzenberger, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices," *Journal of Business*, 51 (1978) : 621-51 を参照。

図18A.1 バタフライ・スプレッドのペイオフ



で与えることができる。

別の見方からこの公式を理解するために、行使価格が  $K - \delta$ ,  $K$ ,  $K + \delta$  で、満期が  $T$  のバタフライ・スプレッドを考えよう。バタフライ・スプレッドは、行使価格  $K - \delta$  のコール 1 単位の購入と行使価格  $K + \delta$  のコール 1 単位の購入、および行使価格  $K$  のコール 2 単位の売却からつくれ、そのポジションの価値は  $c_1 + c_3 - 2c_2$  である。ポジションの価値は、ペイオフをリスク中立確率密度  $g(S_T)$  を用いて積分し、無リスク金利で割り引くことでも計算できる。ペイオフは図18A.1のようになる。 $\delta$  が小さいので、ペイオフがゼロでない範囲  $K - \delta < S_T < K + \delta$  では  $g(S_T) = g(K)$  と仮定できる。図18A.1の「スパイク」の面積は  $0.5 \times 2\delta \times \delta = \delta^2$  となるので、ペイオフの価値は ( $\delta$  が小さいときには)  $e^{-rT}g(K)\delta^2$  になる。したがって、

$$e^{-rT}g(K)\delta^2 = c_1 + c_3 - 2c_2$$

が成り立ち、直接

$$g(K) = e^{rT} \frac{c_1 + c_3 - 2c_2}{\delta^2} \quad (18A.1)$$

が得られる。

【例18A.1】

配当ない株式の価格が10ドル、無リスク金利が3%，満期3カ月のヨーロピアン・オプションのインプライド・ボラティリティが行使価格 6ドル, 7ドル, 8ドル, 9ドル, 10ドル, 11ドル, 12ドル, 13ドル, 14ドルに対して、それぞれ30%, 29%, 28%, 27%, 26%, 25%，

24%, 23%, 22%であるとする。上の結果を用いる一つの方法は,  $g(S_T)$  が  $S_T = 6$  と  $S_T = 7$  の間では定数,  $S_T = 7$  と  $S_T = 8$  の間では定数などと仮定して考えることである。

$$\begin{aligned} g(S_T) &= g_1, \quad 6 \leq S_T < 7 \text{ のとき} \\ g(S_T) &= g_2, \quad 7 \leq S_T < 8 \text{ のとき} \\ g(S_T) &= g_3, \quad 8 \leq S_T < 9 \text{ のとき} \\ g(S_T) &= g_4, \quad 9 \leq S_T < 10 \text{ のとき} \\ g(S_T) &= g_5, \quad 10 \leq S_T < 11 \text{ のとき} \\ g(S_T) &= g_6, \quad 11 \leq S_T < 12 \text{ のとき} \\ g(S_T) &= g_7, \quad 12 \leq S_T < 13 \text{ のとき} \\ g(S_T) &= g_8, \quad 13 \leq S_T < 14 \text{ のとき} \end{aligned}$$

とおく。インプライド・ボラティリティを補間して、行使価格6.5ドル、満期3カ月のオプションのインプライド・ボラティリティを29.5%とすれば、 $g_1$ の値を計算することができる。このとき、行使価格が6ドル、6.5ドル、7ドルのオプションのインプライド・ボラティリティは、それぞれ30%，29.5%，29%である。DerivaGem ソフトウェアを用いてオプション価格を計算すると、それぞれ4.045ドル、3.549ドル、3.055ドルになる。 $K=6.5$ ,  $\delta=0.5$ として(18A.1)式を用いると、

$$g_1 = \frac{e^{0.03 \times 0.25} (4.045 + 3.055 - 2 \times 3.549)}{0.5^2} = 0.0057$$

が得られる。同様に計算して、

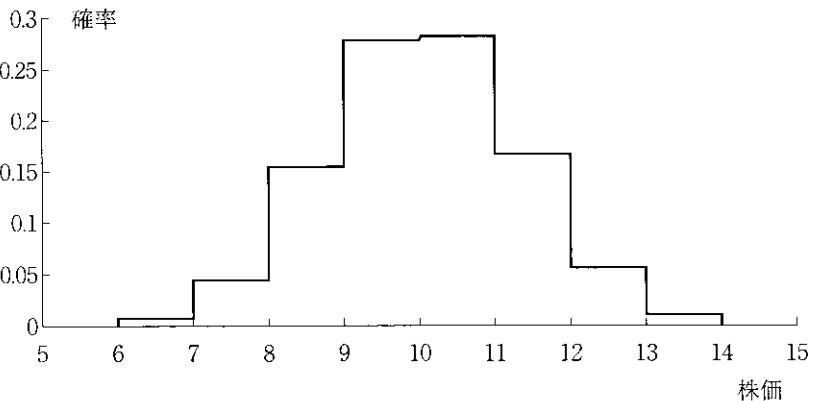
$$\begin{aligned} g_2 &= 0.0444, \quad g_3 = 0.1545, \quad g_4 = 0.2781 \\ g_5 &= 0.2813, \quad g_6 = 0.1659, \quad g_7 = 0.0573, \quad g_8 = 0.0113 \end{aligned}$$

が得られる。

図18A.2はインプライドされた分布を図示したものである（確率分布の面積は全体で0.9985になっている。これは、 $S_T < 6$  または  $S_T > 14$ となる確率が0.0015であることを意味している）。図18A.2をみてもはっきりとはわからないが、インプライドされた分布は、対数正規分布よりも左の裾が厚く、右の裾が薄くなっている。ボラティリティが26%の対数正規分布

を用いて計算してみると、株価が6ドルと7ドルの間になる確率は0.0031（図18A.2の対応する確率は0.0573）になり、株価が13ドルと14ドルの間になる確率は0.0167（図18A.2の対応する確率は0.0113）になる。

図18A.2 例18A.1に対するインプライドされた確率分布



## 第19章

# 基本的な数値計算法

本章では、デリバティブの評価に関して厳密解が得られないときに用いられる3種類の数値計算法について議論する。一つ目は資産価格の変動をツリーで表現する手法で、第11章で紹介したものである。二つ目はモンテカルロ・シミュレーションを用いる手法で、第13章で確率過程の説明を行った時に簡単に触れたものである。三つ目は有限差分法を用いる手法である。

モンテカルロ・シミュレーションは、ペイオフが原資産変数の履歴に依存するデリバティブや原資産変数が複数あるデリバティブに対してよく用いられる。ツリーと有限差分法は、アメリカン・オプションや保有者が満期以前になんらかの判断を行うようなデリバティブに対してよく用いられる。それらすべての手法は、デリバティブの評価だけでなく、デルタ、ガンマ、ベガなどのグリークスの計算にも用いられる。

実務に現れるデリバティブの評価に関する問題のほとんどは、本章で議論

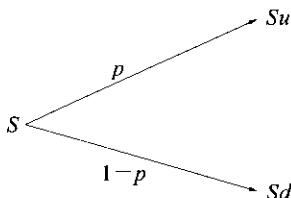
する基本的な手法で扱うことができる。しかし、第26章で説明するように、特定の問題を扱うためにそれらの手法の修正が必要となる場合もある。

## 19.1 二項ツリー

二項ツリーについては第11章で紹介した。二項ツリーを用いて、ヨーロピアン・オプションとアメリカン・オプションの両方を評価することができる。第13章、第15章、および第16章で説明した Black-Scholes の公式およびその拡張は、ヨーロピアン・オプションの評価に関する解析式である(注1)。アメリカン・オプションの評価に関しては、解析式は存在していない。したがって、二項ツリーはその種のオプションを評価する最も役に立つ方法である(注2)。

第11章で説明したように、二項ツリーによる評価方法では、オプション期間を非常に多くの長さ  $\Delta t$  の微小区間に分割し、各時間区間では、原資産価格は初期値  $S$  から  $Su$  または  $Sd$  のどちらかに変化すると仮定する。その様子を図19.1に示す。一般的に、 $u > 1$ 、 $d < 1$  である。したがって、 $S$  から

図19.1 二項モデルのもと  
での  $\Delta t$  後の資産  
価格の変化



(注1) Black-Scholes の公式を導出する際に置かれている仮定は、二項ツリーに対するものと同じである。したがって、予想されることであるが、時間ステップ数を増やしていく極限では、二項ツリーを用いて計算したヨーロピアン・オプションの価格は Black-Scholes の価格に収束する。

(注2) アメリカン・オプションの価格に対する解析的な近似式がいくつか提案されている。最もよく知られているのは二次近似の方法である。この方法については、著者の Web サイトのテクニカルノート 8 を参照されたい。

$S_u$  への変化は資産価格の上昇に対応し、 $S$  から  $S_d$  への変化は資産価格の下落に対応している。上昇確率を  $p$  で表す。下落確率は  $1-p$  である。

### リスク中立化法

第11章と第13章で説明したリスク中立化法は、オプション（またはその他デリバティブ）を評価するときは世界がリスク中立であると仮定してもよい、という原理に基づく評価法である。したがって、オプションは以下の手順で評価できる。

1. すべての取引可能な資産の期待收益率は無リスク金利に等しいと仮定する。
2. デリバティブのペイオフの期待値を計算し、それを無リスク金利で割り引いた値をデリバティブの価値とする。

この原理に基づいて、ツリーの構築も行われる。

### $p$ , $u$ , および $d$ の決め方

パラメータ  $p$ ,  $u$ , および  $d$  は、長さ  $\Delta t$  の時間区間における資産価格の平均と分散が正しい値になるように決めなければならない。リスク中立世界を仮定しているので、資産の期待收益率は無リスク金利  $r$  である。資産の利回りを  $q$  とすると、キャピタル・ゲインに対する期待收益率は  $r-q$  でなければならない。のことより、長さ  $\Delta t$  の時間区間の終わりにおける資産価格の期待値は  $Se^{(r-q)\Delta t}$  になる。ここで、 $S$  は時間区間のはじめにおける資産価格である。したがって、ツリーでの期待値が一致するためには、

$$Se^{(r-q)\Delta t} = pS_u + (1-p)S_d$$

すなわち、

$$e^{(r-q)\Delta t} = pu + (1-p)d \quad (19.1)$$

が成り立つ必要がある。

13.4節で説明したように、微小時間  $\Delta t$  における資産価格の変化率  $R$  の分散は  $\sigma^2 \Delta t$  である。ここで  $\sigma$  は資産価格のボラティリティである。 $1+R$  の分散も同じ値である（変数に定数を加えても分散は変わらないからである）。

変数  $Q$  の分散は  $E(Q^2) - [E(Q)]^2$  で与えられ、 $1 + R$  が  $u$  になる確率が  $p$  で、 $d$  になる確率が  $1 - p$  だから、

$$pu^2 + (1-p)d^2 - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t$$

が成り立つ。 $(19.1)$ 式より得られる  $e^{(r-q)\Delta t}(u+d) = pu^2 + (1-p)d^2 + ud$  を用いると、

$$e^{(r-q)\Delta t}(u+d) - ud - e^{2(r-q)\Delta t} = \sigma^2 \Delta t \quad (19.2)$$

になる。

$(19.1)$ 式と $(19.2)$ 式は  $p$ ,  $u$ ,  $d$  が満たすべき二つの条件である。3番目の条件として、Cox, Ross, および Rubinstein (1979) は、

$$u = \frac{1}{d} \quad (19.3)$$

を用いている(注3)。 $(19.1)$ 式から $(19.3)$ 式までを、 $\Delta t$  より高次の項を無視して解くと、

$$p = \frac{a-d}{u-d} \quad (19.4)$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (19.5)$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (19.6)$$

が得られる(注4)。ここで、

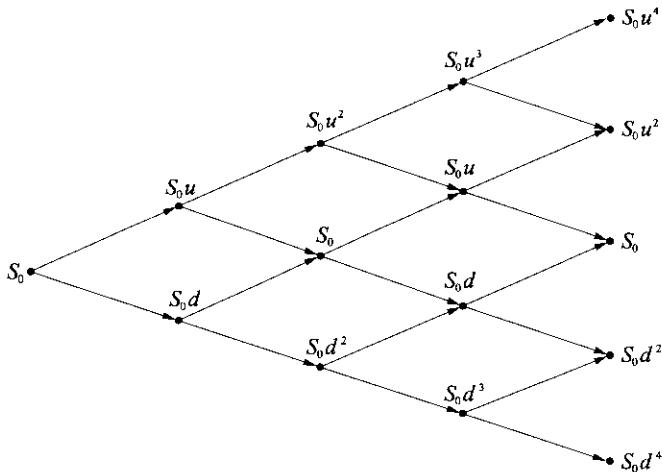
$$a = e^{(r-q)\Delta t} \quad (19.7)$$

である。変数  $a$  は成長係数 (growth factor) と呼ばれることがある。 $(19.4)$ 式から $(19.7)$ 式までは、11.9節に現れたものと同じである。

(注3) J.C. Cox, S.A. Ross, and M. Rubinstein, "Option Pricing: A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7 (October 1979) : 229-63 を参照。

(注4) このことを確かめる。まず、 $(19.4)$ 式から $(19.7)$ 式は条件式 $(19.1)$ と $(19.3)$ を厳密に満たしている。指數関数  $e^x$ を展開すると、 $1+x+x^2/2+\cdots$ になる。これを用いて  $\Delta t$  より高次の項を無視すると、 $(19.5)$ 式は  $u = 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$  になり、 $(19.6)$ 式は  $d = 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t$  になる。また、 $e^{(r-q)\Delta t} = 1 + (r-q)\Delta t$  となり、 $e^{2(r-q)\Delta t} = 1 + 2(r-q)\Delta t$  となる。これらを $(19.2)$ 式の左辺に代入して  $\Delta t$  より高次の項を無視すると、 $(19.2)$ 式が満たされていることがわかる。

図19.2 オプション評価用ツリー



### 資産価格のツリー

二項モデルを用いたときの資産価格に対する完全なツリーを図19.2に例示する。時点ゼロにおける資産価格  $S_0$  はわかっているものとする。時点  $\Delta t$  では資産価格は  $S_0u$  か  $S_0d$  のいずれかであり、時点  $2\Delta t$  では資産価格は  $S_0u^2$ ,  $S_0$ ,  $S_0d^2$  のいずれかである、などとなる。一般に、時点  $i\Delta t$  では資産価格は  $i+1$  個の状態をとりうる。これらは、

$$S_0u^j d^{i-j} \quad j=0, 1, \dots, i$$

と書ける。図19.2におけるツリーの各ノードでの資産価格は関係式  $u=1/d$  を用いて計算されたものである。たとえば  $S_0u^2d=S_0u$  である。価格が上昇した後に下落する場合の資産価格と下落した後に上昇する場合の資産価格が同じになるという意味で、ここでのツリーは再結合していることに注意しよう。

### ツリーを用いた後向き計算

オプションの価値は、ツリーの終端（時点  $T$ ）から後向きに計算して求められる。時点  $T$  におけるオプションの価値は既知である。たとえば、プッ

ト・オプションの価値は  $\max(K - S_T, 0)$  であり、コール・オプションの価値は  $\max(S_T - K, 0)$  である。ここで  $S_T$  は時点  $T$  における資産価格、 $K$  は行使価格である。リスク中立世界を仮定しているので、時点  $T - \Delta t$  における各ノードでのオプションの価値は、時点  $T$  における価値の期待値を金利  $r$  で期間  $\Delta t$  だけ割り引くことで計算できる。同様に、時点  $T - 2\Delta t$  における各ノードでの価値は、時点  $T - \Delta t$  における価値の期待値を金利  $r$  で期間  $\Delta t$  だけ割り引くことで計算できる、といった具合になる。アメリカン・オプションの場合は、オプションを期限前行使したほうがさらに期間  $\Delta t$  だけ保有するより得かを各ノードで調べることが必要になる。すべてのノードについて後向き計算を行っていくと、最後に時点ゼロにおけるオプションの価値が得られる。

【例19.1】

配当のない株式に対する満期 5 カ月のアメリカン・プット・オプションを考える。株価を 50 ドル、行使価格を 50 ドル、無リスク金利を年率 10%、ボラティリティを年率 40% とする。これまでの記号を用いると、 $S_0 = 50$ ,  $K = 50$ ,  $r = 0.10$ ,  $\sigma = 0.40$ ,  $T = 0.4167$ ,  $q = 0$  である。オプション期間を長さ 1 カ月 ( $= 0.0833$  年) の 5 区間に分割して、二項ツリーを構築する。このとき、 $\Delta t = 0.0833$  となるので、(19.4) 式から (19.7) 式までを用いると、

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.1224, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.8909, \quad a = e^{r\Delta t} = 1.0084$$

$$p = \frac{a - d}{u - d} = 0.5073, \quad 1 - p = 0.4927$$

となる。

図19.3 は DerivaGem ソフトウェアで作成した二項ツリーである。各ノードにある二つの数字は、上段の数字がそのノードでの株価、下段の数字がそのノードでのオプションの価値を表している。株価の上昇確率は常に 0.5073 で、下降確率は 0.4927 である。

時点  $i\Delta t$  ( $i = 0, 1, \dots, 5$ ) における  $j$  番目のノード ( $j = 0, 1, \dots, i$ ) での株価は  $S_0 u^j d^{i-j}$  である。たとえば、ノード A ( $i=4, j=1$ ) (すなわち、

図19.3 配当のない株式に対するアメリカン・プットを評価するためのDerivaGem ソフトウェアで作成した二項ツリー(例19.1)

各ノード：

上段=原資産価格

下段=オプション価格

網掛けはオプションが行使されるノード

行使価格=50

時間ステップごとの割引率=0.9917

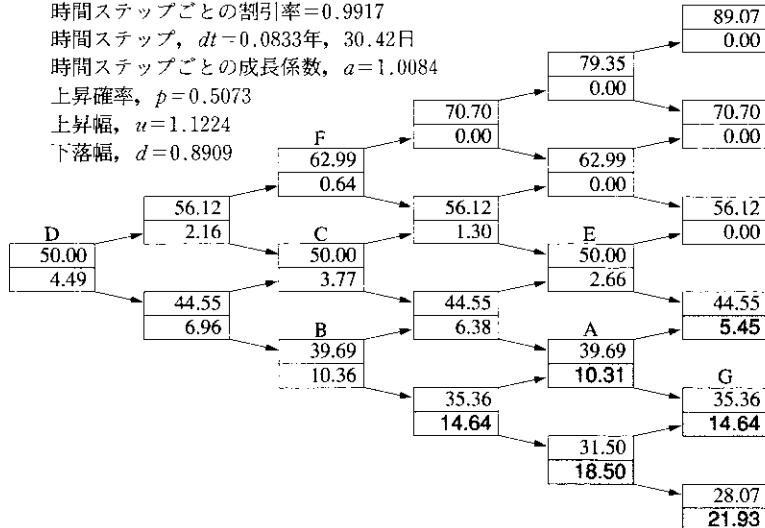
時間ステップ,  $dt = 0.0833$ 年, 30.42日

時間ステップごとの成長係数,  $a = 1.0084$

上昇確率,  $p = 0.5073$

上昇幅,  $u = 1.1224$

下落幅,  $d = 0.8909$



ノードの時間：

0.0000

0.0833

0.1667

0.2500

0.3333

0.4167

4番目の時間ステップの終わりにおける下から2番目のノード)での株価は  $50 \times 1.1224 \times 0.8909^3 = 39.69$  ドルになる。終端の各ノードでのオプション価格は  $\max(K - S_t, 0)$  から計算できる。たとえば、ノード G でのオプション価格は  $50 - 35.36 = 14.64$  である。終端の一つ前のノードでのオプション価格は、終端のノードでのオプション価格から計算される。まず、そのノードではオプションの行使はないと仮定する。そうすると、オプション価格は1時間ステップ後のオプション価格の期待値の現在価値として計算される。たとえば、ノード E でのオプション価格は、

$$(0.5073 \times 0 + 0.4927 \times 5.45) e^{-0.10 \times 0.0833} = 2.66$$

となる。また、ノード A でのオプション価格は、

$$(0.5073 \times 5.45 + 0.4927 \times 14.64) e^{-0.10 \times 0.0833} = 9.90$$

となる。次に、保有し続けるより期限前行使のほうが得かを調べる。ノード E では、株価と行使価格がともに50ドルなので、期限前行使した場合のオプションの価値はゼロとなるため、明らかに行使しないほうがよい。したがって、ノード E での正しいオプションの価値は2.66になる。ノード A では違う結果になる。オプション行使すれば、その価値は $50.00 - 39.69$ , すなわち10.31ドルである。これは9.90ドルより価値があるので、ノード A に到達した場合は、オプションは行使するべきで、ノード A での正しいオプションの価値は10.31ドルになる。

さらに手前のノードにおけるオプション価格も同様に計算される。その際に、オプションがイン・ザ・マネーであっても期限前行使が常に最適とは限らないことに注意しよう。たとえばノード B について考える。オプション行使すれば、その価値は $50.00 - 39.69$ , すなわち10.31ドルである。しかし、オプション行使しなければ、その価値は、

$$(0.5073 \times 6.38 + 0.4927 \times 14.64) e^{-0.10 \times 0.0833} = 10.36$$

になる。したがって、このノードではオプション行使するべきではなく、このノードでの正しいオプションの価値は10.36ドルになる。

ツリーに沿って後向きに計算していくと、最初のノードでのオプションの価値は4.49ドルと求まる。これはオプションの現在価値に対する数値計算結果である。実際には、 $\Delta t$  をもっと小さい値にして、もっと多くのノードを用いて計算を行う。DerivaGem ソフトウェアで時間ステップ数を30, 50, 100, 500にしてオプションの価値を計算すると、それぞれ4.263, 4.272, 4.278, 4.283になる。

## 手法の代数的表現

配当のない株式のアメリカン・プット・オプションのオプション期間を長さ  $\Delta t$  の  $N$  個の区間に分割する。時点  $i\Delta t$  における  $j$  番目のノードをノード  $(i, j)$  と呼ぶこととする。ここで  $0 \leq i \leq N$ ,  $0 \leq j \leq i$  である。ノード  $(i, j)$

でのオプションの価値を  $f_{i,j}$  と書く。ノード  $(i,j)$  での株価は  $S_0 u^j d^{i-j}$  である。満期日におけるアメリカン・プットの価値は  $\max(K - S_T, 0)$  であるから、

$$f_{N,j} = \max(K - S_0 u^j d^{N-j}, 0) \quad j=0, 1, \dots, N$$

となる。時点  $i\Delta t$  におけるノード  $(i,j)$  から時点  $(i+1)\Delta t$  におけるノード  $(i+1, j+1)$  への推移確率は  $p$ 、時点  $i\Delta t$  におけるノード  $(i,j)$  から時点  $(i+1)\Delta t$  におけるノード  $(i+1, j)$  への推移確率は  $1-p$  である。期限前行使がないと仮定すると、リスク中立化法より、 $0 \leq i \leq N-1$ かつ  $0 \leq j \leq i$  に対して、

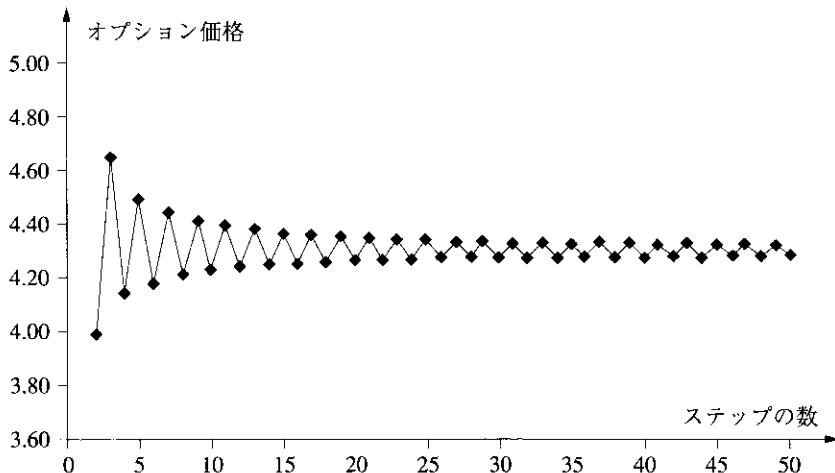
$$f_{i,j} = e^{-r\Delta t} [pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]$$

が得られる。期限前行使を考慮するときは、 $f_{i,j}$ に対するこの値とオプションの本源的価値とを比較する必要があり、

$$f_{i,j} = \max\{K - S_0 u^j d^{i-j}, e^{-r\Delta t} [pf_{i+1,j+1} + (1-p)f_{i+1,j}]\}$$

となる。ここで、時点  $T$  から始めて後向きに計算しているので、時点  $i\Delta t$  における価値には、時点  $i\Delta t$  における期限前行使の可能性の影響だけでな

図19.4 DerivaGem ソフトウェアの Application Builder の関数を用いて計算した例19.1のオプション価格の収束状況



く、それ以降の期限前行使の影響も織り込まれている点に注意しよう。

$\Delta t$  をゼロに近づける極限では、アメリカン・プットに対する正確な価値が得られる。実務上は、 $N=30$ で十分な結果が得られることが多い。図19.4に例19.1のオプション価格の収束状況を示す。このグラフは、DerivaGem ソフトの Application Builder の関数を用いた計算結果から作成したものである (Sample Application A を参照)。

### デルタ、およびその他のグリークスの計算

オプションのデルタ ( $\Delta$ ) は、原資産である株式の価格に対するオプション価格の変化率であることを思い出そう。したがって、デルタは、

$$\frac{\Delta f}{\Delta S}$$

で計算できる。ここで、 $\Delta S$  は株価の微小変化、 $\Delta f$  は対応するオプション価格の微小変化である。時点  $\Delta t$ において、株価が  $S_0 u$  の場合のオプション価格は  $f_{1,1}$ 、 $S_0 d$  の場合のオプション価格は  $f_{1,0}$  と評価される。別のいい方をすれば、 $\Delta S = S_0 u - S_0 d$  のとき、 $\Delta f = f_{1,1} - f_{1,0}$  になる。したがって、時点  $\Delta t$ におけるデルタは、

$$\Delta = \frac{f_{1,1} - f_{1,0}}{S_0 u - S_0 d} \quad (19.8)$$

になる。

ガンマ ( $\Gamma$ ) を求めるために、時点  $2\Delta t$  における二つの  $\Delta$  の推定値を用いる。 $S = (S_0 u^2 + S_0)/2$  (2番目と3番目のノードの真ん中) に対するデルタは  $(f_{2,2} - f_{2,1})/(S_0 u^2 - S_0)$  であり、 $S = (S_0 + S_0 d^2)/2$  (1番目と2番目のノードの真ん中) に対するデルタは  $(f_{2,1} - f_{2,0})/(S_0 - S_0 d^2)$  である。二つの  $S$  の差を  $h$  とすると、

$$h = 0.5(S_0 u^2 - S_0 d^2)$$

となる。ガンマはデルタの変化を  $h$  で割って、

$$\Gamma = \frac{[(f_{2,2} - f_{2,1})/(S_0 u^2 - S_0)] - [(f_{2,1} - f_{2,0})/(S_0 - S_0 d^2)]}{h} \quad (19.9)$$

になる。この方法で、時点  $\Delta t$  におけるデルタと時点  $2\Delta t$  におけるガンマを求めることができる。実務上は、これらの値を時点ゼロにおけるデルタとガンマの値として用いることが多い(注5)。

その他のヘッジ・パラメータで、ツリーから直接計算することができるものはセータ  $\Theta$  である。これは、他の変数を一定にしたまま時間だけが変化したときのオプション価格の変化率である。ツリーが時点ゼロから始まるならば、セータは、

$$\Theta = \frac{f_{2,1} - f_{0,0}}{2\Delta t} \quad (19.10)$$

になる。

ベガは、ボラティリティを  $\Delta\sigma$  だけ微小変化させて新しいツリーを作成し、オプション価値の新しい値を求めて計算することで計算できる(時間ステップ  $\Delta t$  は同じにしておく)。ベガは、

$$V = \frac{f^* - f}{\Delta\sigma}$$

になる。ここで、 $f$  と  $f^*$  はそれぞれもとのツリーと新しいツリーでのオプション価格である。ローも同様にして計算できる。

### 【例19.2】

例19.1を再考する。図19.3から、 $f_{1,0} = 6.96$ ,  $f_{1,1} = 2.16$ である。

(19.8)式よりデルタは、

$$\frac{2.16 - 6.96}{56.12 - 44.55} = -0.41$$

と求まる。(19.9)式より、オプションのガンマはノード B, C, および F での価値を用いて、

$$\frac{[(0.64 - 3.77)/(62.99 - 50.00)] - [(3.77 - 10.36)/(50.00 - 39.69)]}{11.65}$$

(注5) もう少し正確にデルタとガンマを計算したいならば、時点  $-2\Delta t$  から二項ツリーを作成し、その時点の株価を  $S_0$  とするやり方もある。この場合には、時間ゼロにおいて三つの異なる株価に対するオプション価格が計算されることになる。

= 0.03

と求まる。(19.10)式より、オプションのセータはノード D と C での価値を用いて、

$$\frac{3.77 - 4.49}{0.1667} = -4.3/\text{年}$$

すなわち  $-0.012/\text{暦日}$  になる。これらの値は概算値にすぎない。ツリーの時間ステップ数を多くしていくと計算精度はよくなっていく。時間ステップ数を 50 にして DerivaGem ソフトウェアでデルタ、ガンマ、およびセータを計算すると、それぞれ  $-0.415$ ,  $0.034$ , および  $-0.0117$  になる。パラメータを微小変化させてオプションの価値を再計算し、ベガとローラーを求めると、それぞれ  $0.123$  と  $-0.072$  になる。

## 19.2 二項ツリーを用いた指數、通貨、先物契約に対するオプションの評価

第11章、第15章、第16章で述べたように、オプションを評価するときは、株価指數、通貨、先物契約は利回りが既知の資産として考えることができる。その場合の利回りは、株価指數に対しては、指數の原資産である株式ポートフォリオの配当利回りである。通貨に対しては、外国の無リスク金利である。また、先物契約に対しては、自国の無リスク金利である。したがって、(19.7)式の  $q$  を適切に解釈すれば、二項ツリーによるアプローチは、株価指數、通貨、先物契約に対するオプションの評価にも用いることができる。

### 【例19.3】

指數先物に対する 4 カ月物アメリカン・コール・オプションを考える。現在の先物価格を 300、行使価格を 300、無リスク金利を年率 8 %、指數のボラティリティを年率 30 % とする。また、オプション期間を 1 カ

月ごとの4期間に分割して、ツリーを作成する。この場合、 $F_0=300$ ,  $K=300$ ,  $r=0.08$ ,  $\sigma=0.3$ ,  $T=0.3333$ ,  $\Delta t=0.0833$ となる。先物契約は配当利回りが $r$ の株式とみなせるので、(19.7)式で $q$ を $r$ に等しくすればよい。したがって、 $a=1$ となる。ツリーの構築に必要なその他のパラメータは、

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0905, \quad d = \frac{1}{u} = 0.9170$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0.4784, \quad 1-p = 0.5216$$

となる。図19.5にDerivaGemソフトウェアで作成したツリーを示した（各ノードの上段の数字は先物価格、下段の数字はオプション価格）。このツ

**図19.5 DerivaGemソフトウェアで作成したアメリカン指數先物コール・オプション評価用二項ツリー(例19.3)**

各ノード：

上段＝原資産価格

下段＝オプション価格

網掛けはオプションが行使されるノード

行使価格＝300

時間ステップごとの割引率＝0.9934

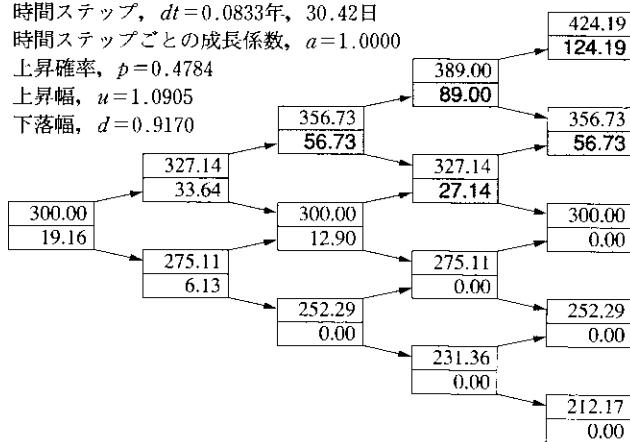
時間ステップ、 $dt=0.0833$ 年、30.42日

時間ステップごとの成長係数、 $a=1.0000$

上昇確率、 $p=0.4784$

上昇幅、 $u=1.0905$

下落幅、 $d=0.9170$



ノードの時間：

0.0000

0.0833

0.1667

0.2500

0.3333

リーで評価したオプションの価値は19.16になる。時間ステップ数を増やせば、より正確な値が得られる。DerivaGem ソフトウェアを用いて計算すると、オプションの価値は、時間ステップ数が50のときは20.18、時間ステップ数が100のときは20.22になる。

#### 【例19.4】

英ポンドに対する1年物アメリカン・プット・オプションを考える。現在の為替レートを1.6100、行使価格を1.6000、米国の無リスク金利を年率8%，英国の無リスク金利を年率9%，為替レートのボラティリティを年率12%とする。この場合、 $S_0=1.61$ ,  $K=1.60$ ,  $r=0.08$ ,  $r_f=0.09$ ,  $\sigma=0.12$ ,  $T=1.0$ となる。オプション期間を3ヶ月ごとの

図19.6 DerivaGem ソフトウェアで作成したアメリカン通貨プット・オプション評価用二項ツリー(例19.4)

各ノード：

上段=原資産価格

下段=オプション価格

網掛けはオプションが行使されるノード

行使価格=1.6

時間ステップごとの割引率=0.9802

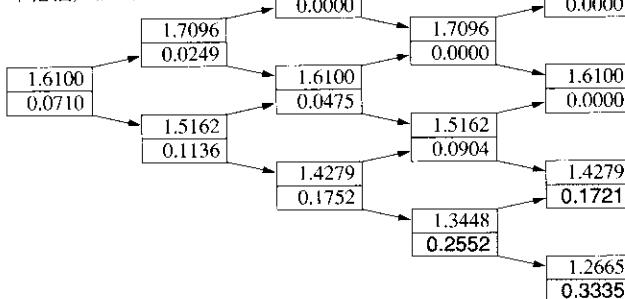
時間ステップ、 $dt=0.2500$ 年、91.25日

時間ステップごとの成長係数、 $a=0.9975$

上昇確率、 $p=0.4642$

上昇幅、 $u=1.0618$

下落幅、 $d=0.9418$



ノードの時間：

0.0000

0.2500

0.5000

0.7500

1.0000

4期間に分割して、ツリーを作成する。したがって、 $\Delta t=0.25$ となる。  
 $q=r_f$ だから、(19.7)式より、

$$a = e^{(0.08 - 0.09) \times 0.25} = 0.9975$$

となる。ツリーの構築に必要なその他のパラメータは、

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0618, \quad d = \frac{1}{u} = 0.9418$$

$$p = \frac{a-d}{u-d} = 0.4642, \quad 1-p = 0.5358$$

となる。図19.6にDerivaGemソフトウェアで作成したツリーを示した（各ノードの上段の数字は為替レート、下段の数字はオプション価格）。このツリーで評価したオプションの価値は0.0710ドルになる（DerivaGemソフトウェアを用いて計算すると、オプションの価値は、時間ステップ数が50のときは0.0738、時間ステップ数が100のときも0.0738になる）。

### 19.3 配当のある株式に対する二項モデル

次に、配当のある株式に対して二項モデルを用いるにはどのようにすればよいかという、もっと扱いにくい問題を検討する。第13章と同様に、ここでの議論では、「配当」とは配当落ち日にその配当の結果として株価が下落する部分のことである。

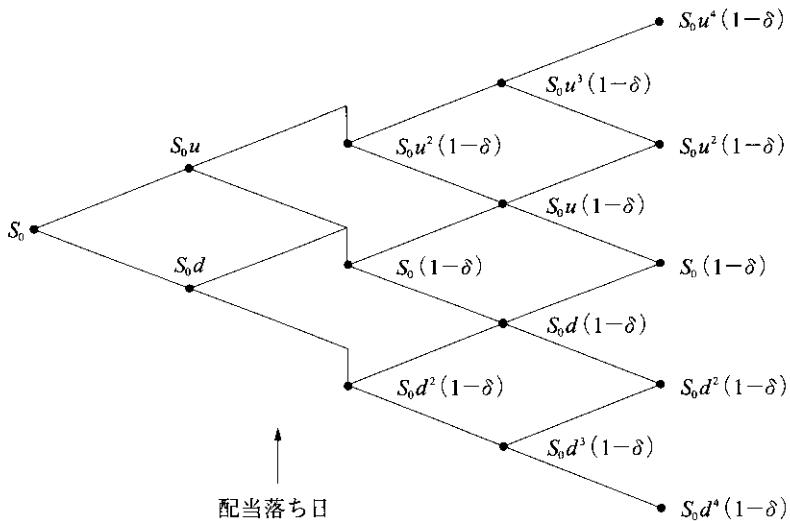
#### 配当利回りが既知の場合

配当が1回だけあり、配当利回り（すなわち、株価に対する割合で表された配当）が既知である場合には、ツリーは図19.7（次頁）のようになり、今まで述べてきたのと同様の方法で分析ができる。時点  $i\Delta t$  が配当落ち日よりも前ならば、ツリーの各ノードでの株価は、

$$S_0 u^j d^{i-j} \quad j=0, 1, \dots, i$$

になる。ここで、 $u$ と $d$ は(19.5)式と(19.6)式で定義されたものと同じで

図19.7 利回りのわかっている配当が1回支払われる株式に対するツリー



ある。時点  $i\Delta t$  が配当落ち日より後ならば、各ノードでの株価は、

$$S_0(1-\delta) u^j d^{i-j} \quad j=0, 1, \dots, i$$

になる。ここで  $\delta$  は配当利回りである。利回りのわかっている配当がオプション期間中に複数回ある場合も同様に扱うことができる。時点ゼロと時点  $i\Delta t$  の間に配当落ち日がある配当の合計に対する配当利回りを  $\delta_i$  とすると、時点  $i\Delta t$  における各ノードでの株価は、

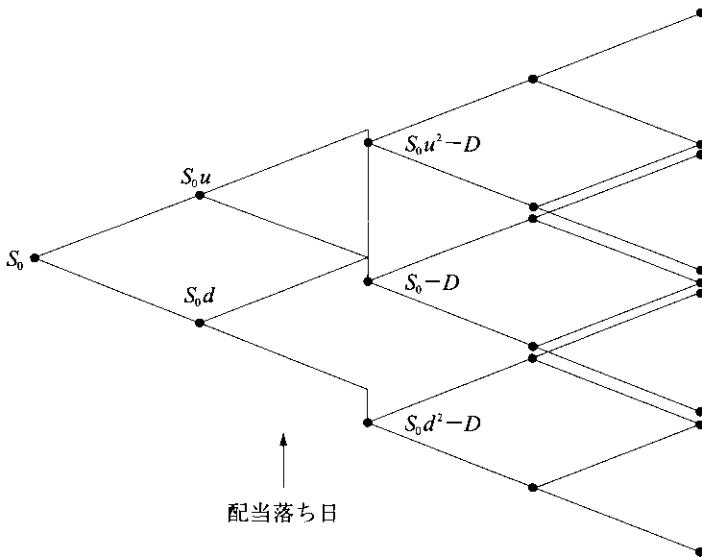
$$S_0(1-\delta_i) u^j d^{i-j}$$

になる。

### 配当額が既知の場合

配当利回りではなく、配当金額があらかじめわかっていると仮定するほうが、最も現実に合っている場合もある。株価のボラティリティ  $\sigma$  を一定とすると、ツリーは図19.8のようになる。この場合にはツリーは再結合せず、評価しなければならないノードの数が、特に配当が複数回ある場合に、非常に多くなる。配当は1回とし、配当落ち日  $\tau$  は時点  $k\Delta t$  と時点  $(k+1)\Delta t$  の

図19.8 配当額が既知でボラティリティが一定の場合のツリー



間にあり、配当額は  $D$  であるとする。 $i \leq k$  のときは、前と同様に、時点  $i\Delta t$  におけるツリーの各ノードでの株価は、

$$S_0 u^j d^{i-j} \quad j=0,1,2,\dots,i$$

になる。 $i=k+1$  のときは、ツリーの各ノードでの株価は、

$$S_0 u^j d^{i-j} - D \quad j=0,1,2,\dots,i$$

になる。 $i=k+2$  のときは、ツリーの各ノードでの株価は、 $j=0,1,2,\dots, i-1$  に対して、

$$(S_0 u^j d^{i-1-j} - D) u \quad \text{と} \quad (S_0 u^j d^{i-1-j} - D) d$$

になり、ノードの数は  $i+1$  個ではなく  $2i$  個になる。 $i=k+m$  のときは、ノードの数は  $k+m+1$  個ではなく  $m(k+2)$  個になる。

13.12節で行ったヨーロピアン・オプションの分析のときと同様に、株価が確率変動する成分と、オプション期間中に支払われる将来の全配当の現在価値との二つの成分からなると仮定することで、この問題を単純化することができる。前と同様に、配当落ち日  $\tau$  がオプション期間中に 1 回だけあり、

$k\Delta t \leq \tau \leq (k+1)\Delta t$  であるとする。時点  $i\Delta t$  における確率変動成分  $S^*$  は、

$$S^* = S \quad i\Delta t > \tau \text{ のとき}$$

$$S^* = S - De^{-r(\tau-i\Delta t)} \quad i\Delta t \leq \tau \text{ のとき}$$

で与えられる。ここで  $D$  は配当である。 $S^*$  のボラティリティを  $\sigma^*$  とし、 $\sigma^*$  は定数であると仮定する(注6)。パラメータ  $p$ ,  $u$ ,  $d$  は、(19.4)式、(19.5)式、(19.6)式、および(19.7)式で  $\sigma$  を  $\sigma^*$  に置き換えた式から求まり、今までと同様の方法で作成したツリーで  $S^*$  をモデル化できる。各ノードでの株価に、将来の配当（もあるならば）の現在価値を加えることによって、このツリーを  $S$  をモデル化したツリーに変換することが可能である。 $S_0^*$  を時点ゼロにおける  $S^*$  の値とする。時点  $i\Delta t$  における各ノードでの株価は、 $i\Delta t < \tau$  のとき、

$$S_0^* u^j d^{i-j} + De^{-r(\tau-i\Delta t)} \quad j=0,1,\dots,i$$

になり、 $i\Delta t > \tau$  のとき、

$$S_0^* u^j d^{i-j} \quad j=0,1,\dots,i$$

になる。この方法は、13.12節で説明したヨーロピアン・オプションに対する方法と整合しているという点ですぐれており、ツリーが再結合していることから、時点  $i\Delta t$  におけるノードの数は  $i+1$  個になる。この方法は、配当が複数回ある場合も扱えるように、そのまま一般化することができる。

### 【例19.5】

オプション期間中に2.06ドルの1回の配当が予想されている株式に対する、5カ月物アメリカン・プット・オプションについて考える。はじめの株価を52ドル、行使価格を50ドル、無リスク金利を年率10%，ボラティリティを年率40%，配当落ち日を3.5カ月後とする。

まず、株価からオプション期間中に配当落ちする将来の配当の現在価値を引いた値である、 $S^*$  をモデル化するツリーを作成する。時点ゼロにおける配当の現在価値は、

(注6) 13.12節で述べたように、理論的には  $\sigma^*$  は  $S$  のボラティリティ  $\sigma$  より若干大きい。実務的には、インプライド・ボラティリティを用いれば両者を区別する分析を行う必要はない。

図19.9 例19.5で DerivaGem ソフトウェアを用いて作成したツリー

各ノード：

上段=原資産価格

下段=オプション価格

網掛けはオプションが行使されるノード

行使価格=50

時間ステップごとの割引率=0.9917

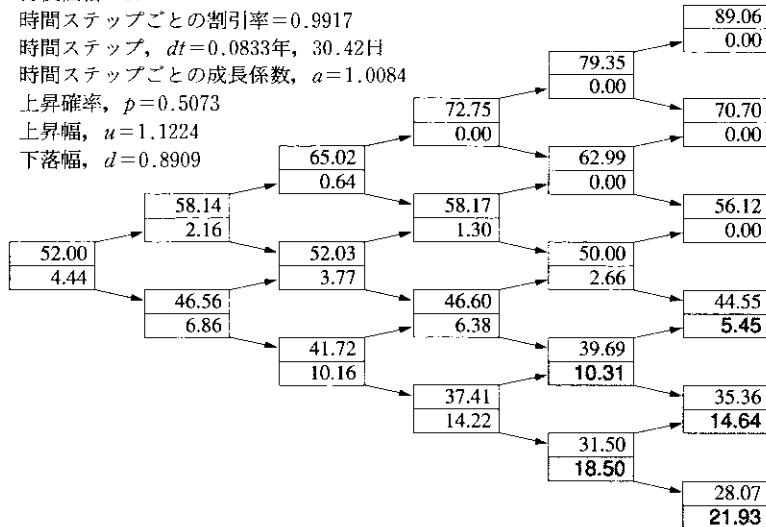
時間ステップ,  $dt = 0.0833$ 年, 30.42日

時間ステップごとの成長係数,  $a = 1.0084$

上昇確率,  $p = 0.5073$

上昇幅,  $u = 1.1224$

下落幅,  $d = 0.8909$



ノードの時間：

0.0000

0.0833

0.1667

0.2500

0.3333

0.4167

$$2.06e^{-0.2917 \times 0.1} = 2.00$$

であるから、 $S^*$ の初期値は50.00になる。 $S^*$ のボラティリティを年率40%と仮定すれば、 $S^*$ に対する二項ツリーは図19.3のようになる( $S^*$ の初期値とボラティリティは、図19.3の株価に対するものと同じである)。各ノードで配当の現在価値を加えると、図19.9の  $S$ に対する二項モデルが得られる。各ノードでの推移確率は図19.3の場合と同じで、上昇確率が0.5073、下落確率が0.4927である。通常と同様の方法でツリーに沿って後向きに計算していくと、オプション価格は4.44ドルと求まる(DerivaGem ソフトウェアを用いて計算すると、オプションの価値は、時間ステップ数が50のときは4.202、時間ステップ数が100のときは4.212になる)。

オプションの満期が長い（たとえば3年以上である）場合には、配当額が既知とするよりも、配当利回りが既知と仮定するほうが適切となることが多い。それは、将来実現しうるすべての株価に対して同じ金額になるような妥当な配当を仮定するのは不可能だからである（注7）。配当は与えられた利回りで連続的に支払われるというのが、よく使われる簡便な仮定である。そうすると、配当のある株式に対するオプションは、株価指數オプションと同様の方法で評価できるようになる。

### 制御変量法

制御変量法（control variate technique）として知られる計算手法は、アメリカン・オプションの価格計算の精度改善に用いることができる（注8）。この手法では、アメリカン・オプションの価値 $f_A$ と対応するヨーロピアン・オプションの価値 $f_E$ を同じツリーで評価する。さらにヨーロピアン・オプションに対して、Black-Scholes モデルでの価格 $f_{BS}$ も計算する。ツリーを用いて計算したヨーロピアン・オプションの価格に含まれる誤差が、ツリーを用いて計算したアメリカン・オプションの価格に含まれる誤差と同じであると仮定すると、アメリカン・オプションの価格は、

$$f_A + f_{BS} - f_E$$

として計算できる。この手法を試してみよう。図19.3のオプションをヨーロピアンとして評価したものを、図19.10に示す。得られた価格は4.32ドルである。Black-Scholes の公式より、ヨーロピアン・オプションの正しい価格は4.08ドルである。図19.3でのアメリカン・オプションの価格は4.49ドルである。したがって、制御変量法によるアメリカン・オプションの価格は、

$$4.49 + 4.08 - 4.32 = 4.25$$

---

(注7) 長期オプションに対しては、 $S^*$ は $S_0$ に比べてかなり小さい値になり、ボラティリティが非常に大きくなりうるという、別の問題もある。

(注8) J. Hull and A. White, "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (September 1988) : 237-51 を参照。

図19.10 例19.3のオプションがヨーロピアンの場合に DerivaGem ソフトウェアで作成したツリー（各ノードでの上段の数字は株価、下段の数字はオプション価格）

各ノード：

上段=原資産価格

下段=オプション価格

網掛けはオプションが行使されるノード

行使価格=50

時間ステップごとの割引率=0.9917

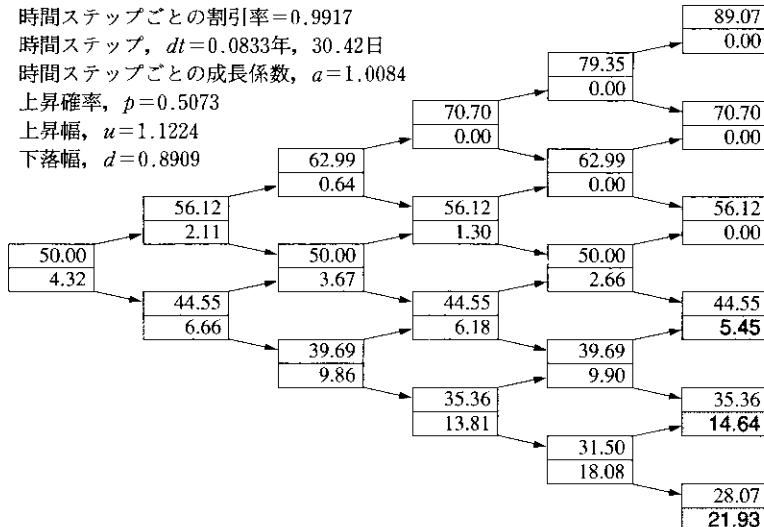
時間ステップ、 $dt = 0.0833$ 年、30.42日

時間ステップごとの成長係数、 $a = 1.0084$

上昇確率、 $p = 0.5073$

上昇幅、 $u = 1.1224$

下落幅、 $d = 0.8909$



ノードの時間：

0.0000

0.0833

0.1667

0.2500

0.3333

0.4167

になる。時間ステップ数を100にして計算すると、アメリカン・オプションのよい推定値として4.278が得られる。したがって、制御変量法を用いると、アメリカン・オプションの価格の推定値はツリーによる推定値4.49と比較して大幅に改善していることがわかる。制御変量法は、実質的には、アメリカン・オプションの価格自体のかわりに、ヨーロピアン・オプションとアメリカン・オプションの価格差をツリーを用いて計算する手法である。後でモンテカルロ・シミュレーションを検討する際に、制御変量法の応用についてさらに説明する。

## 19.4 その他のツリー作成法

Cox, Ross, および Rubinstein による方法のみが、二項ツリーを構築する方法ではない。(19.1)式と(19.2)式に加えて、 $u = 1/d$  と仮定するかわりに、 $p=0.5$ と仮定することもできる。 $\Delta t$  より高次の項を無視すると、

$$u = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$$

がそれらの解になっている。こうすれば、株式、指数、為替、および先物に対するオプションを評価するためのツリーを  $p=0.5$ として構築することができる。

このツリー構築方法が Cox, Ross, および Rubinstein の方法よりすぐれている点は、 $\sigma$  の値や時間ステップ数によらず、推移確率を常に 0.5 にできることである(注9)。この方法での不都合な点は、はじめの株価がもはやツリーの中心とはならないため、デルタ、ガンマ、およびローをツリーから簡単には計算できなくなることである。

### 【例19.6】

カナダドルに対する 9 カ月物アメリカン・コール・オプションについて考える。現在の為替レートを 0.7900, 行使価格を 0.7950, 米国の無リスク金利を年率 6%, カナダの無リスク金利を年率 10%, 為替レートのボラティリティを年率 4% とする。この場合、 $S_0 = 0.79$ ,  $K = 0.795$ ,  $r = 0.06$ ,  $r_f = 0.10$ ,  $\sigma = 0.04$ ,  $T = 0.75$  となる。オプション期間を 3 カ月ごとに分割してツリーを構築する。このとき、 $\Delta t = 0.25$  となる。各枝への推移確率を 0.5 とすると、

$$u = e^{(0.06-0.10-0.0016/2)0.25 + 0.04\sqrt{0.25}} = 1.0098$$

$$d = e^{(0.06-0.10-0.0016/2)0.25 - 0.04\sqrt{0.25}} = 0.9703$$

となる。為替レートのツリーは図19.11 のようになる。このツリーを用いたオプションの価格は 0.0026 ドルになる。

(注9) 時間ステップが非常に大きくて  $\sigma < |(r-q)\sqrt{\Delta t}|$  となるとき、Cox, Ross, および Rubinstein の方法によるツリーでは負の確率が発生する。ここで説明したもう一つの方法では、そういう問題は起こらない。

図19.11 カナダドルのアメリカン・コール・オプションに対する二項ツリー（各ノードでの上段の数字は為替レート、下段の数字はオプション価格である。推移確率はすべて0.5である）

各ノード：

上段=原資産価格

下段=オプション価格

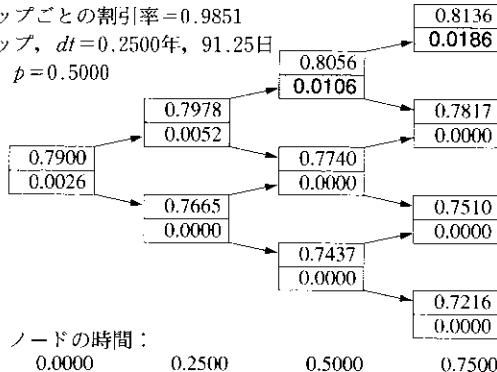
網掛けはオプションが行使されるノード

行使価格=0.795

時間ステップごとの割引率=0.9851

時間ステップ,  $dt=0.2500$ 年, 91.25日

上昇確率,  $p=0.5000$



### 三項ツリー

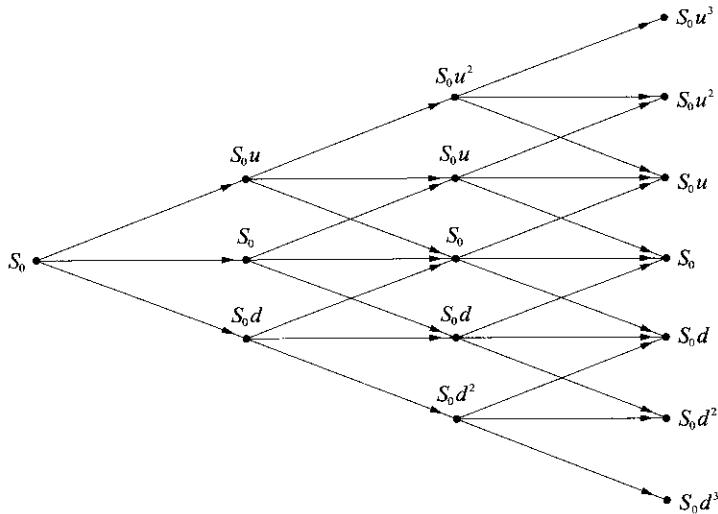
二項ツリーにかわるものとして、三項ツリーを用いることもできる。そのツリーの一般形を図19.12（次頁）に示す。 $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$  をそれぞれ各ノードでの上、真ん中、下へ推移する確率とし、 $\Delta t$  を時間ステップの長さとする。配当利回りが  $q$  の資産に対して、価格変動の平均と標準偏差が合うようなパラメータを、 $\Delta t$  よりも高次の項を無視して求めると、

$$u = e^{\sigma \sqrt{3} \sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}$$

$$p_d = -\sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6}, \quad p_m = \frac{2}{3}, \quad p_u = \sqrt{\frac{\Delta t}{12\sigma^2}} \left( r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{1}{6}$$

となる。三項ツリーを用いた計算も、二項ツリーの場合と同様に行なうことが

図19.12 株価の三項ツリー



できる。ツリーの終端から始点へと後向きに計算していく。各ノードで、行使した場合の価値と行使しない場合の価値を計算する。行使しない場合の価値は、

$$e^{-r\Delta t}(\rho_u f_u + \rho_m f_m + \rho_d f_d)$$

で与えられる。ここで  $f_u$ ,  $f_m$ ,  $f_d$  は、それぞれ次に推移する上のノード、真ん中のノード、下のノードでのオプションの価値である。19.8節で説明するように、三項ツリーを用いる方法は陽的有限差分法と等価である。

Figlewski と Gao はアダプティブ・メッシュ・モデル (adaptive mesh model!) という、三項ツリー法の精度を高める方法を提案している。これは、目の細かい ( $\Delta t$  の小さい) ツリーを目の粗い ( $\Delta t$  の大きい) ツリーに接ぎ木する手法である(注10)。通常のアメリカン・オプションを評価するときは、目の細かいツリーはオプションの満期時点における行使価格付近に使うのが最も有効である。

## 19.5 パラメータが時間に依存する場合

これまででは、 $r$ ,  $q$ ,  $r_f$ , および  $\sigma$  は定数であると仮定してきた。実務では、それらのパラメータは時間に依存していると仮定されることが多い。その場合には、時点  $t$  から時点  $t + \Delta t$  までのそれらのパラメータの値は、それらのフォワードの値に等しいと仮定される(注11)。

Cox-Ross-Rubinstein の二項ツリーで  $r$  と  $q$  (または  $r_f$ ) を時間の関数とするには、時点  $t$  におけるノードに対して、

$$a = e^{[f(t) - g(t)]\Delta t} \quad (19.11)$$

とすればよい。ここで、 $f(t)$  は時点  $t$  から時点  $t + \Delta t$  までのフォワード金利で、 $g(t)$  は同じ期間に対する  $q$  のフォワード値である。 $u$  と  $d$  は  $a$  に依存していないので、これによってツリーの形状は変わらない。時点  $t$  におけるノードから出る枝の推移確率は(注12)，

$$p = \frac{e^{[f(t) - g(t)]\Delta t} - d}{u - d} \quad (19.12)$$

$$1 - p = \frac{u - e^{[f(t) - g(t)]\Delta t}}{u - d}$$

で与えられる。残りの部分については、時点  $t$  から時点  $t + \Delta t$  までの割引率に  $f(t)$  を用いる以外は、これまでと同じようにツリーを使えばよい。

二項ツリーで  $\sigma$  を時間の関数にするには、もっと工夫が必要になる。一つの方法は、時間ステップの長さを分散率の逆数に比例するように決めることがある。そうすると、 $u$  と  $d$  の値が常に同じになり、ツリーは再結合する。 $\sigma(t)$  を満期  $t$  に対するボラティリティとすると、時点  $t$  までの累積分散は  $\sigma(t)^2 t$  になる。 $T$  をツリーの期間とし、 $V = \sigma(T)^2 T$  と定義する。

(注10) S. Figlewski and B. Gao, "The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53 (1999) : 313-51 を参照。

(注11) フォワード配当利回りやフォワード分散率は、フォワード金利と同様の方法で求められる（分散率はボラティリティを 2 乗したものである）。

(注12) 時間ステップ数を十分多くとると、確率は常に正になる。

また、 $t_i$ を*i*番目の時間ステップの終わりとする。時間ステップ数が*N*のとき、 $t_i$ を $\sigma(t_i)^2 t_i = iV/N$ を満たすように決める。そうすれば、時点 $t_i$ から時点 $t_{i+1}$ までの期間における分散は、すべての*i*に対して $V/N$ になる。

三項ツリーの場合にも、一般化されたツリー構築方法を用いて、時間に依存した金利とボラティリティに合わせたツリーを作成できる（著者のWebサイトのテクニカルノート9を参照）。

## 19.6 モンテカルロ・シミュレーション

次に、二項ツリーとはかなり異なるデリバティブの評価方法である、モンテカルロ・シミュレーションについて説明する。モンテカルロ・シミュレーションの基礎となるランダム・サンプリングの考えを説明するために、 $\pi$ の値を推定する簡単なExcelプログラムをビジネス寸見19.1で紹介する。

### ビジネス寸見19.1 モンテカルロ・シミュレーションによる円周率の計算

図19.13の正方形の1辺の長さを1とする。ダーツを正方形にランダムに投げて、円の中に入る割合を計算してみることを思い浮かべてみよう。どういう結果が得られるだろうか。正方形の面積は1.0で、円の半径は0.5である。円の面積は半径の2乗に $\pi$ を掛けた値であるから、 $\pi/4$ になる。このことから、ダーツが円のなかに入る割合は $\pi/4$ になるはずである。したがって、ダーツが円のなかに入る割合を4倍にすると、 $\pi$ の推定値が得られる。

Excelスプレッドシートを用いて、表19.1のようなダーツ投げのシミュレーションができる。セルA1とセルB1に=RAND()と入力する。A1とB1には、0から1の間の乱数が表示される。これらの値を、図19.13でダーツが当った場所の左端からの長さおよび高さと考える。次に、セルC1には、

図19.13 ダーツ投げによる $\pi$ の計算

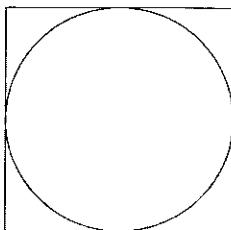


表19.1 ビジネス寸見19.1でのスプレッドシートによる計算例

|     | A     | B     | C    |
|-----|-------|-------|------|
| 1   | 0.207 | 0.690 | 4    |
| 2   | 0.271 | 0.520 | 4    |
| 3   | 0.007 | 0.221 | 0    |
| :   | :     | :     | :    |
| 100 | 0.198 | 0.403 | 4    |
| 101 |       |       |      |
| 102 |       | Mean: | 3.04 |
| 103 |       | SD:   | 1.69 |

=IF((A1-0.5)^2+(B1-0.5)^2<0.5^2,4,0)

を入力する。C1の値は、ダーツが円の中に入れば4、そうでなければ0になる。

スプレッドシートの続く99行を1行目と同じようにする(Excelで1行目で入力したセルを「選択」し、それを「ドラッグ」すればよい)。セルC102に=AVERAGE(C1:C100)を入力し、セルC103に=STDEV(C1:C100)を入力する。C102の値(表19.1では3.04)は、ランダム・サンプリングを100回試行した場合の $\pi$ の推定値である。C103の値はその結果に対する標準偏差で、例19.7でみるように、それを用いて推定値の精度を評価することができる。試行回数を増やしていくと精度も改善していくが、正しい値3.14159への収束は遅い。

オプションの評価への応用として、モンテカルロ・シミュレーションをリスク中立化法へ適用することができる。サンプルパスを発生させて、リスク中立世界でのペイオフの期待値を求め、その値を無リスク金利で割り引けばよい。一つの市場変数  $S$  に依存するデリバティブで、時点  $T$  にペイオフが発生するものを考えよう。金利を一定とすると、デリバティブの価値は以下のように計算できる。

1. リスク中立世界での  $S$  に関するランダムなパスを発生させる。
2. デリバティブのペイオフを計算する。
3. ステップ1とステップ2を繰り返し、リスク中立世界でのデリバティブのペイオフのサンプル値をたくさん生成する。
4. ペイオフのサンプルの平均を計算し、それをリスク中立世界での期待ペイオフの推定値とする。
5. その期待ペイオフを無リスク金利で割り引き、デリバティブの価値の推定値とする。

原資産である市場変数が従うリスク中立世界における確率過程を、

$$dS = \hat{\mu}Sdt + \sigma Sdz \quad (19.13)$$

とする。ここで、 $dz$  はウィナー過程、 $\hat{\mu}$  はリスク中立世界での期待収益率、 $\sigma$  はボラティリティである<sup>(注13)</sup>。 $S$  のパスを模擬的に発生させるために、デリバティブの満期を長さ  $\Delta t$  の短い区間に  $N$  分割し、(19.13)式を、

$$S(t+\Delta t) - S(t) = \hat{\mu}S(t)\Delta t + \sigma S(t)\varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad (19.14)$$

のように近似する。ここで  $S(t)$  は時点  $t$  における  $S(t)$  の値、 $\varepsilon$  は平均ゼロ、標準偏差1.0の正規分布に従う乱数である。この式から、時点  $\Delta t$  における  $S$  の値は  $S$  の初期値から計算でき、時点  $2\Delta t$  における  $S$  の値は時点  $\Delta t$  における  $S$  の値から計算できる、等々となる。この手順を例示したものが12.3節にある。そのシミュレーションでは、1回の試行で、正規分布に従う  $N$  個の乱数を用いて  $S$  の完全なパスを一つ作成することになる。

(注13)  $S$  が配当のない株式の価格の場合は  $\hat{\mu}=r$ 、 $S$  が為替レートの場合は  $\hat{\mu}=r-r_f$  である。11.7節で説明したように、ボラティリティは実世界とリスク中立世界で同じ値である。

実務的には、 $S$ よりも  $\ln S$  に対してシミュレーションを行ったほうが、もっと正確な値が得られることが多い。伊藤の補題より、 $\ln S$  の従う確率過程は、

$$d\ln S = \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (19.15)$$

になる。これより、

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}$$

あるいは、

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[ \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \right] \quad (19.16)$$

となる。この式を用いて  $S$  のパスが構築できる。

$S$  よりも  $\ln S$  に対してシミュレーションを行うほうが、正確な結果が得られる。 $\hat{\mu}$  と  $\sigma$  が定数ならば、

$$\ln S(T) - \ln S(0) = \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T}$$

がすべての  $T$  に対して成り立つ<sup>(注14)</sup>。これより、

$$S(T) = S(0) \exp \left[ \left( \hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \varepsilon \sqrt{T} \right] \quad (19.17)$$

が得られる。この式を用いて、時点  $T$  のペイオフが標準的ではないデリバティブを評価することができる。また、ビジネス寸見19.2で紹介するように、この式は Black-Scholes の公式の検証にも使うことができる。

### ビジネス寸見19.2 Black-Scholes の公式の検証

ヨーロピアン・コール・オプションに対する Black-Scholes の公式は、時間ステップ数を非常に大きくした二項ツリーを用いて検証するこ

(注14) これに対し、(19.14)式は  $\Delta t$  がゼロに近づく極限でしか厳密には正しくない。

表19.2 モンテカルロ・シミュレーションによる Black-Scholes の公式の検証

|      | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> | <i>E</i> | <i>F</i> | <i>G</i> |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1    | 45.95    | 0        | $S_0$    | $K$      | $r$      | $\sigma$ | $T$      |
| 2    | 54.49    | 4.38     | 50       | 50       | 0.05     | 0.3      | 0.5      |
| 3    | 50.09    | 0.09     |          | $d_1$    | $d_2$    | BS price |          |
| 4    | 47.46    | 0        |          | 0.2239   | 0.0118   | 4.817    |          |
| 5    | 44.93    | 0        |          |          |          |          |          |
| :    | :        | :        |          |          |          |          |          |
| 1000 | 68.27    | 17.82    |          |          |          |          |          |
| 1001 |          |          |          |          |          |          |          |
| 1002 | Mean:    | 4.98     |          |          |          |          |          |
| 1003 | SD:      | 7.68     |          |          |          |          |          |

とができる。別の検証方法として、モンテカルロ・シミュレーションを用いることもできる。表19.2は、検証用に作成したスプレッドシートの例である。セル C2, D2, E2, F2, G2 に、それぞれ  $S_0$ ,  $K$ ,  $r$ ,  $\sigma$ ,  $T$  の値を入力する。セル D4, E4, F4 には、それぞれ  $d_1$ ,  $d_2$ , Black-Scholes 価格の計算結果が表示されている（このスプレッドシートの例では、Black-Scholes 価格は 4.817 になっている）。

NORMSINV は標準正規分布の累積分布関数の逆関数である。したがって、NORMSINV(RAND()) を用いると、標準正規分布に従う乱数が得られる。セル A1 に、

$$=\$C\$2*EXP((\$E\$2-\$F\$2*\$F\$2/2)*\$G\$2 \\ +\$F\$2*NORMSINV(RAND())*SQRT(\$G\$2))$$

を入力する。これは(19.17)式に対応した式で、時点  $T$  における株価をランダム・サンプリングしたものになる。セル B1 には、

$$=EXP(-\$E\$2*\$G\$2)*MAX(A1-\$D\$2,0)$$

を入力する。これはコール・オプションのペイオフの現在価値である。スプレッドシートの続く 999 行を 1 行目と同じようにする（Excel でセル A1 と B1 を「選択」し、それを「ドラッグ」すればよい）。セル B1002 に

AVERAGE(B1:B1000)を入力し、セルB1003にSTDEV(B1:B1000)を入力する。B1002の値（スプレッドシートの例では4.98）は、オプションの価値の推定値である。これはBlack-Scholes価格からそんなにずれた値ではないはずである。例19.8でみるように、B1003の値を用いて推定値の精度を評価することができる。

モンテカルロ・シミュレーションの重要な利点は、ペイオフが原資産である市場変数  $S$  の満期時点の値だけでなく、 $S$  のパスに依存する場合にも使えるという点である（たとえば、ペイオフが  $S$  の平均に依存する場合にも使うことができる）。ペイオフは満期一括ではなく、満期までの間に複数回発生してもよい。また、 $S$  の従う確率過程はどのようなものでもよい。次に簡単に説明するが、この手法はデリバティブのペイオフが複数の市場変数に依存する場合にも拡張できる。一方、モンテカルロ・シミュレーションの欠点は、計算に非常に時間がかかることと、期限前行使機会がある場合の取扱いが容易ではないことである（注15）。

### 一つ以上の市場変数に依存するデリバティブ

デリバティブのペイオフが  $n$  個の変数  $\theta_i (1 \leq i \leq n)$  に依存する場合を考える。 $s_i$  を  $\theta_i$  のボラティリティ、 $\hat{m}_i$  をリスク中立世界での  $\theta_i$  の期待成長率、 $\rho_{ik}$  を  $\theta_i$  と  $\theta_k$  の瞬間的な相関とする（注16）。変数が一つの場合と同様に、デリバティブの残存期間を長さ  $\Delta t$  の  $N$  個の区間に分割する。このとき、 $\theta_i$  を離散化したものは、

$$\theta_i(t + \Delta t) - \theta_i(t) = \hat{m}_i \theta_i(t) \Delta t + s_i \theta_i(t) \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} \quad (19.18)$$

となる。ここで、 $\varepsilon_i$  は標準正規分布に従う乱数である。 $\varepsilon_i$  と  $\varepsilon_k$  の相関係数は  $\rho_{ik} (1 \leq i, k \leq n)$  である。このシミュレーションでは、1回の試行で、多次

(注15) 第26章で検討するように、モンテカルロ・シミュレーションを用いたアメリカン・オプションの評価法が、多くの研究者から提案されている。

(注16) 変数  $s_i$ 、 $\hat{m}_i$ 、および  $\rho_{ik}$  は定数である必要はない。それらは  $\theta_i$  に依存してもよい。

元標準正規分布に従う  $\varepsilon_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を  $N$  個発生することになる。これらを (19.18) 式に代入すると、各  $\theta_i$  に対するサンプルパスが得られ、それを用いてデリバティブの価値のサンプルが一つ計算できる。

### 正規分布に従う乱数の発生方法

1 次元標準正規分布に従う乱数が、

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{12} R_i - 6 \quad (19.19)$$

という式を用いて近似的に得られる。ここで  $R_i$  ( $1 \leq i \leq 12$ ) は 0 から 1 の値をとる独立した乱数で、 $\varepsilon$  は求める  $\phi(0,1)$  に従う乱数である。この近似は、ほとんどの目的に対して十分満足のいくものである。

標準正規分布に従う相関のある二つの乱数  $\varepsilon_1$  と  $\varepsilon_2$  が必要な場合は、次のようにすればよい。1 次元標準正規分布に従う独立した乱数  $x_1$  と  $x_2$  を、上述の方法で発生させる。求める乱数  $\varepsilon_1$  と  $\varepsilon_2$  は、

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= x_1 \\ \varepsilon_2 &= \rho x_1 + x_2 \sqrt{1 - \rho^2}\end{aligned}$$

とすれば得られる。ここで  $\rho$  は相関係数である。

もっと一般に、 $i$  番目と  $j$  番目の相関係数が  $\rho_{ij}$  で与えられる  $n$  次元正規分布に従う乱数の発生を考える。まず、1 次元標準正規分布に従う  $n$  個の独立した乱数  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) を発生させる。求める乱数  $\varepsilon_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) は、

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \alpha_{11}x_1 \\ \varepsilon_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 \\ \varepsilon_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3\end{aligned}$$

などから得られる。係数  $\alpha_{ij}$  は、相関係数と分散が正しい値になるように決める。これは、次のように段階的に行っていくことができる。 $\alpha_{11} = 1$  とする。 $\alpha_{21}$  は  $\alpha_{21}\alpha_{11} = \rho_{21}$  となるように決める。 $\alpha_{22}$  は  $\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1$  となるよう決める。 $\alpha_{31}$  は  $\alpha_{31}\alpha_{11} = \rho_{31}$  となるように決める。 $\alpha_{32}$  は  $\alpha_{31}\alpha_{21} + \alpha_{32}\alpha_{22} = \rho_{32}$  となるように決める。 $\alpha_{33}$  は  $\alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 = 1$  となるように決める、等々である(注17)。この手続はコレスキーフィクレーフ分解 (Cholesky decomposition) として

知られている。

### 試行回数

モンテカルロ・シミュレーションによって得られる結果の精度は、試行回数に依存している。シミュレーションの各試行で得られた割引後のペイオフについて、平均と同時に標準偏差も計算するのが通常である。平均を  $\mu$ 、標準偏差を  $\omega$  とおく。変数  $\mu$  は、デリバティブの価値に対するシミュレーションによる推定値である。この推定値の標準誤差は、

$$\frac{\omega}{\sqrt{M}}$$

で与えられる。ここで  $M$  は試行回数である。したがって、デリバティブの価格  $f$  に対する95%信頼区間は、

$$\mu - \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}} < f < \mu + \frac{1.96\omega}{\sqrt{M}}$$

になる。これより、デリバティブの価値に関する不確定さは、試行回数の平方根に反比例することがわかる。したがって、シミュレーションの精度を倍にするには試行回数を4倍にしなければならない。また、精度を10倍にするには試行回数を100倍にしなければならない、などとなる。

#### 【例19.7】

表19.1では、 $\pi$  は100個の数の平均として求められている。その標準偏差は1.69である。この場合には、 $\omega=1.69$ 、 $M=100$ となるので、推定値の標準偏差は $1.69/\sqrt{100}=0.169$ になる。したがって、スプレッドシートから、 $\pi$  に対する95%信頼区間が $(3.04-1.96\times 0.169)$ から $(3.04+1.96\times 0.169)$ まで、すなわち2.71から3.37までとして得られる。

#### 【例19.8】

表19.2では、オプションの価値は1,000個の数の平均として求められ

(注17)  $\alpha$  に関する方程式が実数解をもたない場合は、仮定された相関構造が内的整合性をもっていない。これについては21.7節でさらに議論する。

ている。その標準偏差は7.68である。この場合には、 $\omega = 7.68$ 、 $M = 1000$ となるので、推定値の標準偏差は $7.68/\sqrt{1000} = 0.24$ になる。したがって、スプレッドシートから、オプションの価値に対する95%信頼区間が $(4.98 - 1.96 \times 0.24)$ から $(4.98 + 1.96 \times 0.24)$ まで、すなわち4.51から5.45までとして得られる。

### モンテカルロ・シミュレーションの適用

確率変数が3個以上の場合、モンテカルロ・シミュレーションは他の手法と比べて、一般的に計算効率がよい。その理由は、モンテカルロ・シミュレーションでは計算時間は確率変数の数にほぼ比例して増加するのに対し、他のほとんどの手法では、確率変数の数に関して指数関数的に計算時間が増加するからである。モンテカルロ・シミュレーションがすぐれている一つの点は、推定値に対する標準誤差が得られる点である。もう一つは、複雑なペイオフや複雑な確率過程に対しても適用可能な方法である点である。さらに、この手法は、ペイオフが変数の終わりの値だけでなく、パス全体のなんらかの関数に依存する場合にも用いることができる。

### グリークスの計算

第17章で検討したグリークスは、モンテカルロ・シミュレーションを用いて計算することもできる。 $f$  をデリバティブの価格、 $x$  を原資産変数の値またはパラメータとするとき、 $x$  に関する  $f$  の偏微分を計算したいとする。まず、モンテカルロ・シミュレーションによる通常の計算を行って、デリバティブの価値の推定値  $\hat{f}$  を計算する。次に、 $x$  の値を微小量  $\Delta x$  だけ増加させて、そのときのデリバティブの価値  $\hat{f}^*$  を  $\hat{f}$  と同様に計算する。このとき、ヘッジ・パラメータの推定値を

$$\frac{\hat{f}^* - \hat{f}}{\Delta x}$$

で与える。推定値の標準誤差を最小にするためには、時間分割数  $N$ 、乱数

列, および試行回数  $M$  は,  $\hat{f}$  と  $\hat{f}^*$  の計算で同じにすべきである。

### ツリーを用いたサンプリング

原資産変数の従う確率過程からランダムにとったサンプルを用いてモンテカルロ・シミュレーションを行うかわり,  $N$  期間二項ツリーを用いて,  $2^N$  個のパスからランダムにサンプルをとることもできる。二項ツリーでの上昇確率を0.6とする。ツリーを用いたパスのランダム・サンプリングは, 次のように行えばよい。各ノードにおいて, 0から1の間の一様乱数を発生させる。その値が0.4より小さい場合は下の枝を選び, 0.4よりも大きい場合は上の枝を選ぶ。最初のノードからツリーの終端までのパスが決まれば, ペイオフが計算できる。これが1回目の試行である。同様の手順で何度も試行を繰り返し, それらのペイオフの平均を無リスク金利で割り引けば, デリバティブの価値の推定値が得られる(注18)。

#### 【例19.9】

図19.3のツリーを用いて, ペイオフが  $\max(S_{\text{ave}} - 50, 0)$  で与えられるオプションを評価する。ここで  $S_{\text{ave}}$  は5カ月間の株価の平均（最初と最後の株価も平均に含める）である。これはアジアン・オプションとして知られている。10回の試行のシミュレーションで評価した場合の一例を表19.3に示す。

オプションの価値はペイオフの平均を無リスク金利で割り引いた値として計算される。いまの場合には, ペイオフの平均は7.08ドル, 無リスク金利は10%であるから, 価値は  $7.08e^{-0.1 \times 5/12} = 6.79$  になる（これは計算方法の例示目的のものであり, 実務では, 正確な値を得るために, 時間ステップ数のもっと多いツリーを用いて, 試行回数をもっと増やす必要がある）。

(注18) ツリーを用いた効率的なサンプリングについては, D. Mintz, "Less is More," *Risk*, July 1997: 42-45 を参照。

表19.3 図19.3のツリーを用いたモンテカルロ・シミュレーションによるアジアン・オプションの評価（ペイオフは株価の平均が50ドルを上回る額。Uは上昇、Dは下落）

| 試行 | パス    | 株価の平均 | オプションのペイオフ |
|----|-------|-------|------------|
| 1  | UUUUD | 64.98 | 14.98      |
| 2  | UUUDD | 59.82 | 9.82       |
| 3  | DDDUU | 42.31 | 0.00       |
| 4  | UUUUU | 68.04 | 18.04      |
| 5  | UUDDU | 55.22 | 5.22       |
| 6  | UDUUD | 55.22 | 5.22       |
| 7  | DDUDD | 42.31 | 0.00       |
| 8  | UUDDU | 55.22 | 5.22       |
| 9  | UUUDU | 62.25 | 12.25      |
| 10 | DDUUD | 45.56 | 0.00       |
| 平均 |       |       | 7.08       |

## 19.7 分散減少法

これまで述べてきたシミュレーション方法では、適度な精度で  $f$  を推定するためにはかなり多くの試行が通常必要となるため、計算時間が非常にかかる。本節では、計算時間を劇的に削減できる分散減少法について検討する。

### 負相関変量法

負相関変量法 (antithetic variable technique) では、1回の試行につきデリバティブの価値を二つ計算する。一つ目の価値  $f_1$  は、通常と同じ手順で計算されたものである。二つ目の価値  $f_2$  は、標準正規分布からランダムにとったサンプルの符号をすべて反対にし、それを用いて計算されたものである ( $\varepsilon$  が  $f_1$  の計算に用いられたサンプルならば、 $f_2$  は  $-\varepsilon$  を用いて計算される)。シミュレーションの各試行でのデリバティブの価値のサンプル値を、 $f_1$  と  $f_2$  の

平均とする。この方法がうまくいくのは、一方の値が真の値より大きいときには他方の値は真の値より小さくなる傾向があり、一方の値が真の値より小さいときには他方の値は真の値より大きくなる傾向があるからである。

$f_1$ と $f_2$ の平均を $\bar{f}$ と書くと、

$$\bar{f} = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

である。デリバティブの価値の最終的な推定値は $\bar{f}$ の平均である。 $\bar{\omega}$ を $\bar{f}$ の標準偏差、 $M$ を試行回数（すなわち、計算された値の組の数）とすると、推定値の標準誤差は、

$$\bar{\omega} / \sqrt{M}$$

になる。これは、 $2M$ 回ランダム・サンプリングして計算した場合の標準誤差よりも一般的にずっと小さい。

### 制御変量法

制御変量法の例は、ツリーを用いたアメリカン・オプションの評価に関連してすでに紹介している（19.3節を参照）。制御変量法が利用できるのは、二つの類似したデリバティブ A と B が存在する場合である。A を評価したいデリバティブとし、B を A に類似したデリバティブで、解析解が存在するものとする。同じ乱数列と同じ $\Delta t$ を用いて、二つのシミュレーションを同時に行う。一つ目のシミュレーションで A の価値に対する推定値 $f_A^*$ を求め、二つ目のシミュレーションで B の価値に対する推定値 $f_B^*$ を求める。このとき、A の価値に対するよりよい推定値 $f_A$ が、

$$f_A = f_A^* - f_B^* + f_B \quad (19.20)$$

として得られる。ここで $f_B$ は解析的に求められた B の価値の正しい値である。Hull と White は、確率ボラティリティがヨーロピアン・コール・オプションの価格に与える影響を評価する際の制御変量法の使用例を示した（注19）。その場合には、A は確率ボラティリティを仮定したオプションで、B は定数ボラティリティを仮定したオプションである。

## 加重サンプリング

加重サンプリング (importance sampling) は、例を用いて説明するのがわかりやすいだろう。行使価格  $K$ 、満期  $T$  のディープ・アウト・オプションの価格を計算したいとする。通常の方法で時点  $T$  における原資産価格をサンプリングすると、ペイオフがゼロになるパスがほとんどになる。ペイオフがゼロになるパスはオプションの価値の決定にはほとんど寄与しないので、この部分は計算時間の無駄になる。したがって、もっと重要なパス、すなわち満期における株価が  $K$  を超えるパスのみを選ぶような方法を考えたい。

$F$  を満期  $T$  における株価が従う無条件の分布関数とし、株価が満期で  $K$  を超える確率  $q$  が解析的に求められているとする。このとき、 $G=F/q$  は、満期に株価が  $K$  を超えるという条件のもとでの確率分布となる。加重サンプリングでは、 $F$  のかわりに  $G$  からサンプルをとる。オプションの価値の推定値は割引き後のペイオフの平均に  $q$  を乗じたものになる。

## 層別サンプリング

確率分布からランダムにサンプルをとるより、代表的な値をサンプルとするほうが、精度の高い計算結果が得られる。層別サンプリング (stratified sampling) は、それを行う手法である。確率分布から1,000個のサンプルをとりたいとする。確率分布を等確率になるような1,000個の区間に分割し、それぞれの区間から代表的な値（一般的には平均または中央値）を選ぶのがこの手法である。

標準正規分布を  $n$  分割する場合は、 $i$  番目の区間の代表値は、

$$N^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n}\right)$$

とすればよい。ここで  $N^{-1}$  は正規分布の累積分布関数の逆関数である。たとえば  $n=4$  の場合には、四つの区間に対応する代表値は、 $N^{-1}(0.125)$ ,

---

(注19) J. Hull and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42 (June 1987) : 281-300 を参照。

$N^{-1}(0.375)$ ,  $N^{-1}(0.625)$ ,  $N^{-1}(0.825)$  になる。関数  $N^{-1}$  は Excel の NORMSINV 関数を用いて計算できる。

### モーメント・マッチング

モーメント・マッチング (moment matching) は、標準正規分布からとったサンプルを修正して、1次, 2次, 場合によってはさらに高次のモーメントを正しい値と一致させる手法である。平均 0, 標準偏差 1 の正規分布からサンプルをとって、特定の期間における、ある変数の値の変化を計算したいとする。サンプルを  $\varepsilon_i (1 \leq i \leq n)$  とする。最初の二つのモーメントを一致させるために、サンプルの平均  $m$  と標準偏差  $s$  を計算する。それらの値を用いて、修正後のサンプル  $\varepsilon_i^* (1 \leq i \leq n)$  を、

$$\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i - m}{s}$$

として定義する。修正後のサンプルの平均は正しい値の 0, 標準偏差は正しい値の 1.0 になる。この修正後のサンプルがすべての計算に用いられる。

モーメント・マッチングは計算時間を削減できるが、すべてのサンプルをシミュレーションの終わりまで保持しておく必要があるため、メモリ不足の問題が生じる可能性がある。モーメント・マッチングは、2次再サンプリング (quadratic resampling) と呼ばれることがある。この手法は負相関変量法と合わせて用いられる場合が多い。負相関変量法では奇数次のモーメントはすべて自動的に一致するので、モーメント・マッチングとしては、2次のモーメントと、場合によっては、4次のモーメントまでを一致させることが目標になる。

### 準乱数を用いる方法

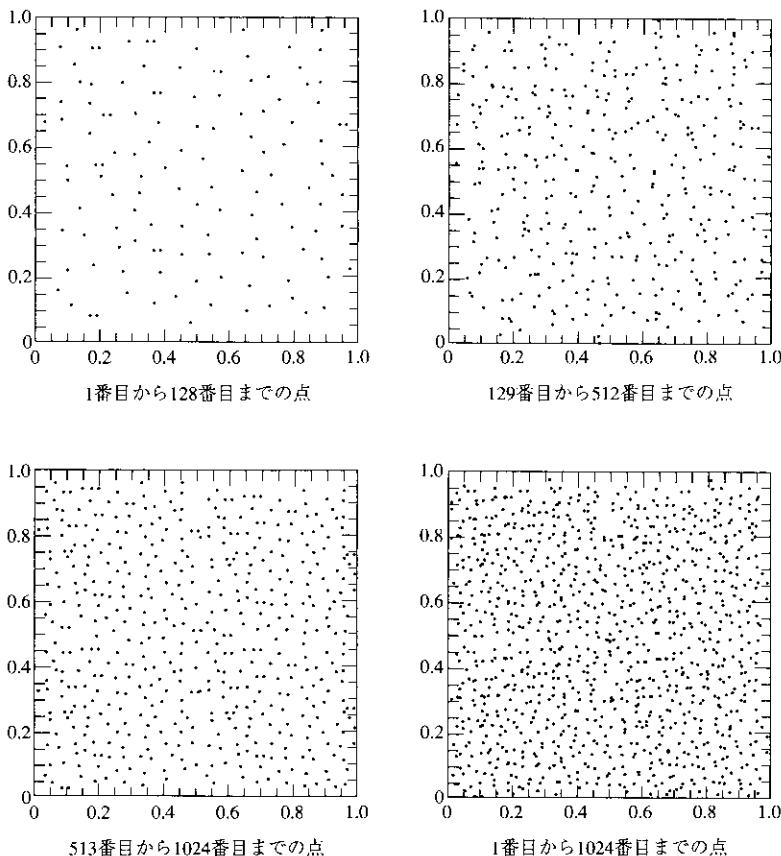
準乱数（差異の小さい点列 (low-discrepancy sequence) とも呼ばれる）は、ある確率分布に従う代表的な標本点からなる数列である（注20）。準乱数の使

---

(注20) 準乱数 (quasi-random sequence) は誤解を与える用語である。準乱数は完全に確定的な数列である。

用方法については、Brotherton-Ratcliffe や Press et al. の本(注21)に解説がある。準乱数には、 $M$  をサンプル数とするとき、それを用いて計算した推定値の標準誤差が  $1/\sqrt{M}$  ではなく、 $1/M$  になるという望ましい性質がある。

図19.14 Sobol'列の最初の1024個



(注21) R. Brotherton-Ratcliffe, "Monte Carlo Motoring," *Risk*, (December 1994) : 53-58 ; W.H. Press, S. A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. Cambridge University Press, 1992 を参照。

準乱数のサンプリングは、層別サンプリングと類似の手法である。原資産変数の代表値をサンプリングするという点で、二つの手法の目的は同じである。層別サンプリングでは、あらかじめいくつのサンプルをとるかがわかっていると仮定されている。それに対し、準乱数のサンプリング方法はもっと柔軟性が高く、すでにある標本点の隙間を常に“埋めていく”ように、新たな標本がとられていく。シミュレーションのどの時点であっても、標本点は確率空間をだいたい一様に埋めるように配置されている。

Sobol'によって提案された手法<sup>(注22)</sup>を用いて生成した標本点を図19.14に示す。新たに生成される点が、それまでの標本点の隙間を埋めていく様子がみてとれるだろう。

## 19.8 有限差分法

有限差分法は、デリバティブの満たす微分方程式を解くことによってデリバティブを評価するときに用いられる。微分方程式を差分方程式に置き換えて、その差分方程式を繰り返し解くことで、デリバティブの価値が計算できる。

この手法の適用例として、配当利回りが  $q$  の株式に対するアメリカン・ブット・オプションをこの手法で評価してみよう。オプションが満たす微分方程式は(15.6)式より、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (19.21)$$

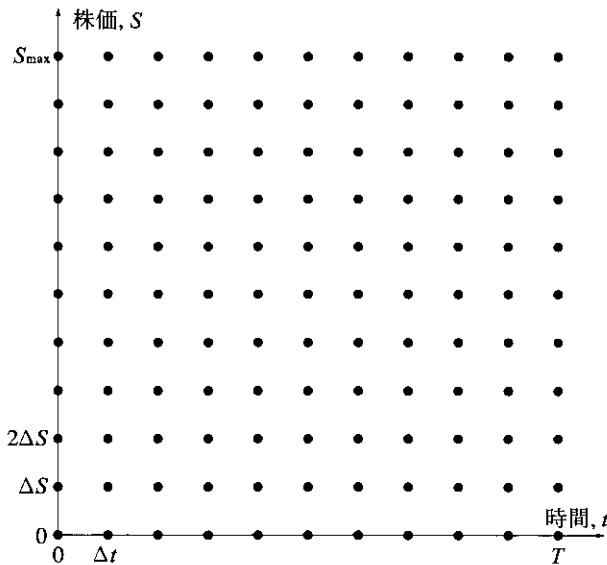
となる。ここでオプション満期を  $T$ とした。満期までを長さ  $\Delta t = T/N$  の区間に  $N$  等分する。したがって、 $N+1$  個の時点

$$0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$$

---

(注22) I.M. Sobol', *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 7, 4 (1967) : 86-112 を参照。Sobol'列の生成手続に関しては、W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. Cambridge University Press, 1992 の解説を参照。

図19.15 有限差分法での格子



で考えることになる。 $S_{\max}$ を、株価がその水準になるとブットの価値が実質ゼロになるような、十分大きい値とする。 $\Delta S = S_{\max}/M$ とし、 $M+1$ 等分した株価

$$0, \Delta S, 2\Delta S, \dots, S_{\max}$$

について考える。さらに、これらの値の一つが現在の株価に一致するよう、 $S_{\max}$ の値を選ぶ。

時間と株価の分割点をあわせると、図19.15のような、 $(M+1)(N+1)$ 個の点からなる格子が定義できる。点 $(i, j)$ は時点 $i\Delta t$ と株価 $j\Delta S$ に対応した点である。変数 $f_{i,j}$ で、点 $(i, j)$ でのオプションの価値を表すことにする。

### 陰的有限差分法

格子上の内点 $(i, j)$ に対して、 $\partial f / \partial S$ は、

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} \quad (19.22)$$

あるいは,

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \quad (19.23)$$

で近似することができる。(19.22)式は前進差分近似 (forward difference approximation) として知られている。また、(19.23)式は後退差分近似 (backward difference approximation) として知られている。ここでは、二つの式を平均して得られる、もっと対称的な近似である、

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} \quad (19.24)$$

を用いることにする。 $\partial f / \partial t$  に対しては、前進差分近似を用いることにして、時点  $i\Delta t$  における値と時点  $(i+1)\Delta t$  における値は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} \quad (19.25)$$

によって関係付けられることになる。点  $(i,j)$  での  $\partial f / \partial S$  に対する後退差分近似は(19.23)式で与えられる。点  $(i,j+1)$  での後退差分は、

$$\frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S}$$

で与えられる。したがって、点  $(i,j)$  での  $\partial^2 f / \partial S^2$  に対する有限差分近似は、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta S} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta S} \right) / \Delta S$$

すなわち、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} \quad (19.26)$$

になる。(19.24)式、(19.25)式、および(19.26)式を(19.21)式に代入し、 $S = j\Delta S$  を用いると、

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r-q)j\Delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}$$

が得られる。ここで、 $j=1, 2, \dots, M-1$ ,  $i=0, 1, \dots, N-1$  である。各項

を整理すると、

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \quad (19.27)$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2}(r-q)j\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \\ b_j &= 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t \\ c_j &= -\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \end{aligned}$$

である。 $S_T$ を時点  $T$  における株価とすると、時点  $T$  におけるプット・オプションの価値は  $\max(K - S_T, 0)$  になる。したがって、

$$f_{N,j} = \max(K - j\Delta S, 0), \quad j = 0, 1, \dots, M \quad (19.28)$$

となる。株価がゼロのときは、プット・オプション価値は  $K$  であるから、

$$f_{i,0} = K, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (19.29)$$

となる。 $S = S_{\max}$  のときプット・オプションの価値はゼロになると仮定すると、

$$f_{i,M} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (19.30)$$

となる。(19.28)式、(19.29)式、および(19.30)式から、図19.15の格子の三つの境界、 $S = 0$ 、 $S = S_{\max}$ 、 $t = T$  でのプット・オプションの価値が決まる。その他のすべての点での  $f$  の値は(19.27)式を用いて計算できる。まず、時点  $T - \Delta t$  に対応する各点について計算する。(19.27)式で  $i = N - 1$  とすると、

$$a_j f_{N-1,j-1} + b_j f_{N-1,j} + c_j f_{N-1,j+1} = f_{N,j} \quad (19.31)$$

となる。ただし、 $j = 1, 2, \dots, M - 1$  である。これらの方程式の右辺の値は、(19.28)式よりすでに求まっている。さらに、(19.29)式と(19.30)式から、

$$f_{N-1,0} = K \quad (19.32)$$

$$f_{N-1,M} = 0 \quad (19.33)$$

である。したがって、(19.31)式は  $M - 1$  個の連立方程式なので、 $M - 1$  個の未知数  $f_{N-1,1}, f_{N-1,2}, \dots, f_{N-1,M-1}$  について解くことができる(注23)。これらの計算を行った後に、各  $f_{N-1,j}$  の値と  $K - j\Delta S$  との比較を行う。もし

$f_{N-1,j} < K - j\Delta S$  ならば、時点  $T - \Delta t$  における期限前行使が最適となるので、 $f_{N-1,j}$  の値を  $K - j\Delta S$  にする。時点  $T - 2\Delta t$  に対応する各点についても、同様の計算を行う。これを続けると、最終的に  $f_{0,1}, f_{0,2}, f_{0,3}, \dots, f_{0,M-1}$  が求まる。これらの一つが、求めるオプション価格である。

制御変量法は有限差分法といっしょに用いることができる。評価したいオプションと類似したオプションで解析解をもつものに対して、同じ格子を用いてその価値を計算し、(19.20)式を用いればよい。

#### 【例19.10】

例19.1のアメリカン・プット・オプションに対して、上述の陰的有限差分法を用いて評価した結果を表19.4（次頁）に示す。 $M, N$ , および  $\Delta S$  は、それぞれ20, 10, および 5 とした。したがって、0 ドルから 100 ドルまでの 5 ドル刻みの株価に対して、オプション満期まで半月刻みでオプション価格を評価することになる。この格子を用いて評価したオプション価格は4.07ドルである。同じ格子を用いて対応するヨーロピアン・オプションを評価すると3.91ドルになる。Black-Scholes の公式によるヨーロピアン・オプションの真の価格は4.08ドルである。したがって、制御変量法を用いたアメリカン・オプションの価格の推定値は、

$$4.07 + 4.08 - 3.91 = 4.24 \text{ ドル}$$

になる。

## 陽的有限差分法

陰的有限差分法がすぐれているのは、非常に頑強な点である。 $\Delta S$  と  $\Delta t$  をゼロに近づけると、陰的有限差分法による解はもとの微分方程式の解に必

(注23) この方程式は、逆行列を計算しなくても解くことができる。(19.31)式で  $j=1$  とした式より、 $f_{N-1,2}$  を  $f_{N-1,1}$  で表すことができる。 $j=2$  とおいた式と  $j=1$  のときの結果を用いると、 $f_{N-1,3}$  を  $f_{N-1,1}$  で表すことができる。これを続けていくと、 $j=M-2$  とおいた式とそれまでの結果を用いると、 $f_{N-1,M-1}$  を  $f_{N-1,1}$  で表すことができる。したがって、最後の  $j=M-1$  とおいた式を用いて、 $f_{N-1,1}$  の値を求めることができ、それを用いて他の  $f_{N-1,j}$  の値を求めることができる。

表19.4 例19.1のアメリカン・オプションを陰的有限差分法で評価するときの格子

| 株価<br>(ドル) | 満期までの期間 (月) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|            | 5           | 4.5   | 4     | 3.5   | 3     | 2.5   | 2     | 1.5   | 1     | 0.5   | 0     |
| 100        | 0.00        | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 95         | 0.02        | 0.02  | 0.01  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 90         | 0.05        | 0.04  | 0.03  | 0.02  | 0.01  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 85         | 0.09        | 0.07  | 0.05  | 0.03  | 0.02  | 0.01  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 80         | 0.16        | 0.12  | 0.09  | 0.07  | 0.04  | 0.03  | 0.02  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 75         | 0.27        | 0.22  | 0.17  | 0.13  | 0.09  | 0.06  | 0.03  | 0.02  | 0.01  | 0.00  | 0.00  |
| 70         | 0.47        | 0.39  | 0.32  | 0.25  | 0.18  | 0.13  | 0.08  | 0.04  | 0.02  | 0.00  | 0.00  |
| 65         | 0.82        | 0.71  | 0.60  | 0.49  | 0.38  | 0.28  | 0.19  | 0.11  | 0.05  | 0.02  | 0.00  |
| 60         | 1.42        | 1.27  | 1.11  | 0.95  | 0.78  | 0.62  | 0.45  | 0.30  | 0.16  | 0.05  | 0.00  |
| 55         | 2.43        | 2.24  | 2.05  | 1.83  | 1.61  | 1.36  | 1.09  | 0.81  | 0.51  | 0.22  | 0.00  |
| 50         | 4.07        | 3.88  | 3.67  | 3.45  | 3.19  | 2.91  | 2.57  | 2.17  | 1.66  | 0.99  | 0.00  |
| 45         | 6.58        | 6.44  | 6.29  | 6.13  | 5.96  | 5.77  | 5.57  | 5.36  | 5.17  | 5.02  | 5.00  |
| 40         | 10.15       | 10.10 | 10.05 | 10.01 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 |
| 35         | 15.00       | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 |
| 30         | 20.00       | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 |
| 25         | 25.00       | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 |
| 20         | 30.00       | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 |
| 15         | 35.00       | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 |
| 10         | 40.00       | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 |
| 5          | 45.00       | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 |
| 0          | 50.00       | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 |

ず収束する(注24)。陰的有限差分法の一つの欠点は、 $f_{i+1,j}$ から $f_{i,j}$ を求めるのに $M-1$ 個の連立方程式を解く必要があることである。もし、格子上の点 $(i,j)$ における $\partial f / \partial S$ および $\partial^2 f / \partial S^2$ の値が点 $(i+1,j)$ における値と同じであると仮定すると、この手法は簡単になる。その場合、(19.24)式と(19.26)式は、

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta S}$$

(注24) 有限差分法では、 $\Delta S$ を $\sqrt{\Delta t}$ に比例させたままゼロに近づけるのが一般的である。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2}$$

になる。差分方程式は、

$$\begin{aligned} & \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q) j \Delta S \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2 \Delta S} \\ & + \frac{1}{2} \sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta S^2} = r f_{i,j} \end{aligned}$$

すなわち、

$$f_{i,j} = a_j^* f_{i+1,j-1} + b_j^* f_{i+1,j} + c_j^* f_{i+1,j+1} \quad (19.34)$$

になる。ここで、

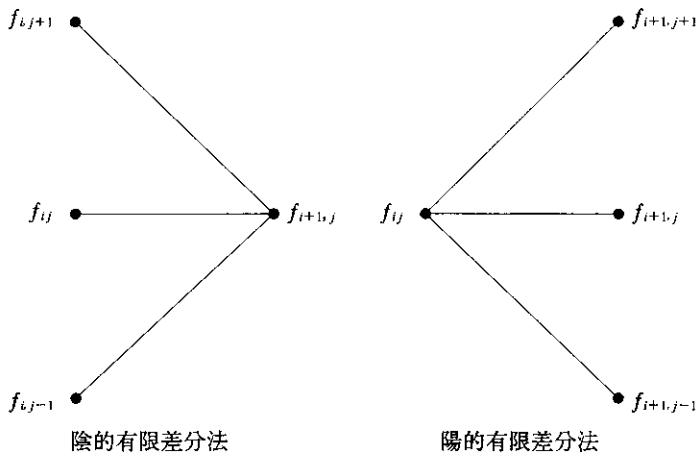
$$a_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( -\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

$$b_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} (1 - \sigma^2 j^2 \Delta t)$$

$$c_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( \frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \right)$$

である。

図19.16 隠的有限差分法と陽的有限差分法の違い



これはいわゆる陽的有限差分法 (explicit finite difference method) である (注25)。図19.16は、陰的有限差分法と陽的有限差分法の違いを図示したものである。陰的方法では、(19.27)式で表される、時点  $i\Delta t$  における三つの異なるオプション価値 (すなわち,  $f_{i,j-1}$ ,  $f_{i,j}$ , および  $f_{i,j+1}$ ) と時点  $(i+1)\Delta t$  における一つのオプション価値 (すなわち  $f_{i+1,j}$ ) との関係が与えられている。それに対し、陽的方法では、(19.34)式で表される、時点  $i\Delta t$  における一つのオプション価値 (すなわち  $f_{i,j}$ ) と時点  $(i+1)\Delta t$  における三つの異なるオプション価値 (すなわち  $f_{i+1,j-1}$ ,  $f_{i+1,j}$ , および  $f_{i+1,j+1}$ ) との関係が与えられている。

#### 【例19.11】

例19.1のアメリカン・ブット・オプションに対して、陽的有限差分法を用いて評価した結果を表19.5に示す。例19.10と同様に、 $M$ ,  $N$ , および  $\Delta S$  は、それぞれ20, 10, および 5とした。この格子によるオプション価格は4.26ドルになる (注26)。

### 変数変換

$S$  よりも  $\ln S$  を原資産変数として有限差分法を用いたほうが、計算効率はよい。 $Z = \ln S$  と定義すると、(19.21)式は、

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{\partial f}{\partial Z} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial Z^2} = rf$$

になる。この式を用いて、 $S$  ではなく  $Z$  に関して等間隔に分割された格子上で、デリバティブの価値を計算することになる。陰的方法を用いた場合の差分方程式は、

(注25)  $\partial f / \partial t$  に対して前進差分近似のかわりに後退差分近似を用いる方法でも、陽的有限差分法による差分方程式を導出できる。

(注26) 格子の左上の部分に負の数などの不整合な点がみられることに関しては、後で説明する。

表19.5 例19.1のアメリカン・オプションを陽的有限差分法で評価するときの格子

| 株価<br>(ドル) | 満期までの期間 (月) |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------------|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|            | 5           | 4.5   | 4     | 3.5   | 3     | 2.5   | 2     | 1.5   | 1     | 0.5   | 0     |
| 100        | 0.00        | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 95         | 0.06        | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 90         | -0.11       | 0.05  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.01  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 85         | 0.28        | -0.05 | 0.05  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 80         | -0.13       | 0.20  | 0.00  | 0.05  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 75         | 0.46        | 0.06  | 0.20  | 0.04  | 0.06  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 70         | 0.32        | 0.46  | 0.23  | 0.25  | 0.10  | 0.09  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 65         | 0.91        | 0.68  | 0.63  | 0.44  | 0.37  | 0.21  | 0.14  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 60         | 1.48        | 1.37  | 1.17  | 1.02  | 0.81  | 0.65  | 0.42  | 0.27  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 55         | 2.59        | 2.39  | 2.21  | 1.99  | 1.77  | 1.50  | 1.24  | 0.90  | 0.59  | 0.00  | 0.00  |
| 50         | 4.26        | 4.08  | 3.89  | 3.68  | 3.44  | 3.18  | 2.87  | 2.53  | 2.07  | 1.56  | 0.00  |
| 45         | 6.76        | 6.61  | 6.47  | 6.31  | 6.15  | 5.96  | 5.75  | 5.50  | 5.24  | 5.00  | 5.00  |
| 40         | 10.28       | 10.20 | 10.13 | 10.06 | 10.01 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 | 10.00 |
| 35         | 15.00       | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 | 15.00 |
| 30         | 20.00       | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 | 20.00 |
| 25         | 25.00       | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 | 25.00 |
| 20         | 30.00       | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 | 30.00 |
| 15         | 35.00       | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 | 35.00 |
| 10         | 40.00       | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 | 40.00 |
| 5          | 45.00       | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 | 45.00 |
| 0          | 50.00       | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 | 50.00 |

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q - \sigma^2/2) \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta Z} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta Z^2} = \gamma f_{i,j}$$

すなわち、

$$\alpha_j f_{i,j-1} + \beta_j f_{i,j} + \gamma_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j} \quad (19.35)$$

になる。ここで、

$$\alpha_j = \frac{\Delta t}{2\Delta Z} (r - q - \sigma^2/2) - \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2} \sigma^2$$

$$\beta_j = 1 + \frac{\Delta t}{\Delta Z^2} \sigma^2 + r \Delta t$$

$$\gamma_j = -\frac{\Delta t}{2\Delta Z} (r - q - \sigma^2/2) - \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2} \sigma^2$$

である。陽的方法を用いた場合の差分方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + (r - q - \sigma^2/2) \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta Z} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i+1,j}}{\Delta Z^2} \\ = rf_{i,j} \end{aligned}$$

すなわち、

$$\alpha_j^* f_{i+1,j-1} + \beta_j^* f_{i+1,j} + \gamma_j^* f_{i+1,j+1} = f_{i,j} \quad (19.36)$$

になる。ここで、

$$\alpha_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left[ -\frac{\Delta t}{2\Delta Z} (r - q - \sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2} \sigma^2 \right] \quad (19.37)$$

$$\beta_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left( 1 - \frac{\Delta t}{\Delta Z^2} \sigma^2 \right) \quad (19.38)$$

$$\gamma_j^* = \frac{1}{1+r\Delta t} \left[ \frac{\Delta t}{2\Delta Z} (r - q - \sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2} \sigma^2 \right] \quad (19.39)$$

である。

変数変換を行うと、 $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$  も  $\alpha_j^*$ ,  $\beta_j^*$ ,  $\gamma_j^*$  も、 $j$  とは独立になる。ほとんどの場合には、 $\Delta Z$  は  $\sigma\sqrt{3\Delta t}$  にするのがよい。

### 三項ツリー法との関係

陽的有限差分法は三項ツリー法と等価な手法である(注27)。(19.34)式の  $a_j^*$ ,  $b_j^*$ ,  $c_j^*$ に対する式から、次のようなツリーとして解釈できる。

$-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$  : 微小時間  $\Delta t$  の間に、株価が  $j\Delta S$  から  $(j-1)\Delta S$  に下落する確率

$1 - \sigma^2 j^2 \Delta t$  : 微小時間  $\Delta t$  の間に、株価が  $j\Delta S$  のまま変化しない確率

---

(注27) 隠的有限差分法は、各ノードから  $M+1$  個の枝が出る多項ツリー法と等価であることを示すこともできる。

$$\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t : \text{微小時間 } \Delta t \text{ の間に, 株価が } j\Delta S \text{ から} \\ (j+1)\Delta S \text{ に上昇する確率}$$

この解釈を図示すると、図19.17のようになる。三つの確率を足し合わせると 1 になる。この確率のもとで、時間  $\Delta t$  後の株価の変化に対する期待値は、 $(r-q)j\Delta S\Delta t = (r-q)S\Delta t$  になる。これはリスク中立世界での変化の期待値と一致している。小さな  $\Delta t$  に対しては、株価の変化に対する分散は、 $\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \Delta t = \sigma^2 S^2 \Delta t$  になる。これは、株価  $S$  が従う確率過程のものと一致している。時点  $i\Delta t$  における  $f$  の値は、時点  $(i+1)\Delta t$  における  $f$  の値のリスク中立世界での期待値を無リスク金利で割り引いたものとして計算されている。

陽的有限差分法で計算がうまくいくためには、三つの“確率”

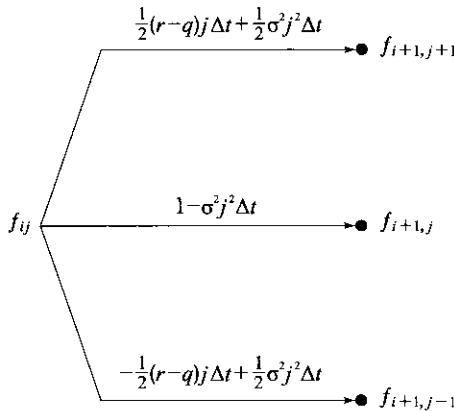
$$-\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$1 - \sigma^2 j^2 \Delta t$$

$$\frac{1}{2}(r-q)j\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t$$

がすべて正になることが必要であろう。例19.11では、 $j \geq 13$  (すなわち  $S \geq$

図19.17 陽的有限差分法の三項ツリーとしての解釈



65) のとき,  $1 - \sigma^2 j^2 \Delta t$  が負になる。表19.5の左上でオプション価格が負になるなどの不整合がみられるのはこのためである。この例は、陽的有限差分法に伴う主な問題点を説明してくれている。ツリーの推移確率が負になりますため、もとの微分方程式の解に収束する結果が必ずしも得られないのです (注28)。

変数変換を行った場合 ((19.36)式から (19.39)式を参照),  $Z = \ln S$  が  $\Delta Z$  だけ減少する確率, 変化しない確率,  $\Delta Z$  だけ増加する確率はそれぞれ,

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r - q - \sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$1 - \frac{\Delta t}{\Delta Z^2}\sigma^2$$

$$\frac{\Delta t}{2\Delta Z}(r - q - \sigma^2/2) + \frac{\Delta t}{2\Delta Z^2}\sigma^2$$

になる。 $Z$  に関するこれらの変動は、株価でみた場合,  $S$  からそれぞれ  $Se^{-\Delta Z}$ ,  $S$ ,  $Se^{\Delta Z}$ への変化に対応している。 $\Delta Z = \sigma\sqrt{3\Delta t}$  とおくと、ここでのツリーと確率は、19.4節で検討した三項ツリーのものと同じになる。

### その他の有限差分法

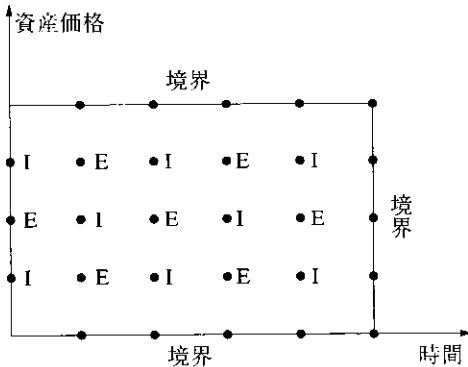
陽的差分法のある部分の性質と陰的差分法のある部分の性質をあわせもつ、その他の多くの有限差分法が提案されている。

ホップスコッチ (hopscotch) 法として知られる手法は、ノードからノードへの計算を行うときに、陽的な計算と陰的な計算を交互に行うというものである。図19.18にこれを図示した。各時点において、まず、すべての“陽的ノード” (E) に対して通常の計算を行う。そうすると、“陰的ノード” (I) では、隣合うノードの値はすでに求まっているので、連立方程式を解かなく

(注28) J. Hull and A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (March 1990) : 87-100 では、この問題点の対処の仕方を紹介している。ここで考えている状況では、収束性を保証するには、 $S$  ではなく  $\ln S$  で格子を作成すればよい。

図19.18 ホップスコッチ法

(Iのノードに対しては陰的な計算を行い、Eのノードに対しては陽的な計算を行う)



ても値が計算できるようになる。

Crank-Nicolson 法は、陽的な方法と陰的な方法の平均をとったものである。陰的な方法では、(19.27)式より、

$$f_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1}$$

となる。陽的な方法では、(19.34)式より、

$$f_{i-1,j} = a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

となる。Crank-Nicolson 法はこれら二つの式の平均をとり、

$$f_{i,j} + f_{i-1,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} + a_j^* f_{i,j-1} + b_j^* f_{i,j} + c_j^* f_{i,j+1}$$

とする。ここで、

$$g_{i,j} = f_{i,j} - a_j^* f_{i,j-1} - b_j^* f_{i,j} - c_j^* f_{i,j+1}$$

とおくと、

$$g_{i,j} = a_j f_{i-1,j-1} + b_j f_{i-1,j} + c_j f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j}$$

と書ける。これより、Crank-Nicolson 法は陰的有限差分法の実装と同様の方法で実装できることがわかる。Crank-Nicolson 法のすぐれた点は、陽的有限差分法や陰的有限差分法よりも収束が速いことである。

## 有限差分法の適用

有限差分法は、ツリー法が適用されるのと同じタイプのデリバティブの価格付け問題に用いることができる。有限差分法は、ヨーロピアン・スタイルやアメリカン・スタイルのデリバティブの価格付けに用いることができるが、原資産変数の過去の経路に依存するペイオフをもつデリバティブには簡単に用いることができない。また、状態変数が多い場合には、計算時間はかなり増加するが、有限差分法は適用可能である。この場合には、図19.15の格子は多次元になる。

グリークスの計算は、ツリー法と同様に行える。デルタ、ガンマ、およびセータは、格子上の  $f_{i,j}$  の値から直接計算できる。ベガについては、ボラティリティを微小変化させ、同じ格子を用いてデリバティブの価値を再計算する必要がある。

## 要 約

解析解が存在しないデリバティブの評価に対して用いられる、3種類の数値計算法を紹介してきた。それらは、ツリーを用いる方法、モンテカルロ・シミュレーション、および有限差分法である。

二項ツリーでは、各微小時間  $\Delta t$  の間に、株価は変化率  $u$  の上昇をすると、変化率  $d$  の下落をするかのどちらかであると仮定される。 $u$  と  $d$  の大きさと推移確率は、リスク中立世界における株価変動の平均と標準偏差に一致するように決められる。デリバティブの価格は、ツリーの終端から後向きに計算して求められる。アメリカン・オプションの場合には、各ノードでの値は、(a)その時点で期限前行使した場合の価値と(b)さらに  $\Delta t$  後まで保有した場合の価値の割引後の期待値の大きいほうになる。

モンテカルロ・シミュレーションでは、乱数を用いて、デリバティブの原資産変数がリスク中立世界でとりうる多くの異なるパスのサンプルが生成さ

れる。各パスに対してペイオフを計算し、それを無リスク金利で割り引く。この割り引かれたペイオフの算術平均が、デリバティブの価値の推定値になる。

有限差分法は、解きたい微分方程式を差分方程式に変換して解く手法である。この手法は、デリバティブの満期からはじめのほうへ後向きに計算していくという点で、ツリー法と同様の手法である。陽的有限差分法は、機能的には三項ツリーを用いる方法と同じである。これに対し、陰的有限差分法はもっと複雑であるが、収束性を気にしなくてもよいという点ですぐれている。

実際には、どの数値計算法を用いるかは、評価するデリバティブの特性と求める計算精度によって決められる。モンテカルロ・シミュレーションでは、デリバティブの残存期間のはじめから終わりへ前向きに計算が行われる。したがって、ヨーロピアン・スタイルのデリバティブに用いられ、ペイオフに関する限り、非常に複雑なものも扱える。また、原資産変数の数が増えてくると、相対的により効率的な手法になる。ツリー法と有限差分法では、デリバティブの残存期間の終わりからはじめへ後向きに計算が行われるので、ヨーロピアン・スタイルのデリバティブとともにアメリカン・スタイルのデリバティブにも用いることができる。しかし、ペイオフが原資産の現在価格だけでなく、状態変数の過去の経路にも依存する場合には、適用するのはむずかしい。また、原資産変数の数が3以上になると、計算時間が非常にかかるようになる場合が多い。

## 参考文献

### ○一般

Clewlow, L., and C. Strickland. *Implementing Derivatives Models*. Chichester: Wiley, 1998.

Press, W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, and B.P. Flannery. *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2nd edn. Cambridge University Press, 1992.

○ツリー法について

Cox, J.C., S.A. Ross, and M. Rubinstein. "Option Pricing : A Simplified Approach," *Journal of Financial Economics*, 7 (October 1979) : 229-64.

Figlewski, S., and B. Gao. "The Adaptive Mesh Model : A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53 (1999) : 313-51.

Hull, J.C., and A. White. "The Use of the Control Variate Technique in Option Pricing," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (September 1988) : 237-51.

Rendleman, R., and B. Bartter. "Two State Option Pricing," *Journal of Finance*, 34 (1979) : 1092-1110.

○モンテカルロ・シミュレーションについて

Boyle, P.P. "Options : A Monte Carlo Approach," *Journal of Financial Economics*, 4 (1977) : 323-38.

Boyle, P.P., M. Broadie, and P. Glasserman. "Monte Carlo Methods for Security Pricing," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 (1997) : 1267-1322.

Broadie, M., P. Glasserman, and G. Jain. "Enhanced Monte Carlo Estimates for American Option Prices," *Journal of Derivatives*, 5 (Fall 1997) : 25-44.

○有限差分法について

Hull, J.C., and A. White. "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (March 1990) : 87-100.

Wilmott, P. *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering*. Chichester : Wiley, 1998.

**章末問題**

**19.1** アメリカン・オプションに対して、一つの二項ツリーだけを作成して評価できるのは、デルタ、ガンマ、ベガ、セータ、ローのうちど

れか。

- 19.2** 配当のない株式に対する満期 3 カ月のアメリカン・プット・オプションを考える。株価を60ドル、行使価格を60ドル、無リスク金利を年率10%，ボラティリティを年率45%とする。時間区間が 1 カ月の二項ツリーを用いて、このオプションを評価せよ。
- 19.3** ツリーを用いてアメリカン・オプションを評価する際に、制御変量法はどのように用いられるか説明せよ。
- 19.4** トウモロコシ先物に対する満期 9 カ月のアメリカン・コール・オプションを考える。現時点の先物価格を198セント、行使価格を200セント、無リスク金利を年率 8 %、ボラティリティを年率30%とする。時間区間が 3 カ月の二項ツリーを用いて、このオプションを評価せよ。
- 19.5** オプション期間中の平均株価を最終株価が上回った金額が支払われるオプションを考える。このオプションは二項ツリーを用いて評価できるか。その理由も説明せよ。
- 19.6** 「株式に配当がある場合、株価に対するツリーは再結合しない。しかし、株価から将来の配当の現在価値を差し引いたものに対するツリーは再結合する」。これについて説明せよ。
- 19.7** 脚注 9 の条件が満たされるとき、Cox, Ross, および Rubinstein の二項ツリーでは、負の確率が生じることを示せ。
- 19.8** 試行回数100回の層別サンプリングを用いて、ビジネス寸見19.1と表 19.1で行った  $\pi$  の推定を改善せよ。
- 19.9** モンテカルロ・シミュレーション法が、アメリカン・スタイルのデリバティブに簡単には適用できない理由を説明せよ。
- 19.10** 配当のない株式に対する満期 9 カ月、行使価格49ドルのアメリカン・プット・オプションを考える。株価を50ドル、無リスク金利を年率 5 %、ボラティリティを年率30%とする。3 期間二項ツリーを用いてオプション価格を計算せよ。
- 19.11** 3 期間二項ツリーを用いて、満期 9 カ月のアメリカン小麦先物コー

ル・オプションを評価せよ。ただし、現時点の先物価格は400セント、行使価格は420セント、無リスク金利は年率6%，ボラティリティは年率35%とする。また、同じツリーを用いてデルタを計算せよ。

- 19.12** 満期3カ月、行使価格20ドルのアメリカン・コール・オプションを考える。株価を20ドル、無リスク金利を年率3%，ボラティリティを年率25%とする。また、2ドルの配当が1.5カ月後に支払われるものとする。3期間二項ツリーを用いてオプション価格を計算せよ。
- 19.13** 配当のない株式に対する満期1年、行使価格18ドルのアメリカン・ブット・オプションを考える。現時点の株価を20ドル、無リスク金利を年率15%，ボラティリティを年率40%とする。期間を長さ3カ月の四つの時間ステップに分割し、DerivaGem ソフトウェアを用いてオプション価格を計算せよ。ツリーを表示して、最後のノードとその一つ前のノードでのオプション価格が正しいことを検証せよ。また、DerivaGem ソフトウェアを用いて、対応するヨーロピアン・オプションの価格を計算せよ。さらに、制御変量法を用いて、アメリカン・オプションの価格に対するより精度の高い推定値を求めよ。
- 19.14** 株式指数に対する満期2カ月、行使価格480のアメリカン・ブット・オプションを考える。現時点の指数のレベルを484、無リスク金利を年率10%，指数の配当利回りを年率3%，ボラティリティを年率25%とする。オプション期間を長さ半月の四つの期間に分割し、ツリー法を用いてこのオプションを評価せよ。
- 19.15** ツリー法を用いてアメリカン・オプションのデルタを計算する場合、制御変量法を用いると、どのように計算精度が改善できるか。
- 19.16** ボラティリティが確率変動する場合に、モンテカルロ・シミュレーションを用いて配当のない株式に対するヨーロピアン・コール・オプションを評価するとする。計算精度を改善するために、制御変量法と負相関変量法はどのように用いられるか。また、制御変量法と負相関変量法の両方を用いるとすると、シミュレーションの各試行でオプションの価格を6個計算する必要がある。その理由を説明せ

よ。

- 19.17** 陰的有限差分法を用いて通貨に対するアメリカン・コール・オプションを評価する場合、(19.27)式から(19.30)式はどのように変えればよいか。
- 19.18** 配当のない株式に対する満期4カ月のアメリカン・プット・オプションを考える。行使価格を21ドル、株価を20ドル、無リスク金利を年率10%、ボラティリティを年率30%とする。陽的有限差分法を用いて、オプションを評価せよ。ただし、株価は4ドル刻み、時間は1カ月刻みとする。
- 19.19** 銅の現物価格が1ポンド当たり0.60ドルである。先物価格（1ポンド当たりのドル価格）が以下のようにになっているとする。

---

|       |      |
|-------|------|
| 3カ月物  | 0.59 |
| 6カ月物  | 0.57 |
| 9カ月物  | 0.54 |
| 12カ月物 | 0.50 |

銅の価格のボラティリティを年率40%，無リスク金利を年率6%とする。このとき、銅に対する満期1年、行使価格0.60ドルのアメリカン・コール・オプションを、二項ツリーを用いて評価せよ。ただし、オプション期間を長さ3カ月の四つの期間に分割してツリーを作成せよ（ヒント：16.7節で説明したように、先物価格はリスク中立世界での将来の価格の期待値に等しい）。

- 19.20** 問題19.19で作成したツリーを用いて、1年後のペイオフが  $x^2$  であるような証券を評価せよ。ただし、 $x$  は銅の価格である。
- 19.21** 陽的有限差分法を用いてデリバティブの価格を計算する場合、どのようなときに、 $S=0$  と  $S \rightarrow \infty$  に対する境界条件は計算結果に影響を与えるか。
- 19.22** ビジネス寸見19.2と表19.2で行ったヨーロピアン・オプションの評価に対して、計算精度をよくするには、負相関変量法をどのように用いればよいか。

- 19.23** ある企業が、いつでもその企業の株式 2 株に転換できる、額面25ドル、満期 3 年の転換社債を発行した。株価が18ドル以上になったら、この転換社債を早期償還して株式に強制転換させる権利を発行体がもっているとする。この企業はなるべく早く強制転換を行うと仮定すると、どのような境界条件において転換社債の価格を評価すればよいか。金利は一定と仮定して、有限差分法を用いて転換社債を評価する方法について説明せよ。ただし、この企業がデフォルトするリスクはないものとする。
- 19.24** 3 次元標準正規分布に従う乱数を 1 次元の乱数から生成する公式を導け。ただし、サンプル  $i$  とサンプル  $j$  の相関は  $\rho_{i,j}$  とする。

## 宿題

- 19.25** ドルに対してスイスフランを売却する、満期 1 年、行使価格0.80ドルのアメリカン・プット・オプションを考える。スイスフランのボラティリティを10%，ドル金利を 6 %，スイスフラン金利を 3 %，現在の為替レートを0.81とする。このとき、3期間ツリーを用いてこのオプションを評価せよ。また、同じツリーを用いてデルタを計算せよ。
- 19.26** 銀の先物に対する満期 1 年、行使価格9.00ドルのアメリカン・コール・オプションを考える。現時点の先物価格を8.50ドル、無リスク金利を年率12%，先物価格のボラティリティを年率25%とする。期間を長さ 3 カ月の四つの時間ステップに分割し、DerivaGem ソフトウェアを用いてオプション価格を計算せよ。ツリーを表示して、最後のノードとその一つ前のノードでのオプション価格が正しいことを検証せよ。また、DerivaGem ソフトウェアを用いて、対応するヨーロピアン・オプションの価格を計算せよ。さらに、制御変量法

を用いて、アメリカン・オプションの価格に対するより精度の高い推定値を求めよ。

- 19.27** 2カ月後と5カ月後に1株当たり1ドルの配当が予想されている株式に対する満期6カ月のアメリカン・コール・オプションを考える。現時点の株価を30ドル、行使価格を34ドル、無リスク金利を年率10%、配当を除いた部分の株価のボラティリティを年率30%とする。オプション期間を六つの時間ステップに分割し、DerivaGem ソフトウェアを用いてオプションを評価せよ。また、その結果を Black の近似（13.12節を参照）による値と比較せよ。
- 19.28** 現時点の英ポンドは1.60ドル、ポンド/ドルの為替レートのボラティリティは年率15%である。満期1年、行使価格1.62ドルのアメリカン・コール・オプションを考える。米国と英国の無リスク金利をそれぞれ年率6%と9%とする。このとき、陽的有限差分法を用いてこのオプションを評価せよ。ただし、為替レートは0.80から2.40の範囲を0.20刻みで分割し、時間は3カ月刻みで分割せよ。
- 19.29** 19.4節で説明したその他のツリー作成法に関して、以下の間に答えよ。
- 19.4節の二項モデルでは、平均と分散は、微小時間 $\Delta t$ における株価の対数での変化に対する平均と分散に厳密に一致していることを示せ。
  - 19.4節の三項モデルでは、 $(\Delta t)^2$ の項とそれ以上の高次の項を無視すると、平均と分散は、微小時間 $\Delta t$ における株価の対数での変化に対する平均と分散と整合性がとれていることを示せ。
  - 19.4節で説明した三項モデルのかわりに、各ノードから上の枝、真ん中の枝、下の枝に推移する確率がそれぞれ $1/6$ ,  $2/3$ ,  $1/6$ になるような三項ツリーを構築せよ。ただし、 $S$ からは $S_u$ ,  $S_m$ ,  $S_d$ への枝が出ており、 $m^2 = ud$  が満たされていると仮定する。また、ツリーでの平均と分散が、株価の対数での変化に対する平均と分散に厳密に一致するようにツリーを構築せよ。

**19.30** 時間ステップ数を増やしていくとき、二項ツリーで求めたオプションの価格が正しい値に収束する様子を、DerivaGem Application Builder の関数を用いて調べる（図19.4と DerivaGem ソフトウェアの Sample Application A を参照）。株価指数に対するプロット・オプションについて考える。指標のレベルを900、行使価格を900、無リスク金利を5%，配当利回りを2%，満期を2年とする。

- (a) オプションがヨーロピアンで、指標のボラティリティが20%の場合に、収束に関して Sample Application A と同様の結果を作成せよ。
- (b) オプションがアメリカンで、指標のボラティリティが20%の場合に、収束に関して Sample Application A と同様の結果を作成せよ。
- (c) ボラティリティを20%とし、制御変量法を用いて評価したアメリカン・オプションの価格を時間ステップ数の関数と考えて、そのグラフを作成せよ。
- (d) アメリカン・オプションの市場価格を85.0とする。このとき、インプライド・ボラティリティの推定値を時間ステップ数の関数と考えて、そのグラフを作成せよ。

## 第20章

# バリュー・アット・リスク

第17章では、デリバティブのポートフォリオがもつさまざまなリスク特性を説明する、デルタ、ガンマ、ベガといったリスク指標について検討した。金融機関では、ポートフォリオに影響を与えるすべての市場変数に対し、通常これらの指標を日々計算している。それらの市場変数は数百、あるいは数千を超えることもあり、デルターガンマーベガ分析によって算出されるリスク指標は莫大な数になる。これらのリスク指標は金融機関のトレーダーにとって有益な情報となるが、金融機関が抱える総リスク量を計測する方法を提供するものではない。

バリュー・アット・リスク（VaR, Value at Risk）は、金融資産のポートフォリオに内在するリスク全体を一つの数値に要約して示そうというものである。VaRは、金融機関だけでなく、企業の会計担当者やファンドマネジャーなどによっても広く用いられるようになってきた。また、銀行の規制

当局も、銀行が抱えるリスクに対する所要自己資本を決定するのに VaR を用いている。

本章では、VaR 指標と、それを計算するためのヒストリカル・シミュレーション法とモデル・ビルディング法という二つの主な手法について説明する。

## 20.1 VaR 指標

バリュー・アット・リスク指標を用いて、アナリストは次のことを主張したいと考えている。

「確率  $X\%$ で、 $N$  日後に  $V$  ドル以上の損失を被ることはない」

この変数  $V$  がポートフォリオの VaR である。VaR は保有期間 ( $N$  日間) と信頼水準 ( $X\%$ ) の二つのパラメータの関数で、 $N$  日後にその値を超える損失が発生する確率はたかだか  $(100 - X)\%$  であるという損失水準を表している。銀行の規制当局は、市場リスクに対する VaR を  $N=10$ ,  $X=99$  として計算することを銀行に求めている（ビジネス寸見20.1を参照）。

保有期間を  $N$  日、信頼水準を  $X\%$  とするとき、VaR は  $N$  日後のポートフォリオの価値変化分布の  $(100 - X)\%$  パーセント点に対応した損失額である（価値変化の確率分布は、利益を正、損失を負として作成する）。たとえば  $N=5$ ,  $X=97$  のとき、VaR は 5 日後のポートフォリオの価値変化分布の 3 パーセント点である。ポートフォリオの価値変化分布が正規分布で近似できるとした場合の VaR を図20.1に図示する。

VaR は理解しやすいという点で魅力的な指標である。「どの程度事態は悪化しうるのか？」という単純な間に答える形になっていることが理解しやすさの本質的な点である。それは経営管理者層であればだれでもが知りたいことである。また、ポートフォリオに影響を与えるすべての市場変数に関するすべてのグリークスを一つの数値に集約するという考えに基づいてつくられた指標であるということで、VaR は経営管理者層にとって妥当と思える指標となっている。

図20.1 ポートフォリオの価値変化に関する確率分布からの VaR の計算  
(信頼水準を  $X\%$ , ポートフォリオ価値の利益を正, 損失を負とする)

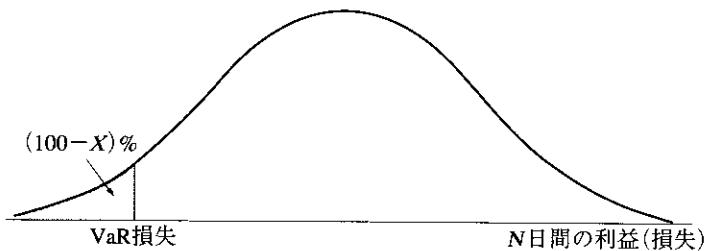
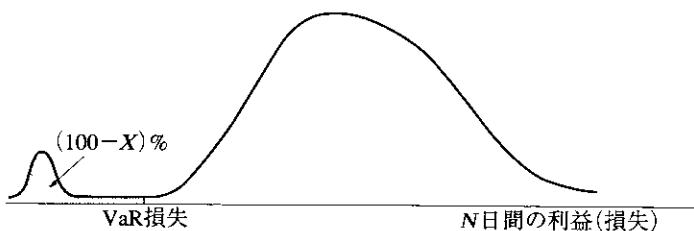


図20.2 図20.1とは別の状況  
(VaR は同じであるが、潜在的損失額は大きい)



ポートフォリオのリスクを一つの数値で表すことは有用であるという考えを受け入れたならば、VaRは最適な指標であるかという問題に関心が移る。VaRのもとでは、トレーダーは図20.2のような収益分布をしたポートフォリオのポジションをとりたがるようになる、と多くの研究者は論じてきた。図20.1と図20.2のポートフォリオのVaRは同じ値であるが、図20.2のポートフォリオのほうが潜在的な損失額が大きいのでリスクも大きい。

こうした問題を取り扱う指標が期待ショートフォールである(注1)。VaRが「どの程度事態が悪化しうるのか?」を問題としているのに対し、期待

(注1) この指標は、「C-VaR」または「テールロス」としても知られるもので、P. Artzner, F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath, "Coherent Measure of Risk," *Mathematical Finance*, 9 (1999) : 203-28で提案された。彼らはよいリスク指標がもつべき特性を定義し、標準的なVaRがそれらすべてを満たしていないことを示した。

## ビジネス寸見20.1 銀行規制当局はいかに VaR を利用するのか

銀行監督に関するバーゼル委員会は、世界の銀行の規制当局がスイスのバーゼルに定期的に集う委員会であり、1988年に「1988 BIS Accord」または単に「Accord」として知られる合意書を発表している。これは、信用リスクに対して銀行に求める所要自己資本の算出方法に関する規制当局間の合意である。その数年後、バーゼル委員会は「1996 Amendment」を発表し、信用リスクと同様に、市場リスクに対して銀行に求める所要自己資本も決定し、1998年に実施している。このAmendmentでは、銀行のトレーディング・ブックとバンキング・ブックが区別されている。バンキング・ブックは主にローンで構成されており、経営上の目的でも会計上の目的でも定期的に価値の再評価が行われない場合が多い。一方、トレーディング・ブックは銀行で取引される(株式、債券、スワップ、フォワード契約、オプションといった)無数の異なる金融商品から構成され、通常日々時価評価が行われている。

「1996 Amendment」では、トレーディング・ブックに対する所要自己資本は、 $N=10$ ,  $X=99$ としたVaRを用いて算出することが規定されている。これは、10日の保有期間でわずか1%の確率で超過する可能性がある時価再評価後の損失額に注目していること意味している。銀行はこのVaRを $k$ 倍した額(それに個別リスクの調整を加えたもの)を所要自己資本として要求される。乗数 $k$ は規制当局によって銀行ごとに決められており、少なくとも3.0とすることになっている。十分にテストされた、すぐれたVaRの計算手続きを行っている銀行に対しては、乗数 $k$ は最も低い3.0、その他の銀行にはそれより高い乗数が適用されている。

ショートフォールは「もし事態が悪化した場合、予想されうる損失はどのぐ

らいか？」を問題としている。期待ショートフォールは、 $N$ 日後の損益分布の $(100-X)\%$ 左裾部分にあたる事象が発生した場合の条件付き期待損失である。たとえば $X=99$ ,  $N=10$ としたときは、期待ショートフォールは、分布の1%左裾部分にあたる損失が発生したときに10日間でその企業が失う平均損失額である。

VaR（期待ショートフォールではない）には上記のような欠点があるが、VaRは規制当局やリスク管理担当者に受け入れられている最も一般的なリスク指標である。したがって、この章の残りの部分では、VaRをどのように計測するかということを中心に説明する。

### 保有期間

VaRには二つのパラメータがある。一つは日数で計測される保有期間 $N$ であり、もう一つは信頼水準 $X$ である。実務的には、ほぼ間違いなく、まずは $N=1$ として分析が行われる。これは1日よりも長い期間に対応した市場変数の動きを直接推定するのに十分なデータがないからである。通常、

$$N \text{ 日 VaR} = 1 \text{ 日 VaR} \times \sqrt{N}$$

と仮定される。ポートフォリオの日々の価値変化が平均ゼロの正規分布の独立同分布で与えられる場合は、この式は厳密に成り立つ。そうでない場合には、この式は近似式である。

ビジネス寸見20.1で述べたように、規制当局は市場リスクに対する銀行の所要自己資本として、10日99%VaRの少なくとも3倍を求めており、上のように10日VaRを計算することにすると、1日99%VaRの $3 \times \sqrt{10} = 9.49$ 倍が所要自己資本の最低額となる。

## 20.2 ヒストリカル・シミュレーション法

VaRを推定する一般的な方法の一つは、ヒストリカル・シミュレーション法である。これは、過去データを直接用いて将来起こりうることを推定する方法である。VaRの保有期間を1日、信頼水準を99%として、501日間の

データから計算するとする。まず最初に、ポートフォリオに影響を与える市場変数を特定する。典型的なのは、為替レート、株価、金利などである。次に、直近の501日間におけるこれらの市場変数の動きを表すデータを収集する。このデータを用いて、今日から明日までの間に起こる変化に関する500のシナリオを作成する。たとえば、シナリオ1ではすべての市場変数の変化率を収集したデータの0日目から1日目の変化率と同じにし、シナリオ2ではそれらを1日目から2日目の変化率と同じにする、等々である。その各シナリオに対して、今日から明日までのポートフォリオの価値の変化を計算する。これによって、ポートフォリオの価値の日次変化に対する確率分布が得られたことになる。したがって、シナリオのなかで5番目に悪い日次変化が分布の1パーセント点に相当する。この損失額がVaRの推定値となる。過去の501日のデータが次の日に起こりうることをよく表していると仮定すると、その企業は99%の確率でVaRの推定値より大きな損失を被ることはないとということになる。

ヒストリカル・シミュレーション法を表20.1と表20.2に例示する。表20.1は直近501日間に観測された市場データである。それらの値は日中の特定の時点（通常は取引終了時点）で観測されたものである。得られたデータの初日をDay 0、次の日をDay 1というように表す。その場合、今日はDay 500、明日はDay 501である。

表20.2の数値は、市場変数の今日から明日への変化率がDay  $i-1$ からDay  $i$  ( $1 \leq i \leq 500$ )への変化率と同じであるとして作成した市場変数の値である。表20.2の1行目は今日から明日への変化率がDay 0からDay 1への変化率と同じであると仮定した場合の市場変数の値であり、2行目はそれらがDay 1からDay 2への変化率と同じと仮定した場合の市場変数の値である、といった具合である。表20.2の500行のそれぞれが、考えている500シナリオの各シナリオになる。

$v_i$ をDay  $i$ における市場変数の値とし、今日がDay  $m$ であるとする。 $i$ 番目のシナリオでは、明日の市場変数の値が、

表20.1 ヒストリカル・シミュレーションによるVaR計算に用いるデータ

| 日   | 市場変数 1 | 市場変数 2 | … | 市場変数 $n$ |
|-----|--------|--------|---|----------|
| 0   | 20.33  | 0.1132 | … | 65.37    |
| 1   | 20.78  | 0.1159 | … | 64.91    |
| 2   | 21.44  | 0.1162 | … | 65.02    |
| 3   | 20.97  | 0.1184 | … | 64.90    |
| ⋮   | ⋮      | ⋮      | ⋮ | ⋮        |
| 498 | 25.72  | 0.1312 | … | 62.22    |
| 499 | 25.75  | 0.1323 | … | 61.99    |
| 500 | 25.85  | 0.1343 | … | 62.10    |

表20.2 表20.1のデータを用いて生成した明日（Day 501）のシナリオ

| シナリオ番号 | 市場変数 1 | 市場変数 2 | … | 市場変数 $n$ | ポートフォリオ価値<br>(100万ドル) | 価値の変化<br>(100万ドル) |
|--------|--------|--------|---|----------|-----------------------|-------------------|
| 1      | 26.42  | 0.1375 | … | 61.66    | 23.71                 | 0.21              |
| 2      | 26.67  | 0.1346 | … | 62.21    | 23.12                 | -0.38             |
| 3      | 25.28  | 0.1368 | … | 61.99    | 22.94                 | -0.56             |
| ⋮      | ⋮      | ⋮      | ⋮ | ⋮        | ⋮                     | ⋮                 |
| 499    | 25.88  | 0.1354 | … | 61.87    | 23.63                 | 0.13              |
| 500    | 25.95  | 0.1363 | … | 62.21    | 22.87                 | -0.63             |

$$v_m = \frac{v_i}{v_{i-1}}$$

になると仮定する。いまの例では  $m=500$  としている。1番目の市場変数の今日の値  $v_{500}$  は25.85で、 $v_0=20.33$ 、 $v_1=20.78$ である。したがって、最初のシナリオでの1番目の市場変数の値は、

$$25.85 \times \frac{20.78}{20.33} = 26.42$$

になる。また、表20.2の最後から2列目の値は、500のシナリオのそれぞれに対する翌日のポートフォリオの価値である。ここで、今日のポートフォリオ価値は2,350万ドルと仮定している。各シナリオでのポートフォリオの価

値とこの値との差をとると、最後の列にある今日から明日へのポートフォリオの価値の変化額が得られる。たとえばシナリオ 1 における変化額は +210,000 ドルで、シナリオ 2 における変化額は -380,000 ドルという具合である。

われわれはポートフォリオの価値変化の分布における 1 パーセント点に興味がある。表 20.2 ではシナリオは全部で 500 なので、表の最後の列で 5 番目に悪い値が 1 パーセント点の推定値になる。別の方法としては、分布の左裾を滑らかにしてより正確な分布の 1 パーセント点の推定値を求めようとする、極値理論 (extreme value theory) として知られる方法を使うこともできる（注 2）。前節で述べたように、 $N$  日 99% VaR は 1 日 VaR を  $\sqrt{N}$  倍して求められる。

いまの一例では、日々の VaR の推定値は直近の 501 日間のデータを用いて毎日更新される。たとえば、Day 501 にはどういうことが行われるかを考えてみよう。すべての市場変数に対して新しい値が取得できるようになり、ポートフォリオの最新の価値が計算されるだろう（注 3）。そして、上に述べた手順に従って Day 1 から Day 501 の市場変数のデータを用いて新しい VaR が計算される（Day 1 から Day 501 のデータで市場変数の変化率に関する 500 個の観測データが得られるので、Day 0 の市場変数データはもはや使われない）。同様に、Day 502 での VaR 算出には Day 2 から Day 502 のデータが用いられる。

### 20.3 モデル・ビルディング法

ヒストリカル・シミュレーション法にかわる主な手法として、モデル・ビルディング法がある。その手法について詳しく述べる前に、ボラティリティ

---

(注 2) P. Embrechts, C. Kluppelberg, and T. Mikosch. *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*. New York : September, 1997 および A.J. McNeil, "Extreme Value Theory for Risk Managers," in *Internal Modeling and CAD II*. London, Risk Books, 1999 (www.math.ethz.ch/~mcneil から取得可能) を参照。

(注 3) ポートフォリオの構成は、Day 500 と Day 501 で変わっているかもしれない。

の計測単位について説明しておく。

## 日次ボラティリティ

オプションの価格付けを行う場合には、時間は年単位で計測されるのが通常であり、資産のボラティリティは年率ボラティリティで表示される。これに対し、モデル・ビルディング法でVaRを計算するときは、時間は日単位で計測されるのが通常であり、資産のボラティリティは日次ボラティリティで表示される。

それでは、オプションの価格付けに用いられる年率ボラティリティとVaR計算に用いられる日次ボラティリティとの間にはどのような関係があるのであろうか。ある資産の年率ボラティリティを $\sigma_{\text{year}}$ 、同じ資産の日次ボラティリティを $\sigma_{\text{day}}$ とする。年間を252営業日と仮定して(13.2)式を用いると、その資産の1年間における連続複利収益率の標準偏差は、 $\sigma_{\text{year}}$ または $\sigma_{\text{day}}\sqrt{252}$ で与えられる。したがって、

$$\sigma_{\text{year}} = \sigma_{\text{day}}\sqrt{252}$$

すなわち、

$$\sigma_{\text{day}} = \frac{\sigma_{\text{year}}}{\sqrt{252}}$$

となり、日次ボラティリティは年率ボラティリティの約6%になることがわかる。

13.4節で示したように、 $\sigma_{\text{day}}$ は1日における資産の価格変化率の標準偏差にほとんど等しいため、VaR計算の目的では等しいと仮定しても問題ない。したがって、資産価格（もしくは他の変数）の日次ボラティリティを1日の変化率の標準偏差として定義する。

以下いくつかの節では、日次ボラティリティと相關の推定値が利用可能であると仮定する。これらの推定値の求め方については第21章で検討する。

## 単一資産の場合

まず、ポートフォリオがマイクロソフト株1,000万ドルの株式1銘柄から

なる非常に簡単な場合について、モデル・ビルディング法による VaR 算出方法を考えよう。10日間での損失が99%信頼水準で上回ることのない損失レベルを求めたいので、 $N=10$ 、 $X=99$ とする。最初は保有期間を 1 日として考える。

マイクロソフトの日次ボラティリティを 2 % (年率で約32%相当) と仮定すると、ポジションの大きさが1,000万ドルなので、ポジションの価値の日次変化額の標準偏差は1,000万ドルの 2 %、すなわち20万ドルになる。

モデル・ビルディング法では、通常、考えている期間における市場変数の変化額の期待値はゼロと仮定する。これは必ずしも正しい仮定ではないが、短期間における市場変数の変化額の期待値はその標準偏差と比較して一般には小さいので、合理的な仮定である。たとえば、マイクロソフトの期待收益率が年率20%であると仮定すると、日次の期待收益率は $0.20/252$ 、すなわち約0.08%となる。一方、収益率の標準偏差は 2 %である。また、10日間の期待收益率は $0.08 \times 10$ 、すなわち約0.8%であるが、収益率の標準偏差は $2\sqrt{10}$ 、すなわち約6.3%である。

ここまでに、1日におけるマイクロソフト株のポートフォリオの価値変化額の標準偏差は20万ドルで、(少なくとも近似的には) 平均はゼロであるということが得られた。ここで変化量が正規分布に従うと仮定する(注4)。本書の最後にある標準正規分布の表から、 $N(-2.33)=0.01$ が得られる。これは、正規分布に従う変数の値が標準偏差の2.33倍以上に減少する確率は 1 % であることを意味している。言い換えると、正規分布に従う変数の値は99% の信頼水準で標準偏差の2.33倍以上には減少しない。したがって、マイクロソフト株1,000万ドルからなるポートフォリオの 1 日 99% VaR は、

$$2.33 \times 200,000 = 466,000 \text{ ドル}$$

になる。

---

(注4) 第13章のオプション価格付けにおける仮定と整合性をとって、マイクロソフトの翌日の株価は対数正規分布に従うと仮定することもできる。1日は非常に短い時間なので、そう仮定することと今日から明日までの株価変化が正規分布に従うという仮定とは、ほとんど区別がつかない。

先に論じたように、 $N$  日 VaR は 1 日 VaR の  $\sqrt{N}$  倍として計算される。したがって、マイクロソフト株ポートフォリオの 10 日 99% VaR は、

$$466,000 \times \sqrt{10} = 1,473,621 \text{ ドル}$$

になる。

次に、AT&T 株を 500 万ドル保有するポジションからなるポートフォリオを考える。AT&T の日次ボラティリティを 1%（年率約 16%）とする。マイクロソフトのときと同様の計算により、AT&T の 1 日におけるポートフォリオの価値変化額の標準偏差は、

$$5,000,000 \times 0.01 = 50,000$$

になる。したがって、変化額が正規分布に従うと仮定すると、1 日 99% VaR は、

$$50,000 \times 2.33 = 116,500 \text{ ドル}$$

になり、10 日 99% VaR は、

$$116,500 \times \sqrt{10} = 368,405 \text{ ドル}$$

となる。

## 2 資産の場合

次に、マイクロソフト株 1,000 万ドルと AT&T 株 500 万ドルからなるポートフォリオを考える。二つの株価の収益率が相関 0.3 の 2 次元正規分布に従っていると仮定する。統計学の一般論から、二つの変数  $X$  と  $Y$  の標準偏差をそれぞれ  $\sigma_x$  と  $\sigma_y$ 、それらの相関係数を  $\rho$  とすると、 $X + Y$  の標準偏差は、

$$\sigma_{x+y} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y}$$

で与えられる。 $X$  をマイクロソフト株のポジションの価値に対する 1 日の変化額、 $Y$  を AT&T 株のポジションの価値に対する 1 日の変化額として、この結果を用いる。

$$\sigma_x = 200,000, \sigma_y = 50,000$$

となるので、2 社の株式からなるポートフォリオの価値に対する 1 日の変化額の標準偏差は、

$$\sqrt{200,000^2 + 50,000^2 + 2 \times 0.3 \times 200,000 \times 50,000} = 220,227$$

になる。変化額の平均はゼロと仮定しているので、変化額は正規分布に従う。したがって、1日99%VaRは、

$$220,227 \times 2.33 = 513,129 \text{ ドル}$$

になる。10日99%VaRはこれを $\sqrt{10}$ 倍して、1,622,657ドルになる。

## 分散効果

上の例では、

1. マイクロソフト株のポートフォリオの10日99%VaRは1,473,621ドル
2. AT&T株のポートフォリオの10日99%VaRは368,405ドル
3. マイクロソフト株とAT&T株からなるポートフォリオの10日99%VaRは1,622,657ドル

となった。

$$(1,473,621 + 368,405) - 1,622,657 = 219,369 \text{ ドル}$$

という金額は分散効果を表している。もしマイクロソフト株とAT&T株が完全に相関していれば、マイクロソフト株とAT&T株からなるポートフォリオのVaRは、マイクロソフト株のポートフォリオのVaRとAT&T株のポートフォリオのVaRを単純に足し合わせたものになる。相関が完全でなければ、リスクはいくらか分散されて小さくなる(注5)。

## 20.4 線形モデル

これまで考えてきた例は、線形モデルを用いたVaR計算の簡単なものである。次に、資産  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )への投資額が  $\alpha_i$  の、 $n$  個の資産からなる価値

(注5) Harry Markowitzは、ポートフォリオ選択における分散効果に関する最初の研究者の1人である。Markowitzは、この研究によって1990年にノーベル賞を受賞している。H. Markowitz, "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, 7, 1, (March 1952): 77-91を参照。

$P$  のポートフォリオを考えよう。資産  $i$  の 1 日の収益率を  $\Delta x_i$  とすると、資産  $i$  への投資額の 1 日における変化額（ドル単位）は  $\alpha_i \Delta x_i$  になるので、ポートフォリオ全体の価値の 1 日における変化額（ドル単位） $\Delta P$  は、

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i \quad (20.1)$$

になる。

前節の例では、第 1 資産（マイクロソフト株）に 1,000 万ドルを投資し、第 2 資産（AT&T 株）に 500 万ドルを投資していたので、100 万ドル単位で表すと  $\alpha_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 5$  となり、

$$\Delta P = 10\Delta x_1 + 5\Delta x_2$$

となる。

(20.1) 式の  $\Delta x_i$  が多次元正規分布に従うとすると、 $\Delta P$  は正規分布に従う。したがって、VaR を算出するには  $\Delta P$  の平均と標準偏差だけを計算すればよい。前節で論じたように、各  $\Delta x_i$  の期待値はゼロと仮定しているので、 $\Delta P$  の平均はゼロになる。

$\Delta P$  の標準偏差を計算するには、第  $i$  資産の日次ボラティリティ  $\sigma_i$  と、資産  $i$  と資産  $j$  の収益率の相関係数  $\rho_{ij}$  が必要である。すなわち、 $\Delta x_i$  の標準偏差を  $\sigma_P$ 、 $\Delta x_i$  と  $\Delta x_j$  の相関係数を  $\rho_{ij}$  とする。このとき、 $\Delta P$  の分散  $\sigma_P^2$  は、

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j$$

で与えられる。この式は、

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1, j < i}^n \rho_{ij} \alpha_i \alpha_j \sigma_i \sigma_j \quad (20.2)$$

と書くこともできる。 $N$  日間における変化額の標準偏差は  $\sigma_P \sqrt{N}$  になるので、 $N$  日 99% VaR は  $2.33 \sigma_P \sqrt{N}$  になる。

前節の例では、 $\sigma_1 = 0.02$ ,  $\sigma_2 = 0.01$ ,  $\rho_{12} = 0.3$  である。すでに述べたように、 $\alpha_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 5$  となるので、

$$\sigma_P^2 = 10^2 \times 0.02^2 + 5^2 \times 0.01^2 + 2 \times 10 \times 5 \times 0.3 \times 0.02 \times 0.01 = 0.0485$$

となり、 $\sigma_P = 0.220$  が得られる。これは 1 日におけるポートフォリオ価値の

変化額（100万ドル単位）の標準偏差である。したがって、10日99%VaRは $2.33 \times 0.220 \times \sqrt{10} = 1,623,000$ ドルになり、前節の計算結果と一致する。

### 金利の取扱い

モデル・ビルディング法を用いる場合、企業収益に影響のある債券価格や金利の一つ一つを別々の市場変数とするのは計算上は現実的に不可能であり、なんらかの単純化が必要となる。一つの方法は、イールドカーブはパラレル・シフトのみすると仮定することである。そうすると、一つの市場変数、すなわちパラレル・シフトの大きさのみを定義すればよくなる。このとき、債券ポートフォリオの価値の変化額は、デュレーションの関係式

$$\Delta P = -DP\Delta y$$

を用いて計算できる。ここで  $P$  はポートフォリオの価値、 $\Delta P$  は1日における  $P$  の変化額、 $D$  はポートフォリオの修正デュレーション、 $\Delta y$  は1日におけるパラレル・シフトの大きさである。

この方法では十分な精度は得られない。したがって、通常用いられるのは、1ヵ月、3ヵ月、6ヵ月、1年、2年、5年、7年、10年、30年といった年限を基準とする満期とし、それらの満期をもつ割引債の価格を市場変数とする方法である。VaRを計算するには、ポートフォリオに含まれる商品から生じるキャッシュフローを基準とする満期に生じるキャッシュフローに変換する必要がある。たとえば、残存期間が1.2年、クーポンが年率6%（年2回払い）の米国国債100万ドルからなるポジションについて考えよう。クーポンは0.2年後、0.7年後、1.2年後に支払われ、元本は1.2年後に支払われる。したがって、まずはこの債券を、残存期間0.2年の割引債が30,000ドルのポジション、残存期間0.7年の割引債が30,000ドルのポジション、および残存期間1.2年の割引債が1,030,000ドルのポジションからなっているとみなす。次に、残存期間0.2年の割引債を満期が1ヵ月と3ヵ月の割引債からなる等価ポジションに置き換え、残存期間0.7年の割引債を満期が6ヵ月と1年の割引債からなる等価ポジションに置き換え、残存期間1.2年の割引債を満期が1年と2年の割引債からなる等価ポジションに置き換える。このよ

うにして、VaR 計算上は、残存期間1.2年の利付債のポジションは、満期が1カ月、3カ月、6カ月、1年、2年の割引債からなるポジションとみなされる。

この方法はキャッシュフロー・マッピング (cash-flow mapping) として知られている。実際の計算方法の一つを章末の付録で説明する。ヒストリカル・シミュレーション法を用いる場合には、キャッシュフロー・マッピングを行う必要はない。その場合には、各シナリオに対して金利期間構造が完全に計算できるからである。

### 線形モデルの適用

線形モデルが最も簡単に適用できるのは、ポートフォリオが株式、債券、外国為替、およびコモディティから構成され、デリバティブを含まない場合である。このとき、ポートフォリオの価値の変化率は、ポートフォリオを構成する資産価格の変化率に依存している。VaR 算出上は、すべての資産価格は自国通貨で表されている。したがって、米国の大手銀行が用いる市場変数には、ドル表示の日経255指数、ドル表示の10年物英ポンド割引債価格などが含まれることになる。

線形モデルで扱えるデリバティブの例としては、外国通貨を購入するフォワード契約がある。満期を  $T$  とすると、この契約は、満期が  $T$  の自国通貨の割引債と満期が  $T$  の外国通貨の割引債との交換とみなすことができる。したがって、VaR 算出上は、フォワード契約は外国債券の買いポジションと自国債券の売りポジションとの組合せとして扱われる。そして、それぞれの債券に対してキャッシュフロー・マッピング法を用いて VaR が計算される。

次に、金利スワップについて考える。第7章で説明したように、金利スワップは固定利付債と変動利付債との交換とみなすことができる。固定利付債は通常の利付債である。変動利付債は次回利払日直後の価値が額面に等しくなる。このことから、次回利払日に満期を迎える割引債とみなすことができる。したがって、金利スワップも債券の買いポジションと売りポジションと

の組合せからなるポートフォリオに帰着できるので、キャッシュフロー・マッピング法を用いて VaR が計算できる。

### 線形モデルとオプション

オプションが含まれるポートフォリオに対して、線形モデルを用いる方法を考えよう。最初に、現在の株価が  $S$  の単一銘柄の株式に対するオプションからなるポートフォリオについて考える。このポジションの（第17章に述べた方法で計算される）デルタが  $\delta$  であると仮定する（注6）。 $\delta$  はポートフォリオの価値の  $S$  に関する変化率である。したがって、

$$\delta = \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

すなわち、

$$\Delta P = \delta \Delta S \quad (20.3)$$

が近似的に成り立つ。ここで、 $\Delta S$  はドル表示での株価の 1 日の変化額、 $\Delta P$  は前と同様にドル表示でのポートフォリオの 1 日の変化額である。 $\Delta x$  を株価の 1 日の変化率とすると、

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

である。これより、 $\Delta P$  と  $\Delta x$  との間には、近似的に、

$$\Delta P = S \delta \Delta x$$

という関係が成り立つ。オプションの原資産となっている複数の市場変数にポジションが依存している場合でも、 $\Delta P$  と  $\Delta x_i$  との間の近似的な線形関係を同様に導出できる。それを用いて、

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \Delta x_i \quad (20.4)$$

と表すことができる。ここで、 $S_i$  は  $i$  番目の市場変数の値、 $\delta_i$  は  $i$  番目の市

(注 6) ポートフォリオに対するデルタとガンマには一般に  $\Delta$  と  $\Gamma$  を用いるが、本節と次節では  $\Delta$  を別の意味に使うため、ギリシャ文字の小文字の  $\delta$  と  $\gamma$  を用いることにする。

場変数に関するポートフォリオのデルタである。これは、(20.1)式

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i \quad (20.5)$$

で  $\alpha_i = S_i \delta_i$  としたものに対応している。したがって、(20.2)式を用いて  $\Delta P$  の標準偏差を計算することができる。

【例20.1】

マイクロソフト株と AT&T 株のオプションからなるポートフォリオについて考える。マイクロソフト株のオプションのデルタを1,000, AT&T 株のオプションのデルタを20,000, マイクロソフトの株価を120ドル, AT&T の株価を30ドルであるとする。(20.4)式から,

$$\Delta P = 120 \times 1,000 \times \Delta x_1 + 30 \times 20,000 \times \Delta x_2$$

すなわち,

$$\Delta P = 120,000 \Delta x_1 + 600,000 \Delta x_2$$

が近似的に成り立つ。ここで、 $\Delta x_1$  と  $\Delta x_2$  はそれぞれマイクロソフトと AT&T の1日の株価の変化率であり、 $\Delta P$  はその結果生じるポートフォリオの価値の変化額である(ポートフォリオは、マイクロソフトに120,000ドル、AT&T に600,000ドル投資したものと同等であると仮定されている)。マイクロソフトの日次ボラティリティを2%, AT&T の日次ボラティリティを1%，両者の日次変化額の相関を0.3と仮定すると、 $\Delta P$  の標準偏差(千ドル単位)は、

$$\begin{aligned} &\sqrt{(120 \times 0.02)^2 + (600 \times 0.01)^2 + 2 \times 120 \times 0.02 \times 600 \times 0.01 \times 0.3} \\ &= 7.099 \end{aligned}$$

になる。したがって、 $N(-1.65) = 0.05$ であるから、5日95%VaRは、

$$1.65 \times \sqrt{5} \times 7,099 = 26,193 \text{ ドル}$$

になる。

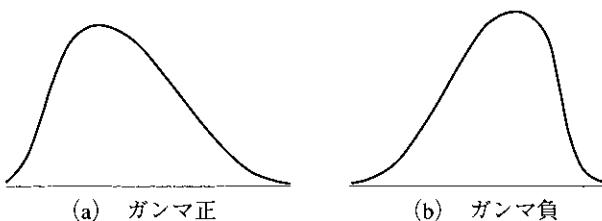
## 20.5 2次のモデル

ポートフォリオにオプションが含まれている場合、線形モデルは粗い近似でしかない。そのモデルにはポートフォリオのガンマが考慮されていないからである。第17章で論じたように、デルタとは市場変数に関するポートフォリオの価値の変化率であり、ガンマとは市場変数に関するデルタの変化率である。したがって、ガンマはポートフォリオの価値と市場変数との間にある関係の曲率を表している。

図20.3は、ゼロでないガンマがポートフォリオの価値の確率分布に与える影響を例示したものである。ガンマが正のときは確率分布は正の側に歪み、ガンマが負のときは確率分布は負の側に歪む傾向がある。図20.4と図20.5に、このようになる理由を図解する。図20.4は、コール・オプションの買いポジションの価値と原資産価格との関係を示している。コールの買いは正のガンマをもつオプションのポジションの一例である。図をみると、翌日の原資産価格の確率分布が正規分布であるとすると、オプションの価格分布は正の側に歪むことがわかる(注7)。図20.5は、コール・オプションの売りポジションの価値と原資産価格との関係を示している。コールの売りポジションのガンマは負である。この場合は、翌日の原資産価格が正規分布に従うとすると、オプション・ポジションの価値は負の側に歪むことがわかる。

ポートフォリオに対するVaRは、ポートフォリオの価値の確率分布にお

図20.3 ポートフォリオの価値の確率分布



(注7) 脚注4で述べたように、VaR計算上は、対数正規分布の近似として正規分布を用いることができる。

図20.4 原資産価格の分布が正規分布の場合のコールの買いポジションの価値分布

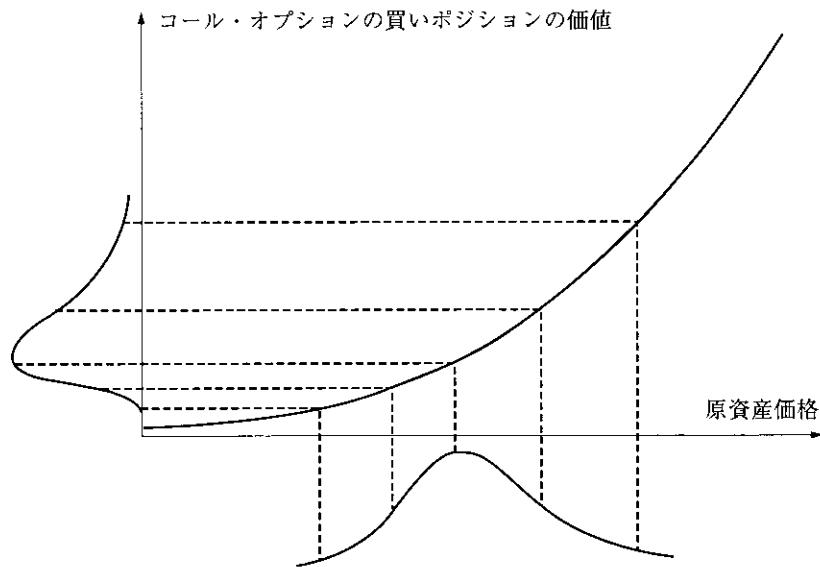
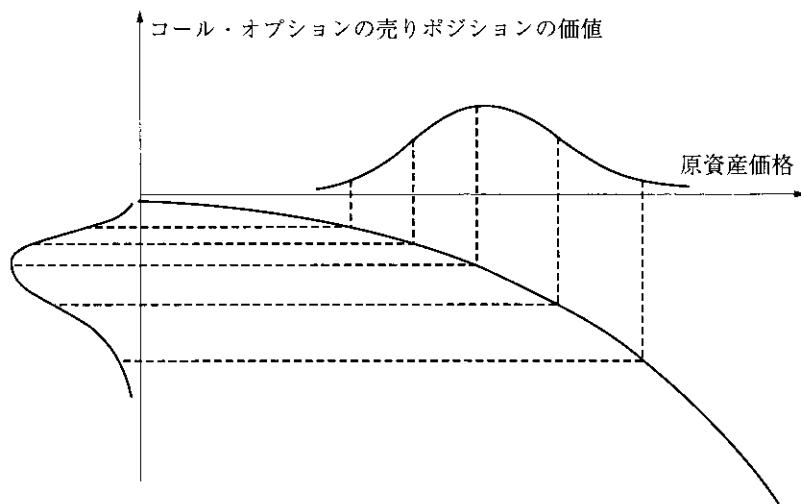


図20.5 原資産価格の分布が正規分布の場合のコールの売りポジションの価値分布



ける左裾に大きく依存している。たとえば、信頼水準を99%としたとき、VaRは分布の左裾が1%となる位置の値である。図20.3(a)と図20.4からわかるように、ガンマが正のポートフォリオでは、正規分布に比べて左裾が大きくなない。したがって、 $\Delta P$ が正規分布に従うと仮定して計算すると、VaRは高すぎる値になる。同様に、図20.3(b)と図20.5からわかるように、ガンマが負のポートフォリオでは、正規分布に比べて左裾が大きくなる。そのため、 $\Delta P$ が正規分布に従うと仮定して計算すると、VaRは低すぎる値になる。

線形モデルを用いる場合よりも正確なVaRの推定値を得るためにには、デルタとガンマを用いた $\Delta P$ と $\Delta x_i$ の関係式を使えばよい。価格が $S$ の単一資産に依存するポートフォリオを考えよう。ポートフォリオのデルタを $\delta$ 、ガンマを $\gamma$ とおくと、第17章の付録より、

$$\Delta P = \delta \Delta S + \frac{1}{2} \gamma (\Delta S)^2$$

は(20.3)式の近似の精度をよくしたものになっている(注8)。ここで、

$$\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$$

とおくと、上式は、

$$\Delta P = S \delta \Delta x + \frac{1}{2} S^2 \gamma (\Delta x)^2 \quad (20.6)$$

になる。もっと一般に、原資産の市場変数が $n$ 個あり、ポートフォリオに含まれる各商品が一つの市場変数にしか依存しない場合には、(20.6)式は、

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} S_i^2 \gamma_i (\Delta x_i)^2$$

に置き換わる。ここで、 $S_i$ は*i*番目の市場変数の値、 $\delta_i$ と $\gamma_i$ はそれぞれ*i*番

(注8) 第17章の付録のテイラー展開において $\Delta t$ より高次の項を無視すると、

$$\Delta P = \Theta \Delta t + \delta \Delta S + \frac{1}{2} \gamma (\Delta S)^2$$

が得られる。実際には、 $\Theta \Delta t$ の項は非常に小さな値となるので、通常は無視される。

目の市場変数に関するポートフォリオのデルタとガンマである。さらに、ポートフォリオに含まれる各資産が一つ以上の市場変数に依存している場合には、この式をもつと一般化した、

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n S_i \delta_i \Delta x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} S_i S_j \gamma_{ij} \Delta x_i \Delta x_j \quad (20.7)$$

に置き換えればよい。ここで、 $\gamma_{ij}$ は「クロス・ガンマ」と呼ばれる、

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j}$$

で定義される量である。(20.7)式は(20.5)式ほど簡単には計算できないが、それを用いて $\Delta P$ のモーメントを計算することができる。そのモーメントから、Cornish-Fisher 展開として知られる統計学での手法を用いれば、確率分布のパーセント点を推定することができる(注9)。

## 20.6 モンテカルロ・シミュレーション

今まで述べてきた手法のかわりに、モンテカルロ・シミュレーションによって $\Delta P$ の確率分布を生成する方法で、モデル・ビルディング法を実装することもできる。ポートフォリオの1日 VaR を計算したいとして、その手順を説明する。

1. 市場変数の現在の値を用いて、通常の方法で今日のポートフォリオの価値を算出する。
2.  $\Delta x_i$ の従う多次元正規分布から標本を一組取り出す(注10)。
3. 標本として取り出された $\Delta x_i$ の値を用いて、各市場変数の1日後の

(注9) モーメントの計算と Cornish-Fisher 展開の利用方法の詳細については、著者の Web サイトのテクニカルノート10を参照されたい。原資産変数が一つの場合は、 $E(\Delta P) = 0.5S^2\gamma\sigma^2$ 、 $E(\Delta P^2) = S^2\delta^2\sigma^2 + 0.75S^4\gamma^2\sigma^4$ 、 $E(\Delta P^3) = 4.5S^4\delta^2\gamma\sigma^4 + 1.875S^6\gamma^3\sigma^6$ である。ここで  $S$  は変数の値、 $\sigma$  は日次ボラティリティである。DerivaGem Application Builder の Sample Application E には、この場合のCornish-Fisher 展開手法が実装されている。

(注10) 一つの方法が第19章に与えられている。

値を求める。

4. 1日後のポートフォリオの価値を通常の方法で再計算する。
5. ステップ4の値からステップ1で計算した値を差し引いて、 $\Delta P$  の標本を得る。
6. ステップ2からステップ5までを何度も繰り返し、 $\Delta P$  の確率分布を生成する。

VaRは、 $\Delta P$ の確率分布のあるパーセント点として計算される。たとえば、いま述べた方法によって、 $\Delta P$ の異なる5,000個の標本を計算したとしよう。この場合、1日99%VaRは50番目に悪い $\Delta P$ の標本値、1日95%VaRは250番目に悪い $\Delta P$ の標本値、等々となる(注11)。また、N日VaRは、通常、1日VaRを $\sqrt{N}$ 倍した値になると仮定されている(注12)。

モンテカルロ・シミュレーションの欠点は、企業の保有する(何十万もの異なる商品からなることもある)ポートフォリオを、繰り返し完全に再評価しなければならないため、計算速度が遅くなるということである(注13)。計算速度を上げる一つの方法は、 $\Delta P$ と $\Delta x_i$ の関係を(20.7)式で表すことができると仮定することである。そうすることで、ステップ2からステップ5へ直接進むことができ、ポートフォリオを完全に再評価する必要を避けることができる。この方法は「部分シミュレーション法」と呼ばれている。

## 20.7 それぞれの手法の比較

ここまで、VaRを推定する二つの手法として、ヒストリカル・シミュレーション法とモデル・ビルディング法について検討してきた。モデル・ビ

---

(注11) ヒストリカル・シミュレーション法の場合と同様に、極値理論を用いて「裾の平滑化」を行い、極値パーセント点のよりよい推定値を得ることもできる。

(注12) この仮定は、ポートフォリオがオプションを含む場合には、近似的にしか成り立たない。しかし、実務では、ほとんどのVaR計算方法でこのことが仮定されている。

(注13) ポートフォリオの再評価回数を制限する方法が次の論文に提案されている。F. Jamshidian and Y. Zhu, "Scenario simulation model : theory and methodology," *Finance and Stochastics*, 1 (1997) : 43-67.

ルディング法の長所は、結果が素早く求められるという点であり、次章で述べるようなボラティリティの更新スキームとも組み合わせやすい。モデル・ビルディング法の主な短所は、市場変数が多次元正規分布に従うと仮定していることである。実際には、市場変数の日次変化の分布は、しばしば正規分布とはきわめて異なる分布になる（表18.1を参照）。

ヒストリカル・シミュレーション法には、ヒストリカル・データを用いて市場変数の同時分布を求めているという長所がある。また、キャッシュフロー・マッピングも必要としていない（章末問題20.2を参照）。ヒストリカル・シミュレーション法の主な短所は、計算時間が遅いことと、ボラティリティの更新スキームを容易に利用できることである（注14）。

モデル・ビルディング法の短所の一つに、デルタの値が小さなポートフォリオに適用した場合、よい結果が得られない傾向がある、ということもある（章末問題20.21を参照）。

## 20.8 ストレス・テストとバック・テスト

VaRの計算に加えて、多くの企業では「ストレス・テスト」と呼ばれるものを実行している。ストレス・テストは、過去10年から20年の間に観測されたいくつかの最も激しい市場変動と同様の事象が発生した場合に、現在のポートフォリオがどのような影響を受けるかを推定するものである。

たとえば、米国株価の極端な変動による影響をテストする場合には、すべての市場変数の変化率は1987年10月19日（S&P500が22.3標準偏差だけ動いた日）の変化率に等しいと仮定して計算が行われたりする。これがあまりに極端すぎると考えられる場合には、すべての市場変数の変化率として1988年1月8日（S&P500が6.8標準偏差だけ動いた日）の変化率が用いられることがある。

---

(注14) ボラティリティの更新スキームを組み合わせてヒストリカル・シミュレーション法を適用する方法については、J. Hull and A. White, "Incorporating volatility updating into the historical simulation method for value-at-risk," *Journal of Risk*, 1, 1 (1998) : 5-19 を参照。

る。また、英国金利の極端な変動による影響をテストする際には、すべての市場変数の変化率は1992年4月10日（10年物債券イールドが7.7標準偏差だけ動いた日）の変化率に等しいと仮定して計算が行われたりする。

ストレス・テストで用いるシナリオは、経営陣によって決められる場合もある。現時点での経済環境やグローバル経済下での不確実な事象を想定した極端なシナリオを設定するために、経営陣に対し、定例会議での「ブレイン・ストーミング」の実施を要請するといった方法も考えられる。

ストレス・テストは、市場変数に対して仮定された確率分布からはほとんどありえないような極端な事象が、実際にはときどき発生するという現実を考慮する方法である。たとえば、市場変数の1日の変動が5標準偏差の値をとることは、極端な事象の一例である。正規分布の仮定のもとでは、そうした事象は7,000年に一度ぐらいしか起こらないことになる。しかし、実際には、10年に1回か2回の割合で1日の変動が5標準偏差を超えるということも珍しくない。

VaR計算に用いられる方法が何であろうと、「バック・テスト」が現実のチェックとして重要である。これは、VaRの推定値が過去においてどれだけよく適合しているかをテストするものである。1日99%VaRを計算しているとしよう。バック・テストは、1日の損失額が1日99%VaRを超える回数を検証するものである。その回数が全日数の1%程度であれば、VaRの計算方法としてはかなり満足のいくものであろう。もし、たとえば全日数の7%であれば、その方法は疑わしいということになる。

## 20.9 主成分分析

リスクが互いに強い相関をもつ市場変数群から生じている場合には、主成分分析を用いるのが一つの方法である。この分析は、市場変数の変動の過去データを用いて、その変動を説明する成分もしくはファクターを定義しようというものである。

この方法について、例を用いてわかりやすく説明する。市場変数として、

表20.3 米国国債のファクター・ローティング

|      | PC 1 | PC 2  | PC 3  | PC 4  | PC 5  | PC 6  | PC 7  | PC 8  | PC 9  | PC10  |
|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3カ月  | 0.21 | -0.57 | 0.50  | 0.47  | -0.39 | -0.02 | 0.01  | 0.00  | 0.01  | 0.00  |
| 6カ月  | 0.26 | -0.49 | 0.23  | -0.37 | 0.70  | 0.01  | -0.04 | -0.02 | -0.01 | 0.00  |
| 12カ月 | 0.32 | -0.32 | -0.37 | -0.58 | -0.52 | -0.23 | -0.04 | -0.05 | 0.00  | 0.01  |
| 2年   | 0.35 | -0.10 | -0.38 | 0.17  | 0.04  | 0.59  | 0.56  | 0.12  | -0.12 | -0.05 |
| 3年   | 0.36 | 0.02  | -0.30 | 0.27  | 0.07  | 0.24  | -0.79 | 0.00  | -0.09 | -0.00 |
| 4年   | 0.36 | 0.14  | -0.12 | 0.25  | 0.16  | -0.63 | 0.15  | 0.55  | -0.14 | -0.08 |
| 5年   | 0.36 | 0.17  | -0.04 | 0.14  | 0.08  | -0.10 | 0.09  | -0.26 | 0.71  | 0.48  |
| 7年   | 0.34 | 0.27  | 0.15  | 0.01  | 0.00  | -0.12 | 0.13  | -0.54 | 0.00  | -0.68 |
| 10年  | 0.31 | 0.30  | 0.28  | -0.10 | -0.06 | 0.01  | 0.03  | -0.23 | -0.63 | 0.52  |
| 30年  | 0.25 | 0.33  | 0.46  | -0.34 | -0.18 | 0.33  | -0.09 | 0.52  | 0.26  | -0.13 |

表20.4 ファクター・スコアの標準偏差 (ペースス・ポイント)

| PC 1  | PC 2 | PC 3 | PC 4 | PC 5 | PC 6 | PC 7 | PC 8 | PC 9 | PC10 |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 17.49 | 6.05 | 3.10 | 2.17 | 1.97 | 1.69 | 1.27 | 1.24 | 0.80 | 0.79 |

満期が3カ月から30年までの10種類の米国国債レートを考えよう。表20.3と表20.4は、それらの市場変数に対して、1989年から1995年までの1,543個の日次データを用いてFryeが行った分析結果である(注15)。表20.3の最初の列の値は、対象としている国債レートの満期である。残りの10列には、レートの変動を説明する10個のファクター（すなわち主成分）が示されている。第1ファクターはPC 1と表記されている列に示されており、イールドカーブのパラレル・シフトに大体対応している。第1ファクターが1単位増加すると、3カ月レートは0.21ペースス・ポイント増加し、6カ月レートは0.26ペースス・ポイント増加するなどである。第2ファクターはPC 2と表記されている列に示されており、イールドカーブの「ねじれ」あるいは「傾き」に対応している。このファクターが変化すると、3カ月から2年までのレートは同一方向に動き、3年から30年までのレートはその反対方向に動

(注15) J. Frye, "Principals of Risk: Finding VAR through Factor-Based Interest Rate Scenarios," in *VAR: Understanding and Applying Value at Risk*, 275-88. London: Risk Publications, 1997を参照。

く。第3ファクターはイールドカーブの「曲がり」に対応している。このファクターが変化すると、イールドカーブの短期レートと長期レートは同一方向に動き、中期レートはその反対方向に動く。特定のファクターに対する金利の動きは、「ファクター・ローディング」として知られている。この例では、3カ月レートに対する第1ファクターのファクター・ローディングは0.21である(注16)。

10種類のレートと10個のファクターがあるので、任意の日における金利の変化量は、10個の連立方程式を解くことによって、常にファクターの線形和として表すことができる。それぞれの日の金利変化に対する各ファクターの値は、その日の「ファクター・スコア」として知られている。

ファクターの重要度は、そのファクター・スコアの標準偏差によって計測される。この例でのファクター・スコアの標準偏差が表20.4に示されており、ファクターは重要度の大きい順に並べられている。表20.4の数値の単位はペーシス・ポイントである。したがって、第1ファクターが1標準偏差だけ変化すると、3カ月レートは $0.21 \times 17.49 = 3.67$ ペーシス・ポイント変化し、6カ月レートは $0.26 \times 17.49 = 4.55$ ペーシス・ポイント変化する、などとなる。

ファクターをどのように決定するかについての技術的な詳細は、ここでは触れない。ファクターはファクター・スコア同士が無相関になるように選ばれている、ということを知っておけば十分である。たとえば、この例では、第1ファクターのスコア(パラレル・シフトの量)は、第2ファクターのスコア(ねじれの量)と1,543日にわたって無相関である。ファクター・スコアの分散(すなわち、標準偏差の2乗)の和はデータの全分散に等しくなる。表20.4から、元のデータの全分散(すなわち、3カ月レートの観測値の分散、6カ月レートの観測値の分散などの合計)は、

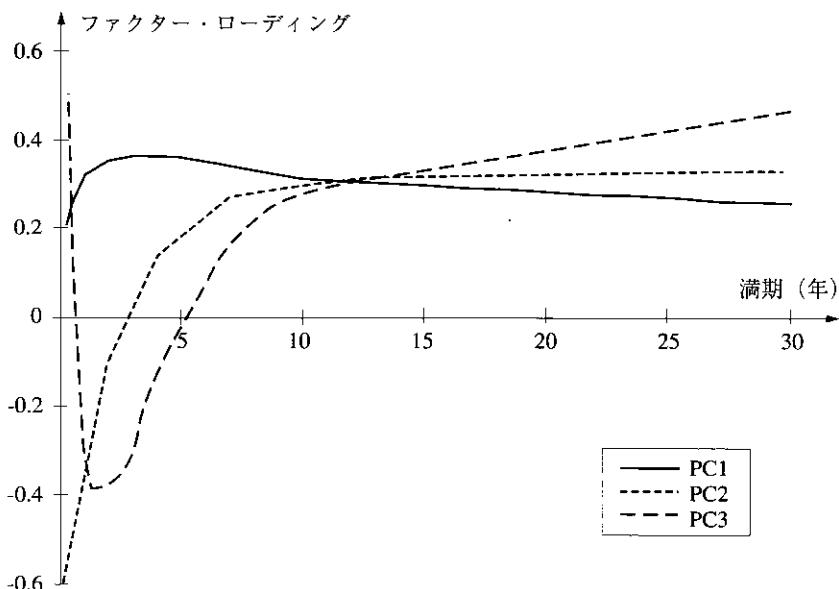
$$17.49^2 + 6.05^2 + 3.10^2 + \cdots + 0.79^2 = 367.9$$

になる。これより、第1ファクターは、元のデータの分散に対して、

---

(注16) 各ファクターに対して、ファクター・ローディングの2乗和は1になるという性質がある。

図20.6 イールドカーブの変動を説明する重要な三つのファクター



$17.49^2/367.9 = 83.1\%$ を説明しているとみなすことができる。同様に、最初の二つのファクターで、元のデータの分散に対して、 $(17.49^2 + 6.05^2)/367.9 = 93.1\%$ を説明しており、第3ファクターでさらに分散の2.8%が説明されることになる。これより、金利変動によるリスクのほとんどは、最初の二つもしくは三つのファクターで説明されることがわかる。このことは、金利に依存した商品からなるポートフォリオのリスクは、10種類の金利をすべて考えるかわりに、二つないし三つのファクターの動きに関連づけられる、ということを示唆している。図20.6に、表20.3の三つの重要なファクターのグラフを示した(注17)。

(注17) 任意の国のほとんどのイールドカーブに対して、主成分分析を用いた変動要因分析を行うと、ファクターの性質と全リスクに対するそれらの説明力に関して、ここで述べたのと同様の結果が得られる。

## 主成分分析を用いた VaR の計算

VaR 計算に主成分分析がどのように用いられるかを説明するために、表 20.5 に示されるような金利変動に対するエクスポージャーをもつポートフォリオを考える。したがって、このポートフォリオの価値は、たとえば 1 年物金利が 1 ベーシス・ポイント変化すると 1,000 万ドル増加し、2 年物金利が 1 ベーシス・ポイント変化すると価値は 400 万ドル増加する。金利の動きを最初の二つのファクターでモデル化する（前述したように、二つのファクターで金利変動の 93.1% が説明できる）。表 20.3 のデータを用いて計算すると、第 1 ファクターに対するエクスポージャー（ファクター・スコアの 1 ベーシス・ポイント当りの変化額を 100 万ドル単位で表示）は、

$$10 \times 0.32 + 4 \times 0.35 - 8 \times 0.36 - 7 \times 0.36 + 2 \times 0.36 = -0.08$$

になり、第 2 ファクターに対するエクspoージャーは、

$$10 \times (-0.32) + 4 \times (-0.10) - 8 \times 0.02 - 7 \times 0.14 + 2 \times 0.17 = -4.40$$

になる。

$f_1$  と  $f_2$  をファクター・スコア（ベーシス・ポイント単位）とすると、ポートフォリオの価値の変化額は、かなりよい精度で、

$$\Delta P = -0.08f_1 - 4.40f_2$$

で与えられる。ファクター・スコアは無相関であり、その標準偏差は表 20.4 に与えられている。したがって、 $\Delta P$  の標準偏差は、

$$\sqrt{0.08^2 \times 17.49^2 + 4.40^2 \times 6.05^2} = 26.66$$

になる。これより、1 日 99% VaR は  $26.66 \times 2.33 = 62.12$  になる。表 20.5 のようなエクspoージャーをもつポートフォリオでは、第 1 ファクターに対するエクspoージャーはきわめて小さく、第 2 ファクターに対するエクspoージャーは大きい。したがって、そのようなポートフォリオに対してファク

表 20.5 金利が 1 ベーシス・ポイント変化したときのポートフォリオの価値の変化  
(単位: 100 万ドル)

| 1 年物金利 | 2 年物金利 | 3 年物金利 | 4 年物金利 | 5 年物金利 |
|--------|--------|--------|--------|--------|
| +10    | +4     | -8     | -7     | +2     |

ターを一つしか用いずに VaR を計算すると、VaR を著しく過小評価することになる（章末問題20.13を参照）。20.4節で説明したデュレーションに基づいて金利に対するエクスポージャーを求める方法も、イールドカーブのパラレル・シフトという一つのファクターしか考慮していないので、VaR をかなり過小評価するおそれがある。

主成分分析は、理論的には金利以外の市場変数に対しても用いることができる。金融機関が多く異なる株価指数に対してエクスポージャーをもっているとする。主成分分析を使って指標の変動を記述するファクターを特定し、指標のかわりに最も重要なファクターを用いて VaR 分析を行うことも可能である。主成分分析の有効性は、対象とする市場変数の間にどの程度強い相関があるかに依存している。

本章のはじめに説明したように、VaR は、ポートフォリオの実際の変化額を市場変数の変化率 ( $\Delta x_i$ ) で表す関係式を用いて計算されることが多い。したがって、VaR 計算の目的で主成分分析を行う時は、市場変数の実際の変化量ではなく、その変化率に対して分析を行うのが適切である。

## 要 約

バリュー・アット・リスク (VaR) を計算する目的は、「 $X\%$ の確率で、 $N$  日後に  $V$  ドル以上の損失を被ることはない」という形でリスクを表現することである。この変数  $V$  が VaR であり、 $X\%$  は信頼水準、 $N$  日は保有期間である。

VaR を計算する一つの方法はヒストリカル・シミュレーション法である。この方法では、まず、すべての市場変数に対してある期間の日次変動データを蓄積したデータベースを作成する。シミュレーションの最初の試行は、各市場変数の変化率はデータベースにある 1 日目の変化率に等しいと仮定して行う。2 番目の試行は、各市場変数の変化率はデータベースにある 2 日目の

変化率に等しいと仮定して行う。このように試行を繰り返す。シミュレーションの各試行に対してポートフォリオの価値の変化  $\Delta P$  を計算し、得られた  $\Delta P$  の確率分布におけるパーセント点として VaR が求まる。

モデル・ビルディング法という、もう一つの方法がある。この方法は、次の二つを仮定することによって、比較的簡単に VaR を計算しようというものである。

1. ポートフォリオの価値の変化 ( $\Delta P$ ) は、市場変数の変化率の 1 次結合で表される。

2. 市場変数の変化率は多次元正規分布に従う。

このとき、 $\Delta P$  の確率分布は正規分布になり、 $\Delta P$  の標準偏差を市場変数のボラティリティと相関係数で表す解析式が存在する。したがって、VaR は正規分布のよく知られた性質から計算できるようになる。

オプションを含むポートフォリオの場合には、 $\Delta P$  は市場変数の変化率の 1 次結合で表すことができない。ポートフォリオのガンマがわかれば、 $\Delta P$  と市場変数の変化率との関係を表す 2 次の近似式が導出できる。それを用いて、モンテカルロ・シミュレーションで VaR を計算することもできる。

次章では、ボラティリティと相関の推定方法について検討する。

## 参考文献

- Artzner P., F. Delbaen, J.-M. Eber, and D. Heath. "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, 9 (1999) : 203-28.
- Basak, S., and A. Shapiro. "Value-at-Risk-Based Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices," *Review of Financial Studies*, 14, 2 (2001) : 371-405.
- Beder, T. "VaR: Seductive but Dangerous," *Financial Analysts Journal*, 51, 5 (1995) : 12-24.
- Boudoukh, J., M. Richardson, and R. Whitelaw. "The Best of Both Worlds," *Risk*, May 1998 : 64-67.

- Dowd, K. *Beyond Value at Risk : The New Science of Risk Management*. New York : Wiley, 1998.
- Duffie, D., and J. Pan. "An Overview of Value at Risk," *Journal of Derivatives*, 4, 3 (Spring 1997) : 7-49.
- Embrechts, P., C. Kluppelberg, and T. Mikosch. *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*. New York : Springer, 1997.
- Frye, J. "Principals of Risk : Finding VAR through Factor-Based Interest Rate Scenarios," in *VAR : Understanding and Applying Value at Risk*, 275-88. London : Risk Publications, 1997.
- Hendricks, D. "Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data," *Economic Policy Review*, Federal Reserve Bank of New York, 2 (April 1996) : 39-69.
- Hopper, G. "Value at Risk : A New Methodology for Measuring Portfolio Risk," *Business Review*, Federal Reserve Bank of Philadelphia, July/August 1996 : 19-29.
- Hua, P., and P. Wilmott. "Crash Courses," *Risk*, June 1997 : 64-67.
- Hull, J.C., and A. White. "Value at Risk When Daily Changes in Market Variables Are Not Normally Distributed," *Journal of Derivatives*, 5 (Spring 1998) : 9-19.
- Hull, J.C., and A. White. "Incorporating Volatility Updating into the Historical Simulation Method for Value at Risk," *Journal of Risk*, 1, 1 (1998) : 5-19.
- Jackson, P., D.J. Maude, and W. Perraudin. "Bank Capital and Value at Risk," *Journal of Derivatives*, 4, 3 (Spring 1997) : 73-90.
- Jamshidian, F., and Y. Zhu. "Scenario Simulation Model : Theory and Methodology," *Finance and Stochastics*, 1 (1997) : 43-67.
- Jorion, P. *Value at Risk*, 3rd edn. McGraw-Hill, 2007.
- Longin, F.M. "Beyond the VaR," *Journal of Derivatives*, 8, 4 (Summer 2001) : 36 -48.
- Marshall, C., and M. Siegel. "Value at Risk : Implementing a Risk Measurement Standard," *Journal of Derivatives*, 4, 3 (Spring 1997) : 91-111.
- McNeil, A.J. "Extreme Value Theory for Risk Managers," in *Internal Modeling and CAD II*, London : Risk Books, 1999. See also : [www.math.ethz.ch/~mcneil](http://www.math.ethz.ch/~mcneil).
- Neftci, S.N. "Value at Risk Calculations, Extreme Events and Tail Estimation,"

*Journal of Derivatives*, 7, 3 (Spring 2000) : 23-38.

Rich, D. "Second Generation VaR and Risk-Adjusted Return on Capital,"  
*Journal of Derivatives*, 10, 4 (Summer 2003) : 51-61.

### 章末問題

- 20.1** 資産 A への投資額が100,000 ドル、資産 B への投資額が100,000 ドルであるポジションを考える。両資産の日次ボラティリティはともに 1 %、両資産の収益率の相関係数は0.3とする。このポートフォリオの 5 日99%VaR を求めよ。
- 20.2** モデル・ビルディング法を用いて VaR を計算する場合に、金利に依存した商品の取扱い方を三つ述べよ。また、ヒストリカル・シミュレーション法を用いて VaR を計算する場合には、それらの商品をどのように扱うか。
- 20.3** ある金融機関が米ドル-英ポンド為替レートのオプションからなるポートフォリオを保有している。このポートフォリオのデルタは 56.0 であり、現在の為替レートは1.5000である。このとき、ポートフォリオ価値の変化額と為替レートの変化率との関係を 1 次式で近似せよ。また、それを用いて、為替レートの日次ボラティリティが 0.7% のときの10日99%VaR を求めよ。
- 20.4** 前問のポートフォリオのガンマは16.2であるとする。このことを用いて、ポートフォリオ価値の変化額と為替レートの変化率との関係を表す近似式を導出せよ。
- 20.5** ポートフォリオの価値の日次変化が、主成分分析を用いて抽出した二つのファクターの 1 次式でかなりよく近似できているとする。このポートフォリオの第 1 ファクターに関するデルタは 6、第 2 ファクターに関するデルタは -4 である。また、ファクターの標準偏差

はそれぞれ20および8である。このとき、5日90%VaRを求めよ。

- 20.6** ある企業が、株式、債券、外国為替、およびコモディティのポジションからなるポートフォリオを保有しているとする。このポートフォリオにはデリバティブは含まれていない。このとき、(a)線形モデル、(b)ヒストリカル・シミュレーションモデルのそれぞれに対して、VaR計算の際に用いられる仮定について説明せよ。
- 20.7** VaR計算の際に行われる、金利スワップを基準とする満期の割引債からなるポートフォリオに対応づける方法について説明せよ。
- 20.8** VaRと期待ショートフォールとの違いについて説明せよ。
- 20.9** オプションを含むポートフォリオに対して線形モデルを用いてVaRを計算した場合、それは概算値にすぎない。その理由について説明せよ。
- 20.10** 章末付録のキャッシュフロー・マッピングの例において、残存期間0.3年の割引債が満期3カ月の割引債37,397ドルと満期6カ月の割引債11,793ドルのポジションに対応づけられることを確認せよ。
- 20.11** 5年物レートを年率6%，7年物レートを年率7%，5年物割引債の日次ボラティリティを年率0.5%，7年物割引債の日次ボラティリティを年率0.58%とする。また、二つの債券の日次収益率の相関係数を0.6とする。章末付録の手法を用いて、6.5年後に受け取る1,000ドルのキャッシュフローを、5年物債と7年物債のポジションに対応づけよ。その結果、6.5年後のキャッシュフローと等価な5年後と7年後のキャッシュフローはどのようになるか。
- 20.12** ある企業が、100万ポンドを150万ドルで購入するフォワード契約を数年前に結んでいる。その契約の満期まであと6カ月になっている。満期6カ月のポンド建て割引債の（価格をドル換算で考えたときの）日次ボラティリティは0.06%，満期6カ月のドル建て割引債の日次ボラティリティは0.05%である。この二つの債券の収益率の相関係数は0.8である。現在の為替レートは1.53である。このフォワード契約のドルでの価値の1日当りの変化額の標準偏差を計算せよ。また、

10日99%VaRはいくらか。ただし、ポンドおよびドルに対する6カ月金利はともに連続複利で年率5%であるとする。

- 20.13** 本文では、表20.5の例について二つのファクターを用いてVaRの推定値を計算している。(a)一つのファクター、(b)三つのファクターを用いて計算した場合、VaRの推定値はどのように変化するか。
- 20.14** 銀行がある資産のオプションからなるポートフォリオを保有している。ポートフォリオのデルタは-30、ガンマは-5である。これらの数字からわかることは何かを説明せよ。また、この資産の価格を20、日次ボラティリティを1%とする。DerivaGemソフトウェアのApplication BuilderのSample Application Eを作り変えて、VaRを計算せよ。
- 20.15** 問題20.14で、ポートフォリオのベガは、ベガを年率ボラティリティ1%の変化に対する価値変化とするとき、-2であるとする。1日におけるポートフォリオの価値の変化額をデルタ、ガンマ、およびベガで表すモデルを導け。また、得られたモデルを用いてVaRの推定値を計算する方法について、詳しい計算を行わずに説明せよ。

## 宿題

- 20.16** ある企業が、価値が600万ドルの債券からなるポジションを保有している。このポートフォリオの修正デュレーションは5.2年である。イールドカーブの変化はパラレル・シフトのみで、イールドの日次変化の標準偏差は（イールドがパーセント単位で計測されるとき）0.09と仮定する。デュレーション・モデルを用いて、このポートフォリオの20日90%VaRを求めよ。また、この方法でVaRを計算した場合の留意点および精度を向上させるための二つの方法について説明せよ。

- 20.17** 金への300,000ドルの投資と銀への500,000ドルの投資からなるポジションを考える。これら二つの資産の日次ボラティリティをそれぞれ1.8%および1.2%，それらの収益率の相関係数を0.6と仮定する。このポートフォリオの10日97.5%VaRを計算せよ。また，分散効果によるVaRの減少額を求めよ。
- 20.18** 単一資産のオプションからなるポートフォリオを考える。このポートフォリオのデルタは12，資産の価値は10ドル，資産の日次ボラティリティは2%である。このポートフォリオの1日95%VaRを，デルタを用いて計算せよ。次に，ポートフォリオのガンマを-2.6であると仮定する。このとき，1日におけるポートフォリオの価値の変化額を原資産価格の日次変化率の2次関数で表せ。この関数を用いたモンテカルロ・シミュレーション法について説明せよ。
- 20.19** ある企業が，満期2年の債券と満期3年の債券の買いポジションおよび満期5年の債券の売りポジションを保有している。各債券の額面は100ドルで，年5%のクーポンの支払がある。1年，2年，3年，4年，および5年レートに対するこの企業のエクスポージャーを計算せよ。また，表20.3と表20.4のデータを用いて，金利の変動率が(a)一つのファクター，(b)二つのファクター，(c)三つのファクターで説明できると仮定した場合の20日95%VaRを求めよ。ただし，ゼロクーポン・イールドカーブはフラットで5%であると仮定する。
- 20.20** ある銀行がある株式のコール・オプションと別の株式のプット・オプションを発行した。最初のオプションについては，株価は50，行使価格は51，ボラティリティは年率28%，満期は9カ月である。二つ目のオプションについては，株価は20，行使価格は19，ボラティリティは年率25%，満期は1年である。どちらの株式にも配当はなく，無リスク金利は年率6%，株価収益率の相関係数は0.4である。次のそれぞれの方法で10日99%VaRを計算せよ。
- (a) デルタのみを用いる。
- (b) 部分シミュレーション法を用いる。

(c) 完全なシミュレーション法を用いる。

- 20.21** リスク管理者の共通の悩みは、モデル・ビルディング法は（1次の場合でも2次の場合でも）デルタの値がゼロに近いときにはうまく機能しない、ということである。DerivaGem ソフトウェアの Application Builder の Sample Application E を用いて、デルタの値がゼロに近いときにどのようなことが起こるかを確かめよ（異なるオプションのポジションに対して、デルタがゼロになるように原資産のポジションを調整して実験すればよい）。また、得られた結果について説明せよ。

## 付 錄

### キャッシュフロー・マッピング

本付録では、基準とする満期日にキャッシュフローをマッピングする手順について説明する。残存期間が0.8年、額面100万ドルの単一の米国国債の買いポジションからなるポートフォリオという簡単な例を用いて、その手順の説明を行う。この債券には、年2回払いの10%のクーポンが付いていると仮定する。すなわち、この債券には、0.3年後と0.8年後に50,000ドルのクーポンの支払がある。また、0.8年後には100万ドルの額面の支払もある。したがって、この米国国債は、額面50,000ドルの満期0.3年の割引債と額面1,050,000ドルの満期0.8年の割引債からなるポジションとみなすことができる。

満期0.3年の割引債のポジションは、満期が3カ月と6カ月の割引債からなる等価なポジションに変換される。満期0.8年の割引債のポジションは、満期が6カ月と1年の割引債からなる等価なポジションに変換される。その結果、VaR計算上は、残存期間が0.8年の利付債のポジションは、満期が3カ月、6カ月、および1年の割引債からなるポジションとみなされることになる。

#### マッピングの手順

0.8年後に受け取る1,050,000ドルについて考える。ゼロ・レート、債券価格の日次ボラティリティ、債券の収益率間の相関係数としては、表20 A.1(次頁)で与えられているものを仮定する。

第一段階として、6カ月物ゼロ・レート6.0%と1年物ゼロ・レート7.0%を補間して0.8年物ゼロ・レートを求め、6.6%を得る(すべてのレートは1年複利で与えられていると仮定する)。したがって、0.8年後に受け取る1,050,000ドルのキャッシュフローの現在価値は、

表20A.1 マッピングの手順を説明するためのデータ

| 満期                  | 3 カ月  | 6 カ月  | 1 年  |
|---------------------|-------|-------|------|
| ゼロ・レート（%， 1年複利）     | 5.50  | 6.00  | 7.00 |
| 債券価格のボラティリティ（%， 日次） | 0.06  | 0.10  | 0.20 |
| 債券の日次収益率の相関         | 3 カ月物 | 6 カ月物 | 1 年物 |
| 3 カ月物               | 1.0   | 0.9   | 0.6  |
| 6 カ月物               | 0.9   | 1.0   | 0.7  |
| 1 年物                | 0.6   | 0.7   | 1.0  |

$$\frac{1,050,000}{1.066^{0.8}} = 997,662$$

になる。また、満期 6 カ月の債券のボラティリティ 0.1% と満期 1 年の債券のボラティリティ 0.2% を補間して満期 0.8 年の債券のボラティリティを求め、0.16%を得る。

現在価値のうち、 $\alpha$  を満期 6 カ月の債券に、 $1 - \alpha$  を満期 1 年の債券に配分すると仮定する。このとき、(20.2)式を用いると、分散を一致させるためには、

$$0.0016^2 = 0.001^2 \alpha^2 + 0.002^2 (1 - \alpha)^2 + 2 \times 0.7 \times 0.001 \times 0.002 \alpha (1 - \alpha)$$

となる必要がある。この 2 次方程式は通常の方法で解け、 $\alpha = 0.320337$  が得られる。したがって、現在価値の 32.0337% を満期 6 カ月の割引債に、67.9663% を満期 1 年の割引債に配分することになる。価値が 997,662 ドルの残存期間 0.8 年の債券は、満期 6 カ月の債券

$$997,662 \times 0.320337 = 319,589 \text{ ドル}$$

と、満期 1 年の債券

$$997,662 \times 0.679663 = 678,074 \text{ ドル}$$

に置き換えられる。このキャッシュフロー・マッピング方法のすぐれている点は、キャッシュフローの価値と分散の両方を保存していることである。また、二つの隣り合った割引債への配分ウェイトは常に正になる、ということも示すことができる。

表20A.2 キャッシュフローのマッピング結果

|            | 0.3年後に受け取る<br>50,000ドル | 0.8年後に受け取る<br>1,050,000ドル | 計       |
|------------|------------------------|---------------------------|---------|
| 3カ月物債券（ドル） | 37,397                 |                           | 37,397  |
| 6カ月物債券（ドル） | 11,793                 | 319,589                   | 331,382 |
| 1年物債券（ドル）  |                        | 678,074                   | 678,074 |

0.3年後に受け取る50,000ドルのキャッシュフローについても、同様の計算を行うことができる（章末問題20.10を参照）。その結果、キャッシュフローの現在価値は49,189ドルであり、これが満期3カ月の債券37,397ドルのポジションと満期6カ月の債券11,793ドルのポジションに置き換えられることがわかる。

これらの計算結果を表20A.2にまとめた。残存期間0.8年の利付債は、満期3カ月の債券37,397ドルのポジション、満期6カ月の債券331,382ドルのポジション、および満期1年の債券678,074ドルのポジションに置き換えられる。表20A.1のボラティリティと相関係数を用いて、(20.2)式で  $n=3$ ,  $\alpha_1=37,397$ ,  $\alpha_2=331,382$ ,  $\alpha_3=678,074$ ,  $\sigma_1=0.0006$ ,  $\sigma_2=0.001$ ,  $\sigma_3=0.002$ ,  $\rho_{12}=0.9$ ,  $\rho_{13}=0.6$ ,  $\rho_{23}=0.7$  とおけば、残存期間0.8年の債券の価格変化に対する分散が $2,628,518$ として得られる。したがって、この債券の価格変化に対する標準偏差は $\sqrt{2,628,518}=1,621.3$ になる。この債券がポートフォリオに含まれる唯一の資産であると仮定しているので、10日99%VaRは、

$$1621.3 \times \sqrt{10} \times 2.33 = 11,946$$

すなわち約11,950ドルになる。

## 第21章

# ボラティリティと相関係数の推定

本章では、ボラティリティや相関係数の現在および将来の水準を過去データから推定する方法について説明する。本章の内容は、モデル・ビルディング法によるバリュー・アット・リスクの計算と、デリバティブの価格付けの双方に深く関係している。バリュー・アット・リスクを計算する際には、非常に短い期間に起こりうるポートフォリオの価値変化を評価することになるので、ボラティリティや相関係数の現在の水準が非常に重要となる。一方、デリバティブを価格付けする際には、デリバティブの残存期間全体におけるボラティリティや相関係数を予測することが通常必要になる。

本章では、指數加重移動平均 (EWMA : exponentially weighted moving average), ARCH (autoregressive conditional heteroscedasticity), および GARCH (generalized autoregressive conditional heteroscedasticity) と呼ばれるモデルについて検討する。これらのモデルの大きな特徴は、ボラティリ

ティや相関が一定でないとしていることである。特定のボラティリティや相関係数は、ある期間では相対的に低くなり、別の期間では相対的に高くなる。これらのモデルは、ボラティリティや相関の時間変動を表現しようとするものである。

## 21.1 ボラティリティの推定

$\sigma_n$ を、 $n-1$ 日目の終わりに推定される、 $n$ 日目における市場変数のボラティリティと定義する。このとき、 $n$ 日目のボラティリティの2乗  $\sigma_n^2$  は分散率である。13.4節では、過去データを用いた  $\sigma_n$  の標準的な推定方法について説明した。 $i$  日目の終わりにおける市場変数の値を  $S_i$  とする。変数  $u_i$  を  $i$  日目 ( $i-1$  日目の終わりから  $i$  日目の終わりまで) における連続複利ベースでの収益率、すなわち、

$$u_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}}$$

と定義する。1日当たりの分散率の不偏推定量  $\sigma_n^2$  は、 $u_i$  の直近  $m$  個の観測データを用いて、

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (u_{n-i} - \bar{u})^2 \quad (21.1)$$

で与えられる。ここで  $\bar{u}$  は  $u_i$  の平均、すなわち、

$$\bar{u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}$$

である。

日次ボラティリティをモニタリングする目的では、(21.1)式の公式は次のように変えて用いられることが多い。

1.  $u_i$  を  $i-1$  日目の終わりから  $i$  日目の終わりまでの市場変数の変化率、すなわち、

$$u_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}} \quad (21.2)$$

と定義する(注1)。

2.  $\bar{u}$  をゼロと仮定する(注2)。

3.  $m-1$ を  $m$  に置き換える(注3)。

これら三つの変更を行っても、計算される推定値にはほとんど差はないが、分散率に対する公式は、

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_{n-i}^2 \quad (21.3)$$

と簡略化される。ここで、 $u_i$ は(21.2)式で与えられたものである(注4)。

## ウェイト付け方法

(21.3)式では、 $u_{n-1}^2, u_{n-2}^2, \dots, u_{n-m}^2$  のウェイトは等しくなっている。ここではボラティリティの現在の水準  $\sigma_n$ を推定することが目的なので、直近のデータのウェイトを大きくするのが理にかなっている。こうしたモデルが、

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (21.4)$$

である。変数  $\alpha_i$  は  $i$  日前の観測値に対するウェイトで、各  $\alpha$  は正である。 $i < j$  に対して  $\alpha_i < \alpha_j$ となるようにすると、古い観測データへのウェイトを低くできる。ウェイトの合計は 1 でなければならないので、

---

(注1) これは、20.3節でVaR計算の目的で行ったボラティリティの定義の仕方と整合している。

(注2) 20.3節で説明したように、1日における変数の変化の平均値は変化の標準偏差と比較して非常に小さいので、このように仮定しても分散の推定値には通常ほとんど影響しない。

(注3)  $m-1$ を  $m$  で置き換えると、不偏推定量ではなく最尤推定量になる。最尤推定量については、本章の後のほうで論じる。

(注4) 本章における  $u$  は、第20章における  $\Delta x$  同じ役割をしている。ともに市場変数の日次変化率である。 $u$ の場合には、添字は同じ市場変数に対する異なる観測日を指している。 $\Delta x$ の場合には、添字は同じ日に観測された異なる市場変数を指している。同様に、 $\sigma$ の添字の使われ方も二つの章で異なっている。本章では添字は日を指しているが、第20章では市場変数を指している。

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

を満たす必要がある。(21.4)式の考え方を拡張して、ボラティリティの長期平均が存在しており、それに対してもウェイトがあると仮定する。この場合、モデルは、

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (21.5)$$

という形になる。ここで、 $V_L$ は長期分散率、 $\gamma$ は  $V_L$ に対するウェイトである。ウェイトの合計は 1 なので、

$$\gamma + \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$$

となる。これは ARCH( $m$ ) モデルとして知られており、Engle によってはじめて提案された(注5)。分散の長期平均と  $m$  日間の観測データに基づいて、分散が推定されている。古い観測値ほど、そのウェイトは小さくなっている。 $\omega = \gamma V_L$  とおくと、(21.5)式のモデルは、

$$\sigma_n^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 \quad (21.6)$$

と書くことができる。次の二節では、(21.4)式と(21.5)式のアイデアを用いた、二つの重要なボラティリティのモニタリング方法について論じる。

## 21.2 指数加重移動平均モデル

指数加重移動平均 (EWMA) モデルは、(21.4)式でウェイト  $\alpha_i$  が過去にさかのぼるほど指数的に減少するモデルである。正確に言えば、0 と 1 の間の定数  $\lambda$  を用いて、 $\alpha_{i+1} = \lambda \alpha_i$ としたモデルである。

このウェイト付け方法を用いると、ボラティリティの推定値の更新に関する

(注5) R. Engle, "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica*, 50 (1982) : 987-1008 を参照。

るきわめて単純な公式が得られる。その公式は、

$$\sigma_n^2 = \lambda \sigma_{n-1}^2 + (1-\lambda) u_{n-1}^2 \quad (21.7)$$

である。これを用いると、 $n$ 日目に対するボラティリティの推定値  $\sigma_n$  ( $n-1$ 日目の終わりに求められる) は、 $\sigma_{n-1}$  ( $n-2$ 日目の終わりに求められた、 $n-1$ 日目に対するボラティリティの推定値) と  $u_{n-1}$  (変数の直近の日次変化率) から計算される。

(21.7)式が指数的に減少するウェイトに対応していることを理解するために、 $\sigma_{n-1}^2$ の部分に代入を行うと、

$$\sigma_n^2 = \lambda [\lambda \sigma_{n-2}^2 + (1-\lambda) u_{n-2}^2] + (1-\lambda) u_{n-1}^2$$

すなわち、

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda) (u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2) + \lambda^2 \sigma_{n-2}^2$$

が得られる。同様に、 $\sigma_{n-2}^2$ の部分に代入を行うと、

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda) (u_{n-1}^2 + \lambda u_{n-2}^2 + \lambda^2 u_{n-3}^2) + \lambda^3 \sigma_{n-3}^2$$

が得られる。これを繰り返すと、

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda) \sum_{i=1}^m \lambda^{i-1} u_{n-i}^2 + \lambda^m \sigma_{n-m}^2$$

となる。大きい  $m$  に対しては、 $\lambda^m \sigma_{n-m}^2$  の項は十分に小さいので無視すると、(21.7)式は、(21.4)式で  $\alpha_i = (1-\lambda) \lambda^{i-1}$  とおいたものに等しくなる。 $u_i$ に対するウェイトは、過去にさかのぼるにつれて、 $\lambda$  の割合で減少する。各ウェイトは一つ前のウェイトの  $\lambda$  倍になっている。

### 【例21.1】

$\lambda$  を 0.90、 $n-1$ 日目の日次ボラティリティの推定値を 1%， $n-1$ 日に市場変数は 2 %増加したとする。このとき、 $\sigma_{n-1}^2 = 0.01^2 = 0.0001$ 、 $u_{n-1}^2 = 0.02^2 = 0.0004$  である。(21.7)式より、

$$\sigma_n^2 = 0.9 \times 0.0001 + 0.1 \times 0.0004 = 0.00013$$

となる。したがって、 $n$ 日目の日次ボラティリティの推定値  $\sigma_n$  は  $\sqrt{0.00013}$ 、すなわち 1.14% になる。 $u_{n-1}^2$  の期待値は  $\sigma_{n-1}^2$ 、すなわち 0.0001 である。この例では、 $u_{n-1}^2$  の実現値は期待値より大きく、その結果、ボラティリティの推定値も増加している。もし  $u_{n-1}^2$  の実現値が期

待値より小さければ、ボラティリティの推定値は減少する。

EWMA を用いる方法は、比較的少量のデータしか保持しなくてよいという点で魅力的である。任意の時点において、分散率の現在の推定値と市場変数の直近の観測値だけを覚えておけばよい。市場変数の新しい観測値が得られたとき、新しい日次変化率を計算し、(21.7)式を用いて分散率の推定値を更新することができる。その後は、前に保持していた分散率の推定値と市場変数の値は消去してもかまわない。

EWMA を用いる方法は、ボラティリティの変化をたどるようになっている。 $n-1$  日目に市場変数が大きく変動し、 $u_{n-1}^2$  の値が大きいとする。その場合、(21.7)式から現時点のボラティリティの推定値は大きくなる。 $\lambda$  の値の大きさによって、日次ボラティリティの推定値が直近の日次変化率の影響をどのくらい受けやすいかが決まる。 $\lambda$  の値が小さいときは、 $\sigma_n$  の計算に占める  $u_{n-1}^2$  のウェイトは大きくなる。この場合、続く何日間かはボラティリティの推定値自体も大きく変動する。一方、 $\lambda$  の値が大きい（すなわち、1.0に近い）ときは、日次ボラティリティの推定値は、日次変化率によつてもたらされる新しい情報に比較的ゆっくりと反応する。

J.P. Morgan によって開発され、1994年に公開された RiskMetrics データベースでは、 $\lambda=0.94$ とした EWMA モデルを用いてデータベース内の日次ボラティリティの推定値が更新されている。J.P. Morgan は、広い範囲のさまざまな市場変数に対して、この  $\lambda$  の値を用いた分散率の予測値が分散率の実現値に非常に近くなることを見出した（注6）。ここである日における分散率の実現値とは、 $u_t^2$ に関するその日から25日間の等加重平均のことである（章末問題21.17を参照）。

(注6) J.P. Morgan, *RiskMetrics Monitor*, Fourth Quarter, 1995 を参照。パラメータを推定する別の方法（最尤推定）については、本章の後のほうで説明する。

### 21.3 GARCH(1,1)モデル

次に、1986年に Bollerslev が提案した GARCH(1,1)として知られるモデルについて論じる(注7)。GARCH(1,1)モデルと EWMA モデルとの違いは、(21.4)式と(21.5)式との違いに類似したものである。GARCH(1,1)では、 $\sigma_n^2$ は $\sigma_{n-1}^2$ と $u_{n-1}$ に加えて、分散率の長期平均 $V_L$ から計算される。GARCH(1,1)では、

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (21.8)$$

という式が用いられる。ここで、 $\gamma$ は $V_L$ に対するウェイト、 $\alpha$ は $u_{n-1}^2$ に対するウェイト、 $\beta$ は $\sigma_{n-1}^2$ に対するウェイトである。ウェイトの合計は1となるので、

$$\gamma + \alpha + \beta = 1$$

が成り立っている。EWMA モデルは、 $\gamma=0$ 、 $\alpha=1-\lambda$ 、 $\beta=\lambda$ とした、GARCH(1,1)の特別な場合である。

GARCH(1,1)の“(1,1)”は、 $\sigma_n^2$ が $u^2$ の直近の観測値と直近の分散率の推定値に基づいていることを表している。もっと一般の GARCH( $p, q$ )モデルでは、 $\sigma_n^2$ は $u^2$ の直近 $p$ 個の観測値と直近 $q$ 個の分散率の推定値から計算される(注8)。GARCH(1,1)はこれまでのところ、GARCH モデルのなかでは最もよく利用されている。

$\omega = \gamma V_L$ とおくと、GARCH(1,1)モデルは、

---

(注7) T. Bollerslev, "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity," *Journal of Econometrics*, 31 (1986) : 307-27 を参照。

(注8) 情報の非対称性を取り入れた、別の GARCH モデルも提案されている。それらのモデルでは、 $\sigma_n$ が $u_{n-1}$ の符号に依存するようにつくられている。おそらく、そうしたモデルは株式に対しては GARCH(1,1)よりも説明力が高い。第18章で述べたように、株価のボラティリティは株価と負の相関をもつ傾向にあり、負の $u_{n-1}$ のほうが正の $u_{n-1}$ より $\sigma_n$ に与える影響は大きい。情報の非対称性を扱ったモデルについては、D. Nelson, "Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59 (1990) : 347-70 および R.F. Engle and V. Ng, "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility," *Journal of Finance*, 48 (1993) : 1749-78 を参照。

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2 \quad (21.9)$$

と書くことができる。パラメータの推定には、通常この形でモデルは用いられている。 $\omega$ ,  $\alpha$ , および  $\beta$  がいったん推定されれば、 $\gamma$  は  $1 - \alpha - \beta$  として求まる。そうすると、長期の分散  $V_L$  は  $\omega/\gamma$  として求まる。GARCH(1,1) 過程が安定性を満たすためには、 $\alpha + \beta < 1$  となる必要がある。そうでない場合には、長期の分散に対するウェイトが負になる。

### 【例21.2】

GARCH(1,1) モデルが日次データから、

$$\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.13 u_{n-1}^2 + 0.86 \sigma_{n-1}^2$$

と推定されているとする。これは、 $\alpha = 0.13$ ,  $\beta = 0.86$ ,  $\omega = 0.000002$  とした場合に対応している。 $\gamma = 1 - \alpha - \beta$  より  $\gamma = 0.01$  となり、 $\omega = \gamma V_L$  より  $V_L = 0.0002$  が得られる。言い換えると、モデルで仮定されている日次分散の長期平均は 0.0002 である。これは日次ボラティリティに直すと  $\sqrt{0.0002} = 0.014$ , すなわち 1.4% である。

$n-1$  日目の日次ボラティリティの推定値が 1.6% であるとすると、 $\sigma_{n-1}^2 = 0.016^2 = 0.000256$  となり、 $n-1$  日目に市場変数が 1 %だけ下落したとすると、 $u_{n-1}^2 = 0.01^2 = 0.0001$  となる。このとき、

$$\sigma_n^2 = 0.000002 + 0.13 \times 0.0001 + 0.86 \times 0.000256 = 0.00023516$$

となる。したがって、日次ボラティリティの新しい推定値は  $\sqrt{0.00023516} = 0.0153$ , すなわち 1.53% になる。

### ウェイト

(21.9) 式の  $\sigma_{n-1}^2$  の部分に代入を行うと、

$$\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta (\omega + \alpha u_{n-2}^2 + \beta \sigma_{n-2}^2)$$

すなわち

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha \beta u_{n-2}^2 + \beta^2 \sigma_{n-2}^2$$

が得られる。同様に  $\sigma_{n-2}^2$  の部分に代入を行うと、

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta \omega + \beta^2 \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \alpha \beta u_{n-2}^2 + \alpha \beta^2 u_{n-3}^2 + \beta^3 \sigma_{n-3}^2$$

が得られる。このように代入を繰り返していくと、 $u_{n-i}^2$ に対するウェイトは $\alpha\beta^{i-1}$ であることがわかる。ウェイトは $\beta$ の割合で指数的に減少していくので、パラメータ $\beta$ は「減衰率」とみなすことができる。これは、EWMA モデルの $\lambda$ と同様のパラメータである。このパラメータによって、現時点の分散率を決定する要因としての、 $u$ の観測値間の相対的な重要度が決まってくる。たとえば、 $\beta=0.9$ のときは、 $u_{n-2}^2$ の重要度は $u_{n-1}^2$ の90%， $u_{n-3}^2$ の重要度は $u_{n-1}^2$ の81%，といったようになる。GARCH(1,1)モデルは、過去の $u^2$ に対して指数的に減少するウェイトを割り当てるのに加えてボラティリティの長期平均に対してもウェイトを割り当てるという点を除けば、EWMA モデルと同様のモデルである。

### 平均回帰

GARCH(1,1)モデルは、分散が時間がたつにつれて長期的な平均レベル $V_L$ に回帰する傾向がある、という性質をもっている。 $V_L$ に対するウェイトの大きさは $\gamma=1-\alpha-\beta$ である。GARCH(1,1)モデルは、分散 $V$ が確率過程

$$dV = a(V_L - V)dt + \xi V dz$$

に従うモデルと等価である。ただし、時間の単位は日数で、 $a=1-\alpha-\beta$ 、 $\xi=\alpha\sqrt{2}$ である（章末問題21.14を参照）。これは平均回帰モデルである。分散は割合 $a$ で $V_L$ に引き戻されるドリフトをもっており、 $V > V_L$ のときは分散のドリフトは負になり、 $V < V_L$ のときは分散のドリフトは正になる。また、ドリフト以外にボラティリティ $\gamma$ の項が加えられている。この種のモデルについては、第26章でさらに論じる。

## 21.4 モデルの選択

実際に、分散率には平均回帰性という性質がある。GARCH(1,1)モデルは平均回帰性をもつが、EWMA モデルはその性質をもたない。したがって、GARCH(1,1)は EWMA モデルより理論的には説得力を有している。

次節では、GARCH(1,1)モデルの最適なパラメータ  $\omega$ ,  $\alpha$ , および  $\beta$  の推定方法について論じる。パラメータ  $\omega$  がゼロの場合は、GARCH(1,1)モデルは EWMA モデルになる。また、最適な  $\omega$  の値が負になるような状況では GARCH(1,1)モデルは安定しないので、EWMA モデルに切り替えるほうが賢明である。

## 21.5 最尤法

次に、これまで考えてきたモデルに含まれるパラメータを過去データから推定する方法について論じる。最尤法 (maximum likelihood method) として知られている方法を用いる。これは、データの発生する可能性（すなわち尤度）を最大にするようにパラメータの値を選択する方法である。

この方法の意味をわかりやすく説明するために、非常に簡単な例から始めよう。ある日の株式を無作為に10銘柄抽出し、その日の株価を調べると、1銘柄は下落し、他の9銘柄は前日と同値か上昇していたとする。このとき、株価が下落する確率の最もよい推定値はいくらであるか、という質問に対する自然な答は10%であろう。最尤法によって得られる結果がこれに一致するかをみてみる。

価格が下落する確率を  $p$  とする。ある特定の銘柄の株価が下落し、残りの9銘柄の株価が下落しない確率は、 $p(1-p)^9$  である。最尤法は  $p(1-p)^9$  を最大化する  $p$  を最良の推定値とする方法である。この式を  $p$  に関して微分し、その結果をゼロとおくと、 $p=0.1$  のときにその式は最大になることがわかる。これより、 $p$  の最尤推定量は期待どおりの0.1になる。

### 一定値をとる分散の推定

最尤法の次の例として、平均ゼロの正規分布に従う変数  $X$  の  $m$  個の観測値から  $X$  の分散を推定する問題について考える。観測値を  $u_1, u_2, \dots, u_m$  とし、分散を  $v$  と書く。観測された  $u_i$  の尤度は、 $X=u_i$  とした  $X$  の確率密度関数の値、すなわち

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}v} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2v}\right)$$

である。したがって、 $m$  個の観測値が観測された順に起こる尤度は、

$$\prod_{i=1}^m \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}v} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2v}\right) \right] \quad (21.10)$$

となる。最尤法では、 $v$  の最良の推定値はこの式を最大にする値になる。

与えられた式の最大化問題は、その式の対数に対する最大化問題と等価である。したがって、(21.10)式の対数をとり、定数因子の項を無視すると、

$$\sum_{i=1}^m \left( -\ln(v) - \frac{u_i^2}{v} \right) \quad (21.11)$$

すなわち、

$$-m \ln(v) - \sum_{i=1}^m \frac{u_i^2}{v}$$

の最大化問題を解けばよいことがわかる。この式を  $v$  に関して微分し、その結果を 0 とおくと、 $v$  の最尤推定量は、

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i^2$$

と求まる(注9)。

### GARCH(1,1)のパラメータ推定

次に、GARCH(1,1)や他のボラティリティ更新方法を用いる場合について、最尤法によるパラメータ推定方法を考える。 $v_i = \sigma_i^2$  を、 $i$  日目に対する分散の推定値とする。分散の値がわかっているという条件のもとでの  $u_i$  の確率分布を、正規分布と仮定する。前と同様の分析を行うと、パラメータの最良の推定値は、

$$\prod_{i=1}^m \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_i} \exp\left(-\frac{u_i^2}{2v_i}\right) \right]$$

(注9) これにより、脚注3で述べたことが確かめられた。

を最大にする値として求まる。対数をとれば、それは、

$$\sum_{i=1}^m \left( -\ln(v_i) - \frac{u_i^2}{v_i} \right) \quad (21.12)$$

を最大にする値であることがわかる。 $v$  が  $v_i$  に置き換わっている点を除けば、この式は(21.11)式と同じものである。(21.12)式を最大にするモデルのパラメータは、反復探索により求めることができる。

表21.1(次頁)のスプレッドシートは、GARCH(1,1)モデルの計算がどのように行われるかを示したのである。この表では、1988年1月6日から1997年8月15日までの日本円の為替レートのデータが分析されている(注10)。表の数字は、GARCH(1,1)モデルの三つのパラメータ  $\omega$ ,  $\alpha$ , および  $\beta$  に対する試しの推定値に基づいて計算したものである。表の第1列は日付、第2列は日数、第3列は  $i$  日目の為替レート  $S_i$  である。第4列は  $i-1$  日目の終わりから  $i$  日目の終わりまでの為替レートの変化率を表しており、 $u_i = (S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$  である。第5列は  $i-1$  日目の終わりに求められた  $i$  日日の分散率の推定値  $v_i = \sigma_i^2$  である。3日目は分散が  $u_2^2$  に等しいとして計算を始める。4日目以降は(21.9)式を用いて計算する。第6列は尤度  $-\ln(v_i) - u_i^2/v_i$  を表している。第5列と第6列の値は  $\omega$ ,  $\alpha$ , および  $\beta$  のその時点での試しの推定値に基づいて計算されたものである。第6列の数字の合計を最大にするように、 $\omega$ ,  $\alpha$ , および  $\beta$  を選びたい。これを反復探索法を用いて行う(注11)。

この例では、パラメータの最適値は、

$$\omega = 0.00000176, \alpha = 0.0626, \beta = 0.8976$$

であることがわかる。そのときの(21.12)式の関数の最大値は22,063.5763と

(注10) データは [www.rotman.utoronto.ca/~hull/data](http://www.rotman.utoronto.ca/~hull/data) からダウンロードできる。

(注11) 後で論じるように、これには Microsoft Excel の Solver のような汎用的なアルゴリズムを用いることができる。あるいは、Levenberg-Marquardt のような、特定の問題に対するアルゴリズムを用いることもできる。これについては、W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1988 を参照。

表21.1 GARCH(1,1)モデルのパラメータ推定

| 日付                     | 日数 $i$   | $S_i$    | $u_i$     | $v_i = \sigma_i^2$ | $-\ln(v_i) - u_i^2/v_i$ |
|------------------------|----------|----------|-----------|--------------------|-------------------------|
| 88年1月6日                | 1        | 0.007728 |           |                    |                         |
| 88年1月7日                | 2        | 0.007779 | 0.006599  |                    |                         |
| 88年1月8日                | 3        | 0.007746 | -0.004242 | 0.00004355         | 9.6283                  |
| 88年1月11日               | 4        | 0.007816 | 0.009037  | 0.00004198         | 8.1329                  |
| 88年1月12日               | 5        | 0.007837 | 0.002687  | 0.00004455         | 9.8568                  |
| 88年1月13日               | 6        | 0.007924 | 0.011101  | 0.00004220         | 7.1529                  |
| ⋮                      | ⋮        | ⋮        | ⋮         | ⋮                  | ⋮                       |
| 97年8月13日               | 2421     | 0.008643 | 0.003374  | 0.00007626         | 9.3321                  |
| 97年8月14日               | 2422     | 0.008493 | -0.017309 | 0.00007092         | 5.3294                  |
| 97年8月15日               | 2423     | 0.008495 | 0.000144  | 0.00008417         | 9.3824                  |
|                        |          |          |           |                    |                         |
|                        |          |          |           |                    |                         |
| 22,063.5763            |          |          |           |                    |                         |
| <b>GARCH パラメータの推定値</b> |          |          |           |                    |                         |
| $\omega$               | $\alpha$ | $\beta$  |           |                    |                         |
| 0.00000176             | 0.0626   | 0.8976   |           |                    |                         |

なる。表21.1の数字は、最適な  $\omega$ ,  $\alpha$ , および  $\beta$  を反復探索で求めたときの最後の反復の際に計算されたものである。

長期分散率  $V_L$  は、

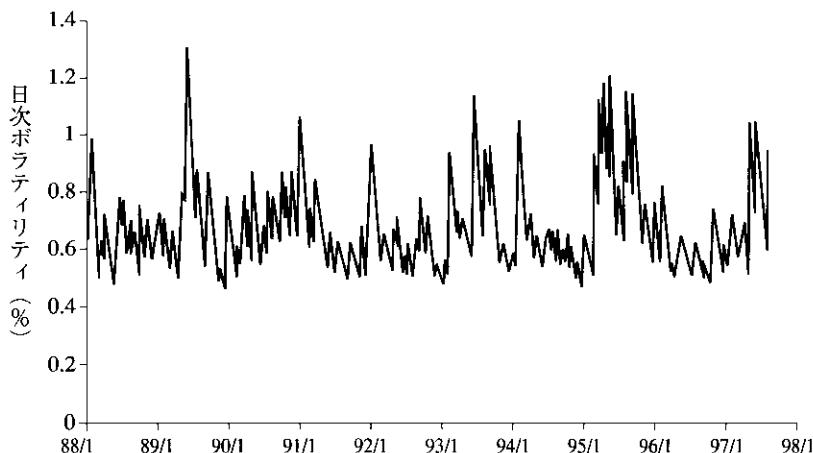
$$\frac{\omega}{1-\alpha-\beta} = \frac{0.00000176}{0.0398} = 0.00004422$$

となり、長期ボラティリティは 1 日当たり  $\sqrt{0.00004422}$ , すなわち 0.665% となる。

図21.1から、データのある10年間における日本円に対する GARCH(1,1) のボラティリティが変化する様子がわかる。ほとんどの期間において、ボラティリティは 1 日当たり 0.4% から 0.8% の間であったが、1 % を超える期間もみられる。

GARCH(1,1) モデルの別のパラメータ推定法でより頑強なものとして、分散ターゲッティング法 (variance targeting) という方法が知られている（注12）。この方法は、分散率の長期平均  $V_L$  をデータから計算される標本分

図21.1 1988年から1997年における円／ドル為替レートの日次ボラティリティ



散（あるいは、妥当と考えられる他の値）とする、というものである。そうすると、 $\omega$  の値は  $V_L(1-\alpha-\beta)$  に等しくなるため、二つのパラメータだけを推定すればよくなる。表21.1のデータに対する標本分散は 0.00004341 であり、これより日次ボラティリティは 0.659% になる。 $V_L$  を標本分散に等しくおくと、(21.12)式の目的関数を最大にする  $\alpha$  と  $\beta$  の値はそれぞれ 0.0607 と 0.8990 になる。このとき、目的関数の値は 22,063.5274 となるが、先の方法で得た 22,063.5763 という値よりほんのわずか下回っているだけである。

EWMA モデルを用いる場合は、推定方法は比較的簡単である。 $\omega=0$ 、 $\alpha=1-\lambda$ 、および  $\beta=\lambda$  とおき、一つのパラメータだけを推定すればよい。表21.1のデータでは、(21.12)式の目的関数を最大にする  $\lambda$  の値は 0.9686、目的関数の値は 21,995.8377 となる。

GARCH(1,1) モデルと EWMA モデルを、尤度関数を最大にするパラメータの探索に Microsoft Excel の Solver ルーチンを用いて実装することができる。探索するパラメータがおおむね等しい値をもつようにスプレッド

---

(注12) R. Engle and J. Mezrich, "GARCH for Groups," *Risk*, August 1996 : 36-40 を参考。

シートを作成すれば、このルーチンはうまく機能する。たとえばGARCH(1,1)では、セルA1, A2, A3を、それぞれ $\omega \times 10^5$ ,  $\alpha$ ,  $0.1\beta$ にする。そのうえで、B1=A1/100000, B2=A2, B3=10\*A3とし、B1, B2, B3を用いて尤度関数を計算する。そうすれば、尤度関数を最大にするA1, A2, A3の値をSolverを用いて計算することができる。

### モデルはどの程度よいか？

GARCH(1,1)モデルにおかれている仮定は、時間の経過とともにボラティリティが変化するというものである。ある期間のボラティリティは相対的に高く、別の期間のボラティリティは相対的に低い。別のいい方をすると、 $u_i^2$ が高いときは $u_{i+1}^2, u_{i+2}^2, \dots$ も高くなる傾向があり、 $u_i^2$ が低いときは $u_{i+1}^2, u_{i+2}^2, \dots$ も低くなる傾向がある。この傾向がどの程度あるかについては、 $u_i^2$ の自己相関構造を調べることで検証できる。

$u_i^2$ が自己相関性をもっていると仮定しよう。GARCH(1,1)モデルの説明力が高いとすれば、モデルによって自己相関性は取り除かれるはずである。変数 $u_i^2/\sigma_i^2$ に対する自己相関構造を考えることで、そうなっているかを検証することができる。それらに自己相関性がほとんどみられなければ、 $\sigma_i^2$ に対するこのモデルは $u_i^2$ の自己相関性を説明できていることになる。

表21.2は、上で用いた円／ドル為替レートのデータに対する結果である。第1列は自己相関係数を計算する際のラグ、第2列は $u_i^2$ の自己相関係数、第3列は $u_i^2/\sigma_i^2$ の自己相関係数である(注13)。この表から、1から15までのすべてのラグに対して $u_i^2$ は正の自己相関をもっていることがわかる。これに対し、 $u_i^2/\sigma_i^2$ の自己相関係数は正の場合も負の場合もあり、その大きさは $u_i^2$ の自己相関係数よりもかなり小さい。

GARCHモデルは、データをよく説明しているように思われる。より科学的な検定を行いたい場合は、Ljung-Box統計量(注14)を用いればよい。 $m$ 個の観測値をもつ系列に対して、Ljung-Box統計量は、

---

(注13) 系列 $x_i$ に対して、ラグ $k$ の自己相関係数とは $x_i$ と $x_{i+k}$ との相関係数のことである。

表21.2 GARCH モデルを用いる前と後の自己相関

| タイム・ラグ | $u_i^2$ の自己相関 | $u_i^2/\sigma_i^2$ の自己相関 |
|--------|---------------|--------------------------|
| 1      | 0.072         | 0.004                    |
| 2      | 0.041         | -0.005                   |
| 3      | 0.057         | 0.008                    |
| 4      | 0.107         | 0.003                    |
| 5      | 0.075         | 0.016                    |
| 6      | 0.066         | 0.008                    |
| 7      | 0.019         | -0.033                   |
| 8      | 0.085         | 0.012                    |
| 9      | 0.054         | 0.010                    |
| 10     | 0.030         | -0.023                   |
| 11     | 0.038         | -0.004                   |
| 12     | 0.038         | -0.021                   |
| 13     | 0.057         | -0.001                   |
| 14     | 0.040         | 0.002                    |
| 15     | 0.007         | -0.028                   |

$$m \sum_{k=1}^K w_k \eta_k^2$$

で定義される。ただし、 $\eta_k$ はラグ  $k$  の自己相関係数、 $K$  は対象とするラグの回数、

$$w_k = \frac{m+2}{m-k}$$

である。 $K=15$ に対しては、Ljung-Box 統計量が25以上になるときは、自己相関がゼロであるという仮説は95%の信頼水準で棄却される。

表21.2から、 $u_i^2$ に対する Ljung-Box 統計量は約123である。これは自己相関があることを強く示唆している。 $u_i^2/\sigma_i^2$ に対する Ljung-Box 統計量は 8.2 となり、GARCH モデルによって自己相関はほとんどなくなっているこ

---

(注14) G.M. Ljung and G.E.P. Box, "On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models," *Biometrika*, 65 (1978) : 297-303 を参照。

とがうかがえる。

## 21.6 GARCH(1,1)モデルを用いた将来のボラティリティの予測

$n-1$ 日目の終わりに推定する  $n$  日目の分散率は、GARCH(1,1)を用いること、

$$\sigma_n^2 = (1 - \alpha - \beta) V_L + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$$

となり、

$$\sigma_n^2 - V_L = \alpha (u_{n-1}^2 - V_L) + \beta (\sigma_{n-1}^2 - V_L)$$

が得られる。将来の  $n+t$  日目においては、

$$\sigma_{n+t}^2 - V_L = \alpha (u_{n+t-1}^2 - V_L) + \beta (\sigma_{n+t-1}^2 - V_L)$$

となる。 $u_{n+t-1}^2$  の期待値は  $\sigma_{n+t-1}^2$  である。したがって、

$$E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha + \beta) E[\sigma_{n+t-1}^2 - V_L]$$

となる。ここで  $E$  は期待値を表している。この式を繰り返し用いると、

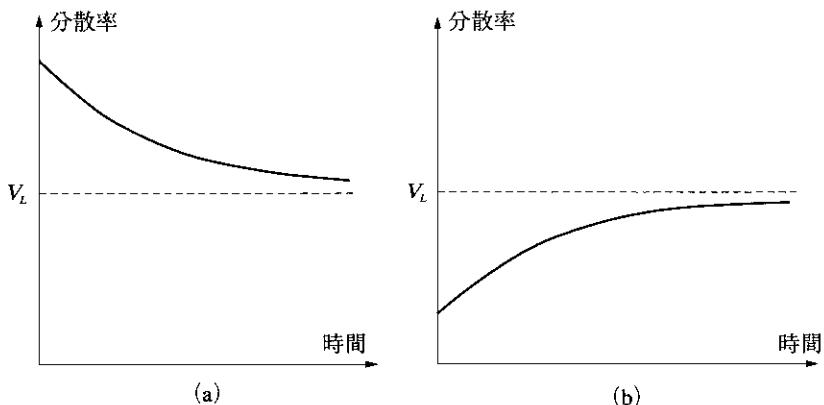
$$E[\sigma_{n+t}^2 - V_L] = (\alpha + \beta)^t (\sigma_n^2 - V_L)$$

すなわち、

$$E[\sigma_{n+t}^2] = V_L + (\alpha + \beta)^t (\sigma_n^2 - V_L) \quad (21.13)$$

が得られる。これは、 $n-1$ 日目の終わりに得られる情報を用いて  $n+t$  日目のボラティリティを予測する式である。EWMA モデルでは  $\alpha + \beta = 1$  ので、(21.13)式より将来の分散率の期待値は現在の分散率に等しいことがわかる。 $\alpha + \beta < 1$  のときは、この式の最後の項は  $t$  の増加とともに小さくなる。図21.2は、現在の分散率が  $V_L$  と異なっている状況での分散率の期待値が変化していく様子を表したものである。先に述べたように、分散率は回帰水準  $V_L$  と回帰率  $1 - \alpha - \beta$  の平均回帰性をもっている。したがって、将来の分散率は、先になるほど  $V_L$  に近づくと予想される。この分析から、GARCH(1,1)モデルが安定性を満たすためには  $\alpha + \beta < 1$  でなければならぬという理由がわかる。 $\alpha + \beta > 1$  のときには、分散の長期平均に対するウェイトは負になり、その過程は「平均回帰的」でなく「平均回避的」になる。

図21.2 分散率の期待パス  
 (a)現在の分散率が長期分散率を上回るとき  
 (b)現在の分散率が長期分散率を下回るとき



これまで考えてきた円／ドル為替レートの例では、 $\alpha + \beta = 0.9602$ 、 $V_L = 0.00004422$ である。現在の1日当たりの分散率が0.00006であるとする（これは、日次ボラティリティでは0.77%に対応している）。このとき、10日後の分散率の期待値は、

$$0.00004422 + 0.9602^{10} (0.00006 - 0.00004422) = 0.00005473$$

になる。このとき、日次ボラティリティの期待値は0.74%となり、依然として長期ボラティリティの0.665%を上回っている。しかし、100日後の分散率の期待値は、

$$0.00004422 + 0.9602^{100} (0.00006 - 0.00004422) = 0.00004449$$

となり、日次ボラティリティの期待値は0.667%で、長期ボラティリティに非常に近い値となっている。

### ボラティリティの期間構造

現在を  $n$  日目とする。

$$V(t) = E(\sigma_{n+t}^2)$$

と定義し、

$$a = \ln \frac{1}{\alpha + \beta}$$

とおくと、(21.13)式は、

$$V(t) = V_L + e^{-at} [V(0) - V_L]$$

になる。ここで  $V(t)$  は  $t$  日後の瞬間的分散率の推定値である。このとき、現時点から時点  $T$  までの 1 日当りの平均分散率は、

$$\frac{1}{T} \int_0^T V(t) dt = V_L + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - V_L]$$

で与えられる。 $T$  が大きくなるほど、この値は  $V_L$  に近づく。GARCH(1,1)のもとで満期  $T$  のオプションの価格付けに用いる年率ボラティリティを  $\sigma(T)$  と定義する。1年を252日と仮定すると、 $\sigma(T)^2$  は 1 日当りの平均分散率の252倍になる。したがって、

$$\sigma(T)^2 = 252 \left( V_L + \frac{1 - e^{-aT}}{aT} [V(0) - V_L] \right) \quad (21.14)$$

となる。

第18章で論じたように、ボラティリティの期間構造 (volatility term structure) を計算するのに、同一資産に対する異なるオプションの市場価格がよく用いられる。ボラティリティの期間構造は、オプションのインプライド・ボラティリティとオプションの満期との関係を表している。(21.14)式を GARCH(1,1) モデルに基づくボラティリティの期間構造の推定に用いることができる。推定されたボラティリティの期間構造は、一般的に実際のボラティリティの期間構造とは一致しない。しかし後述するように、実際のボラティリティの期間構造に対するボラティリティ変化の影響を予測するのに、その推定結果はよく用いられている。

現在のボラティリティが長期ボラティリティを上回っているときには、GARCH(1,1) モデルから推定されるボラティリティの期間構造は右下がりになる。また、現在のボラティリティが長期ボラティリティを下回っているときには、推定されるボラティリティの期間構造は右上がりになる。円／ドル為替レートの例では、 $a = \ln(1/0.9602) = 0.0406$ 、 $V_L = 0.00004422$  であ

る。現在の1日当りの分散率  $V(0)$  が 0.00006 と推定されているとする。このとき、(21.14)式より、

$$\sigma(T)^2 = 252 \left( 0.00004422 + \frac{1 - e^{-0.0406T}}{0.0406T} (0.00006 - 0.00004422) \right)$$

となる。ただし、 $T$  の単位は日数である。いくつかの期間に対する年率ボラティリティを表21.3に示す。

### ボラティリティ変化の影響

(21.14)式は、

$$\sigma(T)^2 = 252 \left[ V_L + \frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \left( \frac{\sigma(0)^2}{252} - V_L \right) \right]$$

と書き換えることができる。したがって、 $\sigma(0)$  が  $\Delta\sigma(0)$  だけ変化すると、 $\sigma(T)$  は、

$$\frac{1 - e^{-\alpha T}}{\alpha T} \frac{\sigma(0)}{\sigma(T)} \Delta\sigma(0) \quad (21.15)$$

だけ変化する。

表21.4は、円／ドル為替レートの例で、さまざまな満期のオプションに対するボラティリティ変化の影響を示したものである。前と同様に  $V(0) = 0.00006$  とすると、 $\sigma(0) = 12.30\%$  となる。表は瞬間的なボラティリティが年

表21.3 GARCH(1,1)から予測される円／ドルのボラティリティ期間構造

| オプション期間（日）         | 10    | 30    | 50    | 100   | 500   |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| オプションのボラティリティ（年率%） | 12.00 | 11.59 | 11.33 | 11.00 | 10.65 |

表21.4 GARCH(1,1)モデルから予測される瞬間的なボラティリティが 1% 变化したときの影響

| オプション期間（日）    | 10   | 30   | 50   | 100  | 500  |
|---------------|------|------|------|------|------|
| ボラティリティの増加（%） | 0.84 | 0.61 | 0.46 | 0.27 | 0.06 |

率12.30%から13.30%に100ベース・ポイント変化する、すなわち  $\Delta\sigma(0) = 0.01$ あるいは1%とした場合の値である。

多くの金融機関は、ボラティリティの変化に対するポジションのエクスポージャーを測定する際に、こうした分析を利用している。ベガを計算する際に、インプライド・ボラティリティをすべての満期について一律1%増加させるのではなく、オプション満期ごとに想定しているボラティリティの増加幅に応じて増加させている。表21.4に基づいてボラティリティを変化させるとすると、満期10日のオプションに対しては0.84%増加させ、満期30日のオプションに対しては0.61%増加させ、満期50日のオプションに対しては0.46%増加させる、といった具合になる。

## 21.7 相関係数

これまでボラティリティの推定と予測を中心にして議論してきた。第20章で説明したように、VaRの計算において相関係数は重要な役割を果たす。本節では、ボラティリティの推定のときと同様の方法で相関係数の推定を更新する方法について紹介する。

2変数  $X$  と  $Y$  の相関係数は、

$$\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

で定義される。ただし、 $\sigma_X$  と  $\sigma_Y$  はそれぞれ  $X$  と  $Y$  の標準偏差、 $\text{cov}(X, Y)$  は  $X$  と  $Y$  の共分散である。 $X$  と  $Y$  の共分散は、

$$E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

で定義される。ここで  $\mu_X$  と  $\mu_Y$  はそれぞれ  $X$  と  $Y$  の平均であり、 $E$  は期待値を表す。共分散よりも相関係数のほうが直感的な意味をつかみやすいが、ここでの分析では共分散が基本的な変数となる(注15)。

---

(注15) これは、本章の前半で説明した EWMA や GARCH において、理解しやすいボラティリティではなく、分散率が基本的な変数であったとの同様のことである。

変数  $X$  と  $Y$  の  $i-1$  日目の終わりから  $i$  日目の終わりまでの変化率をそれぞれ  $x_i$  と  $y_i$  と定義する。すなわち,

$$x_i = \frac{X_i - X_{i-1}}{X_{i-1}}, \quad y_i = \frac{Y_i - Y_{i-1}}{Y_{i-1}}$$

とする。ただし、 $X_i$  と  $Y_i$  は  $i$  日目の終わりにおける  $X$  と  $Y$  の値である。また,

$\sigma_{x,n}$  : 変数  $X$  の  $n$  日目の日次ボラティリティの推定値

$\sigma_{y,n}$  : 変数  $Y$  の  $n$  日目の日次ボラティリティの推定値

$\text{cov}_n$  :  $X$  と  $Y$  の日次変化量の  $n$  日目の共分散の推定値

と定義する。このとき、 $n$  日目の  $X$  と  $Y$  の相関係数の推定値は,

$$\frac{\text{cov}_n}{\sigma_{x,n}\sigma_{y,n}}$$

となる。

等ウェイトを用い、 $x_i$  と  $y_i$  の平均をゼロと仮定すると、(21.3)式より直近の  $m$  個の観測値から推定される  $X$  と  $Y$  の分散率はそれぞれ,

$$\sigma_{x,n}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{n-i}^2, \quad \sigma_{y,n}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_{n-i}^2$$

となる。 $X$  と  $Y$  の共分散の推定値も同様にして,

$$\text{cov}_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_{n-i} y_{n-i} \quad (21.16)$$

となる。別 の方法として、(21.7)式と同様の EWMA モデルが考えられる。この場合、共分散の推定値を更新する公式は、

$$\text{cov}_n = \lambda \text{cov}_{n-1} + (1 - \lambda) x_{n-1} y_{n-1}$$

で与えられる。

ボラティリティの EWMA モデルに対して行ったのと同様の分析から、時間をさかのぼるにつれて、観測値  $x_i y_i$  に対するウェイトは小さくなることがわかる。 $\lambda$  の値が小さくなればなるほど、直近の観測値に対するウェイトは大きくなる。

### 【例21.3】

$\lambda = 0.95$ , 2変数  $X$  と  $Y$  の  $n-1$ 日目の相関係数の推定値を0.6と仮定する。さらに、 $X$  と  $Y$  の  $n-1$ 日目のボラティリティの推定値をそれぞれ1%と2%とする。このとき、相関係数と共分散の関係から、 $X$  と  $Y$  の  $n-1$ 日目の共分散の推定値は、

$$0.6 \times 0.01 \times 0.02 = 0.00012$$

となる。 $X$  と  $Y$  の  $n-1$ 日目における変化率をそれぞれ0.5%と2.5%とすると、 $n$ 日目に対する分散と共分散は次のように更新される。

$$\sigma_{x,n}^2 = 0.95 \times 0.01^2 + 0.05 \times 0.005^2 = 0.00009625$$

$$\sigma_{y,n}^2 = 0.95 \times 0.02^2 + 0.05 \times 0.025^2 = 0.00041125$$

$$\text{cov}_n = 0.95 \times 0.00012 + 0.05 \times 0.005 \times 0.025 = 0.00012025$$

したがって、 $X$  の新しいボラティリティは  $\sqrt{0.00009625} = 0.981\%$ ,  $Y$  の新しいボラティリティは  $\sqrt{0.00041125} = 2.028\%$  となり、 $X$  と  $Y$  の新しい相関係数は、

$$\frac{0.00012025}{0.00981 \times 0.02028} = 0.6044$$

となる。

GARCH モデルを用いて、共分散の推定値の更新や共分散の将来の水準の予測を行うこともできる。たとえば、GARCH(1,1) モデルを用いた共分散の更新は、

$$\text{cov}_n = \omega + \alpha x_{n-1} y_{n-1} + \beta \text{cov}_{n-1}$$

で行われ、共分散の長期平均は  $\omega / (1 - \alpha - \beta)$  になる。また、将来の共分散の予測やオプション期間中の平均共分散の計算に関して、(21.13)式や(21.14)式と同様の公式を導くことができる(注16)。

(注16) 本章での着想の一つの拡張として、分散共分散行列全体を整合的に更新していく多変数 GARCH モデルがある。これについては R. Engle and J. Mezrich, "GARCH for Groups," *Risk*, August 1996: 36-40 を参照。

## 共分散に関する整合性の条件

すべての分散と共分散が求まれば、分散共分散行列を作成することができる。 $i \neq j$  のとき、この行列の $(i, j)$ 成分は変数  $i$  と変数  $j$  の共分散を表し、 $i = j$  のときは変数  $i$  の分散を表す。

必ずしもすべての分散共分散行列が内的整合性をもつわけではない。 $N \times N$  分散共分散行列  $\Omega$  が内的整合性をもつための条件は、任意の  $N \times 1$  ベクトル  $w$  に対して、

$$w^T \Omega w \geq 0 \quad (21.17)$$

が成り立つことである。ここで  $w^T$  は  $w$  の転置である。この性質を満たす行列は半正定値 (positive-semidefinite) であるという。

(21.17)式の条件を満たされなければならない理由を理解するために、 $w^T$  を  $[w_1, w_2, \dots, w_n]$  としてみる。 $x_i$  を変数  $i$  の値とすると、 $w^T \Omega w$  は  $w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n$  の分散を表しているので、負にはなりえないことがわかる。

半正定値行列がつくられることを保証するためには、分散と共分散は整合性のとれた方法で計算されなければならない。たとえば、分散を直近  $m$  個のデータから等ウェイトで計算するときは、共分散も同じ方法で計算しなければならない。分散を  $\lambda = 0.94$  とした EWMA モデルで更新するときは、共分散も同じ方法で更新しなければならない。

内的整合性をもたない分散共分散行列の例として、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 1 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える。各変数の分散は 1.0 なので、共分散は相関係数に等しい。第 1 変数は第 3 変数とかなりの相関があり、第 2 変数も第 3 変数とかなりの相関がある。しかし、第 1 変数と第 2 変数にはまったく相関がない。これは奇妙である。 $w$  を  $(1, 1, -1)$  とおくと (21.17) 式の条件が満たされていないので、この行列は半正定値ではないことがわかる(注17)。

## 要約

Black-Scholes モデルのような普及しているほとんどのオプション価格付けモデルでは、原資産のボラティリティは一定と仮定されている。この仮定は完全なものからはほど遠い。実際は、資産のボラティリティは資産価格と同様に確率変数である。しかし、資産価格とは異なり、ボラティリティは直接観測することができない。本章では、ボラティリティの現在の水準の推移を把握しようとする方法について論じた。

$u_i$ を  $i-1$  日目の終わりから  $i$  日目の終わりまでの市場変数の変化率と定義する。このとき、市場変数の分散率（すなわち、ボラティリティの 2 乗）は  $u_i^2$  の加重平均として計算される。ここで論じた手法の重要な特徴は、 $u_i^2$  の観測値に対して等ウェイトではないという点である。新しい観測値ほど、そのウェイトは大きくなっている。EWMA モデルと GARCH(1,1) モデルでは、観測値が古くなるほどそのウェイトは指数的に減少する。GARCH(1,1) モデルは、分散率の長期平均に対してもウェイトが与えられているという点で、EWMA モデルとは異なっている。EWMA モデルも GARCH(1,1) モデルも、分散率の将来の水準が比較的容易に予測できるような構造をもっている。

GARCH(1,1) や同様のモデルでは、過去データからのパラメータ推定には最尤法がふつう用いられる。この方法では、反復計算によって、過去データの発生確率、すなわち尤度を最大にするようなパラメータの値が求められる。パラメータが決まれば、 $u_i^2$  から自己相関性がどのくらい取り除かれているかによって、モデルの当てはまり具合が判断できる。

分散の推移を把握しようとする各モデルに対して、それに対応した共分散の推移を把握しようとするモデルがつくれる。したがって、ここで述べた方

---

(注17)  $3 \times 3$  の相關行列が内的整合性をもつための条件は、

$$\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 + \rho_{23}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} \leq 1$$

を満たすことである。ここで  $\rho_{ij}$  は変数  $i$  と  $j$  の相関係数である。

法は VaR 計算に使う完全な分散共分散行列を更新する方法として用いることができる。

## 参考文献

- Bollerslev, T. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity," *Journal of Econometrics*, 31 (1986) : 307-27.
- Cumby, R., S. Figlewski, and J. Hasbrook. "Forecasting Volatilities and Correlations with EGARCH Models," *Journal of Derivatives*, 1, 2 (Winter 1993) : 51-63.
- Engle, R.F. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation," *Econometrica*, 50 (1982) : 987-1008.
- Engle R.F., and J. Mezrich. "Grappling with GARCH," *Risk*, September 1995 : 112-17.
- Engle R.F., and J. Mezrich. "GARCH for Groups," *Risk*, August 1996 : 36-40.
- Engle R.F., and V. Ng. "Measuring and Testing the Impact of News on Volatility," *Journal of Finance*, 48 (1993) : 1749-78.
- Nelson, D. "Conditional Heteroscedasticity and Asset Returns: A New Approach," *Econometrica*, 59 (1990) : 347-70.
- Noh, J., R.F. Engle, and A. Kane. "Forecasting Volatility and Option Prices of the S&P 500 Index," *Journal of Derivatives*, 2 (1994) : 17-30.

## 章末問題

- 21.1** 過去データからボラティリティを推定するための指數加重移動平均(EWMA) モデルについて説明せよ。
- 21.2** ボラティリティの更新に用いられる指數加重移動平均モデルと

GARCH(1,1)モデルとの違いは何か。

- 21.3** ある資産の日次ボラティリティの最も直近の推定値は1.5%で、前日の取引終了時点の資産価格は30.00ドルである。EWMA モデルのパラメータ  $\lambda$  の値は0.94で、本日の取引終了時点の価格は30.50ドルとする。EWMA モデルによってボラティリティはいくらに更新されるか。
- 21.4** ある企業ではボラティリティの予測に EWMA モデルが用いられている。その企業はパラメータ  $\lambda$  の値を0.95から0.85に変更することにしたとする。予測に与えそうな影響について説明せよ。
- 21.5** ある市場変数のボラティリティは年率30%である。この変数の日次変化率の大きさに対する99%信頼区間を求めよ。
- 21.6** ある企業がボラティリティの更新に GARCH(1,1) モデルを用いている。このモデルには三つのパラメータ  $\omega$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  が含まれている。他の二つのパラメータを固定したうえで、それぞれのパラメータを少しだけ増加させたときの影響について述べよ。
- 21.7** 米ドル／英ポンド為替レートの日次ボラティリティの最も直近の推定値は0.6%で、昨日午後4時における為替レートは1.5000である。EWMA モデルのパラメータ  $\lambda$  は0.9で、本日午後4時の為替レートは1.4950であった。日次ボラティリティの推定値はいくらに更新されるか。
- 21.8** 昨日の取引終了時点の S&P500 は1,040で、そのときのこの指数の日次ボラティリティの推定値は1%であった。GARCH(1,1) モデルのパラメータは  $\omega=0.000002$ ,  $\alpha=0.06$ ,  $\beta=0.92$  であるとする。本日の取引終了時点の S&P500 の水準が1,060のとき、ボラティリティの新しい推定値はいくらになるか。
- 21.9** 昨日の取引終了時点に計算された、資産 A と資産 B の日次ボラティリティをそれぞれ1.6%と2.5%とする。昨日の取引終了時点の資産価格はそれぞれ20ドルと40ドルで、2資産の収益率の相関係数の推定値は0.25であった。EWMA モデルで用いられるパラメータ

$\lambda$  は0.95である。

- (a) 二つの資産の共分散の現在の推定値を計算せよ。
- (b) 本日の取引終了時点の資産価格をそれぞれ20.5ドルと40.5ドルとするとき、相関係数の推定値を更新せよ。

- 21.10** GARCH(1,1)モデルのパラメータが  $\omega=0.000004$ ,  $\alpha=0.05$ ,  $\beta=0.92$ と推定されている。ボラティリティの長期平均はいくらか。また、分散率がその長期平均に回帰する様子を記述する方程式を示せ。現在のボラティリティが年率20%のとき、20日後のボラティリティの期待値はいくらか。
- 21.11** 資産 X と資産 Y の現在の日次ボラティリティをそれぞれ1.0%と1.2%と仮定する。昨日の取引終了時点における資産価格はそれぞれ30ドルと50ドルで、その時点における2資産の収益率の相関係数の推定値は0.50であった。相関係数とボラティリティは、GARCH(1,1)モデルを用いて更新されている。このとき、モデルのパラメータの推定値は  $\alpha=0.04$ ,  $\beta=0.94$ である。相関係数に対しては  $\omega=0.000001$ , ボラティリティに対しては  $\omega=0.000003$ となっている。本日の取引終了時点の資産価格をそれぞれ31ドルと51ドルとするとき、相関係数の推定値はいくらに更新されるか。
- 21.12** FTSE100株価指数（単位：英ポンド）の日次ボラティリティが1.8%，ドル／ポンド為替レートの日次ボラティリティが0.9%とする。さらに、FTSE100とドル／ポンド為替レートの相関係数を0.4と仮定する。米ドル換算のFTSE100のボラティリティはいくらか。ただし、ドル／ポンド為替レートは1英ポンド当りの米ドルの値で表されるとする（ヒント： $Z=XY$  のとき、近似として、Zの日次変化率は X の日次変化率と Y の日次変化率の和に等しい）。
- 21.13** 問題21.12で、S&P500指数（単位：ドル）とFTSE100指数（単位：ポンド）の相関係数を0.7、S&P500指数（単位：ドル）とドル／ポンド為替レートの相関係数を0.3、S&P500指数の日次ボラティリティを1.6%と仮定する。このとき、S&P500指数（単位：ドル）とドル

換算のFTSE100指数の相関係数はいくらになるか（ヒント：三つの変数 $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ に対して， $X+Y$ と $Z$ の共分散は， $X$ と $Z$ の共分散と $Y$ と $Z$ の共分散の和に等しい）。

- 21.14** (21.9)式のGARCH(1,1)モデル  $\sigma_n^2 = \omega + \alpha u_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2$  は，確率ボラティリティモデル  $dV = a(V_L - V)dt + \xi V dz$  と等価であることを示せ。ただし，時間は日単位， $V$ は資産価格のボラティリティの2乗，

$$a = 1 - \alpha - \beta, \quad V_L = \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}, \quad \xi = \alpha \sqrt{2}$$

である。また，時間を年単位とした場合の確率ボラティリティモデルはどのようになるか（ヒント：変数 $u_{n-1}$ は時間 $\Delta t$ における資産価格の収益率であり，平均ゼロ，標準偏差 $\sigma_{n-1}$ の正規分布に従うと仮定できる。また， $u_{n-1}^2$ と $u_{n-1}^4$ の平均は，それぞれ $\sigma_{n-1}^2$ と $3\sigma_{n-1}^4$ である）。

## 宿題

- 21.15** 昨日の取引終了時点における金の価格は600ドル，その日次ボラティリティの推定値は1.3%であった。本日の取引終了時点の価格は596ドルと仮定する。次のそれぞれのモデルを用いて，ボラティリティの推定値を更新せよ。

- EWMAで $\lambda=0.94$ としたモデル
- GARCH(1,1)で $\omega=0.000002$ ,  $\alpha=0.04$ ,  $\beta=0.94$ としたモデル

- 21.16** 問題21.15で，昨日の取引終了時点における銀の価格は16ドル，その日次ボラティリティの推定値は1.5%，金との相関係数の推定値は0.8と仮定する。本日の取引終了時点における銀の価格は16ドルと変わらなかつたとする。問題21.15の二つのモデルを用いて，銀のボラ

ティリティおよび銀と金の相関係数を更新せよ。また、パラメータ  $\omega$  を金と銀に対して同じ値とするのは、実際上問題のない仮定か。

- 21.17 いくつかの為替レートと株価指数に対する900日以上の日次データを含む Excel のスプレッドシートが、著者の Web サイト：

<http://www.rotman.utoronto.ca/~hull>

からダウンロード可能である。為替レートと株価指数を一つずつ選び、 $\sum_i(v_i - \beta_i)^2$  の値を最小にする EWMA モデルの  $\lambda$  の値を推定せよ。ただし、 $v_i$  は  $i-1$  日目の終わりに推定された分散、 $\beta_i$  は  $i$  日目から  $i+25$  日目までのデータから計算された分散である。Excel の Solver ツールを用いて計算せよ。また、1日目の終わりにおける分散の予測値は、EWMA 計算を始める日の収益率の 2 乗に等しいとせよ。

- 21.18 GARCH(1,1)モデルのパラメータが、 $\alpha=0.03$ ,  $\beta=0.95$ ,  $\omega=0.000002$  であると仮定する。

- (a) ボラティリティの長期平均はいくらか。
- (b) 現在の日次ボラティリティを1.5%とすると、20日後、40日後、60日後のボラティリティの推定値はそれぞれいくらになるか。
- (c) 満期20日、40日、60日のオプションの評価に用いるべきボラティリティはそれぞれいくらか。
- (d) 現在の日次ボラティリティの値が0.5%から2%に上昇する出来事が発生したとする。このとき、20日後、40日後、60日後のボラティリティに与える影響を推定せよ。
- (e) その出来事によって、満期20日、40日、60日のオプションの評価に用いるボラティリティはいくら増加するか推定せよ。

## 第22章

# 信用リスク

第20章で紹介したバリュー・アット・リスクと第17章で考察したグリークスは、市場リスクの計量化を目的としたものである。本章では、金融機関にとってのもう一つの重要なリスクである信用リスクについて考える。ほとんどの金融機関は、信用リスクの計量化や管理に相当な資源を投入している。長年、規制当局は保有する信用リスクに応じた自己資本の維持を銀行に求めしてきた。この自己資本は、ビジネス寸見20.1で説明した市場リスクに対する所要自己資本とは別に要求されるものである。

信用リスクは、資金の借手やデリバティブ取引のカウンター・パーティーがデフォルトする可能性から生じるものである。本章では、企業のデフォルト確率に対する多くの異なる推定方法について論じ、リスク中立世界と実世界におけるデフォルト確率の主な相違点を説明する。また、店頭市場で取引されるデリバティブに対する信用リスクの性質を考察し、信用リスクを軽減

するために、デリバティブ・ディーラーが契約に盛り込む条項についても論じる。さらに、デフォルト相関、ガウシアン・コピュラ、および信用バリュー・アット・リスクの推定についても触れる。

第23章ではクレジット・デリバティブについて論じ、本章で説明した信用リスクに対する考え方を用いて、それらの商品の評価を行う。

## 22.1 信用格付

Moody's や S&P, Fitch のような格付機関は、社債の信用力を表す格付を行う業務をしている。Moody's が付与する最高格付は Aaa である。この格付をもつ債券はデフォルトの可能性がほとんどない、と考えられている。次に高い格付は Aa であり、以下、A, Baa, Ba, B, Caa, Ca, および C と続く。そして、Baa 以上の格付をもつ債券だけが投資適格 (investment grade) とみなされている。一方、Moody's の Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa, Ca, および C に相当する S&P の格付は、それぞれ AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, および C である。Fitch の格付の定義は S&P のものと同様である。さらに細かい格付を行うために、Moody's は Aa を Aa1, Aa2, および Aa3 に、A を A1, A2, および A3 に、といった具合に分割している。同様に、S&P は AA を AA+, AA, および AA- に、A を A+, A, および A- に、といった具合に分割している。また、Moody's の Aaa と S&P の AAA には細分化された格付はなく、下から二つの格付も通常細分化されていない。

## 22.2 ヒストリカルなデフォルト確率

表22.1（次頁）は格付機関が作成するデータの典型例である。その表には、20年間における債券のデフォルト確率が当初の格付ごとに与えられている。たとえば、格付 Baa の債券が 1 年目の終わりまでにデフォルトする確率は 0.181%，2 年目の終わりまでにデフォルトする確率は 0.506%，などの

表22.1 平均累積デフォルト率（%）、1970-2006

| 期間(年) | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 7      | 10     | 15     | 20     |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Aaa   | 0.000  | 0.000  | 0.000  | 0.026  | 0.099  | 0.251  | 0.521  | 0.992  | 1.191  |
| Aa    | 0.008  | 0.019  | 0.042  | 0.106  | 0.177  | 0.343  | 0.522  | 1.111  | 1.929  |
| A     | 0.021  | 0.095  | 0.220  | 0.344  | 0.472  | 0.759  | 1.287  | 2.364  | 4.238  |
| Baa   | 0.181  | 0.506  | 0.930  | 1.434  | 1.938  | 2.959  | 4.637  | 8.244  | 11.362 |
| Ba    | 1.205  | 3.219  | 5.568  | 7.958  | 10.215 | 14.005 | 19.118 | 28.380 | 35.093 |
| B     | 5.236  | 11.296 | 17.043 | 22.054 | 26.794 | 34.771 | 43.343 | 52.175 | 54.421 |
| Caa-C | 19.476 | 30.494 | 39.717 | 46.904 | 52.622 | 59.938 | 69.178 | 70.870 | 70.870 |

(出所) Moody's

ように与えられている。特定の年に債券がデフォルトする確率は、表から計算することができる。たとえば、格付 Baa の債券が 2 年目にデフォルトする確率は  $0.506 - 0.181 = 0.325\%$  になる。

表22.1をみると、投資適格債券については、1 年間にデフォルトする確率は時間の増加関数になる傾向がある（格付 A の債券が 0 - 5 年、5 - 10 年、10 - 15 年、15 - 20 年にデフォルトする確率は、それぞれ  $0.472\%$ 、 $0.815\%$ 、 $1.077\%$ 、 $1.874\%$  となっている）。これは、債券の発行体の信用力は当初高いと考えられているが、時間の経過とともに発行体の財務健全性が悪化する可能性は高まるからである。一方、低格付の債券については、デフォルト確率は時間の減少関数になることが多い（格付 B の債券が 0 - 5 年、5 - 10 年、10 - 15 年、15 - 20 年にデフォルトする確率は、それぞれ  $26.794\%$ 、 $16.549\%$ 、 $8.832\%$ 、 $2.246\%$  となっている）。というのは、低格付の債券の場合には、次の 1、2 年がデフォルトするかしないかの重大な時期で、それを超えて発行体が長く生き残るほど、財務健全性が改善する可能性は高くなるからである。

### デフォルト強度

表22.1より、格付 Caa 以下の債券が 3 年目にデフォルトする確率は  $39.717 - 30.494 = 9.223\%$  と求まる。これを無条件のデフォルト確率（unconditional default probability）と呼ぶことにする。これは、時点 0 における

3年目のデフォルト確率である。債券が2年目の終わりまで存続する確率は $100 - 30.494 = 69.506\%$ である。したがって、それまでにデフォルトしていないという条件付きでの3年目に債券がデフォルトする確率は $0.09223 / 0.69506$ 、すなわち $13.27\%$ になる。この条件付きデフォルト確率はデフォルト強度 (default intensity) またはハザード率 (hazard rate) と呼ばれる。

いま計算した $13.27\%$ は、期間1年に対するデフォルト確率である。1年のかわりに微小時間 $\Delta t$ の期間に対して考える。時点 $t$ におけるデフォルト強度 $\lambda(t)$ を、それまでにデフォルトしていないという条件付きでの時点 $t$ から時点 $t + \Delta t$ までの間にデフォルトする確率が $\lambda(t)\Delta t$ になるようなものとして定義する。 $V(t)$ を企業が時点 $t$ まで存続する（すなわち、時点 $t$ までデフォルトしない）累積確率とすると、時点 $t$ から時点 $t + \Delta t$ までの間にデフォルトする条件付き確率は $[V(t) - V(t + \Delta t)] / V(t)$ になる。これは $\lambda(t)\Delta t$ に等しいので、

$$V(t + \Delta t) - V(t) = -\lambda(t)V(t)\Delta t$$

となる。極限をとると、

$$\frac{dV(t)}{dt} = -\lambda(t)V(t)$$

となり、

$$V(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$$

が得られる。したがって、 $Q(t)$ を時点 $t$ までにデフォルトする確率とするとき、 $Q(t) = 1 - V(t)$ であるから、

$$Q(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda(\tau) d\tau}$$

あるいは、

$$Q(t) = 1 - e^{-\bar{\lambda}(t)t} \quad (22.1)$$

が成り立つ。ここで $\bar{\lambda}(t)$ は時点0から時点 $t$ までの平均デフォルト強度（ハザード率）である。

## 22.3 回 収 率

企業が倒産すると、資金の貸手はその企業の資産に対する債権の請求を行う(注1)。債権者が債権の減免に応じて、その企業が再建されることもある。それ以外の場合には、破産管財人が資産を売却し、その売却代金を用いてできるだけ債権の弁済が行われる。一般的に、他の債権より優先される債権が存在し、優先債権のほうが弁済率は高い。

債券に対する回収率は、一般にデフォルト直後の債券の市場価格、すなわち額面に対する割合で定義される。表22.2は、米国で発行された債券に対する異なる種類ごとの平均回収率に関する過去データである。それによると、シニア担保付債 (senior secured debt) の平均回収率は額面当り54.44セントで、ジュニア劣後債 (junior subordinated debt) の平均回収率は額面当りわずか24.47セントである。

回収率とデフォルト率との間には、はっきりとした負の相関がみられる。Moody'sは1982年から2006年までの各年の平均回収率と平均デフォルト率を調べ、次の関係が過去データによく当てはまることを見出している(注2)。

$$\text{回収率} = 59.1 - 8.356 \times \text{デフォルト率}$$

ここで、回収率はシニア無担保債の1年間の平均回収率(%)、デフォルト率は発行体の1年間のデフォルト率(%)である。

この関係は、デフォルト率に関して悪い年は回収率も低くなるため、通常二重に悪い年になる、ということを意味している。たとえば、年間の平均デフォルト率がわずか0.1%であるときは、期待回収率は58.3%と比較的高い

---

(注1) 米国では債券保有者が請求できる債権額は、債券の額面に経過利子を加えたものである。

(注2) D.T. Hamilton, P. Varma, S. Ou, and R. Cantor, "Default and Recovery Rates of Corporate Bond Issuers," Moody's Investor's Services, January 2004 を参照。ここでの回帰係数の  $R^2$  は0.6となっている。また、相関に関する検証および考察については、E.I. Altman, B. Brady, A. Resti, and A. Sironi, "The Link between Default and Recovery Rates: Implications for Credit Risk Models and Pro cyclicality," Working Paper, New York University, 2003 を参照。

表22.2 1982-2006年における社債の回収率（額面に対するパーセント）

| クラス    | 平均回収率 (%) |
|--------|-----------|
| シニア担保付 | 54.44     |
| シニア無担保 | 38.39     |
| シニア劣後  | 32.85     |
| 劣後     | 31.61     |
| ジュニア劣後 | 24.47     |

(出所) Moody's

が、デフォルト率が3%と比較的高いときは、期待回収率はわずか34.0%である。

## 22.4 債券価格からのデフォルト確率の推定

企業のデフォルト確率は既発債の価格から推定できる。その際には、社債の価格が同じ条件の無リスク債券より低くなる理由はデフォルトの可能性のみで説明できる、と仮定するのが通常である(注3)。

まず、近似的な計算を行ってみよう。社債のイールドが同じ条件の無リスク債券より200ペース・ポイント高く、デフォルト時の期待回収率が40%である場合を考えてみる。このとき、社債の保有者はデフォルトが発生すると200ペース・ポイント(年2%)を失うことになる。したがって、回収率を40%としているので、それまでにデフォルトしていないという条件付きでの年間デフォルト確率は、 $0.02/(1-0.4)$ 、すなわち3.33%と推定される。一般的には、

$$\lambda = \frac{s}{1-R} \quad (22.2)$$

(注3) この仮定は完全ではない。実際、社債の価格は流動性の影響を受ける。流動性が低くなるほど、債券の価格も低くなる。

となる。ここで  $\bar{\lambda}$  は年当りの平均デフォルト強度（ハザード率）， $s$  は無リスク金利に対する債券イールドのスプレッド， $R$  は期待回収率である。

### より厳密な計算

より厳密な計算を行うために、これまで考えてきた社債の満期を 5 年、クーポンを年率 6%（年 2 回払い）、債券イールドを年率 7%（連続複利）とする。また、同じ条件の無リスク債券のイールドを 5%（連続複利）とする。このとき、社債の価格は 95.34、無リスク債券の価格は 104.09 となる。したがって、この社債に対する 5 年間のデフォルトによる期待損失は  $104.09 - 95.34$ 、すなわち 8.75 ドルになる。年間のデフォルト確率（簡単にために毎年同じとする）を  $Q$  とする。デフォルトは（利払い直前の）0.5 年後、1.5 年後、2.5 年後、3.5 年後、および 4.5 年後に発生すると仮定して、デフォルトによる期待損失を、 $Q$  を用いて計算した結果が表 22.3 である。ここで、無リスク金利はすべての満期に対して 5%（連続複利）であると仮定している。

計算を例示するために、表 22.3 の 3.5 年の行について考えよう。満期 3.5 年の社債の期待価格は、デフォルトはないと仮定してフォワード・レートを用いると、

$$3 + 3e^{-0.05 \times 0.5} + 3e^{-0.05 \times 1.0} + 103e^{-0.05 \times 1.5} = 104.34$$

表 22.3 年間デフォルト確率を  $Q$  としたときの、債券のデフォルトから発生する損失の計算（元本 = 100 ドル）

| 時間<br>(年) | デフォルト<br>確率 | 回収額<br>(ドル) | 無リスク<br>での価値<br>(ドル) | デフォルト<br>による損失<br>(ドル) | 割引率    | 期待損失の<br>現在価値<br>(ドル) |
|-----------|-------------|-------------|----------------------|------------------------|--------|-----------------------|
| 0.5       | $Q$         | 40          | 106.73               | 66.73                  | 0.9753 | $65.08Q$              |
| 1.5       | $Q$         | 40          | 105.97               | 65.97                  | 0.9277 | $61.20Q$              |
| 2.5       | $Q$         | 40          | 105.17               | 65.17                  | 0.8825 | $57.52Q$              |
| 3.5       | $Q$         | 40          | 104.34               | 64.34                  | 0.8395 | $54.01Q$              |
| 4.5       | $Q$         | 40          | 103.46               | 63.46                  | 0.7985 | $50.67Q$              |
| 計         |             |             |                      |                        |        | 288.48Q               |

になる。前節の回収率の定義から、デフォルト時の回収額は40となるので、デフォルト時の損失は $104.34 - 40$ 、すなわち64.34ドルになる。この損失の現在価値は54.01である。したがって、期待損失は $54.01Q$ になる。

期待損失の合計は $288.48Q$ になる。これが8.75に等しいとおくと、 $Q$ の値は $8.75/288.48$ 、すなわち3.03%と求まる。ここでの計算では、デフォルト確率は毎年同じで、デフォルトは毎年一時点でのみ発生すると仮定しているが、デフォルトが複数時点での発生すると仮定して計算することも可能である。また、無条件のデフォルト確率が一定であるとするかわりに、デフォルト強度（ハザード率）が一定であると仮定したり、デフォルト確率が特定のパターンで時間とともに変化すると仮定して計算することもできる。さらに、複数の債券を用いれば、複数のパラメータで表したデフォルト確率の期間構造を推定することもできる。たとえば、満期が3年、5年、7年、および10年の債券があるとしよう。一つ目の債券から最初の3年間の年間デフォルト確率が推定でき、二つ目の債券から4年目と5年目の年間デフォルト確率、三つ目の債券から6年目と7年目の年間デフォルト確率、四つ目の債券から8年目、9年目、10年目の年間デフォルト確率が推定できる。（章末問題22.15と22.29を参照）。この方法は、4.5節で説明したゼロクーポン・イールドカーブを計算する際のブートストラップと同様の手続である。

### 無リスク金利

債券価格を用いてデフォルト確率を推定する際には、“無リスク金利”と“無リスク債券”という用語の意味が重要になってくる。(22.2)式のスプレッド  $s$  は、同じ条件の無リスク債券のイールドに対する社債の超過イールドである。表22.3における債券を無リスクとして評価した場合の価値は、無リスク金利を用いて計算しなければならない。また、社債のイールドを呈示する際に利用されるベンチマークとなる無リスク金利は、同じ条件の国債のイールドである（たとえば債券トレーダーは、社債のイールドを対国債スプレッドが250ベース・ポイントであると呈示したりする）。

4.1節で論じたように、デリバティブの価値を求める際に、トレーダーは

無リスク金利のかわりになるものとして LIBOR／スワップ・レートを使うことが多い。また、デフォルト確率を計算する際の無リスク金利にも、LIBOR／スワップ・レートを使うことが多い。たとえば、債券価格からデフォルト確率を求めるときに、(22.2)式のスプレッド  $s$  は LIBOR／スワップ・レートに対する債券イールドのスプレッドとしている。また、表22.3の計算で用いる無リスク割引率も LIBOR／スワップ・ゼロ・レートから計算されたものが使われる。

トレーダーが想定する無リスク金利を、(次章で説明する) クレジット・デフォルト・スワップを用いて推定することもできる。そのレートは平均で LIBOR／スワップ・レート-10ペース・ポイントにだいたい等しい(注4)。この推定結果は妥当な水準である。7.5節で説明したように、スワップ・レートに内在する信用リスクは格付 AA の相手方に 6 カ月物ローンを続けて行う際に発生する信用リスクであり、10ペース・ポイントという水準は格付 AA に対する 6 カ月物商品のデフォルト・リスクプレミアムとして妥当なものである。

### アセットスワップ (Asset Swap)

実務では、債券価格に織り込まれているデフォルト確率を計算する方法として、トレーダーはアセットスワップ・スプレッドを利用することもある。その理由は、アセットスワップ・スプレッドは LIBOR／スワップ・カーブに対する社債のイールド・スプレッドそのものの推定値になっているからである。

アセットスワップの仕組みについて説明するために、ある債券に対するアセットスワップ・スプレッドが150ペース・ポイントと表示されている状況を考えよう。このとき、次の三つの状況が考えられる。

---

(注4) J. Hull, M. Predescu, and A. White, "The Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields, and Credit Rating Announcements," *Journal of Banking and Finance*, 28 (November 2004) : 2789-2811 を参照。

1. 債券がパー100で売られているとする。その場合、スワップの片側（企業 A とする）は債券のクーポンの支払、もう片側（企業 B とする）は LIBOR+150ペース・ポイントの支払になっている。交換されるクーポンは約束されたものであり、債券のデフォルトの有無に関係なく交換は行われる。
2. 債券がパーを下回る、たとえば95で売られているとする。その場合、スワップは企業 A がクーポンの支払に加えて元本100ドル当り 5 ドルを支払うように組まれている。企業 B の支払は LIBOR+150 ペース・ポイントである。
3. 債券がパーを上回る、たとえば108で売られているとする。その場合、企業 B が LIBOR+150ペース・ポイントに加えて元本100ドル当り 8 ドルを支払うように組まれている。企業 A の支払はクーポンである。

これらすべての状況に対して、アセットスワップ・スプレッドの現在価値は、無リスク金利が LIBOR／スワップ・カーブで与えられると仮定して計算した同じ条件の無リスク債券の価格が社債の価格を上回る金額に等しい（章末問題22.24を参照）。

表22.3の例を再び考えよう。そこでは、LIBOR／スワップ・ゼロカーブは 5 % フラットと仮定されている。債券価格のかわりに、アセットスワップ・スプレッドが150ペース・ポイントであるとわかっているとする。これより、無リスク債券の価値が社債の価値を上回る金額は 1 年当り 150ペース・ポイントの 5 年間の支払に対する現在価値に等しい。支払を半年ごととすると、この価値は元本100ドルに対して 6.55 ドルになる。この場合、表22.3の総損失額は 6.55 ドルになる。したがって、1 年当りのデフォルト確率  $Q$  は  $6.55/288.48$ 、すなわち 2.27% になる。

## 22.5 デフォルト確率の推定結果に関する比較

過去データから推定されるデフォルト確率は債券価格から導出されるもの

よりかなり小さく、表22.4のようになっている(注5)。それらの値は、格付ごとに企業の7年間にわたる平均デフォルト強度(年率)を、(a)過去データ、(b)債券価格から計算したものである。

(22.1)式で  $t=7$ とした式と表22.1に基づいて、過去データからのデフォルト強度を計算する。(22.1)式より、

$$\bar{\lambda}(7) = -\frac{1}{7} \ln[1 - Q(7)]$$

である。ここで、 $\bar{\lambda}(t)$ は時点  $t$ までの平均デフォルト強度(またはハザード率)、 $Q(t)$ は時点  $t$ までの累積デフォルト確率である。 $Q(7)$ の値は表22.1から直接得られる。たとえば、格付Aの企業を考えると、 $Q(7)$ の値は0.00759である。したがって、7年間の平均デフォルト強度は、

$$\bar{\lambda}(7) = -\frac{1}{7} \ln(0.99241) = 0.0011$$

すなわち0.11%となる。

(22.2)式とメリルリンチが公表している債券イールドに基づいて、債券価格からの平均デフォルト強度を計算する。計算結果は1996年12月から2007年10月までの平均値である。回収率は40%と仮定し、前節で説明した理由により、無リスク金利は7年物スワップ・レートから10ペース・ポイント引いた値とする。たとえば、格付Aの債券に対するメリルリンチの平均イールドは5.993%である。平均スワップ・レートは5.398%だったので、平均無リスク金利は5.298%である。したがって、期間7年の平均デフォルト確率は、

$$\frac{0.05993 - 0.05298}{1 - 0.4} = 0.0116$$

すなわち1.16%と求まる。

表22.4からわかるように、債券価格から計算されたデフォルト確率と過去

(注5) 表22.4と表22.5は、J. Hull, M. Predescu, and A. White, "Bond Prices, Default Probabilities, and Risk Premiums," *Journal of Credit Risk*, 1, 2 (Spring 2005): 53-60の結果を更新したものである。

データから計算されたデフォルト確率の比は、投資適格な企業に対しては非常に高く、信用度が低くなるにつれて小さくなる傾向がみられる。また、二つのデフォルト確率の差は、信用度が低くなるにつれて大きくなる傾向がある。

表22.5はこれらの結果に対する別の見方をまとめたもので、異なる格付ごとに、債券に投資した場合の無リスク金利（7年物スワップ・レートから10ペース・ポイント引いたもの）に対する超過収益率が示されている。再び格付Aの債券について考える。社債イールドの対国債スプレッドの平均は112ペース・ポイントである。そのうち42ペース・ポイントは7年物国債

表22.4 期間7年の平均デフォルト強度（年率%）

| 格付     | 過去データからの<br>デフォルト強度 | 債券価格からの<br>デフォルト強度 | 比    | 差    |
|--------|---------------------|--------------------|------|------|
| Aaa    | 0.04                | 0.60               | 16.7 | 0.56 |
| Aa     | 0.05                | 0.74               | 14.6 | 0.68 |
| A      | 0.11                | 1.16               | 10.5 | 1.04 |
| Baa    | 0.43                | 2.13               | 5.0  | 1.71 |
| Ba     | 2.16                | 4.67               | 2.2  | 2.54 |
| B      | 6.10                | 7.97               | 1.3  | 1.98 |
| Caa 以下 | 13.07               | 18.16              | 1.4  | 5.50 |

表22.5 債券の期待超過収益率（ペース・ポイント）

| 格付  | 債券イールドの<br>対国債スプレッド | 無リスク金利の<br>対国債スプレッド | 過去のデフォルト実績<br>に対するスプレッド | 超過収益率 |
|-----|---------------------|---------------------|-------------------------|-------|
| Aaa | 78                  | 42                  | 2                       | 34    |
| Aa  | 87                  | 42                  | 3                       | 42    |
| A   | 112                 | 42                  | 7                       | 63    |
| Baa | 170                 | 42                  | 26                      | 102   |
| Ba  | 323                 | 42                  | 129                     | 151   |
| B   | 521                 | 42                  | 366                     | 112   |
| Caa | 1132                | 42                  | 784                     | 305   |

イールドと無リスク金利のかわりに使用している金利との平均スプレッドで説明される。また、7ペース・ポイントのスプレッドは期待デフォルトの対価として必要なものである（これは、表22.4の実世界でのデフォルト確率に0.6を乗じて、回収を考慮したものである）。これから、（期待デフォルト考慮後の）超過収益率は63ペース・ポイントになる。

表22.4と表22.5とから、デフォルト確率の推定値における大きな差は、債券の超過収益率でみると小さい（しかし重要な）ものであることがわかる。格付Aaaの債券では、二つのデフォルト確率の比は16.7であるが、超過収益率はわずか34ペース・ポイントである。信用度が低くなるにつれて超過収益率は増大する傾向にある（注6）。

表22.5の超過収益率は時間とともに変化する。信用スプレッド、したがって超過収益率は、2001年、2002年、および2003年の前半は高かった。その後、2007年7月の信用取縮まではかなり低かったが、それ以降急速に拡大し始めた（2007年の信用取縮についてはビジネス寸見23.3を参照）。

### 実世界の確率とリスク中立確率

債券イールドから計算されるデフォルト確率はデフォルトのリスク中立確率である。その理由を説明するために、表22.3のデフォルト確率の計算を考えてみよう。その計算では、デフォルトによる損失の期待値が無リスク金利で割り引けることを仮定している。リスク中立化法からわかるように、これは損失の期待値がリスク中立世界で計算されているときのみに妥当な計算方法である。したがって、表22.3のデフォルト確率  $Q$  はリスク中立確率である。

それに対し、過去データから計算されるデフォルト確率は実世界でのデフォルト確率である（「自然確率（physical probability）」と呼ばれることがある）。表22.5の期待超過収益率は実世界とリスク中立世界でのデフォルト確

---

(注6) 表22.4と表22.5では、格付Bの債券に対する結果は全体のパターンと逆になっている。

率の差から直接生じている。もし期待超過収益が存在しなければ、実世界とリスク中立世界でのデフォルト確率は同じになる。その逆も成り立つ。

実世界とリスク中立世界でのデフォルト確率が大きく異なるのはなぜだろうか。これまでの議論からわかるように、これは、社債トレーダーが平均的に無リスク金利以上に稼ぐのはなぜか、という問と同じである。

一つの理由は、社債は相対的に流動性が低いため、債券に求められる収益率はデフォルト・リスクの見合いより高くなるというものである。しかし、これは超過収益率が高いことの小さな理由でしかない。これで説明できるのは、表22.5の超過収益率のうち、おそらく25ペース・ポイントぐらいである。考えうる別の理由として、債券トレーダーの主観的なデフォルト確率は表22.1で与えられるデフォルト確率よりも非常に高いというものがある。債券トレーダーは1970年から2003年にかけてみられたよりも、もっと悪い景気のシナリオまで想定しているのかもしれない。しかし、これによっても観測される超過収益率の大部分を説明することはむずかしい(注7)。

表22.4および表22.5の結果が得られるはるかに重要な理由として、各債券のデフォルトは独立事象ではないということがあげられる。デフォルト率には、非常に低い時期と非常に高い時期がある。異なる年のデフォルト率を見れば、このことがわかる。Moody'sの統計によれば、1970年から2006年までの間に1年当りのデフォルト率は1979年の最低値0.09%から2001年の最高値3.81%までの範囲を動いている。このデフォルト率の年ごとの変動はシステムティック・リスク（分散除去できないリスク）となるので、債券トレーダーはこのリスクへの対価として期待超過収益を稼ぐことになる。年ごとのデフォルト率の変化は経済全体の状況の変化から生じるものであり、一つの

(注7) 1970年から2006年までの期間に基づいた表22.1以外に、Moody'sは1920年から2006年までの期間に基づいた同様の表を作成している。その表を用いると、投資適格債券に対するデフォルト強度の過去実績は、表22.4のものよりいくぶん上昇する。デフォルト強度は格付Aaaでは4bpsから6bpsへ、格付Aaでは5bpsから22bpsへ、格付Aでは11bpsから29bpsへ、格付Baaでは43bpsから73bpsへそれぞれ増加する。しかし、投資不適格な格付に対しては、デフォルト強度の過去実績は低下する。

企業の倒産が別の企業の倒産を引き起こす連鎖倒産の影響もあるであろう（研究者の間では、後者は「信用の伝染（credit contagion）」と呼ばれている）。

システムティック・リスクに加えて、各債券には非システムティック・リスク（銘柄固有のリスク）がある。株式の場合には、たとえば30銘柄のポートフォリオを選択することによって、投資家は非システムティック・リスクを分散除去できる、という主張がなされるだろう。したがって、非システムティック・リスクに対するリスク・プレミアムは要求されないことになる。しかし債券の場合には、このことはあまり明らかなことではない。債券の収益率は、上限があるためかなりゆがんだものになっている（たとえば個別の債券では、デフォルトしない場合とした場合に対応して、年間の収益率は99.75%の確率で7%，0.25%の確率で-60%といった感じになる）。このタイプのリスクは「分散除去」がむずかしい（注8）。分散には非常に多くの銘柄が必要となる。実際、多くの債券ポートフォリオは十分に分散されているとは言いがたい状態である。その結果、債券トレーダーは上述のシステムティック・リスクに加えて、非システムティック・リスクに対しても超過収益率を要求することになるだろう。

以上のことからすると、信用リスクの分析では実世界とリスク中立世界でのデフォルト確率のどちらを使うべきか、ということが当然問題になる。それは分析の目的によって決まってくる。クレジット・デリバティブの価値や商品の価格付けへのデフォルト・リスクの影響を評価する際には、リスク中立デフォルト確率を用いるべきである。その理由は、分析には将来の期待キャッシュフローの現在価値計算を伴い、その際にほぼ間違なくリスク中立化法が（陰にも陽にも）用いられるからである。一方、デフォルトにより将来発生しうる潜在的な損失を計算するためのシナリオ分析では、実世界でのデフォルト確率を用いるべきである。

---

（注8） J.D. Amato and E.M. Remolona, “The credit spread puzzle,” *BIS Quarterly Review*, 5 (December 2003) :51-63 を参照。

## 22.6 株価を用いたデフォルト確率の推定

表22.1のような表を用いて企業の実世界でのデフォルト確率を推定するとき、企業の信用格付に基づいて評価が行われる。残念なことに、信用格付の見直し頻度は比較的少ない。そのため、株価にはデフォルト確率を推定するためのもっと最新の情報が含まれていると主張するアナリストもいる。

1974年に、Mertonは企業の株式がその企業の資産に対するオプションであるというモデルを提案した(注9)。簡単のため、満期  $T$  の割引債を1銘柄だけ発行している企業を考える。

$V_0$  : 現在の企業の資産価値

$V_T$  : 時点  $T$  における企業の資産価値

$E_0$  : 現在の企業の株式の価値

$E_T$  : 時点  $T$  における企業の株式の価値

$D$  : 時点  $T$  に返済する負債額

$\sigma_V$  : 資産のボラティリティ (定数と仮定する)

$\sigma_E$  : 株式の瞬間のボラティリティ

と定義する。 $V_T < D$  のときは、時点  $T$  において企業は負債の債務を履行しないとするのが(少なくとも理論的には)合理的である。このとき、株式の価値はゼロになる。 $V_T > D$  のときは、時点  $T$  において企業は負債を返済し、このときの株式の価値は  $V_T - D$  になる。したがって、Merton モデルでは時点  $T$  における企業の株式の価値は、

$$E_T = \max(V_T - D, 0)$$

になる。このことより、株式は負債の返済額を行使価格とする資産価値に対するコール・オプションであることがわかる。Black-Scholes の公式を用いると、現時点における株式の価値は、

$$E_0 = V_0 N(d_1) - D e^{-rT} N(d_2) \quad (22.3)$$

(注9) R. Merton, "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29 (1974): 449-70 を参照。

で与えられる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/D) + (r + \sigma_E^2/2)T}{\sigma_V \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T}$$

である。また、現時点における負債の価値は  $V_0 - E_0$  である。

企業が負債の債務を履行しないリスク中立確率は  $N(-d_2)$  である。これを計算するためには  $V_0$  と  $\sigma_V$  が必要となるが、これらはどちらも直接観測できない量である。しかし、企業の株式が上場されている場合には、 $E_0$  は観測することができる。したがって、(22.3)式が  $V_0$  と  $\sigma_V$  に対する一つの条件式になる。また、 $\sigma_E$  は過去データやオプション価格から推定できる。伊藤の補題より、

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V_0$$

すなわち、

$$\sigma_E E_0 = N(d_1) \sigma_V V_0 \quad (22.4)$$

が得られる。この式が  $V_0$  と  $\sigma_V$  に対するもう一つの条件式になる。(22.3)式と(22.4)式からなる連立方程式を解くと、 $V_0$  と  $\sigma_V$  の値が得られる(注10)。

### 【例22.1】

ある企業の株式の価値は300万ドルで、株式のボラティリティは80%とする。1年後に返済する負債額は1,000万ドルで、無リスク金利は年率5%とする。この場合、 $E_0 = 3$ ,  $\sigma_E = 0.80$ ,  $r = 0.05$ ,  $T = 1$ , および  $D = 10$  である。(22.3)式と(22.4)式を解くと、 $V_0 = 12.40$  と  $\sigma_V = 0.2123$  が得られる。パラメータ  $d_2$  は1.1408となるので、デフォルト確率は  $N(-d_2) = 0.127$ 、すなわち12.7%になる。負債の市場価値は  $V_0 - E_0$ 、すなわち9.40になる。負債の債務額の現在価値は  $10e^{-0.05 \times 1} = 9.51$  である。したがって、負債に対する期待損失は  $(9.51 - 9.40)/9.51$ 、すなわち債

(注10)  $F(x, y) = 0$  と  $G(x, y) = 0$  からなる二つの非線形方程式を解くには、Excel の Solver ルーチンを用いて、 $[F(x, y)]^2 + [G(x, y)]^2$  を最小化する  $x$  と  $y$  をみつければよい。

債務不履行がないとした場合の負債の価値の約1.2%になる。これとデフォルト確率を比較すると、債務不履行発生時の期待回収率は(12.7-1.2)/12.7、すなわち債務不履行がないとした場合の負債の価値の約91%となる。

これまで説明してきた基本的な Merton モデルは、いろいろな方向に拡張されてきた。たとえば、企業の資産価値があるバリア水準を下回ったときにデフォルトが起きると仮定する拡張もある。

Merton モデルおよびその拡張から求められるデフォルト確率は、実際のデフォルトとどのように対応しているであろうか。Merton モデルおよびその拡張は（リスク中立世界または実世界での）デフォルト確率のよい序列を与えてくれる、というのがその答である。このことは、単調な変換を用いて、Merton モデルによるデフォルト確率から実世界およびリスク中立世界でのデフォルト確率のよい推定値を得ることが可能である、ということを意味している（注11）。

## 22.7 デリバティブ取引における信用リスク

デリバティブ取引の信用エクスポージャーは、ローン取引のものよりも複雑である。それはデフォルト発生時の債権がより不確定だからである。あるカウンター・パーティとのデリバティブ契約を一つ保有する金融機関を考えよう。そのとき、次の三つの状況がありうる。

1. 契約が金融機関にとって常に負債となる
2. 契約が金融機関にとって常に資産となる

(注11) Moody's の KMV は、Merton モデルによって得られたデフォルト確率を実世界でのデフォルト確率（KMV はこれを EDF（expected default frequency）と呼んでいる）に変換するサービスを提供している。また、CreditGrades は Merton モデルを用いて、リスク中立デフォルト確率に密接なつながりのある、クレジット・スプレッドの推定を行っている。

### 3. 契約が金融機関にとって資産にも負債にもなりうる

最初の分類に属するデリバティブ契約の例はオプションの売りポジション，2番目の分類に属する例はオプションの買いポジション，3番目の分類に属する例はフォワード契約である。

最初の分類に属するデリバティブについては，金融機関にとっての信用リスクは存在しない。カウンター・パートナーが破産した場合に，損失は発生しないからである。このデリバティブはカウンター・パートナーの資産の一つなので，保持されるか，清算されるか，第三者に売却される。その結果は金融機関にとっては損にも益にもならない。

2番目の分類に属するデリバティブについては，金融機関にとっての信用リスクは常に存在する。カウンター・パートナーが破産した場合には，損失が発生する可能性が高い。このデリバティブはカウンター・パートナーの負債の一つなので，金融機関はカウンター・パートナーの資産に対する差押え請求を行う必要があり，デリバティブの価値の何割かを受け取ることになる（デリバティブ取引から発生する債権の優先順位は無保証かつ劣後である場合が一般的である）。

3番目の分類に属するデリバティブについては，金融機関にとっての信用リスクは存在する場合もしない場合もある。デリバティブの価値が金融機関からみて正のときにカウンター・パートナーがデフォルトした場合には，カウンター・パートナーの資産に対する差押え請求が行われ，損失が発生する可能性が高い。デリバティブの価値が金融機関からみて負のときにカウンター・パートナーがデフォルトした場合には，デリバティブは保持されるか，清算されるか，第三者に売却されるので，損失は発生しない（注12）。

---

(注12) 企業が倒産するのは，一つの取引の価値の結果ではなく，全体としての財務健全性が悪化した結果であることが多い。

## カウンター・パーティーのデフォルト・リスクを考慮したデリバティブ評価の調整

金融機関（あるいはデリバティブの最終ユーザー）は、カウンター・パーティーの信用リスクをデリバティブの価値にどのように反映させればよいだろうか。時点  $T$  に満期を迎えると、デフォルトがないとしたときの価値が現在  $f_0$  であるデリバティブを考える。デフォルトは時点  $t_1, t_2, \dots, t_n (t_n = T)$  に発生するとし、時点  $t_i$  における金融機関にとってのデリバティブの（デフォルトがないとしたときの）価値を  $f_i$  とする。また、時点  $t_i$  におけるリスク中立デフォルト確率を  $q_i$ 、期待回収率を  $R$  と定義する（注13）。

時点  $t_i$  におけるエクスポージャーは金融機関がもつ潜在的な損失である。それは  $\max(f_i, 0)$  である。デフォルト時の期待回収額は、エクスポージャーに回収率  $R$  を乗じた額と仮定する。さらに、回収率とデフォルト確率はデリバティブの価値とは独立であると仮定する。このとき、時点  $t_i$  におけるデフォルトによるリスク中立な期待損失は、

$$q_i(1-R)\hat{E}[\max(f_i, 0)]$$

となる。ここで  $\hat{E}$  はリスク中立世界における期待値である。現在価値を計算すると、デフォルトによるコストは、

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (22.5)$$

となる。ここで  $u_i$  は  $q_i(1-R)$  に等しく、 $v_i$  は時点  $t_i$  に対象としているデリバティブのその時点でのエクスポージャーを支払う商品の現在価値である。

あらためて上で述べたデリバティブの三つの分類のそれぞれについて考えてみよう。1番目の分類（デリバティブが金融機関にとって常に負債となる場合）は簡単に扱える。 $f_i$  は常に負となるため、デフォルトによる総期待損失は（22.5）式より常にゼロとなる。したがって、金融機関はデフォルトのコストを考慮する調整を行う必要がない（もちろん、カウンター・パーティーは、

---

（注13） デフォルト確率は、22.4節で説明した方法を用いて債券価格から計算することができる。

自分側のプライシング時には金融機関のデフォルトの可能性を考慮したいであろう)。

2番目の分類(デリバティブが金融機関にとって常に資産となる場合)では、 $f_i$ は常に正である。したがって、 $\max(f_i, 0)$ は常に $f_i$ に等しい。デリバティブのペイオフが満期 $T$ のみであると仮定する。この場合、 $f_0$ は $f_i$ の現在価値となるので、すべての*i*に対し $v_i = f_0$ となる。このことから、デフォルトによるコストの現在価値を表す(22.5)式は、

$$f_0 \sum_{i=1}^n q_i (1-R)$$

となる。 $f_0^*$ を(デフォルトの可能性を考慮した)デリバティブの本当の価値とすると、

$$f_0^* = f_0 - f_0 \sum_{i=1}^n q_i (1-R) = f_0 \left[ 1 - \sum_{i=1}^n q_i (1-R) \right] \quad (22.6)$$

となる。

2番目の分類に属する商品の一つの例として、時点 $T$ に1ドルが償還する、デリバティブ取引のカウンター・パートナーが発行する無担保割引債を考えよう。デフォルトがないとした場合の債券の価値を $B_0$ 、債券の本当の価値を $B_0^*$ とする。簡単のため、デフォルトがないとした場合の価値に対する比率としての債券の回収率がデリバティブの回収率に等しいと仮定すると、

$$B_0^* = B_0 \left[ 1 - \sum_{i=1}^n q_i (1-R) \right] \quad (22.7)$$

となる。(22.6)式と(22.7)式から、

$$\frac{f_0^*}{f_0} = \frac{B_0^*}{B_0} \quad (22.8)$$

が成り立つ。 $y$ を満期 $T$ の無リスク割引債のイールド、 $y^*$ を満期 $T$ のカウンター・パートナーが発行する割引債のイールドとすると、 $B_0 = e^{-yT}$ および $B_0^* = e^{-y^*T}$ となるから、(22.8)式より、

$$f_0^* = f_0 e^{-(y^* - y)T} \quad (22.9)$$

が得られる。この式から、時点  $T$  にペイオフがあるデリバティブの価値は、リスク中立世界での期待ペイオフに適用する割引率を無リスク金利  $y$  からリスク金利  $y^*$  に増加させることで評価できることがわかる。

【例22.2】

デフォルトがないとした場合の価値が 3 ドルの、企業 X が売却する満期 2 年の店頭オプションを考える。企業 X が発行する 2 年物割引債のイールドが無リスク割引債よりも 1.5% 高いとする。このとき、オプションの価値は、

$$3e^{-0.015 \times 2} = 2.91$$

すなわち 2.91 ドルとなる。

3 番目の分類に属するデリバティブに対しては、 $f_i$  の符号は不確定である。したがって、変数  $v_i$  は行使価格ゼロの  $f_i$  に対するコール・オプションの価値になる。 $v_i$  を計算する一つの方法は、デリバティブの満期まで原資産となる市場変数をシミュレーションすることである。また、解析的な計算が近似的に可能な場合もある（たとえば、章末問題22.17および22.18を参照）。

これまで行ってきた分析では、デフォルト確率はデリバティブの価値とは独立であると仮定してきた。デリバティブのカウンター・パーティーのポートフォリオに占める割合が小さい場合やカウンター・パーティーがデリバティブをヘッジ目的で利用している場合には、この仮定は近似として問題はないだろう。しかし、カウンター・パーティーが投機目的で大規模なデリバティブ取引を行いたいと思っている場合には、金融機関は注意を払うべきである。その取引がカウンター・パーティーにとって大きな負の価値（したがって、金融機関にとって大きな正の価値）をもつとき、その逆の場合に比べて、カウンター・パーティーが破産を宣言する可能性が高くなるからである。

金融機関で働くトレーダーは、金融機関のもつエクスポージャーがゼロまたは非常に小さくなるときにカウンター・パーティーの倒産する可能性が最も高くなる状況に対して、よい方向のリスク（right-way risk）という言葉を使う。逆に、金融機関のもつエクスポージャーが大きくなるときにカウン

ター・パーティーの倒産する可能性が最も高くなる状況に対して、悪い方向のリスク（wrong-way risk）という言葉を使う。

## 22.8 信用リスクの軽減

これまで分析してきた多くの例では、デリバティブ取引の信用リスクは過大に評価されている。その理由は、信用リスクを軽減するためにデリバティブ・ディーラーによって契約に盛り込まれる、いくつかの条項があるからである。

### ネットティング

店頭デリバティブ取引で標準的になってきた条項の一つが、ネットティングである。この条項は、あるカウンター・パーティーとの一つの契約が債務不履行となつた場合に、そのカウンター・パーティーとのすべての契約を債務不履行とするというものである。

ネットティングはほとんどの国の裁判で認められてきた。したがって、ネットティングによって金融機関の抱える信用リスクは実質的に削減できる。たとえば、あるカウンター・パーティーに対して三つの契約を結んでいる金融機関を考えよう。金融機関からみた契約の価値はそれぞれ+1,000万ドル、+3,000万ドル、-2,500万ドルである。カウンター・パーティーが財務的な困難に陥り、抱える債務に対して債務不履行を起こしたとする。カウンター・パーティーからみた3契約の価値はそれぞれ-1,000万ドル、-3,000万ドル、+2,500万ドルである。ネットティングがない場合は、カウンター・パーティーは最初の二つの契約についてデフォルトし、三つ目の契約は保持するため、金融機関の損失は4,000万ドルになる。ネットティングがある場合は、三つの契約すべてが強制的にデフォルトとなるため、金融機関の損失は1,500万ドルになる（注14）。

ある金融機関が、あるカウンター・パーティーとのデリバティブ取引N契約からなるポートフォリオを保有しているとする。デフォルトがないとし

た場合の  $i$  番目の契約の価値を  $V_i$ 、デフォルト発生時の回収額を、デフォルトがないとした場合の価値に回収率を掛けた金額と仮定する。ネットティングがない場合は、金融機関の損失は、

$$(1-R) \sum_{i=1}^N \max(V_i, 0)$$

となる。ここで  $R$  は回収率である。ネットティングがある場合の損失は、

$$(1-R) \max\left(\sum_{i=1}^N V_i, 0\right)$$

となる。ネットティングがない場合は、各契約に対する行使価格ゼロのコール・オプションのポートフォリオからのペイオフが損失となる。ネットティングがある場合は、契約のポートフォリオに対する行使価格ゼロの單一オプションからのペイオフが損失となる。ポートフォリオに対するオプションの価値は、常に対応するオプションのポートフォリオの価値以下になり、大きく下回る場合も多い。

前節で紹介した分析を拡張して、ネットティング契約が結ばれている場合にも、(22.5)式を用いて一つのカウンター・パーティーとの契約全体から生じる期待損失の現在価値を計算することができる。それには、一つのカウンター・パーティーに対する全契約からなるポートフォリオの時点  $t_i$  におけるエクスポージャーをペイオフとするデリバティブの現在価値を  $v_i$  とすればよい。

カウンター・パーティーと新規のデリバティブ取引を行うべきかの判断を、その取引が信用リスクによる期待損失に与える影響額を計算して行うようにするのは、金融機関にとって挑戦しがいのある困難な仕事である。それには、その取引がある場合とない場合のそれぞれについて、期待デフォルト・コストを上述の方法で(22.5)式を用いて計算すればよい。おもしろいこ

---

(注14) 金融機関からみた三つ目の契約の価値が-2,500万ドルではなく-4,500万ドルの場合には、カウンター・パーティーはデフォルトを選択せず、金融機関には損失は発生しないだろう。

とに、ネットティングのために新規取引が期待デフォルト損失に与える影響額は負になることもある。これは、新規契約の価値が既存契約の価値と負の相関をもつ場合に起こる。

## 担保契約

信用リスク軽減のためによく利用されるもう一つの条項は、担保契約 (collateralization) である。多くのデリバティブ契約を結んでいる企業と金融機関を考えよう。典型的な担保契約では、契約を定期的に値洗いすることが規定されている。金融機関からみた契約の総価値があらかじめ定められた閾値 (threshold) を超えた場合には、担保契約に基づいて、企業の累積差入担保が金融機関からみた契約の価値と閾値との差に等しくなるように、担保が徴求される。担保差入後に契約の価値が企業にとって有利な方向に変動し、金融機関からみた契約の価値と閾値との差が差入れずみの全担保より小さくなった場合には、企業は担保の返戻を要求できる。また、企業がデフォルトした場合には、金融機関は担保を差し押えることができる。企業が担保差入れに応じない場合には、金融機関は契約を強制解約できる。

たとえば、企業に対する閾値を1,000万ドルとし、契約は担保のために日々値洗いされるとする。ある日に金融機関からみた契約の価値が900万ドルから1,050万ドルに上昇した場合、金融機関は50万ドルの担保を徴求する。翌日に契約の価値がさらに1,140万ドルに上昇した場合、金融機関は90万ドルの追加担保を徴求する。その次の日に契約の価値が1,090万ドルに下落した場合、企業は50万ドルの担保の返戻を要求することができる。したがって、閾値（この例では1,000万ドル）は金融機関が企業に供与するクレジットラインとみなすことができる。

担保として、現金または債券のような代用可能な証券が企業から金融機関に預け入れられる。担保計算のときには、証券の価値は市場価値にヘアカット (haircut) として知られる割引率を掛けた値として評価される。現金に対しては利子が通常支払われる。

担保契約が双方向の契約の場合には、金融機関に対しても閾値が定められ

る。その場合には、企業からみた契約の価値がその閾値を超えたとき、企業は金融機関に対して担保を徴求することができる。

担保契約は（第2章で説明した証拠金勘定が、取引所で先物を取引する人を保護しているのと同様に）デフォルトの可能性に対する大きな保護となっている。しかし、閾値の金額は保護されていない。さらに、閾値がゼロであったとしても、全額が保護されているわけではない。その理由は、企業が財務的な困難に陥ったとき、追加担保の徴求に応じられなくなることが多く、カウンター・パーティが強制解約の権利を行使するまでに、契約の価値はさらに増加する方向へ動く可能性があるからである。

### ダウングレード・トリガー

金融機関が利用するその他の信用リスクの軽減手法に、ダウングレード・トリガーとして知られるものがある。これは、カウンター・パーティの信用格付がある一定水準、たとえば Baa を下回った場合に、金融機関がそのときの市場価値でデリバティブ契約を解約できる選択権をもつという条項である。

ダウングレード・トリガーは、企業の信用格付が大きくジャンプした場合（たとえば、格付 A からデフォルトした場合）には信用リスクの保護の役目を果たさない。また、ダウングレード・トリガーはそれをあまり多用していない場合においてのみ、うまく機能する。一つの企業がカウンター・パーティに対して大量のダウングレード・トリガーを保有している場合には、その条項は信用リスクの保護にはほとんどならない（ビジネス寸見22.1を参照）。

### ビジネス寸見22.1 ダウングレード・トリガーとエンロンの破綻

2001年12月、米国大手企業の一つであるエンロン（Enron）が破綻した。破綻の数日前までは投資適格の信用格付が付与されていた。デフォルト直前の Moody's の格付は Baa3、S&P の格付は BBB- であった

が、エンロンの株価が破綻までの期間に急落したことから、株式市場では倒産はある程度予見されていた。22.6節で説明したようなモデルによる倒産確率の推定値は急激に上昇した。

エンロンは、ダウングレード・トリガー付きのデリバティブ契約を大量に保有していた。このダウングレード・トリガーは、信用格付が投資適格（Baa3/BBB-）を下回った場合に、カウンター・パートナーが契約の解約権をもつという条項であった。たとえば、2001年10月にエンロンが投資適格を下回る水準に格下げになったとしよう。そのとき、カウンター・パートナーが解約を選択する契約は、エンロンからみた価値が負（すなわち、カウンター・パートナーからみた価値が正）になっている契約である。したがって、エンロンはカウンター・パートナーに対して巨額の現金支払を求められることになったであろう。そして、それに応じることができず、即座に破綻となつたであろう。

この例から、ダウングレード・トリガーは比較的利用されていない場合においてのみ、信用リスクに対する保護になることがわかる。企業がダウングレード・トリガー付き契約を大量に締結している場合には、その条項は実際には破綻の時期を不要に早める働きをすることになる。エンロンの場合には、いずれにしても破綻していたはずなので、それを2ヵ月早めたところで、より悪い結果にはならなかつたと主張することができるだろう。しかし実際には、2001年10月時点ではエンロンには生き残れる可能性があった。生き残りをかけて、別のエネルギー会社ダイナジー（Dynergy）との交渉を成功させようとしていた。したがって、2001年10月に破綻に追い込んだとしたら、それは債権者または株主にとって望むことではなかつたであろう。

格付機関はむずかしい立場に置かれていることがわかつた。エンロンを格下げして財務状態が悪化していることを認定すれば、死刑執行令状に署名したことになり、格下げしなければ、エンロンに生き延びるチャンスを与えたことになつたからである。

## 22.9 デフォルト相関

デフォルト相関 (default correlation) という用語は、二つの企業がほぼ同時にデフォルトする傾向を表すのに用いられている。デフォルト相関が存在するのには多くの理由がある。同じ業種または同じ地域の企業は外部事象に対して似たような影響を受ける傾向があり、その結果として、同時に財務的な困難に陥る可能性がある。一般的に、経済状態が原因である年の平均デフォルト率が他の年よりも高くなることがある。ある企業のデフォルトが別の企業のデフォルトを引き起こすこともある。いわゆる信用伝染効果 (credit contagion effect) である。デフォルト相関があるため、信用リスクは完全には分散除去できない。それが、リスク中立デフォルト確率が実世界でのデフォルト確率より大きくなる主な理由である (22.5節を参照)。

異なるカウンター・パーティに対するエクポージャーをもつポートフォリオのデフォルト損失の確率分布を決定するうえで、デフォルト相関は重要である。研究者から提案してきたデフォルト相関のモデルには二つのタイプがあり、それぞれ誘導モデル (reduced form model) と構造モデル (structural model) と呼ばれている。

誘導モデルでは、異なる企業のデフォルト強度が確率過程として与えられ、マクロ経済変数と相関をもつていると仮定される。そうすると、企業 A のデフォルト強度が高いとき、企業 B のデフォルト強度も高くなる傾向をもつ。これにより二つの企業間にデフォルト相関が生じる。

誘導モデルは数学的には解析しやすく魅力的で、経済サイクルがデフォルト相関を生み出すという傾向を反映している。このモデルの主な短所は、得られるデフォルト相関の値の範囲が限られているということである。二つの企業のデフォルト強度が完全に相関していても、短い期間に両社ともがデフォルトする確率は非常に小さい場合が多い。これは、ある状況においては問題になろう。たとえば、二つの企業が同じ国の同じ産業で活動を行っている場合や、ある企業の財務健全性がなんらかの理由で別の企業の財務健全性に強く依存している場合には、かなり高いデフォルト相関がみられるはずで

ある。この問題を解決する一つの方法は、デフォルト強度に大きなジャンプがみられるようにモデルを拡張することである。

構造モデルは、Merton モデルと同様のモデルに基づいている（22.6節を参照）。このモデルでは、企業の資産価値がある水準を下回った場合に企業はデフォルトすると仮定される。企業 A の資産が従う確率過程と企業 B の資産が従う確率過程に相関をもたせることを通じて、企業 A と企業 B にデフォルト相関をもたせることができる。構造モデルは必要とする高い相関を実現できるという点で、誘導モデルよりも優れている。一方、構造モデルの主な短所は計算速度がかなり遅くなりやすいという点である。

### デフォルト時点に関するガウシアン・コピュラモデル

実務的なツールとして広く使われるようになったモデルに、デフォルト時点に関するガウシアン・コピュラモデル (Gaussian copula model) がある。これは、単純化された構造モデルとして特徴付けられる。すべての企業はいつかはデフォルトすると仮定して、二つの異なる企業に対し、それぞれがデフォルトする時点に関する確率分布の間の相関を計量化しようとするモデルである。

このモデルは、実世界でのデフォルト確率とリスク中立デフォルト確率の両方に対して用いることができる。企業のデフォルト時点に関する実世界での確率分布の左裾は、表22.1のような格付機関が作成するデータから推定することができる。また、デフォルト時点のリスク中立確率分布の左裾は、22.4節の手法を用いて債券価格から推定することができる。

企業 1 のデフォルト時点を  $t_1$ 、企業 2 のデフォルト時点を  $t_2$  と定義する。もし  $t_1$  と  $t_2$  の確率分布が正規分布であるならば、 $t_1$  と  $t_2$  の同時確率分布は 2 次元正規分布であると仮定できるかもしれない。あいにくなことに、企業のデフォルト時点の確率分布は近似的にも正規分布とは言いがたい。これが、ガウシアン・コピュラモデルが用いられる理由である。 $t_1$  と  $t_2$  を、

$$x_1 = N^{-1}[Q_1(t_1)], \quad x_2 = N^{-1}[Q_2(t_2)]$$

を用いて新しい変数  $x_1$  と  $x_2$  に変換する。ここで、 $Q_1$  と  $Q_2$  はそれぞれ  $t_1$  と  $t_2$

の累積分布関数,  $N^{-1}$ は正規分布の累積分布関数の逆関数である（すなわち,  $v=N(u)$ のとき  $u=N^{-1}(v)$ である）。これらは、「パーセント点からパーセント点」への変換である。 $t_1$ の確率分布の5パーセント点が標準正規分布の5パーセント点である  $x_1 = -1.645$ に変換され,  $t_1$ の確率分布の10パーセント点が標準正規分布の10パーセント点である  $x_1 = -1.282$ に変換される, といった具合である。 $t_2$ から  $x_2$ への変換も同様である。

つくり方から,  $x_1$ と  $x_2$ は平均ゼロ, 標準偏差1の正規分布に従う。 $x_1$ と  $x_2$ の同時分布が2次元正規分布であると仮定するモデルは, ガウシアン・コピュラモデルと呼ばれている。このことを仮定すると,  $t_1$ と  $t_2$ に関する累積分布関数  $Q_1$ と  $Q_2$ および一つの相関パラメータによって  $t_1$ と  $t_2$ の同時確率分布が完全に決まるので, 非常に取り扱いやすいモデルになる。

ガウシアン・コピュラモデルの魅力は多企業に拡張できることである。 $n$ 社の企業を考え,  $i$ 番目の企業のデフォルト時点を  $t_i$ とする。各  $t_i$ を標準正規分布に従う新しい変数  $x_i$ に変換する。それは,

$$x_i = N^{-1}[Q_i(t_i)]$$

によるパーセント点からパーセント点への変換で与えられる。ここで  $Q_i$ は  $t_i$ の累積分布関数である。さらに  $x_i$ は多次元正規分布に従うと仮定すると,  $t_i$ と  $t_j$ のデフォルト相関は  $x_i$ と  $x_j$ の相関を通じて与えられる。この相関はコピュラ相関 (copula correlation) と呼ばれている(注15)。

ガウシアン・コピュラは正規分布していない変数間の相関構造を表現するのに便利な方法である。この方法を用いると, 変数間の相関構造を各変数の(無条件の) 分布関数から切り離して推定することができる。この方法では, 変数自体は多次元正規分布に従っていなくても, 変換後の変数は多次元正規分布に従っていると仮定されている。

### 【例22.3】

10社の企業に対して, 今後5年間のデフォルトをシミュレーションし

(注15) 近似として,  $t_i$ と  $t_j$ のコピュラ相関は企業  $i$  と企業  $j$  の株式収益率の相関と仮定されることが多い。

たいとする。各企業間のコピュラ・デフォルト相関を0.2とし、今後1年、2年、3年、4年、および5年の間に各企業がデフォルトする累積確率をそれぞれ1%，3%，6%，10%，および15%とする。ガウシアン・コピュラを用いる場合は、二つの $x_i$ 間の相関を0.2として、多次元正規分布から $x_i (1 \leq i \leq 10)$ の値をサンプリングする。それから、 $x_i$ をデフォルト時点 $t_i$ に変換する。正規分布からのサンプルが $N^{-1}(0.01) = -2.33$ よりも小さい場合は、1年目にデフォルトが起こる。サンプルが $-2.33$ と $N^{-1}(0.03) = -1.88$ の間にある場合は、2年目にデフォルトが起こる。サンプルが $-1.88$ と $N^{-1}(0.06) = -1.55$ の間にある場合は、3年目にデフォルトが起こる。サンプルが $-1.55$ と $N^{-1}(0.10) = -1.28$ の間にある場合は、4年目にデフォルトが起こる。サンプルが $-1.28$ と $N^{-1}(0.15) = -1.04$ の間にある場合は、5年目にデフォルトが起こる。また、サンプルが $-1.04$ より大きい場合は、5年間にデフォルトは発生しない。

### ファクターに基づく相関構造

ガウシアン・コピュラモデルで企業 $i$ と企業 $j$ の各ペアに対して $x_i$ と $x_j$ の間の相関を個々に定義するかわりに、1ファクターモデルを用いる方法もよく使われる。その場合は、

$$x_i = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i \quad (22.10)$$

が仮定される。この式で $F$ はすべての企業のデフォルトに影響する共通のファクターで、 $Z_i$ は企業 $i$ にのみ影響するファクターである。変数 $F$ と変数 $Z_i$ は独立した標準正規分布に従い、 $a_i$ は $-1$ と $1$ の間に値をとる定数パラメータである。このとき、 $x_i$ と $x_j$ の間の相関係数は $a_i a_j$ になる(注16)。

企業 $i$ が時点 $T$ までにデフォルトする確率を $Q_i(T)$ とする。ガウシアン

---

(注16) パラメータ $a_i$ は、企業 $i$ の株式収益率とよく分散されたマーケット指標との相関係数で近似されることもある。

ン・コピュラモデルを用いる場合、時点  $T$  までにデフォルトが発生するの  
は  $N(x_i) < Q_i(T)$ 、すなわち  $x_i < N^{-1}[Q_i(T)]$  のときである。この条件は  
(22.10)式より、

$$a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i < N^{-1}[Q_i(T)]$$

すなわち、

$$Z_i < \frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

となる。したがって、ファクター  $F$  の値が与えられたという条件のもとでのデフォルト確率は、

$$Q_i(T|F) = N\left(\frac{N^{-1}[Q_i(T)] - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right) \quad (22.11)$$

になる。すべての  $i$  に対してデフォルト確率分布が同じで、すべての  $i$  と  $j$  に対して  $x_i$  と  $x_j$  の間の相関係数が同じであるという、1 ファクター・ガウシアン・コピュラモデルの特殊な場合を考えよう。すべての  $i$  に対して  $Q_i(T) = Q(T)$  とし、共通の相関係数を  $\rho$ 、すなわちすべての  $i$  に対して  $a_i = \sqrt{\rho}$  とする。このとき、(22.11)式は、

$$Q(T|F) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(T)] - \sqrt{\rho} F}{\sqrt{1 - \rho}}\right) \quad (22.12)$$

になる。

## 二項分布に基づく相関

格付機関では、相関の別の定義である二項分布に基づく相関 (binomial correlation measure) が用いられている。これは、二つの企業 A と B に対して、次の 2 変数間の相関係数として定義されるものである。

1. A 社が時点 0 から時点  $T$  までにデフォルトした場合は 1、そうでない場合は 0 となる変数
2. B 社が時点 0 から時点  $T$  までにデフォルトした場合は 1、そうでない場合は 0 となる変数

相関は、

$$\beta_{AB}(T) = \frac{P_{AB}(T) - Q_A(T)Q_B(T)}{\sqrt{[Q_A(T) - Q_A(T)^2][Q_B(T) - Q_B(T)^2]}} \quad (22.13)$$

となる。ここで、 $P_{AB}(T)$ は時点 0 から時点  $T$  までに A 社と B 社がともにデフォルトする確率、 $Q_A(T)$ は A 社が時点  $T$  までにデフォルトする累積確率、 $Q_B(T)$ は B 社が時点  $T$  までにデフォルトする累積確率である。一般的に、 $\beta_{AB}(T)$ は考えている期間の長さ  $T$  に依存しており、通常  $T$  が増加するにつれて増加する。

ガウシアン・コピュラモデルの定義から、 $P_{AB}(T) = M[\chi_A(T), \chi_B(T); \rho_{AB}]$  となる。ここで、 $\chi_A(T) = N^{-1}(Q_A(T))$  および  $\chi_B(T) = N^{-1}(Q_B(T))$  は A 社と B 社の変換されたデフォルト時点、 $\rho_{AB}$  は A 社と B 社のデフォルト時点間のガウシアン・コピュラ相関である。関数  $M(a, b; \rho)$  は、相関係数が  $\rho$  の 2 次元正規分布で第 1 変数が  $a$  以下、第 2 変数が  $b$  以下となる確率である(注17)。したがって、

$$\beta_{AB}(T) = \frac{M[\chi_A(T), \chi_B(T); \rho_{AB}] - Q_A(T)Q_B(T)}{\sqrt{[Q_A(T) - Q_A(T)^2][Q_B(T) - Q_B(T)^2]}} \quad (22.14)$$

となる。この式から、 $Q_A(T)$  と  $Q_B(T)$  が既知ならば、 $\beta_{AB}(T)$  は  $\rho_{AB}$  から計算でき、逆に  $\rho_{AB}$  は  $\beta_{AB}(T)$  から計算できる。通常  $\rho_{AB}$  は  $\beta_{AB}(T)$  より著しく大きい値になる。相関の大きさはその定義のされ方に依存している、ということを認識しておくことは重要である。

#### 【例22.4】

A 社が 1 年以内にデフォルトする確率を 1 %、B 社が 1 年以内にデフォルトする確率も 1 % とする。この場合、 $\chi_A(1) = \chi_B(1) = N^{-1}(0.01) = -2.326$  となる。 $\rho_{AB}$  を 0.20 とすると、 $M(\chi_A(1), \chi_B(1); \rho_{AB}) = 0.000337$  となり、(22.14) 式より  $T=1$  のとき  $\beta_{AB}(T) = 0.024$  であることがわかる。

(注17)  $M(a, b; \rho)$  の計算方法については、著者の Web サイトのテクニカルノート 5 を参照されたい。

## 22.10 信用 VaR

信用バリュー・アット・リスクというものを、市場リスクに対するバリュー・アット・リスク（第20章を参照）と同様の方法で定義することができる。たとえば、信頼水準が99.9%で保有期間が1年の信用VaRは、99.9%の確率で1年間にわたってその額を超えることはない、という信用リスクによる損失額である。

同じようなローンからなる非常に大きなポートフォリオを保有する銀行を考えよう。近似として、各ローンのデフォルト確率は同一で、任意の二つのローン間のデフォルト相関も同一であると仮定する。デフォルト時点に対してガウシアン・コピュラモデルを用いると、時点  $T$  までにデフォルトする割合が  $F$  の関数として、(22.12)式の右辺でよい近似として与えられる。 $F$  は標準正規分布に従っているので、 $X\%$ の確率でその値は  $N^{-1}(1-X) = -N^{-1}(X)$  より大きくなる。したがって、大きなポートフォリオに対して  $T$  年間で発生する損失の割合は、 $X\%$ の確率で  $V(X, T)$  未満になる。ここで、

$$V(X, T) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(T)] + \sqrt{\rho}N^{-1}(X)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (22.15)$$

である。この結果は Vasicek によって最初に導出された（注18）。(22.12)式と同様に、 $Q(T)$  は時点  $T$  までにデフォルトする確率で、 $\rho$  は任意の二つのローン間のコピュラ相関である。

この結果を用いると、信頼水準が  $X\%$ 、保有期間が  $T$  の信用 VaR の概算値は  $L(1-R)V(X, T)$  になる。ただし、 $L$  はローン・ポートフォリオの大きさ、 $R$  は回収率である。また、大きさが  $L_i$  の特定のローンの信用 VaR に対する寄与は  $L_i(1-R)V(X, T)$  である。このモデルは、規制当局が信用リスクに対する所要自己資本の計算に用いる公式の基礎となっている（ビ

(注18) O. Vasicek, "Probability of Loss on a Loan Portfolio," Working Paper, KMV, 1987 を参照。この Vasicek の結果は、Risk (December 2002) に "Loan Portfolio Value" というタイトルで掲載されている。

ビジネス寸見22.2を参照)。

【例22.4】

リテールに対するエクスポージャーが合計1億ドルの銀行を考える。1年間にデフォルトが発生する確率は平均2%，回収率は平均60%とする。コピュラ相関は0.1と推定されている。この場合，

$$V(0.999, 1) = N\left(\frac{N^{-1}(0.02) + \sqrt{0.1} N^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-0.1}}\right) = 0.128$$

より，99.9%の確率で起こらない最悪のケースでのデフォルト率は12.8%となる。したがって，1年99.9%信用VaRは $100 \times 0.128 \times (1 - 0.6)$ ，すなわち513万ドルとなる。

## ビジネス寸見22.2 バーゼルII

銀行監督に関するバーゼル委員会は，銀行が保有するリスクに対する所要自己資本の計算手法の見直しを計画している。これはバーゼルIIとして知られている。市場リスクに対する所要自己資本の計算手法（ビジネス寸見20.1を参照）に関する変更は，計画されていない。オペレーショナル・リスクに対して新しく所要自己資本の導入が計画され，信用リスクに対する所要自己資本の計算手法に関して重大な変更が提案されている。

内部格付（IRB）法の使用が認められた銀行では，取引の信用リスクに対する所要自己資本は，

$$UDR \times LGD \times EAD \times MatAd$$

によって計算される。ここで， $UDR$ （非期待デフォルト率，unexpected default rate）は，99.9%最悪シナリオにおける1年間のデフォルト率の1年間の期待デフォルト率に対する超過率である。これは，(22.15)式を用いて， $X=99.9\%$ ， $T=1$ として， $V(X, T) - Q(T)$ から計算され

る。変数  $LGD$  はデフォルト時損失率である（これまで $1-R$ と表してきたものと同様の変数である）。 $EAD$  はデフォルト時エクスポージャーで、 $MatAd$  は満期調整である。

これらの値は、複雑なルールに基づいて決められている。 $UDR$  については、1年のデフォルト確率  $Q(1)$  と相関パラメータ  $\rho$  が必要となる。1年のデフォルト確率には銀行の内部推定値が用いられ、相関パラメータを決めるルールはエクスポージャーの種類（リテール向け、事業法人向け、ソブリン向けなど）ごとに設けられている。リテール向けエクスポージャーに対しては、 $LGD$  と  $EAD$  にも銀行の内部推定値が用いられる。事業法人向けエクspoージャーに対しては、「先進的IRB手法」を用いる銀行は  $LGD$  と  $EAD$  を内部で推定し、「基礎的IRB手法」を用いる銀行は規定されたルールに基づいて  $LGD$  と  $EAD$  の値を決める。満期調整は商品の満期に関する増加関数になっており、商品の満期が1年のときは1.0となっている。

## CreditMetrics

多くの銀行は、内部使用目的での信用 VaR を計算する別の方法を開発してきた。よく知られた手法の一つが CreditMetrics である。これは、すべてカウンター・パーティの信用格付の変化に関するモンテカルロ・シミュレーションを行うことによって、信用損失の確率分布を推定する手法である。1年間における損失の確率分布を求めたいとする。シミュレーションの各試行において、1年間におけるすべてのカウンター・パーティの信用格付の変化とデフォルトをサンプリングによって決める。その結果に基づいて未決済の取引の再評価を行えば、1年間の信用損失の総額が決まる。この試行を何回も繰り返せば、信用損失の確率分布が得られ、それを用いて信用 VaR を計算することができる。

この手法は計算時間をかなり必要とする傾向がある。しかしこの手法には、デフォルトだけでなく格下げによる信用損失も計測できるという長所が

ある。また、22.8節で説明した信用リスクを軽減させる条項の影響を近似的に取り込んだ分析も行うことができる。

表22.6は、格付機関から提供されている格付推移に関する過去データの典型例であり、CreditMetricsにおけるモンテカルロ・シミュレーションの基礎データとして用いられるものである。この表から、ある格付の債券が1年後に別の格付に移る確率がわかる。たとえば、格付Aの債券が1年後に格付Aのままである確率は91.48%である。格付Aの債券が1年後にデフォルトする確率は0.02%で、格付Bに格下げになる確率は0.10%である、等々である。

信用損失を求めるサンプリングの際に、異なるカウンター・パーティの格付変化は独立であると仮定するべきではない。前節のモデルでデフォルト時点の同時分布をガウシアン・コピュラモデルを用いて表現したのと同様の方法で、ガウシアン・コピュラモデルを用いて格付推移の同時分布を構成するのが一般的である。2企業の格付推移の間のコピュラ相関は、22.6節と同様のファクターモデルを用いて、株価収益率間の相関に等しく置かれることが多い。

表22.6 1年間の格付推移行列（1970－2006）無格付への推移調整済みの確率（%）

| 当初格付    | 1年後の格付 |       |       |       |       |       |       |       |         |
|---------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
|         | Aaa    | Aa    | A     | Baa   | Ba    | B     | Caa   | Ca-C  | Default |
| Aaa     | 91.56  | 7.73  | 0.69  | 0.00  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00    |
| Aa      | 0.86   | 91.43 | 7.33  | 0.29  | 0.06  | 0.02  | 0.00  | 0.00  | 0.01    |
| A       | 0.06   | 2.64  | 91.48 | 5.14  | 0.53  | 0.10  | 0.02  | 0.00  | 0.02    |
| Baa     | 0.05   | 0.22  | 5.16  | 88.70 | 4.60  | 0.84  | 0.23  | 0.03  | 0.19    |
| Ba      | 0.01   | 0.07  | 0.52  | 6.17  | 83.10 | 8.25  | 0.58  | 0.05  | 1.26    |
| B       | 0.01   | 0.05  | 0.19  | 0.41  | 6.27  | 81.65 | 5.17  | 0.75  | 5.50    |
| Caa     | 0.00   | 0.04  | 0.04  | 0.25  | 0.79  | 10.49 | 65.47 | 4.44  | 18.47   |
| Ca-C    | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.46  | 2.78  | 11.07 | 47.83 | 37.85   |
| Default | 0.00   | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 0.00  | 100.00  |

(出所) Moody's

CreditMetrics 手法の例として、表22.6の推移行列を用いて 1 年後の格付 Aaa および格付 Baa の企業の格付変化をシミュレーションするとしよう。2 企業の株価収益率の相関を 0.2 とする。シミュレーションの各試行において、相関係数が 0.2 の 2 次元正規分布から二つの変数  $x_A$  と  $x_B$  のサンプリングを行う。変数  $x_A$  の値によって格付 Aaa の企業の新しい格付が決まり、変数  $x_B$  の値によって格付 Baa の企業の新しい格付が決まる。 $N^{-1}(0.9156) = 1.3761$ ,  $N^{-1}(0.9156 + 0.0773) = 2.4522$ , および  $N^{-1}(0.9156 + 0.0773 + 0.0069) = 3.5401$  より、格付 Aaa の企業は、 $x_A < 1.3761$  ならば格付 Aaa にとどまり、 $1.3761 \leq x_A < 2.4522$  ならば格付 Aa になり、 $2.4522 \leq x_A < 3.5401$  ならば格付 A になる。同様に、 $N^{-1}(0.0005) = -3.2905$ ,  $N^{-1}(0.0005 + 0.0022) = -2.7822$ , および  $N^{-1}(0.0005 + 0.0022 + 0.0516) = -1.6045$  より、格付 Baa の企業は、 $x_B < -3.2905$  ならば格付 Aaa になり、 $-3.2905 \leq x_B < -2.7822$  ならば格付 Aa になり、 $-2.7822 \leq x_B < -1.6045$  ならば格付 A になる。格付 Aaa の企業が 1 年以内にデフォルトすることはない。一方、格付 Baa の企業は  $x_B > N^{-1}(0.9981)$ , すなわち  $x_B > 2.8943$  のときデフォルトする。

## 要 約

企業が将来のある期間にデフォルトする確率は、過去データ、債券価格、あるいは株価から推定することができる。債券価格から計算されるデフォルト確率はリスク中立確率である。一方、過去データから計算されるデフォルト確率は実世界での確率である。実世界での確率は、シナリオ分析や信用 VaR の計算に用いられる。リスク中立確率はクレジットに依存した商品の評価に用いられる。リスク中立デフォルト確率は、実世界でのデフォルト確率よりも著しく高いことがよくある。

カウンター・パーティーのデフォルトによる期待損失は、ネットティングと

して知られる方法で削減される。これは金融機関が締結するほとんどの契約書に記されている条項であり、金融機関との一つの契約に対してカウンター・パーティがデフォルトしたならば、その金融機関とのすべての契約がデフォルトするというものである。また、損失は担保契約やダウングレード・トリガーによっても削減される。担保契約は、カウンター・パーティに対して担保差入れを求めるものである。ダウングレード・トリガーは、カウンター・パーティの格付があらかじめ設定された水準を下回った場合に金融機関が契約の解約権をもつというものである。

信用 VaR は、市場リスクに対する VaR と同様の方法で定義することができる。信用 VaR を計算する一つの手法は、デフォルト時点に関するガウシアン・コピュラモデルを用いる方法である。この手法は、規制当局が信用リスクに対する所要自己資本を計算するのに用いられている。もう一つのよく知られた信用 VaR を計算する手法は、CreditMetrics である。この手法では、格付推移に対してガウシアン・コピュラモデルが用いられている。

## 参考文献

- Altman, E.I. "Measuring Corporate Bond Mortality and Performance," *Journal of Finance*, 44 (1989) : 902-22.
- Duffie, D., and K. Singleton. "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds," *Review of Financial Studies*, 12 (1999) : 687-720.
- Finger, C.C. "A Comparison of Stochastic Default Rate Models," *RiskMetrics Journal*, 1 (November 2000) : 49-73.
- Hull, J., M. Predescu, and A. White. "The Relationship between Credit Default Swap Spreads, Bond Yields, and Credit Rating Announcements," *Journal of Banking and Finance*, 28 (November 2004) : 2789-2811.
- Kealhofer, S. "Quantifying Default Risk I: Default Prediction," *Financial Analysts Journal*, 59, 1 (2003a) : 30-44.
- Kealhofer, S. "Quantifying Default Risk II: Debt Valuation," *Financial Analysts*

- Journal*, 59, 3 (2003b) : 78-92.
- Li, D.X. "On Default Correlation: A Copula Approach," *Journal of Fixed Income*, March 2000 : 43-54.
- Litterman, R., and T. Iben. "Corporate Bond Valuation and the Term Structure of Credit Spreads," *Journal of Portfolio Management*, Spring 1991 : 52-64.
- Merton, R.C. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29 (1974) : 449-70.
- Rodriguez, R.J. "Default Risk, Yield Spreads, and Time to Maturity," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 23 (1988) : 111-17.
- Vasicek,O. "Loan Portfolio Value," *Risk* (December 2002) : 160-62.

### 章末問題

- 22.1** 満期 3 年の社債のイールドと同条件の無リスク債のイールドとのスプレッドが 50 ベース・ポイントである。回収率を 30% とするとき、3 年間の平均デフォルト強度（年率）を推定せよ。
- 22.2** 問題 22.1 で、同じ企業の発行する満期 5 年の社債のイールドと同条件の無リスク債のイールドとのスプレッドが 60 ベース・ポイントであるとする。回収率を同じ 30% として、5 年間の平均デフォルト強度（年率）を推定せよ。また、この結果から、4 年目と 5 年目の平均デフォルト強度について何がわかるか。
- 22.3** (a) 信用バリュー・アット・リスク、(b) デフォルトを考慮したデリバティブの評価のそれぞれの場合に、実世界でのデフォルト確率とリスク中立デフォルト確率のどちらを用いるべきかについて答えよ。
- 22.4** 回収率は通常どのように定義されるか。
- 22.5** 無条件のデフォルト確率密度とデフォルト強度との違いについて説明せよ。
- 22.6** (a) 表 22.4 の 2 列目の数値と表 22.1 の数値とが整合性がとれているこ

と、および(b)表22.5の4列目の数値と回収率を40%としたときの表22.4の数値とが整合性がとれていることを確認せよ。

- 22.7** ネッティングの仕組みについて述べよ。ある銀行があるカウンター・パーティーとの1取引をすでに保有しているとする。その銀行とそのカウンター・パーティーとの新規取引によって、そのカウンター・パーティーに対するその銀行の信用エクスポートジャーガーが増加する場合もあれば、減少する場合もある。その理由について説明せよ。
- 22.8** (22.13)式の  $\beta_{AB}(T)$  が実世界とリスク中立世界で同じであるとする。このとき、ガウシアン・コピュラ相関  $\rho_{AB}$  についても同じことがいえるか。
- 22.9** 担保契約におけるヘアカットとは何か。また、ある企業が担保として自社株を差し入れたいといってきた。どう対応すべきか。
- 22.10** (a)信用損失の定義、および(b)デフォルト相関のモデル化について、デフォルト時点に対するガウシアン・コピュラモデルと Credit-Metrics との違いを説明せよ。
- 22.11** 企業 A が 2 年以内にデフォルトする確率は 0.2、企業 B が同じ期間にデフォルトする確率は 0.15 とする。ガウシアン・コピュラモデルでのデフォルト相関が 0.3 のとき、二項分布に基づく相関はいくつになるか。
- 22.12** LIBOR／スワップ・カーブが連続複利 6 % フラットで、クーポン 5 % (半年払い) の 5 年債が 90.00 で売られているとする。このとき、この債券を用いたアセットスワップはどのように組成できるか。また、その場合のアセットスワップ・スプレッドはいくつになるか。
- 22.13** デフォルト時の債権請求額がデフォルトしていなかった場合の債券の価値に等しい場合には、利付社債の価値はその社債を構成する割引債の価値の合計に等しく、債権請求額が債券の額面と経過利子の合計に等しい場合にはそうはならないことを示せ。
- 22.14** 満期 4 年、クーポン年 4 % (半年払い) の社債のイールドが連続複

利で5%である。無リスク・イールドカーブはフラットで、連続複利で3%である。デフォルトが起こりうるのは各年の終わり（クーポンや元本支払の直前）で、回収率は30%である。このとき、リスク中立デフォルト確率を、各年で同じ値と仮定して推定せよ。

- 22.15** ある企業がクーポン年4%（年1回払い）の満期3年と5年の債券を発行した。債券のイールド（連続複利）はそれぞれ4.5%と4.75%である。無リスク金利はすべての満期に対して連続複利で3.5%である。回収率を40%とし、デフォルトが起こりうるのは各年の真ん中とする。年間リスク中立デフォルト率を、1年目から3年目までに 대해서は $Q_1$ 、4年目と5年目に対しては $Q_2$ とするとき、 $Q_1$ と $Q_2$ を推定せよ。
- 22.16** ある金融機関が英ポンド金利に依存したスワップをカウンター・パーティー $X$ と取引し、それと完全に相殺するスワップをカウンター・パーティー $Y$ と取引したとする。このとき、次のうち正しいものはどれか。間違っているものはどれか。その理由についても説明せよ。
- デフォルト・コストの総現在価値は、 $X$ 社との契約のデフォルト・コストの現在価値と $Y$ 社との契約のデフォルト・コストの現在価値の和である。
  - 両契約に対する期間1年の期待エクスポージャーは、 $X$ 社との契約の期待エクスポージャーと $Y$ 社との契約の期待エクスポージャーの和である。
  - 両契約に対する95%信頼水準での期間1年のエクスポージャーの上限は、 $X$ 社との契約に対する95%信頼水準での期間1年のエクスポージャーの上限と $Y$ 社との契約に対する95%信頼水準での期間1年のエクスポージャーの上限の和である。
- 22.17** ある企業が150豪ドルを100ドルで購入する満期1年のフォワード契約を取引する。この契約は当初アット・ザ・マネーである。言い換えると、フォワード為替レートは1.50である。満期1年のドル無リ

スク金利は年率 5 %で、カウンター・パーティーの満期 1 年のドル借入レートは年率 6 %である。為替レートのボラティリティが年率 12% のとき、この契約のデフォルト・コストの現在価値を見積れ。ただし、デフォルトは契約の満期時点でのみ認識されるものと仮定する。

- 22.18** 問題22.17で、満期 6 カ月のフォワード・レートも 1.50 で、満期 6 カ月のドル無リスク金利は年率 5 %とする。さらに、そのカウンター・パーティーの満期 6 カ月のドル借入レートは年率 5.5 %とする。このとき、デフォルトは 6 カ月後時点または 1 年後時点に発生しうると仮定して、デフォルト・コストの現在価値を見積れ（デフォルトが 6 カ月後に発生した場合、その企業が被る潜在的な損失は契約の市場価値である）。
- 22.19** 「信用リスクのあるロング・フォワード契約は、デフォルトのないブットの売りポジションと信用リスクのあるコールの買いポジションの組合わせである」。この主張について説明せよ。
- 22.20** 相殺し合うフォワード契約 1 組に対する信用エクスポージャーがストラドルに似たものになる理由を説明せよ。
- 22.21** 相殺し合う金利スワップ 1 組の信用リスクは、相殺し合う通貨スワップ 1 組の信用リスクよりも小さい理由を説明せよ。
- 22.22** 「銀行は通貨スワップを取引するとき、低金利通貨を受け取る取引は信用リスクの少ない企業と行うように努めるべきである」。その理由を説明せよ。
- 22.23** デフォルト・リスクがある場合にもブット・コール・パリティは成り立つか。その理由も答えよ。
- 22.24** アセットスワップが組まれている債券の額面当りの市場価格を  $B$ 、デフォルトがないとした場合のその債券の価値を  $B^*$ 、アセットスワップ・スプレッドの額面当りの現在価値を  $V$  とする。このとき、 $V = B^* - B$  が成り立つことを示せ。
- 22.25** 22.6節で説明した Merton モデルのもとでは、満期  $T$  年の割引債の

信用スプレッドは $-\ln[N(d_2) + N(-d_1)/L]/T$ となることを示せ。  
ただし、 $L = De^{-rT}/V_0$ である。

- 22.26** 満期 3 年の無リスク割引債のイールドとある企業の発行する満期 3 年の割引債のイールドとのスプレッドが 1 %であるとする。このとき、その企業が売却する満期 3 年のヨーロピアン・オプションの価値を Black-Scholes モデルで評価した場合、どれだけ過大評価になっているか。
- 22.27** (a)よい方向のリスクと(b)悪い方向のリスクの例を述べよ。

## 宿題

- 22.28** 満期 3 年、クーポン年 7 % (半年払い) の社債のイールドが半年複利で 5 %とする。無リスク債券のイールドはすべての満期に対して半年複利で年率 4 %である。デフォルトは 6 カ月ごと (利払いの直前) に起こりうるとし、回収率は 45 %と仮定する。このとき、(a)無条件のデフォルト確率が各デフォルトが起こりうる日に対して同じである、および(b)それまでにデフォルトしていないという条件のもとでのデフォルト確率が各デフォルトが起こりうる日に対して同じである、というそれぞれの仮定のもとで、デフォルト確率を推定せよ。
- 22.29** ある企業がクーポン年 8 % (年 1 回払い) の満期 1 年と満期 2 年の債券を発行している。債券のイールドは連続複利でそれぞれ 6.0 %と 6.6 %である。無リスク金利はすべての満期に対して 4.5 %である。回収率を 35 %とし、デフォルトが起こりうるのは各年の真ん中であるとする。このとき、各年のリスク中立デフォルト率を推定せよ。
- 22.30** ある銀行が、ある企業の信用格付が 1 年以内に A から Baa 以下に格下げになった場合にその 1 年の終わりに 100 ドルを支払うというク

レジット・デリバティブを取引するとする。満期1年の無リスク金利を5%とし、表22.6を用いてこのデリバティブの価値を評価せよ。その際に、どういう仮定をおいて評価したか説明せよ。その仮定は、そのデリバティブの価値を過大評価する傾向にあるか、それとも過小評価する傾向にあるか。

- 22.31** ある企業の株式の価値は400万ドルで、その株式のボラティリティは60%である。また、2年後に返済する負債が1,500万ドルある。無リスク金利は年率6%とする。Mertonモデルを用いて、デフォルトによる期待損失、デフォルト確率、およびデフォルト時の回収率を推定せよ。Mertonモデルから得られる回収率が高い理由を説明せよ（ヒント：脚注10に示したように、この問題を解くのにExcelのSolver関数を用いることができる）。
- 22.32** ある銀行が同じ種類のエクスポージャーを全部で1,000万ドル保有している。1年間のデフォルト確率は平均1%で、回収率は平均40%である。コピュラ相関パラメータは0.2とする。このとき、99.5%1年信用VaRを推定せよ。

## 第23章

# クレジット・デリバティブ

1990年代後半以降、デリバティブ市場で最も興奮させられる発展をしたのはクレジット・デリバティブの分野である。2000年にはクレジット・デリバティブ取引の総想定元本は約8,000億ドルであったが、2007年6月までには42兆ドルを超えるまでに成長した。クレジット・デリバティブは、一つ以上の企業や国の信用度に依存したペイオフをもつ契約である。本章では、クレジット・デリバティブの仕組みとその評価について論じる。

クレジット・デリバティブを用いて、企業は市場リスクの取引とほぼ同様の方法で信用リスクを取引することができる。銀行やその他金融機関はいつたん信用リスクを引き受けると、信用リスクに対しては、以前は待つこと（そして最善を望むこと）以外にほとんど何もできなかつた。いまでは信用リスクの一部を保持したり、クレジット・デリバティブ契約を取引してリスクをヘッジするなどして、信用リスクのポートフォリオを積極的に管理するこ

とができる。ビジネス寸見23.1でみると、銀行はクレジット・プロテクションの最大の買手であり、保険会社は最大の売手となっている。

クレジット・デリバティブは、「シングルネーム (single name)」と「マルチネーム (multiname)」に分類できる。最もよく取引されているシングルネームのクレジット・デリバティブはクレジット・デフォルト・スワップである。この商品のペイオフは、一つの企業または国に関する事象に依存して決まる。契約には2人の当事者、すなわちプロテクションの買手と売手がいる。指定された参照体（企業または国）が債務に対してデフォルトを起こした場合に、プロテクションの売手から買手へ支払が発生する。最もよく取引されているマルチネームのクレジット・デリバティブは、債務担保証券 (CDO) である。この商品では、社債や貸出債権などからなるポートフォリオが具体的に決められ、ポートフォリオから生み出されるキャッシュフローを異なるカテゴリーの投資家に分配する複雑な仕組みがつくられている。2007年6月までは、マルチネームのクレジット・デリバティブはシングルネームのクレジット・デリバティブに比べて相対的に人気を増してきた。それらは2004年12月にはクレジット・デリバティブ市場の約20%を占めているだけであったが、2007年6月にはそれらの市場シェアは43%を超えるまでに上昇した。

2007年7月に、投資家は米国のサブプライム住宅ローン市場に対して信用しなくなった。そこに至るまでの出来事については、23.7節とビジネス寸見23.3で説明する。マルチネームのクレジット仕組商品への関心は、サブプライム住宅ローンに関係しているかいなかにかかわらず、急速に低下した。2007年7月以降もシングルネームのクレジット・デリバティブは活発に取引され続けているが、マルチネームのクレジット仕組商品が以前の人気を取り戻すまでにはまだ時間がかかるであろう。

本章では、まずクレジット・デフォルト・スワップの仕組みとその評価方法について説明する。次に、クレジット・デフォルト・スワップに対するフォワード取引とオプション取引、およびトータル・リターン・スワップ取引について紹介する。さらに、クレジット指数、バスケット型クレジット・

デフォルト・スワップ、資産担保証券（ABS）、およびCDOについて説明する。また、第22章の内容を拡張して、デフォルト相関のガウシアン・コピュラモデルを用いたCDOのトランシェの評価方法を示す。

### ビジネス寸見23.1 だれが信用リスクをもつか？

伝統的に、銀行は貸出を行って借手がデフォルトする信用リスクを抱える業務を行ってきた。これには変化が起こっている。銀行が貸出債権をバランスシートに抱えることに消極的になって久しい。その理由は、規制当局から所要自己資本を求められるようになって以来、ローンの平均収益率は他の資産の平均収益率よりも魅力がない場合が多いからである。1990年代には、銀行は資産担保証券（第31章で論じるモーゲージ証券と類似の証券）をつくり出し、ローン（およびその信用リスク）を投資家に転売した。1990年代後半から2000年代初頭にかけて、銀行はクレジット・デリバティブを広範に活用して、ローンの信用リスクを金融システムの他の部分に移転してきた。

銀行がクレジット・プロテクションの正味での買手であるならば、だれが正味での売手なのだろうか。それは保険会社である。保険会社は銀行と同じ規制を受けておらず、その結果、信用リスクを抱えることに銀行よりも積極的な場合がある。

これらすべての結果として、ローンの信用リスクを抱える金融機関はもとの信用度をチェックした金融機関とは異なることが多い。このことが金融システム全体の健全性という点で結果的に望ましいことであるかどうかは、今後明らかになってくることである。

## 23.1 クレジット・デフォルト・スワップ

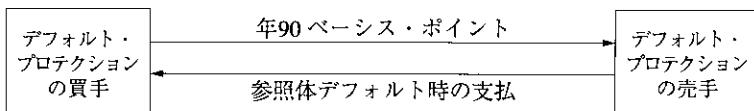
最もよく取引されているクレジット・デリバティブは、クレジット・デフォルト・スワップ (CDS: credit default swap) である。CDS は、特定の企業のデフォルト・リスクに対する保険を提供する契約である。この契約では、企業は参照体 (reference entity) と呼ばれ、企業のデフォルトは信用事由 (credit event) と呼ばれる。また、保険の買手は信用事由が発生したとき、その企業が発行した債券を額面で売却する権利をもち、保険の売手は信用事由が発生したとき、その債券を額面で購入することに同意している（注1）。売却できる債券の額面総額が、クレジット・デフォルト・スワップの想定元本 (notional principal) である。

CDS の買手は CDS の満期もしくは信用事由が発生するまでの間、売手に対して定期的にプレミアムを支払う。支払は一般的に四半期単位、半年単位、または年単位の後払いを行われる。デフォルト発生時には、債券の現渡し、または現金払いでの決済が行われる。

典型的な取引の仕組みを、例を用いて説明しよう。二つの企業が、2009年3月1日に満期5年のクレジット・デフォルト・スワップを締結するとする。想定元本を1億ドルとし、企業は参照体のデフォルトに対するプロテクションの対価として年90ペース・ポイントを支払うことに合意していると仮定する。

この CDS を図23.1に示す。もし参照体がデフォルトしなければ（すなわち信用事由が発生しなければ）、買手には受け取るべきオフはなく、2010年、2011年、2012年、2013年、および2014年の各年の3月1日に90万ドルを支払

図23.1 クレジット・デフォルト・スワップ



(注1) 債券の額面（またはバー）とは、発行体がデフォルトしない場合に満期に払い戻す元本額である。

う。もし信用事由が発生すれば、相当なペイオフが発生することが多い。買手が、2012年6月1日（4年目の四半期が過ぎた時点）に売手に対して信用事由を通知したとする。契約で現物決済が指定されている場合は、買手は参照体が発行した額面1億ドルの債券を1億ドルで売却する権利をもつ。契約で現金決済が指定されている場合は、独立した計算代理人がディーラーに問い合わせて、前もって決められた信用事由後数日間における最割安な受渡可能債券の市場価格の仲値を決定する。たとえば、この債券の額面100ドル当りの価値が35ドルとすると、現金によるペイオフは6,500万ドルとなる。

信用事由が発生したとき、プロテクションの買手から売手への四半期ごと、半期ごと、毎年の定期的なプレミアムの支払は停止する。しかし、これらの支払は後払いであるため、買手から最後の経過プレミアムの支払が行われるのがふつうである。この例では、買手が売手に対して支払わなければならぬのは、年支払額の2012年3月1日から2012年6月1日までの経過分（およそ22.5万ドル）であり、その他の支払は要求されない。

プロテクションを購入するために支払われる、想定元本に対するパーセント表示の年当り合計金額はCDSスプレッドとして知られる。いくつかの大手銀行は、クレジット・デフォルト・スワップ市場におけるマーケット・メーカーになっている。ある企業に対する満期5年の新規クレジット・デフォルト・スワップを表示する場合、マーケット・メーカーはたとえばビッド250ベース・ポイント、オファー260ベース・ポイントといった表示を行う。これは、マーケット・メーカーはプロテクションを買う場合は年250ベース・ポイント（すなわち、年当り元本の2.5%）の支払、プロテクションを売却する場合は年260ベース・ポイント（すなわち、年当り元本の2.6%）の受取りで取引に応じるということを意味している。

多くの異なる企業と国を参照体としたCDSが取引されている。支払は四半期ごとの後払いが最も一般的である。満期5年の契約が最もよく取引されているが、満期が1年、2年、3年、7年、および10年の取引もふつうに行われている。契約の満期日は、通常、3月20日、6月20日、9月20日、12月20日のいずれかの標準日に設定される。その結果、取引開始時点における契

約満期までの実際の期間は満期までの年数に近いが、必ずしも同じではない。2009年11月15日に、ある企業に対する満期5年のプロテクションを購入するためにディーラーに電話したとしよう。締結する契約の満期日はおそらく2014年12月20日になるだろう。この場合、最初のプレミアムの支払は2009年12月20日に行われ、支払額は2009年11月15日から2009年12月20日までの期間に対応したものになる(注2)。CDSの契約の条項で重要なのは、デフォルトの定義である。欧州の参照体に対する契約では、リストラクチャリングも信用事由に含まれるのが一般的であるが、北米の参照体に対する契約ではそうではない。

### クレジット・デフォルト・スワップと債券イールド

CDSは、社債ポジションのヘッジに利用することができる。ある投資家が額面当り年率7%のイールドの満期5年の社債を購入し、同時に債券発行体のデフォルトに対するプロテクションを購入する満期5年のCDSを取引するとしよう。CDSスプレッドは年200ベーシス・ポイント、すなわち2%とする。CDSにより、社債は(少なくとも近似的には)無リスク債券に転換されたことになる。CDSスプレッドを社債のイールドと相殺すると、債券がデフォルトしなければ投資家は年5%の利益を得る。債券がデフォルトした場合でも、デフォルト時点までは5%の利益を得る。その場合、CDSの契約条項に基づき、投資家は債券を額面価値と交換できる。5年のうちの残りの期間は、この額面価値を無リスク金利で運用することもできる。

満期 $n$ 年のCDSスプレッドは、満期 $n$ 年の無リスク債券のパー・イールドに対する、満期 $n$ 年の社債のパー・イールドの超過イールドにだいたい等しいはずである。もしCDSスプレッドがこれより著しく低い場合は、投資家は社債とプロテクションを購入することによって、無リスク金利より多くの利益を得ることができる。もしCDSスプレッドがこれより著しく高い

---

(注2) 最初の標準支払日までの期間が1カ月末満の場合は、最初の支払は次の標準支払日に行われるのが一般的である。その他の場合には、最初の標準支払日に支払が行われる。

場合は、投資家は社債を空売りしてプロテクションを売却することによって、無リスク金利未満の借入れを行うことができる。これは完全な裁定取引ではない。しかし、それは完全に近いもので、CDS スプレッドと債券イールドとの関係のよい目安となるものである。CDS スプレッドから、市場参加者の用いる無リスク金利を推定することができる。22.4節で論じたように、平均的なインプライド無リスク金利は大体 LIBOR／スワップ・レート-10ペース・ポイントに等しいと思われる。

### 最割安銘柄

22.3節で説明したように、債券の回収率はデフォルト直後の債券価値の額面に対するパーセントで定義される。したがって、CDS のペイオフは  $L(1-R)$  と書ける。ただし、 $L$  は想定元本、 $R$  は回収率である。

通常 CDS では、デフォルト時に受渡可能ないくつかの債券が指定されている。それらの債券は一般的に同じ優先順位のものであるが、デフォルト直後の売却価格は額面に対して同じパーセントになるとは限らない(注3)。したがって、CDS の保有者は最割安銘柄の選択権をもつことになる。デフォルトが発生すると、プロテクションの買手（または、現金決済の場合は計算代理人）は受渡可能な債券を吟味し、最も安価で購入できる受渡債券を選ぶことになる。

## 23.2 クレジット・デフォルト・スワップの評価

個々の参照体に対する CDS スプレッドの市場仲値（ブローカーが示す CDS スプレッドのビッドとオファーの平均値）は、デフォルト確率の推定値から計算することができる。簡単な例を用いてその計算方法を示す。

---

(注3) これにはいくつかの理由がある。デフォルト時に行われる債権請求額は一般的に債券の額面に経過利子を加えたものに等しい。したがって、デフォルト時に大きな経過利子をもつ債券はデフォルト直後の価格が高くなる傾向にある。また、企業再編時には、ある債券の保有者がそれ以外の債券の保有者よりも有利になると市場で考えられている場合もある。

表23.1 無条件のデフォルト確率と生存確率

| 時間<br>(年) | デフォルト確率 | 生存確率   |
|-----------|---------|--------|
| 1         | 0.0200  | 0.9800 |
| 2         | 0.0196  | 0.9604 |
| 3         | 0.0192  | 0.9412 |
| 4         | 0.0188  | 0.9224 |
| 5         | 0.0184  | 0.9039 |

それまでにデフォルトしていないという条件付きでの参照体の年間デフォルト確率を2%とする。表23.1に5年までの各年の生存確率と無条件のデフォルト確率（すなわち、時点ゼロで観測されるデフォルト確率）を示す。1年目のデフォルト確率は0.02で、参照体が1年目の終わりまで生存する確率は0.98となる。2年目のデフォルト確率は $0.02 \times 0.98 = 0.0196$ で、2年目の終わりまでの生存確率は $0.98 \times 0.98 = 0.9604$ となる。3年目のデフォルト確率は $0.02 \times 0.9604 = 0.0192$ である、といった具合である。

デフォルトは常に1年の真ん中で発生し、クレジット・デフォルト・スワップのプレミアムは年1回、各年の終わりに支払われると仮定する。さらに、無リスク金利(LIBOR)を連続複利で年率5%，回収率を40%とする。計算は三つの部分に分かれる。それらの結果を表23.2、表23.3、および表23.4(次々頁)に示す。

表23.2は、プレミアムが年 $s$ の割合で支払われ、想定元本を1ドルと仮定した場合の、CDSの期待プレミアムの現在価値に関する計算結果である。たとえば、3回目のプレミアム $s$ が支払われる確率は0.9412である。したがって、期待プレミアムは $0.9412s$ となり、その現在価値は $0.9412se^{-0.05 \times 3} = 0.08101s$ となる。また、期待プレミアムの総現在価値は4.0704sとなる。

表23.3は、想定元本を1ドルと仮定した場合の期待ペイオフの現在価値に関する計算結果である。前と同様に、デフォルトは常に1年の真ん中で発生するものとしている。たとえば、3年目の真ん中でペイオフが発生する確率

表23.2 期待プレミアムの現在価値計算（プレミアム=年  $s$ ）

| 時間<br>(年) | 生存確率   | 期待プレミアム | 割引率    | 期待プレミアムの現在価値 |
|-----------|--------|---------|--------|--------------|
| 1         | 0.9800 | 0.9800s | 0.9512 | 0.9322s      |
| 2         | 0.9604 | 0.9604s | 0.9048 | 0.8690s      |
| 3         | 0.9412 | 0.9412s | 0.8607 | 0.8101s      |
| 4         | 0.9224 | 0.9224s | 0.8187 | 0.7552s      |
| 5         | 0.9039 | 0.9039s | 0.7788 | 0.7040s      |
| 合計        |        |         |        | 4.0704s      |

表23.3 期待ペイオフの現在価値計算（想定元本=1ドル）

| 時間<br>(年) | デフォルト確率 | 回収率 | 期待ペイオフ<br>(ドル) | 割引率    | 期待ペイオフの<br>現在価値(ドル) |
|-----------|---------|-----|----------------|--------|---------------------|
| 0.5       | 0.0200  | 0.4 | 0.0120         | 0.9753 | 0.0117              |
| 1.5       | 0.0196  | 0.4 | 0.0118         | 0.9277 | 0.0109              |
| 2.5       | 0.0192  | 0.4 | 0.0115         | 0.8825 | 0.0102              |
| 3.5       | 0.0188  | 0.4 | 0.0113         | 0.8395 | 0.0095              |
| 4.5       | 0.0184  | 0.4 | 0.0111         | 0.7985 | 0.0088              |
| 合計        |         |     |                |        | 0.0511              |

は0.0192である。回収率は40%としているので、その時点での期待ペイオフは $0.0192 \times 0.6 \times 1 = 0.0115$ となり、その現在価値は $0.0115e^{-0.05 \times 2.5} = 0.0102$ となる。また、期待ペイオフの総現在価値は0.0511ドルとなる。

最後のステップとして、表23.4はデフォルト時に行われる経過プレミアムの支払に関する計算結果である。たとえば、3年目の真ん中で最後の経過プレミアムの支払が行われる確率は0.0192である。経過プレミアムは0.5sである。したがって、その時点での期待経過プレミアムは $0.0192 \times 0.5s = 0.0096s$ となり、その現在価値は $0.0096se^{-0.05 \times 2.5} = 0.0085s$ となる。また、期待経過プレミアムの総現在価値は0.0426sとなる。

表23.2と表23.4より、期待支払額の現在価値は、

$$4.0704s + 0.0426s = 4.1130s$$

となる。表23.3より、期待ペイオフの現在価値は0.0511であるから、両者が

表23.4 経過プレミアムの現在価値計算

| 時間<br>(年) | デフォルト確率 | 期待プレミアム | 割引率    | 期待経過プレミアムの<br>現在価値 |
|-----------|---------|---------|--------|--------------------|
| 0.5       | 0.0200  | 0.0100s | 0.9753 | 0.0097s            |
| 1.5       | 0.0196  | 0.0098s | 0.9277 | 0.0091s            |
| 2.5       | 0.0192  | 0.0096s | 0.8825 | 0.0085s            |
| 3.5       | 0.0188  | 0.0094s | 0.8395 | 0.0079s            |
| 4.5       | 0.0184  | 0.0092s | 0.7985 | 0.0074s            |
| 合計        |         |         |        | 0.0426s            |

等しいとすると、

$$4.1130s = 0.0511$$

すなわち  $s=0.0124$  が得られる。このことから、CDS スプレッドの市場価値は 0.0124 に元本を乗じたもの、すなわち年 124 ベーシス・ポイントとなるはずである。この例は計算手法の例示を目的としたものである。実際には、(a) プレミアムの支払は年 1 回よりも頻繁に行われることが多い、(b) デフォルトは年 1 回よりも頻繁に発生すると仮定したいので、表23.2 から表23.4 までの計算よりも、もっと多くの計算を必要とすることになる。

### CDS の時価評価

契約時点では、CDS は他のスワップと同様に、その価値はゼロに近い。その後は、価値は正にも負にもなりうる。たとえばこれまでの例で、CDS は 150 ベーシス・ポイントのスプレッドで以前に締結されたものであるとすると、買手の支払うプレミアムの現在価値は  $4.1130 \times 0.0150 = 0.0617$  となり、ペイオフの現在価値は上と同じ 0.0511 となる。したがって、売手からみたスワップの価値は  $0.0617 - 0.0511$ 、すなわち 0.0106 に元本を乗じた金額になる。同様に、プロテクションの買手からみたスワップの時価評価額は  $-0.0106$  に元本を乗じた金額になる。

## デフォルト確率の推定

CDS の評価に用いるデフォルト確率は、実世界でのデフォルト確率ではなくリスク中立デフォルト確率であるべきである（両者の違いについては22.5節を参照）。リスク中立デフォルト確率は、第22章で説明したように、債券価格またはアセットスワップから推定できる。CDS の呈示価格からリスク中立デフォルト確率を推定する別の方法もある。後者は、オプション市場で活発に取引されているオプションの価格からインプライド・ボラティリティを推定する実務的手法と類似の方法である。

表23.2、表23.3、および表23.4の例において、デフォルト確率がわかつていないと仮定しよう。そのかわりに、満期5年の新規CDSスプレッドの市場仲値が年100ベース・ポイントであるとわかっているとする。これまでの計算を逆に行うと、（それまでにデフォルトしていないという条件付きでの）インプライド・デフォルト確率は年1.61%となることがわかる（注4）。

## バイナリー型クレジット・デフォルト・スワップ

バイナリー型クレジット・デフォルト・スワップは、ペイオフが固定金額であること以外は通常のクレジット・デフォルト・スワップと同じような仕組みである。表23.1から表23.4で考察した例において、ペイオフを $(1-R)$ ドルのかわりに1ドルとし、スワップ・スプレッドを $s$ とする。表23.1、表23.2、および表23.4は先ほどと同じだが、表23.3は表23.5（次頁）に置き換わる。新規のバイナリー型CDSに対するCDSスプレッドは、 $4.1130s = 0.0852$ で与えられ、CDSスプレッド $s$ は0.0207、すなわち207ベース・ポイントになる。

## 回収率はどれだけ重要か？

デフォルト確率の推定にCDSスプレッドと債券価格のどちらを用いるに

---

(注4) 理想的には、単一のデフォルト強度ではなく、各年の異なるデフォルト確率を推定したい。満期が1年、2年、3年、4年、および5年のCDSスプレッドまたは債券価格があれば、そのような推定が行える。

表23.5 バイナリー型CDSの期待ペイオフの現在価値計算（想定元本＝1ドル）

| 時間<br>(年) | デフォルト確率 | 期待ペイオフ<br>(ドル) | 割引率    | 期待ペイオフの<br>現在価値(ドル) |
|-----------|---------|----------------|--------|---------------------|
| 0.5       | 0.0200  | 0.0200         | 0.9753 | 0.0195              |
| 1.5       | 0.0196  | 0.0196         | 0.9277 | 0.0182              |
| 2.5       | 0.0192  | 0.0192         | 0.8825 | 0.0170              |
| 3.5       | 0.0188  | 0.0188         | 0.8395 | 0.0158              |
| 4.5       | 0.0184  | 0.0184         | 0.7985 | 0.0147              |
| 合計        |         |                |        | 0.0852              |

しろ、回収率の推定が必要となる。しかし、(a)リスク中立デフォルト確率の推定と(b)CDSの評価に同じ回収率を用いる限り、CDSの価値（あるいは、CDSスプレッドの推定値）は回収率の影響をあまり受けない。その理由は、インプライド・デフォルト確率はだいたい $1/(1-R)$ に比例し、CDSのペイオフは $1-R$ に比例するからである。

この議論はバイナリー型CDSには当てはまらない。インプライド・デフォルト確率はこの場合もだいたい $1/(1-R)$ に比例している。しかし、バイナリー型CDSのペイオフは $R$ と独立である。もしプレーン・バニラCDSとバイナリー型CDSに対するCDSスプレッドがわかっているならば、回収率とデフォルト確率の両方を推定することができる（宿題23.26を参照）。

### CDS市場の将来

クレジット・デフォルト・スワップ市場は、2007年の信用収縮を生き延びた。クレジット・デフォルト・スワップは、信用リスクを管理する重要なツールとなっている。金融機関はプロテクションを購入することで、特定の企業に対する信用エクスポージャーを削減することができる。また、CDSを使って信用リスクを分散することもできる。たとえば、金融機関が特定の業種に対して大きすぎる信用エクspoージャーを保有しているとき、その業種に属する企業のデフォルトに対するプロテクションを購入すると同時に、その業種と関連のない他業種に属する企業のデフォルトに対するプロテク

ションを売却することによって信用リスクを分散できる。

CDS 市場は発展し続け、2010年までには金利スワップ市場と同規模まで成長すると考えている市場参加者もいる。一方で、それほど楽観視していない参加者もいる。CDS 市場には他の店頭デリバティブ市場にはない、潜在的な情報の非対称性の問題があるからである（ビジネス寸見23.2を参照）。

### ビジネス寸見23.2 CDS 市場は公平なゲームか？

クレジット・デフォルト・スワップと本書で考察したその他の店頭デリバティブとには、重要な違いが一つある。その他の店頭デリバティブは、金利、為替、株価指数、および商品価格などに依存した商品である。こうした変数に対しては、一部の市場参加者が他の市場参加者よりもよい情報を有していると仮定する理由がない。

クレジット・デフォルト・スワップのスプレッドは、特定の企業が特定の期間にデフォルトする確率に依存している。ほぼ間違いなく、一部の市場参加者は他の市場参加者に比べてこの確率を推定するためのより多くの情報をもっている。ある金融機関が特定の企業に対してアドバイスの提供、貸出、および証券の新規発行を扱っている場合、その企業の信用状況について、その企業と取引を行っていない金融機関よりも多くの情報をもっている可能性が高い。経済学者はこれを「情報の非対称性（asymmetric information）」の問題と呼んでいる。

情報の非対称性がクレジット・デフォルト・スワップ市場の拡大を阻害するかどうかは、今後明らかになってくることである。企業のデフォルト・リスクに対するプロテクションの購入に関する意思決定は通常リスクマネジャーによって行われ、金融機関の他の場所に存在するかもしれないその企業に関する特別な情報に基づくものではない、と金融機関は強調している。

### 23.3 クレジット指数

クレジット・デリバティブの市場参加者は、CDS スプレッドに連動するいくつかの指数を開発してきた。2004年には、異なる指数の提供者間で指数の統合に関する合意がなされた。指数を定義する基準ポートフォリオには、次の二つの重要なものがある。

1. CDX NA IG, 北米の投資適格125社からなるポートフォリオ
2. iTraxx Europe, 欧州の投資適格125社からなるポートフォリオ

これらのポートフォリオは、毎年3月20日と9月20日に更新される。投資適格でなくなった企業はポートフォリオからはずされ、新しい投資適格企業が追加される(注5)。

マーケット・メーカーが年限5年のCDX NA IG指数に対して、ピッド65ペーシス・ポイント、オファー66ペーシス・ポイント(指数スプレッドと呼ばれる)を呈示しているとする。大雑把にいえば、トレーダーは指数に含まれる全125社に対するCDSプロテクションを1企業当たり66ペーシス・ポイントで購入できる。トレーダーが各企業に対して80万ドルのプロテクションを必要としているすると、総コストは年 $0.0066 \times 800,000 \times 125$ 、すなわち66万ドルになる。同様に、トレーダーは合計年65万ドルで各125社に対する80万ドルのプロテクションを売却することができる。1社がデフォルトした場合は、プロテクションの買手は通常のCDSと同じペイオフを受け取り、年間プレミアムは $660,000/125 = 5,280$ ドルの減額となる。満期3年、5年、7年、10年のCDS指数プロテクションが市場では活発に売買されている。指数に対するそれらの契約の満期日は、通常12月20日または6月20日に設定される(したがって、“満期5年”の契約に対する実際の満期は $4\frac{3}{4}$ 年から $5\frac{1}{4}$ 年の間にかかる)。大雑把には、指数はそれを構成する企業に対するCDSスプ

---

(注5) 2007年9月20日に、iTraxx Europe ポートフォリオ・シリーズ8とCDX NA IG ポートフォリオ・シリーズ9が定義されている。シリーズ数は、2007年9月末までにiTraxx Europe ポートフォリオは7回、CDX NA IG ポートフォリオは8回更新されていることを表している。

レッドの平均である(注6)。

契約の正確な仕組みは、上述のものよりも少し複雑である。各指数と各満期に対して“クーポン”が決められている。価格は呈示されている指数スプレッドから、次の手順で計算される。

1. 回収率は40%，プレミアムは後払い年4回行われると仮定する。
2. 指数に対して呈示されたスプレッドから、インプライド・デフォルト強度（ハザード率）を求める。それには23.2節と同様の計算を行う。呈示されたスプレッドになるようなデフォルト強度は反復探索法で求める。
3. CDSのプレミアムに対するデュレーション  $D$  を計算する。これは、指数スプレッドに乘じるとスプレッドの支払額の現在価値が得られる数である（23.2節の例では、その値は4.1130である）。
4. 価格  $P$  は、 $P = 100 - 100 \times D \times (S - C)$  で与えられる。ただし、 $S$  は指数スプレッド、 $C$  はクーポン（小数表示）である。

トレーダーは指数プロテクションを購入するとき、総残存想定元本に対して100ドル当り  $100 - P$  を支払い、プロテクションの売手はその金額を受け取る ( $P - 100$  が負の場合は、プロテクションの買手が現金を受け取り、プロテクションの売手が現金を支払う)。その後、プロテクションの買手はクーポンに残存想定元本を掛けた金額を各支払日に支払う（残存想定元本は、まだデフォルトしていない企業数に1企業当りの元本を掛けた値である）。デフォルト時のペイオフは通常と同じように計算される。この取決めによって、プロテク

---

(注6) より正確には、指数はポートフォリオに含まれる企業のクレジット・デフォルト・スワップ・スプレッドの平均よりわずかに低い。その理由を理解するために、スプレッドがそれぞれ1,000ベース・ポイントと10ベース・ポイントである二つの企業からなるポートフォリオを考える。両社のプロテクションを購入するコストは、1社当り505ベース・ポイントをわずかに下回る。これは、1,000ベース・ポイントは10ベース・ポイントよりも長く支払われることが期待されない分、それに対するウェイトが小さくなるからである。iTraxx Europe はない、CDX NA IG に関する別の複雑な点は、指数に適用される信用事由の定義にはリストラクチャリングが含まれているが、指数のポートフォリオの構成企業に対するCDSの定義にはそれが含まれていないことである。

ションの買手が定期的に四半期ごとに支払う金額が取引開始時点の指數スプレッドとは独立して決められるので、取引が容易になる。

#### 【例23.1】

iTraxx Europe 指数が34ペース・ポイントと呈示されており、クーポンは満期がちょうど5年の契約に対して40ペース・ポイントであるとする。これらのデイカウントはともに30/360である(CDSおよびCDS指数の市場では、このデイカウントが通常用いられている)。実日数/実日数に直すと、指数は0.345%、クーポンは0.406%になる。イールドカーブはフラットで年率4%（実日数/実日数、連続複利）とする。回収率を40%，プレミアムを年4回払いと仮定すると、インプライド・ハザード率は0.5717%になり、デュレーションは4.447年になる。したがって、価格は、

$$100 - 100 \times 4.447 \times (0.00345 - 0.00406) = 100.27$$

となる。1企業当り100万ドルのプロテクションとなる契約を考える。当初、プロテクションの売手は $1,000,000 \times 125 \times 0.0027$ ドルを買手に支払うことになる。それ以後は、プロテクションの買手は四半期ごとに年当り $1,000,000 \times 0.00406 \times n$ ドルの支払を後払い行う。ただし、nはまだデフォルトしていない企業の数である。企業がデフォルトしたとき、通常と同じ方法で計算されたペイオフを買手は受け取るとともに、買手から売手へ100万ドルに対する年率0.406%に基づいて計算された経過プレミアムが支払われる。

## 23.4 CDSのフォワードとオプション

CDS市場がよく確立されてくると、当然のことであるが、デリバティ・ディーラーはCDSスプレッドに対するフォワードやオプションの取引を始めた(注7)。

フォワード・クレジット・デフォルト・スワップは、特定の参照体に対する

るクレジット・デフォルト・スワップを特定の将来時点  $T$  で買うまたは売る約束をする契約である。参照体が時点  $T$  以前にデフォルトした場合には、フォワード契約は消滅する。たとえば、1年後スタートのある企業に対する満期5年のプロテクションを280ベース・ポイントで売却するフォワード契約をある銀行が取引したとする。もしその企業が1年後までにデフォルトしたとすると、そのフォワード契約は消滅する。

クレジット・デフォルト・スワップ・オプションは、特定の将来時点  $T$  においてある参照体に対するクレジット・デフォルト・スワップを買うまたは売る選択権である。たとえば、1年後スタートのある企業に対する満期5年のプロテクションを280ベース・ポイントで購入する権利の取引をトレーダーが検討しているとする。これはコール・オプションである。その企業に対する満期5年のCDSスプレッドが1年後に280ベース・ポイントを上回っていれば、そのオプションは行使される。そうでなければ行使されない。オプションのプレミアムは取引当初に支払われる。同様に、1年後スタートのある企業に対する満期5年のプロテクションを280ベース・ポイントで売却する権利の取引を投資家が検討しているとする。これはプット・オプションである。その企業に対する満期5年のCDSスプレッドが1年後に280ベース・ポイントを下回っていれば、そのオプションは行使される。そうでなければ行使されない。この場合のオプションのプレミアムも取引当初に支払われる。CDSフォワードと同様に、CDSオプションも参照体がオプション満期前にデフォルトした場合には、通常消滅する仕組みになっている。

### 23.5 バスケット型クレジット・デフォルト・スワップ

複数の参照体を含むCDSを、バスケット型クレジット・デフォルト・ス

(注7) これらの商品の評価についてはJ.C. Hull and A. White, "The Valuation of Credit Default Swap Options," *Journal of Derivatives*, 10, 5 (Spring 2003) : 40-50を参照。

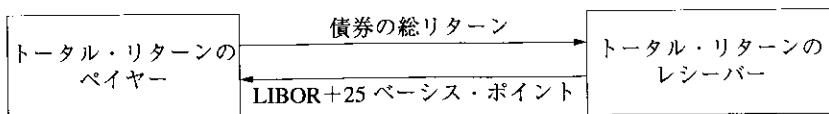
ワップ (basket credit default swap) と呼ぶ。アドアップ (add-up)・バスケット型 CDS は、任意の参照体がデフォルトしたときにペイオフが発生する。ファースト・トゥ・デフォルト (first-to-default) 型 CDS は、最初のデフォルトが発生したときのみにペイオフが発生する。セカンド・トゥ・デフォルト (second-to-default) 型 CDS は、2 番目のデフォルトが発生したときのみにペイオフが発生する。もっと一般的に、 $k$ th-to-default 型 CDS は  $k$  番目のデフォルトが発生したときのみにペイオフが発生する。ペイオフは通常の CDS と同じ方法で計算され、関連するデフォルトが発生すると決済が行われる。その時点でスワップは終了し、それ以降、当事者間での支払は発生しない。

## 23.6 トータル・リターン・スワップ

トータル・リターン・スワップ (total return swap) は、クレジット・リバティの一種である。債券（または任意の資産ポートフォリオ）の総リターンと LIBOR+スプレッドを交換する契約である。総リターンにはスワップ期間におけるクーポンや利子、資産に関する損益が含まれる。

トータル・リターン・スワップの例として、社債の総リターンと LIBOR+25ベーシス・ポイントを交換する想定元本 1 億ドル、満期 5 年の契約を考える。これを図23.2に図示する。各利払日にスワップのペイラーは 1 億ドルの債券投資から得られるクーポンを支払う。スワップのレシーバーは元本 1 億ドルに対する LIBOR+25ベーシス・ポイントの利子を支払う（プレーン・バニラの金利スワップと同様に、LIBOR は各利払日にリセットされ、それに基づいた利子が次の利払日に支払われる）。スワップの満期には、債券の価格変化を反映した支払が行われる。たとえば、スワップ期間を通じて債券

図23.2 トータル・リターン・スワップ



が10%上昇したとすると、ペイヤーは5年後に1,000万ドル（＝1億ドルの10%）の支払を要求される。同様に、債券が15%下落したとすると、レシーバーは5年後に1,500万ドルの支払を要求される。債券がデフォルトした場合には通常スワップは終了し、1億ドルが債券の市場価格を超える金額に等しい最終支払がレシーバーから行われる。

スワップ終了時の両サイドの支払に想定元本を追加して考えると、トータル・リターン・スワップはペイヤーが1億ドルの社債投資から得られるキャッシュフローを支払い、レシーバーが1億ドルのクーポンLIBOR+25ペース・ポイントの債券投資から得られるキャッシュフローを支払うスワップという特徴付けができる。ペイヤーが社債を保有している場合は、ペイヤーはトータル・リターン・スワップによって社債の信用リスクをレシーバーに移転することができる。ペイヤーが社債を保有していない場合は、ペイヤーはトータル・リターン・スワップによって社債の売りポジションをとることができる。

トータル・リターン・スワップは、資金調達手段として使われることも多い。次のような場合に図23.2のスワップが組まれる。レシーバーが参照債券1億ドルへの投資を行うために資金調達をしたいとする。レシーバーはペイヤー（金融機関の場合が多い）に連絡し、スワップを締結する。締結後、ペイヤーはこの債券1億ドルに投資する。この結果、レシーバーはLIBOR+25ペース・ポイントの借り入れでその債券を購入したのと同じポジションを保有したことになる。ペイヤーはスワップ期間中その債券の所有権を持ち続けるので、レシーバーの債券購入資金を貸し出して、その債券を担保として受け入れる場合よりも信用リスクは小さくなる。それは、レシーバーがデフォルトした場合に担保を現金化しなければならないという法的問題が、ペイヤーに発生しないからである。このように、証券購入時の資金調達に伴う信用リスクを最小化する点で、トータル・リターン・スワップはレポ取引（4.1節を参照）に類似した取引である。

ペイヤーが受け取るLIBORに対する上乗セスプレッドは、レシーバーがデフォルトするリスクの対価である。参照債券の価格が下落したときにレ

シーバーがデフォルトすれば、ペイヤーは損失を被る。したがって、スプレッドはレシーバーの信用度、債券発行体の信用度、およびそれら二つの相関に依存している。

これまで説明してきた標準的な取引には多くのバリエーションがある。スワップ終了時に債券の価格変化に対して現金決済をするかわりに、ペイヤーが想定元本分の現金を受け取って原資産を渡す現物決済を行う場合もある。また、債券の価格変化に対する支払がスワップの終了時に一括ではなく、定期的に行われる場合もある。

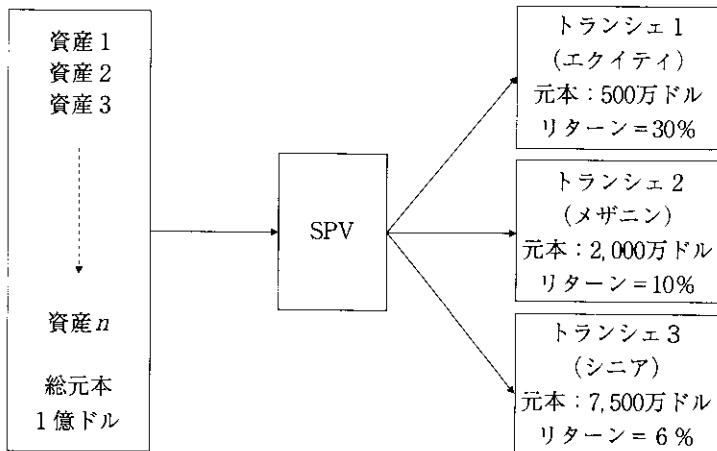
## 23.7 資産担保証券

資産担保証券 (ABS : asset-backed security) は、ローン、債券、クレジット・カード売掛債権、住宅ローン、自動車ローン、航空機リース、その他の金融資産のポートフォリオからつくられる証券である（ポートフォリオには、一つの楽曲の将来の売上げからの著作権使用料のような珍しい資産が含まれることもある）。資産担保証券を組成する例として、多くの自動車ローンを保有する銀行を考えよう。ローンは一般的に借手の信用度に応じて、“プライム”，“ノンプライム”，“サブプライム”に分類される。10,000のノンプライム・ローンがあるとする。銀行はそれらをバランスシート上の資産として保有するよりも、信託あるいは導管体 (conduit) とも呼ばれる、特別目的会社 (SPV : special purpose vehicle) へそれらを売却することにするかもしれない。SPV はローンからのキャッシュフローを裏付とした証券を発行し、投資家にその証券を販売し始める。このアレンジメントには、投資家がローンを出した銀行の信用リスクから隔離される効果がある。その結果、投資家の収益はローンからのキャッシュフローのみによって決まるようになる。銀行はローンの組成と回収に対して手数料を得るが、ローンに伴う信用リスクは投資家に移転される。

多くの異なる種類の ABS を組成することができる。信用リスクはいくつかのトランシェに分配されることが多い。1億ドルの債権ポートフォリオを

裏付とし、三つのトランシェを発行する簡単なアレンジメント例を図23.3に示す。ABSの満期は5年としている。エクイティ・トランシェと呼ばれる最初のトランシェで元本全体の5%の資金調達が行われ、30%のリターンが支払われる。メザニン・トランシェと呼ばれる2番目のトランシェで元本全体の20%の資金調達が行われ、10%のリターンが支払われる。シニア・トランシェと呼ばれる3番目のトランシェで元本全体の75%の資金調達が行われ、6%のリターンが支払われる。各トランシェには、ウォーターフォールとして知られるルールに基づいて、優先順位に従った収益が分配される。資産ポートフォリオからのキャッシュフローは、まずトランシェ3の投資家に対して6%のリターンを支払うのに使われる。その次は、トランシェ2の投資家に対して10%のリターンを支払うのにできる限り使われる。最後に、ポートフォリオからの残りのキャッシュフローはトランシェ1の投資家に対して30%までのリターンを支払うのに使われる。次に、資産ポートフォリオにデフォルト損失が発生し始めた場合に、収益分配はどのようになるかを考えよう。トランシェ1の投資家が最初に影響を受けることになる。当初投資額に対して30%より少ないリターンしか得られなくなり、元本の一部が毀損することも多い。デフォルトがかなり多く発生した場合には、トランシェ2

図23.3 ABSの仕組み

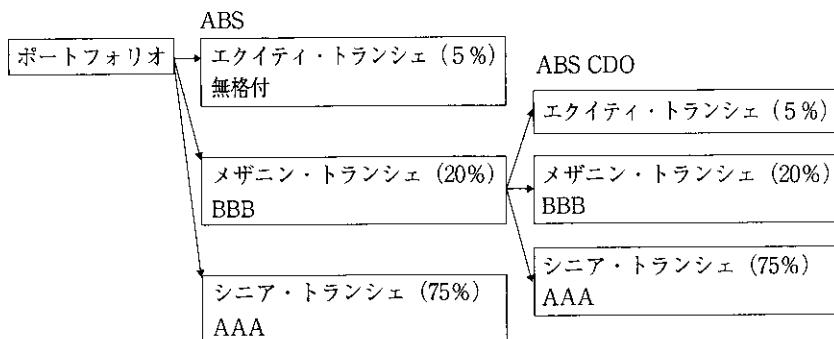


も影響を受け始める。そして、デフォルトがさらに多く発生した場合には、トランシェ3のリターンも保証されなくなる。

一般的に、シニア・トランシェはAAAに格付される。メザニンはBBBに格付されることが多い。エクイティ・トランシェは通常無格付で、ABSの組成者が保有する場合もある。したがって、資産担保証券は、元本1億ドルのリスクのあるローン・ポートフォリオを保有し、それから7,500万ドルの格付AAAの債券をつくり出す手法である。SPVまたは導管体は、発行体から資産を買い取り、それから上述の方法で証券をつくり出す器である。

ディーラーはこの種の仕組みの利用に大変な想像力—おそらく創造的すぎた—を発揮してきた。メザニン・トランシェはなかなか売れない商品である。この問題を解決するためにディーラーは、たとえば20の異なる資産担保証券のメザニン・トランシェからなる新たな資産担保証券（これはABS CDOと呼ばれる）を組成したりした。そうすることによって、ディーラーは新しい仕組みのほとんどのシニア・トランシェに対して格付機関から格付AAAを取得した。このような仕組みの例を図23.4に示す。異なるメザニン・トランシェから生じる損失が互いに独立しているならば、ABS CDOのシニア・トランシェに対するAAAの格付は妥当なものである。しかし、すべてのメザニン・トランシェに対して同時に高い損失率が発生するおそれがあ

図23.4 ABS CDOの組成



ABSのメザニン・トランシェは他の同様のメザニン・トランシェとともにリパッケージされて、ABS CDOが組成される。

ある場合には、その格付 AAA のトランシェにはかなりのリスクがあり、損失が生じる可能性が高い。ビジネス寸見23.3で紹介するように、2007年半ばにまさにそのようなことが起こった。サブプライム住宅ローンから組成された格付 BBB のメザニン・トランシェを裏付に組成された格付 AAA のトランシェを購入した投資家は、格付機関からその投資を急激に格下げされるということを経験した。

### ビジネス寸見23.3 2007年の信用収縮

2007年7月、クレジット市場に激しい動搖が走った。クレジット・スプレッドが約50%上へジャンプし、幅広い個人と企業にとって借入れがいよいよ困難となったからである。どうしてこのようなことが起こったのだろうか。

まず、米国の不動産市場について調べる必要がある。2000年から2006年までの間、ほとんどの地域で住宅価格が急騰した。その結果、住宅ローン (mortgage) の貸手はローンにはほんのわずかな信用リスクしかないと感じるようになった。借手がデフォルトしても、ローンは住宅の価値で十分カバーされると考えられたからである。住宅ローンの貸手は貸出の慣習を変えていった。以前は、借手は住宅購入費用の少なくとも20%は自己資金で賄うことが要求された。この条件は緩められていった。それとともに、借手に要求する信用度も下げられていった。その結果、当時“サブプライム”に分類されていたローンのなかには、いまでは“うそつきローン (liar loan)”と呼ばれるものもあった。“NINJA” (no income, no job, no assets の略。所得がなく、仕事も資産もなくても借りられるローン) と呼ばれるローンも登場した。貸出についてもう一つの重要な点は、変動金利住宅ローン (ARM : adjustable rate mortgage) の流行である。これらのローンは、初期金利が低く (たとえば6%), 1年後、2年後、または3年後に再設定される変動金利が高くなるように設

計されている。初期金利が適用されている間は住宅ローンの元本は増加する仕組みになっており、住宅購入代金よりも大きくなる場合も多い。多くの借手は住宅ローンの初期支払には余裕をもって対応できたが、初期金利期間終了後の毎月の高い支払には応じられなかつた（あるいは、渋ることになった）。

どうして住宅ローンの貸手はそんなに安い貸出を行うようになったのだろうか。いい時期は永遠に続き、住宅価格は上昇し続けるだろうという雰囲気が蔓延していた。サブプライム住宅ローンに対する ABS 市場が全盛を極め、住宅ローンの貸手に信用リスクが残ることは通常なくなった。そのため、多くの貸手にとっての重要な問題は、「この人にお金を貸して、住宅ローンが終了するまでの信用リスクをとりたいと思うか？」ではなく、「この住宅ローンを SPV（導管体）に売却して、利益が得られるか？」に変わったのである。

2007年にバブルははじけた。甘い貸出と初期金利期間が終了したため、サブプライム住宅ローンのデフォルトが増加し始めた。サブプライム住宅ローンに対する損失は約12%と予想された。このことは、サブプライム住宅ローンから組成されたメザニン・トランシェに損失が発生する可能性が高く、それらのメザニン・トランシェから組成された格付 AAA のトランシェ（図23.4を参照）を保有する投資家にも損失が発生する可能性が高いことを意味している。まだパッケージ化して投資家に売却されていない SPV が保有する証券は、短期のコマーシャルペーパーで資金調達されていることが多かった。このコマーシャルペーパーはロールオーバーできなくなり、流動性の危機を招くこととなった。

信用収縮は米国の不動産市場に始まったものであるが、全世界に広がった。欧州や日本、オーストラリアの遠く離れたところのファンドが ABS や ABS CDO のトランシェを保有していた。彼らが、原資産について（トランシェが当初 AAA に格付されていたこと以外には）ほとんど何も知っていないかったことと ABS 市場の流動性が枯渇したこと気にづいたときはすでに手遅れであった。“質への逃避”が始まり、多くの投資

家は国債のような安全資産のみに投資したがるようになった。その結果、クレジット・スプレッドは拡大し、新規のローンのアレンジは（短期コマーシャルペーパーであれ、長期資金であれ）きわめて困難になった。

## 23.8 C D O

資産担保証券で特に人気が高いのは、債務担保証券（CDO : collateralized debt obligation）である。これで証券化される資産は、企業または国が発行する債券である。この商品の仕組みは、（通常三つより多くのトランシェが発行されることを除いて）図23.3と同様である。CDOの組成者は債券のポートフォリオを取得する。それらはSPVに移転され、債券から得られる収入が一連のトランシェへ分配される。債券からの収入は、まず最もシニアなトランシェに対するリターンの支払に使われ、それから次にシニアなトランシェに対するリターンの支払に使われ、という具合に分配される。資産担保証券が通常そうであるように、CDOでも最もシニアなトランシェの格付がAAAになるように仕組みが設計される。最もジュニアな（エクイティ・）トランシェはCDOのアレンジャーが保有することもある。メザニン・トランシェが BBB に格付されると仮定して図23.3の仕組みを用いると、たとえば格付 A の債券からなる 1 億ドルのポートフォリオを取得し、それを7,500万ドルの格付 AAA の商品、2,000万ドルの格付 BBB の商品、500万ドルの無格付の商品に変えることができる。格付 AAA の商品を購入したい投資家が多く存在し、格付 AAA の通常の債券の供給には限りがあるため、この仕組みは付加価値を生み出している。CDO のオリジネーターの目的は、トランシェを投資家に売却して、債券に支払うより多くのお金を得ることである。多くの場合、現物資産型 CDO では、ポートフォリオの分散に関する条件が守られている限り、CDO のオリジネーターは債券の入れ替えが可能である。

## シンセティック CDO

これまで説明してきた仕組みは、現物資産型 (cash) CDO として知られるものである。社債の買いポジションは、対応するクレジット・デフォルト・スワップの売りポジション（すなわち、クレジット・デフォルト・スワップのプロテクションの売却）と本質的に同じ信用リスクをもっている。このことに基づいて、CDO の別の組成方法が考えられる。社債のポートフォリオを構築するかわりに、CDO のオリジネーターがクレジット・デフォルト・スワップの売りポジションからなるポートフォリオを構築するというものである。そして、その信用リスクはトランシェへ移転されることになる。このように組成された CDO は、シンセティック (synthetic) CDO と呼ばれる。

シンセティック CDO は、クレジット・デフォルト・スワップのポートフォリオに発生するデフォルト損失がトランシェに分配される仕組みになっている。クレジット・デフォルト・スワップのポートフォリオの総想定元本を 1 億ドルとし、トランシェが三つあるとする。次のような仕組みを考える。

1. トランシェ 1 は最初の 500 万ドルの損失を負担する。その対価として、トランシェ 1 の残存元本に対して 15% のリターンが支払われる。
2. トランシェ 2 は次の 2,000 万ドルの損失を負担する。その対価として、トランシェ 2 の残存元本に対して 10 ベーシス・ポイントのリターンが支払われる。
3. トランシェ 3 は 2,500 万ドルを超える損失の全額を負担する。その対価として、トランシェ 3 の残存元本に対して 10 ベーシス・ポイントのリターンが支払われる。

この例では、トランシェ 1, 2, 3 に対する元本は、当初それぞれ 500 万ドル、2,000 万ドル、7,500 万ドルである。トランシェの元本は、トランシェの保有者が負担する損失額だけ減額される。トランシェ 1 には、当初 500 万ドルの元本に対して 15% のリターンが支払われる。6 カ月後にクレジット・デフォルト・スワップのポートフォリオに 100 万ドルの損失が発生したとする。これらの損失はトランシェ 1 で負担され、トランシェ 1 の想定元本は 100 万

ドル減額になり、それ以後は500万ドルではなく400万ドルに対して15%のリターンが支払われるようになる。損失が500万ドルを超えた場合にはトランシェ1は消滅し、トランシェ2にも損失の負担が発生する。損失が700万ドルに達した時点では、トランシェ2の想定元本は1,800万ドルになっており、その時点までに累積で200万ドルの損失を負担していることになる(注8)。

### シングル・トランシェ取引

23.3節では、CDX指標およびiTraxx指標の定義に用いられる125社のポートフォリオについて論じた。市場では、これらのポートフォリオを用いて標準的なCDOが定義されている。それらの標準的なトランシェの取引はシングル・トランシェ取引(single tranche trading)として知られている。シングル・トランシェ取引は、一方がトランシェの損失に対するプロテクションの売却に合意し、他方がそのプロテクションの購入に合意する契約である。トランシェはだれかが組成したシンセティックCDOの一部ではなく、そのようなシンセティックCDOの一部かのようにキャッシュフローが計算されるだけである。

CDX NA IG指標の場合には、エクイティ・トランシェが元本の0%から3%までの損失を負担する。2番目のトランシェであるメザニン・トランシェ(mezzanine tranche)が3%から7%までの損失を負担する。残りのトランシェで、7%から10%まで、10%から15%まで、15%から30%まで、30%から100%までの損失を負担する。iTraxx Europe指標の場合には、エクイティ・トランシェが元本の0%から3%までの損失を負担する。メザニン・トランシェが3%から6%までの損失を負担する。残りのトランシェ

(注8) 実務的には、トランシェの保有者はトランシェの当初元本額を担保として取引当初に差し入れることを要求される。この担保にはLIBORの利子が付く。トランシェにCDSのペイオフの負担が発生したときは、現金担保が取り崩されて支払が行われる。デフォルトが発生したとき、回収額は最もシニアなトランシェの元本償還にあてられるのが通常である。償還されたシニア・トランシェの元本には損失が発生することなくなる。その元本に対してスプレッド(この例では10ペース・ポイント)が得られなくなるだけである。

で、6%から9%まで、9%から12%まで、12%から22%まで、22%から100%までの損失を負担する。

表23.6は、5年物CDX NA IG トランシェとiTraxx Europe トランシェに対する2007年3月28日の仲値を示したものである。その日の年限5年のCDX NA IG 指数は38ペース・ポイント、年限5年のiTraxx Europe 指数は24ペース・ポイントであった。表より、定義に使われているポートフォリオにおける範囲7%から10%までの損失に対するプロテクションを、トレーダーAはトレーダーBから（ビッドーオファー・スプレッドを無視すると）20.3ペース・ポイントで購入できる。600万ドル分のプロテクションを購入したとする。これは当初のトランシェの元本である。トレーダーBからトレーダーAへのペイオフは、CDX NA IG ポートフォリオのデフォルト損失によって決まる。累積損失がポートフォリオ元本の7%未満の間は、ペイオフは発生しない。累積損失がポートフォリオ元本の7%を超えると同時にペイオフが発生し始める。3年後に累積損失がポートフォリオ元本の7%から8%に上昇したとすると、トレーダーBはトレーダーAに200万ドルを支払い、トランシェの元本は400万ドルに減額される。4年後に累積損失がポートフォリオ元本の8%から10%へ増加したとすると、トレーダーBはトレーダーAにさらに400万ドルを支払い、トランシェの元本はゼロになる。その後はさらに損失が発生しても、支払は生じない。トレーダーAからト

**表23.6 2007年3月28日の5年物CDX NA IG トランシェとiTraxx Europe トランシェ**

（表示価格は30/360でのペース・ポイントで表示。ただし、0%～3%トランシェに対しては、年500ペース・ポイントに加えて取引時に支払う金額をトランシェに対するパーセントで表示）

| CDX NA IG     |        |       |       |        |        |         |
|---------------|--------|-------|-------|--------|--------|---------|
| トランシェ         | 0-3%   | 3-7%  | 7-10% | 10-15% | 15-30% | 30-100% |
| 表示価格          | 26.85% | 103.8 | 20.3  | 10.3   | 4.3    | 2.0     |
| iTraxx Europe |        |       |       |        |        |         |
| トランシェ         | 0-3%   | 3-6%  | 6-9%  | 9-12%  | 12-22% | 22-100% |
| 表示価格          | 11.25% | 57.7  | 14.4  | 6.4    | 2.6    | 1.2     |

レーダーBへの支払は、トランシェの残存元本に対して年0.203%が四半期ごとに後払いされる。当初の支払は、年 $0.00203 \times 6,000,000 = 12,180$ ドルである。

エクイティ・トランシェに対しては、他のトランシェと異なる方法で価格が表示されていることに注意しよう。CDX NA IGに対する26.85%という市場での表示価格は、プロテクションの売手がトランシェの元本の26.85%の当初支払額に加えて、残存元本に対して年500ベーシス・ポイントを受け取ることを意味している。同様に、iTraxx Europeに対する11.25%という市場での表示価格は、プロテクションの売手がトランシェの元本の11.25%の当初支払額に加えて、残存元本に対して年500ベーシス・ポイントを受け取ることを意味している。

### 23.9 バスケット型 CDS と CDO における相関の役割

*kth-to-default* 型 CDS と CDO トランシェのプロテクションの費用は、デフォルト相関に決定的に依存している。100の参照体からなるバスケットに対する満期 5 年の *kth-to-default* 型 CDS で、各参照体の 5 年間におけるリスク中立デフォルト確率が 2 %であるものを考える。参照体間のデフォルト相関がゼロのときは、二項分布から 5 年間に一つ以上がデフォルトする確率は 86.74%，10以上がデフォルトする確率は 0.0034% であることがわかる。したがって、ファースト・トゥ・デフォルト型 CDS はかなり価値が高いが、tenth-to-default 型 CDS はほとんど無価値となる。

デフォルト相関が増加すると、一つ以上がデフォルトする確率は減少し、10以上がデフォルトする確率は増加する。参照体間のデフォルトが完全に相関している極限では、一つ以上がデフォルトする確率と 10 以上がデフォルトする確率は等しく、2 %になる。その理由は、この極端な状況では参照体は本質的にすべて同一になり、(確率 2 %で) すべてがデフォルトするか、(確率 98 %で) 一つもデフォルトしないかのどちらかになるからである。

シンセティック CDO のトランシェの価値は、同様にデフォルト相関に依

存している。相関が低い場合は、ジュニア・エクイティ・トランシェは非常にリスクが高く、シニア・トランシェは非常に安全である。デフォルト相関が増加するにつれて、ジュニア・トランシェのリスクは低くなり、シニア・トランシェのリスクは高くなる。デフォルトが完全に相関し、かつ回収率がゼロの極限では、すべてのトランシェのリスクは同等になる。

### 23.10 シンセティック CDO の評価

シンセティック CDO のトランシェのクーポン支払日を時点  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m$  とし、 $\tau_0=0$  とおく。 $E_j$  を時点  $\tau_j$  におけるトランシェの期待元本とし、 $v(\tau)$  を時点  $\tau$  に受け取る 1 ドルの現在価値とする。特定のトランシェに対するスプレッド（プロテクションに対して支払われるベースス・ポイント）を年  $s$  とする。このスプレッドは、トランシェの残存元本に対して支払われるものである。したがって、CDO に対して定期的に支払われるスプレッドの期待値の現在価値は  $sA$  で与えられる。ただし、

$$A = \sum_{j=1}^m (\tau_j - \tau_{j-1}) E_j v(\tau_j) \quad (23.1)$$

である。時点  $\tau_{j-1}$  から時点  $\tau_j$  の間に発生する期待損失は  $E_{j-1} - E_j$  である。損失は時間区間の真ん中（すなわち時点  $0.5\tau_{j-1} + 0.5\tau_j$ ）で発生すると仮定する。このとき、CDO のトランシェに対する期待損失の現在価値は、

$$C = \sum_{j=1}^m (E_{j-1} - E_j) v(0.5\tau_{j-1} + 0.5\tau_j) \quad (23.2)$$

となる。損失発生時の経過利子は  $sB$  で与えられる。ただし、

$$B = \sum_{j=1}^m 0.5(\tau_j - \tau_{j-1})(E_{j-1} - E_j) v(0.5\tau_{j-1} + 0.5\tau_j) \quad (23.3)$$

である。プロテクションの買手からみたトランシェの価値は  $C - sA - sB$  となる。クーポンの現在価値とペイオフの現在価値が等しくなるとき、すなわち、

$$C = sA + sB$$

が成り立つとき、トランシェに対するスプレッドはブレークイープン・スプレッドになる。したがって、ブレークイープン・スプレッドは

$$s = \frac{C}{A+B} \quad (23.4)$$

で与えられる。(23.1)式から(23.3)式より、トランシェに対するブレークイープン・スプレッドの計算では、トランシェの期待元本が重要な役割を果たしていることがわかる。すべての支払日におけるトランシェの期待元本とゼロクーポン・イールドカーブがわかっているれば、(23.1)式から(23.4)式を用いてトランシェのブレークイープン・スプレッドを求めることができる。

### デフォルト時点に対するガウシアン・コピュラモデルの利用

デフォルト時点に対する 1 ファクター・ガウシアン・コピュラモデルを 22.9節で紹介した。ポートフォリオは  $n$  社の企業からなり、 $i$  番目の企業に対するデフォルト時点を  $t_i$ 、 $t_i$ に対する無条件の累積確率分布関数を  $Q_i$ （すなわち  $Q_i(t)$  は  $t_i < t$  となる確率）とする。そのモデルでは、

$$x_i = a_i F + \sqrt{1 - a_i^2} Z_i \quad (23.5)$$

と仮定されている。ただし、 $x_i = N^{-1}[Q_i(t_i)]$  であり、 $F$  と  $Z_i$  は独立した標準正規分布に従っている。(22.11) 式より、

$$Q_i(t|F) = N\left(\frac{N^{-1}[Q_i(t)] - a_i F}{\sqrt{1 - a_i^2}}\right) \quad (23.6)$$

となる。ここで、 $Q_i(t|F)$  はファクター  $F$  の値が与えられたときの時点  $t$  までに  $i$  番目の企業がデフォルトする条件付き確率である。時点  $t$  までにちょうど  $k$  社がデフォルトする確率を  $P(k, t)$ 、 $F$  の値が与えられたときの対応する条件付き確率を  $P(k, t|F)$  と書くことにする。 $F$  の値を固定するとき、各企業のデフォルト確率は独立になる。このことは、(23.1)式から(23.3)式での  $A$ 、 $B$ 、 $C$  の計算が比較的容易になるので重要である。

標準的なマーケット・モデルでは、デフォルト時点の分布関数  $Q_i$  とパラメータ  $a_i$  はポートフォリオを構成するすべての企業に対して同一であると仮定される。その場合は、 $a_i = a$ 、 $Q_i(t) = Q(t)$ 、 $Q_i(t|F) = Q(t|F)$  と書く

ことができる。したがって、標準的なマーケット・モデルでは、

$$x_i = \alpha F + \sqrt{1 - \alpha^2} Z_i \quad (23.7)$$

となる。ただし、 $x_i = N^{-1}[Q(t_i)]$ であり、 $F$ と $Z_i$ は独立した標準正規分布に従う。また、(23.6)式は、

$$Q(t|F) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(t)] - \sqrt{\rho} F}{\sqrt{1 - \rho}}\right) \quad (23.8)$$

と書ける。ただし、 $\rho$ はコピュラ相関で $\alpha^2$ に等しい。これは(22.12)式と等価である。 $Q(t)$ を計算するときには、通常各企業に対するデフォルト強度(ハザード率)は定数で、指数スプレッドと整合性がとれないと仮定される。このことを仮定すると、23.2節で説明したCDS評価方法を用いて指数スプレッドを与えるデフォルト強度を探索すれば、デフォルト強度を求めることができる。このデフォルト強度を $\lambda$ とすると、(22.1)式より、

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (23.9)$$

となる。二項分布の性質より、標準的なマーケット・モデルでは、

$$P(k, t|F) = \frac{n!}{(n-k)!k!} Q(t|F)^k [1 - Q(t|F)]^{n-k} \quad (23.10)$$

となる。評価したいトランシェは、ポートフォリオの損失のうち $\alpha_L$ から $\alpha_H$ までを負担するものとする。このパラメータ $\alpha_L$ はアタッチメント・ポイント(attachment point)と呼ばれ、パラメータ $\alpha_H$ はデタッチメント・ポイント(detachment point)と呼ばれる。

$$n_L = \frac{\alpha_L n}{1-R}, \quad n_H = \frac{\alpha_H n}{1-R}$$

と定義する。ここで $R$ は回収率である。また、 $m(x)$ を $x$ を超える最小の整数とし、一般性を失うことなく、トランシェの当初元本は1と仮定できる。デフォルト数 $k$ が $m(n_L)$ より小さい間は、トランシェの元本は1のままである。デフォルト数が $m(n_H)$ 以上になったとき、元本はゼロになる。それ以外の場合には、トランシェの元本は、

$$\frac{\alpha_H - k(1-R)/n}{\alpha_H - \alpha_L}$$

になる。 $E_j(F)$ をファクター $F$ の値が与えられたときの時点 $\tau_j$ におけるトランシェの元本に対する条件付き期待値と定義すると、

$$E_j(F) = \sum_{k=0}^{m(n_L)-1} P(k, \tau_j | F) + \sum_{k=m(n_L)}^{m(n_H)-1} P(k, \tau_j | F) \frac{\alpha_H - k(1-R)/n}{\alpha_H - \alpha_L} \quad (23.11)$$

となる。 $F$ の値が与えられたときの $A$ ,  $B$ ,  $C$ の値を $A(F)$ ,  $B(F)$ ,  $C(F)$ と定義すると、(23.1)式から(23.3)式までと同様に、

$$A(F) = \sum_{j=1}^m (\tau_j - \tau_{j-1}) E_j(F) v(\tau_j) \quad (23.12)$$

$$B(F) = \sum_{j=1}^m 0.5(\tau_j - \tau_{j-1})(E_{j-1}(F) - E_j(F)) v(0.5\tau_{j-1} + 0.5\tau_j) \quad (23.13)$$

$$C(F) = \sum_{j=1}^m (E_{j-1}(F) - E_j(F)) v(0.5\tau_{j-1} + 0.5\tau_j) \quad (23.14)$$

となる。変数 $F$ は標準正規分布に従っているので、 $A$ ,  $B$ ,  $C$ に対する無条件の値を求めるには、 $A(F)$ ,  $B(F)$ ,  $C(F)$ を標準正規分布のもとで積分すればよい。無条件の値が求まれば、そのトランシェのブレークリーン・スプレッドは $C/(A+B)$ として求められる(注9)。

積分は、ガウス数値積分公式として知られる手法を用いて精度のよい値が求められる。それは、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-F^2/2} g(F) dF \approx \sum_{k=1}^{k=M} w_k g(F_k) \quad (23.15)$$

という形で与えられる。 $M$ が増加するにつれて精度は向上する。いくつかの $M$ の値に対する $w_k$ と $F_k$ の値が著者のWebサイトに与えられている(注10)。シニア・トランシェを評価するときには、 $M$ の値は比較的大きくす

(注9) エクイティ・トランシェの場合には、呈示価格は年500ベース・ポイントに加えて支払う当初支払額である。そのブレークリーン当初支払額は $C-0.05(A+B)$ で与えられる。

(注10) パラメータ $w_k$ と $F_k$ はエルミート多項式の零点から計算される。ガウス数値積分公式の詳細については、著者のWebサイトのテクニカルノート21を参照されたい。

る必要がある。通常は  $M=60$  とすれば十分な精度が得られる。

【例23.2】

iTraxx Europe のメザニン・トランシェをコピュラ相関を 0.15, 回収率を 40% として考える。この場合,  $\alpha_L = 0.03$ ,  $\alpha_H = 0.06$ ,  $n = 125$ ,  $n_L = 6.25$ ,  $n_H = 12.5$  である。金利期間構造はフラットで 3.5%, 支払は四半期ごとに行われ、指標の CDS スプレッドは 50 ベース・ポイントであるとする。23.2 節と同様の計算を行うと、CDS スプレッドに対する定数ハザード率は 0.83% であることがわかる。表23.7 は残りの計算を抜粋したものである。 $M = 60$  として (23.15) 式を用いる。表の最初の部分はファクターの値  $F_k$  とウェイト  $w_k$  である。ファクターの値が与えられたときの各支払日におけるトランシェの元本の条件付き期待値は (23.8) 式から (23.11) 式までを用いて計算され、その結果が表の 2 番目の部分に与えられている。ファクターの値が与えられたときの  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の値は (23.12) 式から (23.14) 式までを用いて計算され、その結果が表の最後の三つの部分に与えられている。 $A$ ,  $B$ ,  $C$  に対する無条件の値は  $A(F)$ ,  $B(F)$ ,  $C(F)$  を  $F$  の確率分布のもとで積分すれば求まる。それには、(23.15) 式で  $g(F)$  を順に  $A(F)$ ,  $B(F)$ ,  $C(F)$  とおいて計算すればよい。その結果は、 $A = 4.2846$ ,  $B = 0.0187$ ,  $C = 0.1496$  となる。したがって、このトランシェのブレークイーブン・スプレッドは  $0.1496 / (4.2846 + 0.0187) = 0.0348$ , すなわち 348 ベース・ポイントになる。これは表23.6 のこのトランシェに対する 57.7 ベース・ポイントのスプレッドよりもかなり大きい。その理由としては、この例では指標スプレッドを 50 ベース・ポイントと仮定して計算したのに対して、2007 年 3 月 28 日の指標スプレッドはわずか 24 ベース・ポイントしかなかったことが大きい。

### $k$ th-to-default 型 CDS の評価

$k$ th-to-default 型 CDS (23.5 節を参照) も、ファクター  $F$  に基づいた標準

表23.7 例23.2の CDO の評価（元本=1, クーポンは単位スプレッド当りの金額）

| ウェイトとファクターの値          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|-----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| $w_k$                 | …        | …        | 0.1579   | 0.1579   | 0.1342   | 0.0969   | …        | …        |
| $F_k$                 | …        | …        | 0.2020   | -0.2020  | -0.6060  | -1.0104  | …        | …        |
| 期待元本, $E_j(F_k)$      |          |          |          |          |          |          |          |          |
| 時点                    |          |          |          |          |          |          |          |          |
| $j=1$                 | …        | …        | 1.0000   | 1.0000   | 1.0000   | 1.0000   | …        | …        |
| $\vdots$              | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $j=19$                | …        | …        | 0.9953   | 0.9687   | 0.8636   | 0.6134   | …        | …        |
| $j=20$                | …        | …        | 0.9936   | 0.9600   | 0.8364   | 0.5648   | …        | …        |
| 期待ペイオフの現在価値, $C(F_k)$ |          |          |          |          |          |          |          |          |
| $j=1$                 | …        | …        | 0.0000   | 0.0000   | 0.0000   | 0.0000   | …        | …        |
| $\vdots$              | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $j=19$                | …        | …        | 0.0011   | 0.0062   | 0.0211   | 0.0412   | …        | …        |
| $j=20$                | …        | …        | 0.0014   | 0.0074   | 0.0230   | 0.0410   | …        | …        |
| 合計                    | …        | …        | 0.0055   | 0.0346   | 0.1423   | 0.3823   | …        | …        |
| 期待クーポンの現在価値, $A(F_k)$ |          |          |          |          |          |          |          |          |
| $j=1$                 | …        | …        | 0.2478   | 0.2478   | 0.2478   | 0.2478   | …        | …        |
| $\vdots$              | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $j=19$                | …        | …        | 0.2107   | 0.2051   | 0.1828   | 0.1299   | …        | …        |
| $j=20$                | …        | …        | 0.2085   | 0.2015   | 0.1755   | 0.1185   | …        | …        |
| 合計                    | …        | …        | 4.5624   | 4.5345   | 4.4080   | 4.0361   | …        | …        |
| 期待経過利子の現在価値, $B(F_k)$ |          |          |          |          |          |          |          |          |
| $j=1$                 | …        | …        | 0.0000   | 0.0000   | 0.0000   | 0.0000   | …        | …        |
| $\vdots$              | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $j=19$                | …        | …        | 0.0001   | 0.0008   | 0.0026   | 0.0051   | …        | …        |
| $j=20$                | …        | …        | 0.0002   | 0.0009   | 0.0029   | 0.0051   | …        | …        |
| 合計                    | …        | …        | 0.0007   | 0.0043   | 0.0178   | 0.0478   | …        | …        |

的なマーケット・モデルを用いて評価することができる。時点  $\tau_{j-1}$  から時点  $\tau_j$  までの間に  $k$  番目のデフォルトが発生する条件付き確率は、時点  $\tau_j$  までに  $k$  社以上がデフォルトする確率から時点  $\tau_{j-1}$  までに  $k$  社以上がデフォルトする確率を引いた値である。これは(23.8)式から(23.10)式を用いて、

$$\sum_{q=k}^n P(q, \tau_j | F) - \sum_{q=k}^n P(q, \tau_{j-1} | F)$$

を計算すれば求められる。時点  $\tau_{j-1}$  から時点  $\tau_j$  までの間のデフォルトは時点  $0.5\tau_{j-1} + 0.5\tau_j$  に発生すると仮定する。そうすると、 $F$  が与えられたときのプレミアムとペイオフの現在価値が通常の CDS のペイオフと同様の方法（23.2節を参照）で計算できるようになる。その結果を  $F$  について積分すれば、プレミアムとペイオフに対する無条件での現在価値が求まる。

【例23.3】

デフォルト確率が表23.1で与えられている10銘柄の債券からなるポートフォリオを考え、プレミアムが年単位で後払いされるサード・トゥ・デフォルト型 CDS を評価したいとする。コピュラ相関は0.3、回収率は40%、無リスク金利はすべて5%と仮定する。表23.7と同様に、60の異なるファクターの値に対して考える。各債券が1年後、2年後、3年後、4年後、5年後までにデフォルトする無条件確率はそれぞれ0.0200、0.0396、0.0588、0.0776、0.0961である。（23.8）式より、 $F = -1.0104$ という条件のもとでは、これらのデフォルト確率はそれぞれ0.0365、0.0754、0.1134、0.1498、0.1848になる。二項分布より、1年後、2年後、3年後、4年後、5年後までに3銘柄以上がデフォルトする確率はそれぞれ0.0048、0.0344、0.0950、0.1794、0.2767となる。したがって、1年目、2年目、3年目、4年目、5年目に3番目のデフォルトが発生する条件付き確率はそれぞれ0.0048、0.0296、0.0606、0.0844、0.0974になる。23.2節と同様の分析を行うと、 $F = -1.0104$ という条件のもとのペイオフ、定期的なプレミアム、経過プレミアムの現在価値は0.1405、3.8344s、0.1171sになることがわかる。ただし、sはスプレッドである。残り59のファクターの値に対して同様の計算を行い、（23.15）式を用いて  $F$  について積分を行う。ペイオフ、定期的なプレミアム、経過プレミアムの無条件の現在価値は0.0637、4.0543s、0.0531sになる。したがって、ブレークイーブン CDS スプレッドは、

$$0.0637 / (4.0543 + 0.0531) = 0.0155$$

すなわち155ペース・ポイントになる。

## インプライド相関

標準的なマーケット・モデルでは、回収率  $R$  は通常40%と仮定されている。そうすることで、モデルに含まれる未知のパラメータは  $\alpha$  だけになる。同じことであるが、コピュラ相関  $\rho = \alpha^2$  のみが未知のパラメータとなる。これによってモデルは、ボラティリティのみが未知のパラメータであった Black-Scholes モデルと同じような状況になる。したがって市場参加者は、オプションの市場価格からインプライド・ボラティリティを算出したのと同様の方法で、トランシェに対する市場の呈示価格からインプライド相関を算出したいと考えるようになる。

$\{\alpha_L, \alpha_H\}$  の値を、 $\alpha_0=0$ としてトランシェがシニアになる順に連続的に  $\{\alpha_0, \alpha_1\}, \{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_2, \alpha_3\}, \dots$ とする（たとえば iTraxx Europe の場合には、 $\alpha_0=0, \alpha_1=0.03, \alpha_2=0.06, \alpha_3=0.09, \alpha_4=0.12, \alpha_5=0.22, \alpha_6=1.00$ である）。インプライド相関には二つの測り方がある。一つはコンパウンド相関 (compound correlation) である。これは、 $\{\alpha_{q-1}, \alpha_q\}$  トランシェに対してモデルから計算されたスプレッドが市場でのスプレッドと一致するような相関  $\rho$  の値である。その値は反復探索法で求めることができる。もう一つはベース相関 (base correlation) である。これは、特定の  $\alpha_q (q \geq 1)$ に対して、 $\{0, \alpha_q\}$  トランシェの価格が市場と整合性がとれるような  $\rho$  の値である。それは次のステップで求めることができる。

1. 各トランシェに対して、コンパウンド相関を計算する。
2. コンパウンド相関を用いて、CDO の満期までに各トランシェに発生する期待損失の現在価値をトランシェの当初元本に対するパーセントとして計算する。これは上で  $C$  と定義した変数である。 $\{\alpha_{q-1}, \alpha_q\}$  トランシェに対する  $C$  の値を  $C_q$  とする。
3.  $\{0, \alpha_q\}$  トランシェの期待損失の現在価値を、CDO の担保資産であるポートフォリオの元本に対するパーセントとして計算する。これは

$$\sum_{p=1}^q C_p (\alpha_p - \alpha_{p-1}) \text{ となる。}$$

4.  $\{0, \alpha_q\}$  トランシェに対する  $C$  の値は、ステップ 3 で求めた値を  $\alpha_q$  で除したものである。ベース相関はこの  $C$  の値と整合性のとれた相関パラメータ  $\rho$  の値である。この値は反復探索法で求めることができる。

表23.6の iTraxx Europe の表示価格に対してステップ 3 で計算した損失の現在価値は、ポートフォリオに対するパーセントで表すと、図23.5のようになる。これらの表示価格に対するインプライド相関を表23.8に示す。表にみられる相関のパターンは、通常観測される典型的なものである。コンパウンド相関には“相関スマイル”がみられ、トランシェがシニアになるにつれてインプライド相関は最初減少し、その後は増加に転じる。ベース相関には相関スキーがみられ、インプライド相関はトランシェのデタッチメント・ポイントの増加関数になっている。

市場価格が 1 ファクター・ガウシアン・コピュラモデルと整合性がとれて

図23.5 2007年3月28日における iTraxx Europe の担保ポートフォリオ総元本の  $0-X\%$  トランシェに対する期待損失の現在価値

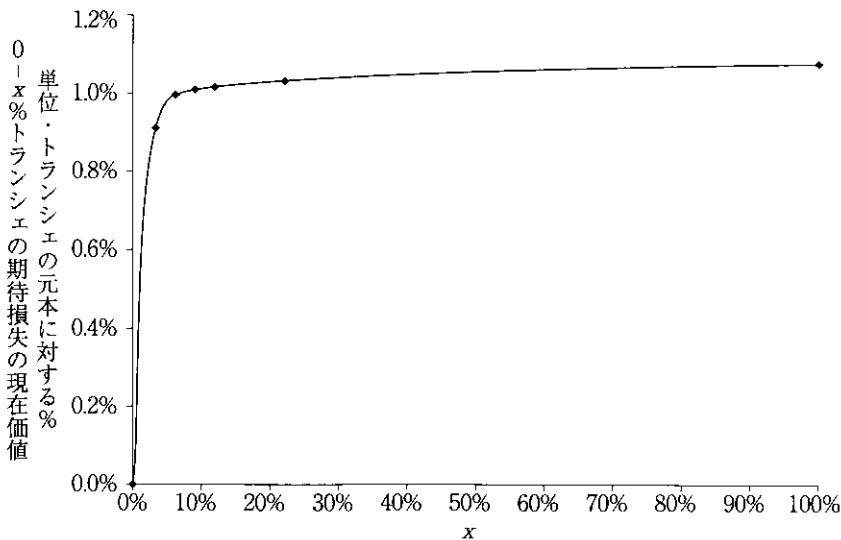


表23.8 2007年3月28日における5年物iTraxx Europeのトランシェに対するインプライド相関

| コパウンド相関 |       |       |       |       |        |
|---------|-------|-------|-------|-------|--------|
| トランシェ   | 0-3%  | 3-6%  | 6-9%  | 9-12% | 12-22% |
| 呈示      | 18.3% | 9.3%  | 14.3% | 18.2% | 24.1%  |
| ベース相関   |       |       |       |       |        |
| トランシェ   | 0-3%  | 0-6%  | 0-9%  | 0-12% | 0-22%  |
| 呈示      | 18.3% | 27.3% | 34.9% | 41.4% | 58.1%  |

いたならば、インプライド相関は（コンパウンドもベースも）すべてのトランシェに対して同じになる。実際には顕著なスマイルとスキーが観測されることから、市場価格はこのモデルと整合性がとれていないと結論できる。

### 標準的でないトランシェの評価

iTraxx Europeのような標準的なポートフォリオに対する標準的なトランシェのスプレッドは市場で観測できるので、それらを評価するのにモデルは必要ない。標準的なポートフォリオの標準的でないトランシェに対しては、呈示価格の計算が必要となる。 $4 - 8\%$  iTraxx Europe トランシェに対するスプレッドを呈示する必要があるとしよう。一つの方法は、ベース相関を補間して  $0 - 4\%$  トランシェと  $0 - 8\%$  トランシェに対するベース相関を推定することである。これら二つのベース相関によって、それらのトランシェに対する期待損失の現在価値を（担保ポートフォリオの元本に対するパーセントとして）評価することができる。 $4 - 8\%$  トランシェに対する期待損失の現在価値（元本に対するパーセント）は、 $0 - 8\%$  トランシェと  $0 - 4\%$  トランシェの期待損失の現在価値の差として評価できる。その値から、コンパウンド相関とトランシェのブレークイープン・スプレッドを求めることができる。

上の方法は最善のものではない。もっとよい方法は、各標準的なトランシェに対して期待損失を計算し、 $0 - X\%$  トランシェに対する期待損失の  $X$  に関する変化について図23.5のようなグラフを作成することである。こ

のグラフの値を補間すれば、0 – 4 %トランシェと0 – 8 %トランシェに対する期待損失が得られる。これらの期待損失の差は、ベース相関を用いる方法で得られたものよりも、4 – 8 %トランシェに対する期待損失のよりよい推定値になっている。

裁定機会がないならば、図23.5の期待損失は減少していく増加率をもつ増加関数であることが示せる。ベース相関を補間し、それを用いて期待損失を計算すると、この無裁定条件が満たされていないことがよく起こる（その原因は、0 – X %トランシェに対するベース相関は0 – X %トランシェに対する期待損失の非線形関数になっているからである）。したがって、期待損失を補間する直接的な方法のほうが、ベース相関を補間する間接的な方法よりよい結果が得られる。さらによりよい方法は、上述した無裁定条件を満たすように補間することである。

### 23.11 標準的なマーケット・モデル以外のモデル

本節では、市場で標準となっている1ファクター・ガウシアン・コピュラモデル以外のいくつかのモデルについて概説する。

#### 不均質なモデル

標準的なマーケット・モデルは、デフォルト時点の確率分布がすべての企業に対して同一で、任意の2企業間のコピュラ相関も同一であるという点で、均質なモデルである。均質性の仮定を緩めて、もっと一般的な(23.5)式と(23.6)式を使うモデルを用いることもできる。しかしその場合には、各企業に対するデフォルト時点の分布は異なるものになり、二項分布の公式による(23.10)式を用いて $P(k, t | F)$ を計算できなくなるので、モデルの実装はずっと複雑になる。Andersen et al. (2003) や Hull and White (2004) に述べられているような数値計算法が必要となる(注11)。

## その他のコピュラ

(23.7)式と(23.8)式の1ファクター・ガウシアン・コピュラモデル、あるいは(23.5)式と(23.6)式のもっと一般的なモデルは、デフォルト時点間の相関に関する一つのモデルである。その他にも多くの1ファクター・コピュラモデルが提案されてきた。ステューデント  $t$  (student  $t$ ) コピュラやクレイトン (Clayton)・コピュラ、アルキメデス (Archimedean)・コピュラ、マーシャル-オルキン (Marshall-Olkin)・コピュラがその例である。また、(23.7)式の  $F$  と  $Z_i$ に対して平均 0, 標準偏差 1 の非正規分布を仮定することでも、新しい1ファクター・コピュラモデルをつくることができる。 $Z_i$ の累積分布関数を  $\Theta$ 、 $x_i$ の累積分布関数（おそらく  $F$  と  $Z_i$ の分布関数から数値的に求めることになる）を  $\Phi$ とする。このとき、 $x_i = \Phi^{-1}[Q(t_i)]$ となるので、(23.8)式は、

$$Q(t|F) = \Theta\left(\frac{\Phi^{-1}[Q(t)] - aF}{\sqrt{1-a^2}}\right)$$

になる。Hull と White は、 $F$  と  $Z_i$ を四つの自由度をもつステューデント  $t$  分布とした場合に、市場によく適合することを示している(注12)。彼らはこれをダブル  $t$  コピュラ (double  $t$  copula) と呼んでいる。

## マルチファクター

一つのファクター  $F$  のかわりに二つのファクター  $F_1$  と  $F_2$ をもつモデルを考えると、(23.7)式は、

$$x_i = a_1 F_1 + a_2 F_2 + \sqrt{1-a_1^2-a_2^2} Z_i$$

となり、(23.8)式は、

(注11) L. Andersen, J. Sidenius, and S. Basu, "All Your Hedges in One Basket," *Risk*, November 2003 および J.C. Hull and A. White, "Valuation of a CDO and an  $n$ -th to Default Swap Without Monte Carlo Simulation," *Journal of Derivatives*, 12, 2 (Winter 2004), 8-23 を参照。

(注12) J.C. Hull and A. White, "Valuation of a CDO and an  $n$ -th to Default Swap Without Monte Carlo Simulation," *Journal of Derivatives*, 12, 2 (Winter 2004), 8-23 を参照。

$$Q(t|F_1, F_2) = N\left(\frac{N^{-1}[Q(t)] - a_1 F_1 - a_2 F_2}{\sqrt{1-a_1^2-a_2^2}}\right)$$

となる。このモデルでは1次元ではなく2次元正規分布に関する積分が必要となるので、標準的なマーケット・モデルより実行速度が遅い。モデルは三つ以上のファクターをもつ場合にも同様に拡張できるが、計算時間はファクター数に関して指数的に増加する。

### ランダムな因子負荷

Andersen と Sidenius は(23.7)式のかわりに、

$$x_i = a(F)F + \sqrt{1-a(F)}Z_i$$

とするモデルを提案している(注13)。このモデルは因子負荷  $a$  が  $F$  の関数になっているという点で、標準的なマーケット・モデルとは異なる。一般的に、 $F$  が減少すると  $a$  は増加する。これは、デフォルト率が高いとき（すなわち  $F$  が低いとき）はデフォルト相関も高いということを意味している。実証分析ではそのような傾向がみられる(注14)。Andersen と Sidenius は、このモデルは標準的なマーケット・モデルよりも市場価格によく適合していることを示している。

### インプライド・コピュラモデル

Hull と White は、市場価格にインプライドされているコピュラの求め方を示している(注15)。最も簡単な形のモデルでは、ポートフォリオに含まれ

(注13) L. Andersen and J. Sidenius, "Extensions of the Gaussian Copula: Random Recovery and Random Factor Loadings," *Journal of Credit Risk*, 1, 1 (Winter 2004) : 29-70 を参照。

(注14) たとえば次の論文を参照せよ。A. Sevigny and O. Renault, "Default Correlation: Empirical Evidence," Working Paper, Standard and Poor's (2002); R.S. Das, L. Freed, G. Geng, and N. Kapadia, "Correlated Default Risk," *Journal of Fixed Income*, 16, 2 (2006) : 7-32; J.C. Hull, M. Predescu, and A. White, "The Valuation of Correlation-Dependent Credit Derivatives Using a Structural Model," Working Paper, University of Toronto, 2005; A. Ang and J. Chen, "Asymmetric Correlation of Equity Portfolios," *Journal of Financial Economics*, 63 (2002) : 443-94.

るすべての企業に対して、ある平均ハザード率が CDO の満期まで適用されると仮定される。その平均ハザード率はトランシェの価格にインプライドされている確率分布に従っている。その確率分布は、指定した多くのハザード率に対する確率を CDO の各トランシェと指數が正しく価格付けされるよう決める、ということによって求められる（確率は総和が 1 で非負という条件を満たす必要もある）。滑らかさの条件を与えることで、いくつかの候補のなかから解を選択する。インプライド・コピュラの計算は、第18章で論じた、オプション価格にインプライドされている株価の確率分布を求めるのと同様の考え方に基づくものである。

## 動的モデル

これまで論じてきたモデルは静的モデルとして特徴付けることができる。それらは本質的には CDO の満期までの平均デフォルトをモデル化したものである。満期 5 年の CDO に対して構築したモデルは満期 7 年の CDO に対して構築したモデルとは異なり、後者は満期 10 年の CDO に対して構築したモデルとは異なる。動的モデルはポートフォリオに対する損失の時間発展をモデル化しようとする点で、静的モデルとは異なる。動的モデルには三つの異なるタイプがある。

1. 構造モデル (Structural Model)：これは22.6節で説明したモデルと同様のものであるが、多くの企業の資産価格に対する確率過程を同時にモデル化するところが異なる。企業の資産価格がバリアに到達するとデフォルトが発生する。それぞれの資産価格過程は相関している。このタイプのモデルの問題点は、モンテカルロ・シミュレーションを用いて実装することになり、キャリブレーションが困難なことである。
2. 誘導モデル (Reduced Form Model)：このモデルでは、企業のハザード率をモデル化している。現実的な相関の大きさが得られるよう

---

(注15) J.C. Hull and A. White, "Valuing Credit Derivatives Using an Implied Copula Approach," *Journal of Derivatives*, 14 (2006) : 8-28 を参照。

にするためには、ハザード率にジャンプをもたせる必要がある。

3. トップ・ダウン・モデル (Top Down Model)：このモデルは、ポートフォリオに対する総損失を直接モデル化したものである。個別企業に発生する事象はモデルでは考えられていない。

## 要 約

クレジット・デリバティブによって、銀行や他の金融機関は信用リスクを積極的に管理することが可能になった。それらを用いて、信用リスクをある企業から別の企業へ移転したり、あるタイプのエクスポートジャーナーを別のタイプのものと交換して信用リスクを分散させたりすることができる。

最も一般的なクレジット・デリバティブは、クレジット・デフォルト・スワップである。これは、ある企業が別の企業のデフォルトに対する保険を購入する契約である。そのペイオフは、通常保険の対象となる企業が発行する債券の額面とデフォルト直後におけるその債券の価値との差額になる。クレジット・デフォルト・スワップは、リスク中立世界における期待プレミアムの現在価値と期待ペイオフの現在価値を計算することによって、分析が可能である。

フォワード・クレジット・デフォルト・スワップは、特定の日に特定のクレジット・デフォルト・スワップを締結する契約である。クレジット・デフォルト・スワップ・オプションは、特定の日に特定のクレジット・デフォルト・スワップを締結する権利である。どちらの商品も、参照体がその特定の日までにデフォルトした場合には消滅する。*kth-to-default* 型 CDS は、複数の企業からなるポートフォリオに対して *k* 番目のデフォルトが発生したときにペイオフが生じる CDS である。

トータル・リターン・スワップは、企業の信用度に依存する資産のポートフォリオに対する総リターンを LIBOR+スプレッドと交換する商品である。トータル・リターン・スワップは、資金調達手段として使われることも

よくある。資産ポートフォリオを購入したい企業が、金融機関にその企業にかわっての資産購入を打診してきたとする。そのとき、金融機関はそのポートフォリオのリターンを支払い、LIBOR+スプレッドを受け取るトータル・リターン・スワップをその企業と締結する。この種の取引の利点は、その企業のデフォルト・リスクに関するエクスポージャーを金融機関が削減できることである。

債務担保証券（CDO）では、社債や商業貸出のポートフォリオから多くの異なる証券が組成され、それらの証券への信用損失の配分ルールが決められる。その配分ルールによって、ポートフォリオから非常に高格付の証券と非常に低格付の証券の両方がつくられる。シンセティック CDO は、クレジット・デフォルト・スワップから同様に組成された複数の証券である。 $k$ th-to-default 型 CDS と CDO のトランシェの価格付けに使われる標準的なマーケット・モデルでは、デフォルト時点に対する 1 ファクター・ガウシアン・コピュラモデルが用いられている。トレーダーは、市場価格からインプライド相関を計算するのに、このモデルを使用している。

## 参考文献

- Andersen, L., and J. Sidenius. "Extensions to the Gaussian Copula: Random Recovery and Random Factor Loadings," *Journal of Credit Risk*, 1, 1 (Winter 2004) : 29-70.
- Andersen, L., J. Sidenius, and S. Basu. "All Your Hedges in One Basket," *Risk*, November 2003.
- Das, S. *Credit Derivatives: Trading & Management of Credit & Default Risk*, 3rd edn. New York: Wiley, 2005.
- Hull, J.C., and A. White. "Valuation of a CDO and an  $n$ -th to Default Swap Without Monte Carlo Simulation," *Journal of Derivatives*, 12, 2 (Winter 2004) : 8-23.
- Hull, J.C., and A. White. "Valuing Credit Derivatives Using an Implied Copula

- Approach," *Journal of Derivatives*, 14, 2 (Winter 2006) : 8-28.
- Laurent, J.-P., and J. Gregory. "Basket Default Swaps, CDOs and Factor Copulas," *Journal of Risk*, 7, 4 (2005) : 8-23.
- Li, D.X. "On Default Correlation: A Copula Approach," *Journal of Fixed Income*, March 2000 : 43-54.
- Schönbucher, P.J. *Credit Derivatives Pricing Models*. New York : Wiley, 2003.
- Tavakoli, J.M. *Credit Derivatives & Synthetic Structures: A Guide to Instruments and Applications*, 2nd edn. New York : Wiley, 1998.

### 章末問題

- 23.1** 通常のクレジット・デフォルト・スワップとバイナリー型クレジット・デフォルト・スワップとの違いを説明せよ。
- 23.2** クレジット・デフォルト・スワップのプレミアムが半年払いの年60ペース・ポイントである。元本は3億ドルで、クレジット・デフォルト・スワップは現金決済である。4年2カ月後にデフォルトが発生し、デフォルト直後の最割安債券の価格は額面の40%であると計算代理人が評価したとする。このとき、クレジット・デフォルト・スワップの売手からみたキャッシュフローとそのタイミングを一覧表にせよ。
- 23.3** クレジット・デフォルト・スワップの二つの決済方法について説明せよ。
- 23.4** 現物資産型CDOとシンセティックCDOの組成方法について説明せよ。
- 23.5** ファースト・トゥ・デフォルト型クレジット・デフォルト・スワップとはどんな商品か。バスケットを構成する企業のデフォルト相関が高くなると、その価値は増加するか、それとも減少するかを説明せよ。

- 23.6** リスク中立デフォルト確率と実世界でのデフォルト確率との違いを説明せよ。
- 23.7** トータル・リターン・スワップが資金調達手段として有用である理由を説明せよ。
- 23.8** 無リスク・ゼロ・カーブが連続複利で年率 7% のフラット、満期 5 年の新規クレジット・デフォルト・スワップにおいてデフォルトは各年の真ん中で発生しうると仮定する。回収率を 30%，それまでにデフォルトしていないという条件付きでの年間デフォルト確率を 3% とする。このとき、クレジット・デフォルト・スワップのスプレッドを評価せよ。ただし、プレミアムは年払いとする。
- 23.9** クレジット・デフォルト・スワップ・スプレッドが 150 ベース・ポイントのとき、問題 23.8 のスワップに対してプロテクションの買手からみた想定元本 1 ドル当りの価値を求めよ。
- 23.10** 問題 23.8 でクレジット・デフォルト・スワップがバイナリー型 CDS である場合に、クレジット・デフォルト・スワップ・スプレッドはいくらになるか。
- 23.11** 満期 5 年の  $n$  th-to-default 型クレジット・デフォルト・スワップの仕組みについて説明せよ。100 社の参照体からなるバスケットで、各参照体の年間デフォルト確率が 1% であるものを考える。(a)  $n=1$ 、(b)  $n=25$  のそれぞれについて、参照体間のデフォルト相関が増大するとスワップの価値はどのようになると期待されるか。その理由も説明せよ。
- 23.12** CDS のペイオフを想定元本と回収率で表せ。
- 23.13** プレーン・バニラ CDS のスプレッドは同じ条件のバイナリー型 CDS のスプレッドの  $(1-R)$  倍であることを示せ。ただし、 $R$  は回収率である。
- 23.14** 表 23.1 から表 23.4 の例で CDS スプレッドが 100 ベース・ポイントであるならば、(それまでにデフォルトしていないという条件付きでの) 年間デフォルト確率は 1.61% になることを確かめよ。回収率が 40%

のかわりに20%である場合には、デフォルト確率はどれだけ変化するか。その答が、インプライド・デフォルト確率がだいたい  $1/(1-R)$  に比例しているということと整合性がとれていることを確認せよ。ただし、 $R$  は回収率である。

- 23.15** ある企業が、クーポン 5 %のある社債のリターンを受け取って LIBOR を支払うトータル・リターン・スワップを締結する。この契約と 5 %を LIBOR と交換する通常の金利スワップとの違いを説明せよ。
- 23.16** クレジット・デフォルト・スワップに対するフォワードとオプションの仕組みについて説明せよ。
- 23.17** 「クレジット・デフォルト・スワップの買手のポジションは無リスク債券の買いと社債の売りからなるポジションと同じである」。この主張について説明せよ。
- 23.18** クレジット・デフォルト・スワップには情報の非対称性が潜在的に存在する。その理由について説明せよ。
- 23.19** CDS をリスク中立デフォルト確率ではなく実世界でのデフォルト確率を用いて評価した場合、過大評価になるか、それとも過小評価になるか。その理由も説明せよ。
- 23.20** トータル・リターン・スワップとアセットスワップとの違いは何か。
- 23.21** 1 ファクター・ガウシアン・コピュラモデルにおいて、各125銘柄の期間 5 年のデフォルト確率を 3 %、各 2 銘柄間のコピュラ相関を 0.2 とする。 $-2, -1, 0, 1, 2$  というファクターの各値に対して、(a) ファクター値が与えられたときの条件付きデフォルト確率、(b) ファクター値が与えられたときの10銘柄以上がデフォルトする条件付き確率を計算せよ。
- 23.22** ベース相関とコンパウンド相関との違いを説明せよ。
- 23.23** 図23.4の ABS CDO の仕組みにおいて、各ポートフォリオに 12 % の損失が発生したとする。図の六つのトランシェのそれぞれに発生する損失はパーセントでいくらになるか。

- 23.24** 例23.2で、9%–12%トランシェに対するトランシェ・スプレッドを求めよ。

### 宿題

- 23.25** 無リスク・ゼロ・カーブが連続複利で年率6%のフラット、満期2年、プレミアム半年払いのプレーン・バニラ・クレジット・デフォルト・スワップにおいてデフォルトは0.25年後、0.75年後、1.25年後、1.75年後に発生しうると仮定する。回収率を20%，(時点ゼロにおける)無条件のデフォルト確率を時点0.25年と時点0.75年では1%，時点1.25年と時点1.75年では1.5%とする。このとき、クレジット・デフォルト・スワップ・スプレッドはいくらになるか。また、商品がバイナリー型クレジット・デフォルト・スワップの場合は、クレジット・デフォルト・スプレッドはいくらになるか。
- 23.26** ある企業に対して、それまでにデフォルトしていないという条件付きでの年間デフォルト確率を $\lambda$ 、回収率を $R$ と仮定する。無リスク金利は年率5%である。デフォルトは常に1年の真ん中で発生するとする。プレミアムが年払いの満期5年プレーン・バニラCDSのスプレッドが120ペース・ポイント、プレミアムが年払いの満期5年バイナリー型CDSのスプレッドが160ペース・ポイントである。 $R$ と $\lambda$ を推定せよ。
- 23.27** ポートフォリオに含まれる債券間の相関が増加したとき、シンセティックCDOのさまざまなトランシェに対するリターンはどのように変化すると思われるか説明せよ。
- 23.28** 次のことを行なう。
- 満期5年の無リスク債券のイールドは7%である。
  - X社の発行する満期5年の社債のイールドは9.5%である。

- (c) X社のデフォルトに対する満期5年のクレジット・デフォルト・スワップのスプレッドは年150ベース・ポイントである。このとき、どのような裁定機会が存在するか。また、クレジット・デフォルト・スプレッドが150ベース・ポイントではなく300ベース・ポイントの場合には、どのような裁定機会が存在するか。それらの裁定機会が完全なものではない理由を二つ述べよ。
- 23.29** 図23.4のABS CDOの仕組みにおいて、各ポートフォリオに20%の損失が発生したとする。図の六つのトランシェのそれぞれに発生する損失はパーセントでいくらになるか。
- 23.30** 例23.3で、(a) ファースト・トゥ・デフォルト型CDSと(b) セカンド・トゥ・デフォルト型CDSのスプレッドはいくらになるか。
- 23.31** 例23.2で、6% - 9%トランシェに対するトランシェ・スプレッドを求めよ。

## 第24章

# エキゾチック・オプション



ヨーロピアンもしくはアメリカンのコール・オプションとプット・オプションのようなデリバティブは、プレーン・バニラ商品 (plain vanilla product) と呼ばれている。それらの商品は、標準的な商品性がよく定義されており、活発に取引されている。それらの価格またはインプライド・ボラティリティは、取引所やブローカーによって定期的に呈示されている。店頭デリバティブ市場が活気あふれる市場であるのは、一つには多くの非標準的な商品が金融エンジニアによって開発されているからである。こうした商品はエキゾチック・オプション (exotic option), あるいは単にエキゾチックス (exotics) と呼ばれている。それらがポートフォリオに占める割合は通常相対的に小さいが、プレーン・バニラ商品に比べて一般的に収益性がきわめて高いため、デリバティブ・ディーラーにとって重要な商品となっている。

エキゾチック商品が開発される理由は多岐にわたる。市場での純粋なヘッ

ジニーズに応えるための場合もある。税法上や会計上、法律上、規制上の理由で、企業の財務担当者、ファンドマネジャー、および金融機関がエキゾチック商品に魅力を感じている場合もある。商品が特定の市場変数に関する将来のあるシナリオに基づいて設計される場合もある。エキゾチック商品は、知識の少ない企業の財務担当者やファンドマネジャーに本当よりも魅力的に映る商品になるように、投資銀行が設計する場合もたまにある。

本章では、いくつかのエキゾチック・オプションを紹介し、その評価について論じる。ここでのエキゾチック・オプションの分類は、Eric Reiner と Mark Rubinstein が1991年から1992年に *Risk* 誌に連載したすばらしい記事の分類に基づいている。以下では、原資産の利回りを  $q$  と仮定する。第15章と第16章で論じたように、株価指数オプションの場合には  $q$  は指數の配当利回り、通貨オプションの場合には  $q$  は外国無リスク金利、先物オプションの場合には  $q$  は国内無リスク金利になる。本章で論じるほとんどのオプションは、DerivaGem ソフトウェアを用いて評価することができる。

## 24.1 パッケージ

パッケージ (package) とは、標準的なヨーロピアン・コール、標準的なヨーロピアン・プット、フォワード契約、現金、および原資産からなるポートフォリオのことである。第10章では、ブル・スプレッド、ペア・スプレッド、バタフライ・スプレッド、カレンダー・スプレッド、ストラドル、ストラングル等、数多くのパッケージについて論じた。

トレーダーは、当初ゼロ・コストでパッケージを組むことが多い。その一例がレンジ・フォワード契約 (range forward contract) である(注1)。これについては15.2節で論じた。レンジ・フォワード契約はコールの買いとプットの売り、またはコールの売りとプットの買いからなる。コールの行使価格

---

(注1) レンジ・フォワード契約は、ゼロ・コスト・カラー、フレキシブル・フォワード、シリnder・オプション、オプション・フェンス、ミニマックス、フォワード・バンドとも呼ばれる。

はプットの行使価格よりも高く、それらの行使価格はコールとプットの価値が等しくなるように設定される。

任意のデリバティブは、支払を満期での後払いにすることで、ゼロ・コストの商品に変えることができる。ヨーロピアン・コール・オプションについて考えよう。時点ゼロに支払われる場合のオプション料を  $c$  とすると、オプションの満期  $T$  に支払われる場合のオプション料は  $A = ce^{rT}$  になる。その場合、ペイオフは  $\max(S_T - K, 0) - A$ 、すなわち  $\max(S_T - K - A, -A)$  になる。行使価格  $K$  がフォワード価格に等しい場合は、この後払いオプションはブレイク・フォワード、ボストン・オプション、解約権付フォワード契約、あるいはキャンセラブル・フォワードと呼ばれる。

## 24.2 標準的でないアメリカン・オプション

標準的なアメリカン・オプションはオプション期間中にいつでも行使可能で、行使価格は常に同じである。店頭市場で取引されるアメリカン・オプションには、標準的でない商品性をもつものもある。たとえば、次のようなものがある。

- 期限前行使がある特定の複数日に制限されているオプション。バミューダン・オプション (Bermudan option) と呼ばれる (バミューダはヨーロッパとアメリカの間にある)。
- 期限前行使がオプション期間のある部分のみで可能なオプション。  
たとえば、期限前行使ができない初期“ロックアウト”期間があるオプション。
- 行使価格がオプション期間で変化するオプション。

企業が発行する自社株ワラントにはこうした商品性をもつものが多い。たとえば、7年物ワラントで、3年目から7年後までの特定の日に行使が可能で、行使価格は3年目と4年目が30ドル、次の2年間が32ドル、最後の年が33ドル、というようなものがある。

標準的でないアメリカン・オプションは、ふつう二項ツリーを用いて評価

できる。各ノードでは、オプションの条項を反映した調整を行ったうえで、期限前行使（もしあれば）の判断が行われる。

### 24.3 先スタート・オプション

先スタート・オプション (forward start option) とは、将来のある時点にスタートするオプションである。第14章で論じた従業員ストック・オプションは、先スタート・オプションとみなされることもある。その理由は、企業は従業員に対して、将来アット・ザ・マネーのオプションを付与することを（暗黙に、あるいは明示的に）約束しているからである。

時点  $T_1$  にスタートして  $T_2$  で満期を迎える先スタートのアット・ザ・マネー・コール・オプションについて考えよう。資産価格を時点ゼロでは  $S_0$ 、時点  $T_1$  では  $S_1$  とする。このオプションを評価するために、まず第13章と第15章のヨーロピアン・オプションの価格式から、アット・ザ・マネー・コール・オプションの価値は資産価格に比例していることに注意しよう。したがって、時点  $T_1$  における先スタート・オプションの価値は  $cS_1/S_0$  になることがわかる。ここで、 $c$  はオプション期間が  $T_2 - T_1$  のアット・ザ・マネー・オプションの時点ゼロにおける価値である。リスク中立化法を用いると、時点ゼロにおける先スタート・オプションの価値は、

$$e^{-rT_1} \hat{E} \left[ c \frac{S_1}{S_0} \right]$$

となる。ここで  $\hat{E}$  はリスク中立世界での期待値である。 $c$  と  $S_0$  は既知で  $\hat{E}[S_1] = S_0 e^{(r-q)T_1}$  となるので、先スタート・オプションの価値は  $ce^{-qT_1}$  になる。配当のない株式の場合は  $q=0$  なので、先スタート・オプションの価値は、オプション期間の長さが同じ通常のアット・ザ・マネー・オプションの価値とまったく同じになる。

## 24.4 コンパウンド・オプション

コンパウンド・オプション (compound option) とは、オプションのオプションである。コンパウンド・オプションには四つの主なタイプ、コールのコール、コールのプット、プットのコール、およびプットのプットがある。コンパウンド・オプションには二つの行使価格と二つの行使日がある。たとえば、コールのコールについて考えよう。一つ目の行使日  $T_1$  に、コンパウンド・オプションの保有者は一つ目の行使価格  $K_1$  でコール・オプションを買う権利をもっている。そのコール・オプションは、二つ目の行使日  $T_2$  に二つ目の行使価格  $K_2$  で原資産を買う権利を保有者に与えるものである。コンパウンド・オプションは、一つ目の行使日におけるオプションの価値が一つ目の行使価格を上回った場合にのみ行使される。

通常の幾何ブラウン運動の仮定のもとで、ヨーロピアン・コンパウンド・オプションは 2 次元正規分布の積分を用いて、解析的に評価することができる(注2)。これまでの記号を用いると、コール・オプションに対するヨーロピアン・コール・オプションの時点ゼロにおける価値は、

$$S_0 e^{-qT_2} M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - e^{-rT_1} K_1 N(a_2)$$

で与えられる。ここで

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S^*) + (r-q+\sigma^2/2) T_1}{\sigma \sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma \sqrt{T_1}$$

$$b_1 = \frac{\ln(S_0/K_2) + (r-q+\sigma^2/2) T_2}{\sigma \sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma \sqrt{T_2}$$

である。関数  $M(a, b; \rho)$  は相関係数が  $\rho$  の 2 次元正規分布の累積分布関数で、第 1 変数が  $a$  以下、第 2 変数が  $b$  以下のときの値である(注3)。変数  $S^*$  は、時点  $T_1$  でのオプション価格が  $K_1$  に等しくなるような、時点  $T_1$  での資

(注2) R. Geske, "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics*, 7 (1979) : 63-81 および M. Rubinstein, "Double Trouble," *Risk*, (December 1991/January 1992) : 53-56 を参照。

(注3)  $M$  の数値計算法については、著者の Web サイトのテクニカルノート 5 を参照されたい。 $M$  の関数形についてもそこに与えられている。

資産価格である。もし時点  $T_1$  で実際の資産価格が  $S^*$  を上回れば、最初のオプションは行使される。そうでなければ、オプションは無価値のまま消滅する。

同様の記号を用いると、コールに対するヨーロピアン・プットの価値は、

$$K_2 e^{-rT_2} M(-a_2, b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-qT_2} M(-a_1, b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) \\ + e^{-rT_1} K_1 N(-a_2)$$

となる。プットに対するヨーロピアン・コールの価値は、

$$K_2 e^{-rT_2} M(-a_2, -b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - S_0 e^{-qT_2} M(-a_1, -b_1; \sqrt{T_1/T_2}) \\ - e^{-rT_1} K_1 N(-a_2)$$

となる。プットに対するヨーロピアン・プットの価値は、

$$S_0 e^{-qT_2} M(a_1, -b_1; -\sqrt{T_1/T_2}) - K_2 e^{-rT_2} M(a_2, -b_2; -\sqrt{T_1/T_2}) \\ + e^{-rT_1} K_1 N(a_2)$$

となる。

## 24.5 チューザー・オプション

チューザー・オプション (chooser option, as you like it option とも呼ばれる) とは、ある期間が経過した後に、保有者がそのオプションをコールにするかプットにするかを選択できるというオプションである。選択が行われる時点を  $T_1$  とする。この時点におけるチューザー・オプションの価値は、

$$\max(c, p)$$

となる。ここで  $c$  はコールの価値、 $p$  はプットの価値である。

チューザー・オプションの原資産となるオプションが両方ともヨーロピアンで、かつ行使価格が同じ場合には、プット・コール・パリティを用いて価格式を導くことができる。 $S_i$  を時点  $T_1$  における資産価格、 $K$  を行使価格、 $T_2$  をオプションの満期、 $r$  を無リスク金利とする。プット・コール・パリティより、

$$\begin{aligned}\max(c, p) &= \max(c, c + Ke^{-r(T_2-T_1)} - S_1 e^{-q(T_2-T_1)}) \\ &= c + e^{-q(T_2-T_1)} \max(0, Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)} - S_1)\end{aligned}$$

となる。したがって、チユーザー・オプションは、

1. 行使価格  $K$ 、満期  $T_2$  のコール・オプション 1 単位
2. 行使価格  $Ke^{-(r-q)(T_2-T_1)}$ 、満期  $T_1$  のプット・オプション  $e^{-q(T_2-T_1)}$  単位

からなるパッケージであることがわかる。このチユーザー・オプションはそういうものとして簡単に評価することができる。

コールとプットの行使価格や満期が異なるもっと複雑なチユーザー・オプションを考えることもできる。それらはパッケージではなく、ある程度コンパウンド・オプションと同様の性質をもっている。

## 24.6 バリア・オプション

バリア・オプション (barrier option) とは、原資産価格がある定められた期間中にある定められた価格に到達するか否かにペイオフが依存しているオプションである。

多種多様なバリア・オプションが店頭市場で取引されている。これらのオプションは通常のオプションより価格が安いため、魅力を感じる市場参加者もいる。バリア・オプションはノックアウト・オプション (knock-out option) とノックイン・オプション (knock-in option) に分類される。ノックアウト・オプションでは、原資産価格がバリアに達するとオプションが消滅する。ノックイン・オプションでは、原資産価格がバリアに達したときにのみオプションが発生する。

(15.4)式と(15.5)式より、時点ゼロにおける通常のコール・オプションとプット・オプションの価値は、

$$\begin{aligned}c &= S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \\ p &= K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1)\end{aligned}$$

で与えられる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-q+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r-q-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

である。

ダウン・アンド・アウト・コール (down-and-out call) は、ノックアウト・オプションの一種である。これは、原資産価格がバリアの水準  $H$  に達すると消滅するという通常のコール・オプションである。バリアの水準は当初の株価よりも低く設定される。対応するノックイン・オプションは、ダウン・アンド・イン・コール (down-and-in call) と呼ばれる。これは、原資産価格がバリアに達した場合にのみ通常のコールが発生するというオプションである。

$H$  が行使価格  $K$  以下ならば、時点ゼロにおけるダウン・アンド・イン・コールの価値は、

$$c_{di} = S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y) - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y - \sigma\sqrt{T})$$

となる。ここで、

$$\lambda = \frac{r-q+\sigma^2/2}{\sigma^2}$$

$$y = \frac{\ln[H^2/(S_0 K)]}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

である。通常のコールの価値はダウン・アンド・イン・コールの価値とダウン・アンド・アウト・コールの価値の和に等しいので、ダウン・アンド・アウト・コールの価値は、

$$c_{do} = c - c_{di}$$

で与えられる。

$H \geq K$  ならば、

$$c_{do} = S_0 N(x_1) e^{-qT} - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T})$$

$$- S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(y_1) + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(y_1 - \sigma\sqrt{T})$$

および、

$$c_{di} = c - c_{do}$$

となる。ここで、

$$x_1 = \frac{\ln(S_0/H)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

$$y_1 = \frac{\ln(H/S_0)}{\sigma\sqrt{T}} + \lambda\sigma\sqrt{T}$$

である。

アップ・アンド・アウト・コール (up-and-out call) は、現在の資産価格より高く設定されているバリアの水準  $H$  に資産価格が到達した場合に消滅する通常のコール・オプションである。アップ・アンド・イン・コール (up-and-in call) は、バリアに資産価格が到達した場合にのみ通常のコール・オプションが発生する。 $H$  が  $K$  以下のときは、アップ・アンド・アウト・コールの価値  $c_{uo}$  はゼロであり、アップ・アンド・イン・コールの価値  $c_{ui}$  は  $c$  である。 $H$  が  $K$  より大きいときは、

$$c_{ui} = S_0 N(x_1) e^{-qT} - K e^{-rT} N(x_1 - \sigma\sqrt{T}) - S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} [N(-y) - N(-y_1)] \\ + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} [N(-y + \sigma\sqrt{T}) - N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})]$$

となり、

$$c_{uo} = c - c_{ui}$$

となる。

プット・バリア・オプションは、コール・バリア・オプションと同様に定義される。アップ・アンド・アウト・プット (up-and-out put) は、現在の資産価格より高く設定されているバリア  $H$  に資産価格が到達した場合に消滅するプット・オプションである。アップ・アンド・イン・プット (up-and-in put) は、バリアに資産価格が到達した場合にのみプット・オプションが発生する。バリア  $H$  が行使価格  $K$  以上のときは、

$$p_{ui} = -S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-y) + K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-y + \sigma\sqrt{T})$$

となり、

$$p_{uo} = p - p_{ui}$$

となる。 $H$  が  $K$  以下のときは、

$$p_{uo} = -S_0 N(-x_1) e^{-qT} + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) \\ + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2\lambda} N(-y_1) - K e^{-rT} (H/S_0)^{2\lambda-2} N(-y_1 + \sigma\sqrt{T})$$

となり、

$$p_{ui} = p - p_{uo}$$

となる。

ダウン・アンド・アウト・プット (down-and-out put) は、現在の資産価格より低く設定されているバリアに資産価格が到達した場合に消滅するプット・オプションである。ダウン・アンド・イン・プット (down-and-in put) は、資産価格がバリアに達した場合にのみプット・オプションが発生する。バリアが行使価格より大きいときは、 $p_{do}=0$ かつ $p_{di}=p$ である。バリアが行使価格より小さいときは、

$$p_{di} = -S_0 N(-x_1) e^{-qT} + K e^{-rT} N(-x_1 + \sigma\sqrt{T}) + S_0 e^{-qT} (H/S_0)^{2k} [N(y) - N(y_1)] \\ - K e^{-rT} (H/S_0)^{2k-2} [N(y - \sigma\sqrt{T}) - N(y_1 - \sigma\sqrt{T})]$$

となり、

$$p_{do} = p - p_{di}$$

となる。

これらの価値はすべて、将来時点における資産価格の確率分布が対数正規分布であるという通常の仮定のもとで求められている。バリア・オプションで重要なのは、バリアに到達したか否かを判定するための資産価格  $S$  の観測頻度である。本節で与えた解析式では  $S$  は連続的に観測されることを仮定しており、実際そのような取引もある(注4)。定期的に  $S$  を観測することが決められている契約も多い。たとえば、1日1回、昼の12時に観測されるというものである。Broadie, Glasserman, およびKouは、上式を原資産価格が離散的に観測される場合に用いる調整方法を提案している(注5)。その方法は、アップ・アンド・インまたはアップ・アンド・アウト・オプションに対しては、バリアの水準  $H$  を  $He^{0.5826\sigma\sqrt{T/m}}$  に置き換える、

(注4) バリアに下方(上方)から到達したかどうかを探知する一つの方法は、その資産をバリア価格で売る(買う)指値注文を取引所に出し、その注文が約定したかどうかをみることである。

(注5) M. Broadie, P. Glasserman, and S.G. Kou, "A Continuity Correction for Discrete Barrier Options," *Mathematical Finance* 7, 4 (October 1997) : 325-49を参照。

ダウン・アンド・インまたはダウン・アンド・アウト・オプションに対しては、 $H$  を  $He^{-0.5826\sigma\sqrt{T/m}}$  に置き換えるというものである。ここで  $m$  は資産価格の観測回数である（したがって、 $T/m$  は観測の間隔である）。

バリア・オプションは、普通のオプションとかなり異なる性質をもつ場合がある。たとえば、ベガが負になるときがある。資産価格がバリアの水準に接近している場合のアップ・アンド・アウト・コール・オプションについて考えよう。ボラティリティが高くなるにつれてバリアに到達する確率が高くなる。その結果、そういう状況のときにはボラティリティが上昇するとバリア・オプションの価格は安くなる場合がある。

## 24.7 バイナリー・オプション

バイナリー・オプション (binary option) は不連続なペイオフをもつオプションである。バイナリー・オプションの簡単な例はキャッシュ・オア・ナッシング・コール (cash-or-nothing call) である。このオプションでは、時点  $T$  に資産価格が行使価格を下回った場合には何も支払はなく、行使価格を上回った場合にはある一定金額  $Q$  が支払われる。リスク中立世界では、オプションの満期時点に資産価格が行使価格を上回る確率は、これまでと同じ記号を用いると、 $N(d_2)$  である。したがって、キャッシュ・オア・ナッシング・コールの価値は  $Qe^{-rT}N(d_2)$  になる。キャッシュ・オア・ナッシング・コールと同様の商品性をもつ。資産価格が行使価格を下回った場合には  $Q$  を支払い、上回った場合には何も支払わないオプションである。キャッシュ・オア・ナッシング・コールの価値は  $Qe^{-rT}N(-d_2)$  になる。

他のバイナリー・オプションの例として、アセット・オア・ナッシング・コール (asset-or-nothing call) がある。このオプションでは、原資産価格が行使価格を下回って満期を迎えた場合には何も支払はなく、行使価格を上回って満期を迎えた場合には資産価格が支払われる。したがって、今までの記号を用いると、アセット・オア・ナッシング・コールの価値は

$S_0 e^{-qT} N(d_1)$  になる。アセット・オア・ナッシング・プット (asset-or-nothing put) では、資産価格が行使価格を上回って満期を迎えた場合には何も支払はなく、資産価格が行使価格を下回った場合には資産価格が支払われる。アセット・オア・ナッシング・プットの価値は  $S_0 e^{-qT} N(-d_1)$  になる。

通常のヨーロピアン・コール・オプションは、アセット・オア・ナッシング・コールの買いポジションと、現金ペイオフが行使価格に等しいキャッシュ・オア・ナッシング・コールの売りポジションを合わせたものと等価である。同様に、通常のヨーロピアン・プット・オプションは、キャッシュ・オア・ナッシング・プットの買いポジションとアセット・オア・ナッシング・プットの売りポジションを合わせたものと等価である。ただし、キャッシュ・オア・ナッシング・プットの現金ペイオフは行使価格に等しい。

## 24.8 ルックバック・オプション

ルックバック・オプションのペイオフは、オプション期間中の資産価格の最大値と最小値に依存している。変動ルックバック・コール (floating lookback call) のペイオフは、満期時点の資産価格がオプション期間中の資産価格の最小値を上回った金額になる。変動ルックバック・プット (floating lookback put) のペイオフは、オプション期間中の資産価格の最大値が満期時点の資産価格を上回った金額になる。

変動ルックバックに対する評価式は、次のとおりである(注6)。時点ゼロにおける変動ルックバック・コールの価値は、

$$c_{fl} = S_0 e^{-qT} N(a_1) - S_0 e^{-qT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-a_1) \\ - S_{\min} e^{-rT} \left[ N(a_2) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{r_1} N(-a_3) \right]$$

で与えられる。ここで、

---

(注6) B. Goldman, H. Sosin, and M.A. Gatto, "Path Dependent Options : Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, 34 (December 1979) : 1111-27および M. Garman, "Recollection in Tranquility," *Risk*, (March 1989) : 16-19 を参照。

$$a_1 = \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (r - q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$a_3 = \frac{\ln(S_0/S_{\min}) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_1 = -\frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_0/S_{\min})}{\sigma^2}$$

である。また、 $S_{\min}$ は現時点までの資産価格の最小値である（ルックバックの取引開始時点では、 $S_{\min} = S_0$ である）。 $r = q$  の場合については章末問題24.23を参照せよ。

変動ルックバック・プットの価値は、

$$\begin{aligned} p_{\text{fl}} &= S_{\max}e^{-qT} \left[ N(b_1) - \frac{\sigma^2}{2(r-q)} e^{r_2} N(-b_3) \right] \\ &\quad + S_0 e^{-qT} \frac{\sigma^2}{2(r-q)} N(-b_2) - S_0 e^{-qT} N(b_2) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、

$$b_1 = \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (-r + q + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$b_3 = \frac{\ln(S_{\max}/S_0) + (r - q - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$Y_2 = \frac{2(r - q - \sigma^2/2)\ln(S_{\max}/S_0)}{\sigma^2}$$

である。また、 $S_{\max}$ は現時点までの資産価格の最大値である（ルックバックの取引開始時点では、 $S_{\max} = S_0$ である）。

#### 【例24.1】

配当のない株式に対する新規の変動ルックバック・プットについて考える。株価を50、株価のボラティリティを年率40%、無リスク金利を年率10%、満期を3カ月とする。この場合、 $S_{\max} = 50$ 、 $S_0 = 50$ 、 $r = 0.1$ 、 $q = 0$ 、 $\sigma = 0.4$ 、 $T = 0.25$ 、 $b_1 = -0.025$ 、 $b_2 = -0.225$ 、 $b_3 = 0.025$ 、

$Y_2=0$ である。したがって、ルックバック・プットの価値は7.79になる。また、同じ株式に対する新規の変動ルックバック・コールの価値は8.04になる。

固定ルックバック・オプションでは行使価格が固定されている。固定ルックバック・コール・オプション (fixed lookback call option) のペイオフは通常のヨーロピアン・コール・オプションと同様であるが、最終資産価格のかわりにオプション期間中の資産価格の最大値が用いられる。固定ルックバック・プット・オプション (fixed lookback put option) のペイオフは通常のヨーロピアン・プット・オプションと同様であるが、最終資産価格のかわりにオプション期間中の資産価格の最小値が用いられる。 $S_{\max}^* = \max(S_{\max}, K)$  と定義する。ここで、 $S_{\max}$ はオプション期間中の資産価格の最大値、 $K$ は行使価格である。また、固定ルックバック・コールとオプション期間が同じ変動ルックバック・プットに対して、現時点までの実際の資産価格の最大値  $S_{\max}$ を  $S_{\max}^*$ に置き換えて求めた価値を  $p_{\text{fl}}^*$ と定義する。そうすると、プット・コール・パリティを導いたのと同様の議論から、固定ルックバック・コール・オプションの価値  $c_{\text{fix}}$ は、

$$c_{\text{fix}} = p_{\text{fl}}^* + S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}$$

で与えられる(注7)。同様に、 $S_{\min}^* = \min(S_{\min}, K)$  とすると、固定ルックバック・プット・オプションの価格  $p_{\text{fix}}$ は、

$$p_{\text{fix}} = c_{\text{fl}}^* + K e^{-rT} - S_0 e^{-qT}$$

で与えられる。ここで  $c_{\text{fl}}^*$ は固定ルックバック・プットとオプション期間が同じ変動ルックバック・コールに対して、現時点までの実際の資産価格の最小値  $S_{\min}$ を  $S_{\min}^*$ に置き換えて求めた価値である。このことから、変動ルックバック・オプションに対する上の価格式を修正して、固定ルックバック・オプションが評価できることがわかる。

---

(注7) このことは,H.Y. Wong and Y.K. Kwok, "Sub-replication and Replenishing Premium: Efficient Pricing of Multi-state Lookbacks," *Review of Derivatives Research*, 6 (2003) : 83-106 で提案された。

ルックバック・オプションは投資家にアピールする商品であるが、通常のオプションに比べて非常に高価である。パリア・オプションと同様に、ルックバック・オプションの価値は最大値と最小値を決めるための資産価格を観測する頻度の影響を受けやすい。上の価格式では、資産価格は連続的に観測されることが仮定されている。Broadie, Glasserman, および Kou は資産価格が離散的に観測される場合に上式を用いる調整方法を提案している(注8)。

## 24.9 シャウト・オプション

シャウト・オプション(shout option)とは、保有者がオプションの売手に対してオプション期間中に一度だけ「シャウト」できるヨーロピアン・オプションである。オプション満期時に、オプション保有者はヨーロピアン・オプションの通常のペイオフまたはシャウト時の本源的価値の大きいほうを受け取る。たとえば、行使価格を50ドル、原資産価格が60ドルのときにコールの保有者がシャウトしたとする。その場合、最終資産価格が60ドルより小さい場合には、保有者は10ドルのペイオフを受け取る。60ドルよりも大きい場合には、保有者は資産価格が50ドルを超えた分を受け取る。

シャウト・オプションはルックバック・オプションと少し似た性質をもっているが、その価格はかなり安い。資産価格が  $S_t$  となる時点  $\tau$  にオプション保有者がシャウトしたならば、オプションのペイオフは、

$$\max(0, S_\tau - S_t) + (S_\tau - K)$$

になる。このことに注意すれば、シャウト・オプションを評価することができる。ただし、 $K$  は行使価格、 $S_\tau$  は時点  $T$  における資産価格である。保有者がシャウトした時点  $\tau$  におけるオプションの価値は、 $S_\tau - K$  の(時点  $T$  に受け取る)現在価値に行使価格  $S_\tau$  のヨーロピアン・オプションの価値を加えたものになる。後者は、Black-Sholes の公式を用いて計算することがで

---

(注8) M. Broadie, P. Glasserman, and S.G. Kou, "Connecting Discrete and Continuous Path-Dependent Options," *Finance and Stochastics*, 3 (1999) : 55-82 を参照。

きる。

シャウト・オプションは、原資産に対する通常の二項ツリーまたは三項ツリーを構築することによって評価することができる。ツリーに沿って後ろ向きに計算すれば、シャウトした場合のオプションの価値とシャウトしない場合のオプションの価値を各ノードで求めることができる。各ノードでのオプションの価値は二つの価値の大きいほうになる。したがって、シャウト・オプションは通常のアメリカン・オプションの評価と同様の手順で評価することができる。

## 24.10 アジアン・オプション

アジアン・オプションとは、オプション期間中のある期間における原資産価格の平均値にペイオフが依存しているオプションである。アベレージ・プライス・コール (average price call) のペイオフは  $\max(0, S_{\text{ave}} - K)$  であり、アベレージ・プライス・プット (average price put) のペイオフは  $\max(0, K - S_{\text{ave}})$  である。ここで  $S_{\text{ave}}$  はあらかじめ決められた期間における原資産価格の平均値である。アベレージ・プライス・オプションは通常のオプションよりも安く、おそらく通常のオプションよりも企業の財務担当者のニーズに合った商品と思われる。米国のある企業の財務担当者が、オーストラリアの子会社から 1 億豪ドルのキャッシュフローを翌年 1 年間均等に受け取ることを想定しているとする。この財務担当者は、その年に実現する平均為替レートがある水準以上になることを保証するオプションに関心をもつと思われる。アベレージ・プライス・プット・オプションは、通常のオプションよりもこのニーズに効果的に応えることができる。

アジアン・オプションのもう一つのタイプに、アベレージ・ストライク・オプションがある。アベレージ・ストライク・コール (average strike call) のペイオフは  $\max(0, S_T - S_{\text{ave}})$  であり、アベレージ・ストライク・プット (average strike put) のペイオフは  $\max(0, S_{\text{ave}} - S_T)$  である。アベレージ・ストライク・オプションを用いると、ある期間に頻繁に取引する資産に対し

て支払う平均価格が最終価格を上回らないことを保証できる。あるいは、そのオプションを用いると、ある期間に頻繁に取引する資産に対して受け取る平均価格が最終価格を下回らないことを保証できる。

原資産価格  $S$  が対数正規分布に従い、 $S_{ave}$  が  $S$  の幾何平均であるときには、ヨーロピアン・アベレージ・プライス・オプションの価格に対して解析式が得られる(注9)。これは、対数正規分布に従う変数の幾何平均もまた対数正規分布に従うからである。時点  $T$  におけるペイオフが時点ゼロから時点  $T$  までの幾何平均に基づいて決まる、新規のオプションについて考えよう。リスク中立世界では、資産価格のある期間における幾何平均の確率分布は、資産の期待成長率を ( $r-q$  ではなく)  $(r-q-\sigma^2/6)/2$  とし、そのボラティリティを ( $\sigma$  ではなく)  $\sigma/\sqrt{3}$ とした場合のその期間の終わりにおける資産価格の確率分布と同じになることが示せる。したがって、幾何平均プライス・オプションはボラティリティを  $\sigma/\sqrt{3}$ 、配当を、

$$r - \frac{1}{2} \left( r - q - \frac{\sigma^2}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( r + q + \frac{\sigma^2}{6} \right)$$

とした通常のオプションとして扱うことができる。

ほとんどの場合、アジアン・オプションのペイオフは算術平均で定義されており、その場合には厳密な解析的な価格式は得られていない。その理由は、対数正規分布に従う変数の算術平均の分布は、解析的に扱いやすい性質をもっていないからである。しかし、分布は近似的には対数正規として扱えるため、アベレージ・プライス・オプションに対する解析的なよい近似式を導くことができる。リスク中立世界での算術平均の確率分布に関する 1 次と 2 次のモーメントを厳密に計算し、それに合った対数正規分布を求めればよい(注10)。

(注9) A. Kemna and A. Vorst, "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values," *Journal of Banking and Finance*, 14 (March 1990) : 113-29 を参照。

(注10) S.M. Turnbull and L.M. Wakeman, "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (September 1991) : 377-89 を参照。

時点  $T$  におけるペイオフが時点ゼロから時点  $T$  までの算術平均に基づく新規のアジアン・オプションについて考える。リスク中立世界での平均値の1次モーメント  $M_1$  と2次モーメント  $M_2$  は、 $q \neq r$  のとき、

$$M_1 = \frac{e^{(r-q)T} - 1}{(r-q)T} S_0$$

および

$$M_2 = \frac{2e^{[2(r-q)+\sigma^2]T} S_0^2}{(r-q+\sigma^2)(2r-2q+\sigma^2)T^2} + \frac{2S_0^2}{(r-q)T^2} \left[ \frac{1}{2(r-q)+\sigma^2} - \frac{e^{(r-q)T}}{r-q+\sigma^2} \right]$$

になることが示せる ( $q=r$  の場合は章末問題24.23を参照)。

平均資産価格が対数正規に従うと仮定することによって、Black モデルを用いることができる。その場合、

$$F_0 = M_1 \quad (24.1)$$

および

$$\sigma^2 = \frac{1}{T} \ln \left( \frac{M_2}{M_1^2} \right) \quad (24.2)$$

として、(16.9)式と(16.10)式を用いる。

#### 【例24.2】

配当のない株式に対する新規のアベレージ・プライス・コール・オプションを考える。株価を50、行使価格を50、株価のボラティリティを年率40%，無リスク金利を年率10%，満期を1年とする。この場合、 $S_0 = 50$ 、 $K = 50$ 、 $r = 0.1$ 、 $q = 0$ 、 $\sigma = 0.4$ 、 $T = 1$ である。平均が幾何平均の場合は、ボラティリティを $0.4/\sqrt{3}$ 、すなわち23.09%，配当を $(0.1 + 0.4^2/6)/2$ 、すなわち6.33%として、通常のオプションとして評価することができる。このとき、オプションの価値は5.13になる。平均が算術平均の場合は、まず最初に  $M_1 = 52.59$  と  $M_2 = 2,922.76$  を計算する。  
 (24.1) 式と (24.2) 式から、 $F_0 = 52.59$ 、 $\sigma = 23.54\%$ となり、 $K = 50$ 、 $T = 1$ 、 $r = 0.1$ として(16.9)式を用いると、オプションの価値が5.62と

して求まる。

$M_1$ と $M_2$ に対する上式は、平均が資産価格の連続的な観測値から計算されるという仮定のもとで求められたものである。平均が資産価格の離散的な観測値から計算される場合の $M_1$ と $M_2$ の求め方については、本章の付録で示す。

これまでの分析は、新規のオプションだけではなく、平均の計算に使われる価格の一部がすでに観測されている場合も扱えるように修正することができる。平均を計算する期間が、すでに価格が観測されている長さ $t_1$ の期間と長さ $t_2$ の将来の期間（オプションの残存期間）からなると仮定する。また、最初の期間における資産価格の平均を $\bar{S}$ とする。このとき、アベレージ・プライス・コールのペイオフは、

$$\max\left(\frac{\bar{S}t_1 + S_{\text{ave}}t_2}{t_1 + t_2} - K, 0\right)$$

となる。ここで $S_{\text{ave}}$ は平均を計算する期間の残りの部分における資産価格の平均である。これは、

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2} \max(S_{\text{ave}} - K^*, 0)$$

と同じである。ただし、

$$K^* = \frac{t_1 + t_2}{t_2} K - \frac{t_1}{t_2} \bar{S}$$

である。 $K^* > 0$ の場合は、新規のアジアン・オプションで行使価格 $K$ を $K^*$ に変えて評価した値に $t_2/(t_1 + t_2)$ を掛けたものがこのオプションの価値になる。 $K^* < 0$ の場合はオプションは必ず行使されるので、フォワード契約として評価できる。その価値は、

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2} [M_1 e^{-rt_2} - K^* e^{-rt_2}]$$

となる。

## 24.11 エクスチェンジ・オプション

ある資産をほかの資産に換えるオプション（しばしばエクスチェンジ・オプション（exchange option）と呼ばれる）は、いろいろな場面に現れる。豪ドルで円を買うオプションは、米国の投資家からみればある外貨資産をほかの外貨資産に交換するオプションである。株式公開買付けは、ある株式を別の株式に交換するオプションである。

時点  $T$  に価値  $U_T$  の資産を渡し、かわりに価値  $V_T$  の資産を受け取るヨーロピアン・オプションを考えよう。そのオプションのペイオフは、

$$\max(V_T - U_T, 0)$$

である。このオプションに対する価格式は、Margrabe によって最初に導出された（注11）。資産価格  $U$  と  $V$  は、それぞれボラティリティが  $\sigma_U$  と  $\sigma_V$  の幾何ブラウン運動に従っているとする。さらに、 $U$  と  $V$  の間の瞬間的な相関を  $\rho$  と仮定し、 $U$  と  $V$  の利回りは  $q_U$  と  $q_V$  であるとする。このとき、時点ゼロにおけるこのオプションの価値は、

$$V_0 e^{-q_V T} N(d_1) - U_0 e^{-q_U T} N(d_2) \quad (24.3)$$

となる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \hat{\sigma}^2/2)T}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$
$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V}$$

であり、 $U_0$  と  $V_0$  は時点ゼロにおける  $U$  と  $V$  の値である。

この結果については第27章で証明する。興味深い点は、(24.3)式が無リスク金利  $r$  に依存していないという点である。これは、 $r$  が上昇するとリスク中立世界における両方の資産価格の成長率も上昇するが、この上昇は割引率の上昇によって完全に相殺されるからである。変数  $\hat{\sigma}$  は  $V/U$  のボラティリティである。(15.4)式と比べると、このオプション 1 単位の価格は、行使価格が 1、無リスク金利が  $q_U$ 、資産の配当利回りが  $q_V$  のときの、価値

(注11) W. Margrabe, "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another," *Journal of Finance*, 33 (March 1978) : 177-86 を参照。

が  $V/U$  の資産に対するヨーロピアン・コール・オプション  $U_0$  単位の価格に等しいことがわかる。Mark Rubinstein は、このオプションがアメリカンの場合でも、評価するときは同様の特徴付けができるることを示した(注12)。このアメリカン・オプション 1 単位は、無リスク金利を  $q_U$ 、資産の配当利回りを  $q_V$ としたときの、価値が  $V/U$  の資産を 1.0 で購入するアメリカン・オプション  $U_0$  単位とみなすことができる。したがって、このオプションは二項ツリーを用いて第19章で説明した方法で評価することができる。

二つの資産の高いほう、または低いほうを取得するオプションは、一方の資産と、その資産を他方の資産に交換するオプションとの合成と考えることができる。すなわち、

$$\min(U_T, V_T) = V_T - \max(V_T - U_T, 0)$$

$$\max(U_T, V_T) = U_T + \max(V_T - U_T, 0)$$

と表すことができる。

## 24.12 複数資産に関するオプション

二つ以上のリスク資産に関するオプションは、レインボー・オプション (rainbow option) と呼ばれることがある。第6章で述べた CBOT に上場されている債券先物契約がその一例である。その理由は、売りポジションをもつ市場参加者は多数の異なる銘柄のなかから受渡銘柄を選ぶ権利をもっているからである。

おそらく最もよく取引されている複数資産に関するオプションはバスケット・オプション (basket option) である。これは、ペイオフが資産のポートフォリオ (すなわち、バスケット) の価値に依存しているオプションである。その際の資産は、個別株式や株価指数、通貨であることが多い。ヨーロピアン・バスケット・オプションは、資産が相関をもった幾何ブラウン運動に従うと仮定すれば、モンテカルロ・シミュレーションで評価することができ

---

(注12) M. Rubinstein, "One for Another," *Risk*, (July/August 1991) : 30-32 を参照。

る。もっと速い計算方法は、リスク中立世界におけるオプション満期でのバスケットの1次と2次のモーメントを計算し、満期でのバスケットの価値が対数正規分布に従うと仮定する方法である。そうすると、このオプションはパラメータを(24.1)式と(24.2)式で与えられたものにして、Blackモデルを用いて評価することができる。本章の付録に、将来時点におけるバスケットの価値のモーメントを資産のボラティリティと相関から計算する方法を示す。相関は過去データから推定するのが一般的である。

### 24.13 ボラティリティ・スワップとバリアンス・スワップ

ボラティリティ・スワップ (volatility swap) は、ある資産に対して時点0から時点Tまでの間に実現したボラティリティとあらかじめ決められた固定のボラティリティとを交換する契約である。実現ボラティリティは日次平均收益率をゼロと仮定して、13.4節で説明したような方法を用いて計算される。時点0から時点Tまでの期間に、資産価格の日次観測値がn個あるとする。このとき、実現ボラティリティは、

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{252}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) \right]^2}$$

で定義される。ここで  $S_i$  は資産価格の  $i$  番目の観測値である。

固定ボラティリティのペイヤーからみると、時点Tにおけるボラティリティ・スワップのペイオフは  $L_{\text{vol}}(\bar{\sigma} - \sigma_K)$  となる。ここで  $L_{\text{vol}}$  は想定元本、 $\sigma_K$  は固定ボラティリティである。オプションが資産価格とボラティリティに対して複雑なエクスポージャーをもっているのに対して、ボラティリティ・スワップはボラティリティに対してのみエクspoージャーをもっているという点で、性質の単純な商品である。

バリアンス・スワップ (variance swap) は、時点0から時点Tまでの間に実現した分散率  $\bar{V}$  とあらかじめ決められた分散率とを交換する契約である。分散率はボラティリティの2乗 ( $\bar{V} = \bar{\sigma}^2$ ) である。バリアンス・スワップはボラティリティ・スワップよりも評価が簡単である。その理由は、

時点 0 から時点  $T$  までの分散率がブット・オプションとコール・オプションからなるポートフォリオを用いて複製できるからである。固定分散率のペイラーからみると、時点  $T$  におけるバリアンス・スワップのペイオフは  $L_{\text{var}}(\bar{V} - V_K)$  となる。ここで  $L_{\text{var}}$  は想定元本、 $V_K$  は固定分散率である。バリアンス・スワップの想定元本は、 $L_{\text{var}} = L_{\text{vol}}/(2\sigma_K)$  を用いて、対応するボラティリティ・スワップの想定元本で表されることも多い。

### バリアンス・スワップの評価

$S^*$  を資産価格の任意の値として、時点 0 から時点  $T$  までの平均分散の期待値は、

$$\begin{aligned}\hat{E}(\bar{V}) &= \frac{2}{T} \ln \frac{F_0}{S^*} - \frac{2}{T} \left[ \frac{F_0}{S^*} - 1 \right] \\ &\quad + \frac{2}{T} \left[ \int_{K=s^*}^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{-rT} p(K) dK + \int_{K=s^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{-rT} c(K) dK \right]\end{aligned}\quad (24.4)$$

で与えられることを、著者の Web サイトのテクニカルノート22に示してある。ここで、 $F_0$  は時点  $T$  に満期を迎えるその資産のフォワード価格、 $c(K)$  は行使価格  $K$ 、満期  $T$  のヨーロピアン・コール・オプションの価格、 $p(K)$  は行使価格  $K$ 、満期  $T$  のヨーロピアン・ブット・オプションの価格である。

このことを用いて、バリアンス・スワップを評価することができる(注13)。時点 0 から時点  $T$  までの実現分散を受け取り、 $V_K$  の分散率を支払う、想定元本が  $L_{\text{var}}$  の契約の価値は、

$$L_{\text{var}} [\hat{E}(\bar{V}) - V_K] e^{-rT} \quad (24.5)$$

となる。行使価格が  $K_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) のヨーロピアン・オプションの価格がわかっていると仮定する。ただし、 $K_1 < K_2 < \dots < K_n$  とする。このとき、

---

(注13) K. Demeterfi, E. Derman, M. Kamal, and J. Zou, "A Guide to Volatility and Variance Swaps," *The Journal of Derivatives*, 6, 4 (Summer 1999), 9-32 を参照。分散とボラティリティに対するオプションについては、P. Carr and R. Lee, "Realized Volatility and Variance: Options via Swaps," *Risk*, May 2007, 76-83 を参照。

(24.4)式を実際に計算する標準的な方法は、 $S^*$ を $F_0$ を最初に下回る行使価格にとり、積分を、

$$\int_{K=0}^{S^*} \frac{1}{K^2} e^{rt} p(K) dK + \int_{K=S^*}^{\infty} \frac{1}{K^2} e^{rt} c(K) dK = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rt} Q(K_i) \quad (24.6)$$

で近似する方法である。ただし、 $2 \leq i \leq n-1$ に対して  $\Delta K_i = 0.5(K_{i+1} - K_{i-1})$ 、 $\Delta K_1 = K_2 - K_1$ 、 $\Delta K_n = K_n - K_{n-1}$  である。また、関数  $Q(K_i)$  は、 $K_i < S^*$  のときは行使価格  $K_i$  のヨーロピアン・プット・オプションの価格に等しく、 $K_i > S^*$  のときは行使価格  $K_i$  のヨーロピアン・コール・オプションの価格に等しい。 $K_i = S^*$  のとき、関数  $Q(K_i)$  は行使価格  $K_i$  のヨーロピアン・コールとヨーロピアン・プットの価格の平均に等しい。

#### 【例24.3】

ある指標の3カ月間における実現分散率を受け取り、0.045の分散率を支払う想定元本1億ドル、満期3カ月の契約を考える。無リスク金利を4%，指標の配当利回りを1%とする。また、指標の現在のレベルを1,020とする。さらに、行使価格800, 850, 900, 950, 1,000, 1,050, 1,100, 1,150, 1,200に対して、満期3カ月の指標オプションのインプライド・ボラティリティをそれぞれ29%, 28%, 27%, 26%, 25%, 24%, 23%, 22%, 21%とする。この場合、 $n=9$ ,  $K_1=800$ ,  $K_2=850$ , ...,  $K_9=1,200$ ,  $F_0=1,020 e^{(0.04-0.01) \times 0.25}=1,027.68$ ,  $S^*=1,000$ である。DerivaGem ソフトウェアを用いて計算すると、 $Q(K_1)=2.22$ ,  $Q(K_2)=5.22$ ,  $Q(K_3)=11.05$ ,  $Q(K_4)=21.27$ ,  $Q(K_5)=51.21$ ,  $Q(K_6)=38.94$ ,  $Q(K_7)=20.69$ ,  $Q(K_8)=9.44$ ,  $Q(K_9)=3.57$ となる。また、すべての  $i$  に対して  $\Delta K_i=50$  である。これらより、

$$\sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rt} Q(K_i) = 0.008139$$

となる。(24.4)式と(24.6)式から、

$$\hat{E}(\bar{V}) = \frac{2}{0.25} \ln\left(\frac{1027.68}{1000}\right) - \frac{2}{0.25} \left(\frac{1027.68}{1000} - 1\right) + \frac{2}{0.25} \times 0.008139$$

$$= 0.0621$$

となる。したがって、(24.5)式からボラティリティ・スワップの価値（単位100万ドル）は $100 \times (0.0621 - 0.045) e^{-0.04 \times 0.25} = 1.69$ となる。

### ボラティリティ・スワップの評価

ボラティリティ・スワップを評価するには、 $\hat{E}(\bar{\sigma})$ を計算する必要がある。ここで $\bar{\sigma}$ は時点0から時点Tまでのボラティリティの平均値である。

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\hat{E}(\bar{V})} \sqrt{1 + \frac{\bar{V} - \hat{E}(\bar{V})}{\hat{E}(\bar{V})}}$$

と書くことができる。右辺の第2項を級数展開すると、

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\hat{E}(\bar{V})} \left\{ 1 + \frac{\bar{V} - \hat{E}(\bar{V})}{2\hat{E}(\bar{V})} - \frac{1}{8} \left[ \frac{\bar{V} - \hat{E}(\bar{V})}{\hat{E}(\bar{V})} \right]^2 \right\}$$

が得られる。期待値をとると、

$$\hat{E}(\bar{\sigma}) = \sqrt{\hat{E}(\bar{V})} \left\{ 1 - \frac{1}{8} \left[ \frac{\text{var}(\bar{V})}{\hat{E}(\bar{V})^2} \right] \right\} \quad (24.7)$$

となる。ここで $\text{var}(\bar{V})$ は $\bar{V}$ の分散である。したがって、ボラティリティ・スワップの評価には契約期間中の平均分散率の分散を推定する必要がある。時点0から時点Tまでの実現ボラティリティを受け取り、 $\sigma_K$ のボラティリティを支払う、想定元本が $L_{\text{vol}}$ の契約の価値は、

$$L_{\text{vol}} [\hat{E}(\bar{\sigma}) - \sigma_K] e^{-rt}$$

となる。

#### 【例24.4】

例24.3と同じ仮定のもとで、実現ボラティリティを受け取り、23%のボラティリティを支払う想定元本1億ドルのボラティリティ・スワップを考える。その場合、 $\hat{E}(\bar{V}) = 0.0621$ となる。3カ月間の平均分散の標準偏差が0.01と推定されていると仮定する。このとき、 $\text{var}(\bar{V}) = 0.0001$ である。(24.7)式より、

$$\hat{E}(\bar{\sigma}) = \sqrt{0.0621} \left( 1 - \frac{1}{8} \times \frac{0.0001}{0.0621^2} \right) = 0.2484$$

となる。したがって、このスワップの価値（単位100万ドル）は、

$$100 \times (0.2484 - 0.23) e^{-0.04 \times 0.25} = 1.82$$

となる。

## VIX 指数

(24.4)式で関数  $\ln$  を級数展開の最初の2項で近似すると、

$$\ln\left(\frac{F_0}{S^*}\right) = \left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2$$

となる。したがって、リスク中立確率での累積分散の期待値は、

$$\hat{E}(\bar{V}) T = -\left(\frac{F_0}{S^*} - 1\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) \quad (24.8)$$

となる。

2004年以降、VIX ボラティリティ指数（13.11節を参照）は(24.8)式に基づいて計算されている。市場で取引されている残存期間が30日をちょうど上回るオプションとちょうど下回るオプションに対して、 $\hat{E}(\bar{V}) T$  が日々計算される。30日リスク中立期待累積分散は、これらの二つの値を補間して求められる。その結果に365/30を乗じて平方根をとったものが指標の値になる。より詳しい計算方法については、

[www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf](http://www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf)

を参照されたい。

## 24.14 オプションの静的な複製

第17章で述べた手法を用いてエキゾチック・オプションのヘッジを行う場合、容易にヘッジできるものもあれば、不連続性をもっているためにヘッジが非常にむずかしいものもある（ビジネス寸見24.1を参照）。ヘッジが困難な

場合には、オプションの静的な複製 (static options replication) として知られる手法が有用なこともある(注14)。これは、エキゾチック・オプションを近似的に複製する、活発に取引されているオプションからなるポートフォリオを探そうというものである。このポジションを売却すればヘッジになる(注15)。

#### ビジネス寸見24.1 エキゾチック・オプションのデルタ・ヘッジは容易か、困難か？

第17章で述べたように、デルタ・ニュートラル・ポジションを構築し、それを頻繁にリバランスしてデルタ・ニュートラルに保てば、エキゾチック・オプションをヘッジすることができる。この方法でエキゾチック・オプションをヘッジするとき、ブレーン・バニラ・オプションよりもヘッジが容易なものもあれば、困難なものもある。

ヘッジが比較的容易なエキゾチック・オプションの一つの例は、平均を計算する期間が全オプション期間となっているアベレージ・プライス・オプションである。時間の経過とともに、最終的な平均の計算に使われる資産価格のより多くが観測されて確定する。したがって、ペイオフの不確実性は時間の経過とともに減少することになる。その結果、このオプションは次第にヘッジしやすくなる。最後の数日間では、価格変動がペイオフに与える影響はほとんどなくなるので、このオプションのデルタは常にゼロに近くなる。

これに対し、バリア・オプションのヘッジは比較的困難である。通貨

(注14) E. Derman, D. Ergener, and I. Kani, "Static Options Replication," *Journal of Derivatives*, 2, 4 (Summer 1995) : 78-95 を参照。

(注15) 静的な複製の例については、筆者の Web サイトのテクニカルノート22を参照されたい。そこには、資産の分散率がその資産のポジションおよびその資産に対するアウト・オブ・ザ・マネー・オプションのポジションで複製可能なことが示されている。(24.4)式を導出するこの結果は、バリанс・スワップのヘッジに用いることができる。

のダウン・アンド・アウト・コール・オプションを、為替レートがパリアより0.0005だけ上回っている場合について考えてみよう。パリアに到達すると、オプションは無価値になる。パリアに到達しなければ、オプションはかなりの価値をもっている場合もある。このような場合、デルタはパリアで不連続となるため、従来のヘッジを行うことは非常に困難である。

オプションの静的な複製の基礎となる基本原理は次のようなものである。二つのポートフォリオの価値がある境界上で一致すれば、境界内の点でも一致するというものである。たとえば、配当のない株式に対する満期9カ月のアップ・アンド・アウト・コールについて考えよう。株価を50、行使価格を50、パリアを60、無リスク金利を年率10%、ボラティリティを年率30%とする。 $f(S, t)$ を時点 $t$ における株価が $S$ の場合のオプションの価値とする。複製ポートフォリオを構築する目的では、 $(S, t)$ 空間の境界はどんなものでもよい。便利なものとして、図24.1に示すような境界を選ぶ。その境界は $S=60$ 、 $t=0.75$ で定義される。境界上でのアップ・アンド・アウト・オプションの価値は、

$$f(S, 0.75) = \max(S - 50, 0) \quad S < 60 \text{ のとき}$$

$$f(60, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq 0.75 \text{ のとき}$$

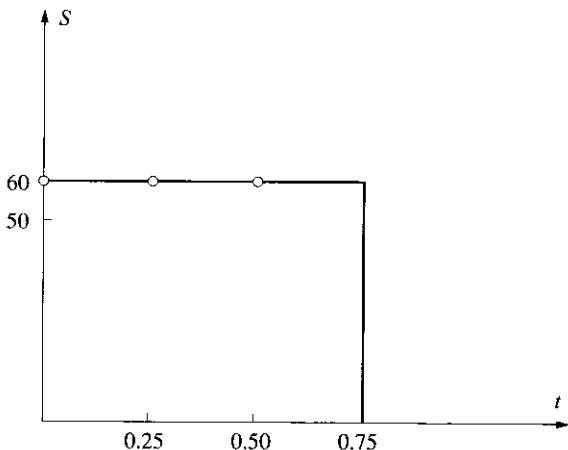
で与えられる。

通常のオプションを用いてこれらの境界値に近似的に一致させる方法はいくつもある。最初の境界値に一致するオプションとしては、満期9カ月、行使価格50のヨーロピアン・コールを選ぶのが自然である。したがって、複製ポートフォリオの最初の要素はこのオプション1単位となる（このオプションをオプションAと呼ぶ）。

$f(60, t)$ の境界値を合わせるのは、次のように行っていけばよい。

1. オプション期間を長さ $\Delta t$ の $N$ ステップに分割する
2. 時点 $N\Delta t$  (= 9カ月) に満期を迎える行使価格60のヨーロピアン・

図24.1 オプションの静的な複製で用いる境界点の例



コール・オプションを用いて、点  $\{60, (N-1)\Delta t\}$  における境界値に合わせる

3. 時点  $(N-1)\Delta t$  に満期を迎える行使価格60のヨーロピアン・コール・オプションを用いて、点  $\{60, (N-2)\Delta t\}$  における境界値に合わせる

ということを順に行っていく。オプションは、それまでに合わせた境界上で価値がゼロになるようなものが順番に選ばれていることに注意しよう（注16）。9カ月後に満期を迎える行使価格60のオプションの価値は、オプション A で値を合わせている縦の境界上ではゼロになっている。同様に、 $1 \leq i \leq N-1$ に対して、時点  $i\Delta t$  に満期を迎えるオプションの価値は、時点  $(i+1)\Delta t$  に満期を迎えるオプションで値を合わせた点  $\{60, i\Delta t\}$  上ではゼロになっている。

$\Delta t=0.25$  とすると、オプション A に加えて、複製ポートフォリオは 9 カ

(注16) 必ずしもこのような選び方をする必要はない。境界上の  $K$  個の点で値を合わせるために、 $K$  個のオプションを選び、 $K$  個の連立線形方程式を解いて必要となるオプションの数量を求めればよい。

月後、6カ月後、および3カ月後に満期を迎える行使価格60のヨーロピアン・オプションのポジションからなる。それらをそれぞれオプションB, C, Dと呼ぶこととする。仮定しているボラティリティと金利を用いると、点 $\{60, 0.5\}$ におけるオプションBの価値は4.33である。また、その点におけるオプションAの価値は11.54である。したがって、点 $\{60, 0.5\}$ における境界値を合わせるために、オプションBのポジションは $-11.54/4.33 = -2.66$ 必要となる。点 $\{60, 0.25\}$ におけるオプションCの価値は4.33である。また、その点におけるオプションAとBからなるポジションの価値は-4.21である。したがって、点 $\{60, 0.25\}$ における境界値を合わせるために、オプションCのポジションは $4.21/4.33 = 0.97$ 必要となる。同様の計算を行うと、点 $\{60, 0\}$ における境界値を合わせるのに必要なオプションDのポジションは0.28となる。

選ばれたポートフォリオを表24.1にまとめた(DerivaGem Application Builder の Sample Application F も参照)。ポートフォリオの価値は初期時点(時点ゼロ、株価50)では0.73である。本章のはじめのほうで示したアップ・アンド・アウト・コールの解析式による対応する価値は0.31である。複製ポートフォリオは2番目の境界上では3点でしかアップ・アンド・アウト・オプションに合わせていないので、両者は完全に同じものではない。同じ手順を用いて、2番目の境界上の18点で(半月ごとの満期のオプションを用いて)合わせるならば、複製ポートフォリオの価値は0.38に減少する。100点で合わせると、価値はさらに減少して0.32になる。

表24.1 アップ・アンド・アウト・オプションの複製に用いられたヨーロピアン・コール・オプションのポートフォリオ

| オプション | 行使価格 | 満期(年) | ポジション | 当初価格  |
|-------|------|-------|-------|-------|
| A     | 50   | 0.75  | 1.00  | +6.99 |
| B     | 60   | 0.75  | -2.66 | -8.21 |
| C     | 60   | 0.50  | 0.97  | +1.78 |
| D     | 60   | 0.25  | 0.28  | +0.17 |

デリバティブをヘッジするには、境界条件を複製したポートフォリオを売却すればよい。この場合、境界のどこかに達したときにポートフォリオは手仕舞わなければならない。

静的なオプションの複製には、デルタ・ヘッジに比べてリバランスを頻繁に行う必要がないという長所がある。この手法は広範囲のデリバティブに対して用いることができる。また、一致させる境界と使用するオプションの選択にはかなりの自由度がある。

## 要約

エキゾチック・オプションとは、標準的なオプションよりも複雑なペイオフをもつオプションである。12の異なる種類のエキゾチック・オプションについて論じてきた。それらは、パッケージ、標準的でないアメリカン・オプション、先スタート・オプション、コンパウンド・オプション、チューザー・オプション、バリア・オプション、バイナリー・オプション、ルックバック・オプション、シャウト・オプション、アジアン・オプション、エクスチェンジ・オプション、複数資産に関するオプションである。第13章でBlack-Scholes モデルを導出するのに用いたのと同じ仮定のもとで、エキゾチック・オプションを評価する方法について論じた。それらのいくつかは解析的に評価できるが、通常のヨーロピアン・コールやプットに対する解析式よりもずっと複雑な式になっている。解析的な近似式で評価できるものや、第19章で説明した数値計算法を拡張して評価できるものもある。エキゾチック・オプションを評価する数値計算法については第26章でさらに紹介する。

エキゾチック・オプションのなかには、対応する通常のオプションよりもヘッジが容易なものもあるが、むずかしいものもある。一般的に、アジアン・オプションは満期が近づくにつれてペイオフが次第に確定度を増していくので、ヘッジが容易である。それに対し、バリア・オプションはバリアの

ところでデルタが不連続となるため、ヘッジはむずかしい。エキゾチック・オプションをヘッジする一つの方法は、オプションの静的な複製として知られる方法で、ある境界上でエキゾチック・オプションと価値が一致するような通常のオプションからなるポートフォリオを見出す方法である。エキゾチック・オプションはこのポートフォリオを売却することでヘッジできる。

## 参考文献

- Carr, P., and R. Lee. "Realized Volatility and Variance: Options via Swaps," *Risk*, May 2007 : 76-83.
- Clewlow, L., and C. Strickland. *Exotic Options: The State of the Art*. London: Thomson Business Press, 1997.
- Demeterfi, K., E. Derman, M. Kamal, and J. Zou. "A Guide to Volatility and Variance Swaps," *Journal of Derivatives*, 6, 4 (Summer, 1999) : 9-32.
- Derman, E., D. Ergener, and I. Kani. "Static Options Replication," *Journal of Derivatives*, 2, 4 (Summer 1995) : 78-95.
- Geske, R. "The Valuation of Compound Options," *Journal of Financial Economics*, 7 (1979) : 63-81.
- Goldman, B., H. Sosin, and M.A. Gatto. "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High," *Journal of Finance*, 34 (December 1979) : 1111-27.
- Margrabe, W. "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another," *Journal of Finance*, 33 (March 1978) : 177-86.
- Milevsky, M.A., and S.E. Posner. "Asian Options: The Sum of Lognormals and the Reciprocal Gamma Distribution," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 3 (September 1998) : 409-22.
- Ritchken, P. "On Pricing Barrier Options," *Journal of Derivatives*, 3, 2 (Winter 1995) : 19-28.
- Ritchken, P., L. Sankarasubramanian, and A.M. Vrij. "The Valuation of Path Dependent Contracts on the Average," *Management Science*, 39 (1993) : 1202 -13.
- Rubinstein, M., and E. Reiner. "Breaking Down the Barriers," *Risk*, September

- 1991: 28-35.
- Rubinstein, M. "Double Trouble," *Risk*, December/January 1991/1992: 53-56.
- Rubinstein, M. "One for Another," *Risk*, July/August 1991: 30-32.
- Rubinstein, M. "Options for the Undecided," *Risk*, April 1991: 70-73.
- Rubinstein, M. "Pay Now, Choose Later," *Risk*, February 1991: 44-47.
- Rubinstein, M. "Somewhere Over the Rainbow," *Risk*, November 1991: 63-66.
- Rubinstein, M. "Two in One," *Risk*, May 1991: 49.
- Rubinstein, M. and E. Reiner. "Unscrambling the Binary Code," *Risk*, October 1991: 75-83.
- Stulz, R.M. "Options on the Minimum or Maximum of Two Assets," *Journal of Financial Economics*, 10 (1982) : 161-85.
- Turnbull, S.M., and L.M. Wakeman. "A Quick Algorithm for Pricing European Average Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26 (September 1991) : 377-89.

### 章末問題

- 24.1** 先スタート・オプションとチューザー・オプションとの違いを説明せよ。
- 24.2** 同じ満期のルックバック・コールとルックバック・プットからなるポートフォリオのペイオフを説明せよ。
- 24.3** 保有者が 2 年間いつでもヨーロピアン・コールまたはヨーロピアン・プットのいずれかを選択できる権利をもつチューザー・オプションを考える。コールとプットの満期と行使価格は、選択時点にかかわらず同じであるとする。2 年後よりも早期に選択するのが最適となることはあるか。その理由も説明せよ。
- 24.4**  $c_1$  と  $p_1$  を、それぞれ行使価格が  $K$  で満期が  $T$  のヨーロピアン・アベレージ・プライス・コールとヨーロピアン・アベレージ・プライス・プットの価格とし、 $c_2$  と  $p_2$  を満期が  $T$  のヨーロピアン・アベ

レージ・ストライク・コールとヨーロピアン・アベレージ・ストライク・プットの価格とし、 $c_3$ と $p_3$ を行使価格が $K$ で満期が $T$ の通常のヨーロピアン・コールとヨーロピアン・プットの価格とする。  
このとき、

$$c_1 + c_2 - c_3 = p_1 + p_2 - p_3$$

が成り立つことを示せ。

- 24.5** 本文では、ある種類のユーザー・オプションは満期 $T_2$ のコール・オプションと満期 $T_1$ のプット・オプションに分解できることが導かれている。同じオプションに対して、満期 $T_1$ のコール・オプションと満期 $T_2$ のプット・オプションへの別の分解を導け。
- 24.6** 24.6節では、ダウン・アンド・アウト・コール・オプションに対して二つの評価式が与えられている。最初の評価式はパリア $H$ が行使価格 $K$ 以下の場合に適用されるものである。2番目の評価式は $H \geq K$ の場合に適用されるものである。 $H = K$ のとき、これら二つの評価式は同じものになることを示せ。
- 24.7** パリアが行使価格より大きいとき、ダウン・アンド・アウト・プットの価値がゼロになる理由を説明せよ。
- 24.8** 配当のない株式に対するアメリカン・コール・オプションの行使価格が $g$ の割合で大きくなるとする。このとき、 $g$ が無リスク金利 $r$ より小さいならば、期限前行使は最適とはなりえないことを示せ。
- 24.9** 配当のない株式に対する先スタート・プット・オプションで、行使価格がオプション開始時点における株価より10%高い価格に設定される場合の価値を求めよ。
- 24.10** 株価が幾何ブラウン運動に従うとするとき、時点ゼロから時点 $t$ までの株価の算術平均 $A(t)$ はどのような過程に従うか。
- 24.11** アジアン・オプションのデルタ・ヘッジは通常のオプションのデルタ・ヘッジより容易である理由を説明せよ。
- 24.12** 100オンスの銀を1オンスの金と交換する満期1年のヨーロピアン・オプションの価格を求めよ。ただし、現在の金と銀の価格はそれぞ

れ380ドルと4ドル、無リスク金利は年率10%，二つの価格のボラティリティはどちらも20%，相関係数は0.7とする。また、保管コストは無視するものとする。

- 24.13** ある資産に関するヨーロピアン・ダウン・アンド・アウト・オプションの価値は、満期が同じその資産の先物契約の価格に対するダウン・アンド・アウト・オプションの価値と同じになるか。
- 24.14** コンパウンド・オプションに関する以下の間に答えよ。
- (a) コールに対するヨーロピアン・コールとヨーロピアン・プットの間には、どのようなプット・コール・パリティが成り立つか。  
また、本文にある価格式がその関係を満たすことを示せ。
  - (b) プットに対するヨーロピアン・コールとヨーロピアン・プットの間には、どのようなプット・コール・パリティが成り立つか。  
また、本文にある価格式がその関係を満たすことを示せ。
- 24.15** 最小値を決めるための資産価格の観測回数を増加させたとき、変動ルックバック・コールの価値は大きくなるか、それとも小さくなるか。
- 24.16** バリアを横切ったかを決めるための資産価格の観測回数を増加させたとき、ダウン・アンド・アウト・コールの価値は大きくなるか、それとも小さくなるか。同じことをダウン・アンド・イン・コールについても答えよ。
- 24.17** 通常のヨーロピアン・コールは、ダウン・アンド・アウト・ヨーロピアン・コールとダウン・アンド・イン・ヨーロピアン・コールの和に等しい理由を説明せよ。同じことはアメリカン・コールに対しても成り立つか。
- 24.18** S&P500指数が6カ月後に1,000を超えている場合に100ドルを支払い、そのほかの場合には何も支払わないというデリバティブの価値を求めよ。ただし、現在の指標の水準を960、無リスク金利を年率8%，指標の配当利回りを年率3%，指標のボラティリティを年率20%とする。

- 24.19** 銀先物に対する満期 3 カ月、行使価格が 1 オンス当り 20 ドル、バリアが 18 ドルのダウン・アンド・アウト・コール・オプションについて考える。現在の先物価格を 19 ドル、無リスク金利を 5 %、銀先物のボラティリティを年率 40 % とする。このオプションの仕組みを説明し、その価値を求めよ。また、銀先物に対する同じ条件の通常のオプションの価値と、銀先物に対する同じ条件のダウン・アンド・イン・コール・オプションの価値を求めよ。
- 24.20** 株価指数に対する満期 9 カ月の新規のヨーロピアン変動ルックバック・コール・オプションについて考える。指数の現在の水準を 400、無リスク金利を年率 6 %、指数の配当利回りを年率 4 %、指数のボラティリティを年率 20 % とする。DerivaGem ソフトウェアを用いてこのオプションを評価せよ。
- 24.21** 配当のない株式に対する満期 6 カ月の新規のヨーロピアン・アベレージ・プライス・コール・オプションの価値を求めよ。ただし、現在の株価を 30 ドル、行使価格を 30 ドル、無リスク金利を 5 %、ボラティリティを 30 % とする。
- 24.22** DerivaGem ソフトウェアを用いて以下のオプションの価値を計算せよ。
- 配当のない株式に対する通常のヨーロピアン・コール・オプション。ただし、株価を 50 ドル、行使価格を 50 ドル、無リスク金利を年率 5 %、ボラティリティを 30 %、満期を 1 年とする。
  - (a)と同じ条件でバリアが 45 ドルのダウン・アンド・アウト・ヨーロピアン・コール。
  - (a)と同じ条件でバリアが 45 ドルのダウン・アンド・イン・ヨーロピアン・コール。
- さらに、(a)のオプションの価値が(b)と(c)のオプションの価値の和に等しいことを示せ。
- 24.23** (a)24.8節のルックバック・コール・オプションの価格式、および(b)24.10節の  $M_1$  と  $M_2$  に関する式に対して、 $r = q$  の場合に必要となる

調整について説明せよ。

- 24.24** 24.13節の例24.3において、行使価格が800, 850, 900, 950, 1,000, 1,050, 1,100, 1,150, 1,200のオプションに対するインプライド・ボラティリティをそれぞれ20%, 20.5%, 21%, 21.5%, 22%, 22.5%, 23%, 23.5%, 24%と仮定して、バリアンス・スワップを評価せよ。

## 宿題

- 24.25** 1年後にドル／英ポンド為替レートが1.5000を超えている場合にのみ10,000ポンドを支払うデリバティブのドル建て価値を求めよ。ただし、現在の為替レートを1.4800、ドルと英ポンドの無リスク金利をそれぞれ年率4%と8%、為替レートのボラティリティを年率12%とする。
- 24.26** 配当のない株式に対するアップ・アンド・アウト・バリア・コール・オプションについて考える。株価を50ドル、行使価格を50ドル、ボラティリティを年率30%，無リスク金利を年率5%，満期を1年、バリアを80ドルとする。オプションを評価するソフトウェアを用いて、(a)オプション価格と株価の関係、(b)デルタと株価の関係、(c)オプション価格と満期の関係、(d)オプション価格とボラティリティの関係についてグラフを作成せよ。また、得られた結果について直感的な説明を与えよ。さらに、アップ・アンド・アウト・コール・オプションのデルタ、ガンマ、セータ、およびベガが、正にも負にもなりうることを示せ。
- 24.27** DerivaGem Application Builder の Sample Application F では、24.14節のオプションの静的な複製の例が扱われている。そこでは、4個のオプションを用いた（24.14節のような）ヘッジの構築方法と

16個のオプションを用いた2通りのヘッジの構築方法が示されている。

- (a) 16個のオプションを用いた2通りのヘッジ方法の違いについて説明せよ。また、2番目の方法のほうがうまくいく理由を直感的に説明せよ。
- (b) 四つのオプションを用いたヘッジ方法で、3番目と4番目のTmatを変化させてヘッジを改善せよ。
- (c) 16個のオプションを用いたポートフォリオに関して、デルタ、ガンマ、ベガについてバリア・オプションとどの程度よく一致しているかを確認せよ。

- 24.28** 通貨に対するダウン・アンド・アウト・コール・オプションについて考える。初期時点における為替レートを0.90、満期を2年、行使価格を1.00、バリアを0.80、国内無リスク金利を年率5%，外国無リスク金利を年率6%，ボラティリティを年率25%とする。このとき、DerivaGem ソフトウェアを使って、5個のオプションを用いたオプションの静的な複製戦略を構築せよ。
- 24.29** 現在の株価指数を900、配当利回りを2%，無リスク金利を5%，ボラティリティを40%とする。このとき、付録の結果を用いて満期1年のアベレージ・プライス・コールの価値を計算せよ。ただし、行使価格は900、平均は各四半期末の指数の値を用いて計算されるものとする。また、価格が連続的に観測される場合の満期1年のアベレージ・プライス・オプションの価格をDerivaGem ソフトウェアを用いて計算し、先に求めた値をこの価格と比較せよ。二つの価格の違いについて直感的な説明を与えよ。
- 24.30** DerivaGem Application Builder を用いて、(a)表17.2および表17.3で考察したオプションと、(b)同じ条件のアベレージ・プライス・コール・オプションに対して、日次デルタ・ヘッジの効果を比較せよ。シミュレーションには Sample Application C を用いよ。アベレージ・プライス・オプションに対しては、セルC16のオプション

価格，セル H15と H16のペイオフ，およびデルタ（セル G46から G186とセル N46から N186）の計算を変更する必要がある。各オプションに対して，F9を繰り返し押して，モンテカルロ・シミュレーションを20回実行せよ。各実行において，オプションの売却コストとヘッジコスト，全20週間の取引量，第11週から第20週の間の取引量を記録せよ。その結果について解説せよ。

- 24.31 DerivaGem Application Builder の Sample Application D を修正して，外国通貨100,000単位に対するコール・オン・コール・コンパウンド・オプションのデルタおよびガンマ・ヘッジの効果について検証せよ。ただし，為替レートは0.67，国内無リスク金利は5%，外国無リスク金利は6%，ボラティリティは12%とする。また，最初のオプションは20週後に満期を迎える，行使価格は0.015とする。2番目のオプションは40週後に満期を迎える，行使価格は0.68とする。セルをどのように変更したかを説明し，ヘッジの効果について解説せよ。
- 24.32 アウトパフォーマンス証書 (outperformance certificate : sprint certificate や accelerator certificate, speeder とも呼ばれる) は，欧州の多くの銀行が投資家に提案している，ある企業の株式に投資する一つの方法である。当初投資額は株価  $S_0$  に等しい。時点 0 から時点  $T$  までの間に株価が上昇した場合は，投資家は時点  $T$  においてその上昇の  $k$  倍の利益を得る。ここで  $k$  は 1.0 より大きい定数である。ただし，時点  $T$  における利益を計算する際の株価には，ある上限  $M$  が設定されている。株価が下落した場合は，投資家はその下落に等しい損失を被る。また，投資家は配当を受け取れない。
- アウトパフォーマンス証書がパッケージであることを示せ。
  - DerivaGem ソフトウェアを用いて，満期 1 年のアウトパフォーマンス証書の価値を計算せよ。ただし，株価は50ユーロ， $k=1.5$ ， $M=70$ ユーロ，無リスク金利は5%，株価のボラティリティは25%とする。また，0.5ユーロの配当が 2 カ月後，5 カ月

後、8カ月後、11カ月後に予想されているとする。

- 24.33** バリアンス・スワップを評価する24.13節の例24.3での分析を、スワップの期間を3カ月ではなく1カ月として実施せよ。

## 付 錄

### バスケット・オプションとアジアン・オプションの評価のためのモーメント計算

まず、リスク中立世界での将来時点  $T$  における資産バスケットの価値に対する 1 次と 2 次のモーメント計算について考えよう。バスケットを構成する各資産の価格は対数正規分布に従うと仮定する。以下の記号を用いる。

$n$  : 資産の数

$S_i$  : 時点  $T$  における  $i$  番目の資産の価値<sup>(注17)</sup>

$F_i$  :  $i$  番目の資産に対する満期  $T$  のフォワード価格

$\sigma_i$  :  $i$  番目の資産の時点ゼロから時点  $T$  までのボラティリティ

$\rho_{ij}$  :  $i$  番目と  $j$  番目の資産の収益率間の相関

$P$  : 時点  $T$  におけるバスケットの価値

$M_1$  : リスク中立世界での  $P$  の 1 次モーメント

$M_2$  : リスク中立世界での  $P$  の 2 次モーメント

$\hat{E}$  をリスク中立世界での期待値とするとき、 $P = \sum_{i=1}^n S_i$ ,  $\hat{E}(S_i) = F_i$ ,  $M_1 = \hat{E}(P)$ ,  $M_2 = \hat{E}(P^2)$  となるので、

$$M_1 = \sum_{i=1}^n F_i$$

となる。また、

$$P^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n S_i S_j$$

となる。対数正規分布の性質より、

(注17)  $i$  番目の資産がある株式で、バスケットにその株式がたとえば200株含まれる場合は、 $i$  番目の「資産」を（この付録の前半では）その株式200株として定義し、 $S_i$  でその株式200株の価値を表す。

$$\hat{E}(S_i S_j) = F_i F_j e^{\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j T}$$

が成り立つので、

$$M_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F_i F_j e^{\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j T}$$

が得られる。

### アジアン・オプション

次に、平均値が離散的な観測値に基づいている場合に、リスク中立世界における資産の算術平均価格の1次と2次のモーメントを求める問題について考える。資産価格は時点  $T_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) に観測されると仮定する。変数を以下のように再定義する。

$S_i$  : 時点  $T_i$  における資産の価値

$F_i$  : 資産に対する満期  $T_i$  のフォワード価格

$\sigma_i$  : 資産に対する満期  $T_i$  のオプションのインプライド・ボラティリティ

$\rho_{ij}$  : 資産の時点  $T_i$  までの収益率と時点  $T_j$  までの収益率との相関

$P$  : 算術平均

$M_1$  : リスク中立世界での  $P$  の1次モーメント

$M_2$  : リスク中立世界での  $P$  の2次モーメント

この場合、

$$M_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m F_i$$

となる。また、

$$P^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m S_i S_j$$

となり、

$$\hat{E}(S_i S_j) = F_i F_j e^{\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \sqrt{T_i T_j}}$$

となる。 $i < j$  のとき、

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_i \sqrt{T_i}}{\sigma_j \sqrt{T_j}}$$

となることが示せるので、

$$\hat{E}(S_i S_j) = F_i F_j e^{\sigma_i^2 T_i}$$

となり、

$$M_2 = \frac{1}{m^2} \left( \sum_{i=1}^m F_i^2 e^{\sigma_i^2 T_i} + 2 \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{j-1} F_i F_j e^{\sigma_i^2 T_i} \right)$$

が得られる。

## 第25章

# 天候, エネルギー, 保険デリバティブ

天候、エネルギー、保険デリバティブは、商品市場で最も一般的なデリバティブの一つです。これらの商品は、天候やエネルギー資源の価格変動に対するリスクを軽減する目的で開発されました。また、保険デリバティブも同様に、リスクを軽減する目的で開発されました。

天候デリバティブは、天候の変動による農産物の収量や品質の変動に対するリスクを軽減する目的で開発されました。また、エネルギーデリバティブは、エネルギー資源の供給や需要の変動による価格変動に対するリスクを軽減する目的で開発されました。

保険デリバティブは、保険料の支払いに対するリスクを軽減する目的で開発されました。また、デリバティブは、商品の販売や購入に対するリスクを軽減する目的で開発されました。

これらのデリバティブは、商品市場で最も一般的なデリバティブの一つです。また、デリバティブは、商品市場で最も一般的なデリバティブの一つです。

デリバティブ契約の原資産变数で最も一般的なものは、株価、株価指数、為替、金利、および商品価格である。これらの变数に対する先物、フォワード、オプション、およびスワップ契約は著しく成功をおさめてきた。第23章で論じたように、クレジット・デリバティブも近年非常に多く取引されるようになってきた。第24章でみたように、ペイオフを定義する標準的でない（すなわち、エキゾチックな）仕組みを開発することによっても、ディーラーはデリバティブ市場を拡大してきた。本章では、市場を拡大するもう一つの方法について論じる。その方法とは、新しい原資産变数に対するデリバティブを取引することである。

本章では、天候リスク、エネルギー価格リスク、および保険リスクを管理するために開発されてきた商品について考察する。これから説明する市場には、発展の初期段階にあるものもある。市場が成熟するにつれて、提供され

る商品とその利用方法の双方において顕著な変化が起きると思われる。

## 25.1 價格付け問題についての再検討

第11章と第13章ではリスク中立化法について説明した。これは、投資家はリスク中立であるという仮定のもとでデリバティブの価格付けを行う手法である。期待ペイオフをリスク中立世界で計算し、それを無リスク金利で割り引くことによって価格が計算される。この手法によって、リスク中立世界だけでなく、その他のすべての世界においても正しい価格が得られる。

ときどき用いられる価格付け手法に、過去データを用いて期待ペイオフを計算し、それを無リスク金利で割り引くことで価格を求める方法がある。これを過去データ法と呼ぶことにする。過去データを用いて得られるのは、実世界での期待ペイオフの推定値である。したがって、過去データ法が正しいのはデリバティブの期待ペイオフが実世界とリスク中立世界で同じときのみである。

11.7節でみたように、実世界からリスク中立世界へ移ると、変数のボラティリティは同じままであるが、期待成長率は変化することが多い。たとえば、株価指数の期待成長率は実世界からリスク中立世界へ移ると、おそらく4%から5%減少する。変数の変化率が株式市場の収益率と相関をもたず、変数がシステムティック・リスクをもたないならば、変数の期待成長率は実世界とリスク中立世界とで同じであると仮定してもよい。したがって、すべての原資産変数がシステムティック・リスクをもたない場合には、過去データ法を用いてデリバティブの正しい評価が得られる。本章で考察するほとんどのデリバティブに共通の性質は、原資産変数がシステムティック・リスクをもたないと仮定しても問題ないということであり、過去データ法を用いることができるということである。

## 25.2 天候デリバティブ

多くの企業は天候によって業績が悪化する可能性がある(注1)。これらの企業にとって、為替リスクや金利リスクのヘッジと同じように天候リスクのヘッジを検討することは理にかなっている。

最初の店頭天候デリバティブ取引は、1997年に行われた。その仕組みを理解するために、二つの変数：

HDD：暖房度日（Heating Degree Day）

CDD：冷房度日（Cooling Degree Day）

について説明する。ある1日のHDDは、

$$\text{HDD} = \max(0, 65 - A)$$

で定義され、CDDの定義は、

$$\text{CDD} = \max(0, A - 65)$$

で定義される。ここでAは、指定された気象観測所におけるその日の最高気温と最低気温（華氏）の平均である。たとえば、1日（午前0時から午前0時まで）の最高気温が華氏68°、最低気温が華氏44°の場合、 $A=56$ となる。したがって、日次HDDは9、日次CDDは0となる。

典型的な店頭商品は、月間の累積HDDやCDD（月中の日次HDDまたは日次CDDの合計）に依存するフォワードやオプションである。たとえば、デリバティブ・ディーラーは顧客に対して、2009年2月のシカゴのオヘア空港の気象観測所における累積HDDに対する行使価格700、1暖房度日当たり1万ドルを支払うコール・オプションを2008年1月時点で売却したりする。この場合、累積HDDの実際の観測値が820ならば、ペイオフは120万ドルになる。契約にキャップがついていることも多い。いまの例で150万ドルのキャップがついているならば、この取引はブル・スプレッドと同じである。顧客は累積HDDに対して、行使価格700のコール・オプションの買いポジションと行使価格850のコール・オプションの売りポジションを保有してい

---

(注1) 米国エネルギー省は、米国経済のうち7分の1は天候リスクにさらされていると推定している。

ることになる。

HDD は暖房に必要なエネルギー量の目安である。CDD は冷房に必要なエネルギー量の目安である。ほとんどの天候デリバティブ契約は、エネルギー生産者とエネルギー消費者が取引している。しかし、小売業者、スーパーマーケット・チェーン店、飲食物の製造業者、医療サービス企業、農業、レジャー関連企業も天候デリバティブの潜在的な利用者である。天候リスク・マネジメント協会（WRMA：Weather Risk Management Association, [www.wrma.org](http://www.wrma.org)）は、天候リスク・マネジメント業界のために結成された団体である。

1999年9月、シカゴ・マーカンタイル取引所（CME）は天候先物取引と天候先物のヨーロピアン・オプション取引を開始した。それらの契約は、ある気象観測所<sup>(注2)</sup>における1カ月間の累積HDDとCDDに対するものである。契約はHDDとCDDが確定する月末直後に差金決済される。先物の取引単位は、累積HDDまたはCDDの100ドル倍である。HDDとCDDは、自動データ収集機を用いてEarth Satellite Corporationという企業が計算している。

特定の地点における気温がシステムティック・リスクをもたないとすることは、妥当な仮定である。したがって、25.1節より天候デリバティブは過去データ法を用いて値付けできる。先のシカゴ・オヘヤ空港における2009年2月のHDDに対するコール・オプションについて考えよう。たとえば過去50年のデータを集めることによって、2月のHDDの確率分布が推定できる。この分布を用いると、オプションのペイオフの確率分布が得られる。その分布の平均を無リスク金利で割り引いたものが、オプションの価値の推定値となる。気温のトレンドに対して、確率分布を調整することが望ましいかもしれない。たとえば線形回帰を行うと、2月のHDDは（おそらく地球温暖化のために）平均で年4の割合で減少しているという結果が得られたとする。

(注2) CMEは10地点の異なる気象観測所（アトランタ、シカゴ、シンシナティ、ダラス、デモイン、ラスペガス、ニューヨーク、フィラデルフィア、ポートランド、トゥーソン）に対する取引を上場している。

その場合、回帰の結果を用いて2009年2月におけるHDDのトレンド調整後の確率分布を推定することができる。

### 25.3 エネルギー・デリバティブ

エネルギー企業は、最も活発で洗練されたデリバティブの利用者の一つである。多くのエネルギー関連金融商品が、店頭市場と取引所の両方で取引されている。本節では、原油、天然ガス、および電力のデリバティブについて考察する。

#### 原　油

原油は世界で最も重要な商品の一つで、全世界で日に約8,000万バレルの需要がある。10年固定価格で原油を供給する契約が、店頭市場では長年ごくふつうに取引されてきた。これは、固定価格の原油と変動価格の原油を交換するスワップである。

1970年代には原油価格の変動は非常に大きかった。1973年の中東戦争によって、原油価格は3倍になった。1970年代後半には、イラン国王の失権によって再び原油価格が上昇した。こうした一連の出来事を通じて、原油の生産者と利用者は原油価格リスクを管理するより洗練されたツールの必要性を認識することになった。その結果、1980年代に入って店頭市場と取引所市場の両方でこうしたニーズを満たす商品が開発された。

店頭市場では、普通株や株価指数に対して取引されているどんな種類のデリバティブでも、いまでは原油を原資産とするデリバティブとして実質的に取引可能である。スワップ、フォワード契約、およびオプションはよく取引されている。差金決済の契約もあれば、現物決済（すなわち原油の受渡しによる決済）の契約もある。

取引所取引も活発に行われている。ニューヨーク・マーカンタイル取引所(NYMEX)と国際石油取引所(IPE: International Petroleum Exchange)では、数多くの原油先物や先物オプションが取引されている。先物契約には、

差金決済されるものと現物決済されるものがある。たとえば、IPEで取引されているブレント原油先物はブレント指数に基づいて差金決済されるが、NYMEXで取引されている軽質スイート原油先物は現物決済される。どちらの取引単位も1,000バレルである。NYMEXでは、暖房油とガソリンという二つの精製油もよく取引されている。どちらの取引単位も42,000ガロンの受渡しである。

## 天然ガス

世界中の天然ガス業界は、規制緩和と専売排除の時代を経験してきた。現在では、天然ガスの供給者は必ずしも天然ガスの生産者と同一ではない。天然ガスの供給者は、日々の需要に対応するという問題に直面している。

典型的な店頭取引は、1カ月間に指定された量の天然ガスをほぼ一様な流量で受け渡す契約である。フォワード契約、オプション、およびスワップが店頭市場で取引可能である。天然ガスの売手は、通常パイプラインで指定された場所まで天然ガスを輸送する義務がある。

NYMEXでの取引単位は、100億英国熱量単位の天然ガスの受渡しである。この契約では、手仕舞われなかった場合には、受渡月の間に米国ルイジアナ州の特定のハブへほぼ一様な流量で輸送する現渡しが必要となる。IPEでは、ロンドンで同様の契約が取引されている。

## 電 力

電力は貯蔵できない(注3)という点で、他のものとは異なる商品である。ある地域における任意の瞬間の最大電力供給量は、その地域にあるすべての電力発電所の最大電力供給量によって決まる。米国には制御地域(control area)と呼ばれる140の地域がある。需要と供給はまず制御地域内で突き合わされ、過剰な電力は他の制御地域に売却される。この余剰電力が電力の卸

(注3) 余剰電力のある電力会社はそれを用いて水を水力発電所の上まで汲み上げ、後でそれを用いて発電できるようにしている。電力の貯蔵に関して現時点でできるのは、せいぜい、こうしたことである。

売市場で扱われる商品となっている。ある制御地域が別の制御地域に電力を売却できる能力は、制御地域間の送電線の容量に依存している。ある地域からある地域への送電には送電線の所有者から請求される送電費用がかかり、一般的に送電損失やエネルギー損失を伴う。

電力は主に空調システムに使われている。その結果、冬場よりも夏場のほうが電力需要ははるかに大きく、したがって電力価格ははるかに高い。電力は貯蔵できないため、ときおりスポット価格は大きく変動することがある。熱波によってスポット価格は短期間に1,000%も上昇する、ことが知られている。

天然ガスと同様に、電力も規制緩和と専売排除の時代を経験してきた。この流れに伴って、電力デリバティブ市場は発展してきた。現在では、NYMEXに電力価格に対する先物契約が上場されており、店頭市場ではフォワード契約、オプション、およびスワップが活発に取引されている。典型的な契約は（取引所取引でも店頭取引でも）、契約当事者の一方が特定の月に指定された場所で、指定されたメガワット時の電力を指定された金額で受け取ることができるというものである。 $5 \times 8$  契約は、指定された月のピークでない時間帯（午後11時から午前7時まで）に週5日間（月から金まで）電力を受け取る取引である。 $5 \times 16$  契約は、指定された月のピークの時間帯（午前7時から午後11時まで）に週5日間電力を受け取る取引である。 $7 \times 24$  契約は、指定された月に毎日24時間電力を受け取る取引である。オプション取引には、日単位で行使可能なものと月単位で行使可能なものがある。日単位行使の場合は、オプション保有者は対象月の間、あらかじめ定められた電力量をあらかじめ定められた行使価格で受け取ることを（1日前に通知すれば）日々選択できる。月単位行使の場合は、あらかじめ定められた行使価格で1ヵ月間電力を受け取るかどうかの1回限りの判断を、月初に行うことになる。

電力と天然ガス市場には、スイング・オプション（swing option）もしくはテイク・アンド・ペイ・オプション（take-and-pay option）と呼ばれる興味深い契約がある。この契約では、オプション保有者がある価格で購入しな

ければならない 1 カ月間の日次電力もしくは月間総電力に対する最低量と最大量が定められている。オプション保有者はその 1 カ月間に購入する電力量を変更する（もしくはスイングする）ことができるが、変更回数には制限が設けられていることが多い。

### エネルギー価格のモデル

エネルギーとその他の商品価格に対する現実的なモデルは、平均回帰性とボラティリティをもつことが望ましい。考えられるモデルの一つは、

$$d\ln S = [\theta(t) - a\ln S] dt + \sigma dz \quad (25.1)$$

とするものである。ここで  $S$  はエネルギー価格、 $a$  と  $\sigma$  は定数パラメータである。これは、第30章で説明する金利モデルと同様のモデルである。パラメータ  $\sigma$  は  $S$  のボラティリティで、 $a$  は長期平均に回帰する速度を表している。 $\theta(t)$  の項で季節要因とトレンドを表現することができる。第33章では、先物価格から推定された  $\theta(t)$  を用いて、(25.1)式で表されるモデルに対する三項ツリーの構築方法を説明する。その際に、パラメータ  $a$  と  $\sigma$  は過去データまたはデリバティブの価格から推定できる。

パラメータ  $a$  と  $\sigma$  はエネルギーの種類によって異なる。原油に対しては、(25.1)式の平均回帰率  $a$  は約 0.5、ボラティリティ  $\sigma$  は約 20% である。天然ガスに対しては、 $a$  は約 1.0、 $\sigma$  は約 40% である。電力に対しては、 $a$  は一般的に 10 から 20 の間、 $\sigma$  は 100% から 200% の間である。また、電力価格の季節性は他と比べて大きい（注4）。

### エネルギー生産者にとってのリスクヘッジ

エネルギー生産者の直面するリスクには、二つの要素がある。一つは価格リスクであり、もう一つは需要量リスクである。エネルギーの価格は需要に応じて調整されるが、それらの関係は完全ではないため、エネルギー生産者は両方を考慮してヘッジ戦略を検討しなければならない。価格リスクについて

---

(注4) エネルギー商品価格の挙動の詳細については D. Pilipovic, *Energy Risk*, New York : McGraw-Hill, 1997 を参照。

では、本節で論じたエネルギー・デリバティブを用いてヘッジ可能である。需要量リスクについては、前節で論じた天候デリバティブを用いてヘッジ可能である。

以下の記号を用いる。

$Y$ ：月間の収益

$P$ ：月間の平均エネルギー価格

$T$ ：当該月の気温関連変数（HDD もしくは CDD）

エネルギー生産者は過去データを用いて、

$$Y = a + bP + cT + \varepsilon$$

という形の最も適合した線形回帰式を求めることができる。ここで  $\varepsilon$  は誤差項である。エネルギー生産者は  $-b$  に対応するエネルギー・フォワード契約または先物契約のポジションをとり、 $-c$  に対応する天候フォワード契約または先物契約のポジションをとることによって、当該月のリスクをヘッジできる。この関係式は他のオプション戦略の有効性の分析にも利用できる。

## 25.4 保険デリバティブ

デリバティブ契約がヘッジ目的で使われる場合、それは保険契約と多くの似たような特性をもっている。両契約とも、不利益な事象に対する防御を提供するように設計されている。多くの保険会社がデリバティブを取引する子会社を保有し、保険会社の多くの活動が投資銀行の活動に非常に似てきたことは驚くべきことではない。

保険業界は伝統的に再保険として知られる方法を用いて、ハリケーンや地震などの大災害（CAT）リスクに対するエクスポージャーをヘッジしてきた。再保険契約にはさまざまな形態がある。たとえば、ある保険会社がカリフォルニアの地震に対して 1 億ドルのエクspoージャーを保有しており、それを 3,000 万ドルに抑えたいと考えているとしよう。一つの方法は、責任を比例分担してエクspoージャーの 70% を補償するような年単位の再保険契約を締結することである。その場合、ある年のカリフォルニアの地震に関して

総額5,000万ドルの請求があったならば、その保険会社の負担は $0.3 \times 5,000$ 万ドル、すなわち1,500万ドルのみになる。再保険料がもっと安いより一般的な方法は、各超過損害レベル（excess cost layer）を補償する一連の再保険契約を購入する方法である。たとえば、最初のレベルは3,000万ドルから4,000万ドルの損害に対する補償を行い、2番目のレベルは4,000万ドルから5,000万ドルの損害に対する補償を行う、といったものである。それぞれの再保険契約は超過損害額（excess-of-loss）再保険契約として知られている。この契約は、再保険業者が総損害額に対するブル・スプレッドを売却したことになる。このブル・スプレッドは、レベルの下限に等しい行使価格のコール・オプションの買いと、レベルの上限に等しい行使価格のコール・オプションの売りからなる（注5）。

CAT再保険の主要な供給者は、従来は再保険会社およびロイズ保険組合（富裕個人による無限責任のシンジケート）であった。近年保険業界では、再保険に対するニーズはこれらの伝統的な供給元が提供できる補償範囲を超えてしまっているとの結論に達した。その結果、資本市場から再保険を調達する新しい方法を模索し始めた。保険業界がそれまでの慣習を再考することになったきっかけは、フロリダに約150億ドルもの被害をもたらした1992年のハリケーン・アンドリューである。これは、過去7年にフロリダで支払われた保険料総額を超えるものであった。もしハリケーン・アンドリューがマイアミを直撃していたならば、損害補償額は400億ドルを超えていただろうと推測されている。ハリケーン・アンドリューやその他の大災害は、保険や再保険の保険料高騰につながった。

上場保険先物契約がCBOTで開発されたが、あまり成功しなかった。店頭市場では、伝統的な再保険にかわる多くの商品が考案された。最も人気を集めた商品はCAT債である。これは、保険会社の子会社が発行する高利回りの債券である。その高金利と引き換えに、債券の保有者が超過損害額再保

(注5) 損害が一定レベルに達すると定額が支払われるという形態の再保険も行われている。この場合、再保険提供者は損害に対するキャッシュ・オア・ナッシング・バイナリー・コール・オプションを売却したことと同じになる。

険契約を提供する仕組みになっている。CAT債の条項に基づいて、金利または元本（もしくは双方）が損害請求に充当される。上述の例で、保険会社が3,000万ドルから4,000万ドルまでのカリフォルニア地震による損害に対して補償を得たい場合、その保険会社は額面総額1,000万ドルのCAT債を発行するかもしれない。その場合、保険会社のカリフォルニア地震による損害が3,000万ドルを超えると、債券保有者は元本の一部もしくは全額を失うことになる。別 の方法として、債券保有者の金利部分にのみリスクがある債券の大型起債を行うことによって、保険会社はこの超過損害額に対する補償を得ることも可能である。

一般的に、CAT債では通常より高い利子が支払われる確率は高く、大きな損失が生じる確率は小さい。なぜ投資家はこのような商品に興味をもつのであろうか。それは、CATリスクと市場リターンとの間に、統計的に有意な相関関係がないからである（注6）。したがって、CAT債は投資家のポートフォリオに加える商品として魅力的なのである。システムティック・リスクがないため、大きなポートフォリオではリスクは全体として完全に分散除去可能である。CAT債の期待収益率が無リスク金利より大きいならば（一般的にはそうであるが）、リスクリターンのトレードオフを改善できる可能性がある。

## 要 約

本章では、管理すべきリスクが存在するとき、デリバティブ市場は市場参加者のニーズに合った商品を開発するうえできわめて革新的であることを紹介してきた。

---

(注6) R.H. Litzenberger, D.R. Beaglehole, and C.E. Reynolds, "Assessing Catastrophe Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class," *Journal of Portfolio Management*, Winter (1996) : 76-86 を参照。

天候デリバティブ市場では、月中の気温を表す二つの指標、HDDとCDDが開発された。これらは、上場デリバティブと店頭デリバティブの両方でペイオフの定義に用いられている。天候デリバティブ市場が発展するにつれて、雨量や積雪量、その他同様の変数に対する契約がごく普通に取引されるようになることに疑いの余地はない。

エネルギー市場では、原油デリバティブが長い間重要な位置を占め、原油生産者と原油消費者が価格リスクを管理するのに中心的な役割を担ってきた。天然ガス・デリバティブと電力デリバティブは比較的新しい取引である。これらの商品はそれらの市場の規制緩和と専売排除に伴い、リスク管理のために重要性が高まった。

保険デリバティブは、保険会社がハリケーンや地震などの大災害リスクを管理する方法として、伝統的な再保険にかわるものとして取引され始めてきた。市場が発展するにつれて、その他の保険（生命保険や自動車保険など）も同様に証券化されていくのは確実であろう。

ほとんどの天候、エネルギー、および保険デリバティブは、原資産の変化率が市場リターンと無視できるほどの相関しかないという特性がある。したがってこれらのデリバティブは、過去データを用いて期待ペイオフを計算し、それを無リスク金利で割り引くことで評価が可能である。

## 参考文献

### ○天候デリバティブについて

Arditti, F., L. Cai, M. Cao, and R. McDonald. "Whether to Hedge," *Risk, Supplement on Weather Risk* (1999) : 9-12.

Cao, M., and J. Wei. "Weather Derivatives Valuation and the Market Price of Weather Risk," *Journal of Futures Markets*, 24, 11 (November 2004) : 1065-89.

Hunter, R. "Managing Mother Nature," *Derivatives Strategy*, February (1999).

### ○エネルギー・デリバティブについて

Clewlow, L., and C. Strickland. *Energy Derivatives : Pricing and Risk Management*, Lacima Group, 2000.

Eydeland, A., and H. Geman. "Pricing Power Derivatives," *Risk*, October (1998) : 71-73.

Joskow, P. "Electricity Sectors in Transition," *The Energy Journal*, 19 (1998) : 25-52.

Kendall, R. "Crude Oil : Price Shocking," *Risk*, Supplement on Commodity Risk, May (1999).

○保険デリバティブについて

Canter, M.S., J.B. Cole, and R.L. Sandor. "Insurance Derivatives : A New Asset Class for the Capital Markets and a New Hedging Tool for the Insurance Industry," *Journal of Applied Corporate Finance*, Autumn (1997) : 69-83.

Froot, K.A. "The Market for Catastrophe Risk : A Clinical Examination," *Journal of Financial Economics*, 60 (2001) : 529-71.

Froot, K.A. *The Financing of Catastrophe Risk*. University of Chicago Press, 1999.

Geman, H. "CAT Calls," *Risk*, September (1994) : 86-89.

Hanley, M. "A Catastrophe Too Far," *Risk*, Supplement on Insurance, July (1998).

Litzenberger, R.H., D.R. Beaglehole, and C.E. Reynolds. "Assessing Catastrophe Reinsurance-Linked Securities as a New Asset Class," *Journal of Portfolio Management*, Winter (1996) : 76-86.

### 章末問題

**25.1** HDD と CDD は何を意味しているか。

**25.2** 天然ガスの典型的なフォワード契約はどのように仕組みになっているか。

**25.3** 過去データ法とリスク中立化法によるデリバティブ評価の違いを述べよ。どのような場合に、二つの評価は同じになるか。

- 25.4** 7月中の毎日の最低気温が華氏68度、最高気温が華氏82度であるとする。7月の累積CDDに対する行使価格250、1冷房度日当り5,000ドルを支払うコール・オプションのペイオフはいくらになるか。
- 25.5** 電力価格は他のエネルギー価格より価格変動性が高い理由を述べよ。
- 25.6** 過去データ法が天候デリバティブ契約やCAT債の価格付けに適している理由を述べよ。
- 25.7** 「HDDとCDDは気温に対するオプションのペイオフとみなせる」。この主張について説明せよ。
- 25.8** 50年分の気温データを自由に利用できるとする。特定の月の累積CDDに対するフォワード契約を評価するために行う分析について詳細に説明せよ。
- 25.9** 原油の1年物フォワード価格のボラティリティは、現物価格のボラティリティより大きいと思うか。それとも小さいと思うか。その理由も説明せよ。
- 25.10** 価格のボラティリティが非常に高く、平均回帰率の非常に高いエネルギー・ソースの特性を述べよ。そのようなエネルギー・ソースの例をあげよ。
- 25.11** エネルギー生産者がリスクをヘッジするためのデリバティブ市場の利用方法について説明せよ。
- 25.12** 日単位で行使可能な2009年5月の電力に対する $5 \times 8$ オプション契約の仕組みについて説明せよ。月単位で行使可能な2009年5月の電力に対する $5 \times 8$ オプション契約の仕組みについて説明せよ。また、どちらのほうが価値は高いか。
- 25.13** CAT債の仕組みについて説明せよ。
- 25.14** クーポン、満期、および価格の同じ二つの債券を考える。一つは格付Bの社債で、もう一つはCAT債である。過去データに基づく分析では、債券満期までの毎年の期待損失は二つの債券について同じである。ポートフォリオ・マネジャーにはどちらの債券の購入を勧

めるか。その理由も説明せよ。

## 宿題

**25.15** 保険会社が被るある種の損害額が、平均 1 億 5,000 万ドル、標準偏差 5,000 万ドルの正規分布で十分近似できているとする（リスク中立世界における損害額と実世界における損害額には差がないと仮定する）。1 年物無リスク金利は 5 % とする。次の契約の補償額を推定せよ。

- (a) 保険会社の 1 年間の損害額を比例分担して、その 60 % を支払う契約
- (b) 1 年間の損害額が 2 億ドルを超えた場合に 1 億ドルを支払う契約

## 第26章

# より進んだモデルと数値計算法

オプションの評価に用いてきたこれまでのモデルは、Black-Scholes の公式の基本的な仮定である、資産価格が幾何ブラウン運動に従っている、ということに基づいたものである。また、数値計算法も比較的簡単なものであった。本章ではいくつかの新しいモデルを紹介し、これまでの数値計算法を特定の状況も扱えるように改良する方法について説明する。

第18章では、トレーダーがボラティリティ曲面を用いて、どのように幾何ブラウン運動モデルの欠点を克服しているかについて説明した。ボラティリティ曲面は、プレーン・バニラ・オプションを価格付けする際にBlack-Scholes の公式に代入すべき適切なボラティリティを決めるものである。しかし残念なことに、第24章の価格公式を用いたエキゾチック・オプションの価格付けに用いるべきボラティリティについては、それからはほとんど何も

わからない。たとえばボラティリティ曲面から、行使価格40ドル、満期1年のプレーン・バニラ・オプションの価格付けに用いる正しいボラティリティは27%であるとする。このボラティリティは、行使価格40ドル、満期1年のバリア・オプション（またはその他のエキゾチック・オプション）を価格付けする際に用いるボラティリティとしては、まったく不適切なものである可能性が高い。

本章の前半では、エキゾチック・オプションをプレーン・バニラ・オプションと整合的に価格付けするという問題を解決するために考えられた、幾何プラウン運動にかわるいくつかの価格過程について論じる。それらの資産価格過程は幾何プラウン運動よりもプレーン・バニラ・オプションの市場価格によく適合している。したがって、それらを用いたほうが、もっと自信をもってエキゾチック・オプションの価格付けを行うことができる。

本章の後半では、数値計算法の議論を発展させる。まず、ツリーを用いた転換社債といくつかの経路依存型デリバティブの評価方法を説明する。次に、バリア・オプションの価値を数値計算で求める際に生じる特殊な問題とその対処方法について論じる。最後に、相関のある2変数に対する別のツリー構築法の要点を述べ、期限前行使機会がある場合のモンテカルロ・シミュレーションを用いたデリバティブの評価方法について紹介する。

これまでの章と同様に、利回りが  $q$  の資産に対するデリバティブを評価する場合について扱う。 $q$  は、株価指数オプションに対しては指標の配当利回りになり、通貨オプションに対しては外国無リスク金利になり、先物オプションに対しては国内無リスク金利になる。

## 26.1 Black-Scholes にかわるモデル

Black-Scholes モデルでは、資産価格は任意の将来時点における価格分布が対数正規になるように連続的に変化すると仮定されている。資産価格に対して、それ以外の多くの確率過程を仮定することが可能である。一つは、資産価格は連続的に変化するが、幾何プラウン運動以外の確率過程に従うと仮

定するものである。もう一つは、連続的な資産価格の変化にジャンプを加えたものである。さらに別のものとして、すべての資産価格変化はジャンプであるとする別の確率過程を仮定するものがある。本節では、例を用いてこれら三つのすべてのタイプについて考える。株価が連続的に変化するモデルは、拡散モデル (diffusion model) として知られている。連続的な変化にジャンプを加えたモデルは、ジャンプ拡散モデル (mixed jump-diffusion model) として知られている。株価の変化がすべてジャンプであるモデルは、純粋ジャンプモデル (pure jump model) として知られている。こうした確率過程はまとめて Levy 過程と呼ばれている(注1)。

## CEV モデル

Black-Scholes にかわる一つのモデルに、CEV (constant elasticity of variance) モデルがある。これは、株価  $S$  に対するリスク中立世界での確率過程が、

$$dS = (r - q) S dt + \sigma S^\alpha dz$$

で与えられる拡散モデルである。ここで、 $r$  は無リスク金利、 $q$  は配当利回り、 $dz$  はウィナー過程、 $\sigma$  はボラティリティ・パラメータ、 $\alpha$  は正の定数である(注2)。

$\alpha=1$  のときは、CEV モデルはこれまで用いてきた幾何ブラウン運動モデルになる。 $\alpha < 1$  のときは、株価が下落するとボラティリティは高くなる。その結果、確率分布は株式市場で観測されるもの(図18.4を参照)と同様の左裾が厚く、右裾が薄い分布になる(注3)。また、 $\alpha > 1$  のときは、株価が上昇するとボラティリティは高くなる。その結果、確率分布は右裾が厚く、左

(注1) 大雑把にいうと、Levy 過程とは定常的な独立増分性をもつ連続時間の確率過程である。

(注2) J.C. Cox and S.A. Ross, "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976) : 145-66 を参照。

(注3) その理由は、株価が下落するとボラティリティが高くなり、さらに株価が下落する可能性は増加し、株価が上昇するとボラティリティが低くなり、株価がさらに上昇する可能性は減少するからである。

裾が薄い分布になる。これは、インプライド・ボラティリティが行使価格の増加関数となっているボラティリティ・スマイルに対応した分布である。この種のボラティリティ・スマイルは先物オプションで観察されることがある（宿題16.23を参照）。

CEV モデルでのヨーロピアン・コール・オプションおよびヨーロピアン・プット・オプションに対する価格式は、 $0 < \alpha < 1$  の場合は、

$$c = S_0 e^{-qT} [1 - x^2(a, b+2, c)] - K e^{-rT} x^2(c, b, a)$$

$$p = K e^{-rT} [1 - x^2(c, b, a)] - S_0 e^{-qT} x^2(a, b+2, c)$$

となり、 $\alpha > 1$  の場合は、

$$c = S_0 e^{-qT} [1 - x^2(c, -b, a)] - K e^{-rT} x^2(a, 2-b, c)$$

$$p = K e^{-rT} [1 - x^2(a, 2-b, c)] - S_0 e^{-qT} x^2(c, -b, a)$$

となる。ただし、

$$\alpha = \frac{[K e^{-(r-q)T}]^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{2}} v}, \quad b = \frac{1}{1-\alpha}, \quad c = \frac{S^{2(1-\alpha)}}{(1-\alpha)^2 v}$$

であり、

$$v = \frac{\sigma^2}{2(r-q)(\alpha-1)} [e^{2(r-q)(\alpha-1)T} - 1]$$

である。また、 $x^2(z, k, v)$  は非心パラメータ  $v$  と自由度  $k$  をもつ非心  $x^2$  分布に従う変数が  $z$  より小さい値をとる累積確率である。 $x^2(z, v, k)$  の計算方法は著者の Web サイトのテクニカルノート 12 に与えられている。

CEV モデルは株式に対するエキゾチック・オプションの評価に特に有用である。モデル・パラメータの値は、モデルによる価格と市場価格との差の 2 乗の合計が最小になるような、できるだけプレーン・バニラ・オプションの価格に適合したものが選ばれる。

### Merton のジャンプ拡散モデル

Merton は、連続的な価格変化にジャンプを加味したモデルを提案した（注4）。以下のように定義する。

$\lambda$ ：平均年間ジャンプ数

$k$ ：資産価格の比率で表した平均ジャンプ幅

ジャンプ幅の比率は、モデルで仮定されている確率分布から抽出されると仮定する。

時間  $\Delta t$  にジャンプが発生する確率は  $\lambda \Delta t$  ある。したがって、ジャンプによる資産価格の平均成長率は  $\lambda k$  となる。これより、資産価格に対するリスク中立過程は、

$$\frac{dS}{S} = (r - q - \lambda k) dt + \sigma dz + dp$$

で与えられる。ここで、 $dz$  はウィナー過程、 $dp$  はジャンプを生成するポアソン過程、 $\sigma$  は幾何ブラウン運動のボラティリティである。また、 $dz$  と  $dp$  は独立であると仮定する。

Merton モデルでは、ジャンプ幅の比率の対数が正規分布に従う場合が特に重要である。正規分布の標準偏差を  $\sigma$  とする。このとき、ヨーロピアン・オプションの価格は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} f_n$$

と書けることを Merton は示した。ただし、 $\lambda' = \lambda(1+k)$  である。また、変数  $f_n$  は配当利回りを  $q$ 、分散率を、

$$\sigma^2 + \frac{ns^2}{T}$$

無リスク金利を、

$$r - \lambda k + \frac{n\gamma}{T}$$

としたときの Black-Scholes モデルによるオプション価格である。ただし、 $\gamma = \ln(1+k)$  である。

このモデルは Black-Scholes モデルと比べて左裾と右裾の厚い分布となり、通貨オプションの価格付けに用いることができる。CEV モデルの場合

---

(注 4) R.C. Merton, "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976) : 125-44 を参照。

と同様に、モデル・パラメータの値は、モデルによる価格と市場価格との差の2乗の合計が最小になるように選ばれる。

### バリアンスーガンマモデル

よく利用される純粹ジャンプモデルに、バリアンスーガンマモデル (variance-gamma model) というものがある(注5)。平均率  $1$ 、分散率  $v$  のガンマ過程に従う変数が時間  $T$  の間に変化する量を変数  $g$  と定義する。ガンマ過程は、小さなジャンプが頻繁に発生し、大きなジャンプはまれにしか発生しないという性質をもった純粹ジャンプ過程である。 $g$  の確率密度は、

$$\phi(g) = \frac{g^{T/v-1} e^{-g/v}}{v^{T/v} \Gamma(T/v)}$$

で与えられる。ここで  $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である。この確率密度は Excel の GAMMADIST(・, ・, ・, ・) 関数を用いて計算することができる。関数の最初の引数は  $g$ 、2番目の引数は  $T/v$ 、3番目の引数は  $v$ 、4番目の引数は TRUE または FALSE である。TRUEとした場合は累積分布関数の値を返し、FALSEとした場合は上述の確率密度関数の値を返す。

これまでと同様に、 $S_T$  を時点  $T$  における資産価格、 $S_0$  を現時点における資産価格、 $r$  を無リスク金利、 $q$  を配当利回りとする。バリアンスーガンマモデルでは、 $g$  の値が与えられたときのリスク中立世界における  $\ln S_T$  の確率分布は正規分布になる。その条件付き平均は、

$$\ln S_0 + (r - q) T + \omega + \theta g$$

となり、条件付き標準偏差は、

$$\sigma\sqrt{g}$$

となる。ただし、

$$\omega = \frac{T}{v} \ln(1 - \theta v - \sigma^2 v / 2)$$

である。バリアンスーガンマモデルには三つのパラメータ  $v$ 、 $\sigma$ 、および  $\theta$

---

(注5) D.B. Madan, P.P. Carr, and E.C. Chang, "The Variance-Gamma Process and Option Pricing," *European Finance Review*, 2 (1998) : 79-105 を参照。

がある(注6)。パラメータ  $v$  はガンマ過程の分散率,  $\sigma$  はボラティリティ,  $\theta$  は歪度(スキー)を定義するパラメータである。 $\theta=0$ のとき,  $\ln S_t$ の分布は対称になる。その分布は,  $\theta<0$ のとき負の歪度をもち,  $\theta>0$ のとき正の歪度をもつ。

バリアンスーガンマモデルを用いて, 時点 0 から時点  $T$ までの資産価格の変化について, 10,000個のランダム・サンプリングを Excel で行いたいとする。まず, セル E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7に  $T$ ,  $v$ ,  $\theta$ ,  $\sigma$ ,  $r$ ,  $q$ ,  $S_0$ の値を入力する。E8には,

$$=\$E\$1*LN(1-\$E\$3*\$E\$2-\$E\$4*\$E\$4*\$E\$2/2)/\$E\$2$$

を入力して,  $\omega$  の値になるようにする。その後で, 以下のようにすればよい。

1. GAMMAINV 関数を用いて  $g$  の値をサンプリングする。それは, セル A1, A2, …, A10000に,

$$=\text{GAMMAINV}(\text{RAND}(), \$E\$1/\$E\$2, \$E\$2)$$

を入力すればよい。

2.  $g$  の各値に対して, 平均  $\theta g$ , 標準偏差  $\sigma\sqrt{g}$  の正規分布に従う変数  $z$  の値をサンプリングする。それには, セル B1に,

$$=A1*\$E\$3+SQRT(A1)*\$E\$4*NORMSINV(RAND())$$

を入力し, セル B2, B3, …, B10000に対しても同様の式を入力すればよい。

3. 株価  $S_T$ は,

$$S_T=S_0\exp[(r-q)T+\omega+z]$$

で与えられる。したがって, セル C1に,

$$=\$E\$7*EXP((\$E\$5-\$E\$6)*\$E\$1+B1+\$E\$8)$$

を入力し, C2, C3, …, C10000に対しても同様の式を入力すると,  $S_T$ の分布からランダム・サンプリングした値がセル C1, C2, …,

---

(注 6) 実世界からリスク中立世界に移るとき, これらすべてのパラメータの値は変化する場合が多いことに注意しよう。これは, ボラティリティの値が変化しない純粋な拡散モデルとは対照的である。

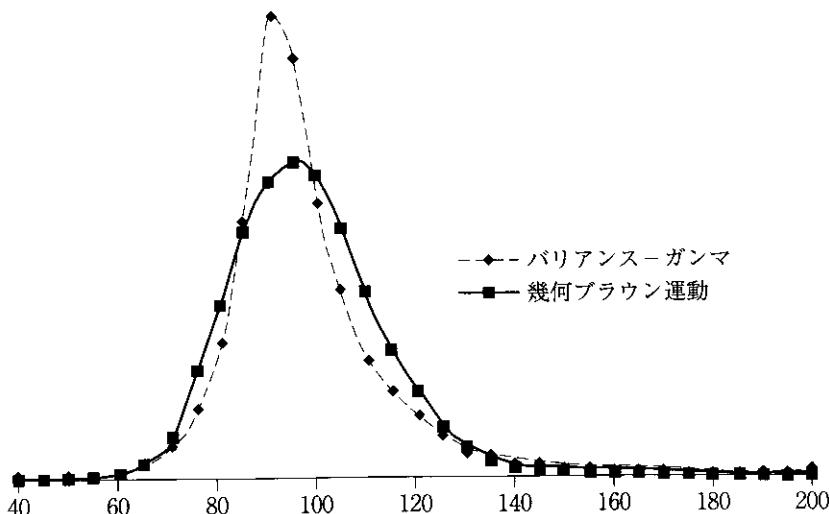
C10000に生成される。

図26.1は、 $S_0=100$ ,  $T=0.5$ ,  $v=0.5$ ,  $\theta=0.1$ ,  $\sigma=0.2$ ,  $r=q=0$ とした場合に、バリアンスーガンマモデルから得られる $S_T$ の確率分布を示したものである。比較のために、ボラティリティ $\sigma$ を0.2（すなわち20%）としたときの幾何ブラウン運動による分布も示めされている。図26.1でははっきりとはわからないが、バリアンスーガンマ分布は幾何ブラウン運動による対数正規分布よりも裾が厚い。

バリアンスーガンマ分布を特徴づける一つの方法は、 $g$ が時間 $T$ における情報の到達率を表していると考えることである。 $g$ が大きい場合は大量の情報が到達し、上述のステップ2で正規分布から得られるサンプル値は相対的に大きい平均と分散をもつことになる。一方、 $g$ が小さい場合は相対的に少量の情報しか到達せず、サンプル値の平均と分散は相対的に小さくなる。パラメータ $T$ は通常の時間を表しており、 $g$ は経済時間、あるいは情報フロー調整後の時間を表しているといわれることもある。

ヨーロピアン・オプションに対する準解析的な価格式が Madan ら (1998) によって導出されている。バリアンスーガンマモデルは U 字型のボラティ

図26.1 バリアンスーガンマ過程と幾何ブラウン運動から得られる分布



リティ・スマイルを生成する傾向がある。スマイルは必ずしも対称的な形をしておらず、短期に対しては非常に顕著であるが、長期に対しては消滅していくという性質をもっている。このモデルは、株式や通貨のプレーン・バニラ・オプションの価格に合わせることができる。

## 26.2 確率ボラティリティモデル

Black-Scholes モデルでは、ボラティリティは一定であると仮定されている。第21章で論じたように、実際にはボラティリティは時間とともに変化している。バリアンスーガンマモデルではパラメータ  $g$  を介してこのことが考慮されている。 $g$  の値が小さいときは情報の到達率が低く、ボラティリティが低いことに対応している。また、 $g$  の値が大きいときは情報の到達率が高く、ボラティリティが高いことに対応している。

バリアンスーガンマモデルにかわるモデルに、ボラティリティ変数の従う過程が明示的に与えられているモデルがある。まず、幾何ブラウン運動におけるボラティリティ・パラメータが時間の既知関数になっているものを考える。このとき、資産価格が従うリスク中立過程は、

$$dS = (r - q) S dt + \sigma(t) S dz \quad (26.1)$$

となる。この場合は、分散率をオプション期間の平均分散率とすれば、Black-Scholes の公式が正しい価格式となる（章末問題26.6を参照）。分散率はボラティリティの2乗である。ある株式の1年間のボラティリティを、最初の半年は20%，次の半年は30%とする。この場合は、平均分散率は、

$$0.5 \times 0.20^2 + 0.5 \times 0.30^2 = 0.065$$

となる。分散率を0.065として Black-Scholes の公式を用いれば、正しい価格が得られる。これは、ボラティリティでは  $\sqrt{0.065} = 0.255$ 、すなわち25.5%とすることに対応する。

(26.1)式では、資産の瞬間的なボラティリティは完全に予測可能であると仮定されている。実際には、ボラティリティは確率的に変動する。そのため、株価とそのボラティリティを二つの確率変数とする、より複雑なモデル

が開発されてきた。

研究者が用いてきた一つのモデルは、

$$\frac{dS}{S} = (r - q) dt + \sqrt{V} dz_s \quad (26.2)$$

$$dV = a(V_L - V) dt + \xi V^\alpha dz_V \quad (26.3)$$

とするものである。ここで、 $a$ 、 $V_L$ 、 $\xi$ 、 $\alpha$  は定数で、 $dz_s$  と  $dz_V$  はワイナー過程である。このモデルでは変数  $V$  は資産の分散率を表しており、回帰率  $a$  で水準  $V_L$  に引き戻されるドリフトをもっている。

Hull と White は、ボラティリティは確率変動するが資産価格とは相関をもたない場合には、ヨーロピアン・オプションの価格は Black-Scholes 価格をオプション期間中の平均分散率の確率分布で積分した値になることを示した(注7)。したがって、ヨーロピアン・コールの価格は、

$$\int_0^{\infty} c(\bar{V}) g(\bar{V}) d\bar{V}$$

と表される。ここで  $\bar{V}$  は分散率の平均値、 $c$  は  $\bar{V}$  の関数として表した Black-Scholes 価格、 $g$  はリスク中立世界における  $\bar{V}$  の確率密度関数である。この結果を用いて、Black-Scholes モデルがアット・ザ・マネー付近のオプションを高めに評価し、ディープ・イン・ザ・マネーやディープ・アウト・オブ・ザ・マネーのオプションを低めに評価する、ということを示すことができる。このモデルは、通貨オプションで観測されるインプライド・ボラティリティのパターンと整合性がとれている(18.2節を参照)。

株価とボラティリティに相関がある場合はもっと複雑になる。その場合は、モンテカルロ・シミュレーションを用いてオプション価格を求めることができる。 $\alpha=0.5$ という特殊な場合に対しては、Hull と White は級数展開式を、Heston は解析式を導出した(注8)。ボラティリティが資産価格と負の相関をもつ場合に得られるインプライド・ボラティリティのパターンは、株

---

(注7) J.C. Hull and A. White, "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42 (June 1987) : 281-300 を参照。これは、分散率の従う過程によらない結果である。

式に対して観測されるものと同様のものである(注9) (18.3節を参照)。

第21章では、指數加重移動平均 (EWMA) と GARCH(1,1) モデルについて論じた。それらは、確率ボラティリティモデルを特徴付ける別の方法である。Duan は GARCH(1,1) を用いて内的整合性をもつオプション価格付けモデルが構築できることを示した(注10) (GARCH(1,1) と確率ボラティリティモデルが等価であることについては章末問題21.14を参照)。

確率ボラティリティモデルは、プレーン・バニラ・オプションの価格に合わせてからエキゾチック・オプションの価格付けに用いることができる(注11)。残存期間 1 年未満のオプションに対しては、確率ボラティリティの価格への影響は絶対値ではかなり小さい(ただし、ディープ・アウト・オプ・ザ・マネー・オプションに対しては、比率では影響はかなり大きい)。この影響は、オプションの残存期間が長くなるとともに次第に大きくなる。確率ボラティリティのデルタ・ヘッジのパフォーマンスに対する影響は一般的にかなり大きい。トレーダーはこのことを認識しており、第17章で述べたように、ベガを計算してボラティリティの変化に対するエクスポージャーをモニタリングしている。

---

(注8) J.C. Hull and A. White, "An Analysis of the Bias in Option Pricing Caused by a Stochastic Volatility," *Advances in Futures and Options Research*, 3 (1988) : 27-61 および S.L. Heston, "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options," *Review of Financial Studies*, 6, 2 (1993) : 327-43 を参照。

(注9) その理由については脚注3を参照。

(注10) J.-C. Duan, "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5 (1995) : 13-32 および J.-C. Duan, "Cracking the Smile," *Risk*, 9 (December 1996) : 55-59 を参照。

(注11) たとえば、J.C. Hull and W. Suo, "A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2 (June 2002) : 297-318 を参照。

## 26.3 IVF モデル

これまで論じてきたモデルでは、任意の日のブレーン・バニラ・オプションの価格に大体合う価格が算出されるように、パラメータを決めることができる。金融機関では、さらに一步進んで、それらのオプション価格に完全に合った価格が算出できるモデルを使用したい場合がある(注12)。1994年に Derman と Kani, Dupire, および Rubinstein はそれが行えるモデルを開発した。このモデルは、インプライド・ボラティリティ関数 (IVF: implied volatility function) モデル、またはインプライド・ツリー (implied tree) モデルとして知られようになった(注13)。そのモデルを用いると、ボラティリティ曲面がどのような形状であっても、任意の日に観測されたヨーロピアン・オプションの価格に完全に一致する価格が算出されるようになる。

このモデルでの資産価格のリスク中立過程は、

$$dS = [r(t) - q(t)] S dt + \sigma(S, t) S dz$$

の形で与えられる。ここで、 $r(t)$  は時点  $t$  に満期を迎える瞬間的なフォワード・レート、 $q(t)$  は時間の関数として与えられた配当利回りである。ボラティリティ  $\sigma(S, t)$  は  $S$  と  $t$  の関数で、モデルから算出される価格がすべてのヨーロピアン・オプションの市場価格と整合性がとれるように選択される。Dupire, および Andersen と Brotherton-Ratcliffe は、 $\sigma(S, t)$  が次の解析式で計算できることを示した(注14)。

$$[\sigma(K, T)]^2 = 2 \frac{\partial c_{\text{mkt}} / \partial T + q(T) c_{\text{mkt}} + K [r(T) - q(T)] \partial c_{\text{mkt}} / \partial K}{K^2 (\partial^2 c_{\text{mkt}} / \partial K^2)} \quad (26.4)$$

(注12) これには実務的な理由がある。銀行がこの性質をもたないモデルを使用した場合に、銀行で働くトレーダーが銀行の内部モデル間の裁定取引を行うことに時間を割く危険性が生じるからである。

(注13) B. Dupire, "Pricing with a Smile," *Risk*, February (1994) :18-20, E. Derman and I. Kani, "Riding on a Smile," *Risk*, February (1994) :32-39, および M. Rubinstein, "Implied Binomial Trees," *Journal of Finance*, 49, 3 (July 1994):771-818 を参照。

ここで、 $c_{\text{mkt}}(K, T)$ は行使価格  $K$ 、満期  $T$  のヨーロピアン・コール・オプションの市場価格である。十分多くのヨーロピアン・コール・オプションに對して市場で価格が取得できれば、上式を用いて関数  $\sigma(S, t)$ を推定することができる(注15)。

Andersen と Brotherton-Ratcliffe は(26.4)式と陰的有限差分法を用いてモデルを実装した。その他の方法として、Derman と Kani, および Rubinstein は市場のオプション価格と整合性のある資産価格のツリーを構築するインプライド・ツリー法を提案した。

IVF モデルを実務で用いる際には、プレーン・バニラ・オプションの価格に對して日々モデルのキャリブレーションが行われる。このモデルは、エキゾチック・オプションをプレーン・バニラ・オプションと整合的に価格付けするツールとして用いられている。第18章で論じたように、プレーン・バニラ・オプションの価格から、すべての将来時点における資産価格のリスク中立確率分布は決まる。したがって、IVF モデルからすべての将来時点における資産価格の正しいリスク中立確率分布が得られる。このことから、一時点でのみペイオフが発生するオプション(たとえば、オール・オア・ナッシング・オプションやアセット・オア・ナッシング・オプション)は、IVF モデルで正しく価格付けすることができる。しかし、このモデルから資産価格の2時点以上における正しい同時分布が得られるとは限らない。したがって、コンパウンド・オプションやバリア・オプションのようなエキゾチック・オプションに對しては、正しい価格が得られない可能性もある(注16)。

(注14) B. Dupire, "Pricing with a Smile," *Risk*, February (1994) :18-20, L.B.G. Andersen and R. Brotherton-Ratcliffe, "The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach," *Journal of Computational Finance*, 1, 2 (Winter 1997/98) :5-37 を参照。Dupire は  $r$  と  $q$  がゼロの場合について考察し、Andersen と Brotherton-Ratcliffe はより一般的な場合について論じている。

(注15) 観測されるボラティリティ曲面は、一般的になんらかの方法で滑らかにする必要がある。

## 26.4 転換社債

次に、特定の評価の問題を扱えるように、第19章で説明した数値計算法を修正する方法について論じる。転換社債について考察することから始めよう。

転換社債とは、将来の決められた時点に債券を発行体の株式と交換できる選択権を保有者がもつ社債である。債券1単位と交換して得られる株数を交換比率 (conversion ratio) と呼ぶ (これは時間の関数の場合もある)。ほとんどの転換社債には早期償還条項がつけられている (すなわち、発行体はある時点で債券をあらかじめ定められた価格で買い戻す権利をもっている)。早期償還が通知されたとき、常に保有者は社債を転換する権利をもっている。したがって、早期償還条項は債券の保有者に早期強制転換させる方法としてふつう機能している。早期償還権が、発行体の株価がある水準を上回っているときのみに制限されている場合もある。

転換社債の評価では、信用リスクは重要な要素である。信用リスクを無視すると、債券のクーポンと元本支払が過大評価されるため、正しい価格が得られない。Ingersollは、22.6節で論じた Merton モデル (1974) と同様のモデルを用いて転換社債を評価する方法を与えた(注17)。その評価方法では、発行体の総資産が幾何ブラウン運動に従うと仮定して、企業の株式、転換社債、およびその他の負債を資産価値に対する条件付請求権としてモデル化している。そのモデルでは、資産価値が負債額を超過している場合にのみ、債権者に債務が全額返済されるので、信用リスクが考慮されていることにな

(注16) Hull と Suo は、すべてのデリバティブ価格が確率ボラティリティモデルで決められていると仮定して、IVF モデルを検証した。その結果、IVF モデルはコンパウンド・オプションに対してはそれなりによく機能しているが、バリア・オプションに対しては重大な誤差が発生する場合もあることが見出された。詳細については J.C. Hull and W. Suo, "A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2 (June 2002) : 297-318 を参照。

(注17) J.E. Ingersoll, "A Contingent Claims Valuation of Convertible Securities," *Journal of Financial Economics*, 4 (May 1977) : 289-322 を参照。

る。

実務で広く使われているもっと簡単なモデルは、発行体の株価をモデル化するものである。そのモデルでは、株価は幾何ブラウン運動に従って変動するが、各微小期間  $\Delta t$  に確率  $\lambda \Delta t$  で発行体はデフォルトすると仮定される。デフォルト時には株価はゼロに下落し、債券に対していくらかの回収があるものとされる。変数  $\lambda$  は、22.2節で定義したリスク中立デフォルト強度である。

通常の二項ツリーに対して各ノードで次のような変更を加えれば、この株価過程を表現することができる。

1. 長さ  $\Delta t$  の次の期間に確率  $p_u$  で株価は上昇率  $u$  だけ上昇する。
2. 長さ  $\Delta t$  の次の期間に確率  $p_d$  で株価は下落率  $d$  だけ下落する。
3. 長さ  $\Delta t$  の次の期間に確率  $\lambda \Delta t$ 、もっと正確には  $1 - e^{-\lambda \Delta t}$  で株価はデフォルトによってゼロになる。

株価分布の最初の二つのモーメントと一致するようにパラメータを選択して、

$$p_u = \frac{a - de^{-\lambda \Delta t}}{u - d}, \quad p_d = \frac{ue^{-\lambda \Delta t} - a}{u - d}, \quad u = e^{\sqrt{(\sigma^2 - \lambda) \Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}$$

とする。ここで、 $a = e^{(r-q)\Delta t}$ 、 $r$  は無リスク金利、 $q$  は株式の配当利回りである。

ツリーの期間は転換社債の満期までの期間に等しくする。ツリーの最終ノードでの転換社債の価値は、その時点における保有者がもつ転換権に基づいて計算される。その後は、ツリーに沿って後戻し計算を行う。発行要綱に基づいて転換が可能なノードでは、転換が最適かどうかを調べる。さらに、債券を早期償還することによって発行体のポジションが改善されうるかどうかを調べる。改善する場合は、債券は早期償還されると仮定したうえで、転換が最適かどうかをもう一度調べる。これはノードでの価値を、

$$\max[\min(Q_1, Q_2), Q_3]$$

とすることと同じである。ここで、 $Q_1$  は（債券は転換も早期償還もされないと仮定して）後戻し計算によって得られた価値、 $Q_2$  は早期償還時の価格、 $Q_3$  は

転換した場合の価値である。

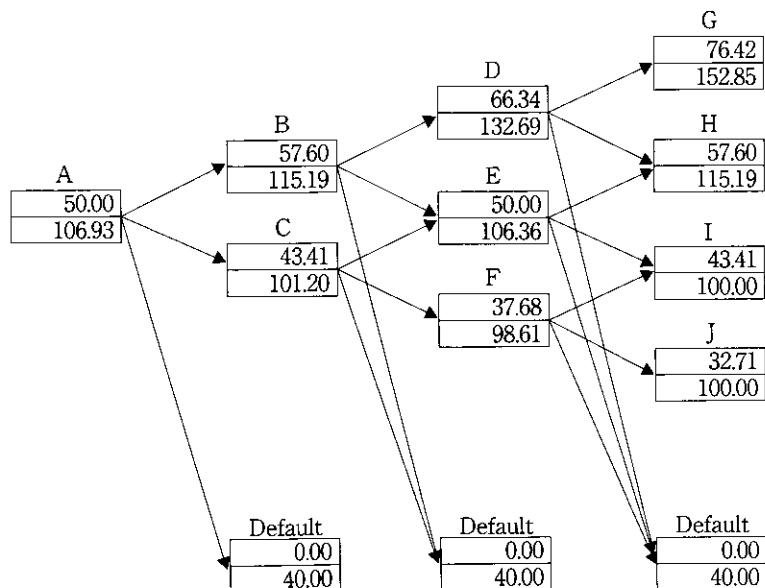
【例26.1】

XYZ 社が発行した額面100ドル、期間 9 カ月の割引債について考える。この債券は 9 カ月間いつでも XYZ 社の株式 2 株と交換可能であるとする。また、この債券はいつでも 113 ドルで早期償還が可能であると仮定する。当初の株価は 50 ドル、ボラティリティは年率 30%、配当はないものとする。デフォルト強度  $\lambda$  は年率 1%，無リスク金利は年率 5% でフラットで、デフォルト時の債券の価値は 40 ドルであるとする（すなわち、回収率を通常定義されるものと同じ 40% とする）。

図26.2に時間ステップを三つ ( $\Delta t=0.25$ ) としたときの、転換社債の評価に用いるツリーを示す。各ノードの上段の数字は株価、下段の数字は転換社債の価格である。ツリーのパラメータは、

$$u = e^{\sqrt{(0.09 - 0.01) \times 0.25}} = 1.1519, \quad d = 1/u = 0.8681$$

図26.2 転換社債評価用ツリー  
(各ノードの上段の数字は株価、下段の数字は転換社債の価格)



$$\alpha = e^{0.05 \times 0.25} = 1.0126, p_u = 0.5167, p_d = 0.4808$$

である。デフォルト確率（ツリー上の一一番下のノードに推移する確率）は  $1 - e^{-0.01 \times 0.25} = 0.002497$  である。三つのデフォルト・ノードでは、株価はゼロ、債券の価格は40となる。

まず、最後のノードについて考える。ノード G および H では債券は転換され、株価の 2 倍の価値になる。ノード I および J では債券は転換されず、その価値は100になる。

ツリーに沿って後ろ向きに進むと、前の時点のノードでの価値を計算することができる。たとえば、ノード E について考えよう。債券が転換された場合の価値は  $2 \times 50 = 100$  ドルである。転換されない場合は、(a) ノード H に推移して債券の価値が115.19になる確率は0.5167, (b) ノード I に推移して債券の価値が100になる確率は0.4808, (c) デフォルトして価値が40になる確率は0.002497である。したがって、転換されない場合の債券の価値は、

$$(0.5167 \times 115.19 + 0.4808 \times 100 + 0.002497 \times 40) \times e^{-0.05 \times 0.25} = 106.36$$

となる。これは、転換された場合の価値100よりも高い。のことより、ノード E では債券を転換する価値がないということがわかる。最後に、債券の発行体は早期償還すると106.36の価値の債券を113で買い戻すことになるので、債券がコールされることはないということに注意しよう。

もう一つの例としてノード B を考えよう。転換される場合の債券の価値は  $2 \times 57.596 = 115.19$  である。転換されない場合の債券の価値は、ノード E と同様の計算を行うと118.31になる。したがって、転換社債の保有者は転換を選択しないであろう。しかしこの段階で、発行体は113で債券をコールすることになるため、債券の保有者はコールされるよりも転換したほうが有利であると判断することになる。したがって、ノード B での債券の価値は115.19となる。同様の議論を用いて、ノード D での価値を求めることができる。転換されない場合の価値は132.79である。しかし、債券がコールされることになるため強制転換さ

せられることとなり、そのノードでの価値は132.69に下がる。

転換社債の価値は最初のノード A での価値であり、106.93となる。

債券に対して利子が支払われる場合には、それらを考慮しなければならない。各ノードで債券が転換されない場合の価値を求めるときに、次の時間ステップの間に債券に対して支払われるすべての利子の現在価値を価値計算に含める必要がある。リスク中立デフォルト強度  $\lambda$  は、債券価格またはクレジット・デフォルト・スワップのスプレッドから推定することができる。もっと一般的に、 $\lambda$ ,  $\sigma$ , および  $r$  は時間の関数として実装することができる。その場合には、二項ツリーではなく三項ツリーを用いて計算することになる（19.4節を参照）。

ここで紹介したモデルの欠点は、デフォルト確率が株価と独立であると仮定していることである。そのため、デフォルト強度  $\lambda$  を時間と株価の関数として、陰的有限差分法を用いたモデルの実装を提案する研究者もいる（注18）。

## 26.5 経路依存型デリバティブ

経路依存型デリバティブ（または過去依存型デリバティブ）とは、ペイオフが原資産価格の最終値だけなく、その経路にも依存するデリバティブである。アジアン・オプションやルックバック・オプションが、経路依存型デリバティブの例である。第24章で説明したように、アジアン・オプションのペイオフは原資産の平均価格に依存し、ルックバック・オプションのペイオフは最大価格または最小価格に依存している。解析解をもたない経路依存型オプションを評価する一つの方法は、第19章で論じたように、モンテカルロ・

(注18) たとえば、L. Andersen and D. Buffum, "Calibration and Implementation of Convertible Bond Models," *Journal of Computational Finance*, 7, 1 (Winter 2003/04) : 1-34 を参照。この論文では、デフォルト強度は  $S^\alpha$  に反比例すると仮定されている。ただし、 $S$  は株価、 $\alpha$  は正の定数である。

シミュレーションを用いる方法である。リスク中立世界における原資産価格のサンプルパスを発生させ、それに対するペイオフを計算して、そのペイオフを無リスク金利で割り引くと、デリバティブの価値に対するサンプル値が得られる。このようにしてデリバティブの価値に対する多くのサンプル値を取得し、その平均を求めると、デリバティブの価値に対する推定値が得られる。

モンテカルロ・シミュレーションを用いる場合の主な問題点は、要求される精度を得るためにには、受け入れ難いほどの計算時間が必要となる場合がある、というものである。また、アメリカン・スタイルの経路依存型デリバティブ（すなわち、契約当事者の一方が行使やそれ以外の判断を行える経路依存型デリバティブ）を容易には取り扱えない、ということもある。本節では、第19章で紹介した二項ツリーを用いる方法を拡張して、いくつかの経路依存型デリバティブの評価が行えるようにする方法を示す<sup>(注19)</sup>。この方法は、アメリカン・スタイルの経路依存型デリバティブも扱うことができ、ヨーロピアン・スタイルの経路依存型デリバティブの評価に用いられるモンテカルロ・シミュレーションより計算効率がよい。

上述の方法が適用できるためには、次の二つの条件が満たされなければならない。

1. デリバティブのペイオフは、原資産の経路に対するある関数  $F$  のみに依存している。
2. 時点  $\tau + \Delta t$  における  $F$  の値は、時点  $\tau$  の  $F$  の値と時点  $\tau + \Delta t$  の原資産の値から計算できる。

### ルックバック・オプションへの適用例

上述の方法の最初の例として、配当のない株式に対するアメリカン変動ルックバック・プット・オプションの評価法を考えよう<sup>(注20)</sup>。時点  $\tau$  で行

---

(注19) この方法については、J. Hull and A. White, "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options," *Journal of Derivatives*, 1, 1 (Fall 1993) : 21-31 を参照。

使された場合、この商品のペイオフは、時点 0 から時点  $\tau$  までの間の株価の最大値が現在の株価を上回る金額となる。当初の株価を50ドル、株価のボラティリティを年率40%，無リスク金利を年率10%，オプション期間を3カ月とし、株価の動きを3期間の二項ツリーで表すとする。これまでの記号を用いると、 $S_0=50$ ,  $\sigma=0.4$ ,  $r=0.10$ ,  $\Delta t=0.08333$ ,  $u=1.1224$ ,  $d=0.8909$ ,  $a=1.0084$ ,  $p=0.5073$ となる。

ツリーを図26.3に示す。この場合には、経路の関数  $F$  はその時点までの株価の最大値である。各ノードの一番上の数字は株価、次の段の数字はそのノードに到達する経路での株価の最大値のとりうる値、最後の段の数字は株価の各最大値に対応したデリバティブの価値を表している。

ツリーの最終ノードにおけるデリバティブの価値は、株価の最大値から実際の株価を引いた値になる。後戻し計算の例として、株価が50ドルのノード A での価値を計算しようとしているとする。それまでに到達した株価の最大値は56.12または50である。まず、最大値が50の場合について考える。株価が上昇した場合は、株価の最大値は56.12となり、デリバティブの価格はゼロになる。株価が下落した場合は、株価の最大値は50のままで、デリバティブの価格は5.45になる。期限前行使がないと仮定すると、ノード A におけるデリバティブの価値は、それまでの株価の最大値が50のときは、

$$(0 \times 0.5073 + 5.45 \times 0.4927) e^{-0.1 \times 0.08333} = 2.66$$

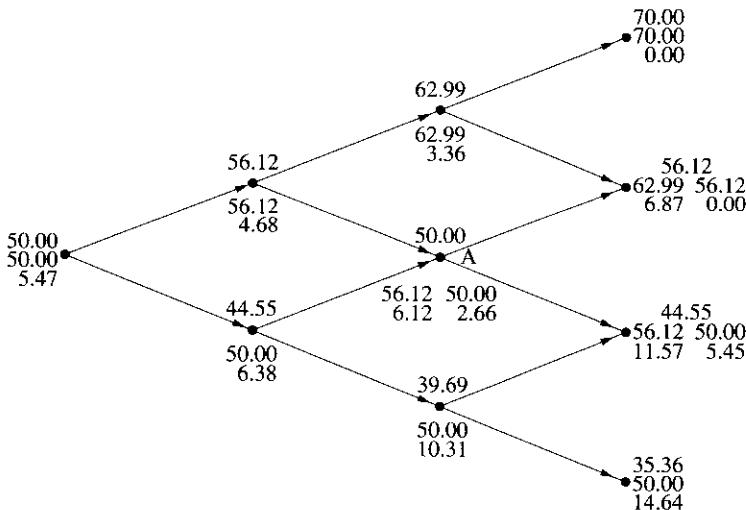
となる。この場合には、期限前行使したときのペイオフはゼロなので、明らかに、ノード A では期限前行使するべきではない。同様の計算を行うと、ノード A での最大値が56.12のときは、ノード A でのデリバティブの価値は期限前行使がないと仮定すると、

$$(0 \times 0.5073 + 11.57 \times 0.4927) e^{-0.1 \times 0.08333} = 5.65$$

となる。この場合には、期限前行使によって得られる価値は6.12となるので、それが最適な戦略となる。このようにツリーに沿って後戻していく

(注20) この例は、経路依存性を扱う一般的な方法の最初の例示にすぎない。アメリカン・ルックバック・オプションを評価するより効率的な方法については、著者の Web サイトのテクニカルノート13を参照。

図26.3 アメリカン・ルックバック・オプション評価用ツリー



と、アメリカン・ルックバックの価値が5.47ドルとして求まる。

## 一般化

上で述べた方法は、各ノードにおける経路関数  $F$  のとりうる値の数が時間ステップ数の増加に伴って急速に増えなければ、現実的に計算可能な方法である。ルックバック・オプションの例では、 $n$  期間二項ツリーの各ノードにおける原資産価格の最大値の個数は  $n$  を超えないで、計算は問題なく実行できる。

幸いなことに、各ノードでの経路関数のとりうる値の数が非常に多い場合も取り扱えるように、この方法を拡張することができる。その基本的なアイデアは次のようなものである。各ノードでの計算は  $F$  の少ない代表値に対して行い、経路関数の他の値に対するデリバティブの価値が必要となった場合には、計算されている値を補間して求める、というものである。

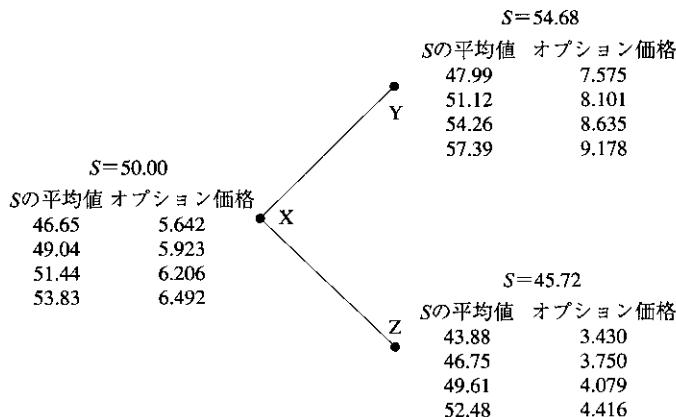
第1段階では、ツリーを前向きに進んで、各ノードにおける経路関数の最大値と最小値を求める。時点  $\tau + \Delta t$  における経路関数の値が、時点  $\tau$  にお

ける経路関数の値と時点  $\tau + \Delta t$  における原資産変数の値のみに依存していると仮定しているので、時点  $\tau + \Delta t$  における各ノードでの経路関数の最大値と最小値は、時点  $\tau$  における経路関数の値から簡単に計算することができる。第2段階では、各ノードにおける経路関数の値から簡単に計算することができる。第2段階では、各ノードにおける経路関数の代表値を選ぶ。これには多くの方法がある。単純な方法は、最大値、最小値、およびそれらの間を等分して得られる多くの値を代表値に選ぶというものである。そして、ツリーを後戻ししながら、経路関数の各代表値に対してデリバティブの価値を求める。

この計算の性質を説明するために、24.10節の例24.2を取り上げた、ペイオフが株価の算術平均に依存しているアベレージ・プライス・コール・オプションを評価する問題について考えよう。当初の株価は50、行使価格は50、無リスク金利は10%、株価のボラティリティは40%、満期は1年である。時間ステップ数を20とすると、二項ツリーのパラメータは、 $\Delta t=0.05$ ,  $u=1.0936$ ,  $d=0.9144$ ,  $p=0.5056$ ,  $1-p=0.4944$ となる。経路関数は株価の算術平均である。

図26.4は、ツリーのある一部分で行われる計算を示したものである。ノード X は時点0.2年（4番目の時間ステップの終わり）における中心のノードである。ノード Y と Z は、ノード X から分岐した時点0.25年における二つの

図26.4 算術平均に対するオプションを評価するためのツリーの一部分



ノードである。ノード X での株価は50である。前向きの計算から、ノード X に到達する経路での株価の算術平均の最大値は53.83、最小値は46.65となることがわかる（平均は最初と最後の株価も含めて計算されている）。ノード X から、ノード Y かノード Z のどちらかに分岐する。ノード Y では株価は54.68であり、平均株価の範囲は47.99から57.39になる。ノード Z では株価は45.72であり、平均株価の範囲は43.88から52.48になる。

各ノードでの平均株価の代表値は4等分した値とするところにする。したがって、ノード X では、46.65、49.04、51.44、および53.83の四つの平均値を考えることになる。ノード Y では平均値47.99、51.12、54.26、および57.39を考え、ノード Z では平均値43.88、46.75、49.61、および52.48を考えることになる。ノード Y と Z でのそれぞれの平均値に対するオプションの価値は、後向き計算を用いてすでに求められていると仮定する。その値は図26.4に示されているものになる（たとえば、ノード Yにおいて平均が51.12のときのオプションの価値は8.101である）。

平均が51.44である場合のノード X での計算を考える。株価がノード Y に上昇した場合には、新しい平均は、

$$\frac{5 \times 51.44 + 54.68}{6} = 51.98$$

になる。この平均に対するノード Y でのデリバティブの価値は、平均が51.12である場合の価値と54.26である場合の価値とを補間して求めることができる。それは、

$$\frac{(51.98 - 51.12) \times 8.635 + (54.26 - 51.98) \times 8.101}{54.26 - 51.12} = 8.247$$

となる。同様に、株価がノード Z に下落した場合には、新しい平均は、

$$\frac{5 \times 51.44 + 45.72}{6} = 50.49$$

になり、補間して求めたデリバティブの価値は4.182となる。

したがって、平均が51.44である場合のノード X でのデリバティブの価値は、

$$(0.5056 \times 8.247 + 0.4944 \times 4.182) e^{-0.1 \times 0.05} = 6.206$$

となる。ノード X での他の価値も同様に計算される。時点0.2年におけるすべてのノードでのデリバティブの価値の計算が終われば、時点0.15年におけるノードでの価値の計算が始められるようになる。

このオプションに対するツリー全体から計算される時点ゼロにおける価値は7.17になる。時間ステップ数と各ノードで考える平均値の数を増やすと、得られたオプションの価値は正しい値に収束していく。時間ステップ数を60、各ノードでの平均値数を100にすると、オプションの価値は5.58になる。ちなみに、例24.2で解析的近似式を用いて計算したオプションの価値は5.62である。

ここで述べた方法の重要な長所は、アメリカン・オプションを取り扱えることである。その場合には、各ノードでのそれぞれの経路関数の値に対して、そのノードでの期限前行使の有無を確認する以外は、これまで説明してきたように計算すればよい（実際、期限前行使は経路関数の値と原資産価格の両方に依存して決まる場合が多い）。これまで考察してきたアベレージ・プライス・コールをアメリカンとした場合について考えてみよう。時間ステップ数を20、各ノードでの平均値数を4とした場合の価値は7.77になる。時間ステップ数を60、平均値数を100とした場合には、価値は6.17になる。

これまで述べてきた方法は、幅広い状況に対して用いることができる。ただし、本節の最初にあげた二つの条件は満たされていなければならない。また、各ノードで線形補間ではなく二次補間を用いると、計算効率がいくぶん向上する。

## 26.6 バリア・オプション

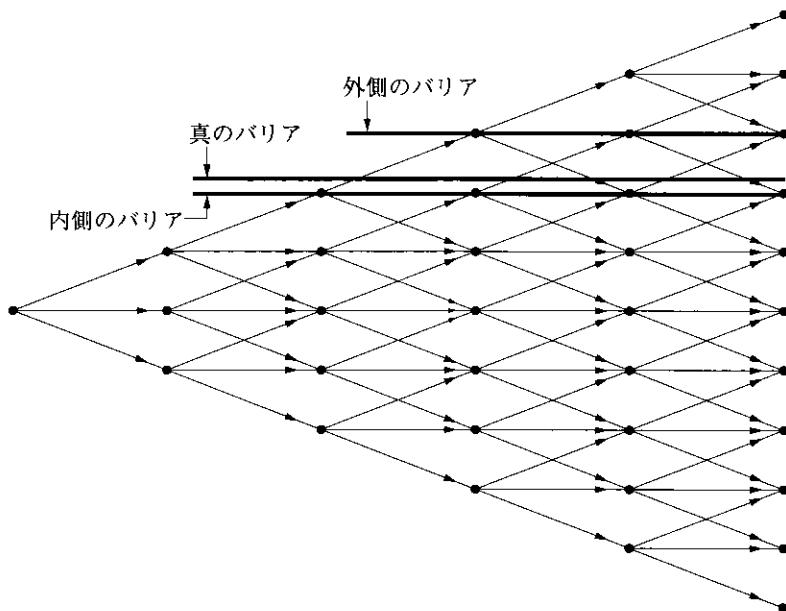
第24章では、標準的なバリア・オプションに対する解析的な結果を紹介した。本章では、解析的な結果が得られていない場合にバリア・オプションに対して用いることのできる数値計算法について考える。

原理的には、バリア・オプションは第19章で論じた二項ツリーや三項ツ

リーを用いて評価することができる。アップ・アンド・アウト・オプションについて考えよう。単純な方法は、バリアを上回るノードでオプションの価値をゼロにする以外は、通常のオプションと同じように計算する、というものである。

三項ツリーを用いると二項ツリーよりもよい結果が得られるが、その場合でも単純な方法では収束は非常に遅く、相応に正確な結果を得るためにには時間ステップ数を大きくする必要がある。その理由は、ツリー上で仮定されるバリアが真のバリアと異なるからである(注21)。内側のバリアを真のバリアのちょうど内側(すなわち、ツリーの中心に近い側)にくるノードからなるバリア、外側のバリアを真のバリアのちょうど外側(すなわち、ツリーの中心から離れる側)にくるノードからなるバリアと定義する。図26.5は、真のバ

図26.5 三項ツリーで仮定されるバリア



(注21) P.P. Boyle and S.H. Lau, "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method," *Journal of Derivatives*, 1, 4 (Summer 1994) : 6-14 を参照。

アが水平であると仮定した場合の三項ツリーに対する内側と外側のバリアを示したものである。通常のツリーを用いた計算では、外側のバリア上のノードにおいてバリア条件が最初に適用されるので、外側のバリアが真のバリアであると暗に仮定して計算が行われていることになる。時間ステップを  $\Delta t$  とすると、ノードの垂直方向の間隔は  $\sqrt{\Delta t}$  のオーダーになる。したがって、真のバリアと外側のバリアとの違いから生じる誤差も  $\sqrt{\Delta t}$  のオーダーになることが多い。

この問題を克服する一つの方法は、次のように計算することである。

1. 内側のバリアが真のバリアであると仮定してデリバティブの価格を計算する。
2. 外側のバリアが真のバリアであると仮定してデリバティブの価格を計算する。
3. 二つの価格を補間する。

もう一つの方法は、バリア上にノードが乗るようにする方法である。当初の株価を  $S_0$ 、バリアを  $H$  とする。三項ツリーでは、各ノードでの資産価格の変化には三つの可能性がある。ある割合  $u$  で上昇するか、同じレベルにとどまるか、割合  $d=1/u$  で下落するかである。したがって、ノードがバリア上に乗るような  $u$  を常に選ぶことができる。このとき  $u$  が満たすべき条件は、ある正または負の  $N$  に対して、

$$H = S_0 u^N$$

すなわち、

$$\ln H = \ln S_0 + N \ln u$$

が成り立つことである。

19.4節で三項ツリーについて議論したとき、 $u$  の推奨値は  $e^{\sigma\sqrt{3\Delta t}}$  であることを述べた。その場合には、 $\ln u = \sigma\sqrt{3\Delta t}$  である。したがって、いまの場合には上の条件を満たしつつ、この値にできるだけ近くなるように  $\ln u$  の値を選ぶのがよい方法であろう。このことから、

$$\ln u = \frac{\ln H - \ln S_0}{N}$$

とすればよい。ただし、

$$N = \text{int} \left[ \frac{\ln H - \ln S_0}{\sigma \sqrt{3 \Delta t}} + 0.5 \right]$$

で、 $\text{int}(x)$ は  $x$  の整数部分である。

この方法を用いると、図26.6のようなツリーが得られる。ツリーの上、真ん中、下の枝に分岐する確率  $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$ を、1次と2次のモーメントがリターンのものと合うように選ぶと、

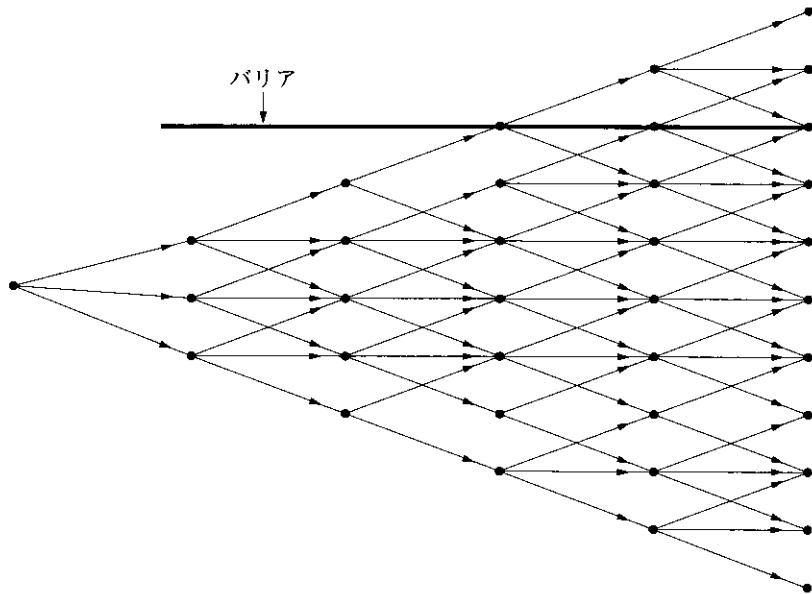
$$p_d = -\frac{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t}{2\ln u} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2(\ln u)^2}$$

$$p_m = 1 - \frac{\sigma^2\Delta t}{(\ln u)^2}$$

$$p_u = \frac{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t}{2\ln u} + \frac{\sigma^2\Delta t}{2(\ln u)^2}$$

となる。

図26.6 バリア上にノードが乗っているツリー

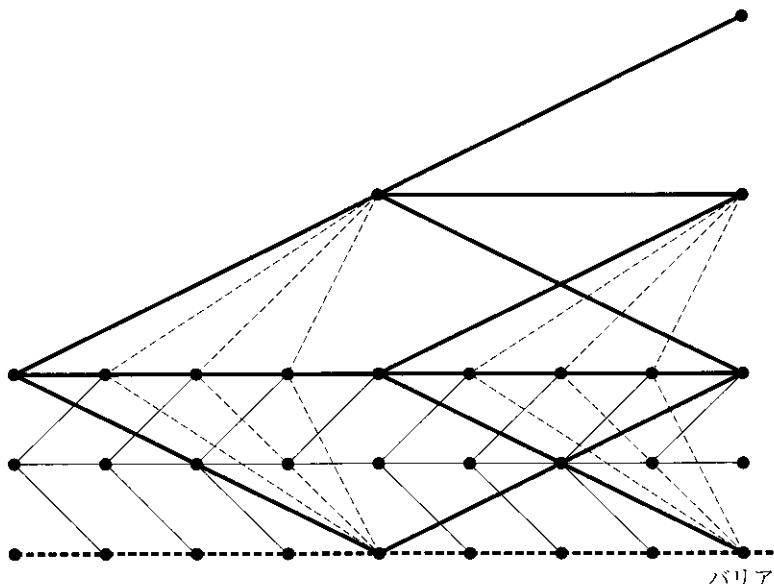


## アダプティブ・メッシュ・モデル

これまで紹介した手法は、当初の資産価格がバリアの近くにない場合には、相応にうまく方法である。当初の資産価格がバリアに近い場合には、19.4節で紹介したアダプティブ・メッシュ・モデルを用いることができる（注22）。このモデルの背後にあるアイデアは、資産価格のもっと詳しいモデル化を行うためにもと細かいツリーが必要となる領域に対してのみ、目の粗いツリーに目の細かいツリーを接ぎ木する、ということによって計算効率を改善させようというものである。

バリア・オプションの評価では、バリア付近のツリーを細かくするとより正確な価格が得られる。図26.7は、そのようなツリーの例である。バリア上にノードが乗るようにツリーの構造が調整されている。各枝への分岐確率

図26.7 アダプティブ・メッシュ・モデルを使ったバリア・オプションの評価



(注22) S. Figlewski and B. Gao, "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53 (1999) : 313-51 を参照。

は、通常の場合と同様に、1次と2次のモーメントが原資産の従う過程のものと合うように選ばれている。図26.7の太線は目の粗いツリーの枝を表している。細い実線は目の細かいツリーを表している。このツリーでの評価は次のように行われる。まず、目の粗いツリーに沿って通常のように後戻し計算を行う。次に、点線で表された枝を用いて追加されたノードでの価値を計算する。最後に目の細かいツリーに沿って後戻し計算を行う。

## 26.7 相関のある二つの資産に対するオプション

数値計算上の工夫をする別の問題として、相関のある二つの資産に依存するアメリカン・オプションを評価する問題がある。これについてはいろいろな方法が提案されている。本節ではそのうち三つの方法を説明する。

### 変数変換を用いる方法

相関のない (uncorrelated) 2変数の動きを表現する3次元ツリーを構築するのは、比較的容易である。次のように行えればよい。まず、それぞれの変数に対して2次元ツリーを構築し、その後でこれらのツリーを結合して一つの3次元ツリーをつくる。3次元ツリーの各枝への分岐確率は、2次元ツリーでの対応する確率の積になる。たとえば、変数として株価  $S_1$  と  $S_2$  を考えよう。それぞれは Cox, Ross, Rubinstein の二項ツリーとして2次元で表現されているとする。 $S_1$  は確率  $p_1$  で割合  $u_1$  の上昇をし、確率  $1-p_1$  で割合  $d_1$  の下落をすると仮定する。 $S_2$  は確率  $p_2$  で割合  $u_2$  の上昇をし、確率  $1-p_2$  で割合  $d_2$  の下落をすると仮定する。3次元ツリーでは、各ノードから四つの枝に分岐する。それらの分岐確率は、

$$p_1 p_2 : S_1 \text{が上昇}, S_2 \text{も上昇}$$

$$p_1 (1-p_2) : S_1 \text{が上昇}, S_2 \text{は下落}$$

$$(1-p_1) p_2 : S_1 \text{が下落}, S_2 \text{は上昇}$$

$$(1-p_1) (1-p_2) : S_1 \text{が下落}, S_2 \text{も下落}$$

となる。

次に、 $S_1$ と $S_2$ が相関をもつ場合について考えよう。リスク中立過程が、

$$dS_1 = (r - q_1) S_1 dt + \sigma_1 S_1 dz_1$$

$$dS_2 = (r - q_2) S_2 dt + \sigma_2 S_2 dz_2$$

で与えられ、ウイナー過程 $dz_1$ と $dz_2$ との瞬間的な相関が $\rho$ であるとする。

このとき、

$$d\ln S_1 = (r - q_1 - \sigma_1^2/2) dt + \sigma_1 dz_1$$

$$d\ln S_2 = (r - q_2 - \sigma_2^2/2) dt + \sigma_2 dz_2$$

となる。ここで、二つの相関のない新しい変数

$$x_1 = \sigma_2 \ln S_1 + \sigma_1 \ln S_2$$

$$x_2 = \sigma_2 \ln S_1 - \sigma_1 \ln S_2$$

を定義する(注23)。このとき、これらの変数は次の式に従う。

$$dx_1 = [\sigma_2(r - q_1 - \sigma_1^2/2) + \sigma_1(r - q_2 - \sigma_2^2/2)] dt + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2(1+\rho)} dz_A$$

$$dx_2 = [\sigma_2(r - q_1 - \sigma_1^2/2) - \sigma_1(r - q_2 - \sigma_2^2/2)] dt + \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{2(1-\rho)} dz_B$$

ここで $dz_A$ と $dz_B$ は相関のないウイナー過程である。

変数 $x_1$ と $x_2$ は、二つの別々の二項ツリーを用いてモデル化することができる。時間 $\Delta t$ に $x_i$ は確率 $p_i$ で $h_i$ だけ増加し、確率 $1-p_i$ で $h_i$ だけ減少するとする。変数 $h_i$ と $p_i$ は、 $x_1$ と $x_2$ の分布の1次と2次のモーメントの正しい値を反映したツリーになるように選ばれる。これらの変数には相関がないので、二つのツリーはすでに述べた方法で一つの3次元ツリーに結合できる。ツリーの各ノードにおいて、 $S_1$ と $S_2$ は $x_1$ と $x_2$ から逆変換式

$$S_1 = \exp\left[\frac{x_1 + x_2}{2\sigma_2}\right]$$

$$S_2 = \exp\left[\frac{x_1 - x_2}{2\sigma_2}\right]$$

を用いて計算することができる。3次元ツリーに沿った後戻し計算でデリバティプを評価する手続は、2次元ツリーの場合と同様である。

(注23) このアイデアは J. Hull and A. White, "Valuing Derivative Securities Using the Explicit Finite Difference Method," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25 (1990) : 87-100 によるものである。

## 長方形でないツリーを用いる方法

Rubinsteinは、長方形でないノードの配置を用いて、相関のある二つの株価に対する3次元ツリーの構築方法を提案している(注24)。一つ目の株価を $S_1$ 、二つ目の株価を $S_2$ とするとき、ノード $(S_1, S_2)$ から確率0.25で次の各ノードへ変化するとする。

$$(S_1 u_1, S_2 A), (S_1 u_1, S_2 B), (S_1 d_1, S_2 C), (S_2 d_1, S_2 D)$$

ただし、

$$u_1 = \exp[(r - q_1 - \sigma_1^2/2) \Delta t + \sigma_1 \sqrt{\Delta t}]$$

$$d_1 = \exp[(r - q_1 - \sigma_1^2/2) \Delta t - \sigma_1 \sqrt{\Delta t}]$$

$$A = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2) \Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t} (\rho + \sqrt{1-\rho^2})]$$

$$B = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2) \Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t} (\rho - \sqrt{1-\rho^2})]$$

$$C = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2) \Delta t - \sigma_2 \sqrt{\Delta t} (\rho - \sqrt{1-\rho^2})]$$

$$D = \exp[(r - q_2 - \sigma_2^2/2) \Delta t - \sigma_2 \sqrt{\Delta t} (\rho + \sqrt{1-\rho^2})]$$

である。相関がゼロの場合には、この方法は19.4節で説明した別の二項ツリーの構築方法を用いて $S_1$ と $S_2$ に対する別々のツリーを構築することと等価になる。

## 確率を調整する方法

$S_1$ と $S_2$ に対する3次元ツリーを構築する3番目の方法は、まず相関はないとしてツリーを構築し、相関を反映するために後から各ノードでの確率を調整する方法である(注25)。19.4節の方法で、 $S_1$ と $S_2$ のそれぞれに対して二項ツリーを構築する。この方法には、すべての確率は0.5であるという特性がある。相関がないという仮定のもとで二つの二項ツリーを結合させる場合には、確率は表26.1(次頁)のようになる。相関を反映させて確率を調整する場合には、確率は表26.2(次頁)のようになる。

(注24) M. Rubinstein, "Return to Oz," *Risk*, November (1994) : 67-70 を参照。

(注25) この方法は、次の論文で金利ツリーに対して提案されたものである。J. Hull and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models," *Journal of Derivatives*, Winter (1994) : 37-48.

表26.1 相関がない場合の二項ツリーの結合

|           |  | $S_1$ の動き |      |
|-----------|--|-----------|------|
|           |  | 下落        | 上昇   |
| $S_2$ の動き |  |           |      |
| 上昇        |  | 0.25      | 0.25 |
| 下落        |  | 0.25      | 0.25 |

表26.2 相関が $\rho$ の場合の二項ツリーの結合

|           |  | $S_1$ の動き      |                |
|-----------|--|----------------|----------------|
|           |  | 下落             | 上昇             |
| $S_2$ の動き |  |                |                |
| 上昇        |  | $0.25(1-\rho)$ | $0.25(1+\rho)$ |
| 下落        |  | $0.25(1+\rho)$ | $0.25(1-\rho)$ |

## 26.8 モンテカルロ・シミュレーションとアメリカン・オプション

モンテカルロ・シミュレーションは経路依存型オプションや多くの確率変数に依存したオプションを評価するのに適した手法である。一方、ツリー法や有限差分法はアメリカン・スタイルのオプションを評価するのに適している。それでは、オプションが経路依存かつアメリカンの場合にはどうであろうか。また、いくつかの確率変数に依存するアメリカン・オプションの場合にはどうであろうか。26.5節では、ある場合に二項ツリー法を修正して経路依存型オプションが評価できるようにする方法を説明した。多くの研究者がモンテカルロ・シミュレーションを用いたアメリカン・オプションの評価方法を検討し、さまざまな方法が採用されている(注26)。本節では、二つの手法について説明する。

(注26) Tilley がこの問題の解決法を発表した最初の研究者である。J.A. Tilley, "Valuing American Options in a Path Simulation Model," *Transactions of the Society of Actuaries*, 45 (1993) : 83-104 を参照。

## 最小2乗法

アメリカン・スタイルのオプションを評価するためには、各期限前行使点で行使するか継続するかを選択する必要がある。行使した場合の価値は通常簡単に求まる。Longstaff と Schwartz を含む多くの研究者は、モンテカルロ・シミュレーションを用いたときの継続した場合の価値の決め方を提案している(注27)。彼らの手法では、最小2乗法による分析を用いて各期限前行使点における継続価値と関連する変数の値との間の最も適合した関係を決定することが行われている。この手法は、数値例を用いて説明するのが最もわかりやすいだろう。Longstaff-Schwartz の論文で使われた例を用いて説明する。

1年後、2年後、および3年後に行使できる、配当のない株式に対する満期3年のアメリカン・プット・オプションについて考える。無リスク金利を年率6%（連続複利）、現時点の株価を1.00、行使価格を1.10とする。株価に対して、表26.3に示す8個のパスが抽出されたと仮定する（これは例示目的のものであり、実際にはもっと多くのパスが抽出される）。オプションが3年後にのみ行使可能な場合には、オプションからのキャッシュフローはその時

表26.3 プット・オプション評価のためのサンプルパス例

| パス | $t=0$ | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|----|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 1.00  | 1.09  | 1.08  | 1.34  |
| 2  | 1.00  | 1.16  | 1.26  | 1.54  |
| 3  | 1.00  | 1.22  | 1.07  | 1.03  |
| 4  | 1.00  | 0.93  | 0.97  | 0.92  |
| 5  | 1.00  | 1.11  | 1.56  | 1.52  |
| 6  | 1.00  | 0.76  | 0.77  | 0.90  |
| 7  | 1.00  | 0.92  | 0.84  | 1.01  |
| 8  | 1.00  | 0.88  | 1.22  | 1.34  |

(注27) F.A. Longstaff and E.S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001) : 113-47 を参照。

表26.4 3年後にのみ行使できる場合のキャッシュフロー

| パス | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|----|-------|-------|-------|
| 1  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 2  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 3  | 0.00  | 0.00  | 0.07  |
| 4  | 0.00  | 0.00  | 0.18  |
| 5  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 6  | 0.00  | 0.00  | 0.20  |
| 7  | 0.00  | 0.00  | 0.09  |
| 8  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |

点における本源的価値に等しくなる。これを表26.4の最終列に示す。

2年後にプット・オプションがイン・ザ・マネーとなる場合には、オプションの保有者は行使判断を行う必要がある。表26.3から、イン・ザ・マネーとなるのはパス1, 3, 4, 6, 7である。これらのパスに対して、近似的な関係式：

$$V = a + bS + cS^2$$

を仮定する。ただし、 $S$ は2年後の株価、 $V$ は継続した場合の価値を2年後まで割り引いた値である。 $S$ に対する五つの観測値は1.08, 1.07, 0.97, 0.77, および0.84である。表26.4より、対応する $V$ の値は0.00,  $0.07e^{-0.06 \times 1}$ ,  $0.18e^{-0.06 \times 1}$ ,  $0.20e^{-0.06 \times 1}$ , および $0.09e^{-0.06 \times 1}$ である。 $S_i$ と $V_i$ をそれぞれ $S$ と $V$ に対する*i*番目の観測値として、

$$\sum_{i=1}^5 (V_i - a - bS_i - cS_i^2)^2$$

を最小にする $a$ ,  $b$ ,  $c$ の値を求めるとき、 $a = -1.070$ ,  $b = 2.983$ ,  $c = -1.813$ となり、最も適合した関係は、

$$V = -1.070 + 2.983S - 1.813S^2$$

となる。これより、パス1, 3, 4, 6, 7に対する2年後の継続価値は、それぞれ0.0369, 0.0461, 0.1176, 0.1520, 0.1565となる。表26.3より、行使価値は0.02, 0.03, 0.13, 0.33, 0.26である。したがって、パス4, 6, 7では2年後に行使すべきということになる。表26.5に、2年後または3年

表26.5 2年後と3年後にのみ行使できる場合のキャッシュフロー

| パス | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|----|-------|-------|-------|
| 1  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 2  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 3  | 0.00  | 0.00  | 0.07  |
| 4  | 0.00  | 0.13  | 0.00  |
| 5  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 6  | 0.00  | 0.33  | 0.00  |
| 7  | 0.00  | 0.26  | 0.00  |
| 8  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |

後に行使可能な場合の8個のパスに対するキャッシュフローをまとめた。

次に、1年後にイン・ザ・マネーとなるパスについて考える。それらは、パス1, 4, 6, 7, 8である。表26.3から、それらのパスに対するSの値はそれぞれ1.09, 0.93, 0.76, 0.92, 0.88である。表26.5から、対応する継続価値を $t=1$ まで割り引いた値はそれぞれ $0.00, 0.13e^{-0.06 \times 1}, 0.33e^{-0.06 \times 1}, 0.26e^{-0.06 \times 1}, 0.00$ となる。このとき、最小2乗法による関係は、

$$V = 2.038 - 3.335S + 1.356S^2$$

で与えられる。これより、パス1, 4, 6, 7, 8に対する1年後の継続価値はそれぞれ0.0139, 0.1092, 0.2866, 0.1175, 0.1533となる。表26.3より、行使価値はそれぞれ0.01, 0.17, 0.34, 0.18, 0.22である。したがって、パス4, 6, 7, 8では1年後に行使すべきということになる。表26.6(次頁)に、三つのすべての時点で期限前行使が可能な場合のキャッシュフローをまとめた。オプション価値は各キャッシュフローを無リスク金利で時点ゼロまで割り引き、その結果を平均することで求められる。その値は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}(0.07e^{-0.06 \times 3} + 0.17e^{-0.06 \times 1} + 0.34e^{-0.06 \times 1} + 0.18e^{-0.06 \times 1} + 0.22e^{-0.06 \times 1}) \\ & = 0.1144 \end{aligned}$$

となる。これは0.10より大きいので、オプションを即座に行使するのは最適

表26.6 オプションからのキャッシュフロー

| パス | $t=1$ | $t=2$ | $t=3$ |
|----|-------|-------|-------|
| 1  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 2  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 3  | 0.00  | 0.00  | 0.07  |
| 4  | 0.17  | 0.00  | 0.00  |
| 5  | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 6  | 0.34  | 0.00  | 0.00  |
| 7  | 0.18  | 0.00  | 0.00  |
| 8  | 0.22  | 0.00  | 0.00  |

ではない。

この手法はさまざまな形に拡張が可能である。オプションが任意の時点で行使可能な場合には、(二項ツリーの場合のように)多くの行使時点を考えることで価値の近似値を求めることができる。 $V$  と  $S$  との関係としては、もっと複雑なものを考えることもできる。たとえば、 $V$  を  $S$  の 2 次関数ではなく 3 次関数と仮定することもできる。この方法は、期限前行使判断が複数の状態変数に依存する場合にも用いることができる。 $V$  と変数との間の関係に対してある関数形を仮定し、先に考察した例と同様に、最小 2 乗法を用いてパラメータを推定すればよい。

### 行使境界パラメータ化法

Andersen のような多くの研究者が、期限前行使境界をパラメータ化し、そのパラメータの最適値をオプション満期からの後向きの反復計算によって決定する、という別の手法を提案している(注28)。手法を例示するために、先のプット・オプションの例を用い、表26.3に示された 8 個のパスが抽出されていると仮定する。この場合には、時点  $t$  における期限前行使境界は  $S$

(注28) L. Andersen, "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model," *Journal of Computational Finance*, 3, 2 (Winter 2000) : 1-32 を参照。

の臨界値  $S^*(t)$  でパラメータ化できる。時点  $t$  における資産価格が  $S^*(t)$  を下回った場合には時点  $t$  で行使し、 $S^*(t)$  を上回った場合には時点  $t$  では行使しないことになる。 $S^*(3)$  の値は 1.10 である。株価が  $t=3$  (オプションの満期) で 1.10 を上回った場合には行使せず、1.10 を下回った場合には行使するからである。次に  $S^*(2)$  の決め方を考えよう。

$S^*(2)$  の値が 0.77 より小さいとする。この場合、オプションはどのパスでも 2 年後に行使はされない。8 個のパスに対する 2 年後のオプションの価値はそれぞれ  $0.00, 0.00, 0.07e^{-0.06 \times 1}, 0.18e^{-0.06 \times 1}, 0.00, 0.20e^{-0.06 \times 1}, 0.09e^{-0.06 \times 1}, 0.00$  となる。これらの平均は 0.0636 である。次に、 $S^*(2)=0.77$  とする。この場合、8 個のパスに対する 2 年後のオプションの価値はそれぞれ  $0.00, 0.00, 0.07e^{-0.06 \times 1}, 0.18e^{-0.06 \times 1}, 0.00, 0.33, 0.09e^{-0.06 \times 1}, 0.00$  となる。これらの平均は 0.0813 である。同様に、 $S^*(2)$  が  $0.84, 0.97, 1.07, 1.08$  に等しい場合には、2 年後のオプションの価値の平均はそれぞれ  $0.1032, 0.0982, 0.0938, 0.0963$  となる。以上の分析より、 $S^*(2)$  の最適値(すなわち、オプションの価値の平均が最大になる値) は 0.84 になる (もっと正確にいうと、 $0.84 \leq S^*(2) < 0.97$  の範囲で選択するのが最適ということになる)。 $S^*(2)$  としてこの最適値を選ぶと、8 個のパスに対する 2 年後のオプションの価値はそれぞれ  $0.00, 0.00, 0.0659, 0.1695, 0.00, 0.33, 0.26, 0.00$  となり、その平均は 0.1032 となる。

今度は  $S^*(1)$  の計算を行う。 $S^*(1) < 0.76$  の場合には、オプションはどのパスでも 1 年後に行使はされず、1 年後のオプションの価値は  $0.1032e^{-0.06 \times 1} = 0.0972$  となる。 $S^*(1) = 0.76$  の場合には、8 個のパスに対する 1 年後のオプションの価値はそれぞれ  $0.00, 0.00, 0.0659e^{-0.06 \times 1}, 0.1695e^{-0.06 \times 1}, 0.00, 0.34, 0.26e^{-0.06 \times 1}, 0.00$  となる。したがって、オプションの価値の平均は 0.1008 となる。同様に、 $S^*(1)$  が  $0.88, 0.92, 0.93, 1.09$  に等しい場合には、オプションの価値の平均はそれぞれ  $0.1283, 0.1202, 0.1215, 0.1228$  となる。以上の分析より、 $S^*(1)$  の最適値は 0.88 になる (もっと正確にいうと、 $0.88 \leq S^*(1) < 0.92$  の範囲で選択するのが最適ということになる)。時点ゼロで期限前行使がない場合のオプションの価値は

$0.1283e^{-0.06 \times 1} = 0.1208$ となる。これは時点ゼロで行使した場合の価値0.10よりも大きい。

実務上は何万回とシミュレーションを実行して、これまで述べてきた方法を用いて期限前行使境界を決定することになる。いったん期限前行使境界が得られると、変数に対するパスは捨てて、その期限前行使境界を用いて新しいモンテカルロ・シミュレーションを実行し、オプションの評価を行うことができる。アメリカン・プット・オプションの例は、ある時点における期限前行使境界がその時点の株価によって完全に定義できることがわかっているという点で、単純なものであった。もっと複雑な場合には、期限前行使境界のパラメータ化についていくつかの仮定を置く必要がある。

## 上　限

これまで概説してきた二つの手法は部分最適な期限前行使境界を仮定しているので、アメリカン・スタイルのオプションを過小評価する傾向がある。このため、Andersen と Broadie は価格の上限を与える手続を提案している（注29）。この手続きは下限を生成する任意のアルゴリズムと結合して使うことができ、アルゴリズム自体の計算結果よりもアメリカン・オプションの真的価値をもっと正確にとらえることが可能になる。

## 要　約

実際に観測されるボラティリティ・スマイルに合わせることのできる多くのモデルが開発されてきた。CEV モデルは、株式オプションに対して観測されるようなボラティリティ・スマイルを表現できる。ジャンプ拡散モデル

(注29) L. Andersen and M. Broadie, "A Primal-Dual Simulation Algorithm for Pricing Multi-Dimensional American Options," *Management Science*, 50, 9 (2004) : 1222-34 を参照。

は、通貨オプションに対して観測されるようなボラティリティ・スマイルを表現できる。バリアンスーガンマモデルと確率ボラティリティモデルは、株式オプションや為替オプションに対して観測されるボラティリティ・スマイルのどちらでも表現できる柔軟性の高いモデルである。インプライド・ボラティリティ関数モデルはそれよりさらに柔軟性の高いモデルである。このモデルは、市場で観測されるヨーロピアン・オプション価格の任意のパターンに完全に合わせることができるようつくられている。

経路依存型オプションの評価に用いる自然な方法は、モンテカルロ・ミュレーションである。この方法には、計算速度が遅く、アメリカン・スタイルのオプションを簡単には扱えないという短所がある。幸いなことに、ツリーを用いて多くの種類の経路依存型オプションを評価することができる。その方法は、ペイオフを決めている経路関数に対してツリーの各ノードでの代表値を選び、ツリーに沿った後戻し計算を行うときに、それらの各値に対してデリバティブの価値を計算するというものである。

二項ツリーを用いる方法を拡張して、転換社債を評価することができる。ツリーには、企業のデフォルトに対応した枝を追加する。そのツリーに沿った後戻し計算は、保有者の転換権と発行体の早期償還権を考慮して行う。

ツリーは多くの種類のバリア・オプションの評価に用いることができるが、時間ステップ数を増やしたときのオプション価格の真の値への収束速度は遅い場合が多い。収束速度を改善させる一つ目の方法は、ノードが常にバリア上に乗るようにツリーを配置するというものである。二つ目は、ツリーで仮定されているバリアが真のバリアとは異なっているということを、補間法を用いて調整する方法である。三つ目は、バリア付近での原資産価格の細かい動きを表現できるツリーを設計する方法である。

相関のある二つの資産に対するオプションを評価する一つ目の方法は、資産価格を相関のない二つの新しい変数へ変換する方法である。これら二つの変数は別々にツリーでモデル化され、その後で一つの3次元ツリーに結合される。ツリーの各ノードでは、逆変換を用いて資産価格が得られる。二つ目の方法は、相関を反映するように3次元ツリー上のノードを配置する方法で

ある。三つ目の方法は、最初は変数間に相関がないと仮定してツリーをつくり、その後で相関を反映するようにツリー上の確率を調整するという方法である。

モンテカルロ・シミュレーションはもともとアメリカン・スタイルのオプションの評価には適していないが、それらを扱えるようにする二つの方法がある。一つは、最小2乗法による分析を用いて、オプションの継続価値（すなわち、行使しない場合の価値）を関係する変数の値に関連づける方法である。もう一つは、期限前行使境界をパラメータ化して、そのパラメータをオプション満期からの後向き反復計算によって決める方法である。

## 参考文献

- Andersen, L. "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model," *Journal of Computational Finance*, 3, 2 (Winter 2000) : 1-32.
- Andersen, L.B.G., and R. Brotherton-Ratcliffe. "The Equity Option Volatility Smile: An Implicit Finite Difference Approach," *Journal of Computational Finance*, 1, 2 (Winter 1997/98) : 5-37.
- Bodurtha, J.N., and M. Jermakyan. "Non-Parametric Estimation of an Implied Volatility Surface," *Journal of Computational Finance*, 2, 4 (Summer 1999) : 29-61.
- Boyle, P.P., and S.H. Lau. "Bumping Up Against the Barrier with the Binomial Method," *Journal of Derivatives*, 1, 4 (Summer 1994) : 6-14.
- Conze, A., and R. Viswanathan. "Path Dependent Options: The Case of Look-back Options," *Journal of Finance*, 46 (1991) : 1893-1907.
- Cox, J.C., and S.A. Ross. "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976) : 145-66.
- Derman, E., and I. Kani. "Riding on a Smile," *Risk*, February (1994) : 32-39.
- Duan, J.-C. "The GARCH Option Pricing Model," *Mathematical Finance*, 5 (1995) : 13-32.

- Duan, J.-C. "Cracking the Smile," *Risk*, December (1996) : 55-59.
- Dupire, B. "Pricing with a Smile," *Risk*, February (1994) : 18-20.
- Figlewski, S., and B. Gao. "The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing," *Journal of Financial Economics*, 53 (1999) : 313-51.
- Heston, S.L. "A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bonds and Currency Options," *Review of Financial Studies*, 6, 2 (1993) : 327-43.
- Hull, J., and A. White. "Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options," *Journal of Derivatives*, 1, 1 (Fall 1993) : 21-31.
- Hull, J.C., and A. White. "The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities," *Journal of Finance*, 42 (June 1987) : 281-300.
- Hull, J.C., and W. Suo. "A Methodology for the Assessment of Model Risk and its Application to the Implied Volatility Function Model," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37, 2 (June 2002) : 297-318.
- Longstaff, F.A., and E.S. Schwartz. "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001) : 113-47.
- Madan D.B., P.P. Carr, and E.C. Chang. "The Variance-Gamma Process and Option Pricing," *European Finance Review*, 2 (1998) : 79-105.
- Merton, R.C. "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976) : 125-44.
- Rebonato, R. *Volatility and Correlation: The Perfect Hedger and the Fox*, 2nd edn. Chichester : Wiley, 2004.
- Ritchken, P., and R. Trevor. "Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes," *Journal of Finance*, 54, 1 (February 1999) : 377-402.
- Rubinstein, M. "Implied Binomial Trees," *Journal of Finance*, 49, 3 (July 1994) : 771-818.
- Rubinstein, M. "Return to Oz," *Risk*, November (1994) : 67-70.
- Stutzer, M. "A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation," *Journal of Finance*, 51 (December 1996) : 1633-52.
- Tilley, J.A. "Valuing American Options in a Path Simulation Model," *Transactions of the Society of Actuaries*, 45 (1993) : 83-104.

## 章末問題

- 26.1** CEV モデルの公式がプット・コール・パリティを満たしていることを確認せよ。
- 26.2** Merton のジャンプ拡散モデルを用いたモンテカルロ・シミュレーションによる資産価格のサンプルパスの発生のさせ方を説明せよ。
- 26.3** ジャンプ幅が対数正規分布に従う場合には、Merton のジャンプ拡散モデルがプット・コール・パリティを満たしていることを確認せよ。
- 26.4** 資産のボラティリティが現時点から 6 カ月後までは 20%，6 カ月後から 12 カ月後までは 22%，12 カ月後から 24 カ月後までは 24% であるとする。Black-Scholes モデルを用いて満期 2 年のオプションを評価するとき、ボラティリティはいくらにすればよいか。
- 26.5** ジャンプが発生したとき資産価格が常にゼロになるような Merton のジャンプ拡散モデルを考える。年間の平均ジャンプ回数を  $\lambda$  と仮定する。このとき、ヨーロピアン・コール・オプションの価格は、無リスク金利として  $r$  のかわりに  $r + \lambda$  を用いる以外は、ジャンプがない世界での価格と同じになることを示せ。この場合、ジャンプの発生確率が増加したとき、コール・オプションの価値は増加するか、それとも減少するか（ヒント：ジャンプがないと仮定した場合とジャンプが 1 回以上発生すると仮定した場合について、オプションの価値を求めよ。また、時間  $T$  の間にジャンプのない確率は  $e^{-\lambda T}$  である）。
- 26.6** 時点 0において、ある配当のない株式の価格が  $S_0$  である。時点 0 から時点  $T$  までの期間を長さが  $t_1$  と  $t_2$  の 2 期間に分割する。最初の期間では無リスク金利とボラティリティはそれぞれ  $r_1$  と  $\sigma_1$  であり、2 番目の期間ではそれらはそれぞれ  $r_2$  と  $\sigma_2$  である。世界はリスク中立であると仮定する。
- (a) 第 13 章の結果を用いて、時点  $T$  における株価の分布を  $r_1, r_2, \sigma_1, \sigma_2, t_1, t_2$ 、および  $S_0$  を用いて表せ。

- (b)  $\bar{r}$ を時点ゼロから時点  $T$ までの期間の平均金利,  $\bar{V}$ を同じ期間の平均分散率とする。このとき,  $T$ の関数としての株価の分布を  $\bar{r}, \bar{V}, T, S_0$ を用いて表せ。
- (c) 期間を異なる金利とボラティリティをもつ3期間に分割した場合に, (a)と(b)に対応する結果を求めよ。
- (d) 無リスク金利  $r$ とボラティリティ  $\sigma$ が時間の関数であるとき, リスク中立世界における時点  $T$ での株価の分布は,

$$\ln S_T \sim \phi \left[ \ln S_0 + \left( \bar{r} - \frac{\bar{V}}{2} \right) T, VT \right]$$

で与えられることを示せ。ただし,  $\bar{r}$ は  $r$ の平均値,  $\bar{V}$ は  $\sigma^2$ の平均値,  $S_0$ は現在の株価である。

- 26.7** (26.2)式と(26.3)式で表される確率ボラティリティモデルにおいて, 資産価格のパスをシミュレーションする式を書き下せ。
- 26.8** 「IVF モデルは, ボラティリティ曲面の時間発展を必ずしも正しく表していない」。この主張について説明せよ。
- 26.9** 「金利が一定の場合, IVF モデルはある一時点の原資産価格でペイオフが決まるすべてのデリバティブを正しく評価できる」。この主張について説明せよ。
- 26.10** 3期間ツリーを用いて, 通貨に対するアメリカン変動ルックバック・コール・オプションを評価せよ。ただし, 当初の為替レートを 1.6, 国内無リスク金利を年率 5%, 外国無リスク金利を年率 8%, 為替ボラティリティを 15%, 満期を 18カ月とする。26.5節の手法を用いよ。
- 26.11** パリアンスーガンマモデルでパラメータ  $v$ をゼロに近づけるとどうなるか。
- 26.12** 3期間ツリーを用いて, 配当のない株式の幾何平均株価に対するアメリカン・プット・オプションを評価せよ。ただし, 株価を 40 ドル, 行使価格を 40 ドル, 無リスク金利を年率 10%, ボラティリティを年率 35%, 満期を 3 カ月とする。また, 幾何平均を計算する期間は現

時点からオプション満期までとする。

- 26.13** 26.5節で説明した経路依存型オプションの評価方法を用いて、ペイオフが  $\max(S_{\text{ave}} - K, 0)$  に等しい満期 2 年のアメリカン・オプションを評価することはできるか。ただし、 $S_{\text{ave}}$  は行使時点の前 3 カ月間における平均資産価格である。答の理由についても説明せよ。
- 26.14** 図26.4にある値6.492が正しいことを確認せよ。
- 26.15** 26.8節の例で考察した 8 個のパスに対して、期限前行使戦略を吟味せよ。最小 2 乗法と行使境界パラメータ化法とで、期限前行使戦略にはどのような違いが生じるか。これらのサンプルパスに対して、どちらの手法のほうがオプション価格が高くなるか。
- 26.16** 配当のない株式に対するヨーロピアン・プット・オプションについて考える。株価は 100 ドル、行使価格は 110 ドル、無リスク金利は年率 5 %、満期は 1 年とする。オプション期間中の平均分散率は確率 0.2 で 0.06、確率 0.5 で 0.09、確率 0.3 で 0.12 になると仮定する。ボラティリティは株価と相関をもたないとして、DerivaGem ソフトウェアを用いてオプションの価値を求めよ。
- 26.17** バリアが二つあるとき、ノードが両方のバリアに乗るようにするにはどのようにツリーを構築したらよいか。
- 26.18** 満期までの間いつでも発行体の株式 5 株に転換できる、額面 100 ドル、満期 18 カ月の割引債を考える。現時点の株価は 20 ドル、株式には配当はなく、無リスク金利はすべての満期に対して連続複利で年率 6 %、株価のボラティリティは年率 25 % とする。デフォルト強度は年 3 %、回収率は 35 % と仮定する。さらに、債券は 110 ドルで早期償還できるとする。このとき、3 期間ツリーを用いて債券の価値を計算せよ。また、転換権の価値（発行体の早期償還権の価値控除後）はいくらになるか。

## 宿題

- 26.19** 株価指数に対する満期 9 カ月の新規ヨーロピアン変動ルックバック・コール・オプションについて考える。現在の指数の水準を 400, 無リスク金利を年率 6 %, 指数の配当利回りを年率 4 %, ボラティリティを年率 20 % とする。このとき, 26.5節の方法を用いてこのオプションを評価し, その結果と解析式を用いて DerivaGem ソフトウェアで計算した結果とを比較せよ。
- 26.20** 満期 6 カ月の通貨オプションの価格付けに用いられるボラティリティが表 18.2 のように与えられているとする。国内と外国の金利は年率 5 %, 現時点の為替レートは 1.00 と仮定する。このとき, 行使価格が 1.05 の満期 6 カ月のコール・オプションの買いポジションと行使価格が 1.10 の満期 6 カ月のコール・オプションの売りポジションからなるブル・スプレッドについて考える。
- スプレッドの価値を求めよ。
  - 二つのオプションに同じボラティリティを用いた場合, ブル・スプレッドの正しい価格を与える単一のボラティリティはいくらになるか (DerivaGem Application Builder と Goal Seek または Solver を用いよ)。
  - その結果は, エキゾチック・オプションの価格付けに用いる正しいボラティリティは直感に反することもある, という本章のはじめに述べたことを支持するものであるか。
  - IVF モデルを用いてブル・スプレッドの正しい価格は得られるか。
- 26.21** 26.8節でのブット・オプションの例に対する分析を, 行使価格を 1.13 にして実施せよ。そのとき, 最小 2 乗法と行使境界パラメータ化法の両方を用いよ。
- 26.22** 原資産が配当のない株式の場合に, Merton のジャンプ拡散モデルについて考える。ジャンプの平均頻度を年 1 回, 平均のジャンプ率

を 2 %, ジャンプ率の対数の標準偏差を 20%, 株価を 100, 無リスク金利を 5 %, 拡散過程部分のボラティリティ  $\sigma$  を 15 %, 満期を 6 カ月とする。DerivaGem Application Builder を用いて, 行使価格 80, 90, 100, 110, および 120 に対するインプライド・ボラティリティを計算せよ。また, 得られたボラティリティ・スマイルから株価の確率分布について何がわかるか。

**26.23** 額面 100 ドル, 満期 3 年の転換社債を ABC 社が発行した。各年の終わりに 5 ドルのクーポンが支払われる。この債券には 1 年目の終わりと 2 年目の終わりに ABC 社の株式へ転換する権利がついている。1 年目の終わりには, 利払日の直後に 3.6 株と交換することができる。2 年目の終わりには, 利払日の直後に 3.5 株と交換することができる。現在の株価は 25 ドル, 株価のボラティリティは 25 %, 株式に配当はなく, 無リスク金利は連続複利で 5 %, ABC 社の発行する債券のイールドは連続複利で 7 %, 回収率は 30 % であるとする。

- (a) 3 期間のツリーを用いて債券の価値を求めよ。
  - (b) 転換権の価値はいくらになるか。
  - (c) 債券が最初の 2 年間はいつでも 115 ドルで早期償還可能であるとした場合, 債券の価値と転換権の価値はいくら変化するか。
  - (d) 6 カ月後, 18 カ月後, および 30 カ月後に株式に 1 ドルの配当が支払われるとした場合, 分析の仕方はどのように変わるかを説明せよ。ただし, 詳しい計算を示す必要はない。
- (ヒント: 平均デフォルト強度の推定には(22.2)式を用いよ)

## 第27章

# マルチングールと測度

これまでオプションを評価する際に金利は定数であると仮定してきた。本章では、第28章から第32章で金利デリバティブを評価するための準備として、この仮定を緩める。

リスク中立化法によると、デリバティブは、(a)原資産の期待収益率が無リスク金利に等しいと仮定して期待ペイオフを計算し、(b)その期待ペイオフを無リスク金利で割り引く、ということによって評価できる。無リスク金利が定数のときは、リスク中立化法は明確なあいまいさのない評価方法である。金利が確率変動するときは、その方法はそれほど明白ではない。原資産の期待収益率が無リスク金利に等しいと仮定する、というのはどういう意味であろうか。それは、(a)日々の期待収益率が1日の無リスク金利に等しい、あるいは(b)各年の期待収益率が1年物無リスク金利に等しい、それとも(c)5年間の期待収益率がその期間の初めにおける5年物無リスク金利に等しい、とい

うことであろうか。無リスク金利で期待ペイオフを割り引くというのはどういうことであろうか。たとえば、5年後に実現するペイオフの期待値を現時点における5年物無リスク金利で割り引けばよいということであろうか。

本章では、金利が確率変動する場合におけるリスク中立化法の理論的基礎を説明し、任意に与えられた状況において多くの異なるリスク中立世界が仮定できることを示す。まず、リスクの市場価格 (market price of risk) を定義し、任意のデリバティブに対して短期間に得られる無リスク金利に対する超過収益率は、原資産確率変数のリスクの市場価格と線形関係にあることを示す。従来のリスク中立世界ではリスクの市場価格はすべてゼロであると仮定されているが、リスクの市場価格について別のことを仮定したほうが有用な場合もあることがわかる。

マルチングール (martingale) と測度 (measure) は、リスク中立化法を完全に理解するうえで非常に重要な概念である。マルチングールとは、ドリフトがゼロの確率過程である。測度は証券価格を評価する際の単位である。本章における重要な結果は、同値マルチングール測度に関するものである。それは、取引されている一つの証券の価格を単位としてすべての証券の価格を測ることにすると、すべての証券の価格過程がマルチングールとなるようなリスクの市場価格が存在する、というものである。

本章では、同値マルチングール測度に関する結果が強力であることを示す例として、それを用いて Black モデル (16.8節を参照) を金利が確率的な場合に拡張することと、それを用いたエクスチェンジ・オプションの評価について説明する。さらに、その結果を用いて、第28章では金利デリバティブの評価に使われている標準的なマーケット・モデルに対する解釈を与え、第29章ではいくつかの標準的でないデリバティブを評価し、第31章では LIBOR マーケット・モデルについて詳しく論じる。

## 27.1 リスクの市場価格

一変数  $\theta$  の値に依存するデリバティブの性質を考えることから始めよう。

$\theta$  の従う過程を,

$$\frac{d\theta}{\theta} = mdt + s dz \quad (27.1)$$

と仮定する。ここで  $dz$  はウィナー過程である。パラメータ  $m$  と  $s$  は、それぞれ  $\theta$  の期待成長率と  $\theta$  のボラティリティである。それらは  $\theta$  と時間  $t$  のみに依存した関数であると仮定する。変数  $\theta$  は投資資産の価格とは限らず、ニューオリンズ中心部の気温のような金融市場とはかけ離れたものであってもよい。

$f_1$  と  $f_2$  を  $\theta$  と  $t$  のみに依存する二つのデリバティブの価格とする。これらは、たとえばペイオフが将来のある時点における  $\theta$  の関数で与えられるオプションや他のデリバティブのような商品である。考察する期間では、 $f_1$  と  $f_2$  からの収入はないものと仮定する(注1)。

$f_1$  と  $f_2$  の従う過程を,

$$\frac{df_1}{f_1} = \mu_1 dt + \sigma_1 dz$$

$$\frac{df_2}{f_2} = \mu_2 dt + \sigma_2 dz$$

とする。ここで、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$  は  $\theta$  と  $t$  の関数である。価格  $f_1$  と  $f_2$  における不確実性は(27.1)式の  $dz$  によるものだけなので、これらの過程における “ $dz$ ” はそれと同一のものでなければならない。

13.6節で行った Black-Scholes の分析と同様の分析を行って、価格  $f_1$  と  $f_2$  を関連づけることができる。 $f_1$  と  $f_2$  の過程を離散形で表すと、

$$\Delta f_1 = \mu_1 f_1 \Delta t + \sigma_1 f_1 \Delta z \quad (27.2)$$

$$\Delta f_2 = \mu_2 f_2 \Delta t + \sigma_2 f_2 \Delta z \quad (27.3)$$

となる。最初のデリバティブ  $\sigma_2 f_2$  単位と 2 番目のデリバティブ  $-\sigma_1 f_1$  単位からなる瞬間的に無リスクなポートフォリオをつくることによって、 $\Delta z$  を消去することができる。 $\Pi$  をそのポートフォリオの価値とすると、

---

(注1) ここでの分析は、デリバティブからの収入がある場合にも拡張できる(章末問題 27.7を参照)。

$$\Pi = (\sigma_2 f_2) f_1 - (\sigma_1 f_1) f_2 \quad (27.4)$$

となり,

$$\Delta \Pi = \sigma_2 f_2 \Delta f_1 - \sigma_1 f_1 \Delta f_2$$

となる。(27.2)式と(27.3)式を代入すると, これは

$$\Delta \Pi = (\mu_1 \sigma_2 f_1 f_2 - \mu_2 \sigma_1 f_1 f_2) \Delta t \quad (27.5)$$

になる。ポートフォリオは瞬間的に無リスクなので, その収益率は無リスク金利に等しくなければならない。したがって,

$$\Delta \Pi = r \Pi \Delta t$$

が成り立つ。この式に(27.4)式と(27.5)式を代入すると,

$$\mu_1 \sigma_2 - \mu_2 \sigma_1 = r \sigma_2 - r \sigma_1$$

すなわち,

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} \quad (27.6)$$

が得られる。

(27.6)式の左辺は  $f_1$  の従う過程に現れるパラメータにのみに依存し, 右辺は  $f_2$  の従う過程に現れるパラメータのみに依存していることに注意しよう。

(27.6)式の両辺の値を  $\lambda$  と定義すると,

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} = \lambda$$

と書ける。添字を落とすと, (27.6)式より,  $f$  が  $\theta$  と  $t$  のみに依存するデリバティブの価格で,

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sigma dz \quad (27.7)$$

に従っているならば,

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \lambda \quad (27.8)$$

が成り立つことがわかる。このパラメータ  $\lambda$  は  $\theta$  のリスクの市場価格と呼ばれるものである。それは  $\theta$  と  $t$  の両方に依存するかもしれないが, デリバティブ  $f$  の性質には依存していない。この分析からわかるように, 裁定

機会がないならば、任意に与えられた時点において、 $(\mu - r)/\sigma$ は $\theta$ と $t$ のみに依存するすべてのデリバティブに対して同一でなければならない。

$f$ のボラティリティと呼ばれるであろう $\sigma$ の値は正にも負にもなりうる、ということに注意すべきである。それは(27.7)式における $d_2$ の係数である。 $\theta$ のボラティリティ $s$ が正で、 $f$ が $\theta$ と正の相関関係にある（すなわち $\partial f / \partial \theta$ が正）ならば、 $\sigma$ は正になる。しかし、 $f$ が $\theta$ と負の相関関係にあるならば、 $\sigma$ は負になる。 $f$ のボラティリティは、慣習に従って定義すると、 $|\sigma|$ になる。

$\theta$ のリスクの市場価格は、 $\theta$ に依存する証券に対するリスクとリターンのトレード・オフの尺度になっている。(27.8)式は、

$$\mu - r = \lambda \sigma \quad (27.9)$$

と書ける。変数 $\sigma$ は $f$ に現れる $\theta$ -リスクの量を表していると大雑把には解釈できる。式の右辺では、 $\theta$ -リスクの量に $\theta$ -リスクの価格が掛けられている。左辺は、このリスクの見合いとして要求される無リスク金利に対する期待超過収益率である。(27.9)式は、株式の期待超過収益率とリスクを関係づける資本資産価格モデル(CAPM)と類似のものである。本章では、リスクの市場価格の測定方法には触れない。これについては、リアル・オプションの評価を考察する第33章で論じる。

第5章では、投資資産と消費資産とを区別した。投資資産とは、非常に多くの投資家によって純粹に投資目的で売買される資産である。一方、消費資産とは、主として消費のために保有される資産である。(27.8)式は、収入のない $\theta$ にのみ依存するすべての投資資産に対して成り立つ。変数 $\theta$ 自体がそのような資産の場合には、

$$\frac{\mu - r}{s} = \lambda$$

が成り立つ。そうでない場合には、この関係が成り立つとは限らない。

### 【例27.1】

価格が原油価格と正の相関をもち、それ以外の確率変数には依存していないデリバティブを考える。その期待収益率は年率12%、ボラティリ

ティは年率20%とする。無リスク金利は年率8%と仮定する。このとき、原油に対するリスクの市場価格は、

$$\frac{0.12 - 0.08}{0.2} = 0.2$$

となる。原油は投資資産というよりも消費資産なので、それ自体のリスクの市場価格は、 $\mu$ を原油投資に対する期待収益率とし、 $\sigma$ を原油価格のボラティリティとしても、(27.8)式からは計算できない、ということに注意しよう。

### 【例27.2】

90日物金利と正の相関をもっている二つの証券を考える。一つ目の証券は期待収益率が年率3%，ボラティリティが年率20%で、二つ目の証券はボラティリティが年率30%であるとする。瞬間的な無リスク金利は年率6%と仮定する。金利リスクの市場価格は一つ目の証券の期待収益率とボラティリティから、

$$\frac{0.03 - 0.06}{0.2} = -0.15$$

である。したがって、(27.9)式を変形すると、二つ目の証券の期待収益率は、

$$0.06 - 0.15 \times 0.3 = 0.015$$

すなわち年率1.5%となる。

## 他の世界

デリバティブの価格 $f$ の従う過程は、

$$df = \mu f dt + \sigma f dz$$

である。 $\mu$ の値は投資家のリスク選好度に依存している。リスクの市場価格がゼロの世界では、 $\lambda$ の値はゼロに等しい。このとき、(27.9)式より $\mu = r$ となるので、 $f$ の従う過程は、

$$df = rfdt + \sigma f dz$$

となる。これを従来のリスク中立世界 (traditional risk-neutral world) と呼ぶこととする。

リスクの市場価格  $\lambda$  に対して別のことと仮定すると、内的整合性をもつた別の世界が定義できる。(27.9)式より、

$$\mu = r + \lambda\sigma$$

が成り立つので、

$$df = (r + \lambda\sigma) f dt + \sigma f dz \quad (27.10)$$

となる。したがって、変数のリスクの市場価格によって、その変数に依存するすべての証券の成長率が決まる。あるリスクの市場価格から別のリスクの市場価格に移ると、証券価格の期待成長率は変化するが、ボラティリティは同じままである。これは、拡散過程に従う変数に対して成り立つ一般的な性質で、11.7節で例示したものである。特定のリスクの市場価格を選ぶことは、確率測度を定義することでもある。“実世界”，すなわち実際に観測される証券の成長率に対応したリスクの市場価格の値も存在する。

## 27.2 複数の状態変数

$n$  個の変数  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  が確率過程

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i \quad (27.11)$$

に従っているとする。ここで、 $i=1, 2, \dots, n$  であり、 $dz_i$  はウィナー過程である。パラメータ  $m_i$  と  $s_i$  は期待成長率とボラティリティで、 $\theta_i$  と時間の関数であってもよい。章末の付録に、多変数関数に対する伊藤の補題が与えられている。それを用いると、 $\theta_i$  に依存する証券の価格  $f$  が従う過程は、

$$\frac{df}{f} = \mu dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i dz_i \quad (27.12)$$

の形になることがわかる。この式で  $\mu$  は証券の期待収益率、 $\sigma_i dz_i$  はこの収益率に関するリスクの  $\theta_i$  に帰する成分である。

章末の付録より、

$$\mu - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i \quad (27.13)$$

が成り立つ。ここで  $\lambda_i$  は  $\theta_i$  に対するリスクの市場価格である。これは、証券に要求する投資家の期待超過収益率を  $\lambda_i$  と  $\sigma_i$  に関係づける式である。  
(27.9)式は、この式で  $n=1$ とした特殊な場合である。右辺の  $\lambda_i \sigma_i$  の項は、投資家が証券に要求する超過収益率がその証券の  $\theta_i$  に対する依存関係にどの程度影響を受けるかを表している。 $\lambda_i \sigma_i = 0$ ならば、その影響はない。 $\lambda_i \sigma_i > 0$ ならば、投資家は  $\theta_i$  に伴うリスクの見合いとして、より高い収益率を求める。 $\lambda_i \sigma_i < 0$ ならば、証券が  $\theta_i$  に依存していることによって、そうでない場合よりも投資家が要求する収益率は低くなる。変数の与える影響が典型的な投資家のポートフォリオのリスクを増加させるというよりは減少させる方向に働く場合に、 $\lambda_i \sigma_i < 0$ という状況が生じる。

----- [例27.3] -----

原油価格、金の価格、および株価指数の収益率という三つの変数に株価が依存しているとする。これらの変数に対するリスクの市場価格をそれぞれ0.2、-0.1、0.4と仮定する。また、三つの変数に対応する(27.12)式の  $\sigma_i$  がそれぞれ0.05、0.1、0.15と推定されていると仮定する。このとき、無リスク金利に対するこの株式の超過収益率は、

$$0.2 \times 0.05 - 0.1 \times 0.1 + 0.4 \times 0.15 = 0.06$$

すなわち年率6.0%となる。この結果は、株価に影響を与える変数がある場合でも、その他の各変数のリスクの市場価格がゼロであるならば、そのまま成り立つ。

(27.13)式は、1976年に Stephen Ross によって提案された無裁定価格理論 (APT : arbitrage pricing theory) と密接に関係している(注2)。連続時間の場合の資本資産価格モデル (CAPM) はこの式の特殊な場合とみなすことができる。CAPM では、投資家は株式市場の収益に対するリスクと相関

---

(注2) S.A. Ross, "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing," *Journal of Economic Theory*, 13 (December 1976) : 343-62 を参照。

のあるリスクに対してはその見合いの超過収益を要求するが、それ以外のリスクに対しては超過収益を要求しないとされる。株式市場の収益と相関のあるリスクはシステムティック (systematic) と呼ばれ、それ以外のリスクは非システムティック (nonsystematic) と呼ばれる。CAPM が正しいとすれば、 $\lambda_i$  は  $\theta_i$  の変化率と株式市場の収益率の相関に比例している。 $\theta_i$  が株式市場の収益率と相関をもたない場合には、 $\lambda_i$  はゼロである。

### 27.3 マルチングール

マルチングールとはドリフトがゼロの確率過程である(注3)。変数  $\theta$  が、

$$d\theta = \sigma dz$$

の形の過程ならば、 $\theta$  はマルチングールである。ただし、 $dz$  はウィナー過程である。変数  $\sigma$  は確率過程であってもよく、 $\theta$  やそれ以外の確率変数に依存してもよい。マルチングールは、任意の将来時点における期待値が現時点の値に等しいという便利な性質をもっている。すなわち、

$$E(\theta_T) = \theta_0$$

が成り立つ。ここで、 $\theta_0$  と  $\theta_T$  はそれぞれ時点ゼロと時点  $T$  における  $\theta$  の値である。この結果を理解するために、微小時間における  $\theta$  の変化は平均ゼロの正規分布に従っていることに注意しよう。したがって、微小時間における  $\theta$  の変化の期待値はゼロである。時点 0 から時点  $T$  までにおける  $\theta$  の変化は多くの微小時間における変化の和である。このことから、時点 0 から時点  $T$  までにおける  $\theta$  の変化の期待値もゼロでなければならない。

#### 同値マルチングール測度

$f$  と  $g$  をある単一の不確実性に依存している、取引されている証券の価格とする。考える期間では証券からの収入はないと仮定し、 $\phi = f/g$  と置

(注3) もっと形式的には、確率変数の列  $X_0, X_1, \dots$  がすべての  $i > 0$  に対して

$$E(X_i | X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_0) = X_{i-1}$$

を満たすとき、マルチングールという。ただし、 $E$  は期待値を表している。

く(注4)。変数  $\phi$  は  $g$  に対する  $f$  の相対価格である。これは、ドルではなく  $g$  単位で表した、 $f$  の価格と考えることができる。この証券価格  $g$  はニューメレール (numeraire: 基準財) と呼ばれる。

同値マルチングール測度 (equivalent martingale measure) に関する結果は、裁定機会がないならば、リスクの市場価格を適当に選ぶと  $\phi$  はマルチングールになる、というものである。さらに、与えられたニューメレール証券  $g$  に対して、同じリスクの市場価格を用いてすべての証券  $f$  に対して  $\phi$  はマルチングールとなる。そのときのリスクの市場価格は  $g$  のボラティリティである。言い換えると、リスクの市場価格を  $g$  のボラティリティにすれば、比  $f/g$  はすべての証券価格  $f$  に対してマルチングールとなる。

この結果を証明するため、 $f$  と  $g$  のボラティリティを  $\sigma_f$  と  $\sigma_g$  とする。  
(27.10)式から、リスクの市場価格が  $\sigma_g$  である世界では、

$$df = (r + \sigma_g \sigma_f) f dt + \sigma_f f dz$$

$$dg = (r + \sigma_g^2) g dt + \sigma_g g dz$$

となる。伊藤の補題より、

$$d\ln f = (r + \sigma_g \sigma_f - \sigma_f^2/2) dt + \sigma_f dz$$

$$d\ln g = (r + \sigma_g^2/2) dt + \sigma_g dz$$

となるので、

$$d(\ln f - \ln g) = (\sigma_g \sigma_f - \sigma_f^2/2 - \sigma_g^2/2) dt + (\sigma_f - \sigma_g) dz$$

すなわち、

$$d\left(\ln \frac{f}{g}\right) = -\frac{(\sigma_f - \sigma_g)^2}{2} dt + (\sigma_f - \sigma_g) dz$$

となる。伊藤の補題を用いて、 $\ln(f/g)$  に対する確率過程から  $f/g$  に対する確率過程を導くと、

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = (\sigma_f - \sigma_g) \frac{f}{g} dz \quad (27.14)$$

が得られる。これは  $f/g$  がマルチングールであることを示しており、同値

(注4) 章末問題27.8で、ここで分析を証券に収入がある場合にも拡張する。

マルチングール測度に関する結果が証明された。リスクの市場価格が  $g$  のボラティリティ  $\sigma_g$  に等しい世界を、 $g$  に関するフォワード・リスク中立 (forward risk neutral) 世界と呼ぶ。

$g$  に関するフォワード・リスク中立世界では  $f/g$  はマルチングールとなるので、本節の初めに述べた結果から、

$$\frac{f_0}{g_0} = E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right)$$

すなわち、

$$f_0 = g_0 E_g\left(\frac{f_T}{g_T}\right) \quad (27.15)$$

が成り立つ。ただし、 $E_g$  は  $g$  に関するフォワード・リスク中立世界における期待値を表す。

## 27.4 ニューメレールに関するいくつかの選択肢

ここでは、同値マルチングール測度に関する結果について、いくつかの例を紹介する。最初の例は、同値マルチングールに関する結果がこれまでの章で用いてきたリスク中立化法と整合性がとれていることを示すものである。その他の例は、第28章で説明する債券オプション、金利キャップ、およびスワップションの評価方法の準備となるものである。

### ニューメレールとしてのマネー・マーケット・アカウント

ドルのマネー・マーケット・アカウントとは、時点ゼロにおいて 1 ドルの価値があり、任意の時点で瞬間的な無リスク金利  $r$  の利子が得られる証券のことである(注5)。変数  $r$  は確率過程であってもよい。 $g$  をマネー・マーケット・アカウントに等しくとると、 $g$  の成長率は  $r$  となるので、

$$dg = rg dt \quad (27.16)$$

となる。 $g$  のドリフトは確率過程であるが、 $g$  のボラティリティはゼロである。したがって27.3節の結果より、リスクの市場価格がゼロの世界では、

$f/g$  はマルチングールになる。これは、前に従来のリスク中立世界として定義した世界である。(27.15)式より、

$$f_0 = g_0 \hat{E} \left( \frac{f_T}{g_T} \right) \quad (27.17)$$

となる。ここで  $\hat{E}$  は従来のリスク中立世界での期待値を表す。

いまの場合、 $g_0 = 1$ かつ、

$$g_T = e^{\int_t^T r dt}$$

となるので、(27.17)式は、

$$f_0 = \hat{E} \left( e^{-\int_t^T r dt} f_T \right) \quad (27.18)$$

すなわち、

$$f_0 = \hat{E} (e^{-rT} f_T) \quad (27.19)$$

となる。ここで  $r$  は時点ゼロから時点  $T$  における  $r$  の平均である。この式から、金利デリバティブを評価する一つの方法は、短期金利  $r$  を従来のリスク中立世界でシミュレーションすることである、ということがわかる。

短期金利  $r$  が定数であると仮定される場合には、(27.19)式は、

$$f_0 = e^{-rT} \hat{E} (f_T)$$

すなわち前章で用いたリスク中立化法での関係式になる。

## ニューメレールとしての割引債価格

$P(t, T)$  を時点  $T$  に 1 ドルが支払われる割引債の時点  $t$  における価格とする。今度は  $g$  を  $P(t, T)$  としたときにわかるることを調べてみよう。 $P(t, T)$

(注 5) マネー・アカウントは、次に説明する証券で、 $\Delta t$  をゼロに近づける極限をとったものである。長さ  $\Delta t$  の最初の短期間に対しては、その証券は初めの時点における満期  $\Delta t$  の金利で投資されている。時点  $\Delta t$  では、その証券はその時点における満期  $\Delta t$  の新たな金利でさらに期間  $\Delta t$  だけ再投資される。時点  $2\Delta t$  では、その証券はその時点における満期  $\Delta t$  の新たな金利で再びさらに期間  $\Delta t$  だけ再投資される、といった具合に再投資が続けられる証券である。他の通貨に対するマネー・マーケット・アカウントも、ドルのマネー・マーケット・アカウントと同様に定義される。

に関するフォワード・リスク中立世界での期待値を  $E_T$  で表す。

$g_T = P(T, T) = 1$ かつ  $g_0 = P(0, T)$  となるので、(27.15)式より、

$$f_0 = P(0, T) E_T(f_T) \quad (27.20)$$

が得られる。(27.20)式と(27.19)式との違いに注意しよう。(27.19)式では割引部分が期待値のなかにある。それに対し、(27.20)式では割引部分にあたる  $P(0, T)$  の項が期待値の外にある。したがって、ペイオフが時点  $T$  にのみ発生する証券に対しては、 $P(t, T)$  をニューメレールとして用いると、物事がかなり簡単になる。

金利でない変数  $\theta$  を考えよう(注6)。 $\theta$  に対する満期  $T$  のフォワード契約は、時点  $T$  に  $\theta_T - K$  が支払われる契約として定義される。ここで  $\theta_T$  は時点  $T$  における  $\theta$  の値である。 $f$  をこのフォワード契約の価値とすると、(27.20)式より、

$$f_0 = P(0, T) [E_T(\theta_T) - K]$$

となる。 $\theta$  のフォワード価格  $F$  とは、 $f_0$  がゼロになるような  $K$  の値のことである。したがって、

$$P(0, T) [E_T(\theta_T) - F] = 0$$

すなわち、

$$F = E_T(\theta_T) \quad (27.21)$$

となる。(27.21)式から、(金利以外の) 任意の変数に対するフォワード価格は  $P(t, T)$  に関するフォワード・リスク中立世界における将来の現物価格の期待値となることがわかる。ここでフォワード価格と先物価格との違いに注意しよう。16.7節で説明したように、変数に対する先物価格は従来のリスク中立世界における将来の現物価格の期待値になる。

(27.20)式から、時点  $T$  にペイオフのある任意の証券は、満期  $T$  の債券に関するフォワード・リスク中立世界での期待ペイオフを計算し、満期  $T$  の無リスク金利で割り引くことによって評価できることがわかる。また、

---

(注6) 金利に対するフォワード契約は他の変数に対するフォワード契約とは異なった定義がなされるので、ここでの分析は金利に対しては適用できない。フォワード・レートは、対応する債券のフォワード価格にインプライドされた金利である。

(27.21)式から、期待ペイオフを計算するときには原資産変数の期待値がそのフォワード価値に等しいと仮定してもよいことがわかる。

### 債券価格をニューメレールとした場合の金利

$R(t, T, T^*)$ を時点  $t$ における複利期間を  $T^*-T$  とする、 $T$  から  $T^*$ までの期間に対するフォワード・レートと定義する(たとえば、 $T^*-T=0.5$ のとき金利は半年複利、 $T^*-T=0.25$ のとき金利は四半期複利、などとなる)。時点  $T$  に発行される満期  $T^*$  の割引債の時点  $t$  におけるフォワード価格は、

$$\frac{P(t, T^*)}{P(t, T)}$$

である。フォワード・レートの定義は、ほとんどの変数のフォワード価格の定義とは異なっている。フォワード・レートは対応するフォワード債券価格にインプライドされている金利である。したがって、

$$\frac{1}{[1+(T^*-T)R(t, T, T^*)]} = \frac{P(t, T^*)}{P(t, T)}$$

が成り立ち、

$$R(t, T, T^*) = \frac{1}{T^*-T} \left[ \frac{P(t, T)}{P(t, T^*)} - 1 \right]$$

すなわち、

$$R(t, T, T^*) = \frac{1}{T^*-T} \left[ \frac{P(t, T) - P(t, T^*)}{P(t, T^*)} \right]$$

となる。

$$f = \frac{1}{T^*-T} [P(t, T) - P(t, T^*)]$$

かつ  $g=P(t, T^*)$  とおくと、同値マルチングール測度に関する結果から、 $R(t, T, T^*)$  は  $P(t, T^*)$  に関するフォワード・リスク中立世界でのマルチングールとなることがわかる。これより、

$$R(0, T, T^*) = E_{T^*}[R(T, T, T^*)] \quad (27.22)$$

が成り立つ。ここで、 $E_{T^*}$  は  $P(t, T^*)$  に関するフォワード・リスク中立世

界での期待値である。

変数  $R(0, T, T^*)$  は時点 0 における時点  $T$  から時点  $T^*$  までのフォワード・レートの値であり、 $R(T, T, T^*)$  は時点  $T$  から時点  $T^*$  までの金利の実現値である。したがって(27.22)式から、時点  $T$  から時点  $T^*$  までの金利は、満期  $T^*$  の割引債に関するフォワード・リスク中立世界での将来の金利の期待値に等しいことがわかる。この結果は、(27.20)式の結果と合わせて、次章の金利キャップに対する標準的なマーケット・モデルを理解するうえで欠かせないものである。

### ニューメレールとしての年金係数

同値マルチングール測度に関する次の応用として、支払日が時点  $T_1, T_2, \dots, T_N$  の将来時点  $T$  に開始するスワップを考える。 $T_0 = T$  とおく。スワップの元本は 1 ドルと仮定する。時点  $t$  ( $t \leq T$ ) におけるフォワード・スワップ・レート（すなわち、スワップの価値がゼロとなるような固定サイドの金利）を  $s(t)$  とすると、スワップの固定サイドの価値は、

$$s(t) A(t)$$

となる。ただし、

$$A(t) = \sum_{i=0}^{N-1} (T_{i+1} - T_i) P(t, T_{i+1})$$

である。第 7 章で示したように、スワップの最終支払日の支払に元本を加えると、開始日におけるスワップの変動サイドの価値は想定元本に等しくなる。したがって、時点  $T_N$  に 1 ドルを付け加えると、時点  $T$  における変動サイドの価値は 1 ドルになる。時点  $T_N$  で受け取る 1 ドルの価値は  $P(t, T_N)$  である。また、時点  $T_0$  で受け取る 1 ドルの価値は  $P(t, T_0)$  である。したがって、時点  $t$  における変動サイドの価値は、

$$P(t, T_0) - P(t, T_N)$$

となる。固定サイドと変動サイドの価値が等しいとすると、

$$s(t) A(t) = P(t, T_0) - P(t, T_N)$$

すなわち、

$$s(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{A(t)} \quad (27.23)$$

が得られる。

同値マルチングール測度に関する結果を  $f = P(t, T_0) - P(t, T_N)$  かつ  $g = A(t)$  として用いると,

$$s(t) = E_A[s(T)] \quad (27.24)$$

が得られる。ここで、 $E_A$  は  $A(t)$  に関するフォワード・リスク中立世界における期待値を表す。したがって、 $A(t)$  に関するフォワード・リスク中立世界では、将来のスワップ・レートの期待値は現時点のスワップ・レートに等しい。

任意の証券  $f$  に対して、(27.15)式より、

$$f_0 = A(0) E_A \left[ \frac{f_T}{A(T)} \right] \quad (27.25)$$

が成り立つ。この結果は、(27.24)式の結果と合わせて、次章のスワップ・ショットに対する標準的なマーケット・モデルを理解するうえで欠かせないものである。

## 27.5 複数ファクターへの拡張

27.3節と27.4節で得られた結果は、複数の独立したファクターがある場合にも拡張できる(注7)。 $n$  個の独立したファクターが存在し、従来のリスク中立世界での  $f$  と  $g$  に対する確率過程が、

$$df = rfdt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

および、

$$dg = rgdt + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} g dz_i$$

で与えられていると仮定する。27.2節で示したことから、

(注7) 独立という条件は重要ではない。ファクターが独立でない場合は、それらを直交化すればよい。

$$df = \left[ r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{f,i} \right] f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

および

$$dg = \left[ r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{g,i} \right] g dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} g dz_i$$

とおけば、内的整合性をもった別の世界を定義することができる。ここで、 $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$  は  $n$  個のリスクの市場価格である。これらの別の世界の一つが実世界である。

フォワード・リスク中立世界の定義は、すべての  $i$  に対して  $\lambda_i = \sigma_{g,i}$  とすれば、 $g$  に関するフォワード・リスク中立世界に拡張できる。 $dz_i$  が互いに独立であることを用いれば、伊藤の補題よりこの世界での  $f/g$  の従う確率過程のドリフトはゼロであることが示せる（章末問題27.12を参照）。したがって、前2節での残りの結果（(27.15)式以降）もそのまま成り立つ。

## 27.6 Black モデル再訪

16.8節で説明したように、金利を定数と仮定するとき、原資産のフォワード価格または先物価格を用いてヨーロピアン・オプションの価格付けを行うのに、Black モデルはよく用いられている。ここでは、金利が定数であるという仮定を緩めて、金利が確率変動する場合でも、Black モデルを使って原資産のフォワード価格を用いたヨーロピアン・オプションの価格付けが行えることを示す。

行使価格  $K$ 、満期  $T$  のある資産に対するヨーロピアン・コール・オプションを考えよう。(27.20)式より、オプションの価格は、

$$c = P(0, T) E_T [\max(S_T - K, 0)] \quad (27.26)$$

で与えられる。ここで、 $S_T$  は時点  $T$  における資産価格、 $E_T$  は  $P(t, T)$  に関するフォワード・リスク中立世界での期待値である。満期  $T$  のその資産に対するフォワード価格の時点 0 と時点  $T$  における値を  $F_0$  と  $F_T$  とする。 $S_T = F_T$  より、

$$c = P(0, T) E_T [\max(F_T - K, 0)]$$

となる。考えている世界では  $F_T$  は対数正規分布をしていると仮定し、 $\ln(F_T)$  の標準偏差は  $\sigma_F \sqrt{T}$  に等しいとする。第13章の章末付録からわかるように、

$$E_T [\max(F_T - K, 0)] = E_T(F_T) N(d_1) - K N(d_2) \quad (27.27)$$

が成り立つ。ただし、

$$d_1 = \frac{\ln[E_T(F_T)/K] + \sigma_F^2 T / 2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_T(F_T)/K] - \sigma_F^2 T / 2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

である。(27.21)式より、 $E_T(F_T) = E_T(S_T) = F_0$  となる。したがって、

$$c = P(0, T) [F_0 N(d_1) - K N(d_2)] \quad (27.28)$$

が成り立つ。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln[F_0/K] + \sigma_F^2 T / 2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[F_0/K] - \sigma_F^2 T / 2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

である。同様に、

$$p = P(0, T) [K N(-d_2) - F_0 N(-d_1)] \quad (27.29)$$

が成り立つ。ここで、 $p$  は行使価格  $K$ 、満期  $T$  の同じ資産に対するヨーロピアン・プット・オプションの価格である。これは Black モデルである。このモデルは投資資産と消費資産の両方に適用でき、すぐ上で示したように、 $F_0$  を資産のフォワード価格とすれば金利が確率変動する場合でも正しいモデルである。変数  $\sigma_F$  は資産のフォワード価格の（定数）ボラティリティと解釈することもできる。

## 27.7 エクスチェンジ・オプション

次に価値  $U$  の投資資産と価値  $V$  の投資資産を交換するオプションにつ

いて考えよう。このオプションについてはすでに24.11節で論じた。 $U$ と $V$ のボラティリティを $\sigma_U$ と $\sigma_V$ とし、それらの間の相関係数を $\rho$ とする。

まず資産からの収入がないと仮定し、ニューメレール証券 $g$ を $U$ とする。(27.15)式で $f = V$ とおくと、

$$V_0 = U_0 E_U \left( \frac{V_T}{U_T} \right) \quad (27.30)$$

が得られる。ただし、 $E_U$ は $U$ に関するフォワード・リスク中立世界での期待値である。

(27.15)式の変数 $f$ は考えているオプションの価値とすることができるから、 $f_T = \max(V_T - U_T, 0)$ とする。このとき、

$$f_0 = U_0 E_U \left[ \frac{\max(V_T - U_T, 0)}{U_T} \right]$$

すなわち

$$f_0 = U_0 E_U \left[ \max \left( \frac{V_T}{U_T} - 1, 0 \right) \right] \quad (27.31)$$

となる。 $V/U$ のボラティリティは $\hat{\sigma}$ となる(章末問題27.14を参照)。ただし、

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V$$

である。第13章の章末付録から、(27.31)式は、

$$f_0 = U_0 \left[ E_U \left( \frac{V_T}{U_T} \right) N(d_1) - N(d_2) \right]$$

となる。ただし、

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + \hat{\sigma}^2 T/2}{\hat{\sigma}\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \hat{\sigma}\sqrt{T}$$

である。(27.30)式を代入すると、

$$f_0 = V_0 N(d_1) - U_0 N(d_2) \quad (27.32)$$

が得られる。これは、資産からの収入がない場合のエクスチェンジ・オプションの価値である。

章末問題27.8で、 $f$ と $g$ から $q_f$ と $q_g$ の割合で収入が得られるときは、

(27.15)式は、

$$f_0 = g_0 e^{(q_f - q_g)T} E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right)$$

になることが示される。したがって、(27.30)式および(27.31)式は、

$$E_U \left( \frac{V_T}{U_T} \right) = e^{(q_U - q_V)T} \frac{V_0}{U_0}$$

および、

$$f_0 = e^{-q_U T} U_0 E_U \left[ \max \left( \frac{V_T}{U_T} - 1, 0 \right) \right]$$

になり、(27.32)式は、

$$f_0 = e^{-q_U T} V_0 N(d_1) - e^{-q_U T} U_0 N(d_2)$$

になる。ただし、 $d_1$ と $d_2$ は、

$$d_1 = \frac{\ln(V_0/U_0) + (q_U - q_V + \delta^2/2) T}{\delta \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \delta \sqrt{T}$$

として再定義されたものである。これは、エクスチェンジ・オプションの価値に対して(24.3)式で与えられた結果と一致する。

## 27.8 ニューメレール変換

本節では、ニューメレールを変えたときの市場変数の従う確率過程への影響について考える。 $g$ に関するフォワード・リスク中立世界では、取引可能な証券 $f$ の従う確率過程は、

$$df = \left[ r + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} \sigma_{f,i} \right] f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

で与えられる。同様に、別の証券 $h$ に関するフォワード・リスク中立世界では、 $f$ の従う確率過程は、

$$df = \left[ r + \sum_{i=1}^n \sigma_{h,i} \sigma_{f,i} \right] f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

となる。ただし、 $\sigma_{h,i}$ は  $h$  のボラティリティの第  $i$  成分である。

したがって、 $g$  に関するフォワード・リスク中立世界から  $h$  に関するフォワード・リスク中立世界へ移る（すなわち、ニューメレールを  $g$  から  $h$  に変える）と、任意の取引可能な証券  $f$  の価格の期待成長率は、

$$\sum_{i=1}^n (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}) \sigma_{f,i}$$

だけ増加する。

次に、証券の価格の関数として与えられた変数  $v$  について考える（変数  $v$  自体は取引可能な証券の価格でなくてもよい）。 $\sigma_{v,i}$  を  $v$  のボラティリティの第  $i$  成分とする。本章の章末付録にある伊藤の補題を用いると、ニューメレール変換によって取引可能な証券の期待成長率が変化したときの  $v$  の従う確率過程に生じる変化を計算することができる。ニューメレール変換によつて、 $v$  の期待成長率は取引可能な証券の期待成長率と同じように変化することがわかる（確率過程が一つだけの場合については章末問題12.6を、一般的の場合については章末問題27.13を参照）。したがって、期待成長率は、

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^n (\sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}) \sigma_{v,i} \quad (27.33)$$

だけ増加する。 $w = h/g$  と定義し、 $\sigma_{w,i}$  を  $w$  のボラティリティの第  $i$  成分とする。伊藤の補題より、

$$\sigma_{w,i} = \sigma_{h,i} - \sigma_{g,i}$$

となる（章末問題27.14を参照）ので、(27.33)式は、

$$\alpha_v = \sum_{i=1}^n \sigma_{w,i} \sigma_{v,i} \quad (27.34)$$

となる。 $w$  をニューメレール比（numeraire ratio）と呼ぶ。(27.34)式は、

$$\alpha_v = \rho \sigma_v \sigma_w \quad (27.35)$$

と書ける。ただし、 $\sigma_v$  は  $v$  のトータル・ボラティリティ、 $\sigma_w$  は  $w$  のトータル・ボラティリティ、 $\rho$  は  $v$  の変化率と  $w$  の変化率との瞬間的な相関係数である（注8）。

これは驚くほど簡単な結果である。それは、一つのニューメレールから別のニューメレールに変換したときの変数  $v$  の期待成長率に対する調整は、 $v$  の変化率とニューメレール比の変化率との瞬間的な共分散に等しい、というものである。この結果は、第29章でタイミング調整とクオント調整を考察す

る際に用いられる。

## 27.9 従来の評価方法の一般化

デリバティブが変数の複数時点における値に依存する場合には、ニューメールをマネー・マーケット・アカウントとする従来のリスク中立世界で考えることが通常必要となる。著者の Web サイトのテクニカルノート 20 では、デリバティブが(27.11)式の確率過程に従う変数  $\theta_i$  に依存している場合が考察されている。そこでは、デリバティブの従う微分方程式が導出され、第13章で説明した内容が拡張されている。その結果は、各  $\theta_i$  の期待成長率を  $m_i$  から  $m_i - \lambda_i s_i$  に置き換える、時点  $t$  における短期の無リスク金利を時点  $t$  における割引率として用いれば、従来のリスク中立化法を使うことができる、というものである。 $\theta_i$  が収入を生まない取引可能な証券の場合には、(27.9)式より期待成長率を  $m_i$  から  $m_i - \lambda_i s_i$  に置き換えることは、証券の期待収益率を短期の無リスク金利に等しくすることと同じことである（これは期待されたとおりの結果である）。しかし、 $\theta_i$  は取引可能な証券である必要はなく、金利を表している場合もある。

従来のリスク中立世界における  $\theta_i$  の時点  $T$  での価格の期待値は、それに対する満期  $T$  の先物価格に等しい。したがって、 $\theta_i$  に対する先物契約が取引されている場合には、 $\lambda_i$  を明示的に推定しなくても、従来のリスク中立世界における  $\theta_i$  の従う確率過程が推定可能である。これについては、第33章でリアル・オプションに関連してさらに論じる。

---

(注 8) このことを確認するために、微小時間  $\Delta t$  における  $v$  と  $w$  の変化  $\Delta v$  と  $\Delta w$  は、

$$\Delta v = \cdots + \sum \sigma_{v,i} v \epsilon_i \sqrt{\Delta t}, \quad \Delta w = \cdots + \sum \sigma_{w,i} w \epsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

で与えられることに注意しよう。 $d\epsilon_i$  は互いに相関していないので、 $i \neq j$  のとき  $E(\epsilon_i \epsilon_j) = 0$  である。また、 $\rho$  の定義より、

$$\rho v \sigma_v w \sigma_w = E(\Delta v \Delta w) - E(\Delta v) E(\Delta w)$$

である。 $\Delta t$  よりも高次の項を無視すると、

$$\rho \sigma_v \sigma_w = \sum \sigma_{w,i} \sigma_{v,i}$$

が得られる。

## 要 約

変数に対するリスクの市場価格は、その変数に依存する取引可能な証券のリスクとリターンのトレード・オフを表している。原資産変数が一つの場合には、無リスク金利に対するデリバティブの超過収益率は、リスクの市場価格に変数のボラティリティを掛けたものに等しくなる。原資産変数が複数ある場合には、超過収益率は各変数に対するリスクの市場価格とボラティリティの積の和になる。

リスク中立化法は、デリバティブを評価する強力な手法である。これについては、第11章と第13章で説明した。リスク中立化法の原理によると、デリバティブを評価するときは世界がリスク中立であると仮定すれば、リスク中立世界だけでなく、他のすべての世界において正しい答が得られる。従来のリスク中立化法では、すべての変数に対するリスクの市場価格はゼロとなる。本章では、リスク中立化法の原理を拡張し、金利が確率変動する場合でも、従来のリスク中立化法にかわる数多くの興味深い有効な方法があることを示した。

マルチングールは、ドリフトがゼロの確率過程である。マルチングールに従う任意の変数には、任意の将来時点における値の期待値は現在の値に等しい、という扱いが単純になる性質がある。同値マルチングール測度の結果から、 $g$  がある証券の価格ならば、すべての証券の価格  $f$  に対して比  $f/g$  がマルチングールとなるような世界が存在する。このことから、ニューメレール証券  $g$  を適当に選べば、金利に依存した多くのデリバティブの評価が単純なものにできることがわかる。

本章では、同値マルチングール測度の結果を用いて、Black モデルを金利が確率変動する場合に拡張するとともに、エクスチェンジ・オプションの評価を行った。第28章から第32章では、この結果を利用して金利デリバティブの評価を行う。

## 参考文献

- Baxter, M., and A. Rennie. *Financial Calculus*. Cambridge University Press, 1996.
- Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices," *Econometrica*, 53 (1985) : 363-84.
- Duffie, D. *Dynamic Asset Pricing Theory*, 3rd edn. Princeton University Press, 2001.
- Garman, M. "A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes," Working Paper 50, University of California, Berkeley, 1976.
- Harrison, J.M., and D.M. Kreps. "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets," *Journal of Economic Theory*, 20 (1979) : 381-408.
- Harrison, J.M., and S.R. Pliska. "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading," *Stochastic Processes and Their Applications*, 11 (1981) : 215-60.

## 章末問題

- 27.1** 投資資産の価格ではない変数に対して、リスクの市場価格はどのように定義されるか。
- 27.2** 金に対するリスクの市場価格はゼロであるとする。保管コストを年率 1 %, 無リスク金利を年率 6 %とすると、金の価格の期待成長率はいくらになるか。ただし、金は収入を生まないものと仮定する。
- 27.3** 同じ市場変数に依存する二つの証券を考える。それらの証券の期待収益率は 8 %と 12 %である。最初の証券のボラティリティは 15 %で、瞬間的な無リスク金利は 4 %である。このとき、2 番目の証券のボラティリティはいくらになるか。
- 27.4** ある石油会社が、テキサスのある小さな地区の石油掘削のみを目的として設立されている。この会社の価値は、主として原油価格と確

認された石油埋蔵量という二つの確率変数に依存している。これらのうち2番目の変数に対するリスクの市場価格は正、負、ゼロのいずれになりそうかについて議論せよ。

- 27.5** 配当のない二つの取引可能な証券の価格に依存するデリバティブが満たす微分方程式を、そのデリバティブとそれら二つの取引可能な証券からなる無リスク・ポートフォリオをつくることによって導出せよ。

**27.6** 金利  $x$  が確率過程

$$dx = a(x_0 - x)dt + c\sqrt{x}dz$$

に従っているとする。ただし、 $a$ 、 $x_0$ 、 $c$  は正の定数である。さらに、 $x$  に対するリスクの市場価格を  $\lambda$  とする。このとき、従来のリスク中立世界において  $x$  が従う確率過程を導出せよ。

- 27.7** 証券  $f$  に利回り  $q$  の収入がある場合には、(27.9)式は  $\mu + q - r = \lambda\sigma$  になることを証明せよ (ヒント：証券  $f$  からのすべての収入を証券  $f$  に再投資することでつくられる、収入のない新しい証券  $f^*$  を考えよ)。

- 27.8**  $f$  と  $g$  に利回りがそれぞれ  $q_f$  と  $q_g$  の収入がある場合には、(27.15)式は、

$$f_0 = g_0 e^{(q_f - q_g)T} E_g \left( \frac{f_T}{g_T} \right)$$

となることを示せ (ヒント： $f$  からのすべての収入を  $f$  に再投資し、 $g$  からのすべての収入を  $g$  に再投資することによってつくられる、収入のない新しい証券  $f^*$  と  $g^*$  を考えよ)。

- 27.9** 「リスク中立世界での金利の将来の値に対する期待値は、実世界でのものよりも大きい」。この主張から、(a)金利、(b)債券価格に対するリスクの市場価格についてどのようなことが導き出されるか。この主張は正しい場合が多いと思うか。その理由も述べよ。

- 27.10** 変数  $S$  は、通貨 A 建てで利回り  $q$  の収入がある投資資産である。実世界では、確率過程

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz$$

に従っている。必要があれば新しい変数を定義して、次のそれぞれの場合について、 $S$  の従う確率過程とそれに対応するリスクの市場価格を求めよ。

- (a) 通貨 A に関する従来のリスク中立世界
- (b) 通貨 B に関する従来のリスク中立世界
- (c) 満期  $T$  の通貨 A 建て割引債に関するフォワード・リスク中立世界
- (d) 満期  $T$  の通貨 B 建て割引債に関するフォワード・リスク中立世界

**27.11** フォワード・レートの定義のされ方と、株価、商品価格、為替レートのような他の変数に対するフォワード価格の定義のされ方との違いについて説明せよ。

**27.12** 次の27.5節での結果について証明せよ。相関のない  $dz_i$  に対して、

$$df = \left[ r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{f,i} \right] f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{f,i} f dz_i$$

$$dg = \left[ r + \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{g,i} \right] g dt + \sum_{i=1}^n \sigma_{g,i} g dz_i$$

とするとき、 $\lambda_i = \sigma_{g,i}$  とおくと  $f/g$  はマルチングールになる。

**27.13** 27.7節の(27.33)式を証明せよ。

**27.14**  $w = h/g$ 、 $h$ 、 $g$  が  $n$  個のウィナー過程に依存しているとき、 $w$  のボラティリティの第  $i$  成分は、 $h$  のボラティリティの第  $i$  成分から  $g$  のボラティリティの第  $i$  成分を引いたものに等しいことを示せ。このことを用いて、 $\sigma_U$  を  $U$  のボラティリティ、 $\sigma_V$  を  $V$  のボラティリティとするとき、 $U/V$  のボラティリティは  $\sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2 - 2\rho\sigma_U\sigma_V}$  となることを証明せよ (ヒント: 脚注 7 の結果を用いよ)。

## 宿題

**27.15** ある証券の価格が銅の価格と円／ドル為替レートの二つの変数に依存しており、それらと正の相関をもっている。それらの変数に対するリスクの市場価格をそれぞれ0.5と0.1とする。銅の価格が固定されているとした場合の証券のボラティリティは年率8%，円／ドル為替レートが固定されているとした場合の証券のボラティリティは年率12%である。無リスク金利を年率7%とするとき、この証券の期待収益率はいくらになるか。さらに、二つの変数が互いに相関をもっていないならば、この証券のボラティリティはいくらになるか。

**27.16** 満期  $T$  の割引債の価格が確率過程

$$dP(t, T) = \mu_P P(t, T) dt + \sigma_P P(t, T) dz$$

に従い、この債券に依存するあるデリバティブの価格が確率過程

$$df = \mu_f f dt + \sigma_f f dz$$

に従っているとする。不確定性の要因は一つだけとし、 $f$  からの収入はないと仮定する。

- 満期  $T$  の  $f$  に対するフォワード契約の価格  $F$  を求めよ。
- $P(t, T)$  に関するフォワード・リスク中立世界での  $F$  の従う確率過程を導出せよ。
- 従来のリスク中立世界での  $F$  の従う確率過程を導出せよ。
- $T^* \neq T$  とするとき、満期  $T^*$  の債券に関するフォワード・リスク中立世界での  $F$  の従う確率過程を導出せよ。ただし、この債券のボラティリティは  $\sigma_f$  と仮定する。

**27.17** 金利でない変数について考える。

- 変数の先物価格がマルチングールとなるのは、どのような世界においてか。
- 変数のフォワード価格がマルチングールとなるのは、どのような世界においてか。
- 必要に応じて変数を定義して、従来のリスク中立世界における

先物価格のドリフトとフォワード価格のドリフトとの差を表す式を導出せよ。

- (d) その結果は、先物価格がフォワード価格よりも高い状況について、5.8節で説明した内容と整合性がとれていることを示せ。

## 付 錄

### 不確実性の要因が複数ある場合の扱い

本付録では、伊藤の補題を不確実性の要因が複数ある場合に拡張し、その場合における超過収益率をリスクの市場価格に関係づける(27.13)式の結果を証明する。

#### 多変数関数に対する伊藤の補題

第12章の付録で説明した伊藤の補題は、確率変動する1変数の関数が従う確率過程を導出するものであった。ここでは、確率変動する多変数の関数が従う確率過程に対する伊藤の補題の一般形を説明する。

$f$  を  $n$  個の変数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  と時間  $t$  の関数とし、 $x_i$  は瞬間のドリフト  $a_i$  と瞬間の分散  $b_i^2$  ( $1 \leq i \leq n$ ) をもつ伊藤過程であるとする。すなわち、

$$dx_i = a_i dt + b_i dz_i \quad (27A.1)$$

が成り立っているとする。ここで、 $dz_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) はウィナー過程である。各  $a_i$  と  $b_i$  は、すべての  $x_i$  と  $t$  の任意の関数でよい。 $\Delta f$  をテイラー展開すると、

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial t} \Delta x_i \Delta t + \dots \end{aligned} \quad (27A.2)$$

が得られる。(27A.1)式を離散化すると、

$$\Delta x_i = a_i \Delta t + b_i \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

となる。ここで  $\varepsilon_i$  は標準正規分布からのランダム・サンプルである。 $\varepsilon_i$  と  $\varepsilon_j$  の相関係数は  $dz_i$  と  $dz_j$  の相関係数  $\rho_{ij}$  に等しい。第12章の付録における議論から、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x_i^2 = b_i^2 dt$$

が成り立つ。同様に、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x_i \Delta x_j = b_i b_j \rho_{ij} dt$$

が成り立つ。

$\Delta t \rightarrow 0$  とするとき、(27A.2)式の  $\Delta f$  の展開の最初の 3 項は  $\Delta t$  と同じオーダーである。その他のすべての項はそれより高次である。したがって、

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} dt$$

が成り立つ。これが伊藤の補題の一般形である。 $dx_i$  に(27A.1)式を代入すると、

$$df = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} a_i + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} b_i dz_i \quad (27A.3)$$

が得られる。

$f$  は 1 変数  $x$  の関数で、 $x$  が多次元ウィナー過程を用いて、

$$dx = adt + \sum_{i=1}^m b_i dz_i$$

で与えられる場合について、伊藤の補題の別の一般形を導く。この場合には、

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \dots$$

$$\Delta x = a \Delta t + \sum_{i=1}^m b_i \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x_i^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_i b_j \rho_{ij} dt$$

となる。ここで  $\rho_{ij}$  は前と同様に  $dz_i$  と  $dz_j$  の相関係数である。これより、

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x} a + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m b_i b_j \rho_{ij} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} \sum_{i=1}^m b_i dz_i \quad (27A.4)$$

が得られる。

最後に、 $f$  が変数  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) の関数で、 $x_i$  が<sup>3</sup>、

$$dx_i = a_i dt + \sum_{k=1}^m b_{ik} dz_k$$

で与えられる、より一般的な場合について考える。同様の分析を行うと、

$$df = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{ik} b_{jl} \rho_{kl} \right) dt \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \sum_{k=1}^m b_{ik} dz_k \quad (27A.5)$$

が得られる。

### 不確実性の要因が複数ある場合の収益率

27.1節では不確実性の要因が一つの場合について、収益率をリスクと関係づける結果を証明した。ここでは不確実性の要因が複数ある場合について、(27.13)式の結果を証明する。

ウイナー過程に従う確率変数が  $n$  個あるとする。その  $n$  個の確率変数のすべてまたは一部に価格が依存している、 $n+1$  個の取引可能な証券を考える。 $f_j$  ( $1 \leq j \leq n+1$ ) を  $j$  番目の証券の価格とする。それら  $n+1$  個の取引可能な証券には配当やその他の収入はないものと仮定する(注9)。前節の結果から、それらの証券は、

$$df_i = \mu_i f_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} f_j dz_j \quad (27A.6)$$

という形の確率過程に従う。 $n$  個のウイナー過程に対して  $n+1$  個の取引可能な証券があるので、これらの証券を用いて瞬間的な無リスク・ポートフォリオIIをつくることが可能である。 $k_j$  をポートフォリオに含まれる第  $j$  証券の数量とすると、

$$\Pi = \sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j \quad (27A.7)$$

となる。 $k_j$  を各証券からくる収益率の確率変動成分が消去されるように決めなければならない。そのためには(27A.6)式より、 $1 \leq i \leq n$  に対して、

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j \sigma_{ij} f_j = 0 \quad (27A.8)$$

が満たされなければならない。(27A.8)式は  $n+1$  個の未知変数 ( $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$ ) に対する  $n$  個の方程式である。線形代数より、この連立方程式にはすべての  $k_j$  がゼロとなる以外の解が常に存在する。したがって、無リスク・

---

(注9) これは本質的な制約条件ではない。配当のある証券に対して、配当をその証券に再投資することによって、配当のない証券が常につくれるからである。

ポートフォリオIIをつくることは常に可能である。

ポートフォリオの収益率は,

$$d\Pi = \sum_{j=1}^{n+1} k_j \mu_j f_j dt$$

で与えられる。ポートフォリオの構築に必要な費用は,

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j$$

である。したがって、裁定機会がないならば、ポートフォリオから得られる収益率は無リスク金利に等しくなければならぬので,

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j \mu_j f_j = r \sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j \quad (27A.9)$$

すなわち,

$$\sum_{j=1}^{n+1} k_j f_j (\mu_j - r) = 0 \quad (27A.10)$$

が成り立つ。

(27A.8)式と(27A.10)式は  $k_j$  に関する  $n+1$  個の 1 次齊次式であるとみなすことができる。 $k_j$  の少なくとも一つはゼロではない。したがって、線形代数のよく知られた定理から、(27A.8)式と(27A.10)式が整合的であるためには、(27A.10)式の左辺が(27A.8)式の左辺の線形結合で表されなければならない。このことより、すべての  $j$  に対して、状態変数と時間のみに依存したある  $\lambda_i (1 \leq i \leq n)$  を用いて、

$$f_j (\mu_j - r) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{ij} f_j \quad (27A.11)$$

すなわち、

$$\mu_j - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_{ij} \quad (27A.12)$$

とならなければならない。添字  $j$  を落とすと、 $n$  個の確率変数に依存する任意の証券  $f$  に対して、

$$df = \mu f dt + \sum_{i=1}^n \sigma_i f dz_i$$

が成り立つ。ただし、

$$\mu - r = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$$

である。これによって、(27.13)式の結果が示された。

## 第28章

# 金利デリバティブ： 標準的なマーケット・モデル

金利デリバティブとは、ペイオフが金利水準になんらかの形で依存している商品のことである。1980年代および1990年代に、金利デリバティブの取引量は店頭市場と取引所市場の両方で急速に増大してきた。また、エンド・ユーザーの特定のニーズに合った多くの新しい商品が開発されてきた。デリバティブ・トレーダーにとっての重要な課題は、これらの商品を価格付けし、ヘッジを行うためのすぐれた頑健な手法を見出すことであった。株式や為替のデリバティブに比べて、金利デリバティブの評価がむずかしいとされる理由は以下のとおりである。

1. 株価や為替レートと比べ、個々の金利の動きはもっと複雑である。
2. 多くの商品を評価するためには、ゼロクーポン・イールドカーブ全体の動きを表現するモデルを構築しなければならない。
3. イールドカーブのボラティリティは年限によって異なる。

4. 金利は、ペイオフの定義とともにデリバティブの割引にも使われている。

本章では、最もよく取引されている三つの店頭金利オプション：債券オプション、金利キャップ／フロア、スワップションを対象に、これらの商品の仕組みと標準的なマーケット・モデルを用いた評価について説明する。

## 28.1 債券オプション

債券オプションとは、特定の日までに特定の価格で特定の債券を売買するオプションである。債券オプションは店頭市場で取引されるだけではなく、債券発行時に債券が発行体か潜在的な購入者のどちらかにとってより魅力的になるように、債券自体に組み込まれることもよくある。

### 債券に組み込まれたオプション

オプションの組み込まれた債券の一つの例は、コーラブル債 (callable bond) である。これは、発行体が将来のある時点であらかじめ決められた価格でその債券を買い戻すことができる債券である。この場合、債券の保有者は発行体にコール・オプションを売っていることになる。オプションの行使価格またはコール価格とは、発行者が保有者に支払わなければならないあらかじめ決められた価格のことである。コーラブル債は発行後最初の数年間はコールできないのが通常である（この期間はロックアウト期間として知られている）。その後は、コール価格が時間の減少関数として決められているのが一般的である。たとえば、満期10年のコーラブル債を考えてみる。最初の2年間はコールできず、それ以降は、発行から3年目と4年目には価格110で、5年目と6年目には価格107.5で、7年目と8年目には価格106で、9年目と10年目には価格103で債券を買い戻す権利を発行体がもつというような条項が設定されている。このコール・オプションの価値は呈示される債券のイールドに反映されている。一般的に、コール条項のある債券はコール条項のな

い債券よりもイールドが高くなっている。

オプションの組み込まれた別のタイプの債券に、プッタブル債 (puttable bond) がある。これは、保有者が将来のある時点であらかじめ決められた価格で早期償還を要求できる債券である。このような債券の保有者は、債券自体だけでなくその債券に対するプット・オプションも購入していることになる。プット・オプションは保有者にとっての債券の価値を高めるため、プット条項のついた債券のイールドはプット条項のない債券よりも低くなる。プッタブル債の簡単な例は、保有者が5年後に払戻しを受ける権利をもつ10年債のようなものである（これはリトラクタブル債 (retractable bond) と呼ばれることもある）。

ローンや預金商品にも債券オプションがよく組み込まれている。たとえば、いつでも違約金なしに払戻しが可能な金融機関の5年固定金利預金には、債券に対するアメリカン・プット・オプションが組み込まれていることになる（この預金商品は、投資家がいつでも金融機関に額面で償還を要求できる権利をもつ債券である）。同様に、ローンや住宅ローンの線上返済条項は債券のコール・オプションである。

最後に、銀行やその他の金融機関によるローン・コミットメントは債券のプット・オプションである。たとえば、ある銀行が潜在的な借手に5年物金利を年率5%で提示し、今後2カ月間はこの金利で借りることができるとした場合を考えよう。顧客は、実質的に、クーポン5%の5年債を今後2カ月間いつでも金融機関に額面で売却できる権利を得たことになる。金利が上昇すると、このオプションは行使されることになるだろう。

### ヨーロピアン債券オプション

多くの店頭債券オプションや債券に組み込まれるオプションのいくつかはヨーロピアンである。ヨーロピアン債券オプションの評価に用いられる標準的なマーケット・モデルでは、債券のフォワード価格のボラティリティ  $\sigma_B$  は定数であると仮定されている。この仮定によって、27.6節で説明した Black モデルを用いることができるようになる。 $(27.28)$ 式と $(27.29)$ 式で、 $\sigma_F$  を

$\sigma_B$ に等しいとおき、 $F_0$ を債券のフォワード価格  $F_B$ に等しいとおくと、

$$c = P(0, T) [F_B N(d_1) - K N(d_2)] \quad (28.1)$$

$$p = P(0, T) [K N(-d_2) - F_B N(-d_1)] \quad (28.2)$$

が得られる。ただし、

$$d_1 = \frac{\ln(F_B/K) + \sigma_B^2 T / 2}{\sigma_B \sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_B \sqrt{T}$$

で、 $K$  は債券オプションの行使価格、 $T$  はその満期である。

5.5節より、 $F_B$  は公式

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0, T)} \quad (28.3)$$

を用いて計算することができる。ここで、 $B_0$  は時点ゼロにおける債券価格、 $I$  はオプションの満期までに支払われるクーポンの現在価値である。また、この公式における債券の現物価格とフォワード価格は、ともに呈示価格ではなく取引価格である。債券の取引価格と呈示価格との関係については6.1節で説明した。

(28.1)式と(28.2)式における行使価格  $K$  は、取引価格としての行使価格でなければならない。したがって、 $K$  に対する正しい値を求めるためには、オプションの正確な契約内容が重要となる。行使価格がオプション行使時に債券と交換される取引金額として定義されている場合には、 $K$  はこの行使価格に等しくなければならない。一般的には、行使価格はオプション行使時に適用される呈示価格になっており、その場合には、 $K$  は行使価格にオプション行使日の経過利子を加えたものにしなくてはならない。トレーダーは債券の呈示価格のことをクリーン・プライスと呼び、取引価格のことをダーティ・プライスと呼んでいる。

【例28.1】

額面1,000ドル、残存期間9.75年の債券に対する満期10ヶ月のヨーロピアン・コール・オプションを考える（オプション満期時点には、債券の残存期間は8年11ヶ月になっている）。現在の債券の取引価格を960ドル、行使価格を1,000ドル、満期10ヶ月の無リスク金利を年率10%、満期10

カ月の債券のフォワード価格のボラティリティを年率 9 %とする。債券のクーポンは年10%（年2回払い）であり、3カ月後と9カ月後に50ドルが支払われる予定である（したがって、経過利子は25ドルとなるので、債券の呈示価格は935ドルである）。満期3カ月と満期9カ月の無リスク金利をそれぞれ年率 9 %と 9.5 %とする。このとき、支払われるクーポンの現在価値は、

$$50e^{-0.25 \times 0.09} + 50e^{-0.75 \times 0.095} = 95.45$$

すなわち 95.45 ドルとなる。また、債券のフォワード価格は(28.3)式より、

$$F_B = (960 - 95.45) e^{0.1 \times 0.8333} = 939.68$$

となる。

- (a) 行使価格が行使時に債券に対して支払われる取引価格である場合には、(28.1)式のパラメータは  $F_B = 939.68$ ,  $K = 1,000$ ,  $P(0, T) = e^{-0.1 \times (10/12)} = 0.9200$ ,  $\sigma_B = 0.09$ ,  $T = 10/12$  となる。このとき、コール・オプションの価格は 9.49 ドルとなる。
- (b) 行使価格が行使時に債券に支払われる呈示価格である場合には、オプションの満期は利払日の1カ月後なので、1カ月間の経過利子を  $K$  に加えなければならない。したがって、 $K$  の値は、

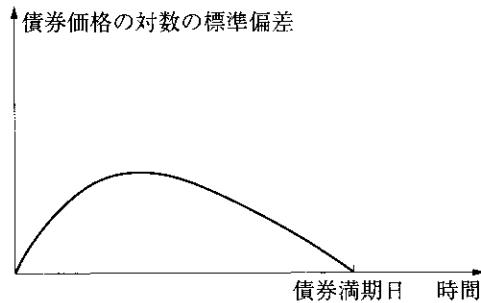
$$1,000 + 100 \times 0.08333 = 1,008.33$$

となる。(28.1)式の他のパラメータの値は同じままである（すなわち、 $F_B = 939.68$ ,  $P(0, T) = 0.9200$ ,  $\sigma_B = 0.09$ ,  $T = 0.8333$  である）。このとき、オプションの価格は 7.97 ドルとなる。

---

図28.1（次頁）は、債券価格の対数の標準偏差が時間の経過とともに変化する様子を示したものである。現時点における債券価格には不確実性は含まれないので、現時点における標準偏差はゼロである。また、満期における債券価格は額面に等しいことがわかっているので、債券の満期における標準偏差もゼロである。現時点と債券の満期との間では、標準偏差ははじめ増加して、その後減少する。

図28.1 将来時点における債券価格の対数の標準偏差

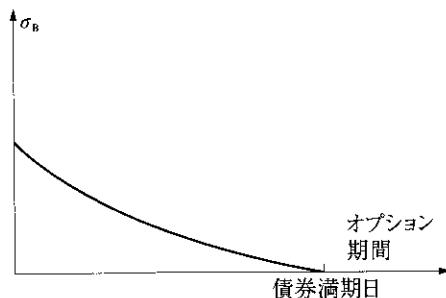


債券のヨーロピアン・オプションを評価する際に用いるボラティリティ  $\sigma_B$  は、

$$\frac{\text{オプション満期における債券価格の対数の標準偏差}}{\sqrt{\text{オプション満期までの期間}}}$$

で与えられる。同じ債券を原資産とした場合、オプション期間が増加するとボラティリティはどうなるであろうか。図28.2は、 $\sigma_B$ をオプション期間の関数としたときの典型的なパターンを示したものである。一般的に、 $\sigma_B$ はオプション期間の減少関数になる。

図28.2 債券を固定したときのオプション期間に対するフォワード債券価格のボラティリティ  $\sigma_B$  の変化



## イールド・ボラティリティ

債券オプションに対して呈示されているボラティリティは、プライス・ボラティリティよりもイールド・ボラティリティであることが多い。市場では、第4章で紹介したデュレーションの概念を用いて、呈示されているイールド・ボラティリティをプライス・ボラティリティに変換している。 $D$ を、第4章で定義したように、オプション満期におけるオプションの原資産である債券の修正デュレーションとする。債券のフォワード価格  $F_B$  の変化  $\Delta F_B$  とフォワード・イールド  $y_F$  の変化  $\Delta y_F$  との関係は、

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D \Delta y_F$$

すなわち、

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D y_0 \frac{\Delta y_F}{y_F}$$

で与えられる。ボラティリティは、変数の値の変化率の標準偏差を用いた尺度である。したがって、この関係式から Black モデルで用いるフォワード債券価格のボラティリティ  $\sigma_B$  が、

$$\sigma_B = D y_0 \sigma_y \quad (28.4)$$

という式で、フォワード債券イールドのボラティリティ  $\sigma_y$  と近似的に関係づけられることがわかる。ただし、 $y_0$  は  $y_F$  の当初の値である。債券オプションに対してイールド・ボラティリティが呈示されているときは、(28.4) 式を用いて価格ボラティリティに変換でき、そのボラティリティを用いて(28.1)式または(28.2)式からオプションの価格が得られる、ということが暗黙の仮定になっているのがふつうである。コール・オプションの原資産である債券のオプション満期における修正デュレーションが5年、フォワード・イールドが8%，プローカーの呈示するフォワード・イールド・ボラティリティが20%であるとする。このとき、プローカーの呈示に対応するオプションの市場価格は、ボラティリティ変数  $\sigma_B$  を、

$$5 \times 0.08 \times 0.2 = 0.08$$

すなわち、年率8%として(28.1)式から得られる価格となる。図28.2は、債

券のフォワード価格ボラティリティがオプション期間によって変化する様子を示したものである。それに対し、いま定義したフォワード・イールド・ボラティリティはもっと定数に近いものになる。これが、トレーダーがフォワード・イールド・ボラティリティを好む理由である。

本書に付属している DerivaGem ソフトウェアの Bond\_Options ワークシートでは、プライシング・モデルとして Black-European を選択すると、Black モデルによるヨーロピアン債券オプションの価格が計算できる。イールド・ボラティリティを入力すると、上で述べた方法で価格ボラティリティへの変換が内部的に行われる。行使価格は、取引価格ベースと呈示価格ベースのどちらでも入力できる。

#### 【例28.2】

額面100の10年債のヨーロピアン・ブットについて考える。クーポンは年 8 % で、年 2 回払いである。オプションの残存期間は 2.25 年、行使価格は 115 である。フォワード・イールド・ボラティリティは 20 % であり、ゼロ・カーブは連続複利で 5 % フラットである。このとき、DerivaGem ソフトウェアを用いて計算すると、債券の呈示価格は 122.84 になる。行使価格が呈示価格の場合には、オプション価格は 2.37 ドルとなる。また、行使価格が取引価格の場合には、オプション価格は 1.74 ドルとなる (DerivaGem ソフトウェアで計算されるオプション価格は、手計算した価格と正確には一致しないことに注意しよう。その理由は、DerivaGem ソフトウェアでは 1 年を 365 日と仮定し、時間をその期間に最も近い日数に丸める処理をしているからである。手計算については章末問題 28.16 を参照)。

## 28.2 金利キャップとフロア

店頭市場で金融機関が提供しているよく取引される金利オプションの一つに、金利キャップ (interest rate cap) がある。金利キャップは、金利が定期的に LIBOR に等しくなるようにリセットされる変動利付債を最初に考えて

みるとよく理解できる。各リセットの間の期間はテナー (tenor) と呼ばれる。テナーを 3 カ月と仮定する。この債券の最初の 3 カ月間にに対する金利は、当初の 3 カ月 LIBOR レートである。次の 3 カ月間にに対する金利は、3 カ月後の市場における LIBOR レートに等しく設定される。それ以降も金利は同様に設定される。

金利キャップは、変動利付債の金利がある水準を超えることに対する保険となるように商品性が設計されている。この水準のことをキャップ・レートと呼ぶ。元本が 1,000 万ドル、テナーが 3 カ月、キャップの期間が 5 年、キャップ・レートが 4 % と仮定する (支払が四半期ごとに行われる所以、このキャップ・レートは 3 カ月複利で表されている)。このキャップは、変動利付債の金利が 4 % を超えた場合の保険になっている。

しばらくの間デイカウントの問題は無視し、利払い間隔は正確に 0.25 年であると仮定する (デイカウントの問題については本節の終わりで触れる)。あるリセット日に、3 カ月 LIBOR レートが 5 % であったとするとき、この変動利付債の支払う 3 カ月後の利子は、

$$0.25 \times 0.05 \times 10,000,000 = 125,000 \text{ ドル}$$

となる。3 カ月 LIBOR レートが 4 % のときの利払額は、

$$0.25 \times 0.04 \times 10,000,000 = 100,000 \text{ ドル}$$

である。したがって、キャップのペイオフは 25,000 ドルとなる。支払は 5 % が観測されたリセット日ではなく、その 3 カ月後に行われる。これは、金利が観測された時点と対応する支払が行われる時点との通常の時間的ずれを反映したものである。

キャップの期間中の各リセット日に LIBOR が観測される。LIBOR が 4 % 以下の場合には、3 カ月後にキャップからの支払は発生しない。LIBOR が 4 % を超えた場合には、支払は元本 1,000 万ドルに超過金利の 4 分の 1 を適用した金額となる。キャップは、当初の LIBOR レートがキャップ・レートを上回っている場合でも、最初のリセット日には支払が発生しない契約になっているのが通常である。いまの例では、キャップの期間は 5 年である。したがって、全部で 19 回のリセット日が (0.25, 0.50, 0.75, ..., 4.75 年後に)

あり、それに対応する19回のキャップからのペイオフが(0.50, 0.75, 1.00, ..., 5.00年後に)ある。

### 金利オプションのポートフォリオとしてのキャップ

期間が  $T$ , 元本が  $L$ , キャップ・レートが  $R_K$  のキャップを考える。リセット日を  $t_1, t_2, \dots, t_n$  とし,  $t_{n+1} = T$  と定義する。また,  $R_k$  を時点  $t_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) に観測される時点  $t_k$  から時点  $t_{k+1}$  までの期間に対する LIBOR レートと定義する。このとき, 時点  $t_{k+1}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) におけるキャップのペイオフは,

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0) \quad (28.5)$$

となる。ただし,  $\delta_k = t_{k+1} - t_k$  である(注1)。 $R_k$  と  $R_K$  はともにリセットの回数に等しい複利で表されている。

(28.5)式は, 時点  $t_{k+1}$  に支払が発生する, 時点  $t_k$  で観測される LIBOR レートに対するコール・オプションのペイオフである。キャップは  $n$  個のこうしたオプションからなるポートフォリオである。LIBOR レートが時点  $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$  に観測され, それに対応する支払が時点  $t_2, t_3, t_4, \dots, t_{n+1}$  に発生する。キャップを構成する  $n$  個のコール・オプションは, キャップレット(caplet) と呼ばれている。

### 債券オプションのポートフォリオとしてのキャップ

金利キャップは, ペイオフの確定時点に支払が発生する, 割引債に対するブット・オプションのポートフォリオとして特徴付けることもできる。時点  $t_{k+1}$  における(28.5)式のペイオフは, 時点  $t_k$  における,

$$\frac{L\delta_k}{1 + R_k\delta_k} \max(R_k - R_K, 0)$$

のペイオフと等価である。簡単な式変形を行うと, この式は,

$$\max\left[L - \frac{L(1 + R_K\delta_k)}{1 + R_k\delta_k}, 0\right] \quad (28.6)$$

(注1) デイカウントの問題については本節の最後で論じる。

となる。この式に含まれる，

$$\frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}$$

という部分は，時点  $t_{k+1}$  に  $L(1+R_K\delta_k)$  の支払がある割引債の時点  $t_k$  における価値を表している。したがって(28.6)式は，額面  $L(1+R_K\delta_k)$ ，満期  $t_{k+1}$  の割引債に対する行使価格  $L$ ，満期  $t_k$  のプット・オプションのペイオフを表している。これより，金利キャップは割引債に対するヨーロピアン・プット・オプションのポートフォリオとみなせることがわかる。

## フロアとカラー

金利フロアと金利カラー（フロア・シーリング契約と呼ばれることがある）は，金利キャップと類似の契約である。フロア（floor）は，変動利付債の金利がある水準を下回った場合にペイオフが発生する商品である。先の記号を用いると，時点  $t_{k+1}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) におけるフロアのペイオフは，

$$L\delta_k \max(R_K - R_k, 0)$$

で与えられる。金利キャップの場合と同様に，金利フロアは金利に対するプット・オプションのポートフォリオ，あるいは割引債に対するコール・オプションのポートフォリオとみなすことができる。フロアを構成する個々のオプションはフロアレット（floorlet）と呼ばれる。カラー（collar）は，LIBOR 変動利付債の金利が常に二つの水準の間の値になることを保証する商品である。カラーは，キャップの買いポジションとフロアの売りポジションの組合せである。通常は，キャップとフロアの価格が当初等しくなるように設定される。したがって，カラーの取引開始時点でのコストはゼロとなる。

ビジネス寸見28.1で，キャップとフロアに対するプット・コール・パリティの関係について説明する。

## ビジネス寸見28.1 キャップとフロアに対するプット・コール・パリティ

キャップとフロアの価格の間にも、プット・コール・パリティが成り立つ。それは、

$$\text{キャップの価値} = \text{フロアの価値} + \text{スワップの価値}$$

という関係である。この関係式では、キャップとフロアの行使価格は同じ  $R_K$  である。また、スワップは LIBOR を受け取り、固定金利  $R_K$  を支払う、初回リセット日に支払交換がない契約である。さらに、3商品すべてで契約期間と支払回数は同じである。

この結果が正しいことは、キャップの買いポジションとフロアの売りポジションの組合せを考えればわかる。LIBOR が  $R_K$  よりも大きい場合には、キャップからその期間に  $\text{LIBOR} - R_K$  を適用したキャッシュフローが生じる。LIBOR が  $R_K$  よりも小さい場合には、フロアの売りポジションからその期間に  $-(R_K - \text{LIBOR}) = \text{LIBOR} - R_K$  を適用したキャッシュフローが生じる。したがって、すべての状況において  $\text{LIBOR} - R_K$  のキャッシュフローが生じる。これはスワップからのキャッシュフローと同じである。このことから、キャップの価値からフロアの価値を引いた値はスワップの価値に等しくなければならない。

通常のスワップでは、最初のリセット日に時点ゼロにおける LIBOR で決まる支払が行われる。これに対し、通常のキャップやフロアでは、最初のリセット日における支払はない。これが、プット・コール・パリティにおけるスワップを、最初のリセット日における支払がないという標準的でない契約にした理由である。

### キャップとフロアの評価

(28.5)式で示したように、時点  $t_k$  に観測される金利に対応するキャップレットの時点  $t_{k+1}$  におけるペイオフは、

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0)$$

となる。標準的なマーケット・モデルでは、キャップレットの価値は、

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - R_K N(d_2)] \quad (28.7)$$

となる。ただし、

$$d_1 = \frac{\ln(F_k/R_K) + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_k/R_K) - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

であり、 $F_k$ は時点  $t_k$  から時点  $t_{k+1}$  までの期間に適用される時点 0 におけるフォワード金利、 $\sigma_k$  はこのフォワード金利のボラティリティである。これは Black モデルの自然な拡張になっている。 $R_k$  は時点  $t_k$  に観測される金利なので、ボラティリティ  $\sigma_k$  には  $\sqrt{t_k}$  が掛けられるが、支払が行われるのは時点  $t_k$  ではなく時点  $t_{k+1}$  なので、割引率は  $P(0, t_{k+1})$  となる。対応するフロアレットの価値は、

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [R_K N(-d_2) - F_k N(-d_1)] \quad (28.8)$$

で与えられる。

### 【例28.3】

額面10,000ドルに適用する1年後スタートの期間3ヶ月に対するLIBORレートに年率8%（3ヶ月複利）の上限を設ける契約について考える。これはキャップレットで、キャップの一つの構成要素である。LIBOR／スワップ・ゼロ・カーブが3ヶ月複利ベースで年率7%フラットであり、キャップレットの原資産である3ヶ月フォワード・レートのボラティリティが年率20%であるとする。連続複利でのゼロ・レートはすべての満期に対して6.9394%である。(28.7)式で、 $F_k = 0.07$ ,  $\delta_k = 0.25$ ,  $L = 10,000$ ,  $R_K = 0.08$ ,  $t_k = 1.0$ ,  $t_{k+1} = 1.25$ ,  $P(0, t_{k+1}) = e^{-0.069394 \times 1.25} = 0.9169$ ,  $\sigma_k = 0.20$ となる。また、

$$d_1 = \frac{\ln(0.07/0.08) + 0.2^2 \times 1/2}{0.20 \times 1} = -0.5677$$

$$d_2 = d_1 - 0.20 = -0.7677$$

となるから、キャップレットの価格は、

$$0.25 \times 10,000 \times 0.9169 [0.07N(-0.5677) - 0.08N(-0.7677)] \\ = 5.162 \text{ ドル}$$

となる。(DerivaGem ソフトウェアでは、このキャップレットの価格は 5.146 ドルになる。これは、1 年間を 365 日と仮定し、時間を最も近い全日数に丸めているからである)。

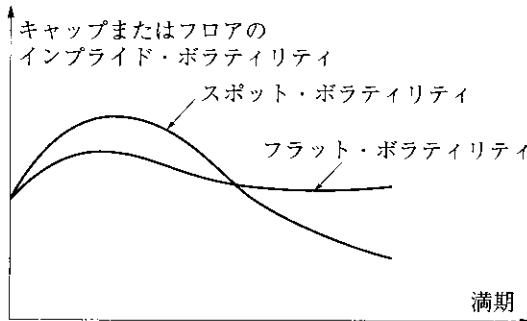
キャップを構成する個々のキャップレットは(28.7)式を用いて別々に評価される。同様に、フロアを構成する個々のフロアレットは(28.8)式を用いて別々に評価される。その際のボラティリティには、キャップレット（またはフロアレット）ごとに異なるものを用いるのが一つの方法である。その場合のボラティリティはスポット・ボラティリティ(spot volatility)と呼ばれる。特定のキャップ（フロア）を構成するすべてのキャップレット（フロアレット）に対して同じボラティリティを用い、キャップ（フロア）の期間ごとにボラティリティを変える方法もある。この場合のボラティリティはフラット・ボラティリティ(flat volatility)と呼ばれる(注2)。市場で呈示されているボラティリティは通常フラット・ボラティリティである。しかし、スポット・ボラティリティのほうがキャップレット（フロアレット）の割安割高がわかるので、多くのトレーダーはスポット・ボラティリティを推定したがる。ユーロ・ドル金利先物に対するプット（コール）・オプションはキャップレット（フロアレット）に非常によく似た商品であり、3カ月 LIBOR に対するキャップレットとフロアレットのスポット・ボラティリティは、ユーロ・ドル金利先物オプションの価格から計算されるボラティリティと比較されることが多い。

### スポット・ボラティリティとフラット・ボラティリティ

図28.3は、スポット・ボラティリティとフラット・ボラティリティを満期

(注2) フラット・ボラティリティはスポット・ボラティリティから計算することができ、その逆の計算もすることができる（章末問題28.20を参照）。

図28.3 ボラティリティのこぶ



の関数とした場合にみられる典型的なパターンである（スポット・ボラティリティの場合には、満期はキャップレットまたはフロアレットの満期である。フラット・ボラティリティの場合には、満期はキャップまたはフロアの満期である）。フラット・ボラティリティはスポット・ボラティリティの累積平均のようなものであり、満期に対する変化は相対的に小さい。図28.3に示されているように、ボラティリティには「こぶ」が通常観測される。こぶの最大点はだいたい2年から3年のところにある。このこぶは、オプション価格から計算されたインプライド・ボラティリティと過去データから計算されたヒストリカル・ボラティリティの両方に対して観測される。こぶが存在する理由について、一般的に一致した意見はない。一つのありうる説明は次のようなものである。ゼロ・カーブの短期の端に対応する金利は中央銀行に管理されている。それに対し、2年から3年のところの金利はトレーダーの活動によって決まる部分が大きい。こうしたトレーダーは、短期金利について観測される変化に過剰に反応するため、それらの金利のボラティリティを短期金利のボラティリティよりも高くする原因となっている。満期が2年から3年を超えると、第30章で論じるように、金利の平均回帰性によってボラティリティは減少していく。

ブローカーは、キャップとフロアに対するインプライド・フラット・ボラティリティの一覧を呈示している。呈示されているボラティリティは、通常

表28.1 米ドルのキャップとフロアに対してブローカーが呈示するインプライド・フラット・ボラティリティの典型例（年率%）

| 期間  | キャップ<br>ビッド | キャップ<br>オファー | フロア<br>ビッド | フロア<br>オファー |
|-----|-------------|--------------|------------|-------------|
| 1年  | 18.00       | 20.00        | 18.00      | 20.00       |
| 2年  | 23.25       | 24.25        | 23.75      | 24.75       |
| 3年  | 24.00       | 25.00        | 24.50      | 25.50       |
| 4年  | 23.75       | 24.75        | 24.25      | 25.25       |
| 5年  | 23.50       | 24.50        | 24.00      | 25.00       |
| 7年  | 21.75       | 22.75        | 22.00      | 23.00       |
| 10年 | 20.00       | 21.00        | 20.25      | 21.25       |

アット・ザ・マネーの商品に対応したものである。これは、キャップ／フロア・レートがそのキャップと同じ支払日をもつスワップのスワップ・レートに等しい、ということを意味している。表28.1は、米国ドル市場におけるブローカーの呈示の典型例を示したものである。キャップのテナーは3カ月で、キャップの満期は1年から10年までにわたっている。このデータにも図28.3に示すような“こぶ”がみられる。

### モデルの理論的裏付

キャップレットの評価に用いられた Black モデルの拡張が内的整合性をもっていることは、満期  $t_{k+1}$  の割引債に関するフォワード・リスク中立世界を考えることによって示すことができる。27.4節の分析から、次のことがわかる。

- 任意の証券の現在価値は、この世界での時点  $t_{k+1}$  における値の期待値に満期  $t_{k+1}$  の割引債の価格を掛けたものに等しい ((27.20)式を参照)。
- 時点  $t_k$  から時点  $t_{k+1}$  までの期間に対する金利の期待値は、この世界でのフォワード・レートに等しい ((27.22)式を参照)。

一つ目の結果から、前の記号を用いると、時点  $t_{k+1}$  に支払のあるキャップ

レットの価格は、

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) E_{k+1}[\max(R_k - R_K, 0)] \quad (28.9)$$

となる。ただし、 $E_{k+1}$ は満期  $t_{k+1}$  の割引債に関するフォワード・リスク中立世界での期待値である。キャップの原資産であるフォワード・レート（初期値は  $F_k$ ）のボラティリティが定数  $\sigma_k$  であると仮定すると、いま考えている世界では  $R_k$  は  $\ln(R_k)$  の標準偏差が  $\sigma_k \sqrt{t_k}$  となる対数正規分布に従う。第13章の章末付録から (28.9) 式は、

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [E_{k+1}(R_k) N(d_1) - R_K N(d_2)]$$

となる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln[E_{k+1}(R_k)/R_K] + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_{k+1}(R_k)/R_K] - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

である。二つ目の結果から、

$$E_{k+1}(R_k) = F_k$$

となる。これらの結果を合わせると、(28.7) 式のキャップの価格付けモデルが導かれる。それらの結果から、金利の期待値をそのフォワード・レートに等しいと置けば、現時点において市場で観測される満期  $t_{k+1}$  の金利で割り引くことができる、ということがわかる。

## DerivaGem ソフトウェアの利用

本書に付属している DerivaGem ソフトウェアを用いて、Black モデルによる金利キャップとフロアの価格を計算することができる。Cap\_and\_Swap\_Option ワークシートで、原資産の種類として Cap/Floor を選択し、プライシング・モデルとして Black-European を選択する。ゼロ・カーブは連続複利ベースの金利を用いて入力する。さらに、キャップの期間の開始日と終了日、フラット・ボラティリティ、キャップの支払頻度（すなわちチナー）を入力する。支払日はキャップの期間の終了日から開始日へさかのぼって、ソフトウェアで計算される。その際には、キャップレット／フロアレット

トの最初の期間の長さは、通常の期間の0.5倍から1.5倍の間であると仮定されている。たとえば、キャップの期間は1.22年後から2.80年後までで、支払頻度は四半期ごととする。この場合にはキャップレットは六つになり、その期間は2.55年後から2.80年後、2.30年後から2.55年後、2.05年後から2.30年後、1.80年後から2.05年後、1.55年後から1.80年後、1.22年後から1.55年後となる。

### デイカウント・コンベンションの影響

本節でこれまで紹介してきた公式は、デイカウント・コンベンションを反映したものではない（デイカウント・コンベンションについては6.1節を参照）。キャップ・レート  $R_K$  が実日数／360のデイカウントで表されているとしよう（これは米国での通常のデイカウントである）。この場合には、公式内の期間  $\delta_k$  は  $t_k$  から  $t_{k+1}$  までの期間の年換算日数  $a_k$  に置き換えなければならない。たとえば、 $t_k$  を5月1日、 $t_{k+1}$  を8月1日とすると、実日数／360のもとでは、支払日間の日数は92日となり、 $a_k = 92/360 = 0.2521$  となる。フォワード・レート  $F_k$  も実日数／360で表す必要があり、

$$1 + a_k F_k = \frac{P(0, t_k)}{P(0, t_{k+1})}$$

を解いて求められる。これらすべてを合わせた影響は、 $\delta_k$  を実日数／実日数ベースで計算し、 $R_K$  を実日数／360から実日数／実日数へ変換し、

$$1 + \delta_k F_k = \frac{P(0, t_k)}{P(0, t_{k+1})}$$

を解いて  $F_k$  を実日数／実日数ベースとした場合と同じになる。

### 28.3 ヨーロピアン・スワップション

スワップ・オプションあるいはスワップション（swaption）は、金利スワップに対するオプションで、もう一つのよく取引されている金利オプションである。それらは、保有者が将来のある時点にあらかじめ決められた金利

スワップを開始する権利である（もちろん、保有者はこの権利を行使しなくてもよい）。取引先企業に金利スワップを提供している多くの大手金融機関は、彼らとのスワップションの売買にも応じている。ビジネス寸見28.2で示すように、スワップションは債券オプションの一種とみなすことができる。スワップションの利用例として、ある企業が6カ月後に開始する5年変動金利ローン契約を結んでおり、そのローンを固定金利ローンに変えるために変動金利と固定金利とを交換したいと考えているとする（このようなスワップの使い方については第7章を参照）。その企業はコストを払って、6カ月後スタートの5年間に6カ月LIBORを受け取り、たとえば8%の固定金利を支払うスワップを開始する権利を得るスワップションを購入することができる。このとき、6カ月後に通常の5年スワップのスワップ・レートが年率8%以下になった場合には、その企業はスワップション行使せず、通常どおりスワップ取引を行う。しかし、スワップ・レートが年率8%を上回った場合には、その企業はスワップション行使して市場実勢よりもよい条件でスワップ契約を締結することになる。

上記のようにスワップションを用いると、企業は将来のある時点から開始するローンの固定金利がある水準を上回らないようにすることができます。スワップションのかわりにフォワード・スワップ（ディファード・スワップ(deferred swap)と呼ばれることもある）を用いる方法もある。フォワード・スワップは当初コストがかからないが、スワップ契約を締結する義務が生じるという短所がある。スワップションの場合には、企業は不利な金利変動に対する保険をもちつつ、有利な金利変動からの恩恵を被ることができる。こうしたスワップションとフォワード・スワップとの違いは、通貨オプションと為替フォワード契約との違いと同様のものである。

#### ビジネス寸見28.2 スワップションと債券オプション

第7章で説明したように、金利スワップは固定利付債と変動利付債を

交換する契約とみなすことができる。スワップ開始時点では、変動利付債の価値はスワップの元本と常に等しい。したがって、スワップションは固定利付債とスワップ元本を交換するオプション、すなわち債券オプションの一種とみなすことができる。

保有者が固定金利を支払い、変動金利を受け取る権利をもつ場合には、スワップションは行使価格が元本に等しい固定利付債のプット・オプションである。保有者が変動金利を支払い、固定金利を受け取る権利をもつ場合には、スワップションは行使価格が元本に等しい固定利付債のコール・オプションである。

### ヨーロピアン・スワップションの評価

第7章で説明したように、特定の時点における特定の満期に対するスワップ・レートは、その満期に対する新規スワップ取引においてLIBORと交換される固定レート（の市場仲値）である。ヨーロピアン・スワップションの評価に用いられる通常のモデルでは、原資産であるスワップ・レートのオプション満期における値は対数正規分布に従うと仮定されている。 $s_K$ の金利を支払いLIBORを受け取る、期間 $n$ 年のスワップを $T$ 年後に開始する権利を保有者がもつ、スワップションについて考えよう。スワップには年 $m$ 回の支払があり、元本は $L$ とする。

第7章でみたように、デイカウント・コンベンションに基づいて計算されたスワップの固定支払額は各支払日で若干異なる。しばらくはデイカウント・コンベンションの影響は無視し、スワップの各固定支払額は固定レートを $L/m$ 倍したものに等しいと仮定する。デイカウント・コンベンションの影響については本節の終わりで検討する。

時点 $T$ に開始する $n$ 年スワップ・レートを $s_T$ とする。固定金利が $s_T$ のスワップのキャッシュフローと、固定金利が $s_K$ のスワップのキャッシュフローとを比較すると、スワップションのペイオフは、

$$\frac{L}{m} \max(s_T - s_K, 0)$$

に等しい一連のキャッシュフローからなることがわかる。スワップ期間である  $n$  年間に、このキャッシュフローを年  $m$  回受け取る。現時点からみたスワップの支払日を  $T_1, T_2, \dots, T_{mn}$  年後とする（だいたい  $T_i = T + i/m$  である）。各キャッシュフローは、行使価格  $s_K$  の  $s_T$  に対するコール・オプションのペイオフである。

キャップが金利に対するオプションのポートフォリオであったのに対し、スワップションは繰り返し支払が行われるスワップ・レートに対する単一のオプションである。標準的なマーケット・モデルでは、保有者が  $s_K$  を支払う権利をもつスワップションの価値は、

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

で与えられる。ただし、

$$d_1 = \frac{\ln(s_0/s_K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(s_0/s_K) - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

であり、 $s_0$  は (27.23) 式で計算される時点ゼロにおけるフォワード・スワップ・レート、 $\sigma$  はフォワード・スワップ・レートのボラティリティである（したがって、 $\sigma \sqrt{T}$  は  $\ln s_T$  の標準偏差となる）。

これは、Black モデルの自然な拡張になっている。ボラティリティ  $\sigma$  には  $\sqrt{T}$  が掛けられる。 $\sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i)$  という項は、 $mn$  個のペイオフに対する割引率を表している。 $A$  を時点  $T_i$  ( $1 \leq i \leq mn$ ) に  $1/m$  を支払う契約の価値と定義すると、スワップションの価値は、

$$LA[s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)] \quad (28.10)$$

と書ける。ただし、

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i)$$

である。

保有者が  $s_K$  を支払うのではなく受け取る権利をもつスワップションの場合には、そのペイオフは、

$$\frac{L}{m} \max(s_K - s_T, 0)$$

となる。これは  $s_T$  に対するプット・オプションである。前と同様に時点  $T_i$  ( $1 \leq i \leq mn$ ) にこれらのペイオフを受け取ることになる。標準的なマーケット・モデルでは、このスワップションの価値は、

$$LA[s_K N(-d_2) - s_0 N(-d_1)] \quad (28.11)$$

で与えられる。

【例28.4】

LIBOR イールドカーブが連続複利ベースで年率 6 %でフラットであるとする。保有者が 6.2% を支払う 3 年スワップを 5 年後に開始する権利をもつスワップションについて考える。フォワード・スワップ・レートのボラティリティは 20% である。支払は年 2 回行われ、元本は 100 ドルとする。この場合には、

$$A = \frac{1}{2}(e^{-0.06 \times 5.5} + e^{-0.06 \times 6} + e^{-0.06 \times 6.5} + e^{-0.06 \times 7} + e^{-0.06 \times 7.5} + e^{-0.06 \times 8})$$

$$= 2.0035$$

となる。連続複利で年率 6 %の金利は、半年複利に直すと 6.09 % になる。したがって、この例では  $s_0 = 0.0609$ ,  $s_K = 0.062$ ,  $T = 5$ ,  $\sigma = 0.2$  となり、

$$d_1 = \frac{\ln(0.0609/0.062) + 0.2^2 \times 5/2}{0.2\sqrt{5}} = 0.1836$$

$$d_2 = d_1 - 0.2\sqrt{5} = -0.2636$$

となる。 $(28.10)$  式より、スワップションの価値は、

$100 \times 2.0035 \times [0.0609 \times N(0.1836) - 0.062 \times N(-0.2636)] = 2.07$  すなわち、2.07 ドルになる（これは、DerivaGem ソフトウェアで得られる価格と一致している）。

表28.2 米ドルのヨーロピアン・スワップションに対するブローカーの呈示の典型例（ボラティリティの市場仲値、年率%）

| 満期  | スワップ期間 |       |       |       |       |       |       |
|-----|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|     | 1年     | 2年    | 3年    | 4年    | 5年    | 7年    | 10年   |
| 1カ月 | 17.75  | 17.75 | 17.75 | 17.50 | 17.00 | 17.00 | 16.00 |
| 3カ月 | 19.50  | 19.00 | 19.00 | 18.00 | 17.50 | 17.00 | 16.00 |
| 6カ月 | 20.00  | 20.00 | 19.25 | 18.50 | 18.75 | 17.75 | 16.75 |
| 1年  | 22.50  | 21.75 | 20.50 | 20.00 | 19.50 | 18.25 | 16.75 |
| 2年  | 22.00  | 22.00 | 20.75 | 19.50 | 19.75 | 18.25 | 16.75 |
| 3年  | 21.50  | 21.00 | 20.00 | 19.25 | 19.00 | 17.75 | 16.50 |
| 4年  | 20.75  | 20.25 | 19.25 | 18.50 | 18.25 | 17.50 | 16.00 |
| 5年  | 20.00  | 19.50 | 18.50 | 17.75 | 17.50 | 17.00 | 15.50 |

### ブローカーの呈示

ブローカーは、ヨーロピアン・スワップションに対するインプライド・ボラティリティ（すなわち、(28.10)式と(28.11)式を用いた場合の市場価格にインプライドされている  $\sigma$  の値）の一覧を呈示している。呈示されているボラティリティは、通常アット・ザ・マネーの商品に対応したものである。これは、スワップションの行使レートがフォワード・スワップ・レートに等しい、ということを意味している。表28.2は、米国ドル市場におけるブローカーの呈示の典型例を示したものである。縦軸はオプションの満期を表しており、1カ月から5年までが呈示されている。横軸はオプション満期における原資産であるスワップの期間を表しており、1年から10年までが呈示されている。表の1年の列のボラティリティには、キャップで議論したのと同様のこぶがみられる。期間の長いスワップに対するスワップションに対応した列に移るにつれて、こぶはみられるが、それほど顕著ではなくなっている。

### スワップションモデルの理論的裏付

スワップションに用いられた Black モデルの拡張が内的整合性をもつていることは、年金係数  $A$  に関するフォワード・リスク中立世界を考えることによって示すことができる。27.4節の分析から次のことがわかる。

1. 任意の証券の現在価値は、年金係数の現在値に、この世界における、

$$\frac{\text{時点 } T \text{ における証券価格}}{\text{時点 } T \text{ における年金係数の値}}$$

の期待値を掛けたものに等しい ((27.25)式を参照)。

2. 時点  $T$  におけるスワップ・レートのこの世界における期待値は、  
そのフォワード・スワップ・レートに等しい ((27.24)式を参照)。

一つ目の結果から、スワップションの価値は、

$$LAE_A[\max(s_T - s_K, 0)]$$

となる。第13章の章末付録から、これは、

$$LA[E_A(s_T)N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

となる。ここで、

$$d_1 = \frac{\ln[E_A(s_T)/s_K] + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[E_A(s_T)/s_K] - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

である。二つ目の結果から、 $E_A(s_T)$  は  $s_0$  に等しい。これらの結果を合わせると、(28.10)式のスワップションの価格式が導かれる。それらの結果から、スワップ・レートの期待値をそのフォワード・スワップ・レートに等しいと置けば、割引のための金利は一定としてよい、ということがわかる。

### デイカウント・コンベンションの影響

上の公式は、デイカウント・コンベンションを考慮するとより正確なものになる。スワップションの原資産であるスワップの固定金利は実日数／365 や 30／360 のようなデイカウント・コンベンションを用いて表されている。 $T_0 = T$  とし、デイカウント・コンベンションを適用した  $T_{i-1}$  から  $T_i$  までの期間の年換算日数を  $a_i$  とする (たとえば、 $T_{i-1}$  を 3月1日、 $T_i$  を 9月1日とすると、デイカウントが実日数／365のときは、 $a_i = 184/365 = 0.5041$  になる)。このとき、これまで示してきた公式は、

$$A = \sum_{i=1}^{mn} a_i P(0, T_i)$$

で定義される年金係数  $A$  を用いれば正確なものになる。また、(27.23)式で示したように、フォワード・スワップ・レート  $s_0$  は、

$$s_0 A = P(0, T) - P(0, T_{mn})$$

を満たすものとして与えられる。

## 28.4 一般化

Black モデルの三つの拡張、すなわち、一つは債券オプションに対するもの、もう一つはキャップに対するもの、最後はスワップションに対するものを紹介してきた。それぞれのモデルは内的には整合性はとれているが、互いには整合性がとれていない。たとえば、将来の債券価格が対数正規分布に従う場合は、将来のゼロ・レートとスワップ・レートは対数正規分布に従わない。また、将来のゼロ・レートが対数正規分布に従う場合は、将来の債券価格とスワップ・レートは対数正規分布に従わない。

これらの結果は次のように一般化できる。

1. 時点  $T$  におけるペイオフが時点  $T$  に観測される債券の価値に依存している任意の商品を考える。その商品の現在価値は、債券価格の期待値がフォワード価格に等しくなるような世界で期待値を計算した場合のペイオフの期待値を  $P(0, T)$  倍したものになる。
2. 時点  $T^*$  におけるペイオフが時点  $T$  に観測される  $T$  から  $T^*$ までの期間に対する金利に依存している任意の商品を考える。その商品の現在価値は、原資産である金利の値の期待値がフォワード・レートに等しくなるような世界で期待値を計算した場合のペイオフの期待値を  $P(0, T^*)$  倍したものになる。
3. 年金形式で支払が行われる任意の商品を考える。時点  $T$  での年金額は、時点  $T$  における期間  $n$  年のスワップ・レートの関数として決められているとする。さらに、年金は  $n$  年間支払われ、年金の支払日はスワップの支払日と同じと仮定する。このとき、その商品の現在

価値は、(a)  $A$  を支払が年当り 1 ドルの割合の年金の現在価値とし、(b) 将来のスワップ・レートの期待値がフォワード・スワップ・レートに等しくなるような世界で期待値を計算するとした場合に、1 年当りのペイオフの期待値を  $A$  倍したものになる。

一つ目の結果は、ヨーロピアン債券オプションのモデルを一般化したものである。二つ目の結果は、キャップ／フロアのモデルを一般化したものである。三つ目の結果は、スワップションのモデルを一般化したものである。

## 28.5 金利デリバティブのヘッジ

本節では、第17章で紹介したグリーケスを金利デリバティブの場合に拡張する方法について論じる。

金利デリバティブでは、デルタ・リスクはゼロ・カーブのシフトに伴うリスクになる。ゼロ・カーブのシフトのさせ方はいろいろあるので、多くのデルタが計算可能である。そのいくつかは、次のようなものである。

1. ゼロ・カーブを 1 ベーシス・ポイントだけパラレル・シフトさせたときの影響を計算する。これは DV01 と呼ばれることがある。
2. ゼロ・カーブを構築するのに用いられた各商品の呈示価格を微小変化させたときの影響を計算する。
3. ゼロ・カーブ（またはフォワード・カーブ）をいくつかの部分（またはパケット）に分割する。一つのパケットの金利を 1 ベーシス・ポイントだけシフトさせ、残りの期間構造を当初のままにしたときの影響を計算する（これについてはビジネス寸見6.3で説明した）。
4. 20.9節で概要を説明した主成分分析を行う。最初のいくつかの各ファクターの変化に関するデルタを計算する。このとき、一つ目のデルタはゼロ・カーブを微小量だけだいたいパラレル・シフトさせたときの影響を表し、二つ目のデルタはゼロ・カーブの微小なねじれに対する影響を表している、などとなる。

実務では、トレーダーは二つ目のアプローチを好む傾向がある。ゼロ・

カーブが変化するのは、ゼロ・カーブを計算するのに用いられた商品の呈示価格が変化した場合に限られる、というのがトレーダーの主張である。したがって、それらの商品の価格変化から生じるエクスポージャーに焦点を当てることは理にかなっているとトレーダーは感じている。

いくつかのデルタが計算される場合には、多くのガンマが計算可能である。10種類の商品を用いてゼロ・カーブが計算されており、各商品の呈示価格の変化に対する影響を求めてデルタが計算されていると仮定する。 $\Pi$ をポートフォリオの価値とするとき、ガンマは  $\partial^2\Pi/\partial x_i\partial x_j$  という形の2階偏微分係数で与えられる。 $x_i$ について10通り、 $x_j$ について10通りの選び方があるので、合計55通りの異なるガンマが定義できる。これは「情報過多」かもしれない。一つの方法は、クロスするガンマを無視して、 $i=j$ となる10個の偏微分係数に焦点を当てるというものである。別のある方法は、ゼロ・カーブのパラレル・シフトに関するポートフォリオの価値の2階偏微分係数をただ一つのガンマとして計算するというものである。さらには、主成分分析の最初の二つのファクターに関するガンマを計算するというものも考えられる。

金利デリバティブのポートフォリオのベガは、ボラティリティの変化に対するエクスポージャーを測るものである。一つの方法は、すべてのキャップやヨーロピアン・スワップションのBlackボラティリティと同じだけ微小変化をさせたときのポートフォリオへの影響を計算するというものである。しかし、この方法は一つのファクターによってすべてのボラティリティが変動していると仮定するもので、単純すぎるかもしれない。もっとよい方法は、キャップやスワップションのボラティリティに対して主成分分析を行い、最初の二つか三つのファクターに対応するベガを計算するというものである。

## 要 約

Black モデルとその拡張は、ヨーロピアン・スタイルの金利オプションの評価によく使われている。オプションの原資産変数の値がオプション満期に対数正規分布に従っていると仮定することが、Black モデルの本質的な部分である。ヨーロピアン債券オプションの場合には、Black モデルではオプション満期における原資産の債券価格が対数正規分布していると仮定されている。キャップの場合には、キャップを構成している個々のキャップレットの原資産である金利が対数正規分布していると仮定されている。スワップションの場合には、原資産であるスワップ・レートが対数正規分布していると仮定されている。これらのモデルは、それぞれには内的整合性をもつていて、互いには整合的でない。

Black のモデルでは、変数の期待値がそのフォワード値に等しいという仮定に基づいて期待ペイオフを求め、その期待ペイオフを現時点の市場で観測されるゼロ・レートで割り引くという計算が行われる。これは、本章で考察してきた「プレーン・バニラ」商品に対しては正しい手法となっている。しかし、次章でみるように、この手法はすべての状況で正しいというわけではない。

## 参考文献

- Black, F. "The Pricing of Commodity Contracts," *Journal of Financial Economics*, 3 (March 1976) : 167-79.

## 章末問題

- 28.1** ある企業が3カ月LIBORに対する年率10%のキャップを保有している。想定元本は2,000万ドルである。あるリセット日の3カ月LIBORが年率12%であったとする。このとき、キャップ契約に基づいていくらの支払が生じるか。また、支払はいつ行われるか。
- 28.2** スワップションが債券オプションの一種とみなせる理由を説明せよ。
- 28.3** Blackモデルを用いて、10年債に対する満期1年のヨーロピアン・プット・オプションを評価せよ。ただし、現在の債券価格を125ドル、行使価格を110ドル、1年物金利を年率10%，債券のフォワード価格のボラティリティを年率8%とし、オプション期間中に支払われるクーポンの現在価値を10ドルとする。
- 28.4** 期間5年のキャップを評価する際に、(a)スポット・ボラティリティと(b)フラット・ボラティリティはどのように用いられるかについて注意深く説明せよ。
- 28.5** 元本1,000ドルに対する15カ月後スタートの3カ月金利に対して上限13%（3カ月複利）を設けるオプションの価格を計算せよ。ただし、対象期間に対するフォワード・レートを年率12%（3カ月複利）、18カ月物無リスク金利を年率11.5%（連続複利）、フォワード・レートのボラティリティを年率12%とする。
- 28.6** ある銀行では、ヨーロピアン債券オプションの価格付けにBlackモデルが用いられている。10年債に対する満期5年のオプションのインプライド・プライス・ボラティリティを用いて、同じ債券に対する満期9年のオプションの価格付けを行うとする。このとき、得られる価格は高すぎると予想されるか、低すぎると予想されるか。その理由も説明せよ。
- 28.7** 今日から5年後に満期を迎える債券に対する満期4年のヨーロピアン・コール・オプションの価値を、Blackモデルを用いて計算せよ。ただし、5年債の取引価格を105ドル、同じクーポンをもつ4年債の

取引価格を102ドル，行使価格を100ドル，4年物無リスク金利を連続複利で年率10%，4年後の債券価格のボラティリティを年率2%とする。

- 28.8 10年後に満期を迎える債券に対する満期5年のプット・オプションのイールド・ボラティリティを22%とするとき，オプションの価値はどのように求められるか。ただし，現在の金利に基づいて計算したオプション満期での債券の修正デュレーションは4.2年であり，債券のフォワード・イールドは7%であるとする。
- 28.9 別の金融商品で，キャップとフロアの行使価格が同一の5年物ゼロ・コスト・カラーと同じ経済効果をもつものは何か。また，共通の行使価格は何と等しくなるか。
- 28.10 ヨーロピアン債券オプションに対するプット・コール・パリティの関係式を導出せよ。
- 28.11 ヨーロピアン・スワップションに対するプット・コール・パリティの関係式を導出せよ。
- 28.12 キャップとフロアのインプライド Black (フラット)・ボラティリティが異なる場合，裁定機会が存在する理由について説明せよ。また，表28.1のブローカーの表示には裁定機会は存在するか。
- 28.13 債券価格が対数正規分布に従うと仮定した場合，債券イールドは負になりうるか。その理由も説明せよ。
- 28.14 5%の固定金利を支払い，LIBORを受け取る期間3年，年1回払いのスワップ契約を4年後に開始する権利を保有者がもつヨーロピアン・スワップションの価値を求めよ。ただし，スワップの想定元本は1,000万ドル，イールドカーブは1年複利で年率5%でフラットとし，スワップ・レートのボラティリティは20%とする。得られた答とDerivaGemソフトウェアによる計算結果とを比較せよ。
- 28.15 割引債のイールド  $R$  が，

$$dR = \mu dt + \sigma dz$$

という確率過程に従っているとする。ただし， $\mu$ と $\sigma$ は  $R$  と  $t$  の関

数で,  $dz$  はウィナー過程である。伊藤の補題を用いて, 割引債価格のボラティリティが満期に近づくとゼロに減少していくことを示せ。

**28.16** 例28.2のオプション価格を手計算で検証せよ。

**28.17** 1年, 2年, 3年, 4年, 5年のゼロ・レートが, それぞれ 6%, 6.4%, 6.7%, 6.9%, 7%であるとする。元本が100ドル, キャップ・レートが 8% の期間 5年, 年 2 回払いのキャップの価格が 3 ドルである。このとき, DerivaGem ソフトウェアを用いて次の値を求めよ。

- (a) キャップとフロアに対する期間 5 年のフラット・ボラティリティ
- (b) キャップ・レートが 8 % の場合の 5 年物ゼロ・コスト・カラーにおけるフロア・レート

**28.18**  $V_1$  を時点  $T_1$  から時点  $T_2$  の間, 固定金利  $s_K$  を支払い, LIBOR を受け取るスワップに対するオプションの価値,  $f$  を時点  $T_1$  から時点  $T_2$  の間, 固定金利  $s_K$  を受け取り, LIBOR を支払うフォワード・スワップの価値,  $V_2$  を時点  $T_1$  から時点  $T_2$  の間, 固定金利  $s_K$  を受け取るスワップに対するオプションの価値とするとき,  $V_1 + f = V_2$  が成り立つことを示せ。また,  $s_K$  が現在のフォワード・スワップ・レートに等しいとき,  $V_1 = V_2$  となることを導け。

**28.19** ゼロ・レートが問題28.17のように与えられているとする。DerivaGem ソフトウェアを用いて, 固定金利 6 % を支払い, LIBOR を受け取る期間 5 年のスワップを 1 年後に開始できるオプションの価値を計算せよ。ただし, 元本は 1 億ドル, 金利は半年ごとに交換され, スワップ・レートのボラティリティは 21 % であると仮定する。

**28.20** (a) キャップのスポット・ボラティリティからキャップのフラット・ボラティリティを計算する方法と(b) キャップのフラット・ボラティリティからキャップのスポット・ボラティリティを計算する方法を述べよ。

## 宿題

- 28.21** 残存期間14.25年の米国長期国債に対する満期8カ月のプット・オプションを考える。現在の債券の取引価格を910ドル、行使価格を900ドル、債券価格のボラティリティを年率10%とする。債券からは3カ月後に35ドルのクーポンが支払われる。期間1年までのすべての満期に対して、無リスク金利は8%であるとする。このとき、Blackモデルを用いてオプション価格を求めよ。ただし、行使価格が債券の取引価格に対応する場合と、呈示価格に対応する場合の両方について考えよ。
- 28.22** 元本が1,000ドルとして、9カ月後の90日LIBORレートに対するキャップの価格を、Blackモデルを用いて以下の条件のもとで計算せよ。
- 満期9カ月のユーロ・ドル金利先物の呈示価格=92（先物レートとフォワード・レートとの差は無視せよ）
  - 満期9カ月のユーロ・ドル金利オプションにインプライドされている金利のボラティリティ=年率15%
  - 連続複利での現在の12カ月物金利=年率7.5%
  - キャップ・レート=年率8%（デイカウントは実日数/360）
- 28.23** LIBORイールドカーブがフラットで、連続複利ベースで8%であるとする。保有者が7.6%を受け取る期間5年のスワップを4年後に開始できる権利をもつスワップションを考える。フォワード・スワップ・レートのボラティリティを年率25%，想定元本を100万ドルとする。Blackモデルを用いてスワップションの価格を計算せよ。また、得られた答とDerivaGemソフトウェアによる計算結果とを比較せよ。
- 28.24** DerivaGemソフトウェアを用いて、LIBORを基準とするローン（3カ月ごとリセット）の金利の最大値と最小値をそれぞれ7%と5%にするような、期間5年のカラーの価値を計算せよ。ただし、

LIBOR ゼロ・カーブ（連続複利）は現在 6 %でフラットであるとし、フラット・ボラティリティは20%，元本は100ドルと仮定する。

- 28.25 DerivaGem ソフトウェアを用いて、固定金利 6 %を支払い、変動金利を受け取る期間 5 年のスワップを 2 年後に開始できる権利をもつヨーロピアン・スワップションの価値を計算せよ。ただし、スワップのキャッシュフローは半年ごとに交換され、1年，2年，5年，10年のゼロ・レート（連続複利）はそれぞれ 5 %，6 %，6.5%，7 %，元本は100ドル、ボラティリティは年率15%と仮定する。企業のスワップションの使い方に関して例を示せ。また、そのスワップションはどのような債券オプションと等価であるか。

## 第29章

# コンベキシティ調整, タイミング調整, クオント調整

ヨーロピアン・スタイルのデリバティブの評価は、一般的に次の 2 ステップの手続で行われる。

1. 各原資産変数の期待値がそのフォワード値に等しいと仮定して期待ペイオフを計算する。
2. 評価日からペイオフ発生日までの期間に適用される無リスク金利でその期待ペイオフを割り引く。

最初にこの手続を用いたのは、FRA とスワップの評価のところである。第 4 章では、フォワード・レートが将来実現する金利であるという仮定のもとでペイオフを計算し、それを無リスク金利で割り引くことで FRA の価値が求められる、ということを示した。同様に、第 7 章では、フォワード・レートが将来実現するという仮定のもとでキャッシュフローを計算し、それを無リスク金利で割り引くことでスワップの価値が求められる、ということ

を示した。また、第16章と第27章では、Black モデルは幅広いヨーロピアン・オプションを評価する一般的な方法であり、Black のモデルは上述の 2 ステップの手続を適用したものであることを示した。第28章で紹介した債券オプション、キャップ／フロア、スワップションに対するモデルも、すべてこの 2 ステップの手続の例である。

以上のことから、ヨーロピアン・スタイルの金利デリバティブは 2 ステップの手続を用いて常に正しく評価できるか、という問題が持ち上がる気になる。その答は否である。非標準的な金利デリバティブに対しては、最初のステップにおいて変数のフォワード値に調整を加える、という 2 ステップの手続の修正が必要となる場合もある。本章では、コンベキシティ調整、タイミング調整、クオント調整という 3 種類の調整について考える。

## 29.1 コンベキシティ調整

まず、ペイオフが、それが発生する時点において観測される債券イールドに依存している商品について考えよう。

通常、変数  $S$  のフォワード値は時点  $T$  において  $S_T - K$  を支払うフォワード契約に関連して計算される。それは、この契約の価値をゼロにするような  $K$  の値である。27.4節で論じたように、フォワード・レートとフォワード・イールドの定義はそれとは異なる。フォワード・レートは、割引債のフォワード契約にインプライドされている金利である。さらに一般的に、フォワード債券イールドはフォワード債券価格にインプライドされているイールドである。

$B_T$  を時点  $T$  における債券価格、 $y_T$  をそのイールドとし、 $B_T$  と  $y_T$  との間の（債券価格付け）関係が、

$$B_T = G(y_T)$$

で与えられているとする。 $F_0$  を時点  $T$  に満期を迎える契約の時点ゼロにおけるフォワード債券価格とし、 $y_0$  を時点ゼロにおけるフォワード債券イールドと定義する。フォワード債券イールドの定義より、

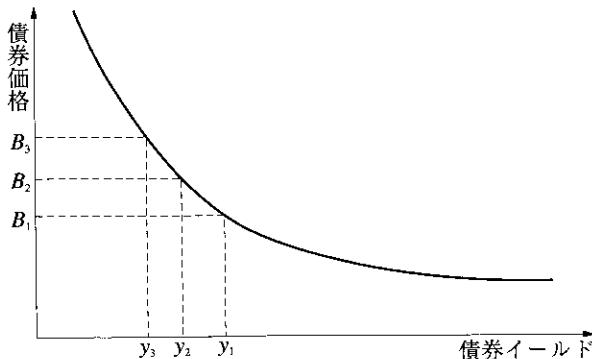
$$F_0 = G(y_0)$$

が成り立つ。関数  $G$  は非線形である。したがって、将来の債券価格の期待値がフォワード債券価格に等しい（すなわち、満期  $T$  の割引債に関するフォワード・リスク中立世界にいる）場合には、将来の債券イールドの期待値はフォワード債券イールドに等しくならないことがわかる。

このことを図示したものが図29.1で、時点  $T$  における債券価格と債券イールドとの関係が示されている。簡単のため、債券価格は  $B_1, B_2, B_3$  の三つの値だけをとりうるとし、 $P(t, T)$  に関するフォワード・リスク中立世界において、それらは同じ確率で起こりうると仮定する。また、債券価格は等間隔で並んでおり、 $B_2 - B_1 = B_3 - B_2$  とする。フォワード債券価格は債券価格の期待値  $B_2$  となる。債券価格は、同程度に起こりうる三つの債券イールド  $y_1, y_2, y_3$  に変換される。これらのイールドは等間隔には並んでいない。変数  $y_2$  はフォワード債券価格に対応するイールドであるから、フォワード債券イールドである。債券イールドの期待値は  $y_1, y_2, y_3$  の平均であるが、それは明らかに  $y_2$  より大きい。

時点  $T$  に債券イールドに依存したペイオフをもつデリバティブについて考える。(27.20)式から、(a)満期  $T$  の割引債に関するフォワード・リスク中立世界でのペイオフの期待値を計算し、(b)現時点における満期  $T$  の無リスク金利で割り引くことによって、このデリバティブを評価することができ

図29.1 時点  $T$  における債券価格と債券イールドとの関係



る。いま考えている世界では、債券価格の期待値はフォワード価格に等しいことがわかっている。したがって、債券価格の期待値がフォワード債券価格に等しいときの債券イールドの期待値を求める必要がある。本章末の付録にある分析から、求める債券イールドの期待値の近似式は、

$$E_T(y_T) = y_0 - \frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)} \quad (29.1)$$

で与えられる。ここで、 $G'$ および $G''$ は $G$ の1階および2階の偏微分係数、 $E_T$ は $P(t, T)$ に関するフォワード・リスク中立世界での期待値を表し、 $\sigma_y$ はフォワード・イールドのボラティリティである。したがって、債券イールドの期待値が $y_0$ でなく、

$$y_0 - \frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

であると仮定すれば、期待ペイオフを現時点における満期 $T$ の無リスク金利で割り引いてよい、ということがわかる。この債券イールドの期待値とフォワード債券イールドとの差

$$-\frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

は、コンベキシティ調整 (convexity adjustment) と呼ばれている。これは図29.1における $y_2$ と期待イールドとの差に対応している ( $G'(y_0) < 0$ かつ $G''(y_0) > 0$ となるので、コンベキシティ調整は正となる)。

## 応用1：金利

(29.1)式の最初の応用として、時点 $T$ から時点 $T^*$ までの期間の金利を元本 $L$ に適用して得られる金額に等しいキャッシュフローが時点 $T$ に発生する商品について考える（この例は、第32章でアリアー・スワップを考えるときに役立つことになる）。時点 $T$ から時点 $T^*$ までの期間に適用される金利は、通常、時点 $T^*$ で支払われるが、ここではそれよりも早い、時点 $T$ で支払われると仮定していることに注意しよう。

時点 $T$ におけるキャッシュフローは $LR_{T\tau}$ である。ただし、 $\tau = T^* - T$

で、 $R_T$ は時点  $T$  から時点  $T^*$ までの期間に適用される割引債の金利（期間  $\tau$  の複利表示）である（注1）。変数  $R_T$  は、時点  $T^*$  に満期を迎える割引債に対する時点  $T$  におけるイールドとみなすことができる。この債券の価格とイールドとの関係は、

$$G(y) = \frac{1}{1+y\tau}$$

で与えられる。（29.1）式より、

$$E_T(R_T) = R_0 - \frac{1}{2} R_0^2 \sigma_k^2 T \frac{G''(R_0)}{G'(R_0)}$$

すなわち、

$$E_T(R_T) = R_0 + \frac{R_0 \sigma_k \tau T}{1 + R_0 \tau} \quad (29.2)$$

となる。ここで、 $R_0$ は時点  $T$  から時点  $T^*$ までの期間に適用されるフォワード・レートであり、 $\sigma_k$ はフォワード・レートのボラティリティである。

したがって、商品の価値は、

$$P(0, T) L_T \left[ R_0 + \frac{R_0 \sigma_k \tau T}{1 + R_0 \tau} \right]$$

となる。

### 【例29.1】

3年後にその時点の1年物ゼロクーポン・レート（1年複利）に1,000ドルを掛けた金額に等しいペイオフが発生するデリバティブについて考える。ゼロ・レートはすべての満期に対して1年複利で年率10%とし、3年後から4年後までの期間に適用されるフォワード・レートのボラティリティは20%とする。この場合、 $R_0=0.10$ 、 $\sigma_k=0.20$ 、 $T=3$ 、 $\tau=1$ 、 $P(0, 3)=1/1.10^3=0.7513$ となる。したがって、デリバティブの価値は、

---

（注1）これまでと同様に、説明を簡単にするために、この例ではデイカウントは実日数／実日数とする。

$$0.7513 \times 1000 \times 1 \times \left[ 0.10 + \frac{0.10^2 \times 0.20^2 \times 1 \times 3}{1 + 0.10 \times 1} \right]$$

すなわち75.95ドルとなる（これはコンベキシティ調整を行わない場合の価格75.13ドルと比較されるものである）。

## 応用2：スワップ・レート

次に、時点  $T$  にその時点で観測されるスワップ・レートに等しいペイオフが発生するデリバティブを考える。スワップ・レートはパー・イールドである。コンベキシティ調整を計算する目的では、時点  $T$  における  $N$  年スワップ・レートは、現時点のフォワード・スワップ・レートに等しいクーポンをもつ  $N$  年債のその時点におけるイールドに等しいと仮定する。これによつて、(29.1)式を用いることができる。

### 【例29.2】

3年後に3年スワップ・レートに元本100ドルを掛けた金額に等しいペイオフが発生する商品について考える。スワップの支払は1年ごと、ゼロ・レートはすべての満期に対して1年複利で年率12%，3年後スタートの3年フォワード・スワップ・レートの（スワッショーン価格にインプライドされている）ボラティリティは22%とする。スワップ・レートがクーポン12%の債券のイールドに等しいと近似すると、この場合の関数  $G(y)$  は、

$$G(y) = \frac{0.12}{1+y} + \frac{0.12}{(1+y)^2} + \frac{1.12}{(1+y)^3}$$

$$G'(y) = -\frac{0.12}{(1+y)^2} - \frac{0.24}{(1+y)^3} - \frac{3.36}{(1+y)^4}$$

$$G''(y) = \frac{0.24}{(1+y)^3} + \frac{0.72}{(1+y)^4} + \frac{13.44}{(1+y)^5}$$

となる。いまの場合、フォワード・イールド  $y_0$  は0.12となるので、 $G'(y_0) = -2.4018$  および  $G''(y_0) = 8.2546$  となる。（29.1)式より、

$$E_T(y_T) = 0.12 + \frac{1}{2} \times 0.12^2 \times 0.22^2 \times 3 \times \frac{8.2546}{2.4018} = 0.1236$$

となる。したがって、フォワード・スワップ・レートを0.12ではなく0.1236 (=12.36%)と仮定して、商品は評価されることになる。商品の価値は、

$$\frac{100 \times 0.1236}{1.12^3} = 8.80$$

すなわち8.80ドルとなる（これはコンペキシティ調整を行わない場合に得られる価格8.54ドルと比較されるものである）。

## 29.2 タイミング調整

本節では、時点  $T$  において観測される市場変数  $V$  の値が、それより後の時点  $T^*$  で発生するペイオフの計算に使われるような状況について考える。

$V_T$  : 時点  $T$  における  $V$  の値

$E_T(V_T)$  :  $P(t, T)$  に関するフォワード・リスク中立世界における  $V_T$  の期待値

$E_{T^*}(V_T)$  :  $P(t, T^*)$  に関するフォワード・リスク中立世界における  $V_T$  の期待値

と定義する。

ニューメレール  $P(t, T)$  からニューメレール  $P(t, T^*)$  に移る際のニューメレール比（27.8節を参照）は、

$$W = \frac{P(t, T^*)}{P(t, T)}$$

である。これは、満期  $T^*$  の割引債に対する満期  $T$  のフォワード価格である。

$\sigma_V$  :  $V$  のボラティリティ

$\sigma_W$  :  $W$  のボラティリティ

$\rho_{VW}$  :  $V$  と  $W$  との相関係数

と定義する。(27.35)式より、ニューメレール変換によって  $V$  の成長率は  $\alpha_V$ だけ増加する。ただし、

$$\alpha_V = \rho_{VW} \sigma_V \sigma_W \quad (29.3)$$

である。この結果は  $T$  から  $T^*$ までの期間に対するフォワード・レートを用いて表現できる。

$R$  :  $m$  回複利で表された  $T$  から  $T^*$ までの期間に対するフォワード・レート

$\sigma_R$  :  $R$  のボラティリティ

と定義する。このとき、 $W$  と  $R$  の関係は、

$$W = \frac{1}{(1+R/m)^{m(T^*-T)}}$$

で与えられる。これより、 $W$  のボラティリティと  $R$  のボラティリティとの関係が、伊藤の補題から、

$$\sigma_W = -\frac{\sigma_R R (T^* - T)}{1 + R/m}$$

と計算される。したがって、(29.3)式は、

$$\alpha_V = -\frac{\rho_{VR} \sigma_V \sigma_R R (T^* - T)}{1 + R/m}$$

となる(注2)。ここで、 $\rho_{VR} = -\rho_{VW}$  は  $V$  と  $R$  との瞬間的な相関である。近似として、 $R$  が当初の  $R_0$  のまま一定と仮定し、式に現れるボラティリティと相関が定数であるとすると、時点ゼロにおいて、

$$E_{T^*}(V_T) = E_T(V_T) \exp \left[ -\frac{\rho_{VR} \sigma_V \sigma_R R_0 (T^* - T)}{1 + R_0/m} T \right] \quad (29.4)$$

(注2) 変数  $R$  と  $W$  とは負の相関をもつ。このことを考慮して、 $\sigma_W = -\sigma_R R (T^* - T) / (1 + R/m)$  と負の値に置き、 $\rho_{VW} = \rho_{VR}$  と置くことができる。あるいは、 $\sigma_W$  の符号を変えて正の値にし、 $\rho_{VW} = -\rho_{VR}$  と置くこともできる。いずれの場合においても、 $\alpha_V$ に対する公式は同じになる。

が得られる。

【例29.3】

5年後に観測される株価指数の値に等しいペイオフが6年後に発生するデリバティブについて考える。その株価指数の満期5年のフォワード価格を1,200とする。また、指標のボラティリティを20%，5年後から6年後までの期間に対するフォワード・レートのボラティリティを18%，それらの間の相関を-0.4とする。さらに、ゼロ・カーブは1年複利で8%でフラットとする。 $V$ を指標の値とし、 $T=5$ 、 $T^*=6$ 、 $m=1$ 、 $R_0=0.08$ 、 $\rho_{VR}=-0.4$ 、 $\sigma_V=0.20$ 、 $\sigma_R=0.18$ として、先の結果を用いると、

$$E_{T^*}(V_T) = E_T(V_T) \exp \left[ -\frac{-0.4 \times 0.20 \times 0.18 \times 0.08 \times 1}{1+0.08} \times 5 \right]$$

すなわち  $E_{T^*}(V_T) = 1.00535 E_T(V_T)$  となる。第27章の議論から、 $E_T(V_T)$ は指標のフォワード価格、すなわち1,200である。したがって、 $E_{T^*}(V_T) = 1,200 \times 1.00535 = 1,206.46$  となる。再び第27章の議論を用いると、(27.20)式からデリバティブの価格は  $1,206.46 \times P(0,6)$  となる。いまの場合には、 $P(0,6) = 1/1.08^6 = 0.6302$  となるので、デリバティブの価値は760.25となる。

### 応用1：再考

これまで行ってきた分析を用いると、29.1節の応用1で与えた結果を別の方法で導くことができる。そのときの記号を用いて、 $R_T$ を  $T$  から  $T^*$ までの金利、 $R_0$ を  $T$  から  $T^*$ までの期間に対するフォワード・レートとする。このとき、(27.22)式より、

$$E_{T^*}(R_T) = R_0$$

となる。 $V$  が  $R$  に等しいとして、(29.4)式を利用すると、

$$E_{T^*}(R_T) = E_T(R_T) \exp \left[ -\frac{\sigma_R^2 R_0 \tau}{1+R_0 \tau} T \right]$$

が得られる。ここで  $\tau = T^* - T$  である ( $m = 1/\tau$  に注意せよ)。したがって、

$$R_0 = E_T(R_T) \exp \left[ -\frac{\sigma_R^2 R_0 T \tau}{1 + R_0 \tau} \right]$$

すなわち、

$$E_T(R_T) = R_0 \exp \left[ \frac{\sigma_R^2 R_0 T \tau}{1 + R_0 \tau} \right]$$

となる。指數関数を近似すると、

$$E_T(R_T) = R_0 + \frac{R_0^2 \sigma_R^2 \tau T}{1 + R_0 \tau}$$

が得られる。これは(29.2)式と同じものである。

### 29.3 クオント

クオント (quanto) あるいはクロスカレンシー・デリバティブ (cross-currency derivative) とは、2種類の通貨を含む商品である。ペイオフは一方の通貨単位で表示される変数によって定義され、その支払はもう一方の通貨で行われる。クオントの例は、ビジネス寸見5.3で議論した日経平均に対するCMEの先物契約である。この契約の原資産となる市場変数は日経225指数(円ベース)であるが、契約の清算は米ドルで行われる。

時点  $T$  に通貨  $X$  でのペイオフが発生するクオントを考える。そのペイオフは、時点  $T$  に通貨  $Y$  ベースで観測される変数の値  $V$  に依存していると仮定する。

$P_X(t, T)$  : 満期  $T$ 、元本が通貨  $X$  1単位の割引債の時点  $t$  における  
通貨  $X$  での価値

$P_Y(t, T)$  : 満期  $T$ 、元本が通貨  $Y$  1単位の割引債の時点  $t$  における  
通貨  $Y$  での価値

$V_T$  : 時点  $T$  における  $V$  の値

$E_X(V_T)$  :  $P_X(t, T)$  に関するフォワード・リスク中立世界における  $V_T$   
の期待値

$E_Y(V_T)$  :  $P_Y(t, T)$ に関するフォワード・リスク中立世界における  $V_T$  の期待値

と定義する。

ニューメレール  $P_Y(t, T)$  からニューメレール  $P_X(t, T)$  に移る際のニューメレール比は,

$$W(t) = \frac{P_X(t, T)}{P_Y(t, T)} S(t)$$

である。ここで、 $S(t)$  は時点  $t$  における直物為替レート（通貨  $X$  1 単位当たりの通貨  $Y$  の単位数）である。したがって、ニューメレール比  $W(t)$  は満期  $T$  のフォワード為替レート（通貨  $X$  1 単位当たりの通貨  $Y$  の単位数）である。

$\sigma_w$  :  $W$  のボラティリティ

$\sigma_v$  :  $V$  のボラティリティ

$\rho_{vw}$  :  $V$  と  $W$  との瞬間的な相関係数

と定義する。(27.35)式より、ニューメレール変換によって  $V$  の成長率は  $\alpha_v$ だけ増加する。ただし、

$$\alpha_v = \rho_{vw} \sigma_v \sigma_w \quad (29.5)$$

である。ボラティリティと相関が一定であると仮定すると、

$$E_X(V_T) = E_Y(V_T) e^{\rho_{vw} \sigma_v \sigma_w T}$$

あるいは、近似して、

$$E_X(V_T) = E_Y(V_T) (1 + \rho_{vw} \sigma_v \sigma_w T) \quad (29.6)$$

が得られる。第32章では、この式を用いてディフ・スワップとして知られる商品の評価を行う。

#### 【例29.4】

現在の日経平均株価指数を15,000円、ドルの1年物無リスク金利を5%，円の1年物無リスク金利を2%，日経平均の配当利回りを1%とする。円建ての日経平均に対する満期1年のフォワード価格は(5.8)式から通常どおりに計算でき、

$$15,000 e^{(0.02 - 0.01) \times 1} = 15,150.75$$

となる。日経平均のボラティリティを20%，円／ドルの1年物フォワー

ド為替レートのボラティリティを12%，両者の相関係数を0.3とする。この場合， $E_Y(V_T) = 15,150.75$ ， $\sigma_S = 0.20$ ， $\sigma_W = 0.12$ ， $\rho = 0.3$ である。(29.6)式から，元本1ドルの1年物割引債に関するフォワード・リスク中立世界での日経平均の期待値は，

$$15,150.75 e^{0.3 \times 0.2 \times 0.12 \times 1} = 15,260.23$$

となる。これは，支払が円でなくドルで行われる日経平均に対するフォワード契約の価格である（同じ条件の先物価格もだいたい同じ値になる）。

### 従来のリスク中立測度の利用

フォワード・リスク中立測度は，支払が1時点のみで発生する場合にうまく使える測度である。それ以外の場合には，従来のリスク中立測度を用いるほうが適している場合も多い。通貨  $Y$  に関するリスク中立世界で変数  $V$  の従う確率過程がわかっているとして，通貨  $X$  に関するリスク中立世界でそれが従う確率過程を求めたいとする。

$S$ ：直物為替レート（ $X$  1単位当たりの  $Y$  の単位数）

$\sigma_S$ ： $S$  のボラティリティ

$\sigma_V$ ： $V$  のボラティリティ

$\rho$ ： $S$  と  $V$  との瞬間的な相関係数

と定義する。

この場合，ニューメレール変換は通貨  $Y$  のマネー・マーケット・アカウントから通貨  $X$  のマネー・マーケット・アカウントへの変換である（マネー・マーケット・アカウントはともに通貨  $X$  建てである）。通貨  $X$  のマネー・マーケット・アカウントの価値を  $g_X$ ，通貨  $Y$  のマネー・マーケット・アカウントの価値を  $g_Y$  とすると，ニューメレール比は，

$$\frac{g_X}{g_Y} S$$

となる。27.4節で説明したように，変数  $g_X(t)$  と変数  $g_Y(t)$  は確率変動する成長率をもつが，ボラティリティはゼロである。伊藤の補題からニューメ

レール比のボラティリティは  $\sigma_s$  となる。したがって、ニューメレール変換によって  $V$  の期待成長率は、

$$\rho_{\sigma v \sigma s} \quad (29.7)$$

だけ増加する。このことから、リスクの市場価格はゼロから  $\rho_{\sigma s}$  に変化する。この結果を用いて、Siegel のパラドックスを解決することができる（ビジネス寸見29.1 を参照）。

【例29.5】

$S-K$  の英ポンド建てペイオフが発生する、満期 2 年のアメリカン・オプションについて考える。ただし、 $S$  は権利行使日における S&P500 の水準、 $K$  は行使価格である。S&P500 の現在の水準は 1,200 である。無リスク金利は英ポンドと米ドルでそれぞれ 5% と 3% でともに一定とし、米ドル／英ポンドの為替レートと S&P500との相関係数は 0.2、S&P500 のボラティリティは 25%，為替レートのボラティリティは 12%，S&P500 の配当利回りは 1.5% とする。

英国のマネー・マーケット・アカウントを用いて（すなわち、英国の投資家からみた従来のリスク中立世界を用いて）S&P500に対する二項ツリーを構築することによって、このオプションを評価することができる。(29.7)式から、米ドルのマネー・マーケット・アカウントから英ポンドのマネー・マーケット・アカウントへのニューメレール変換を行うと、S&P500 の期待成長率が、

$$0.2 \times 0.25 \times 0.12 = 0.006$$

すなわち 0.6% だけ増加することがわかる。米ドルをニューメレールとした場合の S&P500 の成長率は  $3\% - 1.5\% = 1.5\%$  である。したがって、英ポンドをニューメレールとした場合の成長率は 2.1% となる。英ポンドの無リスク金利は 5% なので、英ポンドをニューメレールとした場合には、S&P500 は配当利回りが  $5\% - 2.1\% = 2.9\%$  の資産と同じようなふるまいをする。パラメータの値を  $S=1,200$ 、 $K=1,200$ 、 $r=0.05$ 、 $q=0.029$ 、 $\sigma=0.25$ 、 $T=2$  とし、時間ステップ数を 100 として DerivaGem ソフトウェアを用いて計算すると、オプションの価値は 179.83

ポンドとなる。

### ビジネス寸見29.1 Siegel のパラドックス

二つの通貨  $X$  と  $Y$  を考える。それぞれの通貨の金利を  $r_X$  と  $r_Y$  とし、ともに一定とする。また、 $S$  を通貨  $X$  1 単位当りの通貨  $Y$  の単位数と定義する。第 5 章で説明したように、通貨は外国の無リスク金利に等しい利回りを生む資産である。したがって、 $S$  に対する従来のリスク中立過程は、

$$dS = (r_Y - r_X) S dt + \sigma_S S dz$$

となる。伊藤の補題より、 $1/S$  に対する確率過程は、

$$d(1/S) = (r_X - r_Y + \sigma_S^2) (1/S) dt - \sigma_S (1/S) dz$$

となる。これから、Siegel のパラドックスと呼ばれるものが導かれる。 $S$  の期待成長率はリスク中立世界では  $r_Y - r_X$  となるので、対称性から、 $1/S$  の期待成長率は  $r_X - r_Y + \sigma_S^2$  ではなく、 $r_X - r_Y$  となるはずである。

Siegel のパラドックスを理解するためには、 $S$  に対して与えた確率過程は、通貨  $Y$  のマネー・マーケット・アカウントをニューメレールとする世界における  $S$  のリスク中立過程である、ということを認識しておく必要がある。 $1/S$  に対する過程は、 $S$  の過程から導出されたものであるから、同じニューメレールが仮定されている。しかし、 $1/S$  は  $Y$  1 単位当りの  $X$  の単位数を表しているので、対称的な扱いをするためには、通貨  $X$  のマネー・マーケット・アカウントをニューメレールとする世界で  $1/S$  の確率過程を考えなければならない。(29.7)式から、通貨  $Y$  のマネー・マーケット・アカウントから通貨  $X$  のマネー・マーケット・アカウントへのニューメレール変換を行うと、変数  $V$  の成長率は  $\rho\sigma_V\sigma_S$  だけ増加することがわかる。ただし、 $\rho$  は  $S$  と  $V$  との相関係数である。いまの場合、 $V=1/S$  より、 $\rho=-1$ かつ  $\sigma_V=\sigma_S$  である。

したがって、ニューメレール変換によって $1/S$ の成長率は $-\sigma_s^2$ だけ増加する。これは、 $1/S$ に対して上で与えた過程における $+\sigma_s^2$ の項を打ち消す。したがって、通貨 $X$ のマネー・マーケット・アカウントをニューメレールとする世界での $1/S$ に対する過程は、

$$d(1/S) = (r_X - r_Y)(1/S)dt - \sigma_S(1/S)dz$$

となる。これは $S$ に対する確率過程の式と対称的な式であり、パラドックスは解決された。

## 要 約

将来のある時点にペイオフが発生するデリバティブを評価するときに、デリバティブの原資産変数がフォワード値に等しいと仮定し、評価日からペイオフ発生日までの期間に適用される金利を割引率とするのは自然である。本章では、この手続が常に正しいとは限らないことを示した。

ペイオフが時点 $T$ に観測される債券イールド $y$ に依存する場合は、(29.1)式で示されているように、イールドの期待値はフォワード・イールドよりも高くなると仮定すべきである。この結果は、ペイオフがスワップ・レートに依存する場合にも適用できる。変数が観測されるのは時点 $T$ であるが、ペイオフが発生するのはその後の時点 $T^*$ である場合には、変数のフォワード値は(29.4)式で示されるような調整を行う必要がある。また、変数はある通貨建てで観測されるが、ペイオフは別の通貨建てで行われるという場合にも、変数のフォワード値は調整する必要がある。その場合の調整方法は(29.6)式のようになる。

第32章では、これらの結果を用いて非標準的なスワップに対する評価について考察する。

## 参考文献

- Brotherton-Ratcliffe, R., and B. Iben. "Yield Curve Applications of Swap Products," in *Advanced Strategies in Financial Risk Management* (R. Schwartz and C. Smith, eds.). New York Institute of Finance, 1993.
- Jamshidian, F. "Corralling Quantos," *Risk*, March (1994) : 71-75.
- Reiner, E. "Quanto Mechanics," *Risk*, March (1992) : 59-63.

## 章末問題

- 29.1** 5年後に $100R$ が支払われるデリバティブの評価方法について説明せよ。ただし、 $R$ は4年後に観測される1年物金利（1年複利）である。ペイオフが4年後に発生するとした場合、価値の違いはどれだけ生じるか。また、ペイオフが6年後に発生するとした場合はどうか。
- 29.2** 次の各場合について、コンベキシティ調整またはタイミング調整が必要となるかどうかについて説明せよ。
- 5年スワップ・レートが3カ月LIBORレートを超過した分（もしあれば）を元本100ドルに適用して得られる金額を、四半期ごとに支払うスプレッド・オプションの価値を求めたい。ただし、ペイオフは金利が観測されてから90日後に発生するものとする。
  - 3カ月LIBORレートから3カ月米国短期国債レートを引いた金利が四半期ごとに支払われるデリバティブの価値を求めたい。ただし、ペイオフは金利が観測されてから90日後に発生するものとする。
- 29.3** 28.2節の例28.3において、ペイオフが15カ月後ではなく1年後（すなわち、金利が観測される時点）に発生するとする。このとき、Blackモデルに入力するパラメータの値にはどのような違いが生じ

るか。

- 29.4** イールドカーブが1年複利で年率10%でフラットであるとする。5年後に2年スワップ・レート（1年複利）を受け取り、固定金利10%を支払う商品の価値を計算せよ。受取りも支払も想定元本はともに100ドルとし、スワップ・レートのボラティリティは年率20%とする。また、この商品の価値がゼロとは異なる理由を説明せよ。
- 29.5** 問題29.4において、スワップ・レートは5年後に観測されるが、支払の交換は(a)6年後、(b)7年後に行われる場合、商品の価値にはどれだけの違いが生じるか。ただし、すべてのフォワード・レートのボラティリティを20%，5年後から7年後までの期間に対するフォワード・スワップ・レートと、5年後から6年後までの期間に対するフォワード・レートとの相関は0.8、5年後から7年後までの期間に対するフォワード・レートとの相関は0.95であると仮定する。
- 29.6** 時点  $T$  における債券の価格は、そのイールドを用いて  $G(y_T)$  で与えられているとする。満期  $T$  の債券に関するフォワード・リスク中立世界において、フォワード債券イールド  $y$  は幾何ブラウン運動に従っていると仮定する。フォワード債券イールドの成長率を  $\alpha$ 、ボラティリティを  $\sigma_y$  とする。
- 伊藤の補題を用いて、フォワード債券価格の満たす確率過程を  $\alpha$ ,  $\sigma_y$ ,  $y$ , および  $G(y)$  を使って表せ。
  - フォワード債券価格は、いま考えている世界ではマルチングアルにならなければならない。このことを用いて  $\alpha$  の満たす式を導出せよ。
  - $\alpha$  の満たす式は、1次近似では、(29.1)式と整合性がとれていることを示せ。
- 29.7** 変数  $S$  は、通貨 A 建ての利回りが  $q$  の収入を生む投資資産である。実世界では、

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dz$$

という確率過程に従っているとする。必要ならば新しい変数を定義

して、次の各世界において、 $S$  の従う確率過程と対応するリスクの市場価格を求めよ。

- (a) 通貨 A に関する従来のリスク中立世界
- (b) 通貨 B に関する従来のリスク中立世界
- (c) 満期  $T$  の通貨 A 建て割引債に関するフォワード・リスク中立世界
- (d) 満期  $T$  の通貨 B 建て割引債に関するフォワード・リスク中立世界

**29.8** 時点  $T$  に円で  $\max(S_T - K, 0)$  のペイオフが発生するコール・オプションを考える。ただし、 $S_T$  は時点  $T$  における金のドル建て価格、 $K$  は行使価格である。金の保管費用はゼロであると仮定し、必要なならば他の変数を定義して、この契約の価値を計算せよ。

**29.9** カナダ株価指数が現在 400、1 カナダドルの価値が 0.70 米ドルであるとする。また、カナダと米国の無リスク金利はそれぞれ 6% と 4%，指標の配当利回りは 3% であるとする。 $Q$  を 1 米ドル当たりのカナダドルの値、 $S$  を指標の値と定義する。 $S$  のボラティリティを 20%， $Q$  のボラティリティを 6%， $S$  と  $Q$  との相関係数を 0.4 とする。DerivaGem ソフトウェアを用いて、次のペイオフをもつ指標に対する満期 2 年のアメリカン・コール・オプションの価値を求めよ。

- (a) 指数が 400 を超えた分をカナダドルで支払う。
- (b) 指数が 400 を超えた分を米ドルで支払う。

## 宿題

**29.10**  $S$  を日経平均株価指数の値とし、2 年後に  $S$  ドルが支払われる商品を考える。現在の指数を 20,000、円／ドル為替レート（1 ドル当たりの円）を 100、為替レートと指標との相関係数を 0.3、指標の配当利回

りを年率 1 %, 指数のボラティリティを 20%, 円／ドル為替レートのボラティリティを 12% とする。米国と日本の金利（定数とする）をそれぞれ 4 % と 2 % として、以下の間に答えよ。

- (a) この商品の価値はいくらか。
- (b) この商品の満期までのある時点における為替レートを  $Q$ , 指数の水準を  $S$  とする。米国の投資家は、日経平均に  $S$  ドル投資し、 $SQ$  だけ円を売ることによって、指数の価値が  $\Delta S$  円だけ変化するときに、おおよそ  $\Delta S$  ドルだけ価値が変化するようなポートフォリオをつくれることを示せ。
- (c) 指数が 20,000 から 20,050 に変化し、為替レートが 100 から 99.7 に変化したとするとき、上記のことが成り立つことを確認せよ。
- (d) いま考えている商品をデルタ・ヘッジする方法について述べよ。

**29.11** LIBOR イールドカーブがフラットで 8 % (連続複利) であるとする。4 年後にペイオフが発生するデリバティブを考える。ペイオフはその時点の 5 年物金利から 2 年物金利を差し引いたものに等しく、金利はともに連続複利で、想定元本は 100 ドルとする（ペイオフは正にも負にもなりうる）。このデリバティブの価値を計算せよ。ただし、すべての金利のボラティリティは 25 % とする。また、ペイオフが 4 年後ではなく 5 年後に発生するならば、価値はどれだけ変化するか。すべての金利は完全に相関していると仮定して計算せよ。

**29.12** ペイオフが 10 年後に発生するデリバティブを考える。ペイオフはその時点で観測される半年払いのスワップに対する 3 年物米ドル金利スワップ・レートをある想定元本に適用したものに等しい。イールドカーブは、ドルは年率 8 % (半年複利) でフラットであり、円は年率 3 % (半年複利) でフラットであるとする。フォワード・スワップ・レートのボラティリティは 18 %, 10 年物円／ドル・フォワード為替レートのボラティリティは 12 %, この為替レートと米ドル金利との相関は 0.25 とする。

- (a) スワップ・レートが適用される元本が 1 億ドルで、支払がドル

で行われる場合に、このデリバティブの価値を求めよ。

- (b) スワップ・レートが適用される元本が1億円で、支払が円で行われる場合に、このデリバティブの価値を求めよ。

**29.13** ペイオフが8年後に発生するデリバティブについて考える。ペイオフは5年後、6年後、7年後、8年後に観測される1年物金利の平均を元本1,000ドルに適用したものに等しい。イールドカーブは1年複利で6%でフラットであり、すべての金利のボラティリティは16%であるとする。また、すべての金利は完全に相關していると仮定する。このとき、このデリバティブの価値を求めよ。

## 付 錄

### コンベキシティ調整式の証明

この付録では、フォワード債券イールドに対するコンベキシティ調整を計算する。時点  $T$  におけるデリバティブのペイオフが、その時点に観測される債券イールドに依存しているとする。

$y_0$  : 満期  $T$  のフォワード契約に対する現時点でのフォワード債券イールド

$y_T$  : 時点  $T$  における債券イールド

$B_T$  : 時点  $T$  における債券価格

$\sigma_y$  : フォワード債券イールドのボラティリティ  
と定義する。

$$B_T = G(y_T)$$

とする。 $G(y_T)$  を  $y_T = y_0$  の周りでテーラー展開すると、次の近似式が得られる。

$$B_T = G(y_0) + (y_T - y_0) G'(y_0) + 0.5 (y_T - y_0)^2 G''(y_0)$$

ここで、 $G'$  および  $G''$  は  $G$  の 1 階および 2 階の偏微分係数とする。満期  $T$  の割引債に関するフォワード・リスク中立世界での期待値をとると、

$$E_T(B_T) = G(y_0) + E_T(y_T - y_0) G'(y_0) + \frac{1}{2} E_T[(y_T - y_0)^2] G''(y_0)$$

となる。ただし、 $E_T$  はこの世界での期待値を表す。定義から、 $G(y_0)$  はフォワード債券価格である。また、いま考えている世界では  $E_T(B_T)$  はフォワード債券価格に等しい。したがって、 $E_T(B_T) = G(y_0)$  が成り立ち、

$$E_T(y_T - y_0) G'(y_0) + \frac{1}{2} E_T[(y_T - y_0)^2] G''(y_0) = 0$$

となる。 $E_T[(y_T - y_0)^2]$  はおおよそ  $\sigma_y^2 y_0^2 T$  に等しいから、

$$E_T(y_T) = y_0 - \frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

が近似的に成り立つ。このことから、満期  $T$  の割引債に関するフォワード・リスク中立世界での債券イールドの期待値を得るには、

$$-\frac{1}{2} y_0^2 \sigma_y^2 T \frac{G''(y_0)}{G'(y_0)}$$

をフォワード債券イールドに加えればよい、ということがわかる。これは(29.1)式の結果と同じである。別の証明方法については、章末問題29.6を参照せよ。

## 第30章

# 金利デリバティブ：短期金利モデル

これまで取り上げてきた金利オプションの価格付けモデルは、将来時点における金利、債券価格、あるいは他のなんらかの変数の確率分布が対数正規に従うと仮定するものである。それらのモデルは、キャップやヨーロピアン債券オプション、ヨーロピアン・スワップションのような商品の評価に広く用いられている。しかしながら、それらのモデルには限界もある。それらは、金利の時間発展については何も記述していないからである。そのため、それらのモデルでは、アメリカン・スワップションやコーラブル債、仕組債のような金利デリバティブを評価することができない。

本章と次章では、こうした限界を克服するための別の方法について論じる。それらの方法では、期間構造モデル (term structure model) と呼ばれるものが構築される。これは、すべてのゼロクーポン・レートの時間発展を記述するモデルである(注1)。本章では、短期金利  $r$  のふるまいを特定する期

間構造モデルに焦点を当てる。

### 30.1 背 景

時点  $t$  における短期金利  $r$  は、時点  $t$  における無限小の期間に適用される金利のことである。この金利は、瞬間的な短期金利 (instantaneous short rate) と呼ばれることもある。債券価格、オプション価格、およびその他のデリバティブの価格は、リスク中立世界で  $r$  が従う確率過程のみに依存しており、実世界で  $r$  が従う確率過程とは無関係である。本章で考えるリスク中立世界とは従来のリスク中立世界のことであり、 $t$  から  $t + \Delta t$  までの非常に短い期間に、投資家は平均として  $r(t)\Delta t$  の収益を得るという世界である。 $r$  に対してここで考えるすべての確率過程は、リスク中立世界における確率過程である。

(27.19)式から、時点  $T$  においてペイオフ  $f_T$  をもつ金利デリバティブの時点  $t$  における価値は、

$$\hat{E}[e^{-\bar{r}(T-t)}f_T] \quad (30.1)$$

で与えられる。ただし、 $\bar{r}$  は  $t$  から  $T$  までの期間における  $r$  の平均値、 $\hat{E}$  は従来のリスク中立世界における期待値である。

前と同様に、時点  $T$  に 1 ドルが支払われる割引債の時点  $t$  における価格を  $P(t, T)$  と定義する。(30.1)式から、

$$P(t, T) = \hat{E}[e^{-\bar{r}(T-t)}] \quad (30.2)$$

となる。 $R(t, T)$  を時点  $t$  における期間  $T-t$  に対する連続複利での金利とすると、

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (30.3)$$

すなわち、

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \quad (30.4)$$

---

(注 1) 期間構造モデルを用いるときには、前章で議論したコンベキシティ調整、タイミング調整、およびクオント調整を行う必要はないことに注意しよう。

となるから、(30.2)式より、

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln \hat{E}[e^{-r(T-t)}] \quad (30.5)$$

が得られる。この式により、任意の時点における金利の期間構造が、その時点における  $r$  の値と  $r$  に対するリスク中立過程から得られる。したがって、 $r$  に対する確率過程が定義されると、ゼロ・カーブの初期値とその時間発展に関するすべてが決まる、ということがわかる。

## 30.2 均衡モデル

均衡モデルでは、通常、経済変数に関する仮定から出発して、短期金利  $r$  に対する確率過程が導かれる。その後で、債券価格やオプション価格に対して、 $r$  の確率過程から何が導かれるかが考察される。

1 ファクター均衡モデルでは、 $r$  の従う確率過程には一つの不確実性の要素しか含まれていない。通常、短期金利に対するリスク中立過程は、

$$dr = m(r) dt + s(r) dz$$

という形の伊藤過程で与えられる。瞬間的なドリフト  $m$  と瞬間的な標準偏差  $s$  は  $r$  の関数であるが、時間には依存していないと仮定されている。1 ファクターという仮定は見た目ほど強い制限ではない。1 ファクター・モデルでは、任意の短期間においてすべての金利は同じ方向に動くが、変動幅もすべて同じというわけではない。したがって、ゼロ・カーブの形は時間の経過とともに変化する。

本節では、以下の三つの 1 ファクター均衡モデルについて考える。

$$m(r) = \mu r ; s(r) = \sigma r \quad (\text{Rendleman-Bartter モデル})$$

$$m(r) = a(b-r) ; s(r) = \sigma \quad (\text{Vasicek モデル})$$

$$m(r) = a(b-r) ; s(r) = \sigma \sqrt{r} \quad (\text{Cox-Ingersoll-Ross モデル})$$

### Rendleman-Bartter モデル

Rendleman-Bartter モデルでは、 $r$  に対するリスク中立過程は、

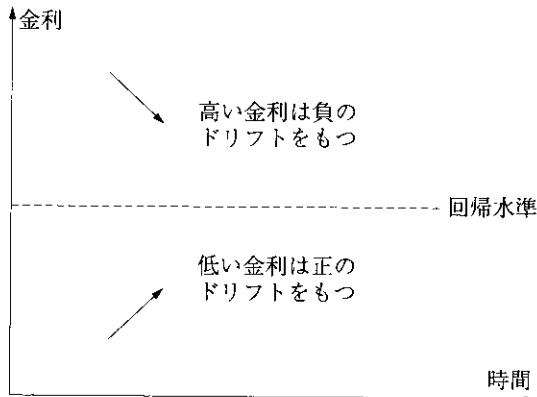
$$dr = \mu r dt + \sigma r dz$$

で与えられる(注2)。ただし、 $\mu$ と $\sigma$ は定数である。これは、 $r$ が幾何ブラウン運動に従うということを意味している。 $r$ に対する確率過程は、第13章で株価に対して仮定したものと同じ種類のものであり、第11章で株式に対して用いたのと同様の二項ツリーを用いて表すことができる(注3)。

短期金利が株価のようにふるまうという仮定は出発点としては自然であるが、理想的なものではない。金利と株価との一つの重要な違いは、金利には時間が経つとある長期平均水準に引き戻されるという傾向がみられる点である。この現象は平均回帰 (mean reversion) として知られている。 $r$ は、高いときには平均回帰性により負のドリフトをもち、低いときには平均回帰性により正のドリフトをもつ。平均回帰性を図30.1に図示する。Rendleman-Bartter モデルではこの平均回帰性は考慮されていない。

平均回帰性を支持する経済学上の有力な説がある。金利が高いときには景気は停滞する傾向にあり、借手の資金調達需要は低くなる。その結果、金利は低下する。金利が低いときには借手の一部の資金調達需要が旺盛となる傾

図30.1 平均回帰



(注2) R. Rendleman and B. Bartter, "The Pricing of Options on Debt Securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15 (March 1980) : 11-24 を参照。

(注3) 金利ツリーの使われ方については本章の後のほうで説明する。

向にあり、その結果、金利は上昇する。

## Vasicek モデル

Vasicek モデルでは、 $r$ に対するリスク中立過程は、

$$dr = a(b - r) dt + \sigma dz$$

で与えられる。ただし、 $a$ 、 $b$ 、および $\sigma$ は定数である(注4)。このモデルには平均回帰性が取り入れられている。短期金利は、割合 $a$ で水準 $b$ へ引き戻されている。この引戻し作用に、正規分布に従う確率項 $\sigma dz$ が重ね合わされている。

Vasicek は、(30.2)式を用いると、時点  $T$  に 1 ドルを支払う割引債の時点  $t$  における価格式が、

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)} \quad (30.6)$$

となることを示した。この式で、 $r(t)$ は時点  $t$  における  $r$  の値で、

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (30.7)$$

および、

$$A(t, T) = \exp \left[ \frac{(B(t, T) - T + t)(a^2 b - \sigma^2/2) - \sigma^2 B(t, T)^2}{4a} \right] \quad (30.8)$$

である。また、 $a=0$ のときは  $B(t, T) = T - t$ 、 $A(t, T) = \exp[\sigma^2(T-t)^3/6]$  となる。

(30.4)式より、

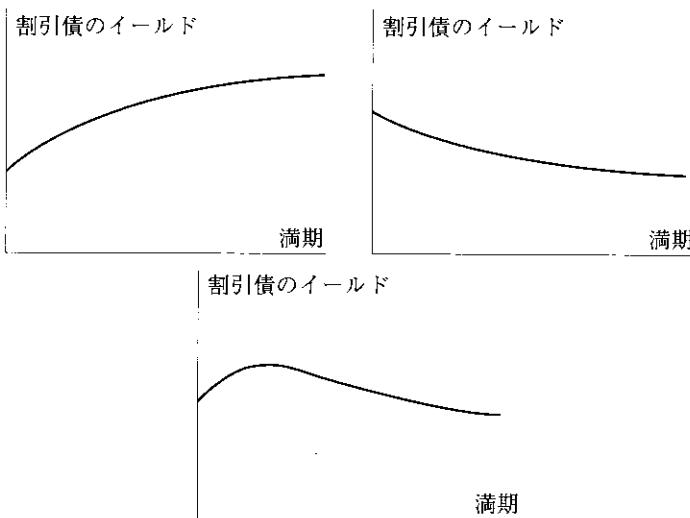
$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln A(t, T) + \frac{1}{T-t} B(t, T) r(t) \quad (30.9)$$

となり、 $a$ 、 $b$ 、および $\sigma$ を決めれば、期間構造全体が  $r(t)$  の関数として決まることがわかる。その形状は、右上がりなったり、右下がりになったり、軽いこぶの形になったりする(図30.2を参照)。

---

(注4) O.A. Vasicek, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5 (1977) : 177-88 を参照。

図30.2 Vasicek モデルで起こりうる期間構造の形状



### Cox-Ingersoll-Ross モデル

Vasicek モデルでは、短期金利は負の値をとることもある。Cox, Ingersoll と Ross は、金利が負にならない別のモデルを提案した(注5)。彼らのモデルでは、 $r$  に対するリスク中立過程は、

$$dr = a(b - r) dt + \sigma \sqrt{r} dz$$

で与えられる。このモデルは Vasicek モデルと同じ平均回帰的なドリフトをもつが、微小時間における短期金利の変化の標準偏差は  $\sqrt{r}$  に比例している。したがって、短期金利が上昇するにつれ、その標準偏差は増大するようになっている。

Cox, Ingersoll と Ross は、彼らのモデルでも債券価格が Vasicek モデルと同じ一般形、

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r}$$

で与えられることを示した。ただし、関数  $B(t, T)$  と  $A(t, T)$  は Vasicek

(注5) J.C. Cox, J.E. Ingersoll, and S.A. Ross, "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53 (1985) : 385-407 を参照。

モデルのものとは異なり、

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}$$

および、

$$A(t, T) = \left[ \frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2ab/\sigma^2}$$

となる。ここで  $\gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$  である。このモデルでも、右上がり、右下がり、および軽いこぶの形のイールドカーブが起こりうる。Vasicek モデルの場合と同様に、長期金利  $R(t, T)$  は  $r(t)$  の一次関数になっている。したがって、 $r(t)$  の値によって時点  $t$  における期間構造の水準が決まる。しかし、時点  $t$  における期間構造の一般的な形状は  $r(t)$  とは関係なく、 $t$  に依存して決まっている。

## 2 ファクター・モデル

多くの研究者が 2 ファクター・モデルの性質について研究してきた。たとえば、Brennan と Schwartz は、長期金利も確率過程として与え、短期金利の確率過程がそれに回帰するようなモデルを開発した(注6)。そのモデルでは、長期金利は毎年 1 ドルを支払う永久債のイールドとしている。この債券のイールドは価格の逆数となるため、伊藤の補題を用いて債券の従う確率過程からイールドの従う確率過程を求めることができる。債券は取引可能な証券である。したがって、債券に対する期待収益率は無リスク金利に等しくならなければならないので、分析が容易になる。

Longstaff と Schwartz によって提案されている別の 2 ファクター・モデルでは、一般均衡モデルから出発して、ボラティリティが確率変動する期間構造モデルが導出されている(注7)。このモデルは解析的にかなり扱いやす

(注 6) M.J. Brennan and E.S. Schwartz, "A Continuous Time Approach to Pricing Bonds," *Journal of Banking and Finance*, 3 (July 1979) : 133-55 および M.J. Brennan and E.S. Schwartz, "An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 21, 3 (September 1982) : 301-29 を参照。

いことがわかっている。

### 30.3 無裁定モデル

これまで紹介してきた均衡モデルの短所は、現時点における金利の期間構造に機械的にモデルを合わせることができないという点である。注意深くパラメータを選択すれば、均衡モデルは実際に観測される期間構造の多くにだいたい合わせることができる。しかし、厳密には合わせられないことが多い、十分に合わせることができない場合もある。ほとんどのトレーダーはこの点を不満に感じている。原資産である債券を正確に価格付けできていないモデルを用いて計算された債券オプションの価格にはほとんど自信がもてない、というトレーダーの主張はおかしなものではない。原資産である債券価格での1%の誤差が、オプション価格では25%の誤差になる場合もあるからである。

無裁定モデル (no-arbitrage model) は、現時点における金利の期間構造と厳密に整合性がとれるようにつくられたモデルである。したがって、均衡モデルと無裁定モデルとの本質的な違いは次のように言い表すことができる。均衡モデルでは現時点における金利の期間構造は出力であるのに対し、無裁定モデルでは現時点における金利の期間構造は入力である。

均衡モデルでは、短期金利のドリフト (すなわち  $dt$  の係数) は時間の関数でない場合が多い。無裁定モデルでは、一般的にドリフトは時間に依存している。これは、無裁定モデルでは初期時点のゼロ・カーブの形によって、短期金利が将来となる平均的なパスが決まるからである。たとえば、満期  $t_1$  から  $t_2$  に対してゼロ・カーブがきつい上向きになっている場合、 $r$  はその期間で正のドリフトをもつ。逆に、それらの満期に対してきつい下向きになっている場合、 $r$  はその期間で負のドリフトをもつ。

---

(注 7) F.A. Longstaff and E.S. Schwartz, "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, 47, 4 (September 1992) : 1259-82 を参照。

均衡モデルのなかには、短期金利のドリフトを時間の関数にすることで、無裁定モデルに変えることができるものもある。そのようなものとして、以下では Ho-Lee モデル、Hull-White モデル（1 ファクターまたは 2 ファクター）、および Black-Karasinski モデルについて考える。

### Ho-Lee モデル

Ho と Lee は、1986年の論文で期間構造に対する最初の無裁定モデルを提案した<sup>(注8)</sup>。彼らが提案したのは、二つのパラメータをもった、債券価格に対する二項ツリー・モデルである。そのパラメータは、短期金利の標準偏差と短期金利のリスクの市場価値である。そのモデルの連続時間極限は、

$$dr = \theta(t) dt + \sigma dz \quad (30.10)$$

となることが知られている。ただし、短期金利の瞬間的な標準偏差  $\sigma$  は定数で、 $\theta(t)$  は初期時点の期間構造にモデルが適合するように選択された時間の関数である。変数  $\theta(t)$  は時点  $t$  における  $r$  の動きの平均的な方向を決めており、 $r$  の水準には依存していない。興味深いことに、Ho-Lee モデルでのリスクの市場価値に関するパラメータは、このモデルを用いた金利デリバティブの価格付けには無関係であることが示せる。これは、株式オプションの価格付けにおいてリスク選好度が無関係であることと類似のことである。

$\theta(t)$  は解析的に求めることができる（章末問題30.13を参照）。その結果は、

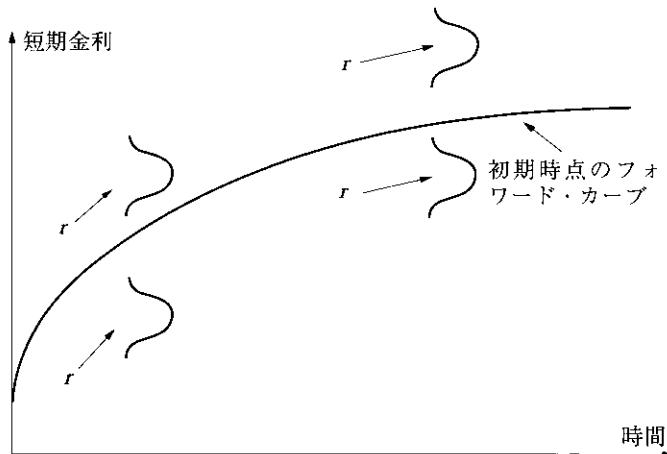
$$\theta(t) = F_t(0, t) + \sigma^2 t \quad (30.11)$$

となる。ここで、 $F(0, t)$  は時点ゼロにおける満期  $t$  に対する瞬間的なフォワード・レートで、添字は  $t$  に関する偏微分を表す。近似的には  $\theta(t)$  は  $F_t(0, t)$  に等しい。したがって、将来時点における短期金利の動きの平均的な方向は、瞬間的なフォワード・レート・カーブの傾きにおおよそ等しい、ということがわかる。図30.3に Ho-Lee モデルを図示する。任意の時点に

---

(注8) T.S.Y. Ho and S.-B. Lee, "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41 (December 1986) : 1011-29 を参照。

図30.3 Ho-Lee モデル



における短期金利の動きの平均的な方向は、フォワード・カーブの傾きで決まっている。この傾きに、正規分布するランダムな動きが重ね合わされている。

Ho-Lee モデルでは、割引債および割引債に対するヨーロピアン・オプションの価格を解析的に求めることができる。時点  $t$  における割引債の価格式は短期金利を用いて、

$$P(t, T) = A(t, T) e^{-r(t)(T-t)} \quad (30.12)$$

で与えられる。ただし、

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + (T-t) F(0, t) - \frac{1}{2} \sigma^2 t (T-t)^2$$

である。これらの式では、時点ゼロは現時点を表している。時点  $t$  と時点  $T$  は  $T \geq t$  を満たす一般的な将来の時点である。したがってこれらの式は、将来の時点  $t$  における割引債の価格を、時点  $t$  における短期金利と現時点における債券価格を用いて表したものである。後者は、現時点における期間構造から求めることができる。

## Hull-White (1 ファクター) モデル

1990年に発表された論文で、Hull と White は Vasicek モデルを拡張して、初期時点の期間構造に正確に適合できるモデルを検討した(注9)。彼らが考えた拡張 Vasicek モデルの一つは、

$$dr = [\theta(t) - ar] dt + \sigma dz \quad (30.13)$$

あるいは、

$$dr = a\left[\frac{\theta(t)}{a} - r\right]dt + \sigma dz$$

で与えられるものである。ここで、 $a$  と  $\sigma$  は定数である。このモデルは Hull-White モデルとして知られている。これは、平均回帰率  $a$  をもった Ho-Lee モデルと特徴付けることもできる。あるいは、時間に依存する平均回帰率をもった Vasicek モデルであると特徴付けることもできる。時点  $t$  において、短期金利は割合  $a$  で  $\theta(t)/a$  へ回帰する。Ho-Lee モデルは、Hull-White モデルで  $a=0$  とおいた特別な場合に当たる。

Hull-White モデルは、Ho-Lee モデルと同じくらい解析的に扱いやすい。関数  $\theta(t)$  は、初期時点の期間構造から計算でき（章末問題30.14を参照）、

$$\theta(t) = F_t(0, t) + aF(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (30.14)$$

で与えられる。この式の最後の項は通常かなり小さい。そこで最後の項を無視すると、 $r$  に対する確率過程のドリフトは時点  $t$  において  $F_t(0, t) + a[F(0, t) - r]$  となる。このことから、平均として  $r$  は初期時点の瞬間的なフォワード・レート・カーブの傾きに従って変化することがわかる。そのカーブから乖離したときは、 $r$  は割合  $a$  でそれに回帰する。図30.4にこのモデルを図示する。

Hull-White モデルでは時点  $t$  における債券価格は、

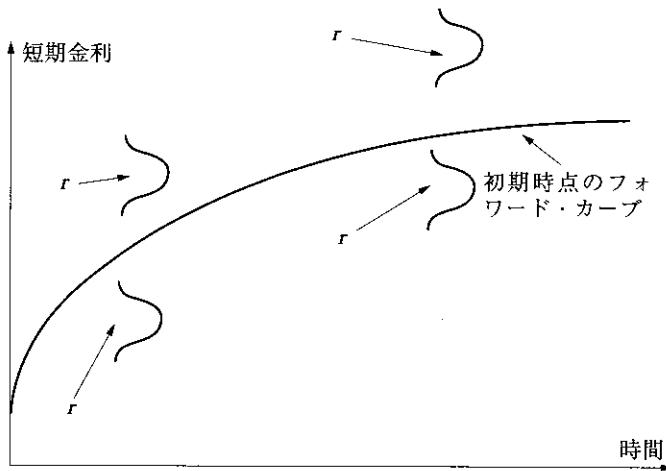
$$P(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)} \quad (30.15)$$

で与えられる。ただし、

---

(注9) J. Hull and A. White, "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990) : 573-92 を参照。

図30.4 Hull-White モデル



$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (30.16)$$

および、

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T) F(0, t) - \frac{1}{4a^3} \sigma^2 (e^{-at} - e^{-aT})^2 (e^{2at} - 1) \quad (30.17)$$

である。(30.15)式、(30.16)式、および(30.17)式は、将来の時点  $t$  における割引債の価格を、時点  $t$  における短期金利と現時点における割引債の価格を用いて表したものである。後者は、現時点における期間構造から求めることができる。

### Black-Karasinski モデル

Ho-Lee モデルと Hull-White モデルには、短期金利  $r$  が負になりうるという短所がある。Black と Karasinski は、正の金利のみを許容するモデルを提案した(注10)。そのモデルでは、短期金利に対する過程は、

$$d\ln r = [\theta(t) - a(t) \ln(r)] dt + \sigma(t) dz \quad (30.18)$$

で与えられる。変数  $\ln r$  は、Hull-White モデルにおける  $r$  と同じ過程に従う。このことから、Ho-Lee モデルと Hull-White モデルでは将来時点における  $r$  の値は正規分布に従うが、Black-Karasinski モデルでは対数正規分布に従う。

Black-Karasinski モデルは、Ho-Lee モデルや Hull-White モデルほど解析的に扱いやすくはない。たとえば、このモデルを使って、 $r$  で表した債券の価格式を導き出すことはできない。

## 2 ファクターHull-White モデル

Brennan と Schwartz によって提案された、2 ファクター・モデルと同様の考えを用いた無裁定モデル<sup>(注10)</sup>が、

$$df(r) = [\theta(t) + u - af(r)]dt + \sigma_1 dz_1 \quad (30.19)$$

で与えられる。ここで、 $u$  は初期値ゼロで以下の過程に従う。

$$du = -b u dt + \sigma_2 dz_2$$

1 ファクター・モデルで考察したように、パラメータ  $\theta(t)$  は初期時点の期間構造にモデルが適合するように選択される。確率過程  $u$  は  $r$  の回帰水準の 1 成分であり、それ自身は割合  $b$  でゼロに回帰している。パラメータ  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  は定数で、 $dz_1$  と  $dz_2$  は瞬間的な相関  $\rho$  をもつウィナー過程である。

このモデルは  $r$  の 1 ファクター・モデルに比べ、より多様な期間構造の挙動パターンやボラティリティのパターンを表現することができる。モデルの詳細については、著者の Web サイトのテクニカルノート14を参照されたい。

(注10) F. Black and P. Karasinski, "Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal," *Financial Analysts Journal*, July/August (1991) : 52-59 を参照。

(注11) J. Hull and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models," *Journal of Derivatives*, 2, 2 (Winter 1994) : 37-48 を参照。

## 30.4 債券オプション

これまで紹介してきたいくつかのモデルでは、割引債に対するオプションを解析的に評価することができる。Vasicek, Ho-Lee, および Hull-White モデルでは、満期  $s$  の割引債に対する満期  $T$  のコール・オプションの時点ゼロにおける価格は、

$$LP(0, s)N(h) - KP(0, T)N(h - \sigma_p) \quad (30.20)$$

で与えられる。ここで、 $L$  は債券の額面、 $K$  は行使価格であり、

$$h = -\frac{1}{\sigma_p} \ln \frac{LP(0, s)}{P(0, T)K} + \frac{\sigma_p}{2}$$

である。プット・オプションの価格は、

$$KP(0, T)N(-h + \sigma_p) - LP(0, s)N(-h)$$

で与えられる。Vasicek モデルと Hull-White モデルの場合には、

$$\sigma_p = \frac{\sigma}{a} [1 - e^{-a(s-T)}] \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}$$

であり、Ho-Lee モデルの場合には、

$$\sigma_p = \sigma(s-T)\sqrt{T}$$

である。(30.20)式は28.1節で説明した債券オプションに対する Black モデルと本質的に同じものである。フォワード債券価格のボラティリティは  $\sigma_p/\sqrt{T}$  であり、時点  $T$  における債券価格の対数の標準偏差は  $\sigma_p$  である。28.2節で説明したように、金利キャップとフロアは割引債に対するオプションのポートフォリオとして表現できる。したがって、それらも上式を用いて解析的に評価することができる。

30.2節で紹介した Cox-Ingersoll-Ross モデルの場合にも、割引債に対するオプションの価格式が知られている。その式には、非心カイ 2 乗分布の積分が用いられている。

### 利付債に対するオプション

$r$  の 1 ファクター・モデルでは、 $r$  が下落すればすべての割引債の価格は

上昇し， $r$  が上昇すれば，すべての割引債の価格は下落する。このことを用いて，1 ファクター・モデルでは，利付債に対するヨーロピアン・オプションは割引債に対するヨーロピアン・オプションの和として表すことができる。それは以下の手順で行えばよい。

1. オプション満期において原資産である利付債の価格が行使価格に等しくなる  $r$  の値を求め，それを  $r^*$  とする。
2. 利付債を構成する各割引債に対するオプションの価格を計算する。  
ただし，各オプションの行使価格は，対応する割引債の時点  $T$  における  $r=r^*$  としたときの価値に等しくなるようにする。
3. 利付債オプションの価格を，ステップ 2 で計算した割引債オプションの価格の合計値とする。

この手続を用いて，Vasicek モデル，Cox-Ingersoll-Ross モデル，Ho-Lee モデル，および Hull-White モデルに対して，利付債オプションを評価することができる。ビジネス寸見28.2で説明したように，ヨーロピアン・スマップションは利付債オプションとみなすことができる。したがって，それもこの手続を用いて評価することができる。手続の詳細については，著者の Web サイトのテクニカルノート15を参照されたい。

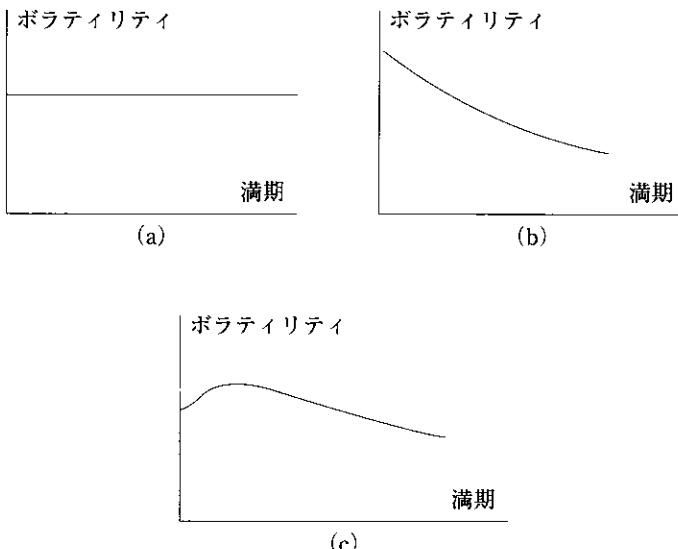
### 30.5 ボラティリティの期間構造

これまで考察してきたモデルは，それぞれ異なったボラティリティの期間構造をもっている。図30.5は，Ho-Lee モデル，1 ファクターHull-White モデル，および2 ファクターHull-White モデルに対して，3 カ月フォワード・レートのボラティリティを満期の関数として表したものである。金利の期間構造はフラットであると仮定している。

Ho-Lee モデルでは，3 カ月フォワード・レートのボラティリティはすべての満期に対して同じである。1 ファクターHull-White モデルでは，平均回帰の効果によって，3 カ月フォワード・レートのボラティリティは満期の減少関数となっている。2 ファクターHull-White モデルでは，パラメータ

図30.5 満期の関数としての3カ月フォワード・レートのボラティリティ

(a)Ho-Leeモデル, (b)1ファクターHull-Whiteモデル, (c)2ファクターHull-Whiteモデル（パラメータを適切に選択した場合）



を適切に選択すると、3カ月フォワード・レートのボラティリティに「こぶ」がみられるようになる。これは、28.2節で論じた実証結果やキャップのインプライド・ボラティリティの形状と整合的である。

## 30.6 金利ツリー

金利ツリーは、短期金利に対する確率過程の離散時間表現である。これは、株価ツリーが株価の従う確率過程の離散時間表現であったのと同様である。ツリーの時間ステップを  $\Delta t$  とすると、ツリー上の金利は連続複利での期間  $\Delta t$  に対する金利となる。ツリーを構築する際に通常仮定されることは、期間  $\Delta t$  の金利  $R$  は、対応する連続モデルでの瞬間的な金利  $r$  が従う確率過程と同じ過程に従うということである。金利ツリーと株価ツリーとの主な違いは、割引の方法である。株価ツリーでは、割引率は通常各ノードで

同一（あるいは時間の関数）であると仮定されている。金利ツリーでは、割引率はノードからノードで異なる値をとる。

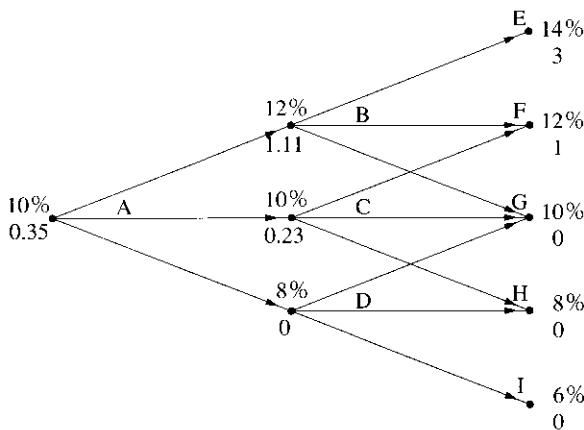
金利に対しては、二項ツリーよりも三項ツリーを用いるほうが便利であることが多い。三項ツリーの主な長所は、自由度が余分にあり、平均回帰性のような金利の従う確率過程の特徴を表現したツリーをつくりやすいことである。19.8節で述べたように、三項ツリーを用いることは陽的有限差分法を用いることと等価である。

### 三項ツリーの使用例

金利三項ツリーを用いたデリバティブの評価を説明するために、図30.6に示す簡単な例について考える。これは、各時間ステップが1年に等しい、すなわち  $\Delta t=1$  となる2期間ツリーである。各ノードでの上、真ん中、下への推移確率はそれぞれ0.25, 0.50, 0.25である。期間  $\Delta t$  の金利は、各ノードにおける上段の数字で与えられている（注12）。

このツリーを用いて、2番目の時間ステップの終わりに、

図30.6 金利三項ツリーの使用例  
(各ノードにおける上段の数字は金利、下段の数字は商品の価値)



(注12) 金利ツリー上の推移確率と金利の決め方については後で説明する。

$$\max[100(R - 0.11), 0]$$

で与えられるペイオフが発生するデリバティブを評価する。ここで  $R$  は期間  $\Delta t$  の金利である。このデリバティブの価値の計算結果を、各ノードの下段に示す。最終ノードでは、デリバティブの価値はペイオフに等しい。たとえばノード E では、デリバティブの価値は  $100 \times (0.14 - 0.11) = 3$  となる。それ以前のノードでは、第11章と第19章で説明した後戻し計算を用いてデリバティブの価値を求める。ノード B では、1年金利は 12% である。この金利を割引率に用いて、ノード E, F, G における価値からノード B におけるデリバティブの価値が、

$$(0.25 \times 3 + 0.5 \times 1 + 0.25 \times 0) e^{-0.12 \times 1} = 1.11$$

として求められる。ノード C では、1年金利は 10% である。この金利を割引率に用いて、ノード C におけるデリバティブの価値が、

$$(0.25 \times 1 + 0.5 \times 0 + 0.25 \times 0) e^{-0.1 \times 1} = 0.23$$

として求められる。はじめのノード A でも金利は 10% で、デリバティブの価値は、

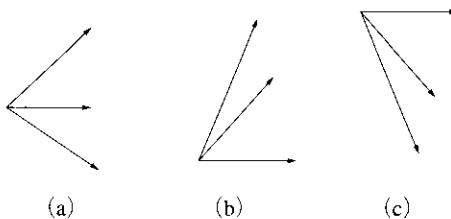
$$(0.25 \times 1.11 + 0.5 \times 0.23 + 0.25 \times 0) e^{-0.1 \times 1} = 0.35$$

となる。

### 標準的でない分岐

図30.6のすべてのノードで用いられている、三項ツリーでの標準的な分岐パターンを修正したほうが便利な場合がある。三つのありうる分岐法を図30.7に示す。図30.7(a)（次頁）が通常の分岐で、1単位上昇／水平方向／1単位下落の組合せからなる。図30.7(b)がこれにかわる分岐パターンの一つで、2単位上昇／1単位上昇／水平方向の組合せからなる。この分岐は、金利の水準が非常に低いときに平均回帰性を組み入れるのに便利である。図30.7(c)が3番目の分岐パターンで、水平方向／1単位下落／2単位下落の組合せからなる。この分岐は、金利の水準が非常に高いときに平均回帰性を組み入れるのに便利である。次節でこれらの異なる分岐パターンの使い方を例示する。

図30.7 三項ツリーでのいくつかの分岐方法



### 30.7 一般的なツリー構築手順

Hull と White は、広範囲の 1 ファクター・モデルを表現できる、二段階からなる頑健な三項ツリーの構築手順を提案した(注13)。本節では、まず (30.13)式の Hull-White モデルに対してこの手順の適用方法を説明し、その後で他のモデルへの手順の拡張方法を示す。

#### 第1段階

瞬間的な短期金利  $r$  に対する Hull-White モデルは、

$$dr = [\theta(t) - ar] dt + \sigma dz$$

で与えられる。ツリーの時間ステップは一定で  $\Delta t$  に等しいとする(注14)。

期間  $\Delta t$  の金利  $R$  は、 $r$  と同じ確率過程に従っていると仮定し、

$$dR = [\theta(t) - aR] dt + \sigma dz$$

を満たしているとする。明らかに、 $\Delta t$  をゼロとする極限ではこれは妥当である。このモデルに対するツリー構築の第1段階として、初期値が 0 で、

$$dR^* = -aR^* dt + \sigma dz$$

という確率過程に従う変数  $R^*$  に対するツリーを構築する。この過程は

(注13) J. Hull and A. White, "Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Facter Models," *Journal of Derivatives*, 2, 1 (1994) : 7-16 および J. Hull and A. White, "Using Hull-White Interest Rate Trees," *Journal of Derivatives*, (Spring 1996) : 26-36 を参照。

(注14) 一定でない時間ステップの利用方法については著者の Web サイトのテクニカルノート16を参照。

$R^*=0$ に関して対称的である。また、変数  $R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$  は正規分布に従っている。 $\Delta t$  より高次の項を無視すると、 $R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$  の期待値は  $-aR^*(t)\Delta t$  で、 $R^*(t+\Delta t) - R^*(t)$  の分散は  $\sigma^2\Delta t$  となる。

ツリー上の金利の間隔  $\Delta R$  を、

$$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$$

にする。これは、誤差最小化の観点から  $\Delta R$  の値としてよい選択であることが知られている。

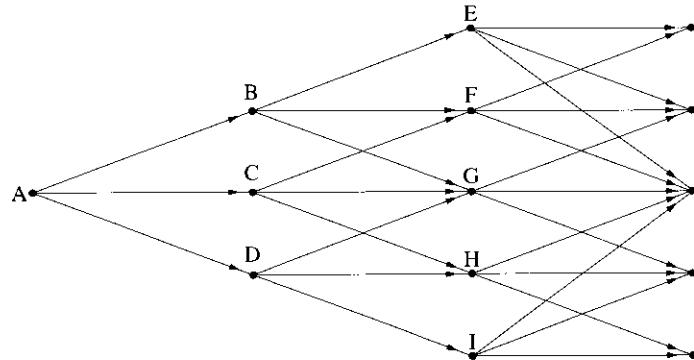
手順の第1段階の目的は、図30.8(次頁)のような  $R^*$ に対するツリーを構築することである。そのためには、まず各ノードで図30.7の三つの分岐方法のどれを適用するのか決める必要がある。それが決まれば、ツリー全体の形状が決まり、次に分岐確率を計算することになる。

$(i, j)$  を  $t=i\Delta t$  かつ  $R^*=j\Delta R$  となるノードと定義する(変数  $i$  は正の整数で、 $j$  は正または負の整数である)。各ノードで用いる分岐方法は、三つの枝での確率がすべて正になるように選ばなければならない。ほとんどの場合には、図30.7(a)の分岐方法が適切である。 $a>0$ の場合、十分に大きな  $j$  に対しては図30.7(a)の分岐方法を図30.7(c)の分岐方法に切り替える必要がある。同様に、十分に大きな負の  $j$  に対しては図30.7(a)の分岐方法を図30.7(b)の分岐方法に切り替える必要がある。 $j_{\max}$  を図30.7(a)の分岐方法から図30.7(c)の分岐方法に切り替える  $j$  の値、 $j_{\min}$  を図30.7(a)の分岐方法から図30.7(b)の分岐方法に切り替える  $j$  の値と定義する。Hull と White は  $j_{\max}$  を  $0.184/(a\Delta t)$  より大きい最小の整数とし、 $j_{\min}$  を  $-j_{\max}$  とすれば、確率は常に正になることを示した(注15)。 $p_u$ 、 $p_m$ 、 $p_d$  を各ノードから上、真ん中、下へ分岐する確率とする。これらの確率を、次の時間区間  $\Delta t$  における  $R^*$  の変化の期待値と分散に適合するように決める。また、確率なので合計は 1 にならなければならない。以上から、求める三つの確率に対して三つの方程式が得られる。

---

(注15)  $j_{\max}$  の値が  $0.184/(a\Delta t)$  と  $0.816/(a\Delta t)$  の間にあり、 $j_{\min}$  の値が  $-0.184/(a\Delta t)$  と  $-0.816/(a\Delta t)$  の間にあれば、確率は常に正になる。最初に切り替え可能なノードで分岐方法を切り替えるのが計算効率は最もよい、ということがわかっている。

図30.8 Hull-White モデルでの  $R^*$ に対するツリー（第1段階）



| ノード     | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $R(\%)$ | 0.000  | 1.732  | 0.000  | -1.732 | 3.464  | 1.732  | 0.000  | -1.732 | -3.464 |
| $p_u$   | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$   | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$   | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

すでに述べたように、時間  $\Delta t$  における  $R^*$  の変化の平均は  $-aR^*\Delta t$  で、変化の分散は  $\sigma^2\Delta t$  である。ノード  $(i,j)$  では  $R^*=j\Delta R$  である。分岐方法が図30.7(a)の場合には、ノード  $(i,j)$  での  $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$  は、平均と標準偏差を合わせるために次の三つの式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned} p_u\Delta R - p_d\Delta R &= -aj\Delta R\Delta t \\ p_u\Delta R^2 + p_d\Delta R^2 &= \sigma^2\Delta t + a^2j^2\Delta R^2\Delta t^2 \\ p_u + p_m + p_d &= 1 \end{aligned}$$

$\Delta R = \sigma\sqrt{3\Delta t}$  を用いてこれらの式を解くと、

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2 - aj\Delta t)$$

$$p_m = \frac{2}{3} - a^2j^2\Delta t^2$$

$$p_a = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + aj \Delta t)$$

が得られる。同様に、分岐方法が図30.7(b)の場合には、確率は、

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + aj \Delta t)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 - 2aj \Delta t$$

$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 + 3aj \Delta t)$$

となる。最後に、分岐方法が図30.7(c)の場合には、確率は、

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - 3aj \Delta t)$$

$$p_m = -\frac{1}{3} - a^2 j^2 \Delta t^2 + 2aj \Delta t$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(a^2 j^2 \Delta t^2 - aj \Delta t)$$

となる。

ツリー構築の第1段階を説明する例として、 $\sigma=0.01$ ,  $a=0.1$ ,  $\Delta t=1$ 年とする。この場合には、 $\Delta R=0.01\sqrt{3}=0.0173$ ,  $j_{\max}$ は $0.184/0.1$ より大きい最小の整数となり、 $j_{\min}=-j_{\max}$ となる。したがって、 $j_{\max}=2$ と $j_{\min}=-2$ となり、ツリーは図30.8のようになる。各ノードから出る枝に対する確率はツリーの下に示したものになり、それらは $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$ に関する上式から求めることができる。

図30.8の各ノードでの確率は $j$ のみに依存している、ということに注意しよう。たとえば、ノードBでの確率はノードFでの確率と同じである。さらに、ツリーは対称的である。ノードDでの確率はノードBでの確率と鏡像の関係にある。

## 第2段階

ツリー構築の第2段階では、 $R^*$ に対するツリーを $R$ に対するツリーに変換する。これは、初期時点の金利の期間構造に適合するように、 $R^*$ に対するツリー上のノードを移動することによって行われる。

$$\alpha(t) = R(t) - R^*(t)$$

と定義する。初期時点の期間構造に完全に合うように、この $\alpha$ を反復計算で求める(注16)。 $\alpha_i$ を、 $R$ のツリー上の時点 $i\Delta t$ での $R$ の値から対応する $R^*$ のツリー上の時点 $i\Delta t$ での $R^*$ の値を引いたものである、 $\alpha(i\Delta t)$ として定義する。 $Q_{i,j}$ をノード $(i, j)$ に到達した場合に1ドルを支払い、それ以外は支払のない証券の現在価値とする。 $\alpha_i$ と $Q_{i,j}$ は初期時点の期間構造に完全に合うように、前向きの計算で帰納的に求めることができる。

## 第2段階の例

図30.8の例における連続複利でのゼロ・レートが、表30.1のように与えられているとする。 $Q_{0,0}$ の値は1である。 $\alpha_0$ の値は、満期 $\Delta t$ の割引債の価格が正しく求まるように決める。すなわち、 $\alpha_0$ は最初の期間 $\Delta t$ における金利に等しくする。この例では $\Delta t=1$ なので、 $\alpha_0=0.03824$ となる。これより、図30.9の $R$ のツリーの最初のノードの位置が決まる。次に、 $Q_{1,1}$ 、 $Q_{1,0}$ 、 $Q_{1,-1}$ の値を計算する。ノード $(1, 1)$ に到達する確率は0.1667で、最初の時間ステップでの割引金利は3.82%である。したがって、 $Q_{1,1}$ の値は $0.1667e^{-0.0382}=0.1604$ となる。同様にして、 $Q_{1,0}=0.6417$ 、 $Q_{1,-1}=0.1604$ と求まる。

---

(注16)  $\alpha(t)$ は解析的に求めることができる。

$$dR = [\theta(t) - aR]dt + \sigma dz, \quad dR^* = -aR^*dt + \sigma dz$$

より、

$$d\alpha = [\theta(t) - a\alpha(t)]dt$$

が成り立つ。 $r$ と $R$ の違いを無視すれば、この解は、

$$\alpha(t) = F(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$$

となる。しかし、これは瞬間的な $\alpha$ に対するもので、初期時点の金利の期間構造に完全に合うようなツリーを構築するためのものではない。

表30.1 図30.8および図30.9におけるゼロ・レートの例

| 満期  | レート(%) |
|-----|--------|
| 0.5 | 3.430  |
| 1.0 | 3.824  |
| 1.5 | 4.183  |
| 2.0 | 4.512  |
| 2.5 | 4.812  |
| 3.0 | 5.086  |

$Q_{1,1}$ ,  $Q_{1,0}$ ,  $Q_{1,-1}$ が求まると,  $\alpha_1$ を決めることができる。 $\alpha_1$ は, 満期 $2\Delta t$ の割引債の価格が正しく求まるように決められる。 $\Delta R = 0.01732$ かつ  $\Delta t = 1$ なので, ノード B でのこの債券の価格は  $e^{-(\alpha_1 + 0.01732)}$  となる。同様にして, ノード C での価格は  $e^{-\alpha_1}$ , ノード D での価格は  $e^{-(\alpha_1 - 0.01732)}$  となる。したがって, 最初のノード A での価格は,

$$Q_{1,1}e^{-(\alpha_1 + 0.01732)} + Q_{1,0}e^{-\alpha_1} + Q_{1,-1}e^{-(\alpha_1 - 0.01732)} \quad (30.21)$$

となる。初期時点の期間構造から, この債券の価格は  $e^{-0.04512 \times 2} = 0.9137$  である。(30.21)式の  $Q$  にすでに求まっている値を代入すると,

$$0.1604e^{-(\alpha_1 + 0.01732)} + 0.6417e^{-\alpha_1} + 0.1604e^{-(\alpha_1 - 0.01732)} = 0.9137$$

すなわち,

$$e^{-\alpha_1}(0.1604e^{-0.01732} + 0.6417 + 0.1604e^{0.01732}) = 0.9137$$

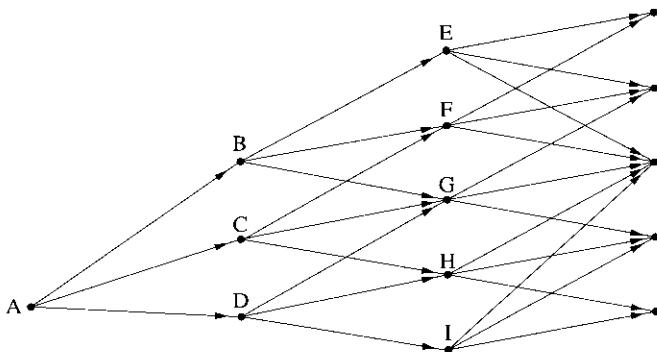
が得られ,

$$\alpha_1 = \ln \left[ \frac{0.1604e^{-0.01732} + 0.6417 + 0.1604e^{0.01732}}{0.9137} \right] = 0.05205$$

となる。したがって,  $R$  のツリーでの時点  $\Delta t$  における中心のノードは, 金利 5.205% に対応していることがわかる(次頁図30.9を参照)。

次のステップは,  $Q_{2,2}$ ,  $Q_{2,1}$ ,  $Q_{2,0}$ ,  $Q_{2,-1}$ , および  $Q_{2,-2}$  を求めることである。計算はすでに求まっている  $Q$  の値を用いることによって, 簡単に行うことができる。たとえば  $Q_{2,1}$ について考える。これは, ノード F に到達すれば 1 ドルを支払い, それ以外は支払のない証券の価値である。ノード F に到達するのは, ノード B とノード C からのみである。これらのノードに

図30.9 Hull-White モデルでの  $R$  のツリー（第2段階）



| ノード    | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $R(%)$ | 3.824  | 6.937  | 5.205  | 3.473  | 9.716  | 7.984  | 6.252  | 4.520  | 2.788  |
| $p_u$  | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$  | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$  | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

における金利はそれぞれ6.937%と5.205%である。枝 B-F と枝 C-F に対する確率はそれぞれ0.6566と0.1667である。したがって、ノード F で 1 ドルを支払う証券のノード B での価値は  $0.6566e^{-0.06937}$  となり、ノード C での価値は  $0.1667e^{-0.05205}$  となる。変数  $Q_{2,1}$  はノード B で 1 ドルを受け取る現在価値の  $0.6566e^{-0.06937}$  倍に、ノード C で 1 ドルを受け取る現在価値の  $0.1667e^{-0.05205}$  倍を加えたものになる。すなわち、

$$Q_{2,1} = 0.6566e^{-0.06937} \times 0.1604 + 0.1667e^{-0.05205} \times 0.6417 = 0.1998$$

となる。同様に、 $Q_{2,2} = 0.0182$ ,  $Q_{2,0} = 0.4736$ ,  $Q_{2,-1} = 0.2033$ , および  $Q_{2,-2} = 0.0189$  となる。

図30.9の  $R$  に対するツリーを構築する次のステップは、 $\alpha_2$  の値を求ることである。それが求まれば、 $Q_{3,j}$  を計算することができる。その次は  $\alpha_3$  の値を求める、などを続けていくとツリーが構築できる。

## $\alpha$ と $Q$ に関する公式

以上 の方法をもっと一般的に表すために、 $Q_{i,j}$  の値が  $i \leq m$  ( $m \geq 0$ ) に対してすでに求まっているとする。次のステップは、満期  $(m+1)\Delta t$  の割引債の価格がツリーで正しく求まるように、 $\alpha_m$  の値を決めることである。ノード  $(m, j)$  での金利は  $\alpha_m + j\Delta R$  であるから、満期  $(m+1)\Delta t$  の割引債の価格は、

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-(\alpha_m + j\Delta R)\Delta t] \quad (30.22)$$

で与えられる。ただし、 $n_m$  は時点  $m\Delta t$  における中心のノードからみて片側にあるノード数である。この式の解は、

$$\alpha_m = -\frac{\ln \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} e^{-j\Delta R \Delta t} - \ln P_{m+1}}{\Delta t}$$

となる。 $\alpha_m$  が求まれば、 $i = m+1$  に対する  $Q_{i,j}$  は、

$$Q_{m+1,i} = \sum_k Q_{m,k} q(k, j) \exp[-(\alpha_m + k\Delta R)\Delta t]$$

を用いて計算することができる。ただし、 $q(k, j)$  はノード  $(m, k)$  からノード  $(m+1, j)$  への推移確率で、総和は確率がゼロでないすべての  $k$  について行う。

## 他のモデルへの拡張

これまで概説してきた手続は、

$$df(r) = [\theta(t) - af(r)] dt + \sigma dz \quad (30.23)$$

という形のより一般的なモデルへ拡張できる。この種のモデルは、任意の期間構造に適合させることができるという性質をもっている(注17)。

これまでと同様に、期間  $\Delta t$  の金利  $R$  が  $r$  と同じ確率過程に従い、

$$df(R) = [\theta(t) - af(R)] dt + \sigma dz$$

を満たしているとする。 $x = f(R)$  と置くと、

$$dx = [\theta(t) - ax] dt + \sigma dz$$

となる。第1段階として、 $\theta(t) = 0$  および初期値をゼロとする以外は、 $x$  と同じ確率過程に従う変数  $x^*$  に対してツリーを構築する。ここでの手続は、すでに概説した図30.8のようなツリーを構築する手続と同じである。

次に、初期時点の期間構造に正確に適合させるために、図30.9のように、時点  $i\Delta t$  のノードを  $\alpha_i$ だけ移動する。 $\alpha_i$ と  $Q_{i,j}$ を帰納的に決める式は、 $f(R) = R$ の場合とは若干異なったものになる。最初のノードにおける  $Q$ の値  $Q_{0,0}$ を1にする。 $Q_{i,j}$ の値は  $i \leq m (m \geq 0)$ に対してすでに求まっているとする。次のステップは、満期  $(m+1)\Delta t$  の割引債の価格がツリーで正しく求まるように、 $\alpha_m$ の値を決めることである。 $g$ を  $f$ の逆関数とすると、時点  $m\Delta t$ における  $j$ 番目のノードでの期間  $\Delta t$ の金利は、

$$g(\alpha_m + j\Delta x)$$

となる。したがって、満期  $(m+1)\Delta t$  の割引債の価格は、

$$P_{m+1} = \sum_{j=-n_m}^{n_m} Q_{m,j} \exp[-g(\alpha_m + j\Delta x)\Delta t] \quad (30.24)$$

で与えられる。この式は、Newton-Raphson法のような数値計算法を用いて解くことができる。 $m=0$ のときの  $\alpha$ の値  $\alpha_0$ は  $f(R(0))$ である。

$\alpha_m$ が求まれば、 $i=m+1$ に対する  $Q_{i,j}$ の値は、

$$Q_{m+1,j} = \sum_k Q_{m,k} q(k,j) \exp[-g(\alpha_m + k\Delta x)\Delta t]$$

を用いて計算することができる。ただし、 $q(k,j)$ はノード  $(m,k)$ からノード  $(m+1,j)$ への推移確率で、総和は確率がゼロでないすべての  $k$ について行う。

図30.10は、

$$d\ln(r) = [\theta(t) - ar] dt + \sigma dz$$

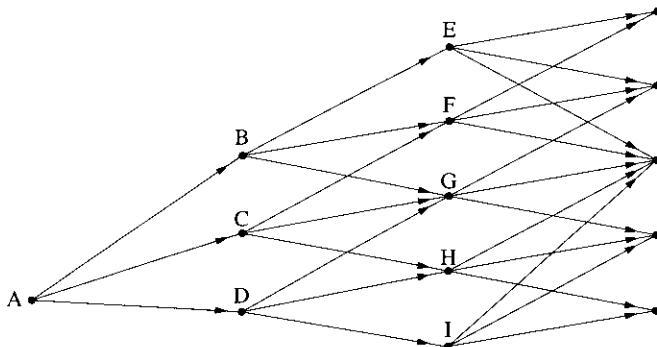
というモデルにこの手続を適用した結果を示したものである。ただし、 $a=0.22$ 、 $\sigma=0.25$ 、 $\Delta t=0.5$ とし、ゼロ・レートは表30.1に与えられたものとしている。

(注17) すべての無裁定モデルがこの性質をもっているわけではない。たとえば、Cox, Ingersoll と Ross (1985) および Hull と White (1990) で考察された拡張CIRモデルは、

$$dr = [\theta(t) - ar] dt + \sigma \sqrt{r} dz$$

という形をしているが、フォワード・レートが急激に低下するようなイールドカーブには適合させることができない。その理由は、 $\theta(t)$ が負のときは確率過程がうまく定義できないからである。

図30.10 対数正規モデルに対するツリー



| ノード     | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $x$     | -3.373 | -2.875 | -3.181 | -3.487 | -2.430 | -2.736 | -3.042 | -3.349 | -3.655 |
| $R(\%)$ | 3.430  | 5.642  | 4.154  | 3.058  | 8.803  | 6.481  | 4.772  | 3.513  | 2.587  |
| $p_u$   | 0.1667 | 0.1177 | 0.1667 | 0.2277 | 0.8609 | 0.1177 | 0.1667 | 0.2277 | 0.0809 |
| $p_m$   | 0.6666 | 0.6546 | 0.6666 | 0.6546 | 0.0582 | 0.6546 | 0.6666 | 0.6546 | 0.0582 |
| $p_d$   | 0.1667 | 0.2277 | 0.1667 | 0.1177 | 0.0809 | 0.2277 | 0.1667 | 0.1177 | 0.8609 |

### $f(r)$ の選択

$f(r) = r$  と置くと(30.13)式の Hull-White モデルになり、 $f(r) = \ln(r)$  と置くと(30.18)式の Black-Karasinski モデルになる。ほとんどの状況において、これら二つのモデルはキャップやヨーロピアン・スワップションのような活発に取引されている商品の市場データに同じくらいよく適合できると思われる。 $f(r) = r$  とするモデルの主な長所は、解析的に扱いやすいことである。主な短所は、負の金利が起りうるということである。ほとんどの状況では、そのモデルのもとで金利が負になる確率は非常に小さいが、金利が負になる可能性が少しでもあるモデルは使いたくないというアナリストもいる。 $f(r) = \ln(r)$  とするモデルは解析的に扱いやすくはないが、金利が常に正であるという長所をもっている。また、トレーダーは、正規モデルで定義された  $\sigma$  ではなく、対数正規モデルで定義された  $\sigma$  を用いて自然に考えることができる、という長所もある。

低金利の国に対して満足のいくモデルをどのように選択すればよいか、という問題がある。初期時点の短期金利が低い場合には、将来の金利が負になる確率は無視できないレベルになるので、正規モデルは満足のいくモデルではない。金利が高いときよりも低いときのほうが、金利のボラティリティ（すなわち、対数正規モデルでの $\sigma$ パラメータ）は通常非常に大きくなるので、対数正規モデルも満足のいくものではない（たとえば、短期金利が非常に低いときには100%のボラティリティが適当であり、金利が4%以上のときには20%のボラティリティが適当であるかもしれない）。うまくいきそうなモデルは、 $r$ が1%未満のときは対数正規となり、 $r$ が1%以上のときは正規となるように $f(r)$ を選んだモデルである（注18）。

### ツリーでの解析的な結果の利用

$f(r) = r$ とする Hull-White モデルに対してツリーを構築する場合には、30.3節の解析的な結果を用いて、各ノードでの完全な期間構造とヨーロピアン・オプションの価格を求めることができる。その際に、ツリー上の金利は期間 $\Delta t$ の金利 $R$ であって、瞬間的な短期金利 $r$ ではない、ということを認識しておくことは重要である。

(30.15)式、(30.16)式、および(30.17)式より、

$$P(t, T) = \hat{A}(t, T) e^{-\hat{B}(t, T)R(t)} \quad (30.25)$$

となることが示せる（章末問題30.21を参照）。ただし、

$$\begin{aligned} \ln \hat{A}(t, T) &= \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} - \frac{B(t, T)}{B(t, t+\Delta t)} \ln \frac{P(0, t+\Delta t)}{P(0, t)} \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) B(t, T) [B(t, T) - B(t, t+\Delta t)] \end{aligned} \quad (30.26)$$

であり、

---

(注18) J. Hull and A. White, "Taking Rates to the Limit," *Risk*, December (1997) : 168 69 を参照。

【例30.1】

ゼロ・レートは表30.2のように与えられているとする。表にない満期に対するゼロ・レートは、線形補間で求めることとする。

満期9年( $=9 \times 365$ 日)の割引債に対する満期3年( $=3 \times 365$ 日)のヨーロピアン・ブット・オプションを考える。金利は Hull-White モデル ( $f(r)=r$ ) に従っているとする。行使価格を63,  $\alpha=0.1$ ,  $\sigma=0.01$  とする。3年のツリーを構築し、最終ノードでの割引債の価格を上述の方法で解析的に計算し、それを用いてオプションの価格を求める。表30.3に示すように、ツリーから得られる結果は解析式から求まるオプション価格に一致している。

表30.2 連続複利金利でのゼロ・カーブ

| 満期  | 日数    | レート(%)  | 満期  | 日数    | レート(%)  |
|-----|-------|---------|-----|-------|---------|
| 3日  | 3     | 5.01772 | 4年  | 1,461 | 6.73464 |
| 1ヶ月 | 31    | 4.98284 | 5年  | 1,826 | 6.94816 |
| 2ヶ月 | 62    | 4.97234 | 6年  | 2,194 | 7.08807 |
| 3ヶ月 | 94    | 4.96157 | 7年  | 2,558 | 7.27527 |
| 6ヶ月 | 185   | 4.99058 | 8年  | 2,922 | 7.30852 |
| 1年  | 367   | 5.09389 | 9年  | 3,287 | 7.39790 |
| 2年  | 731   | 5.79733 | 10年 | 3,653 | 7.49015 |
| 3年  | 1,096 | 6.30595 |     |       |         |

表30.3 満期9年の割引債に対する行使価格63、満期3年のブット・オプションの価値( $\alpha=0.1$ ,  $\sigma=0.01$ 、ゼロ・カーブは表30.2のものとする)

| ステップ数 | ツリーを用いた場合 | 解析式を用いた場合 |
|-------|-----------|-----------|
| 10    | 1.8658    | 1.8093    |
| 30    | 1.8234    | 1.8093    |
| 50    | 1.8093    | 1.8093    |
| 100   | 1.8144    | 1.8093    |
| 200   | 1.8097    | 1.8093    |
| 500   | 1.8093    | 1.8093    |

この例は、モデル実装のよいテストになっている。というのは、オプションの満期直後にゼロ・カーブの傾きが急激に変化しているからである。このような場合、ツリーの構築と利用の際のわずかな誤差が、それを用いて計算したオプションの価値に重大な影響を及ぼすことがある（本例は、DerivaGem Application Builder ソフトウェアの Sample Application G で使われている）。

$$\hat{B}(t, T) = \frac{B(t, T)}{B(t, t + \Delta t)} \Delta t \quad (30.27)$$

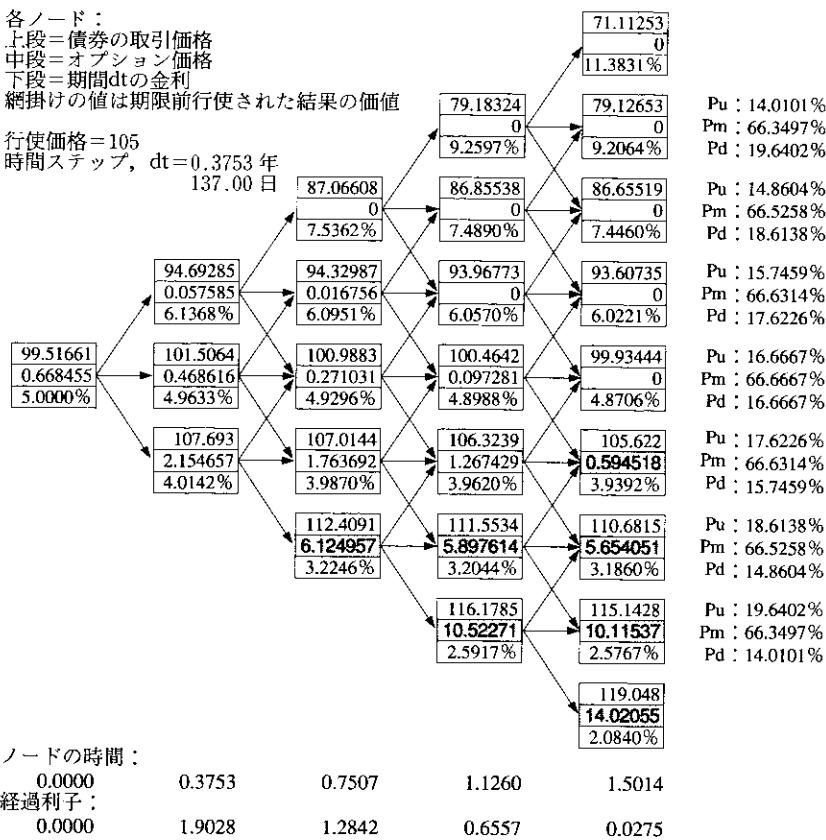
である（Ho-Lee モデルの場合には、これらの式で  $\hat{B}(t, T) = T - t$  と置く）。

以上のことから、債券の価格を求めるときは、（30.15）式ではなく（30.25）式を用いて計算する。

### アメリカン債券オプションに対するツリー

本書に付属している DerivaGem ソフトウェアには、ヨーロピアンとアメリカンの債券オプション、キャップ／フロア、ヨーロピアン・スワップションが評価できる正規モデルと対数正規モデルが実装されている。図30.11は、時間ステップ数を 4 とし、対数正規モデルを用いて満期10年の債券に対する満期1.5年のアメリカン・コール・オプションを評価するために、このソフトウェアを用いて作成したツリーである。対数正規モデルのパラメータは、 $a = 5\%$  と  $\sigma = 20\%$  としている。原資産の債券は残存期間が10年で、額面が 100、クーポンが年 5% の年 2 回払いとする。イールドカーブは年率 5% でフラットとし、行使価格は 105 とする。28.1節で説明したように、行使価格には取引価格ベースのものと、呈示価格ベースのものがある。いまの場合は、呈示価格ベースの行使価格とする。また、ツリー上に示した債券価格は取引価格である。各ノードにおける経過利子はツリーの下に示されている。取引価格ベースの行使価格は、呈示価格ベースの行使価格に経過利子を加えたものである。また、債券の呈示価格は取引価格から経過利子を引いたものである。オプションのペイオフは、債券の取引価格から取引価格ベースの行

図30.11 DerivaGem ソフトウェアで作成したアメリカン債券オプション評価ツリー



使価格を引いたものになる。あるいは同じことであるが、ペイオフは債券の呈示価格から呈示価格ベースの行使価格を引いたものになる。

ツリーからオプション価格が0.668として得られる。時間ステップ数を100にした大きなツリーでは、オプション価格は0.699となる。図30.11について2点注意すべきことがある。

1. このソフトウェアでは、オプション満期までの時間は全日数で測られている。たとえば、1.5年のオプション満期を入力すると、オプション期間は1.5014年（すなわち1年と183日）として扱われる。利払

日（したがって、経過利子）は、コンピュータの内部時計から取得される評価日に依存している。

2. 対数正規モデルが仮定された場合は、満期10年の債券の価格は解析的には計算できない。その場合の価格は、ここで示したものよりもずっと大きなツリーを用いて、後戻し計算によって数値的に求められている。

### 30.8 キャリブレーション

これまで、ボラティリティ・パラメータ  $a$  と  $\sigma$  は既知と仮定してきた。ここではそれらのパラメータを決める方法について論じる。これはモデルのキャリブレーションとして知られている。

ボラティリティ・パラメータは、活発に取引されているオプションの市場データ（たとえば、表28.1や表28.2にあるようなキャップやスワップションのプローカー呈示価格）から推定される。これらをキャリブレーション対象商品 (calibrating instrument) と呼ぶことにする。第1段階として、「適合度」を測る尺度を選ぶ。 $n$  個のキャリブレーション対象商品があると仮定する。よく使われる適合度の尺度は、

$$\sum_{i=1}^n (U_i - V_i)^2$$

である。ここで、 $U_i$  は  $i$  番目のキャリブレーション対象商品の市場価格、 $V_i$  はその商品に対してモデルから得られる価格である。キャリブレーションの目的は、適合度の尺度が最小になるモデル・パラメータを選択することである。

ボラティリティ・パラメータの数はキャリブレーション対象商品の数より多くなるべきではない。 $a$  と  $\sigma$  が定数の場合は、ボラティリティ・パラメータは二つだけである。モデルを拡張して、 $a$  または  $\sigma$ 、あるいはその両方が時間の関数であるとすることができる。階段関数を用いてもよい。たとえば、 $a$  を定数とし、 $\sigma$  を時間の関数とする。時点  $t_1, t_2, \dots, t_n$  を選び、 $t \leq t_1$  に対して  $\sigma(t) = \sigma_0$ 、 $t_i < t \leq t_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) に対して  $\sigma(t) = \sigma_i$ 、 $t > t_n$  に

対して  $\sigma(t) = \sigma_n$  と仮定する。そうすると、ボラティリティ・パラメータは全部で  $n+2$  個の  $a, \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$  となる。

適合度の尺度の最小化は Levenberg-Marquardt 法を用いて行うことができる(注19)。 $a$  または  $\sigma$ , あるいはその両方が時間の関数の場合は、適合度の尺度にペナルティ関数を加えて、関数が「よいふるまい」をするようにすることがよくある。 $\sigma$  が階段関数で与えられるい�述べた例では、

$$\sum_{i=1}^n (U_i - V_i)^2 + \sum_{i=1}^n w_{1,i} (\sigma_i - \sigma_{i-1})^2 + \sum_{i=1}^{n-1} w_{2,i} (\sigma_{i-1} + \sigma_{i+1} - 2\sigma_i)^2$$

が適切な目的関数である。第 2 項は時間の 1 ステップ間における  $\sigma$  の大きな変化に対してペナルティを与えている。第 3 項は  $\sigma$  の大きな曲率に対してペナルティを与えている。 $w_{1,i}$  と  $w_{2,i}$  に対する適切な値は実験に基づいて与えられ、関数  $\sigma$  が十分な滑らかさをもつように選択される。

キャリブレーション対象商品は、できるだけ評価する商品に近いものを選ぶほうがよい。たとえば、5 年目から 9 年目の任意の支払日に権利行使でき、行使すると現時点から 10 年後に満期を迎えるスワップが開始する、満期 10 年のバミューダン・スワップションをモデルで評価したいとする。最も関連性の高いキャリブレーション対象商品は、 $5 \times 5, 6 \times 4, 7 \times 3, 8 \times 2$ , および  $9 \times 1$  のヨーロピアン・スワップションである ( $n \times m$  ヨーロピアン・スワップションとは、権利行使するとオプション満期から  $m$  年間続くスワップが開始する、満期  $n$  年のオプションである)。

$a$  または  $\sigma$ , あるいはその両方を時間の関数とすることの長所は、市場で活発に取引される商品の価格により正確にモデルを適合させることができる点である。短所はボラティリティの期間構造が非定常になることである。モデルから得られる将来時点のボラティリティの期間構造は、現時点の市場で観測されるものとかなり異なる傾向がある(注20)。

キャリブレーションに対する少し異なる方法として、すべての利用可能なキャリブレーション対象商品を用いて、「大域的に最も適合した」パラメー

(注19) この手続のわかりやすい説明が、W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, and W.T. Vetterling, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1988 にある。

タ  $a$  と  $\sigma$  を計算するというものがある。パラメータ  $a$  を、その最も適合した値に固定する。そうすると、そのモデルを Black-Scholes モデルと同じように利用できるようになる。すなわち、オプション価格とパラメータ  $\sigma$  との 1 対 1 対応が得られ、モデルを用いて、表28.1や表28.2のような表をインプライド  $\sigma$  の表に変換できるようになる(注21)。得られた表は、価格付けしようとしている商品に最も適した  $\sigma$  の算出に用いられる。

### 30.9 1 ファクター・モデルを用いたヘッジ

金利デリバティブのポートフォリオをヘッジする一般的な方法については、28.6節で概要を述べた。それらの方法は、本章の期間構造モデルと合わせて用いることが可能である。デルタ、ガンマ、およびベガの計算は、ゼロ・カーブやボラティリティを微小変化させてポートフォリオの価値を再計算することで行われる。

金利デリバティブの価格付けを行うときに 1 ファクター・モデルが用いられることもよくあるが、ヘッジの際には 1 ファクターのみを仮定するのは適切ではない、ということに注意しよう。たとえば、デルタはイールドカーブのさまざまな異なる動きに対して計算するべきで、使用するモデルで仮定されている動きに対してのみでは不十分である。使用しているモデルで起こりうる変化だけでなく、起こりえない変化も考慮することは、アウトサイド・モデル・ヘッジ (outside model hedging) として知られ、トレーダーが標準的に行っていることである(注22)。比較的簡単な 1 ファクター・モデルを注意深く用いれば、商品の価格としては通常妥当なものが得られるが、よい

---

(注20)  $a$  と  $\sigma$  が時間の関数である場合のモデルの実装については、著者の Web サイトのテクニカルノート16を参照されたい。

(注21) 期間構造モデルでのインプライド  $\sigma$  は、表28.1や表28.2の Black モデルから計算されたインプライド・ボラティリティと同じではないことに注意しよう。インプライド  $\sigma$  は次のように計算できる。Black モデルを用いて、Black ボラティリティを価格に変換する。そして、その価格を与える期間構造モデルのパラメータ  $\sigma$  を反復計算で求める。

ヘッジを行うためには、陽か陰かにかかわらず、多くのファクターを仮定しなければならない、というのが現実の世界である。

## 要 約

金融の分野で用いられてきた伝統的な期間構造モデルは、均衡モデルとして知られている。それらのモデルは経済変数間の潜在的な関係を理解するのには有効であるが、初期時点の期間構造がモデルへの入力データではなく、モデルから得られる結果であるという短所をもっている。デリバティブを評価する際には、使用しているモデルが市場で観測される初期時点の期間構造と整合的である、ということが重要である。無裁定モデルはこの性質をもつようにつくられており、与えられた初期時点の期間構造に対して、それがどのように時間発展するかを定めている。

本章では、短期金利に対するいくつかの1ファクター無裁定モデルを説明してきた。これらのモデルは頑健であり、初期時点の任意のゼロ・レートとともに使用することができる。最も簡単なモデルは Ho-Lee モデルである。このモデルには解析的に扱いやすいという長所がある。一番の短所は、すべての金利が常に等しく変動するという点である。Hull-White モデルは、Ho-Lee モデルに平均回帰性をもたせたモデルである。このモデルは、解析的な扱いやすさを維持しつつ、多様なボラティリティを表現しうるモデルである。対数正規1ファクター・モデルは負の金利が発生する可能性のないモデルであるが、解析的には扱いにくい。

---

(注22) アウトサイド・モデル・ヘッジの簡単な例は、Black-Scholes モデルの使われ方である。Black-Scholes モデルではボラティリティは一定と仮定されているが、トレーダーは定期的にベガを計算し、ボラティリティの変化に対するヘッジを行っている。

## 参考文献

### ○均衡モデル

Cox, J.C., J.E. Ingersoll, and S.A. Ross. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53 (1985) : 385-407.

Longstaff, F.A., and E.S. Schwartz. "Interest Rate Volatility and the Term Structure: A Two Factor General Equilibrium Model," *Journal of Finance*, 47, 4 (September 1992) : 1259-82.

Vasicek, O.A. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, 5 (1977) : 177-88.

### ○無裁定モデル

Black, F., and P. Karasinski. "Bond and Option Pricing When Short Rates Are Lognormal," *Financial Analysts Journal*, July/August (1991) : 52-59.

Ho, T.S.Y., and S.-B. Lee. "Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims," *Journal of Finance*, 41 (December 1986) : 1011-29.

Hull, J., and A. White. "Bond Option Pricing Based on a Model for the Evolution of Bond Prices," *Advances in Futures and Options Research*, 6 (1993) : 1-13.

Hull, J., and A. White. "Pricing Interest Rate Derivative Securities," *Review of Financial Studies*, 3, 4 (1990) : 573-92.

Hull, J., and A. White. "Using Hull-White Interest Rate Trees," *Journal of Derivatives*, (Spring 1996) : 26-36.

Kijima, M., and I. Nagayama. "Efficient Numerical Procedures for the Hull-White Extended Vasicek Model," *Journal of Financial Engineering*, 3 (September/December 1994) : 275-92.

Kijima, M., and I. Nagayama. "A Numerical Procedure for the General One-Factor Interest Rate Model," *Journal of Financial Engineering*, 5 (December 1996) : 317-37.

Li, A., P. Ritchken, and L. Sankarasubramanian. "Lattice Models for Pricing American Interest Rate Claims," *Journal of Finance*, 50, 2 (June 1995) : 719-37.

Rebonato, R. *Interest Rate Option Models*. Chichester : Wiley, 1998.

## 章末問題

- 30.1** 均衡モデルと無裁定モデルの違いを述べよ。
- 30.2** 短期金利が現在 4 %で、その標準偏差が年率 1 %であるとする。(a) Vasicek モデル, (b)Rendleman-Bartter モデル, (c)Cox-Ingersoll-Ross モデルの各モデルで短期金利が 8 %に上昇した場合、標準偏差はいくつに変化するか。
- 30.3** 株価が平均回帰性をもっていたり、経路依存性をもっているならば、市場には非効率性が存在することになる。短期金利がそのような性質をもっていたとしても、市場には非効率性が存在しない理由を述べよ。
- 30.4** 1 ファクター金利モデルと 2 ファクター金利モデルの違いを説明せよ。
- 30.5** 30.4節で説明した、利付債に対するオプションを割引債に対するオプションのポートフォリオに分解する方法は、2 ファクター・モデルの場合でも適用できるか。その理由も説明せよ。
- 30.6** Vasicek モデルと Cox-Ingersoll-Ross モデルにおいて  $a=0.1$ ,  $b=0.1$  とする。二つのモデルとも初期時点における短期金利を 10%，微小時間  $\Delta t$  における短期金利の変化の標準偏差を  $0.02\sqrt{\Delta t}$  とする。これらのモデルから得られる満期 10 年の割引債価格を比較せよ。
- 30.7** Vasicek モデルで  $a=0.1$ ,  $b=0.08$ ,  $\sigma=0.015$  とし、当初の短期金利を 5 %とする。このとき、満期 3 年、額面 100 ドルの割引債に対する満期 1 年、行使価格 87 ドルのヨーロピアン・コール・オプションの価格を求めよ。
- 30.8** 問題 30.7と同じ条件のもとで、行使価格 87 ドルのヨーロピアン・プット・オプションの価格を求めよ。ヨーロピアン・コール・オプションとヨーロピアン・プット・オプションとの間に成り立つプット・コール・パリティの関係式を述べよ。また、いまの場合にプッ

トとコールの価格がプット・コール・パリティを満たしていることを示せ。

- 30.9** Vasicek モデルで  $a=0.05$ ,  $b=0.08$ ,  $\sigma=0.015$  とし, 当初の短期金利を 6 % とする。満期 3 年の債券に対する満期 2.1 年のヨーロピアン・コール・オプションの価格を計算せよ。ただし, 債券のクーポンは年 2 回払いの 5 % で, 額面は 100, オプションの行使価格は 99 とする。また, 行使価格はその債券に対して支払われる取引価格である (表示価格ではない)。
- 30.10** 問題 30.9 の答とプット・コール・パリティを用いて, 問題 30.9 のコール・オプションと同じ条件のプット・オプションの価格を計算せよ。
- 30.11** Hull-White モデルにおいて  $a=0.08$ ,  $\sigma=0.01$  とする。満期 5 年の割引債に対する満期 1 年のヨーロピアン・コール・オプションの価格を求めよ。ただし, 期間構造は 10 % でフラットとし, 債券の額面は 100 ドル, 行使価格は 68 ドルとする。
- 30.12** Hull-White モデルにおいて  $a=0.05$ ,  $\sigma=0.015$  とし, 初期時点の期間構造を半年複利で 6 % フラットとする。満期 3 年の債券に対する満期 2.1 年のヨーロピアン・コール・オプションの価格を計算せよ。ただし, 債券のクーポンは年 2 回払いの 5 % で, 額面は 100, オプションの行使価格は 99 とする。また, 行使価格はその債券に対して支払われる取引価格である (表示価格ではない)。
- 30.13** ニューメレール変換を用いて, Ho-Lee モデルにおける先物レートとフォワード・レートの関係が 6.3 節で示したようになることを示せ。その関係を用いて, Ho-Lee モデルに対して (30.11) 式で与えられる  $\theta(t)$  の表現式が正しいことを証明せよ (ヒント: リスクの市場価格がゼロのとき, 先物価格はマルチングールになる。リスクの市場価格がフォワード契約と同じ満期をもつ割引債のボラティリティに等しいとき, フォワード価格はマルチングールになる)。
- 30.14** 問題 30.13 と同じ方法を用いて, Hull-White モデルにおける先物

レートとフォワード・レートの関係を導け。その関係を用いて、Hull-White モデルに対して(30.14)式で与えられる  $\theta(t)$  の表現式が正しいことを証明せよ。

- 30.15**  $a = 0.05$ ,  $\sigma = 0.015$ , 期間構造は10%でフラットとする。Hull-White モデルに対する, 1期間の長さが1年の2期間三項ツリーを構築せよ。
- 30.16** 図30.6のツリーを用いて満期2年の割引債の価格を求めよ。
- 30.17** 図30.9のツリーを用いて満期2年の割引債の価格を求め, それが初期時点の期間構造から求められる価格と一致していることを確かめよ。
- 30.18** 図30.10のツリーを用いて満期18ヶ月の割引債の価格を求め, それが初期時点の期間構造から求められる価格と一致していることを確かめよ。
- 30.19** 1ファクター期間構造モデルのキャリブレーションはどのように行われるか。
- 30.20** DerivaGem ソフトウェアを用いて, 固定金利を受け取り, 変動金利を支払う,  $1 \times 4$ ,  $2 \times 3$ ,  $3 \times 2$ ,  $4 \times 1$  のヨーロピアン・スワップションを評価せよ。1年, 2年, 3年, 4年, および5年金利はそれぞれ6%, 5.5%, 6%, 6.5%, および7%とし, スワップの支払は半年ごとで, 固定金利は半年複利で年率6%であるとする。 $a = 3\%$ ,  $\sigma = 1\%$ として Hull-White モデルを用いよ。また, 各オプションに対して Black モデルによるインプライド・ボラティリティを計算せよ。
- 30.21** (30.25)式, (30.26)式, および(30.27)式を証明せよ。

## 宿題

- 30.22**  $\sigma=0.02$ として Ho-Lee モデルに対する三項ツリーを構築せよ。ただし、初期時点のゼロクーポン・レートは満期0.5年、1.0年、および1.5年に対してそれぞれ7.5%，8%，および8.5%とし、1期間の長さが6カ月の2期間ツリーとする。ツリーの各最終ノードにおいて、額面100、残存期間6カ月の割引債の価値を計算せよ。このツリーを用いて、この債券に対する行使価格95、満期1年のヨーロピアン・プット・オプションを評価せよ。また、ツリーから得られた価格と DerivaGem ソフトウェアから得られる解析式による価格とを比較せよ。
- 30.23** あるトレーダーが額面100、満期5年の債券に対する満期1年のアメリカン・コール・オプションの価格を計算したいと考えている。この債券のクーポンは年2回払いの6%，オプションの（呈示価格ベースの）行使価格は100ドルである。連続複利ベースのゼロ・レートは、満期6カ月、1年、2年、3年、4年、および5年に対してそれぞれ4.5%，5%，5.5%，5.8%，6.1%，および6.3%である。正規モデルあるいは対数正規モデルに対して、最も適合した回帰率は5%と推定されているとする。
- この債券に対する（呈示価格ベースの）行使価格100、満期1年のヨーロピアン・コール・オプションが活発に取引されており、その市場価格は0.50ドルであるとする。トレーダーはこのオプションを用いてキャリブレーションすることにした。DerivaGem ソフトウェアを10時間ステップで用い、以下の間に答えよ。
- 正規モデルを仮定して、ヨーロピアン・オプションの価格にインプライドされているパラメータ  $\sigma$  を求めよ。
  - このパラメータ  $\sigma$  を用いて、このオプションがアメリカンの場合の価格を計算せよ。
  - 対数正規モデルに対して(a)と(b)を繰り返せ。既知のヨーロピア

ンの価格にキャリブレーションしているならば、利用するモデルは得られる価格にあまり影響を与えないことを示せ。

- (d) 正規モデルに対するツリーを表示し、負の金利が起こる確率を計算せよ。
- (e) 対数正規モデルに対するツリーを表示し、このオプション価格が、30.7節の記号で  $i=9$ ,  $j=-1$  となるノードにおいて正しく計算されていることを確かめよ。

**30.24** DerivaGem ソフトウェアを用いて、変動金利を受け取り、固定金利を支払う、 $1 \times 4$ ,  $2 \times 3$ ,  $3 \times 2$ ,  $4 \times 1$  のヨーロピアン・スワップションを評価せよ。1年, 2年, 3年, 4年, および5年金利はそれぞれ 3%, 3.5%, 3.8%, 4.0%, および 4.1% とし、スワップの支払は半年ごとで、固定金利は半年複利で年率 4% であるとする。 $a = 5\%$ ,  $\sigma = 15\%$ , 50時間ステップとして対数正規モデルを用いよ。また、各オプションに対して Black モデルによるインプライド・ボラティリティを計算せよ。

**30.25** 図30.11が、そこで考察されている例に DerivaGem ソフトウェアを用いて得られることを確認せよ。また、行使価格が 95, 100, 105 のときのアメリカン債券オプションの価格を対数正規モデルと正規モデルで計算せよ。正規モデルの場合には、 $a = 5\%$ ,  $\sigma = 1\%$  とする。計算結果について、第18章で述べた裾の厚い分布の観点から議論せよ。

**30.26** DerivaGem Application Builder ソフトウェアの Sample Application G を修正して、額面 100、満期 5 年の債券に対する満期 2 年のコール・オプションの価格付けを三項ツリーで行うときの価格の収束について検証せよ。行使価格（呈示価格ベース）は 100、クーポンは年 2 回払いの 7% とし、ゼロ・カーブは表30.2のものを仮定する。以下の場合に対する結果を比較せよ。

- (a) オプションはヨーロピアン； $\sigma = 0.01$ ,  $a = 0.05$  の正規モデル
- (b) オプションはヨーロピアン； $\sigma = 0.15$ ,  $a = 0.05$  の対数正規モデル

- (c) オプションはアメリカン； $\sigma=0.01$ ,  $\alpha=0.05$ の正規モデル
- (d) オプションはアメリカン； $\sigma=0.15$ ,  $\alpha=0.05$ の対数正規モデル

## 第31章

# 金利デリバティブ：HJMとLMM

第30章で論じた金利モデルは、第28章の単純なモデルが不適切な場合に、商品の価格付けに広く用いられている。それらのモデルは実装しやすく、注意深く用いれば、ほとんどの非標準的な金利デリバティブを、金利キャップやヨーロピアン・スワップション、ヨーロピアン債券オプションのような活発に取引されている商品と整合性をもたせて価格付けすることが可能である。それらのモデルには次の二つの制限がある。

1. ほとんどが1ファクターモデル（すなわち、不確実性の要素は一つ）である。

2. ユーザーがボラティリティの構造を完全には自由に設定できない。パラメータ  $a$  と  $\sigma$  を時間の関数とすれば、アナリストがモデルを現時点の市場で観測されるボラティリティに適合させて使うことは可能であるが、30.8節で説明したように、ボラティリティの構造は非定常になる。将来のボ

ラティリティの構造が、現時点の市場で観測されるボラティリティとはかなり異なったものになることが多い。

本章では、ユーザーがより柔軟にボラティリティの構造を指定でき、複数のファクターをもたせられるような、期間構造モデルのいくつかの一般的な構築方法について論じる。それらのモデルは、第30章のモデルと比べて計算に非常に時間がかかる。そのため、それらのモデルは日常的な価格付けというよりも、研究や開発のために用いられることが多い。

本章では米国のモーゲージ証券市場についても触れ、本章で紹介するアイデアのいくつかを用いた、その市場の商品に対する価格付けについて述べる。

### 3.1.1 Heath-Jarrow-Morton モデル

1990年に、David Heath, Bob Jarrow と Andy Morton (HJM) はイールドカーブ・モデルが満たすべき無裁定条件を示した重要な論文を発表した（注1）。モデルを記述するために、以下の記号を用いる。

$P(t, T)$  : 額面 1 ドル、満期  $T$  の割引債の時点  $t$  における価格

$\Omega_t$  : 時点  $t$  における債券の価格ボラティリティの決定にかかわる、時点  $t$  での金利や債券価格の過去および現在の値からなるベクトル

$v(t, T, \Omega_t)$  :  $P(t, T)$  のボラティリティ

$f(t, T_1, T_2)$  : 時点  $t$  における時点  $T_1$  から時点  $T_2$  までの期間に対するフォワード・レート

$F(t, T)$  : 時点  $t$  における満期  $T$  に対する瞬間のフォワード・レート

$r(t)$  : 時点  $t$  における短期無リスク金利

---

(注1) D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton, "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A New Methodology," *Econometrica*, 60, 1 (1992) : 77-105 を参照。

$dz(t)$  : 期間構造を変動させるウィナー過程

### 割引債価格とフォワード・レートに対する確率過程

最初はファクターを一つと仮定し、従来のリスク中立世界を用いる。割引債は収入のない取引可能な証券である。したがって、従来のリスク中立世界における収益率は  $r$  となる。このことから、その確率過程は、

$$dP(t, T) = r(t)P(t, T)dt + v(t, T, \Omega_t)P(t, T)dz(t) \quad (31.1)$$

という形に書ける。引数に  $\Omega_t$  が含まれることから、割引債のボラティリティ  $v$  は、最も一般的な形では、過去および現在の金利と債券価格の適切に定義された関数となる。債券の価格ボラティリティは満期にはゼロになるので、

$$v(t, t, \Omega_t) = 0$$

でなければならない(注2)。

(4.5)式より、フォワード・レート  $f(t, T_1, T_2)$  は割引債価格を用いて、

$$f(t, T_1, T_2) = \frac{\ln[P(t, T_1)] - \ln[P(t, T_2)]}{T_2 - T_1} \quad (31.2)$$

と表すことができる。(31.1)式と伊藤の補題より、

$$d\ln[P(t, T_1)] = \left[ r(t) - \frac{v(t, T_1, \Omega_t)^2}{2} \right] dt + v(t, T_1, \Omega_t) dz(t)$$

および、

$$d\ln[P(t, T_2)] = \left[ r(t) - \frac{v(t, T_2, \Omega_t)^2}{2} \right] dt + v(t, T_2, \Omega_t) dz(t)$$

が成り立つから、

$$df(t, T_1, T_2) = \frac{v(t, T_2, \Omega_t)^2 - v(t, T_1, \Omega_t)^2}{2(T_2 - T_1)} dt$$

---

(注2)  $v(t, t, \Omega_t) = 0$  という条件は、すべての割引債のドリフトは常に有限であるという仮定と同値である。債券のボラティリティが満期でゼロにならないとすると、満期に債券価格が額面に等しくなるためには、ドリフトが無限になる場合がなければならぬ。

$$+ \frac{v(t, T_1, \Omega_t) - v(t, T_2, \Omega_t)}{T_2 - T_1} dz(t) \quad (31.3)$$

が得られる。(31.3)式から,  $f$  に対するリスク中立過程は  $v$  のみに依存していることがわかる。 $v$  が  $r$  と  $P$  に依存している場合には,  $f$  も  $r$  と  $P$  に依存することになる。

(31.3)式で  $T_1 = T$ ,  $T_2 = T + \Delta T$  とおき,  $\Delta T$  をゼロにする極限をとると,  $f(t, T_1, T_2)$  は  $F(t, T)$  に,  $dz(t)$  の係数は  $v_T(t, T, \Omega_t)$  に,  $dt$  の係数は,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial [v(t, T, \Omega_t)^2]}{\partial T} = v(t, T, \Omega_t) v_T(t, T, \Omega_t)$$

になる。ここで,  $v$  の添字は偏微分を表している。これらより,

$$dF(t, T) = v(t, T, \Omega_t) v_T(t, T, \Omega_t) dt - v_T(t, T, \Omega_t) dz(t) \quad (31.4)$$

が得られる。この式から, 関数  $v(t, T, \Omega_t)$  が与えられれば  $F(t, T)$  に対するリスク中立過程が決まる, ということがわかる。

(31.4)式は, 瞬間的なフォワード・レートのドリフトと標準偏差には関係があることを示している。これが HJM の示した重要な結果である。 $v_\tau(t, \tau, \Omega_t)$  を,  $\tau = t$  から  $\tau = T$  まで積分すると,

$$v(t, T, \Omega_t) - v(t, t, \Omega_t) = \int_t^T v_\tau(t, \tau, \Omega_t) d\tau$$

が得られる。 $v(t, t, \Omega_t) = 0$  であるから, この式は,

$$v(t, T, \Omega_t) = \int_t^T v_\tau(t, \tau, \Omega_t) d\tau$$

となる。 $m(t, T, \Omega_t)$  と  $s(t, T, \Omega_t)$  が  $F(t, T)$  の瞬間的なドリフトと標準偏差であるとすると,

$$dF(t, T) = m(t, T, \Omega_t) dt + s(t, T, \Omega_t) dz$$

と書け, (31.4)式より,

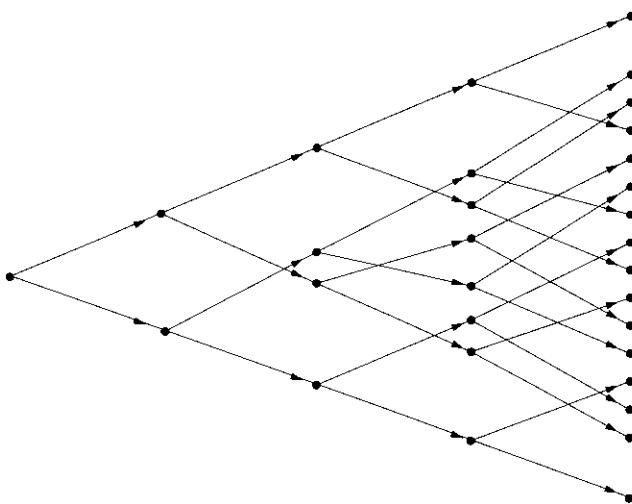
$$m(t, T, \Omega_t) = s(t, T, \Omega_t) \int_t^T s(t, \tau, \Omega_t) d\tau \quad (31.5)$$

が成り立つ。これが HJM の導いた結果である。

一般的な HJM モデルでの短期金利  $r$  に対する確率過程は、マルコフ過程にはならない。したがって、将来の時点  $t$  における  $r$  に対する過程は、時点  $t$  における  $r$  の値だけではなく、現時点から時点  $t$  までの  $r$  の経路にも依存している(注3)。これが一般的な HJM モデルを実装する際の主な問題点で、モンテカルロ・シミュレーションを用いなければならなくなる。その理由は、ツリーがふつう再結合しなくなるので、期間構造の動きをツリーを用いて表現するのは困難となるからである。図31.1のようにモデルを 1 ファクターとし、ツリーを二項ツリーと仮定すると、 $n$  時間ステップ後のノード数は  $2^n$  個になる ( $n=30$  とすると、 $2^n$  は約10億になる)。

(31.4)式の HJM モデルは複雑にみえるが、モデルを応用するほとんどの場合において特定のフォワード・レート  $F(t, T)$  はマルコフになり、再結合するツリーで表現することができる。しかし、すべてのフォワード・レートに対して同一のツリーを用いることはできない。

図31.1 一般的な HJM モデルでの再結合しないツリー



(注3) より詳細については著者の Web サイトのテクニカルノート17を参照。

## 複数のファクターへの拡張

HJM の結果は、複数の独立したファクターが存在する場合へ拡張することができる。

$$dF(t, T) = m(t, T, \Omega_t) dt + \sum_k s_k(t, T, \Omega_t) dz_k$$

と仮定する。同様の分析を行うと、

$$m(t, T, \Omega_t) = \sum_k s_k(t, T, \Omega_t) \int_t^T s_k(t, \tau, \Omega_t) d\tau \quad (31.6)$$

となることがわかる（章末問題31.2を参照）。

## 31.2 LIBOR マーケット・モデル

HJM モデルの短所の一つは、モデルが瞬間的なフォワード・レートを用いて表されており、それらは市場で直接観測できない量である、という点である。もう一つの短所は、活発に取引されている商品の価格にモデルをキャリブレーションするのがむずかしいことである。これらを解決するものとして、Brace, Gatarek と Musiela (BGM) や Jamshidian, さらには Miltersen, Sandmann と Sondermann がそれにかわるモデルを提案した（注4）。そのモデルは LIBOR マーケット・モデル (LMM : LIBOR market model)，あるいは BGM モデルと呼ばれ、トレーダーが実際の取引で使うフォワード・レートを用いて表されている。

## モ テ ル

$t_0=0$ とし、現時点において市場で取引されているキャップのリセット日を  $t_1, t_2, \dots$  とする。米国で最も一般的なキャップは四半期ごとにリセット

(注4) A. Brace, D. Gatarek, and M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, 7, 2 (1997) : 127-55, F. Jamshidian, "LIBOR and Swap Market Models and Measures," *Finance and Stochastics*, 1 (1997) : 293 -330, および K. Miltersen, K. Sandmann, and D. Sondermann, "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with LogNormal Interest Rate," *Journal of Finance*, 52, 1 (March 1997) : 409-30 を参照。

日があり、その場合リセット日は近似的に  $t_1=0.25$ ,  $t_2=0.5$ ,  $t_3=0.75$ などとなる。 $\delta_k=t_{k+1}-t_k$ とし、

$F_k(t)$ : 複利期間を  $\delta_k$ , デイカウントを実日数／実日数として表した、

時点  $t$  における時点  $t_k$  から時点  $t_{k+1}$  までのフォワード・レート

$m(t)$ : 時点  $t$  における次回リセット日に対応する添字；すなわち、

$m(t)$  は  $t \leq t_{m(t)}$  となる最小の整数

$\zeta_k(t)$ : 時点  $t$  における  $F_k(t)$  のボラティリティ

$v_k(t)$ : 時点  $t$  における割引債の価格  $P(t, t_k)$  のボラティリティ

と定義する。

最初は、ファクターが一つのみの場合について考える。27.4節で示したように、 $P(t, t_{k+1})$  に関するフォワード・リスク中立世界で  $F_k(t)$  はマルチングールとなるので、

$$dF_k(t) = \zeta_k(t) F_k(t) dz \quad (31.7)$$

を満たしている。ただし、 $dz$  はウィナー過程である。

実際には、常に次回リセット日を満期とする債券に関してフォワード・リスク中立となる世界で考えると、金利デリバティブの評価が行いやすい場合がある。これをローリング・フォワード・リスク中立世界 (rolling forward risk-neutral world) と呼ぶ(注5)。この世界では、時点  $t_{k+1}$  から時点  $t_k$  への割引は、時点  $t_k$  で観測される満期  $t_{k+1}$  のゼロ・レートを用いて行われる。したがって、時点  $t_k$  から時点  $t_{k+1}$  の間に金利がどのように変化するかは考える必要がなくなる。

時点  $t$  におけるローリング・フォワード・リスク中立世界は、債券価格  $P(t, t_{m(t)})$  に関するフォワード・リスク中立世界である。 $P(t, t_{k+1})$  に関する

(注5) 27.4節の用語を用いると、この世界は「ローリング CD」をニューメレールとする世界に対応している。ローリング CD (譲渡性預金) は、1ドル分の満期  $t_1$  の債券を購入し、時点  $t_1$  での収益を満期  $t_2$  の債券に再投資し、時点  $t_2$  での収益を満期  $t_3$  の債券に再投資する、ということを繰り返す商品である（厳密にいうと、第30章で構築した金利ツリーは、従来のリスク中立世界ではなく、ローリング・フォワード・リスク中立世界におけるツリーである）。ニューメレールは各時間ステップの終わりでロールオーバーされる CD である。

フォワード・リスク中立世界で  $F_k(t)$  が従う過程は(31.7)式で与えられる。27.8節から、ローリング・フォワード・リスク中立世界で  $F_k(t)$  が従う過程は、

$$dF_k(t) = \zeta_k(t) [v_{m(t)}(t) - v_{k+1}(t)] F_k(t) dz + \zeta_k(t) F_k(t) dz \quad (31.8)$$

となることがわかる。フォワード・レートと債券価格との関係は、

$$\frac{P(t, t_i)}{P(t, t_{i+1})} = 1 + \delta_i F_i(t)$$

すなわち、

$$\ln P(t, t_i) - \ln P(t, t_{i+1}) = \ln [1 + \delta_i F_i(t)]$$

で与えられる。伊藤の補題を用いてこの式の左辺と右辺が従う確率過程を計算し、 $dz$  の係数を比較すると、

$$v_i(t) - v_{i+1}(t) = \frac{\delta_i F_i(t) \zeta_i(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} \quad (31.9)$$

が得られる。これを(31.8)式に代入すると、ローリング・フォワード・リスク中立世界で  $F_k(t)$  が従う過程は、

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \zeta_i(t) \zeta_k(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \zeta_k(t) dz \quad (31.10)$$

となる。(31.4)式の HJM の結果は、この式で  $\delta_i$  をゼロに近づけた極限の場合に対応している(章末問題31.7を参照)。

### フォワード・レート・ボラティリティ

モデルを簡単にするために、 $\zeta_k(t)$  を次回リセット日と時点  $t_k$  の間にある金利計算期間の数だけの関数と仮定する。金利計算期間が  $i$  だけあるときの  $\zeta_k(t)$  の値を  $\Lambda_i$  と定義する。そうすると、 $\zeta_k(t) = \Lambda_{k-m(t)}$  は階段関数になる。

$\Lambda_i$  は、(少なくとも理論的には) Black モデルでキャップレットの評価に使われるボラティリティ(すなわち、図28.3のスポット・ボラティリティ)から推定することができる(注6)。 $\sigma_k$  を時点  $t_k$  から時点  $t_{k+1}$  までの期間に対応したキャップレットの Black ボラティリティとする。分散が等しいことから、

$$\sigma_k^2 t_k = \sum_{i=1}^k \Lambda_{k-i}^2 \delta_{i-1} \quad (31.11)$$

が成り立つ。この式を反復計算を用いて解くと、 $\Lambda$  の値が得られる。

【例31.1】

$\sigma_i$  はすべて等しく、最初の三つのキャップレットに対する Black キャップレット・スポット・ボラティリティをそれぞれ 24%, 22%, 20% と仮定する。このとき、 $\Lambda_0 = 24\%$  である。

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 = 2 \times 0.22^2$$

より、 $\Lambda_1$  は 19.80% になる。同様に、

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 = 3 \times 0.20^2$$

より、 $\Lambda_2$  は 15.23% になる。

【例31.2】

表31.1に与えられたキャップレットのボラティリティ  $\sigma_k$  に対するデータについて考える。28.3節で論じたように、こぶの形状がみられる。 $\Lambda$  の値は 2 行目に与えられている。このデータから、 $\Lambda$  のこぶは  $\sigma$  のこぶより顕著になっていることがわかる。

表31.1 ボラティリティ・データ（金利計算期間=1年）

| 年, $k$              | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\sigma_k$ (%)      | 15.50 | 18.25 | 17.91 | 17.74 | 17.27 | 16.79 | 16.30 | 16.01 | 15.76 | 15.54 |
| $\Lambda_{k-1}$ (%) | 15.50 | 20.64 | 17.21 | 17.22 | 15.25 | 14.15 | 12.98 | 13.81 | 13.60 | 13.40 |

## モデルの実装

LIBOR マーケット・モデルはモンテカルロ・シミュレーションを用いて実装することができる。(31.10)式を  $\Lambda_i$  を用いて表すと、

(注 6) 実際には、 $\Lambda$  は後述する最小 2 乗法によるキャリブレーションによって決定される。

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \Lambda_{k-m(t)} dz \quad (31.12)$$

あるいは、

$$d\ln F_k(t) = \left[ \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \Lambda_{i-m(t)} \Lambda_{k-m(t)}}{1 + \delta_i F_i(t)} - \frac{(\Lambda_{k-m(t)})^2}{2} \right] dt + \Lambda_{k-m(t)} dz \quad (31.13)$$

となる。一つの近似として、 $t_j < t < t_{j+1}$ に対しても  $F_i(t) = F_i(t_j)$  と仮定して  $\ln F_k(t)$  のドリフトを計算すると、

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) \exp \left[ \left( \sum_{i=j+1}^k \frac{\delta_i F_i(t_j) \Lambda_{i-j-1} \Lambda_{k-j-1}}{1 + \delta_i F_i(t_j)} - \frac{\Lambda_{k-j-1}^2}{2} \right) \delta_j + \Lambda_{k-j-1} \epsilon \sqrt{\delta_j} \right] \quad (31.14)$$

が得られる。ここで、 $\epsilon$  は平均ゼロ、標準偏差 1 の正規分布から抽出したランダム・サンプルである。

### 複数ファクターへの拡張

LIBOR マーケット・モデルは、複数の独立したファクターを含むように拡張することができる。 $p$  個のファクターがあり、 $q$  番目のファクターに対する  $F_k(t)$  のボラティリティの成分を  $\zeta_{k,q}$  とする。このとき、(31.10)式は、

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t)} = \sum_{i=m(t)}^k \frac{\delta_i F_i(t) \sum_{q=1}^p \zeta_{i,q}(t) \zeta_{k,q}(t)}{1 + \delta_i F_i(t)} dt + \sum_{q=1}^p \zeta_{k,q}(t) dz_q \quad (31.15)$$

となる（章末問題31.11を参照）。次回リセット日とフォワード契約の満期との間に金利計算期間が  $i$  回ある場合のボラティリティの第  $q$  成分の値を  $\lambda_{i,q}$  と定義する。このとき、(31.14)式は、

$$F_k(t_{j+1}) = F_k(t_j) \exp \left[ \left( \sum_{i=j+1}^k \frac{\delta_i F_i(t_j) \sum_{q=1}^p \lambda_{i-j-1,q} \lambda_{k-j-1,q}}{1 + \delta_i F_i(t_j)} - \frac{\sum_{q=1}^p \lambda_{k-j-1,q}^2}{2} \right) \delta_j + \sum_{q=1}^p \lambda_{k-j-1,q} \epsilon_q \sqrt{\delta_j} \right] \quad (31.16)$$

となる。ここで、 $\varepsilon_q$ は平均ゼロ、標準偏差1の正規分布から抽出したランダム・サンプルである。

各金利計算期間でフォワード・レートのドリフトが一定であるという近似を行うことによって、一つのリセット日から次のリセット日へジャンプしながらシミュレーションを行うことができる。すでに述べたように、ローリング・フォワード・リスク中立世界では、一つのリセット日から次のリセット日への割引を行えばよいので、このことは便利である。 $N$ 回の金利計算期間に対してゼロ・カーブをシミュレーションしたいとする。各試行は、時点ゼロにおけるフォワード・レートから始める。それらは  $F_0(0), F_1(0), \dots, F_{N-1}(0)$  で、初期時点のゼロ・カーブから求まる。次に(31.16)式を用いて  $F_1(t_1), F_2(t_1), \dots, F_{N-1}(t_1)$  を計算し、その次に再び(31.16)式を用いて  $F_2(t_2), F_3(t_2), \dots, F_{N-1}(t_2)$  を計算する、ということを  $F_{N-1}(t_{N-1})$  が得られるまで繰り返し行う。時間の経過とともに、ゼロ・カーブの期間は短くなっていくことに注意しよう。たとえば、各金利計算期間は3カ月で、 $N=40$ とする。このとき、シミュレーションは10年のゼロ・カーブで始まり、6年目(時点  $t_{24}$ )にシミュレーションから得られる情報は4年のゼロ・カーブに対するものになる。

(31.16)式を用いたキャップレットの評価とBlackモデルから得られるキャップレットの価格を比較すれば、ドリフトの近似の精度を検証することができる。 $F_k(t_k)$  の値は  $t_k$  から  $t_{k+1}$  までの期間に対する金利の実現値で、時点  $t_{k+1}$  におけるキャップレットのペイオフはこの値を用いて計算することができる。求まったペイオフは、各金利計算期間ごとに時点ゼロまで割り引かれる。キャップレットの価値は、この割引後のペイオフの平均値となる。この種の分析結果をみると、モンテカルロ・シミュレーションによるキャップの価値は Black モデルから得られる値とそれほど変わらないことがわかる。この結果は、金利計算期間の長さを1年にして、シミュレーション回数を非常に大きくした場合でも成り立っている(注7)。このことから、このドリフトの近似はほとんどの場合について無害であることがわかる。

**ラチエット・キャップ、ステイッキー・キャップ、フレキシブル・キャップ**

LIBOR マーケット・モデルを用いて、いくつかの非標準的なキャップを評価することができる。ラチエット・キャップ (ratchet cap) とステイッキー・キャップ (sticky cap) について考える。これらのキャップでは、各キャップレットに対するキャップ・レートを決める規則が定められている。ラチエット・キャップでは、前回リセット日の LIBOR レートにスプレッドを加えたものがキャップ・レートになる。ステイッキー・キャップでは、前回のキャップ・レートを上限とした変動金利にスプレッドを加えたものがキャップ・レートになる。したがって、時点  $t_j$  におけるキャップ・レートを  $K_j$ 、時点  $t_j$  における LIBOR レートを  $R_j$ 、スプレッドを  $s$  とすると、ラチエット・キャップでは  $K_{j+1} = R_j + s$  となり、ステイッキー・キャップでは  $K_{j+1} = \min(R_j, K_j) + s$  となる。

表31.2 と 表31.3 は、1 ファクター、2 ファクター、3 ファクターの LIBOR マーケット・モデルを用いてラチエット・キャップとステイッキー・キャップを評価した結果である。元本は100ドルである。金利は年率5%でフラットと仮定し、キャップレットのボラティリティは表31.1に与えられたものを用いている。金利のリセットは年1回で、スプレッドは25ペース・ポイントである。表31.4 と 表31.5 (次々頁) は、2 ファクターおよび3 ファクター・モデルを用いたときのボラティリティの各成分への分解結果を示したものである。計算結果は、19.7節で述べた負相関変量法を用いて10万回のモンテカルロ・シミュレーションを行って算出したものであり、各価格の標準誤差は約0.001である。

三つ目の非標準的なキャップはフレキシブル・キャップ (flexi cap) である。これは、行使できるキャップレットの回数に制限があるという点を除いては、通常のキャップと同じである。1年ごとに支払のあるフレキシブル・

---

(注7) J. C. Hull and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000) : 46-62 を参照。唯一の例外は、キャップのボラティリティが非常に高い場合である。

表31.2 ラチェット・キャップレットの評価

各キャップレット

のスタート年

| (年) | 1 ファクター | 2 ファクター | 3 ファクター |
|-----|---------|---------|---------|
| 1   | 0.196   | 0.194   | 0.195   |
| 2   | 0.207   | 0.207   | 0.209   |
| 3   | 0.201   | 0.205   | 0.210   |
| 4   | 0.194   | 0.198   | 0.205   |
| 5   | 0.187   | 0.193   | 0.201   |
| 6   | 0.180   | 0.189   | 0.193   |
| 7   | 0.172   | 0.180   | 0.188   |
| 8   | 0.167   | 0.174   | 0.182   |
| 9   | 0.160   | 0.168   | 0.175   |
| 10  | 0.153   | 0.162   | 0.169   |

表31.3 スティッキー・キャップレットの評価

各キャップレット

のスタート年

| (年) | 1 ファクター | 2 ファクター | 3 ファクター |
|-----|---------|---------|---------|
| 1   | 0.196   | 0.194   | 0.195   |
| 2   | 0.336   | 0.334   | 0.336   |
| 3   | 0.412   | 0.413   | 0.418   |
| 4   | 0.458   | 0.462   | 0.472   |
| 5   | 0.484   | 0.492   | 0.506   |
| 6   | 0.498   | 0.512   | 0.524   |
| 7   | 0.502   | 0.520   | 0.533   |
| 8   | 0.501   | 0.523   | 0.537   |
| 9   | 0.497   | 0.523   | 0.537   |
| 10  | 0.488   | 0.519   | 0.534   |

表31.4 2 ファクター・モデルのボラティリティ成分

| 年, $k$                | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\lambda_{k-1,1}$ (%) | 14.10 | 19.52 | 16.78 | 17.11 | 15.25 | 14.06 | 12.65 | 13.06 | 12.36 | 11.63 |
| $\lambda_{k-1,2}$ (%) | -6.45 | -6.70 | -3.84 | -1.96 | 0.00  | 1.61  | 2.89  | 4.48  | 5.65  | 6.65  |
| Total Volatility (%)  | 15.50 | 20.64 | 17.21 | 17.22 | 15.25 | 14.15 | 12.98 | 13.81 | 13.60 | 13.40 |

表31.5 3ファクター・モデルのボラティリティ成分

| 年, $k$                | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\lambda_{k-1,1}$ (%) | 13.65 | 19.28 | 16.72 | 16.98 | 14.85 | 13.95 | 12.61 | 12.90 | 11.97 | 10.97 |
| $\lambda_{k-1,2}$ (%) | -6.62 | -7.02 | -4.06 | -2.06 | 0.00  | 1.69  | 3.06  | 4.70  | 5.81  | 6.66  |
| $\lambda_{k-1,3}$ (%) | 3.19  | 2.25  | 0.00  | -1.98 | -3.47 | -1.63 | 0.00  | 1.51  | 2.80  | 3.84  |
| Total Volatility (%)  | 15.50 | 20.64 | 17.21 | 17.22 | 15.25 | 14.15 | 12.98 | 13.81 | 13.60 | 13.40 |

キャップについて考える。元本は100ドル、期間構造は5%でフラット、キャップのボラティリティは表31.1、表31.4、表31.5で与えられているものとする。また、イン・ザ・マネーのキャップレットが最大5回まで行使できると仮定する。1ファクター、2ファクター、3ファクターのLIBORマーケット・モデルを用いてこの商品の価格を求めるとき、それぞれ3.43, 3.58, 3.61となる（その他のタイプのフレキシブル・キャップについては章末問題31.15を参照）。

プレーン・バニラ・キャップの価格は全体のボラティリティのみに依存し、ファクター数とは無関係である。これは、プレーン・バニラ・キャップレットの価格が一つのフォワード・レートのみの挙動に依存しているからである。これまで説明してきた非標準的な商品のキャップレットの価格は、いくつかの異なるフォワード・レートの同時確率分布に依存しているため、ファクター数によって異なった値になる。

### ヨーロピアン・スワップションの評価

HullとWhiteが示したように、LIBORマーケット・モデルではヨーロピアン・スワップションの評価に対する解析的な近似式を導くことができる（注8）。 $T_0$ をスワップションの満期とし、スワップの支払日を $T_1, T_2, \dots, T_N$ とする。 $\tau = T_{i+1} - T_i$ とおくと、(27.23)式より、時点 $t$ におけるスワップ・レートは、

$$s(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i P(t, T_{i+1})}$$

で与えられる。また、 $1 \leq i \leq N$  に対して、

$$\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_0)} = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{1}{1 + \tau_j G_j(t)}$$

が成り立つ。ただし、 $G_j(t)$  は時点  $t$  における  $T_j$  から  $T_{j+1}$  までの期間に対するフォワード・レートである。これら二つの式を用いて  $s(t)$  と  $G_j(t)$  を関係づけることができる。伊藤の補題を用いると、スワップ・レート  $s(t)$  の分散  $V(t)$  は、

$$V(t) = \sum_{q=1}^p \left( \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_{k,q}(t) G_k(t) \gamma_k(t)}{1 + \tau_k G_k(t)} \right)^2 \quad (31.17)$$

で与えられる（章末問題31.12を参照）。ただし、

$$\gamma_k(t) = \frac{\prod_{j=0}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)]}{\prod_{j=0}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)] - 1} - \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)]}{\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i \prod_{j=i+1}^{N-1} [1 + \tau_j G_j(t)]}$$

であり、 $\beta_{j,q}(t)$  は  $G_j(t)$  の分散の第  $q$  成分である。すべての  $j$  と  $t$  に対して  $G_j(t) = G_j(0)$  とおいて  $V(t)$  を近似する。このとき、スワップのボラティリティは、

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} V(t) dt}$$

すなわち、

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} \sum_{q=1}^p \left[ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tau_k \beta_{k,q}(t) G_k(0) \gamma_k(0)}{1 + \tau_k G_k(0)} \right]^2 dt} \quad (31.18)$$

となり、これを標準的なマーケット・モデルに代入すると、スワップションの価値が得られる。

スワップションの原資産であるスワップの金利計算期間の長さがキャップ

(注 8) J. C. Hull and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000) : 46-62 を参照。他の解析的な近似式が A. Brace, D. Gatarek, and M. Musiela, "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, 7, 2 (1997) : 127-55 および L. Andersen and J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model," *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (March 2000) : 1-32 で提案されている。

の金利計算期間の長さに等しい場合には、 $\beta_{k,q}(t)$ は満期が  $T_k - t$  のキャップ・フォワード・レートのボラティリティの第  $q$  成分となる。この値は表 31.5 のような表から取得できる。

ブローカーが呈示しているヨーロピアン・スワップションの原資産であるスワップの金利計算期間は、ブローカーが呈示しているキャップやフロアの金利計算期間と常に一致しているとは限らない。たとえば米国では、基準となるキャップやフロアは四半期ごとにリセットされるのに対し、基準となるヨーロピアン・スワップションの原資産であるスワップの固定金利サイドは半年ごとにリセットされる。幸いにも、ヨーロピアン・スワップションの評価に関する結果は、スワップの各金利計算期間が典型的なキャップの金利計算期間を  $M$  回含む場合にも拡張することができる。 $\tau_{j,m}$  を  $j$  番目の金利計算期間における  $m$  番目の部分期間であると定義すると、

$$\tau_j = \sum_{m=1}^M \tau_{j,m}$$

となる。 $G_{j,m}(t)$  を金利計算期間  $\tau_{j,m}$  に対するフォワード・レートの時点  $t$  において観測される値と定義する。このとき、

$$1 + \tau_j G_j(t) = \prod_{m=1}^M [1 + \tau_{j,m} G_{j,m}(t)]$$

となるので、(31.18)式を導出した分析を修正して、 $s(t)$  のボラティリティを、 $G_j(t)$  のボラティリティではなく、 $G_{j,m}(t)$  のボラティリティを使って表すことができる。その結果を用いると、スワップのボラティリティとして、

$$\sqrt{\frac{1}{T_0} \int_{t=0}^{T_0} \sum_{q=1}^p \left[ \sum_{k=n}^{N-1} \sum_{m=1}^M \frac{\tau_{k,m} \beta_{k,m,q}(t) G_{k,m}(0) \gamma_k(0)}{1 + \tau_{k,m} G_{k,m}(0)} \right]^2 dt} \quad (31.19)$$

を標準的なマーケット・モデルに代入することで、スワップションの価値が得られることがわかる（章末問題31.13を参照）。ここで、 $\beta_{j,m,q}(t)$  は  $G_{j,m}(t)$  のボラティリティの第  $q$  成分である。これは、時点  $t$  からスワップの金利計算期間  $(T_j, T_{j+1})$  における  $m$  番目の部分期間のはじめまでを満期までの時間とする、キャップ・フォワード・レートのボラティリティの第  $q$  成分である。

スワップションのボラティリティに対する(31.18)式と(31.19)式の表現には、 $G_j(t) = G_j(0)$  と  $G_{j,m}(t) = G_{j,m}(0)$  という近似が含まれている。Hull と

White は、(31.18)式と(31.19)式を用いて計算したヨーロピアン・スワップションの価格とモンテカルロ・シミュレーションを用いて計算した価格を比較し、両者の値が非常に近いものであることを示している。したがって、LIBOR マーケット・モデルのキャリブレーションが終われば、(31.18)式と(31.19)式を用いてヨーロピアン・スワップションを速やかに評価できる。その計算結果をみて、アナリストはキャップに比べてヨーロピアン・スワップションが過大評価、あるいは過小評価されているかを判断することができる。次に簡単に触れるが、これらの結果を、スワップションの市場価格に対してモデルをキャリブレーションする際に利用することもできる。

### モデルのキャリブレーション

LIBOR マーケット・モデルをキャリブレーションするには、 $\Lambda_j$  とそれらの  $\lambda_{j,q}$  への分解方法を決める必要がある。通常、 $\Lambda$  は現時点の市場データから決定され、 $\lambda$  への分解は過去データを用いて決定される。

$\Lambda$  の  $\lambda$  への分解方法は、主成分分析(20.9節を参照)を用いて決めることができる。そのモデルは、

$$\Delta F_j = \sum_{q=1}^M \alpha_{j,q} x_q$$

で与えられる。ここで、 $M$  は全ファクター数、 $\Delta F_j$  は  $j$  番目の金利計算期間に満期を迎えるフォワード契約に対するフォワード・レートの変化、 $\alpha_{j,q}$  は  $j$  番目のフォワード・レートと  $q$  番目のファクターに対するファクター・ローディング、 $x_q$  は  $q$  番目のファクターに対するファクター・スコアであり、

$$\sum_{j=1}^M \alpha_{j,q_1} \alpha_{j,q_2}$$

は  $q_1 = q_2$  のとき 1 に等しく、 $q_1 \neq q_2$  のときゼロに等しい。 $s_q$  を  $q$  番目のファクター・スコアの標準偏差と定義する。LIBOR マーケット・モデルで用いられるファクターの数  $p$  がファクターの総数  $M$  に等しい場合には、 $1 \leq j, q \leq M$  に対して、

$$\lambda_{j,q} = \alpha_{j,q} s_q$$

とおけばよい。 $p < M$  であるときは、 $\lambda_{j,q}$  のスケールを、

$$\Lambda_j = \sqrt{\sum_{q=1}^p \lambda_{j,q}^2}$$

となるように変える必要がある。そのときは、

$$\lambda_{j,q} = \frac{\Lambda_j s_q \alpha_{j,q}}{\sqrt{\sum_{q=1}^p s_q^2 \alpha_{j,q}^2}} \quad (31.20)$$

とすればよい。

(31.11)式は、キャップレットの価格と整合的な  $\Lambda$  を決める一つの方法を与えていている。実際には、この方法を用いると激しく揺れ動く  $\Lambda$  が得られることがあるため、ふつうこの方法は用いられない(注9)。また、LIBOR マーケット・モデルはキャップレットの価格と整合的につくられたモデルであるが、このモデルをヨーロピアン・スワップションにキャリブレーションしたいと考えるアナリストもいる。一般的に用いられるキャリブレーション方法は、30.8節で 1 ファクター・モデルに対して説明したものと同様の方法である。 $U_i$ を  $i$  番目のキャリブレーション対象商品の市場価格とし、 $V_i$ をそのモデルによる価格とする。このとき、

$$\sum_i (U_i - V_i)^2 + P$$

を最小化するように  $\Lambda$  を選択する。ここで、 $P$  は  $\Lambda$  がよい挙動をするように選ばれたペナルティ関数である。30.8節と同様に、 $P$  は、

$$P = \sum_i w_{1,i} (\Lambda_{i+1} - \Lambda_i)^2 + \sum_i w_{2,i} (\Lambda_{i+1} + \Lambda_{i-1} - 2\Lambda_i)^2$$

という形で与えられる。キャリブレーション対象商品にヨーロピアン・スワップションが含まれるときには、(31.18)式と(31.19)の公式を用いれば、Levenberg-Marquardt 法を使った最小化が可能になる。また、(31.20)式を用いて  $\Lambda$  から  $\lambda$  を決めることができる。

## ボラティリティ・スキー

プローカーは、アット・ザ・マネーのキャップだけではなく、アット・ザ・マネーでないキャップに対してもボラティリティを表示している。いくつかの市場では、ボラティリティ・スキーが観測されている。すなわち、

(注9) 展示されているキャップと整合的な  $\Lambda$  が存在しない場合もある。

キャップやフロアに対して呈示されている (Black) ボラティリティは、行使価格の減少関数になっている。これについては、CEV モデルで扱うことができる (CEV モデルの株式への応用については26.1節を参照)。モデルは、

$$dF_i(t) = \cdots + \sum_{q=1}^p \zeta_{t,q}(t) F_i(t)^{\alpha} dz_q \quad (31.21)$$

で与えられる。ここで  $\alpha$  は定数 ( $0 < \alpha < 1$ ) である。このモデルは、対数正規モデルと非常に類似した方法で扱えることがわかる。キャップとフロアは、累積非心カイ 2 乗分布を用いて解析的に評価することができる。また、ヨーロピアン・スワップションの価格は、上で与えたのと同様の解析的な近似式で求めることができる(注10)。

### バミューダン・スワップション

よく取引される金利デリバティブにバミューダン・スワップションがある。これは、原資産であるスワップの一部もしくはすべての支払日に行使が可能なスワップションである。バミューダン・スワップションを LIBOR マーケット・モデルで評価するのは困難である。その理由は、LIBOR マーケット・モデルではモンテカルロ・シミュレーションを用いることになり、モンテカルロ・シミュレーションでは期限前行使の判断を評価するのがむずかしいからである。幸いなことに、26.8節で説明した手続を用いることができる。Longstaff と Schwartz は、ファクター数が非常に多い場合で最小 2 乗法を適用している。そこでは、特定の支払日での行使しない場合の価値が、ファクターの値の多項式関数になっていると仮定されている(注11)。Andersen は最適期限前行使境界パラメータ化法が使えることを示した。彼は期限前行使境界パラメータ化法について多くの方法を試し、期限前行使判断

(注10) 詳細については、L. Andersen and J. Andreasen, "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model," *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (2000) : 1-32 および J. C. Hull and A. White, "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000) : 46-62 を参照。

(注11) F. A. Longstaff and E.S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (2001) : 113-47 を参照。

がオプションの本源価値のみに依存していると仮定したときに、よい結果が得られることを示した(注12)。ほとんどトレーダーは、第30章で論じた1ファクター無裁定モデルを用いてバミューダン・スワップションを評価している。しかし、1ファクター・モデルを用いて評価したバミューダン・スワップションの価格の正確さについては、論争的となっている(注13)。

### 31.3 政府系機関モーゲージ証券

本章で紹介したモデルは、米国の政府系機関モーゲージ証券 (agency MBS : agency mortgage-backed security) 市場にも適用できる。

政府系機関 MBS は、政府抵当金庫 (GNMA : Government National Mortgage Association) や連邦抵当金庫 (FNMA : Federal National Mortgage Association) のような政府系機関が支払を保証しており、投資家がデフォルトから保護されている点を除いて、23.7節で考察した ABS と同様の証券である。したがって、政府系機関 MBS は政府の発行する通常の固定利付債と同じようなものに思われるかもしれない。実際のところは、政府系機関 MBS への投資と通常の固定利付債への投資には決定的な違いがある。この違いは、政府系機関 MBS プール内の住宅ローンには期限前返済特約がついていることからくる。この期限前返済特約は、住宅ローンの借手にとってかなりの価値がある。米国では、住宅ローンは一般的に期間が25年で、いつでも期限前返済が可能である。このことは、住宅ローンの借手は住宅ローンを額面で貸手に返済できる満期25年のアメリカン・オプションを保有している、ということを意味している。

---

(注12) L. Andersen, "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model," *Journal of Computational Finance*, 3, 2 (Winter 2000) : 5-32 を参照。

(注13) 対立している観点については、"Factor Dependence of Bermudan Swaptions: Fact or Fiction," by L. Andersen and J. Andreasen および "Throwing Away a Billion Dollars: The Cost of Suboptimal Exercise Strategies in the Swaption Market," by F.A. Longstaff, P. Santa-Clara, and E.S. Schwartz を参照。ともに *Journal of Financial Economics*, 62, 1 (October 2001) に発表されている。

住宅ローンの期限前返済はさまざまな理由によって行われる。金利が低下して、住宅ローンの借手が低金利で借換えを行うことに対する場合もある。単に住宅が売却されたために住宅ローンが返済されるという場合もある。MBS の評価で重要な要素となるのは、いわゆる期限前返済関数 (prepayment function) を決めることがある。これは、住宅ローンのプールに対して時点  $t$  で発生する期限前返済の期待値を、時点  $t$  におけるイールドカーブとその他の関連する変数を用いて表した関数である。

期限前返済関数は、個々の住宅ローンに対して実際に発生する期限前返済の予測としては、非常に信頼性の低いものである。多くの同じような住宅ローンが同じプールに集められているときには、「大数の法則」が働いて、期限前返済は過去データの分析からより正確に予測できるようになる。先に述べたように、期限前返済は必ずしも純粋に金利のことだけを考えて行われるものではない。しかし、金利が高いときより低いときのほうが、期限前返済が行われる可能性が高い、という傾向がみられる。したがって、投資家は期限前返済のオプションを売却した見合いとして、他の固定利付証券よりも高い金利を MBS に対して要求することになる。

## CMO

最も単純な政府系機関 MBS は、パススルー証券 (pass-through) と呼ばれるものである。すべての投資家は同一のリターンを得て、同一の期限前返済リスクを負っている。すべてのモーゲージ証券がそのような仕組みのものではない。CMO (collateralized mortgage obligation) では、投資家はいくつかのクラスに分けられ、元本の期限前返済額を各クラスにどのように振り分けるかを決めるルールが用意されている。ABS がいくつかの異なるクレジット・リスクをもつ証券のクラスをつくり出していた方法 (23.7節を参照) と同じ方法で、CMO はいくつかの異なる期限前返済リスクをもつ証券のクラスをつくり出している。

CMO の例として、投資家が三つのクラス：クラス A, クラス B, クラス C に分割されている MBS について考えよう。すべての元本返済 (定期返済

と期限前返済の両方)は、クラスAの投資家が完全に払戻しになるまで、このクラスの投資家に振り向けられる。その次は、元本返済はクラスBの投資家が完全に払戻しになるまで、このクラスの投資家に振り向けられる。最後に、元本返済はクラスCの投資家に振り向けられる。この場合には、ほとんどの期限前返済リスクをクラスAの投資家がもつことになる。クラスAの証券の期待残存期間はクラスBの証券の期待残存期間より短く、クラスBの証券の期待残存期間はクラスCの証券の期待残存期間より短い。

このような仕組みをつくる目的は、機関投資家にとって単純なパス・スルーMBSよりも魅力的な証券のクラスをつくり出すためである。各クラスが負う期限前返済リスクは、それぞれのクラスのパー価格に依存している。たとえば、クラスA、クラスB、クラスCのパー価格がそれぞれ400、300、100の場合には、クラスCのもつ期限前返済リスクはほとんどない。それぞれのパー価格が100、200、500の場合には、クラスCのもつ期限前返済リスクはもっと大きくなる。

モーゲージ証券の組成者は、ここで説明してきた仕組みよりももっとエキゾチックな仕組みを多くつくり出してきた。ビジネス寸見31.1にその例を紹介する。

### ビジネス寸見31.1 IOとPO

いわゆるストリップMBSでは、元本支払と利払いが分離されている。すべての元本支払は、プリンシパル・オンリー(PO)と呼ばれる一つのクラスの証券に振り分けられる。すべての利払いは、インタレスト・オンリー(IO)と呼ばれるもう一つのクラスの証券に振り分けられる。IOもPOもリスクのある投資証券である。期限前返済率が高くなればPOの価値は上がり、IOの価値は下がる。期限前返済率が下がれば、その逆のことが起こる。POでは、元本の固定額が投資家に償還されるが、その時期は不確定である。プールの期限前返済率が高くなる

と、元本受取時期が早まる（これは、POの保有者にとってはいいことである）。プールの期限前返済率が小さくなると、元本の償還が遅れるのでPOの利回りは低下する。IOの場合には、投資家が受け取るキャッシュフローの合計額が不確定である。期限前返済率が高くなると投資家の受け取るキャッシュフローの合計額は少なくなり、低くなるとその逆になる。

## モーゲージ証券の評価

MBSは、通常モンテカルロ・シミュレーションを用いて評価される。HJMモデルやLIBORマーケット・モデルを用いて、MBSの残存期間中における月次の金利変動をシミュレーションすることができる。一つのシミュレーションの試行で行われることを考えよう。それぞれの月で、現時点のイールドカーブと過去のイールドカーブの動きから、期待期限前返済額を計算する。これらの期待期限前返済額からMBSの保有者に対する期待キャッシュフローが決まり、そのキャッシュフローを時点ゼロまで割り引くと、MBSに対するサンプル価値が得られる。多くのシミュレーションの試行を繰り返して得られたサンプル価値の平均が、MBSの価値の推定値となる。

## オプション調整後スプレッド

モーゲージ証券と他のオプション内包型債券の理論価格の計算に加えて、トレーダーはオプション調整後スプレッド(OAS: option-adjusted spread)として知られるものを計算している。これは、すべてのオプションを考慮したうえで、商品のイールドの米国長期国債イールドに対するスプレッドを測る尺度である。

任意の期間構造モデルでは、初期時点のゼロクーポン・イールドカーブを入力する必要がある。通常は、このカーブとしてLIBORゼロ・カーブが用いられている。しかし、商品に対するOASを計算するときには、まず米国国債のゼロクーポン・カーブを用いて商品の価格を計算する。モデルによる

価格と市場価格を比較し、必要があれば国債カーブをパラレル・シフトさせて再計算を繰り返し、モデルによる価格と市場価格とが等しくなるような国債カーブに対するパラレル・シフト幅を求める。このパラレル・シフト幅がOASである。

計算手順を、例を用いて説明する。市場価格を102.00ドル、国債カーブを用いて計算した価格を103.27ドルとする。最初の試行として、国債ゼロ・カーブを60ベーシス・ポイントだけパラレル・シフトしてみることにしたとする。その結果、商品の価格は101.20ドルになったとする。これは市場価格の102.00ドルよりも低いので、モデルによる価格が市場価格に等しくなるパラレル・シフト幅は、0と60ベーシス・ポイントの間のどこかにあることがわかる。線形補間を用いて、次の試行に用いるシフト幅を計算すると、

$$60 \times \frac{103.27 - 102.00}{103.27 - 101.20} = 36.81$$

すなわち36.81ベーシス・ポイントになる。これを用いて商品の価格を計算すると、101.95ドルになったとする。これより、OASは36.81ベーシス・ポイントより若干小さいということがわかる。線形補間を行うと、次のシフト幅は、

$$36.81 \times \frac{103.27 - 102.00}{103.27 - 101.95} = 35.41$$

すなわち35.41ベーシス・ポイントになる。このような計算を繰り返して、OASを求める。

## 要約

HJM モデルおよび LMM モデルでは、ユーザーはボラティリティの期間構造を完全に自由に選んで金利デリバティブの評価を行うことができる。LMM モデルには、HJM モデルと比べて二つの重要な長所がある。一つ目

は、モデルが瞬間的なフォワード・レートではなく、キャップの価格を決めるフォワード・レートを用いて表されている、という点である。二つ目は、キャップやヨーロピアン・スワップションの価格へのキャリブレーションが比較的容易である、という点である。HJM モデルと LMM モデルには、再結合するツリーを用いて表すことができない、という短所がある。このため、これらのモデルはモンテカルロ・シミュレーションを用いて実装されることになる。

米国における政府系機関モーゲージ証券市場は、CMO, IO, PO などの多くのエキゾチックな金利デリバティブを生み出してきた。これらの商品は、住宅ローン・プールの期限前返済に依存したキャッシュフローをもっている。それらの期限前返済は、特に金利水準に依存している。モーゲージ証券は経路依存性が非常に高い商品なので、通常モンテカルロ・シミュレーションを用いて評価が行われる。したがって、これらの商品は HJM モデルや LMM モデルを適用する対象として理想的である。

## 参考文献

- Amin, K., and A. Morton. "Implied Volatility Functions in Arbitrage-Free Term Structure Models," *Journal of Financial Economics*, 35 (1994) : 141-80.
- Andersen, L. "A Simple Approach to the Pricing of Bermudan Swaptions in the Multifactor LIBOR Market Model," *The Journal of Computational Finance*, 3, 2 (Winter 2000) : 5-32.
- L. Andersen and J. Andreasen. "Volatility Skews and Extensions of the LIBOR Market Model," *Applied Mathematical Finance*, 7, 1 (March 2000) : 1-32.
- Brace, A., D. Gatarek, and M. Musiela. "The Market Model of Interest Rate Dynamics," *Mathematical Finance*, 7, 2 (1997) : 127-55.
- Buhler, W., M. Ultrig-Homberg, U. Walter, and T. Weber. "An Empirical Comparison of Forward and Spot-Rate Models for Valuing Interest Rate Options," *Journal of Finance*, 54, 1 (February 1999) : 269-305.

- Carverhill, A. "When is the Short Rate Markovian," *Mathematical Finance*, 4 (1994) : 305-12.
- Cheyette, O. "Term Structure Dynamics and Mortgage Valuation," *Journal of Fixed Income*, (March 1992) : 28-41.
- Duffie, D., and R. Kan. "A Yield-Factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, 6, 4 (1996) : 379-406.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A Discrete Time Approximation," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 4 (December 1990) : 419-40.
- Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton. "Bond Pricing and the Term Structure of the Interest Rates : A New Methodology," *Econometrica*, 60, 1 (1992) : 77-105.
- Hull, J., and A. White. "Forward Rate Volatilities, Swap Rate Volatilities, and the Implementation of the LIBOR Market Model," *Journal of Fixed Income*, 10, 2 (September 2000) : 46-62.
- Inui, K., and M. Kijima. "A Markovian Framework in Multifactor Heath, Jarrow, and Morton Models," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, 3 (September 1998) : 423-40.
- Jamshidian, F. "LIBOR and Swap Market Models and Measures," *Finance and Stochastics*, 1 (1997) : 293-330.
- Jarrow, R. A. *Modeling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, 2nd edn. New York : McGraw-Hill, 2002.
- Jarrow, R. A., and S.M. Turnbull. "Delta, Gamma, and Bucket Hedging of Interest Rate Derivatives," *Applied Mathematical Finance*, 1 (1994) : 21-48.
- Jeffrey, A. "Single Factor Heath-Jarrow-Morton Term Structure Models Based on Markov Spot Interest Rate Dynamics," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30 (1995) : 619-42.
- Miltersen, K., K. Sandmann, and D. Sondermann. "Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Lognormal Interest Rates," *Journal of Finance*, 52, 1 (March 1997) : 409-30.
- Rebonato, R. *Modern Pricing of Interest Rate Derivatives : The LIBOR Market Model and Beyond*. Princeton University Press, 2002.
- Ritchken, P., and L. Sankarasubramanian. "Volatility Structures of Forward Rates and the Dynamics of the Term Structure," *Mathematical Finance*, 5 (1995) : 55-72.

## 章末問題

- 31.1** 短期金利に対するマルコフモデルと非マルコフモデルの違いを説明せよ。
- 31.2** (31.6)式に与えられている、マルチファクターHJM モデルにおけるフォワード・レートのドリフトとボラティリティとの関係を証明せよ。
- 31.3** 「HJM モデルのフォワード・レートのボラティリティ  $s(t, T)$  が定数のとき、HJM モデルは Ho-Lee モデルになる」。これが正しいことを、HJM モデルから得られる債券価格に対する確率過程が、第30章の Ho-Lee モデルと整合性がとれていることを示すことによって証明せよ。
- 31.4** 「HJM モデルのフォワード・レートのボラティリティ  $s(t, T)$  が  $\sigma e^{-\alpha(T-t)}$  のとき、HJM モデルは Hull-White モデルになる」。これが正しいことを、HJM モデルから得られる債券価格に対する確率過程が、第30章の Hull-White モデルと整合性がとれていることを示すことによって証明せよ。
- 31.5** HJM モデルに対して LMM モデルがすぐれている点を述べよ。
- 31.6** ファクター数が増えるにつれて、ラчетett・キャップの価値が増加する理由を直感的に説明せよ。
- 31.7**  $\delta_i$  をゼロに近づけるとき、(31.10)式が(31.4)式になることを示せ。
- 31.8** スティッキー・キャップのほうが同じ条件のラчетett・キャップよりも高価になる理由を説明せよ。
- 31.9** IO と PO では、期限前返済率に対する感応度が逆になる理由を説明せよ。
- 31.10** 「オプション調整後スプレッドは債券のイールドと類似のものである」。この主張について説明せよ。
- 31.11** (31.15)式を証明せよ。
- 31.12** (31.17)式で与えられる、スワップ・レートの分散  $V(T)$  に対する

公式を証明せよ。

- 31.13** (31.19)式を証明せよ。

## 宿題

- 31.14** 年払いキャップにおいて、1年，2年，3年，および5年満期のキャップレットに対するBlackボラティリティがそれぞれ18%，20%，22%，および20%であるとする。満期までの期間が(a)0年から1年まで，(b)1年から2年まで，(c)2年から3年まで，(d)3年から5年までのとき，LIBORマーケット・モデルにおける期間1年のフォワード・レートのボラティリティを推定せよ。ただし，ゼロ・カーブは年率5%（1年複利）でフラットであると仮定する。また，DerivaGemソフトウェアを用いて，2年，3年，4年，5年，6年キャップに対するフラット・ボラティリティを推定せよ。

- 31.15** 31.2節で考察したフレキシブル・キャップでは，保有者は最初の $N$ 個のイン・ザ・マネーのキャップレットを行使する義務がある。その後は，さらにキャップレットを行使することはできない（例では $N=5$ としていた）。フレキシブル・キャップには，次の二つの別の方  
法で定義されるものがある。

- (a) 保有者はどのキャップレットを行使するか任意に選択できるが，行使できるキャップレットの総数には $N$ という制限がある。
- (b) 保有者がキャップレットの行使を一度選択したら，それ以降のイン・ザ・マネーのキャップレットは最大 $N$ 個まで行使しなければならない。

これらのフレキシブル・キャップを評価するときの問題点について議論せよ。三つのタイプのフレキシブル・キャップのうち，最も高くなると思われるのはどれか。また，最も安くなると思われるものはどれか。

## 第32章

# スワップ再訪

スワップは、店頭デリバティブ市場を成功に導いてきた最も重要な商品である。リスク管理を利用するうえで、きわめて柔軟性の高い商品であることが実証されている。現在取引されている契約の多様性と毎年の取引量を考えると、スワップはおそらく金融市場でこれまで最も成功した革新の一つである。

第7章では、プレーン・バニラ・スワップの評価方法について論じた。標準的な方法は、簡単にいうと、「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定せよ」というものである。その手順は以下のとおりである。

1. 将来における LIBOR レートは、現時点での LIBOR／スワップ・ゼロ・カーブから計算されるフォワード・レートに等しいと仮定して、スワップのネット・キャッシュフローを計算する。
2. そのネット・キャッシュフローを LIBOR／スワップ・ゼロ・カーブ

プで現在価値に割り引き、得られた値をスワップの価値とする。

本章では、さまざまな非標準的なスワップについて説明する。そのうちいくつかは、「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定する」方法を用いて評価できる。第29章で紹介したコンベキシティ調整、タイミング調整、およびクオント調整の適用が必要となるものもある。さらに、第28章、第30章、および第31章で述べた手続を用いて評価しなければならない、オプションを内包しているものもある。

## 32.1 バニラ取引の変形

金利スワップには、第7章で説明したプレーン・バニラに比較的小さな変形を伴ったものも多い。たとえば、時間とともにあらかじめ決められた形で想定元本が変化するスワップもある。想定元本が時間の増加関数になっているスワップは、ステップ・アップ・スワップ (step-up swap) と呼ばれる。また、想定元本が時間の減少関数になっているスワップは、アモチ・スワップ (amortizing swap) と呼ばれる。ステップ・アップ・スワップは、建設会社が特定のプロジェクトのために資金調達した変動金利での増額していく借入れを、固定金利での調達に交換したいときに利用できる。アモチ・スワップは、早期返済スケジュール付きの固定金利での借入れを行っている企業が、その借入れを変動金利での借入れに交換したいときに利用できる。

想定元本がスワップの両サイドで異なる場合もある。また、支払回数が異なる場合もある。そのようなスワップの例として、ビジネス寸見32.1は、変動サイドの想定元本が1億2,000万ドルで固定サイドの想定元本が1億ドルである、マイクロソフトとゴールドマン・サックスとの仮想的なスワップ取引を示したものである。変動サイドの支払は毎月行われ、固定サイドの支払は6カ月ごとに行われる。基本的なプレーン・バニラ取引のこの種の変形に対しても、評価方法は影響を受けない。依然として、「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定する」方法を用いることができる。

スワップの参照変動金利は、必ずしもLIBORではない。たとえば、コ

## ビジネス寸見32.1 非標準的なスワップの仮想的な取引確認書

|                 |                                      |
|-----------------|--------------------------------------|
| 取引日：            | 2007年1月5日                            |
| 取引開始日：          | 2007年1月11日                           |
| 営業日基準（全日付）：     | 翌営業日                                 |
| 休日指定都市：         | 米国                                   |
| 満期日：            | 2012年1月11日                           |
| 固定サイド           |                                      |
| 固定金利ペイヤー：       | マイクロソフト                              |
| 固定金利想定元本：       | 1億ドル                                 |
| 固定金利：           | 年率6%                                 |
| デイカウント・コンベンション： | 実日数/365                              |
| 固定金利支払日：        | 2007年7月11日より2012年1月11日までの7月11日と1月11日 |
| 変動サイド           |                                      |
| 変動金利ペイヤー：       | ゴールドマン・サックス                          |
| 変動金利想定元本：       | 1億2,000万ドル                           |
| 変動金利：           | 1カ月ドルLIBOR                           |
| デイカウント・コンベンション： | 実日数/360                              |
| 変動金利支払日：        | 2007年7月11日より2012年1月11日までの毎月11日       |

マーシャルペーパー(CP)・レートが使われることもある。ペーシス・スワップ(basis swap)とは、ある参照変動金利を用いて計算されたキャッシュフローと、別の参照変動金利を用いて計算されたキャッシュフローを交換するものである。たとえば、同じ1億ドルの元本に対して、3カ月物CPレートに10ペーシス・ポイントを加えたものと、3カ月物LIBORを交換す

るスワップなどがある。ベース・スワップは、異なる変動金利に依存する資産と負債を保有する金融機関が、リスク管理の目的で利用することもある。

参照変動金利がLIBORでないスワップも、「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定する」方法を用いて評価することができる。ただし、フォワード・レートが実現するという仮定のもとで将来のキャッシュフローを計算するためには、LIBOR以外のゼロ・カーブも必要となる。求められたキャッシュフローの割引はLIBORで行う。

## 32.2 コンパウンド・スワップ

もう一つのプレーン・バニラ・スワップを変形したものに、コンパウンド・スワップ (compounding swap) がある。ビジネス寸見32.2は、コンパウンド・スワップの仮想的な取引確認書である。この例では、変動金利支払と固定金利支払の両方に対して1回の支払日しかなく、それはスワップの満期日になっている。変動金利は、LIBORに20ベーシス・ポイントを加えたものである。支払が行われるかわりに、金利はスワップの満期までLIBOR+10ベーシス・ポイントで複利されていく。固定金利は6%である。この利子も、支払が行われるかわりに、固定金利6.3%でスワップの満期まで複利されていく。

ビジネス寸見32.2のようなコンパウンド・スワップは、「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定する」方法を用いて評価することができる。スワップの固定サイドは、満期における支払額が確定しているので簡単に扱える。各変動金利が対応するフォワード・レートに等しいとした場合の価値と変動金利キャッシュフローを交換する、一連の金利先渡契約(FRA)を考えることで、変動サイドも「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定する」方法を用いて評価できることがわかる(注1)。

---

(注1) 詳細については著者のWebサイトのテクニカルノート18を参照されたい。

## ビジネス寸見32.2 コンパウンド・スワップの仮想的な取引確認書

|                 |                                      |
|-----------------|--------------------------------------|
| 取引日：            | 2007年1月5日                            |
| 取引開始日：          | 2007年1月11日                           |
| 営業日基準（全日付）：     | 翌営業日                                 |
| 休日指定都市：         | 米国                                   |
| 満期日：            | 2012年1月11日                           |
| 固定サイド           |                                      |
| 固定金利ペイヤー：       | マイクロソフト                              |
| 固定金利想定元本：       | 1億ドル                                 |
| 固定金利：           | 年率6%                                 |
| デイカウント・コンベンション： | 実日数/365                              |
| 固定金利支払日：        | 2012年1月11日                           |
| 固定金利複利付利率：      | 6.3%                                 |
| 固定金利複利付利日：      | 2007年7月11日より2011年7月11日までの7月11日と1月11日 |
| 変動サイド           |                                      |
| 変動金利ペイヤー：       | ゴールドマン・サックス                          |
| 変動金利想定元本：       | 1億ドル                                 |
| 変動金利：           | 6カ月ドルLIBOR+20ペース・ポイント                |
| デイカウント・コンベンション： | 実日数/360                              |
| 変動金利支払日：        | 2012年1月11日                           |
| 変動金利複利付利率：      | LIBOR+10ペース・ポイント                     |
| 変動金利複利付利日：      | 2007年7月11日より2011年7月11日までの7月11日と1月11日 |

【例32.1】

年1回リセットされる、満期3年のコンパウンド・スワップについて考える。

固定金利を支払い、変動金利を受け取るとする。固定金利は4%で、変動金利は12カ月LIBORである。固定サイドは3.9%で複利され、変動サイドは12カ月LIBOR-20ペース・ポイントで複利される。LIBORゼロ・カーブは1年複利で5%フラットであり、想定元本は100万ドルである。

固定サイドには、最初の年の終わりに400万ドルの利子が発生する。これは、2年目の終わりには $4,000,000 \times 1.039 = 4,156,000$ ドルになる。2回目の利子400万ドルが2年目の終わりに加わり、複利された合計金額は8,156,000ドルとなる。これは、3年目の終わりには $8,156,000 \times 1.039 = 8,474,000$ ドルになり、それに3回目の利子400万ドルが加わる。したがって、3年目の終わりにおけるスワップの固定サイドのキャッシュフローは12,474,000ドルになる。

変動金利サイドでは、将来の金利は対応するフォワードLIBORレートに等しいと仮定する。与えられたLIBORゼロ・カーブでは、将来の金利はすべて1年複利で5%であると仮定されている。最初の年の終わりに計算される利子は500万ドルになる。これが4.8% (LIBOR-20ペース・ポイント) で複利されると、2年目の終わりには $5,000,000 \times 1.048 = 5,240,000$ ドルとなる。これに利子を加えると、複利された合計金額は10,240,000ドルとなる。これが3年目の終わりまで複利されると、 $10,240,000 \times 1.048 = 10,731,000$ ドルとなる。最後の利子を加えると、15,731,000ドルになる。

以上より、スワップは3年目の終わりの受取金額が15,731,000ドル、支払金額が12,474,000ドルとして評価できる。したがって、スワップの価値は、

$$\frac{15.731 - 12.474}{1.05^3} = 2.814$$

すなわち2,814,000ドルとなる（この計算ではデイカウントは無視している）。

### 32.3 通貨スワップ

通貨スワップについては第7章で紹介した。この取引を行うことによって、ある通貨での金利エクスポージャーを別の通貨での金利エクスポージャーと交換することができる。通常それぞれの通貨に対して元本が定められている。7.8節で説明したように、それらの元本はスワップの初期時点と満期時点の両方で交換される。

米ドル（USD）と英ポンド（GBP）を交換する通貨スワップについて考えよう。固定－固定の通貨スワップでは、各通貨に対して固定金利が定められている。片サイドの支払額は米ドルの元本に米ドルの固定金利を適用することで求まり、もう片サイドの支払額は英ポンドの元本に英ポンドの固定金利を適用することで求まる。この種の通貨スワップの評価については、7.9節で論じた。

もう一つのよく取引されている通貨スワップに、変動－変動の通貨スワップがある。この通貨スワップでは、片サイドの支払額は米ドルの元本に米ドルLIBOR（スプレッドが加えられることもある）を適用することで決まり、もう片サイドの支払額は英ポンドの元本に英ポンドLIBOR（スプレッドが加えられることもある）を適用することで決まる。三つ目の種類のスワップとして、一つの通貨の変動金利ともう一つの通貨の固定金利を交換する、クロス・カレンシー金利スワップがある。

変動－変動の通貨スワップとクロス・カレンシー金利スワップも、「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定する」方法を用いて評価することができる。各通貨の将来のLIBORレートを現時点のフォワード・レートに等しいと仮定することによって、各通貨のキャッシュフローを決めることができる。求まった米ドルのキャッシュフローは米ドルLIBORゼロ・

レートで割り引き、英ポンドのキャッシュフローは英ポンド LIBOR ゼロ・レートで割り引く。その後で、現時点の為替レートを用いてこれら二つの現在価値を共通通貨での価値に直す。

市場の現実を反映させるために、この手順に調整を加えたものが用いられることがある。理論的には、新規の変動一変動の通貨スワップは、一つの通貨の LIBOR ともう一つの通貨の LIBOR が（スプレッドなしで）交換されるべきである。しかし実際には、マクロ経済の影響によってスプレッドが発生する。金融機関はこのことを考慮して、割引率の調整を行うことが多い。たとえば、すべての満期に対する新規の変動一変動の通貨スワップが、市場では米ドル LIBOR と日本円 LIBOR-20ベーシス・ポイントを交換する取引として行われているとする。米国の金融機関は米ドルのキャッシュフローを米ドル LIBOR で割り引き、円のキャッシュフローを円 LIBOR-20ベーシス・ポイントで割り引くことで、この取引を評価するだろう（注2）。また、円と米ドルのキャッシュフローを伴うすべてのスワップに対して、同じ方法を用いて評価するだろう。

## 32.4 より複雑なスワップ

次に、単純な「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定する」方法では評価できない、いくつかのスワップについて考えよう。それらの商品は、実際のフォワード・レートではなく、調整されたフォワード・レートが実現すると仮定して評価される。

### アリアー・スワップ

プレーン・バニラ金利スワップは、支払日に観測される変動金利が次の支払日に支払われる仕組みになっている。ときおり取引されているもう一つの

---

(注2) この調整はアド・ホックなものである。しかし、これを行わないと、トレーダーが円／米ドルの変動一変動の通貨スワップを新規に取引するたびに、その瞬間に損益が発生することになる。

商品に、アリアー・スワップ (LIBOR-in-arrears swap) という商品がある。この商品では、支払日に観測された変動金利がその支払日に支払われる。

スワップのリセット日を  $t_i$  ( $i=0, 1, \dots, n$ ) とし、 $\tau_i = t_{i+1} - t_i$  とおく。 $R_i$  を  $t_i$  から  $t_{i+1}$  までの期間に対する LIBOR レートとし、 $F_i$  を  $R_i$  のフォワード・レート、 $\sigma_i$  をこのフォワード・レートのボラティリティとする ( $\sigma_i$  の値は一般的にキャップレットの価格から求められる)。アリアー・スワップでは、時点  $t_i$  における変動サイドの支払は、 $R_{i-1}$  ではなく、 $R_i$ に基づいて行われる。29.1節で説明したように、この支払を評価するときには、フォワード・レートに対してコンベキシティ調整を行う必要がある。このとき、支払われるフォワード・レートは、 $F_i$ ではなく、

$$F_i + \frac{F_i^2 \sigma_i^2 \tau_i t_i}{1 + F_i \tau_i} \quad (32.1)$$

であると仮定して評価されることになる。

### 【例32.2】

想定元本が1億ドルのアリアー・スワップについて考える。年1回、固定金利5%を受け取り、LIBORを支払うとする。金利は1年目、2年目、3年目、4年目、および5年目の終わりに交換される。イールドカーブは年率5%（1年複利）でフラットであり、すべてのキャップレットのボラティリティは年率22%であるとする。

各変動利払いに対するフォワード・レートは5%である。このスワップがアリアー・スワップではなく通常のスワップである場合には、（デイカウント・コンベンションなどを無視すると）スワップの価値はちょうどゼロである。いまの場合はアリアー・スワップなので、コンベキシティ調整を行う必要がある。(32.1)式において、すべての  $i$  に対して、 $F_i = 0.05$ 、 $\sigma_i = 0.22$ 、 $\tau_i = 1$ となる。コンベキシティ調整の結果、時点  $t_i$  で仮定されるレートは0.05から、

$$0.05 + \frac{0.05^2 \times 0.22^2 \times 1 \times t_i}{1 + 0.05 \times 1} = 0.05 + 0.000115t_i$$

に変わる。したがって、1年目、2年目、3年目、4年目、および5年

目の終わりでの支払に対する変動金利は、それぞれ5.0115%，5.0230%，5.0345%，5.0460%，および5.0575%となる。最初の支払日におけるネットの金利交換は、1億ドルに対する0.0115%，すなわち11,500ドルの支払となる。他の金利交換に対するネットのキャッシュフローも同様に計算できる。その結果、スワップの価値は、

$$-\frac{11,500}{1.05} - \frac{23,000}{1.05^2} - \frac{34,500}{1.05^3} - \frac{46,000}{1.05^4} - \frac{57,500}{1.05^5}$$

すなわち、-144,514ドルとなる。

## CMS スワップと CMT スワップ

コンスタント・マチュリティ・スワップ (CMS : constant maturity swap) とは、変動金利がある期間のスワップに対するスワップ・レートに等しい金利スワップである。CMS スワップの例は、変動利払いが、たとえば、6カ月ごとに5年スワップ・レートに等しいレートで行われるというものである。通常、金利観測日と支払日にはラグがあり、特定の支払日における支払額は前回支払日に観測されたスワップ・レートに等しい。金利は時点  $t_0, t_1, t_2, \dots$  にセットされ、その支払は時点  $t_1, t_2, t_3, \dots$  に行われ、想定元本は  $L$  であるとする。時点  $t_{i+1}$  における変動利払額は、

$$\tau_i L S_i$$

となる。ただし、 $\tau_i = t_{i+1} - t_i$  で、 $S_i$  は時点  $t_i$  におけるスワップ・レートである。

$y_i$  をスワップ・レート  $S_i$  に対するフォワード・レートとする。時点  $t_{i+1}$  における支払額を評価するには、フォワード・スワップ・レートに対してコンベキシティ調整を行う必要があり、実現するスワップ・レートは  $y_i$  ではなく、

$$y_i - \frac{1}{2} y_i^2 \sigma_{y,i}^2 t_i \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)} - \frac{y_i \tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1 + F_i \tau_i} \quad (32.2)$$

と仮定される。ここで、 $\sigma_{y,i}$  はフォワード・スワップ・レートのボラティリ

ティ， $F_i$ は時点  $t_i$  から時点  $t_{i+1}$  までの期間に対する現時点でのフォワード・レート， $\sigma_{F,i}$  はこのフォワード・レートのボラティリティ， $\rho_i$  はフォワード・スワップ・レートとフォワード・レートの相関である。 $G_i(x)$  は，債券イールド  $x$  の関数として表した時点  $t_i$  における債券の価格である。この債券のクーポン・レートは  $y_i$  で，残存期間と利払間隔は CMS レートが計算されているスワップと同じである。 $G'_i(x)$  と  $G''_i(x)$  は， $x$  に関する  $G_i$  の 1 階と 2 階の偏微分係数である。 $\sigma_{y,i}$  はスワップションから求めることができ， $\sigma_{F,i}$  はキャップレットの価格から求めることができる。また，相関  $\rho_i$  は過去データから推定できる。

(32.3)式には，コンベキシティ調整とタイミング調整が含まれている。第 2 項の，

$$-\frac{1}{2}y_i^2\sigma_{y,i}^2t_i \frac{G''_i(y_i)}{G'_i(y_i)}$$

は，29.1節の例29.2で計算したものと同様の調整である。これは，スワップ・レート  $S_i$  が年金形式の支払ではなく，時点  $t_i$  の 1 回払い支払われることによる調整である。第 3 項の，

$$-\frac{y_i\tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1 + F_i \tau_i}$$

は，29.2節で計算したものと同様の調整であり， $S_i$ に基づく支払が時点  $t_i$  ではなく，時点  $t_{i+1}$  で行われることに対する調整である。

### 【例32.3】

想定元本 1 億ドルに対して 5 年スワップ・レートを受け取り，5% の固定金利を支払う，期間 6 年の CMS スワップを考える。金利交換は(原資産の 5 年スワップと CMS スワップの両方とも)半年ごとに行われるとする。各支払日における交換額は，前回支払日のスワップ・レートによって決まる。期間構造は半年複利で年率 5% でフラットとする。期間 5 年のスワップに対するスワップションのインプライド・ボラティリティはすべて 15% で，金利計算期間 6 カ月のキャップレットのインプライド・ボラティリティはすべて 20% であるとする。また，各キャップ・

レートと各スワップ・レートとの相関は0.7であるとする。

この場合、すべての  $i$  に対して、 $y_i=0.05$ ,  $\sigma_{y,i}=0.15$ ,  $\tau_i=0.5$ ,  $F_i=0.05$ ,  $\sigma_{F,i}=0.20$ ,  $\rho_i=0.7$  である。したがって、

$$G_i(x) = \sum_{i=1}^{10} \frac{2.5}{(1+x/2)^i} + \frac{100}{(1+x/2)^{10}}$$

となり、 $G'_i(y_i)=-437.603$  および  $G''_i(y_i)=2261.23$  となる。(32.2)式より、コンペキシティ調整とタイミング調整の合計は  $0.0001197t_i$  で与えられ、スワップ・レートが観測されるまでの期間に対して年1.197ペース・ポイントとなる。たとえば CMS を評価する目的では、4年後の5年スワップ・レートは5%ではなく、5.0479%と仮定し、4.5年後に受け取るネット・キャッシュフローは  $0.5 \times 0.000479 \times 100,000,000 = 23,940$  ドルと仮定される。他のネット・キャッシュフローも同様に計算される。それらの現在価値を計算すると、このスワップの価値は159,811ドルとなる。

コンスタント・マチュリティ・トリジャリー・スワップ (CMT swap : constant maturity Treasury swap) は、変動金利がある残存期間の長期国債イールドとなる点を除いては、CMS スワップと同様の商品である。CMT スワップの分析は、 $S_i$ を指定された残存期間の長期国債のパー・イールドと定義すれば、CMS スワップの分析と本質的に同じものになる。

### ディファレンシャル・スワップ

ディファレンシャル・スワップ (differential swap) は、ディフ・スワップ (diff swap) と呼ばれることもあり、ある通貨で観測される変動金利を別の通貨の元本に適用する金利スワップである。 $t_i$  から  $t_{i+1}$  までの期間に対する通貨 Y の LIBOR レートを通貨 X の元本に適用し、その支払は時点  $t_{i+1}$  に行われるとする。 $V_i$  を  $t_i$  から  $t_{i+1}$  までの期間に対する通貨 Y のフォワード・レートとし、 $W_i$  を満期  $t_{i+1}$  のフォワード為替レート (通貨 X 1 単位当たりの通貨 Y の単位数) とする。通貨 Y の LIBOR レートが通貨 Y の元本に適

用される場合には、時点  $t_{i+1}$  におけるキャッシュフローは、時点  $t_i$  における LIBOR レートが  $V_i$  に等しいと仮定して評価すればよい。29.3節の分析より、それが通貨 X の元本に適用される場合には、クオント調整が必要となる。その場合には、LIBOR レートが、

$$V_i + V_i \rho_i \sigma_{W,i} \sigma_{V_i, t_i} \quad (32.3)$$

に等しいと仮定してキャッシュフローを評価すれば、正しい値が得られる。

ここで、 $\sigma_{V,i}$  は  $V_i$  のボラティリティ、 $\sigma_{W,i}$  は  $W_i$  のボラティリティ、 $\rho_i$  は  $V_i$  と  $W_i$  の相関である。

#### 【例32.4】

米国と英国のゼロ・レートはともに 1 年複利で年率 5 % フラットであるとする。1,000万ポンドの元本に対して、年 1 回、米ドル 12 カ月 LIBOR を受け取り、英ポンド 12 カ月 LIBOR を支払う、期間 3 年のディフ・スワップを考える。米国の 1 年物フォワード・レートのボラティリティはすべて 20 % と推定され、米ドル／英ポンドのフォワード為替レート（1 ポンド当りのドル額）のボラティリティはすべての満期に対して 12 %、それらの相関は 0.4 であるとする。

この場合、 $V_i = 0.05$ 、 $\rho_i = 0.4$ 、 $\sigma_{W,i} = 0.12$ 、 $\sigma_{V,i} = 0.2$  である。したがって、時点  $t_i$  で観測される 1 年物ドル金利によって決まる変動金利キャッシュフローは、適用するレートが、

$$0.05 + 0.05 \times 0.4 \times 0.12 \times 0.2 \times t_i = 0.05 + 0.00048t_i$$

であるとして計算されることになる。このことから、評価の目的では、1 年後、2 年後、3 年後の時点におけるスワップからのネット・キャッシュフローを 0, 4,800, 9,600 ポンドと仮定してよいことがわかる。したがって、スワップの価値は、

$$\frac{0}{1.05} + \frac{4,800}{1.05^2} + \frac{9,600}{1.05^3} = 12,647$$

すなわち 12,647 ポンドとなる。

## 32.5 エクイティ・スワップ

エクイティ・スワップとは、一方が想定元本に対して株価指数から得られるリターンを支払い、他方が想定元本に対して固定金利または変動金利を支払う契約である。エクイティ・スワップを用いて、ファンドマネジャーは株式を直接売買することなしに、株価指数へのエクスポージャーを増減させることができる。エクイティ・スワップは、市場のニーズに合わせて、株価指数に対する複数のフォワード契約をまとめた便利な商品である。

株価指数は、配当が指数の構成銘柄に再投資されるトータル・リターン指数であることが多い。ビジネス寸見32.3にエクイティ・スワップの取引例を示す。この例では、S&P500に対する6カ月のリターンがLIBORと交換されている。スワップのどちらのサイドも元本は1億ドルで、支払は6カ月ごとに行われている。

ビジネス寸見32.3にあるようなエクイティ・変動のスワップでは、取引開始時点における価値はゼロである。その理由は、金融機関は各支払日に元本をLIBORで借り入れて、それを次回支払日まで指数に投資し、すべての配当を指数に再投資することで、コストなしにキャッシュフローを複製できるからである。同じ議論から、支払日直後のこのスワップの価値は常にゼロになることがわかる。

支払日の間では、次回支払日におけるエクイティ・キャッシュフローとLIBORキャッシュフローを評価しなければならない。LIBORキャッシュフローは前回リセット日に固定されているので、容易に評価できる。エクイティ・キャッシュフローの価値は  $LE/E_0$  になる。ここで  $L$  は元本、 $E$  は株価指数の現在の値、 $E_0$  は前回リセット日における  $E$  の値である(注3)。

---

(注3) これに関するより詳細な議論については著者のWebサイトのテクニカルノート19を参照されたい。

### ビジネス寸見32.3 エクイティ・スワップの仮想的な取引確認書

|                 |  |
|-----------------|--|
| 取引日：            | 2007年1月5日  |
| 取引開始日：          | 2007年1月11日   |
| 営業日基準（全日付）：     | 翌営業日   |
| 休日指定都市：         | 米国   |
| 満期日：            | 2012年1月11日   |
| エクイティサイド        |  |
| エクイティ・ペイヤー：     | マイクロソフト  |
| エクイティ想定元本：      | 1億ドル   |
| エクイティ・インデックス：   | S&P500指数の総リターン   |
| エクイティ支払額：       | $100(I_1 - I_0) / I_0$ , ただし, $I_1$ は支払日におけるインデックスの値, $I_0$ は前回支払日におけるインデックスの値。初回支払日における $I_0$ は, 2007年1月11日のインデックスの値。 |
| エクイティ支払日：       | 2007年7月11日より2012年1月11日までの7月11日と1月11日   |
| 変動サイド           |  |
| 変動金利ペイヤー：       | ゴールドマン・サックス  |
| 変動金利想定元本：       | 1億ドル   |
| 変動金利：           | 6カ月ドルLIBOR   |
| デイカウント・コンベンション： | 実日数/360  |
| 変動金利支払日：        | 2007年7月11日より2012年1月11日までの7月11日と1月11日   |

## 32.6 オプションを内包したスワップ

オプションを内包したスワップもある。本節では、いくつかのよくみかける例について考察する。

### アクルーアル・スワップ

アクルーアル・スワップとは、参照変動金利があるレンジ内にあるときのみ片サイドの金利が付利されるスワップである。このレンジは、スワップの全期間で固定されている場合と、定期的に見直される場合とがある。

アクルーアル・スワップの簡単な例として、3カ月ごとに固定金利  $Q$  と3カ月 LIBOR を交換するスワップで、固定金利は3カ月 LIBOR が年率8%以下の日だけ付利されるものを考えよう。元本を  $L$  とする。通常のスワップでは、固定金利ペイヤーは各支払日に  $QLn_1/n_2$  を支払う。ただし、 $n_1$  は前四半期の日数で、 $n_2$  は1年間の日数である（デイカウントは実日数/実日数と仮定している）。これに対してアクルーアル・スワップでは、支払額は  $QLn_3/n_2$  になる。ただし、 $n_3$  は前四半期に3カ月 LIBOR が8%以下になった日数である。固定金利ペイヤーは、変動金利が8%を上回ったそれぞれの日に  $QL/n_2$  だけ節約できることになる（注4）。したがって、固定金利ペイヤーのポジションは、通常のスワップに、スワップ全期間のそれぞれの日にに対する一続きのバイナリー・オプションを加えたものと等価であると考えることができる。ここでのバイナリー・オプションとは、3カ月 LIBOR が8%を上回るときに  $QL/n_2$  の支払が生じるというものである。

一般化して、LIBOR のカット・オフ金利（上の場合には8%）を  $R_K$ 、金利交換は  $\tau$  年ごとに行われると仮定する。スワップ期間中の  $i$  日目について考え、 $i$  日目までの時間を  $t_i$  とする。また、 $i$  日目における  $\tau$  年 LIBOR レートを  $R_i$  とし、 $R_i < R_K$  のときに金利が付利されるとする。 $F_i$  を  $R_i$  のフォワード・レートとし、 $F_i$  のボラティリティを  $\sigma_i$  と定義する（後者はス

---

(注4) 通常の慣習では、休日に対して適用される金利は前営業日の金利となる。

ポット・キャップレット・ボラティリティから推定される)。通常行う対数正規の仮定を用いると、満期  $t_i + \tau$  の割引債に関するフォワード・リスク中立世界では、LIBOR が  $R_K$  より大きくなる確率は  $N(d_2)$  となる。ただし、

$$d_2 = \frac{\ln(F_i/R_K) - \sigma_i^2 t_i / 2}{\sigma_i \sqrt{t_i}}$$

である。バイナリー・オプションのペイオフが実現するのは  $i$  日目の次にくるスワップ支払日である。それを時点  $s_i$  とする。満期  $s_i$  の割引債に関するフォワード・リスク中立世界で LIBOR が  $R_K$  より大きくなる確率は、 $N(d_2^*)$  で与えられる。ただし、 $d_2^*$  は  $d_2$  と同じ式を用いて計算されるが、 $F_i$  には時点  $t_i + \tau$  と時点  $s_i$  の差を反映した小さなタイミング調整が加えられる。

$i$  日目に対応するバイナリー・オプションの価値は、

$$\frac{QL}{n_2} P(0, s_i) N(d_2^*)$$

となる。バイナリー・オプションの合計価値は、スワップ全期間の各日に対してこの価値の総和をとれば得られる。( $d_2$  を  $d_2^*$  に置き換えることによる) タイミング調整額は小さいので、実務では無視されることが多い。

### 解約権付スワップ

解約権付スワップとは、一方の当事者が 1 回以上の支払日に解約権をもつプレーン・バニラ金利スワップである。スワップを終了させるということは、そのスワップを相殺する(反対の)スワップを開始することと同じである。マイクロソフトとゴールドマン・サックスとの間で結ばれるスワップを考えよう。マイクロソフトが解約権をもっているとすると、マイクロソフトは通常のスワップとそれを相殺するスワップを開始できるオプションの買いポジションを保有しているとみなすことができる。ゴールドマン・サックスが解約権をもっているとすると、マイクロソフトは通常のスワップとそれを相殺するスワップを開始できるオプションの売りポジションを保有していることになる。

解約可能日が 1 日のみの場合は、解約権付スワップは通常のスワップと

ヨーロピアン・スワップションを組み合わせたものと同じである。たとえば、マイクロソフトが6%を受け取り、LIBORを支払う期間10年のスワップを考える。マイクロソフトが6年後に解約権をもっているとする。このスワップは、6%を受け取り、LIBORを支払う期間10年の通常のスワップと、6%を支払い、LIBORを受け取る期間4年のスワップを開始できるヨーロピアン・スワップションの買いポジションを組み合わせたものとなる(後者は $6 \times 4$  ヨーロピアン・スワップションと呼ばれる)。ヨーロピアン・スワップションの評価に用いられる標準的なマーケット・モデルについては、第28章で説明した。

複数の支払日に解約権がある場合は、通常のスワップとバミューダン・スワップションを組み合わせたものになる。たとえば、マイクロソフトが6%を受け取り、LIBORを支払う、年2回払いの5年スワップを取引した場合について考えよう。カウンターパーティが、2年目から5年目までの各支払日に、このスワップの解約権をもっているとする。このスワップは、通常のスワップとバミューダン・スワップションの売りポジションを組み合わせたものになる。その場合のバミューダン・スワップションは、6%を受け取り、LIBORを支払う満期5年のスワップに対するオプションである。スワップションは、2年目から5年目までの各支払日において行使可能である。バミューダン・スワップションの評価方法については第30章と第31章で論じている。

### 解約権付コンパウンド・スワップ

指定された支払日に解約できるコンパウンド・スワップもある。解約時には、変動金利ペイヤーは解約時点まで複利された変動金利を支払い、固定金利ペイヤーは解約時点まで複利された固定金利を支払う。

解約権付コンパウンド・スワップの評価には、ちょっとした工夫が必要である。最初は、変動金利がLIBORで、LIBORで複利される場合を考えよう。スワップの元本が満期日に固定サイドと変動サイドの両方で支払われるとき定する。これは、バニラ・スワップで表7.1を表7.2に置き換えたのと同じである。

様のことである。これによって、スワップの価値は変化させずに、支払日における変動サイドの価値が常に元本に等しくなるようにできる。そうすると、解約の判断は固定サイドだけをみて行えるようになる。第30章で概説したような金利ツリーを構築し、ツリーに沿った通常の後戻し計算によって固定サイドの評価を行う。解約可能な各ノードにおいて、スワップの継続と解約のどちらが最適かを判断する。スワップを解約することは、固定サイドの価値をパーに等しくすることと同じ効果がある。固定金利を支払い、変動金利を受け取る場合には、固定サイドの価値を最小にするのが解約の目的となる。固定金利を受け取り、変動金利を支払う場合には、固定サイドの価値を最大にするのが解約の目的となる。

変動サイドが LIBOR+スプレッドの変動金利を LIBOR で複利する場合は、スプレッドに対応するキャッシュフローを変動サイドに加えるかわりに、固定サイドから差し引けばよい。そうすれば、スプレッドがない場合の方法で、オプションを評価することができる。

LIBOR+スプレッドで複利される場合は、以下の方法で近似が可能である(注5)。

1. 各解約可能日におけるスワップの変動サイドの価値を、フォワード・レートが実現するとして計算する。
2. 各解約可能日におけるスワップの変動サイドの価値を、変動金利が LIBOR で、それが LIBOR で複利されると仮定して計算する。
3. ステップ2を上回るステップ1の価値を解約可能日における「スプレッドの価値」とする。
4. 上で述べた方法でオプションを扱う。解約権行使するかの判断は、固定サイドに対して計算した価値から「スプレッドの価値」を差し引いたものに基づいて行う。

---

(注5) この方法は完全には正確なものではない。その理由は、解約権の行使判断に、将来の支払が LIBOR とは異なる金利で複利されているということが考慮されていないからである。

## 32.7 その他のスワップ

本章では、市場で取引されているスワップのうち、ほんの一部のみを議論してきた。実際には、取引される金融商品の範囲は、フィナンシャル・エンジニアの創造力と、企業財務担当者の革新的なリスク管理ツールに対する欲求によってしか制限を受けない。

1990年代半ばに米国で人気を集めた取引に、インデックス・アモチ・スワップ (index amortizing swap, indexed principal swapとも呼ばれる) がある。これは、金利水準に依存して元本が減少していくスワップである。金利が低くなるほど、元本の減少額は大きくなる。インデックス・アモチ・スワップの固定サイドは、もともとは、期限前返済権を考慮した後のモーゲージ証券から得られる投資家のリターンを、少なくとも近似的には、反映するように設計されたものである。したがって、このスワップはモーゲージ証券のリターンを変動金利のリターンと交換するものであった。

コモディティ・スワップは、昨今ますます一般的に取引されるようになった。年間100,000バレルの原油を消費する企業は、 $S$  を1バレル当たりの原油の市場価格として、今後10年間に毎年800万ドルを支払い、かわりに100,000  $S$  を受け取るような契約を結んだりする。この契約により、その企業は1バレル当たりの原油コストを80ドルに固定できる。原油の生産者はその反対の契約を結ぶことによって、1バレル当たり80ドルの固定価格で原油の売却を実現できる。エネルギー・デリバティブについては第25章で論じた。

本書の他章で、その他のさまざまなスワップについて論じている。たとえば、第22章でアセット・スワップについて論じ、第23章でトータル・リターン・スワップとさまざまなクレジット・デフォルト・スワップについて説明し、第24章でボラティリティ・スワップとバリアンス・スワップについて分析を行った。

### 風変わりな取引

かなり風変わりな方法で計算されるペイオフをもつスワップもある。1993

年にプロクター・アンド・ギャンブルとバンカーズ・トラストの間で締結された取引がその一例である（ビジネス寸見32.4を参照）。この取引は後に訴訟に発展したことから、取引の詳細が公表されている（注6）。

#### ビジネス寸見32.4 プロクター・アンド・ギャンブルの風変わりな取引

1993年11月2日にバンカーズ・トラスト（BT）とプロクター・アンド・ギャンブル（P&G）の間で締結された、いわゆる“5/30”スワップは、特に風変わりなスワップである。これは年2回払いの5年スワップであった。想定元本は2億ドルで、BTはP&Gに年5.3%を支払い、P&GはBTに平均30日物CP（コマーシャルペーパー）レートから75ペース・ポイントを引き、それにあるスプレッドを加えたものを支払うことになっていた。平均30日物CPレートは、前金利計算期間における30日物CPレートの日々の観測値を平均したものである。

スプレッドは最初の支払日（1994年5月2日）ではゼロであった。残り9回の支払日に対するスプレッドは、

$$\max \left[ 0, \frac{98.5 \times \left( \frac{\text{5年物 CMT \%}}{5.78\%} \right) - (\text{30年物 TSY 價格})}{100} \right]$$

で与えられた。ここで、5年物CMTはコンスタント・マチュリティ・トレジャリー・イールド（米国連邦準備銀行が発表した5年米国中期国債のイールド）である。30年物TSY価格は、2023年8月満期の6.25%米国長期国債の取引価格のビッドとオファーの仲値である。この式で計算されたスプレッドは小数点で表示された金利であり、ペース・ポイントで表されたものではない。たとえば、この式から0.1が得られ、CP

（注6） D.J. Smith, “Aggressive Corporate Finance: A Close Look at the Procter and Gamble-Bankers Trust Leveraged Swap,” *Journal of Derivatives* 4, 4 (Summer 1997) : 67-79 を参照。

レートが6%の場合は、P&Gの支払う金利は15.25%である。

P&Gはスプレッドがゼロになると期待しており、この取引によって固定金利5.3%での資金調達を、CPレートより75ペース・ポイント低い金利での資金調達に交換できると考えていた。実際には、1994年初頭に金利が急上昇し、債券価格が下落して、このスワップはきわめて高くついた（章末問題32.10を参照）。

## 要約

スワップは非常に用途の広い金融商品であることが示されてきた。多くのスワップは、(a) LIBOR（もしくはその他の指標となる変動金利）がそのフォワード・レートと等しくなると仮定し、(b)得られたキャッシュフローをLIBOR／スワップ・レートで割り引く、ということによって評価することができる。そのようなものに、ブレーン・バニラ金利スワップ、ほとんどの種類の通貨スワップ、元本の変化があらかじめ決まっているスワップ、支払日がそれぞれのサイドで異なるスワップ、コンパウンド・スワップがある。

評価する際に、フォワード・レートの調整が必要となるスワップもある。これらの調整は、コンベキシティ調整、タイミング調整、クオント調整と呼ばれるものである。調整が必要なスワップとしては、アリアー・スワップやCMS/CMTスワップ、ディファレンシャル・スワップなどがある。

エクイティ・スワップとは、株価指数のリターンと固定もしくは変動金利を交換するスワップである。支払日直後の価値がゼロになるような取引が通常行われているが、支払日の間では、価値はゼロにはならない。

オプションを内包したスワップもある。アクルーアル・スワップは、通常のスワップにバイナリー・オプションの大きなポートフォリオ（スワップ期間中のそれぞれの日に対するオプション）を加えたものである。解約権付ス

ワップは、通常のスワップにバミニーダン・スワップションを加えたものである。

## 参考文献

- Chance, D., and D. Rich. "The Pricing of Equity Swap and Swaptions," *Journal of Derivatives*, 5, 4 (Summer 1998) : 19-31.
- Smith, D.J. "Aggressive Corporate Finance: A Close Look at the Procter and Gamble-Bankers Trust Leveraged Swap," *Journal of Derivatives*, 4, 4 (Summer 1997) : 67-79.

## 章末問題

- 32.1** ビジネス寸見32.1におけるスワップに対して、すべての固定キャッシュフローとその正確な支払日を計算せよ。ただし、デイカウント・コンベンションは実際の支払日ではなく、確認書に書かれた支払日に適用されるものと仮定する。
- 32.2** 固定金利とLIBORの2倍を交換するスワップを考える。このスワップは、「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定する」方法を用いて評価できるか。
- 32.3** 元本が100万ドルで、年2回払いの2年の固定一変動コンパウンド・スワップの価値を求めよ。固定金利を受け取り、変動金利を支払うとする。固定金利は8%で、8.3%で複利される（両方とも半年複利）。変動金利はLIBOR+10ペース・ポイントで、LIBOR+20ペース・ポイントで複利される。LIBORゼロ・カーブは半年複利で8%フラットであるとする。

- 32.4** LIBOR を通常どおり支払い、LIBOR が LIBOR で複利されたものを受け取る、5年スワップの価値を求めよ。両サイドとも元本は100万ドルである。支払サイドの支払日と受取りサイドの複利日は半年ごとで、イールドカーブは半年複利で5%フラットであるとする。
- 32.5** 銀行が通貨スワップのキャッシュフローを LIBOR とわずかに異なる金利で割り引くことに対する理由について、詳しく説明せよ。
- 32.6** 32.4節の例32.3で、キャップのボラティリティを20%のかわりに18%，5年スワップに対するすべてのスワップションのボラティリティを15%のかわりに13%として、コンベキシティ調整およびタイミング調整の合計を計算せよ。スワップを評価する際に仮定する、3年間後の5年スワップ・レートを求めよ。スワップの価値を求めよ。
- 32.7** プレーン・バニラ金利スワップと32.2節のコンパウンド・スワップは「フォワード・レートが将来そのまま実現すると仮定する」方法を用いて評価できるが、32.4節のアリアー・スワップは評価できない理由を説明せよ。
- 32.8** 本文で議論したアクルーアル・スワップは、参照変動金利があるレベル以下のときのみに固定サイドが付利されるというものであった。参照変動金利があるレベル以上かつあるレベル以下のときのみに固定サイドが付利されるという場合を扱うには、本文で行った分析をどのように拡張すればよいか。

## 宿題

- 32.9** LIBOR ゼロ・レートが米国で5%フラット、オーストラリアで10%フラットであるとする（両方とも1年複利とする）。米ドル1,000万ドルの元本に対して、オーストラリア LIBOR を受け取り、9%を支払う4年スワップについて考える。金利は1年ごとに交換される。

オーストラリアの1年物フォワード・レートのボラティリティはすべて25%，米ドル／豪ドルのフォワード為替レート（1米ドル当りの豪ドル）のボラティリティはすべての満期に対して15%，それら二つの相関は0.3であるとする。このとき，スワップの価値を求めよ。

- 32.10** 32.7節の5/30スワップに対してP&Gが支払った金利を，(a)CPレートが6.5%で，米国長期国債のイールドカーブが半年複利で6%フラットであった場合，(b)CPレートが7.5%で，米国長期国債のイールドカーブが半年複利で7%フラットであった場合のそれぞれについて求めよ。
- 32.11** コンベキシティ調整を考慮しない経験の少ない相手とアリアー・スワップの取引を行うとする。この状況をうまく利用するのをしたら，固定金利は受けるべきか払うべきか。また，スワップの期間や支払回数はどのように設定すべきか。

イールドカーブが1年複利で年率10%フラット，すべてのキャップのボラティリティが18%であるとする。年1回払いのアリアー・スワップで，満期が(a)5年，(b)10年，(c)20年のそれぞれの場合について，コンベキシティ調整を考慮するトレーダーとしないトレーダーの評価の差を推定せよ。想定元本は100万ドルとする。

- 32.12** LIBORゼロ・レートが1年複利で5%フラットとする。X社が6%の固定金利を支払い，LIBORを受ける5年スワップについて考える。3年後スタートの2年スワップ・レートのボラティリティを20%とする。このとき，
- (a) このスワップの価値を求めよ。
  - (b) DerivaGem ソフトウェアを用いて，X社が3年後に解約権をもっている場合のスワップの価値を求めよ。
  - (c) DerivaGem ソフトウェアを用いて，取引相手が3年後に解約権をもっている場合のスワップの価値を求めよ。
  - (d) 3年後に双方が解約権をもっている場合のスワップの価値を求めよ。

## 第33章

# リアル・オプション

これまでの章では、ほとんど金融資産の評価についてのみ考えてきた。本章では、これまで発展させてきたアイデアを、土地、建物、工場、設備のような実物資産に対する資本投資機会の評価へ拡張する方法について検討する。こうした投資機会にはオプション（投資を拡大するオプション、投資から撤退するオプション、投資を延期するオプションなど）が内包されている。これらのオプションは、伝統的な資本投資に対する評価方法を用いて評価することがきわめて困難である。リアル・オプションとして知られる手法は、オプションの価格付け理論を用いてこの問題を扱おうとする試みである。

本章では、実物資産への投資を評価する伝統的な手法の説明からはじめて、その手法では内包されるオプションの評価がいかにむずかしいかを示す。その後で、リスク中立化法を拡張して実物資産の評価が扱えるようにする方法について説明し、異なる状況のもとでその手法の応用例をいくつか紹

介する。

### 33.1 資本投資の評価

将来の資本投資計画を評価する伝統的手法に、「正味現在価値 (NPV : net present value)」法がある。あるプロジェクトの NPV とは、将来期待されるキャッシュフローの増分の現在価値である。現在価値を計算する際に用いられる割引率は、プロジェクトのリスクを反映させた「リスク調整後」の割引率である。プロジェクトのリスクが増加すれば、割引率も増加する。

例として、コストが 1 億ドルの 5 年間の投資を考える。期待される（実世界での）毎年のキャッシュ・インフローが 2,500 万ドルと見積もられている、とする。リスク調整後割引率を 12%（連続複利）とすると、この投資の現在価値（単位：100 万ドル）は、

$$-100 + 25e^{-0.12 \times 1} + 25e^{-0.12 \times 2} + 25e^{-0.12 \times 3} + 25e^{-0.12 \times 4} + 25e^{-0.12 \times 5} = -11.53$$

となる。いま計算して得られたような負の NPV は、プロジェクトは企業の株主価値を減少させるので採用すべきではない、ということを示している。正の NPV は、プロジェクトは株主価値を増加させるので採用すべきである、ということを示している。

リスク調整後割引率は、企業もしくはその株主が要求する投資利回りである。この算出にはさまざまな方法がある。よく使われる方法の一つは、資本資産価格モデルを用いるものである。それは、次のようなステップで行われる。

1. 計画しているプロジェクトと同じ業務を主業務とする企業のサンプルを取得する。
2. それらの企業のペータを計算し、その平均をプロジェクトの代理ペータとする。
3. 市場ポートフォリオの無リスク金利に対する超過収益率の代理ペータ倍に無リスク金利を加えたものを要求収益率とする。

伝統的な NPV 法の問題点の一つは、多くのプロジェクトにはオプション

が内包されていることである。たとえば、新製品を製造する工場の建設を計画している企業について考えよう。企業は、事業がうまくいかない場合にはプロジェクトから撤退するというオプションをもっていることが多い。また、新製品の需要が予想を上回った場合に工場を拡張するオプションを企業がもっていることもある。これらのオプションは、基本プロジェクトのリスク特性をかなり異なったものにするので、割引率も異なったものが要求されることになる。

ここでの問題を理解するために、第11章のはじめの例についてもう一度考えよう。この例では、現在の株価は20ドルで、3カ月後に株価は22ドルか18ドルになる。リスク中立化法を用いると、行使価格が21ドル、満期が3カ月のコール・オプションの価値は0.633ドルになることがわかる。第11章の脚注1に示したように、実世界で投資家が株式に要求する期待收益率を16%とすると、そのコール・オプションに対して要求する期待收益率は42.6%になる。同様の分析から、オプションがコールではなくプットの場合には、要求される期待收益率は-52.5%になる。これらの分析から、伝統的なNPV法を用いてそのコール・オプションを評価する場合の正しい割引率は42.6%であり、そのプット・オプションを評価する場合の正しい割引率は-52.5%であることがわかる。それらの割引率を推定する簡単な方法は存在しない（別の方法でオプションを評価できる場合にのみ、割引率がわかる）。同様に、撤退オプション、拡張オプション、およびその他のオプションから生じるキャッシュフローに対して適切なリスク調整後割引率を推定する簡単な方法はない。このことが、金融商品に対するオプションと同様に、リスク中立化法が実物資産に対するオプションにも適用できるかを検討する動機となっている。

伝統的なNPV法には、基本プロジェクト（すなわち、オプションを内包していないプロジェクト）に対する適切なリスク調整後割引率を推定する部分にも、もう一つの問題が含まれている。上で説明した3ステップの手順において、プロジェクトの代理ベータの推定に用いる企業自体も拡張オプションや撤退オプションを保有している。したがって、そのベータにはそれらのオ

オプションが反映されており、基本プロジェクトに対するベータの推定方法が適切でないという可能性がある。

### 33.2 リスク中立化法の拡張

27.1節では、変数  $\theta$  に対するリスクの市場価格を、

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma} \quad (33.1)$$

として定義した。ここで、 $r$  は無リスク金利、 $\mu$  は  $\theta$  のみに依存する取引可能な証券の収益率、 $\sigma$  はそのボラティリティである。27.1節で示したように、リスクの市場価格  $\lambda$  は、選ばれた特定の取引可能な証券に依存しない量である。

いくつかの変数  $\theta_i (i=1, 2, \dots)$  に依存する実物資産について考える。 $m_i$  と  $s_i$  を  $\theta_i$  の期待成長率とボラティリティとすると、

$$\frac{d\theta_i}{\theta_i} = m_i dt + s_i dz_i$$

となる。ここで  $z_i$  はウィナー過程である。 $\lambda_i$  を  $\theta_i$  に対するリスクの市場価格とする。27.9節で説明したように、リスク中立化法を拡張して、 $\theta_i$  に依存する任意の資産が、

1. 各  $\theta_i$  の期待成長率を  $m_i$  から  $m_i - \lambda_i s_i$  に減少させる
2. キャッシュフローを無リスク金利で割り引く

によって評価できることがわかる(注1)。

#### 【例33.1】

ある街の商業不動産の賃料が 5 年更新で 1 平方フィート当りの年額

(注1) この方法が通常のリスク中立化法と整合性がとれていることを確認するために、 $\theta_i$  を配当のない株式の価格としてみる。株式は取引可能な証券の価格なので、(33.1)式から  $(m_i - r) / s_i = \lambda_i$ 、すなわち  $m_i - \lambda_i s_i = r$  となる。したがって、期待成長率の調整は株式の収益率を無リスク金利に等しく置くことと同じである。より一般的な結果に対する証明については、著者の Web サイトのテクニカルノート20を参照されたい。

で呈示されている。現在の賃貸料は1平方フィート当たり30ドルである。賃貸料の期待上昇率は年率12%，そのボラティリティは年率20%，リスクの市場価格は0.3である。ある企業が、いま100万ドル支払えば、2年後から5年間にわたり100,000平方フィートを1平方フィート当たり35ドルで借りる権利が得られるという状況にあるとする。無リスク金利を5%（一定）と仮定する。 $V$ を2年後に呈示される1平方フィート当たりのオフィス・スペースに対する賃貸料とする。また、賃貸料は1年ごとの前払いと仮定する。このとき、オプションのペイオフは、

$$100,000A\max(V - 35, 0)$$

となる。ここで $A$ は、

$$A = 1 + 1 \times e^{-0.05 \times 1} + 1 \times e^{-0.05 \times 2} + 1 \times e^{-0.05 \times 3} + 1 \times e^{-0.05 \times 4} = 4.5355$$

で与えられる年金係数である。したがって、リスク中立世界での期待ペイオフは、

$$\begin{aligned} & 100,000 \times 4.5355 \times \hat{E}[\max(V - 35, 0)] \\ &= 453,550 \times \hat{E}[\max(V - 35, 0)] \end{aligned}$$

となる。ここで $\hat{E}$ はリスク中立世界での期待値を表している。(13A.1)式の結果を用いると、これは、

$$453,550 [\hat{E}(V)N(d_1) - 35N(d_2)]$$

となる。ただし、

$$d_1 = \frac{\ln[\hat{E}(V)/35] + 0.2^2 \times 2/2}{0.2\sqrt{2}}$$

$$d_2 = \frac{\ln[\hat{E}(V)/35] - 0.2^2 \times 2/2}{0.2\sqrt{2}}$$

である。

$m$ を商業不動産の賃貸料の実世界での上昇率、 $s$ をそのボラティリティ、 $\lambda$ をリスクの市場価格とすると、リスク中立世界での期待上昇率は $m - \lambda s$ となる。いまの場合、 $m = 0.12$ 、 $s = 0.2$ 、 $\lambda = 0.3$ となるので、リスク中立な期待上昇率は0.06、すなわち年率6%となる。したがって、 $\hat{E}(V) = 30e^{0.06 \times 2} = 33.82$ となる。これを上式に代入すると、リ

スク中立世界での期待ペイオフは150.15万ドルになる。これを無リスク金利で割り引けば、オプションの価値は $150.15e^{-0.05\times 2}=135.86$ 万ドルと求まる。これより、このオプションは100万ドルを支払うだけの価値があることがわかる。

### 33.3 リスクの市場価格の推定

リアル・オプション法を用いて投資を評価すると、33.1節で述べたようなリスク調整後割引率の推定を避けることができるが、すべての確率変数に対してリスクの市場価格を推定する必要がある。特定の変数に対して過去データが利用可能な場合は、資本資産価格モデルを用いてリスクの市場価格を推定することができる。推定方法を示すために、その変数のみに依存する投資資産について考え、以下のように定義する。

$\mu$ ：投資資産の期待收益率

$\sigma$ ：投資資産の收益率のボラティリティ

$\lambda$ ：変数のリスクの市場価格

$\rho$ ：変数の変化率と総合株価指数の收益率との瞬間的な相関係数

$\mu_m$ ：総合株価指数の期待收益率

$\sigma_m$ ：総合株価指数の收益率のボラティリティ

$r$ ：短期無リスク金利

投資資産は市場変数のみに依存しているので、投資資産の收益率と総合株価指数の收益率との瞬間的な相関係数も $\rho$ になる。連続時間の資本資産価格モデルより、

$$\mu - r = \frac{\rho\sigma}{\sigma_m}(\mu_m - r)$$

が成り立つ。(33.1)式より  $\mu - r$  は、

$$\mu - r = \lambda\sigma$$

と表されるから、

$$\lambda = \frac{\rho}{\sigma_m} (\mu_m - r) \quad (33.2)$$

が得られる。この式を用いて、 $\lambda$  を推定することができる。

【例33.2】

企業の四半期ごとの過去の売上高の分析より、売上高の変化率と S&P500指数の収益率との相関係数として0.3が得られたとする。S&P500のボラティリティは年率20%で、過去データに基づいた S&P500の収益率の無リスク金利に対する期待超過収益率は 5 %であるとする。(33.2)式より、企業の売上高に対するリスクの市場価格は、

$$\frac{0.3}{0.2} \times 0.05 = 0.075$$

と推定される。

考えている特定の変数の過去データが利用できない場合には、他の類似した変数が代理変数として用いられることもある。たとえば、ある新製品を製造する工場の建設を行う場合には、他の類似した製品の売上高データを用いることができる。その場合、新製品のマーケット指標との相関係数は、それらの類似製品の相関係数と同じであると仮定することになる。(33.2)式の  $\rho$  の推定を主観的な判断に基づいて行わなければならない場合もある。アナリストが特定の変数がマーケット指標の収益率と無相関であると確信している場合には、そのリスクの市場価格はゼロとすべきである。

リスク中立世界で変数の従う確率過程が直接推定できるため、リスクの市場価値を推定する必要のない変数もある。たとえば、変数が投資資産の価格ならば、リスク中立世界での収益率は無リスク金利になる。変数が短期金利  $r$  の場合には、第30章で述べたように初期時点の金利期間構造からリスク中立過程を推定することができる。本章では後で、商品のリスク中立過程を先物価格から推定する方法について説明する。

### 33.4 事業評価への応用

価格／利益乗数を現在の利益に適用するような事業評価の伝統的な方法では、新規事業の評価はうまくいかない。企業の利益は、市場シェアを獲得したり、顧客との関係を築こうとしたりする初期年度のうちに、マイナスになるのが一般的である。そういう企業は、さまざまなシナリオのもとでの将来の利益とキャッシュフローを推定することによって評価するべきである。

こうした状況ではリアル・オプション法が有効である。まず、企業の将来のキャッシュフローを売上高成長率や売上高変動費率、固定費率などに関連づけるモデルを開発する。次に、主な変数に対するリスク中立過程を、前2節で概説した方法を用いて推定する。それから、モンテカルロ・シミュレーションを行って、リスク中立世界における1年ごとのネット・キャッシュフローに対するさまざまなシナリオを生成する。その企業が大成功しているシナリオもあるだろうし、その企業が破産し、操業が停止しているシナリオもあるだろう（シミュレーションには、破産したかどうかを判断するルールを組み込んでおく必要がある）。企業の価値は、各年の期待キャッシュフローを無リスク金利で割り引いた現在価値として求められる。ビジネス寸見33.1に、この方法のAmazon.comへの適用例を示す。

#### ビジネス寸見33.1 Amazon.com の評価

リアル・オプション法を用いて企業の価値評価を試みた初期の研究報告に、Schwartz と Moon(2000) のものがある。そこでは1999年末のAmazon.comについて考察が行われている。彼らは、企業の売上げ  $R$  とその成長率  $\mu$  に対して、次の確率過程を仮定した。

$$\frac{dR}{R} = \mu dt + \sigma(t) dz_1$$

$$d\mu = \kappa(\bar{\mu} - \mu) dt + \eta(t) dz_2$$

二つのウイナー過程  $dz_1$  と  $dz_2$  は無相関で、 $\sigma(t)$ ,  $\eta(t)$ ,  $\kappa$ , および  $\bar{\mu}$  に対しては、利用できるデータに基づいて、妥当な仮定が置かれている。

売上原価は売上げの75%，その他変動費は売上げの19%，固定費は四半期当たり7,500万ドルと仮定されている。また、当初の売上げは3億5,600万ドル、繰延欠損金は5億5,900万ドル、税率は35%と仮定されている。 $R$  に対するリスクの市場価格は、前節の方法を用いて過去データから推定されている。 $\mu$  に対するリスクの市場価格はゼロと仮定されている。

分析期間は25年で、企業の最終価値は税引前営業利益の10倍と仮定されている。また、当初の現金保有高は9億600万ドルで、現金残高がマイナスとなった場合に企業は破産したと仮定されている。

モンテカルロ・シミュレーションを用いてリスク、中立世界での将来のさまざまなシナリオが生成されている。各シナリオでの評価は、転換社債の行使の可能性や従業員ストック・オプションの行使の可能性を考慮して行われている。企業の株主価値は、ネット・キャッシュフローを無リスク金利で割り引いた現在価値として計算される。

これらの仮定を用いて、Schwartz と Moon は1999年末時点における Amazon.com の株式価値を12.42ドルと推定した。その時点における市場価格は76.125ドルであった（2000年には急落した）。リアル・オプション法の一つの重要な長所は、何が重要な仮定であるかを明確にできることである。Schwartz と Moon は推定した株式価値が成長率のボラティリティ  $\eta(t)$  に対して非常に感応度が高いことを見出した。これは、オプション性が重要な要因となっている。 $\eta(t)$  のわずかな上昇がオプション性の増加、そして Amazon.com の株式価値の大きな増加につながっている。

### 33.5 商品価格

多くの投資には、将来の商品価格に関する不確実性が伴う。商品価格に対するリスク中立過程は、先物価格を用いて直接推定できる場合も多い。この方法を用いると、商品に対するリスクの市場価格を明示的に推定しなくてもすむ。

16.7節より、将来の商品価格に対する従来のリスク中立世界での期待値は先物価格になる。商品価格の期待成長率が時間のみの関数で、商品価格のボラティリティが一定である場合には、商品価格に対するリスク中立過程は、

$$\frac{dS}{S} = \mu(t) dt + \sigma dz \quad (33.3)$$

となり、

$$F(t) = \bar{E}[S(t)] = S(0) e^{\int_0^t \mu(\tau) d\tau}$$

が成り立つ。ここで、 $F(t)$ は満期  $t$  の先物価格、 $\bar{E}$  はリスク中立世界での期待値である。これから、

$$\ln F(t) = \ln S(0) + \int_0^t \mu(\tau) d\tau$$

となる。両辺を時間に関して微分すると、

$$\mu(t) = \frac{\partial}{\partial t} [\ln F(t)]$$

が得られる。

【例33.3】

2008年7月末時点の生牛先物価格（1ポンド当たりのセント）が、次のように与えられている。

|          |       |
|----------|-------|
| 2008年8月  | 62.20 |
| 2008年10月 | 60.60 |
| 2008年12月 | 62.70 |
| 2009年2月  | 63.37 |
| 2009年4月  | 64.42 |
| 2009年6月  | 64.40 |

これらを用いて、リスク中立世界での生牛価格の期待成長率を推定することができる。たとえば、(33.3)式のモデルを用いると、2008年10月から12月までの生牛価格の期待成長率は、

$$\ln\left(\frac{62.70}{60.60}\right)=0.034$$

すなわち、連続複利で2カ月当たり3.4%である。年率換算すると20.4%になる。

#### 【例33.4】

生牛先物価格は例33.3と同じとする。牛を繁殖させることにすると、現時点で100,000ドルの投資が必要で、3カ月後、6カ月後、および9カ月後にそれぞれ20,000ドルの支出を伴う。投資すると、1年後には追加の牛が出荷可能になると期待される。不確実性は主に二つある。追加で出荷可能な牛の量とポンド当りの価格である。追加出荷量の期待値は300,000ポンドである。リスク中立世界での1年後の牛の期待価格は、例33.3より1ポンド当り64.40セントである。無リスク金利を年率10%と仮定すると、この投資の価値（単位：千ドル）は、

$$-100 - 20e^{-0.1 \times 0.25} - 20e^{-0.1 \times 0.50} - 20e^{-0.1 \times 0.75} + 300 \times 0.644e^{-0.1 \times 1} = 17.729$$

となる。これは、牛の追加出荷量に関する不確実性はシステムティック・リスクを有しないことと、出荷可能な牛の量と価格は無相関であることを仮定した場合の結果である。

## 平均回帰性

商品価格を表すものとして、(33.3)式の確率過程は単純すぎるという意見もあるだろう。実際、ほとんどの商品価格は平均回帰過程に従っており、中心価値へ引き戻される傾向をもつ。商品価格  $S$  に対する(33.3)式よりもっと現実的なリスク中立過程は、

$$d\ln S = [\theta(t) - a\ln S] dt + \sigma dz \quad (33.4)$$

である。この式は平均回帰の項を含んでおり、第30章で短期金利に対して仮定した対数正規過程に類似したものである。30.7節の三項ツリーの方法を適用して  $S$  のツリーを構築し、 $F(t) = \hat{E}[S(t)]$  となるように  $\theta(t)$  の値を決めることができる。

商品価格に対する3期間ツリーを構築して、この過程について説明しよう。現在の現物価格を20ドル、満期1年、2年、3年の先物価格をそれぞれ22ドル、23ドル、24ドルとする。また、(33.4)式で、 $a=0.1$ 、 $\sigma=0.2$ と仮定する。まず、初期値ゼロで、

$$dX = -aXdt + \sigma dz \quad (33.5)$$

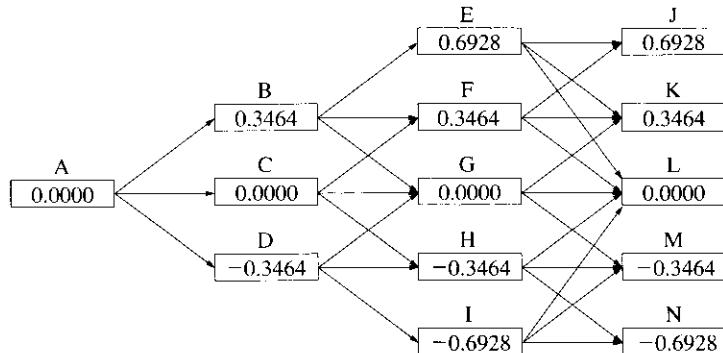
に従う変数  $X$  を定義する。30.7節の手続を用いて、 $X$  に対する三項ツリーを構築する。このツリーを図33.1（次頁）に示す。

変数  $\ln S$  は、時間に依存するドリフトを除けば  $X$  と同じ過程に従っている。30.7節と同様に、ノードの位置を移動することによって、 $X$  に対するツリーを  $\ln S$  に対するツリーに変換することができる。このツリーを図33.2（次頁）に示す。最初のノードは価格20に対応するので、そのノードは  $\ln 20$ だけ移動する。1年後のノードを  $\alpha_1$ だけ移動させるとする。1年後の3個のノードにおける  $X$  の値は、 $+0.3464$ 、 $0$ 、 $-0.3464$ である。それに対応する  $\ln S$  の値は  $0.3464 + \alpha_1$ 、 $\alpha_1$ 、 $-0.3464 + \alpha_1$ となる。したがって、 $S$  の値はそれぞれ  $e^{0.3464+\alpha_1}$ 、 $e^{\alpha_1}$ 、 $e^{-0.3464+\alpha_1}$ となる。 $S$  の期待値は先物価格に等しくなる必要があるので、

$$0.1667e^{0.3464+\alpha_1} + 0.6666e^{\alpha_1} + 0.1667e^{-0.3464+\alpha_1} = 22$$

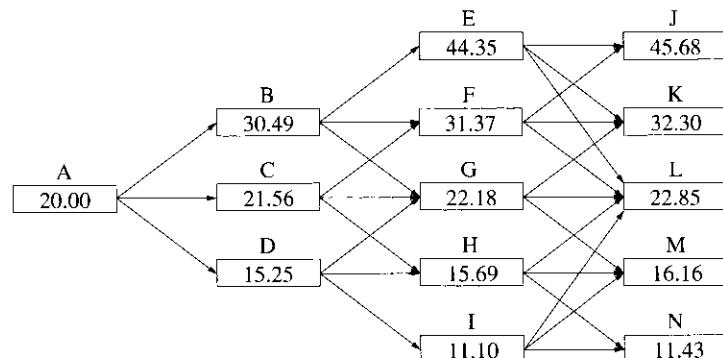
が成り立つ。この式を解くと  $\alpha_1=3.071$ が得られる。したがって、1年後の  $S$  の値は30.49、21.56、および15.25になる。

図33.1  $X$  のツリー（このツリーは、商品の現物価格  $S$  のツリーを構築する第一段階として構築される。 $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$ はノードから上、真ん中、下へ推移する確率である）



| /-#   | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u$ | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$ | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$ | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

図33.2 商品の現物価格のツリー（ $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$ はノードから上、真ん中、下へ推移する確率である）



| /-#   | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u$ | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$ | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$ | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

2年後については、まず、ノード B, C, D に到達してからノード E, F, G, H, I に到達する確率を計算する。ノード F に到達する確率は、ノード B からノード F に移る確率をノード B に到達する確率倍したものに、ノード C からノード F に移る確率をノード C に到達する確率倍したものを加えたものである。これは、

$$0.1667 \times 0.6566 + 0.6666 \times 0.1667 = 0.2206$$

となる。同様に、ノード E, G, H, I に到達する確率はそれぞれ 0.0203, 0.5183, 0.2206, 0.0203 になる。2年後のノードを  $\alpha_2$  だけ移動させるとすると、

$$0.0203e^{0.6928+\alpha_2} + 0.2206e^{0.3464+\alpha_2} + 0.5183e^{\alpha_2} + 0.2206e^{-0.3464+\alpha_2} \\ + 0.0203e^{-0.6928+\alpha_2} = 23$$

が成り立つ。これを解くと  $\alpha_2 = 3.099$  が得られる。したがって、2年後の S 価値は、それぞれ 44.35, 31.37, 22.18, 15.69, および 11.10 になる。

3年後についても同様の計算を行う。図 33.2 は S に対して得られたツリーである。次節では、このツリーを用いたリアル・オプションの評価方法について説明する。

### 33.6 投資機会のオプションの評価

すでに述べたように、ほとんどの投資プロジェクトにはオプションが内包されている。それらのオプションはプロジェクトにかなりの価値を付加しうるが、無視されたり、間違った評価が行われたりすることもよくある。プロジェクトに内包されるオプションには、以下のようなものがある。

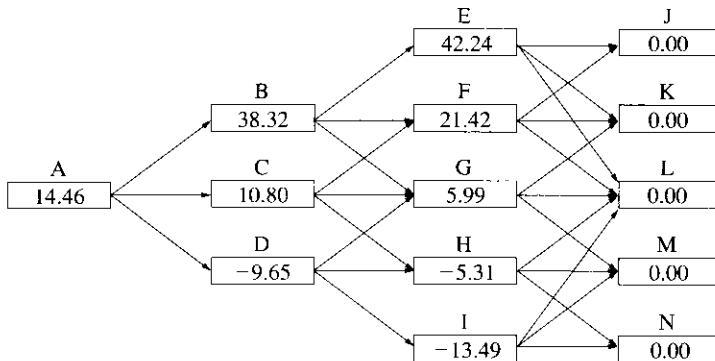
1. 撤退オプション：これは、プロジェクトを売却もしくは中止するオプションである。プロジェクトの価値に対するアメリカン・プット・オプションに当たる。オプションの行使価格はプロジェクトの売却価値から撤退費用を引いた額である。売却価値が低い場合は、行使価格は負になりうる。撤退オプションは、投資結果が非常に悪い場合の影響を和らげ、プロジェクトの当初価値を増加させる。

2. 拡大オプション：これは、状況が好ましい場合に追加投資を行い、生産量を増加させるオプションである。追加生産能力の価値に対するアメリカン・コール・オプションに当たる。コール・オプションの行使価格はこの追加生産能力をつくるための費用をオプション行使時点まで割り引いた値である。行使価格は初期投資額に依存することも多い。経営者が当初段階で、生産量の期待水準を上回る設備の建設を選択した場合、行使価格は相対的に小さなものになる。
3. 縮小オプション：これは、プロジェクトの操業規模を縮小するオプションである。失った生産能力の価値に対するプット・オプションに当たる。行使価格は権利行使時点でみた節約できた将来の支出の現在価値である。
4. 延期オプション：経営者が意思決定できる最も重要なオプションの一つがプロジェクトを延期するオプションである。これは、プロジェクトの価値に対するアメリカン・コール・オプションである。
5. 延長オプション：一定額を支払うことで資産の寿命を延長できる場合もある。これは、資産の将来価値に対するヨーロピアン・コール・オプションである。

オプションが内包された投資を評価する簡単な例として、ある産地からある商品600万単位を、3年間、1年当たり200万単位の割合で採掘するために、1,500万ドルを投資するかどうかを決めなければならない企業について考える。設備を稼働させる固定費は年間600万ドルで、変動費は採掘した1商品当たり17ドルである。無リスク金利はすべての満期に対して年率10%とし、商品の現物価格を20ドル、満期1年、2年、3年の先物価格をそれぞれ22ドル、23ドル、24ドルとする。また、商品価格に対する確率過程は(33.4)式で $\alpha=0.1$ ,  $\sigma=0.2$ と推定されていると仮定する。このとき、リスク中立世界における商品価格の動きは図33.2のツリーで表される。

最初は、プロジェクトにオプションが内包されていない場合を考える。リスク中立世界での1年後、2年後、3年後の商品価格の期待値はそれぞれ22ドル、23ドル、24ドルである。リスク中立世界におけるプロジェクトの期待

図33.3 オプションを内包していない基本プロジェクトの評価 ( $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$ はノードから上, 真ん中, 下へ推移する確率である)



| ノード   | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u$ | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$ | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$ | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

ペイオフ（単位：100万ドル）は、費用のデータより1年後、2年後、3年後のそれぞれに4.0, 6.0, 8.0と計算される。したがって、プロジェクトの価値は、

$$-15.0 + 4.0e^{-0.1 \times 1} + 6.0e^{-0.1 \times 2} + 8.0e^{-0.1 \times 3} = -0.54$$

となる。この分析結果より、プロジェクトは株主価値を54万ドル減少させるため、実行すべきではないということがわかる。

図33.3は、図33.2の各ノードにおけるプロジェクトの価値を示したものである。これは図33.2から計算できる。たとえば、ノード Hについて考えよう。商品価格は確率0.2217で3年目の終わりに22.85となり、その場合の3年目の損益は $2 \times 22.85 - 2 \times 17 - 6 = 5.70$ になる。同様に、確率0.6566で商品価格は3年目の終わりに16.16となり、その場合の損益は-7.68に、確率0.1217で商品価格は3年目の終わりに11.43となり、その場合の損益は-17.14になる。したがって、図33.3のノード Hにおけるプロジェクトの価値は、

$$[0.2217 \times 5.70 + 0.6566 \times (-7.68) + 0.1217 \times (-17.14)] e^{-0.1 \times 1} = -5.31$$

となる。もう一つの例として、ノード C について考えよう。確率0.1667で商品価格は31.37のノード F に推移する。このとき、2年目のキャッシュフローは $2 \times 31.37 - 2 \times 17 - 6 = 22.74$ になる。ノード F でその後発生するキャッシュフローの価値は21.42である。したがって、ノード F に推移した場合のプロジェクトの合計価値は $21.42 + 22.74 = 44.16$ になる。同様にして、ノード G と H に推移した場合のプロジェクトの合計価値はそれぞれ10.35と-13.93になる。したがって、ノード C におけるプロジェクトの価値は、

$$[0.1667 \times 44.16 + 0.6666 \times 10.35 + 0.1667 \times (-13.93)] e^{-0.1 \times 1} = 10.80$$

となる。図33.3から、はじめのノード A におけるプロジェクトの価値は14.46になることがわかる。初期投資額を考慮すると、プロジェクトの価値は-0.54になる。これは先に計算した結果と一致している。

次に、企業がプロジェクトからいつでも撤退できるオプションをもっている場合について考える。プロジェクトから撤退した場合、回収価値はゼロで、追加の支払は発生しないと仮定する。プロジェクトから撤退することは行使価格がゼロのアメリカン・プット・オプションであり、その価値は図33.4のように評価される。ノード E, F, G ではプロジェクトの価値が正であるため、プット・オプションは行使されない。ノード H と I ではオプションは行使されるべきである。その場合、ノード H と I におけるプット・オプションの価値はそれぞれ5.31と13.49になる。ツリーに沿って後戻しすると、行使しない場合のノード D における撤退プット・オプションの価値は、

$$(0.1217 \times 13.49 + 0.6566 \times 5.31 + 0.2217 \times 0) e^{-0.1 \times 1} = 4.64$$

となる。行使した場合のノード D におけるプット・オプションの価値は9.65である。これは4.64より大きいので、プットはノード D では行使されるべきである。ノード C におけるプット・オプションの価値は、

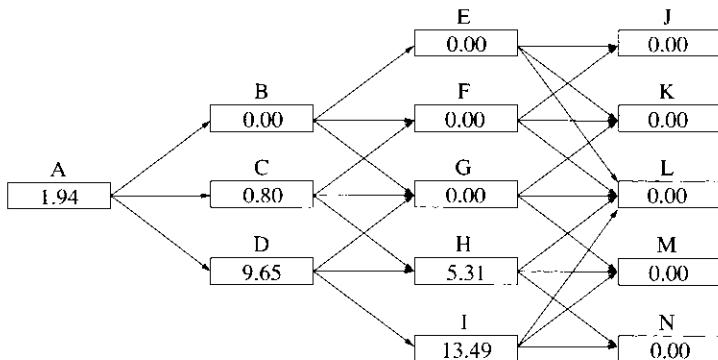
$$(0.1667 \times 0 + 0.6666 \times 0 + 0.1667 \times 5.31) e^{-0.1 \times 1} = 0.80$$

となり、ノード A における価値は、

$$(0.1667 \times 0 + 0.6666 \times 0.80 + 0.1667 \times 9.65) e^{-0.1 \times 1} = 1.94$$

となる。したがって、撤退オプションの価値は194万ドルになる。このオプ

図33.4 プロジェクトの撤退オプションの評価 ( $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$ はノードから上, 真ん中, 下へ推移する確率である)



| ノード   | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u$ | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$ | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$ | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

ションにより、プロジェクトの価値は−54万ドルから+140万ドルに増加する。それまでは魅力がなかったプロジェクトが、いまや株主にとって正の価値をもつことになった。

今度は、企業が撤退オプションをもっていないかわりに、いつでもプロジェクトの規模を20%拡大できるオプションをもっている場合について考える。この規模の拡大に伴う費用は200万ドルとする。生産量は年間200万単位から240万単位に増加する。変動費は1単位当たり17ドルのままで、固定費は20%増加して600万ドルから720万ドルになる。これは、図33.3の基本プロジェクトの20%を200万ドルで買うアメリカン・コール・オプションである。このオプションは図33.5(次頁)のように評価される。ノードEではオプションは行使するべきである。そのペイオフは $0.2 \times 42.24 - 2 = 6.45$ になる。ノードFでも行使するべきで、そのペイオフは $0.2 \times 21.42 - 2 = 2.28$ になる。ノードG, H, およびIではオプションは行使するべきではない。ノードBでは待つよりも行使したほうが価値があり、オプションの価値は $0.2 \times 38.32 - 2 = 5.66$ になる。行使しない場合のノードCにおけるオプションの

価値は、

$$(0.1667 \times 2.28 + 0.6666 \times 0.00 + 0.1667 \times 0.00) e^{-0.1 \times 1} = 0.34$$

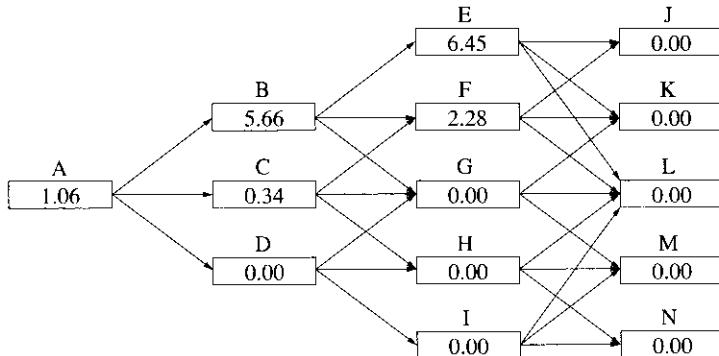
となる。行使した場合のオプションの価値は  $0.2 \times 10.80 - 2 = 0.16$  である。  
したがって、ノード C ではオプションは行使すべきではない。行使しない場合のノード A におけるオプションの価値は、

$$(0.1667 \times 5.66 + 0.6666 \times 0.34 + 0.1667 \times 0.00) e^{-0.1 \times 1} = 1.06$$

となる。行使した場合のオプションの価値は  $0.2 \times 14.46 - 2 = 0.89$  である。  
したがって、ノード A では早期行使は最適ではない。この場合には、オプションによりプロジェクトの価値は  $-0.54$  から  $+0.52$  に増加する。今度の場合にも、それまでは負の価値であったプロジェクトが正の価値をもつようになることがわかった。

図33.5の拡大オプションは比較的評価しやすい。その理由は、いったんオプションが行使されると、その後はすべてのキャッシュ・インフローとアウトフローが20%増になるからである。固定費が同じままの場合や20%未満の割合で増加する場合には、図33.3の各ノードにおける情報をたどる必要があ

**図33.5 プロジェクトの拡大オプションの評価** ( $p_u$ ,  $p_m$ ,  $p_d$ はノードから上, 真ん中, 下へ推移する確率である)



| ノード   | A      | B      | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $p_u$ | 0.1667 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.8867 | 0.1217 | 0.1667 | 0.2217 | 0.0867 |
| $p_m$ | 0.6666 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 | 0.6566 | 0.6666 | 0.6566 | 0.0266 |
| $p_d$ | 0.1667 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.0867 | 0.2217 | 0.1667 | 0.1217 | 0.8867 |

る。特に、

1. それ以降の固定費の現在価値
2. それ以降の変動費を差し引いた売上げの現在価値

を記録する必要がある。それらから、オプションが行使された場合のペイオフが計算できるようになる。

プロジェクトに二つ以上のオプションが存在する場合、一般的にはそれらは独立ではない。オプション A とオプション B の両方を保有しているときの価値は、一般的にそれら二つのオプションの価値の和にはならない。このことを説明するために、企業が撤退オプションと拡大オプションの両方をもっている場合について考えよう。プロジェクトからすでに撤退している場合には、プロジェクトは拡大できない。さらに、撤退プロット・オプションの価値は、プロジェクトがすでに拡大されているかどうかにも依存している（注2）。

この例では、オプション間の相互作用は、各ノードで次の四つの状態を定義すれば扱うことが可能である。

1. まだ撤退していない／まだ拡大していない
2. まだ撤退していない／すでに拡大している
3. すでに撤退している／まだ拡大していない
4. すでに撤退している／すでに拡大している

ツリーに沿って後戻しするとき、各ノードで四つの選択肢すべてを組み合わせてオプションの価値を計算すればよい。このような経路依存型オプションの評価方法については、26.5節でより詳しく論じている。

複数の確率変数が存在する場合には、基本プロジェクトの価値はふつうモンテカルロ・シミュレーションを用いて計算される。モンテカルロ・シミュレーションではプロジェクトの開始時点から終了時点へ前向きに計算するため、オプションを内包したプロジェクトの評価はよりむずかしいものにな

---

（注2） 実は、図33.4と図33.5では二つのオプションは相互作用しない。しかし、より小さな時間ステップの大きなツリーを構築した場合には、オプション間の相互作用が問題になってくるだろう。

る。ある点に到達したとき、それ以降のプロジェクトの将来のキャッシュフローの現在価値に関する情報をもっていないからである。しかし、26.8節で述べたモンテカルロ・シミュレーションを用いたアメリカン・オプションの評価方法を使って評価できる場合もある。

これを説明するものとして、Schwartz と Moon (2000) はビジネス寸見33.1で概説したAmazon.com の分析を、将来のキャッシュフローが負になった場合に撤退するオプション（すなわち破産を宣言するオプション）を考慮したものに拡張する方法について説明している(注3)。各時間ステップにおいて、撤退しない場合の価値と、その時点の売上げや売上げの成長率、ボラティリティ、現金残高、繰延欠損金のような変数との間に多項式の関係が仮定される。シミュレーションの各試行では、各時点でのその関係に対する最小2乗法による推定値を得るための計算が行われる。これは26.8節のLongstaff と Schwartz の方法と同じである(注4)。

## 要約

本章では、本書のはじめより発展させてきた考え方を実物資産やそれに対するオプションに適用する方法について検討した。そこでは、リスク中立化法を用いて、任意の変数に依存するプロジェクトを評価する方法について示した。各変数の期待成長率はリスクの市場価格を反映するよう調整される。そうすると、資産の価値は、キャッシュフローの期待値を無リスク金利で割り引いた現在価値になる。

リスク中立化法は内的整合性をもった資本投資の評価方法である。この方

---

(注3) 33.4節の分析では、現金残高がゼロ未満になった場合に破産となると仮定したが、Amazon.com に対しては、それが必ずしも最適とは限らない。

(注4) F.A. Longstaff and E.S. Schwartz, "Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach," *Review of Financial Studies*, 14, 1 (Spring 2001) : 113-47.

法は、実務で扱う多くのプロジェクトに内包されているオプションを評価することも可能である。本章ではこの方法の適用例として、1999年末におけるAmazon.comの評価と商品採掘プロジェクトの評価について説明した。

## 参考文献

- Amran, M., and N. Kulatilaka. *Real Options*, Boston, MA : Harvard Business School Press, 1999.
- Copeland, T., T. Koller, and J. Murrin. *Valuation : Measuring and Managing the Value of Companies*, 3rd edn. New York : Wiley, 2000.
- Copeland, T., and V. Antikarov. *Real Options : A Practitioners Guide*, New York : Texere, 2003.
- Schwartz, E.S., and M. Moon, "Rational Pricing of Internet Companies," *Financial Analysts Journal*, May/June (2000) : 62-75.
- Trigeorgis, L. *Real Options : Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, Cambridge, MA : MIT Press, 1996.

## 章末問題

- 33.1** 新規の資本投資機会を評価する方法として、NPV法とリスク中立化法の違いについて説明せよ。また、リアル・オプションの評価に関して、リスク中立化法の長所をあげよ。
- 33.2** 銅のリスクの市場価格を0.5、銅価格のボラティリティを年率20%，1ポンド当りの現物価格を80セント、満期6カ月の先物価格を1ポンド当り75セントとする。このとき、今後6カ月における銅価格の期待成長率を求めよ。

- 33.3** ボラティリティが定数  $\sigma$  で、期待成長率が時間のみの関数で与えられる商品について考える。従来のリスク中立世界では、

$$\ln S_T \sim \phi\left(\ln F(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T\right)$$

となることを示せ。ただし、 $S_T$  は時点  $T$  における商品の価値、 $F(t)$  は時点 0 における満期  $t$  の先物価格、 $\phi(m, v)$  は平均  $m$ 、分散  $v$  の正規分布である。

- 33.4** 商品のコンビニエンス・イールドとリスクの市場価格との関係について導出せよ。

- 33.5** ある企業の総売上げとマーケット指数との相関係数は 0.2 である。無リスク金利に対する市場の超過収益率は 6 % で、マーケット指数のボラティリティは 18 % である。この企業の売上げに対するリスクの市場価格を求めよ。

- 33.6** ある企業が 3 年後に 1 単位当たり 25 ドルで商品を 100 万単位引き渡すオプションを買うことができるとする。満期 3 年の先物価格を 24 ドル、無リスク金利を連続複利で年率 5 %、先物価格のボラティリティを年率 20 % とする。このオプションの価値を求めよ。

- 33.7** 車のリース契約を結ぼうとしているドライバーが、4 年後にその車を 10,000 ドルで買う権利をその契約につけることができるとする。現在の車の価値は 30,000 ドルである。車の価値  $S$  は、

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

で表される確率過程に従っているとする。ただし  $\mu = -0.25$ 、 $\sigma = 0.15$  で、 $dz$  はウィナー過程である。また、車の価格に対するリスクの市場価格は -0.1 と推定されている。このオプションの価値を求めよ。ただし、無リスク金利はすべての満期に対して 6 % と仮定せよ。

## 宿題

**33.8** 小麦に対する現物価格、満期6カ月の先物価格、満期12カ月の先物価格が1ブッシュル当たりそれぞれ250セント、260セント、270セントであるとする。小麦の価格は、(33.4)式で  $a=0.05$ ,  $\sigma=0.15$ とした確率過程に従っているとする。リスク中立世界での小麦の価格に対する2期間ツリーを構築せよ。

ある農家が、現時点で10,000ドル、6カ月後にさらに90,000ドルの支出を伴うプロジェクトを検討している。このプロジェクトを行うと小麦の収穫が増え、1年後に40,000ブッシュルだけ多く販売できることが見込まれる。このとき、このプロジェクトの価値を求めよ。この農家は、6カ月後にこのプロジェクトを中止して、その時点での90,000ドルの支払を回避することもできるとする。この場合の撤退オプションの価値を求めよ。ただし、無リスク金利は連続複利で5%と仮定せよ。

**33.9** 33.6節の例について、次の間に答えよ。

- 撤退の費用をゼロではなく300万ドルとして、撤退オプションの価値を求めよ。
- 拡大にかかる費用を200万ドルではなく500万ドルとして、拡大オプションの価値を求めよ。

## 第34章

# デリバティブにおける不幸な出来事と教訓

1980年代半ば以降、デリバティブ市場ではいくつかの企業が巨額の損失を被った。金融機関によるいくつかの損失例をビジネス寸見34.1に一覧表としてまとめ、金融機関以外の組織によるいくつかの損失例をビジネス寸見34.2（1151頁）に一覧表としてまとめた。これらのリストについて注目すべきことは、一従業員の行為が巨額損失につながったケースの多さである。1995年、ニック・リーソンのトレーディングは創業200年に及ぶ英国の銀行であるペアリング銀行を倒産に追いやった。1994年、ロバート・シトロンの取引によって、カリフォルニア州の地方自治体であるオレンジ郡は20億ドルの損失を被った。ジョセフ・ジェットのトレーディングによって、キダー・ピーボディは3億5,000万ドルの損失を被った。アライド・アイリッシュ銀行のジョン・ラズナックによる7億ドルもの損失が2002年に発覚した。2006年、ヘッジファンドのアマランスはブライアン・ハンターのとったトレー

ディング・リスクによって60億ドルの損失を被った。2008年、ソシエテ・ジェネラルはジェロム・ケルビュの株価指数先物取引によって70億ドルの損失を被った。大和銀行、シェル、住友商事の巨額損失も、一個人の行為によってもたらされたものである。

これらの損失は、デリバティブ業界全体への警鐘としてとらえられるべきものではない。デリバティブ市場は数兆ドルにも及ぶ巨大市場に成長し、ほとんどの点でめざましい成功を収めており、ユーザーのニーズにもよく応えてきた。アラン・グリーンスパン（2003年5月）の次の言葉を引用しておこう。

ますます広範に発展するデリバティブの利用や、それに関連するより洗練されたリスク計測手法やリスク管理手法の応用は、最大の金融仲介者の回復力強化を支える重要なファクターである。

ビジネス寸見34.1と34.2に示した出来事は、全取引に対してほんの小さな割合（量的にも、価値的にも）でしかない。しかしながら、これらの出来事から学べる教訓を注意深く検討する価値はあろう。

### ビジネス寸見34.1 金融機関による巨額損失

#### アライド・アイリッシュ銀行

この銀行は、外国為替トレーダーであるジョン・ラズナックの数年にわたる投機行動により、約7億ドルの損失を被った。ラズナックは架空のオプション取引により、数年間、損失を隠蔽していた。

#### アマランス

このヘッジファンドは天然ガス価格の将来の方向に賭ける取引を行い、2006年に60億ドルの損失を出した。

#### ペアリング銀行（22ページを参照）

この創立200年の英国の銀行は、シンガポールのニック・リーソンという1人のトレーダーの行動により、1995年に破綻した。彼は先物とオプションを用いて、日経225の将来の方向に対して大きな賭けを行った。総損失額は10億ドル近くに及んだ。

#### 大和銀行

この日本の銀行のニューヨーク在勤のトレーダーが、1990年代に10億ドル以上の損失を出した。

#### キダー・ピーボディ（151ページを参照）

このニューヨークの投資銀行は、ジョセフ・ジェットという1人のトレーダーの米国債の取引によって、3億5,000万ドルの損失を被った。この損失は、同社のコンピュータ・システムによる損益計上方法の誤りにより発生した。

#### ロングターム・キャピタル・マネジメント（45ページを参照）

このヘッジファンドは、ロシアの債務不履行をきっかけに発生した質への逃避の影響で、1998年に約40億ドルの損失を出した。ニューヨーク連邦準備銀行は14の銀行による協調融資を取りまとめ、組織的にファンドに流動性を供給した。

#### ミッドランド銀行

この英国の銀行は、1990年代初めに主に金利の方向に賭ける取引で失敗し、5億ドルの損失を出した。後に香港上海銀行に買収された。

#### ナショナル・ウェストミンスター銀行

この英国の銀行は、1997年にスワップションの評価で不適切なモデルを使用し、約1億3,000万ドルの損失を出した。

### ソシエテ・ジェネラル

ジェロム・ケルビュが株価指数の将来の方向に対して投機を行い、2008年1月に70億ドルを超える損失を出した。

### サブプライム住宅ローンによる損失（809ページを参照）

2007年に、米国のサブプライム住宅ローンから組成された仕組商品に対して、投資家の信頼が失われた。このことが「信用収縮」を引き起こし、金融機関は数百億ドルの損失を被った。

## ビジネス寸見34.2 金融機関以外の組織による巨額損失

### アライド・ライオンズ

この飲食企業の財務部門は、米ドル・英ポンドの為替のコール・オプションの売却で、1991年に1億5,000万ドルの損失を出した。

### ギブソン・グリーティングス

このシンシナティのグリーティング・カード製造業者の財務部門は、パンカーズ・トラストとの複雑な金利エキゾチック・デリバティブ取引で、1994年に約2,000万ドルの損失を出した。後に、この企業はパンカーズ・トラストを訴え、法廷外で和解している。

### ハマースミス区とフラム区（251ページを参照）

この英国の地方自治体は、1988年に英ポンドの金利スワップとオプションで約6億ドルの損失を出した。すべての取引は後から英国の裁判所によって無効と宣言され、取引相手の銀行をひどく困惑させることになった。

#### メタルゲゼルシャフト（97ページを参照）

このドイツ企業は、原油とガソリンを供給する長期契約を結び、短期の先物契約をロール・オーバーすることによってヘッジを行っていた。この取引を強制的に解約するのに伴い、18億ドルの損失を出した。

#### オレンジ郡（122ページを参照）

この米国カリフォルニア州の地方自治体は、ロバート・シトロンという財務担当者の行動により、1994年に約20億ドルの損失を被った。この財務担当者は、デリバティブを用いて金利が上昇しないことに投機していた。

#### プロクター・アンド・ギャンブル（1119ページを参照）

この米国大企業の財務部門は、バンカーズ・トラストとの複雑な金利エキゾチック・デリバティブ取引で、1994年に約9,000万ドルの損失を出した。後に、この企業はバンカーズ・トラストを訴え、法廷外で和解している。

#### シェル

この企業の日本子会社に勤務する一従業員が、許可されていない為替先物取引で10億ドルの損失を出した。

#### 住友商事

この日本の企業に勤務する1人のトレーダーが、1990年代に銅の現物、先物、およびオプション市場で約20億ドルの損失を出した。

### 34.1 すべてのデリバティブ利用者に対する教訓

最初は、金融機関かそれ以外の企業かにかかわらず、すべてのデリバティ

ブ利用者に当てはまる教訓について考えよう。

### リスク・リミットを定義せよ

すべての企業にとって、とることのできる金融リスクのリミットをわかりやすく、曖昧さのない方法で定義することは、きわめて重要である。そして、そのリミットが遵守されるようにするための手続を規定すべきである。理想的には、全体のリスク・リミットは取締役レベルで決められるべきである。そしてこれらのリスク・リミットは、特定のリスクの管理責任を負っている個々人に適用可能なりミットに変換されるべきである。また、日次レポートには個々の市場変数の変動に伴って生じるであろう損益の予測を示すべきである。レポートに使われている評価方法が正確であることを確実にするために、それらの予測値を実際に発生した損益と比べてチェックすべきである。

デリバティブを利用する場合には、リスクを注意深くモニターすることが企業にとって特に重要である。その理由は、第1章で説明したように、デリバティブはヘッジにも、投機にも、裁定取引にも使用することができるからである。細かくモニターすることなしに、トレーダーがヘッジジャーからスペキュレーターに変わったり、アービトラージャーからスペキュレーターに変わったりしたのを見抜くことは不可能である。ペアリング銀行がそれを怠って失敗したよい例である。ニック・リーソンの職務は、シンガポール市場と大阪市場の日経225先物間のリスクの低い裁定取引を行うことであった。ロンドンの上司は気づいていなかったが、リーソンはアービトラージャーから日経平均の将来の方向に巨大な賭けをするトレーダーに変わっていた。当時のペアリングの体制は不適切で、彼の行っていることをだれも知らなかつたのである。

ここでの論点は、リスクをとるべきではないというものではない。企業の財務担当者や金融機関のトレーダー、ファンドマネジャーは、業務に関係する市場変数の将来の方向に対してポジションをとることを許容されるべきである。しかし、とることのできるポジションの大きさは制限されるべきであ

り、とられたリスクが正確に報告される体制を築く必要がある。

### リスク・リミットを重く受けとめよ

ある個人がリスク・リミットを超過し、利益を稼いだ場合、どうするべきか。これは経営者にとって扱いにくい問題である。利益が得られた場合、リスク・リミットの違反は黙認される傾向がある。しかし、これは先のことを考えない行為である。そのようなことがリスク・リミットを軽視するキャラチャーを生み、将来の大損失を招く種をまくことになる。ビジネス寸見34.1と34.2の多くのケースでは、その前の何年かに同様のリスクをとて利益をあげていたことから、企業はとっているリスクを放置するようになっていた。

ここでのよい例はオレンジ郡のケースである。1991年から1993年までのロバート・シトロンの取引によってオレンジ郡は大きな収益を得ており、この地方自治体は追加の資金調達を彼のトレーディングに頼るようになっていた。彼が収益をあげていたため、人々は彼のとっているリスクについてみてみぬふりをしていたのである。不幸なことに、1994年に生じた損失はそれまでの利益をはるかに超えるものであった。

リスク・リミットの超過に対する罰則は、利益となった場合も損失となつた場合と同程度に厳しいものであるべきである。そうでなければ、損失を出したトレーダーは、いつかは利益を出せてそれまでのすべてを帳消しできる、というあまい期待を抱いて、そのポジションを増やし続けてしまうだろう。

### 市場を出し抜くことができると思い込むな

他のトレーダーよりかなりの確率でうまくやるトレーダーはいる。しかし、常にうまくやるトレーダーはいない。トレーダーは、相場の方向を60%の確率で正しく予想できれば上出来である。トレーダーが（1990年代初頭のロバート・シトロンのように）抜きん出た実績をあげているとすれば、それは秀逸なトレーディング能力というよりも、むしろ幸運の結果であった可能性が高い。

たとえば、ある金融機関が16人のトレーダーを雇い、そのうちの1人が1年間のすべての四半期で利益をあげたとしよう。このトレーダーは高いボーナスを受け取れるであろうか。また、このトレーダーのリスク・リミットは拡大されるべきであろうか。最初の問の答としては、トレーダーは必然的に高いボーナスを受け取ることになるだろう。2番目の問に対する答は否である。ランダムにトレーディングを行って、4期連続で利益をあげる可能性は0.5<sup>4</sup>、すなわち16分の1である。このことは、単なる偶然だけで16人のトレーダーのうち1人は1年間のすべての四半期でうまくやるだろう、ということを意味している。したがって、そのトレーダーの運が続くと仮定すべきではなく、そのトレーダーのリスク・リミットを拡大すべきではない。

### 分散投資の恩恵を過小評価するな

トレーダーの相場予想がよく当たると、トレーダーのリミットは拡大される傾向がある。トレーダーが賢かったというよりも、運がよかったという可能性が高いため、これはあまり賢明な考えではないことを論じてきた。しかし、あるファンドでは、そのトレーダーは特別な能力をもっていると本当に確信されていると仮定しよう。その場合、そのトレーダーの能力を活かすために、どの程度までリスクを集中させてよいものだろうか。その答は、分散投資の恩恵はすごく大きく、その恩恵を捨ててまで一つの市場変数に集中投資させる価値のある優秀なトレーダーがいるとは考えにくい、というものである。

この点について例を用いて説明しよう。20銘柄の株式があり、どの銘柄も期待収益率は年率10%、収益率の標準偏差は30%であるとする。収益率の相關はどの銘柄間に対しても0.2とする。このとき、20銘柄に均等に投資した場合、期待収益率は10%で、その標準偏差は14.7%になる。分散投資によって、投資家はリスクを半分未満に減らすことができる。別の言い方をすると、投資家は分散投資によって単位リスク当たりの期待収益率を倍以上にできる。1銘柄だけの投資でもっとよいリスク／リターンのトレードオフを得るために、銘柄選択が相当うまくなければならない。

## **シナリオ分析とストレス・テストを実施せよ**

VaRなどのリスク指標の計算とともに、悪いときに起こりうることを把握するために、シナリオ分析とストレス・テストを常に行うべきである。これらについては第20章で説明した。それらは非常に重要である。不幸にも人間は、一つや二つのシナリオを拠り所にして、意思決定の評価を行う傾向がある。たとえば、1993年と1994年にプロクター・アンド・ギャンブルとギブソン・グリーティングスは低金利が続くと確信して、金利が100ペーシス・ポイント上昇する可能性を無視して意思決定を行ったのかもしれない。

シナリオを作成する際には創造力が重要である。一つの方法は、過去10年から20年の過去データをみて、最も極端な事象をシナリオとして選ぶというものである。重要な変数に対して、データが不足している場合もある。そのような場合には、利用可能なデータが豊富な似たような変数を選び、その変数の過去の日次変化率をその重要な変数の日次変化率として用いるのが賢明なやり方である。たとえば、ある国が発行した債券の価格データがほとんどない場合には、他の似たような国が発行した債券の価格の過去データを用いれば、シナリオを作成することができる。

## **34.2 金融機関に対する教訓**

次に、主として金融機関に関する教訓について考えよう。

### **トレーダーを注意深くモニターせよ**

トレーディング・ルームでは、パフォーマンスの高いトレーダーを「触れてはならないもの」として、他のトレーダーと同様な綿密さでは彼らの行動を検査しない傾向がある。キダー・ピー・ボディの花形の国債トレーダーであったジョセフ・ジェットは、企業のリスク管理者からの質問に応じたり、ポジションについて議論するには「多忙」すぎたようである。

すべてのトレーダーには、特に高収益をあげているトレーダーには、十分な報告義務がある、ということが重要である。高収益が不当に高いリスクを

とったことによるものかどうかを知ることは、金融機関にとって重要である。また、金融機関のコンピュータ・システムと価格付けモデルが正しいことや、それらがなんらかの方法で不当に操作されていないかをチェックすることも重要である。

### フロント、ミドル、バック・オフィスを分離せよ

金融機関におけるフロント・オフィスは、取引を執行したりポジションをとったりするトレーダーからなる部署である。ミドル・オフィスは、とられたリスクをモニターするリスク管理者からなる部署である。バック・オフィスは、約定管理や会計処理を行う部署である。デリバティブにまつわる最悪の事態には、こうした機能が分離されていなかったために起こったものもある。ニック・リーソンはペアリング銀行のシンガポール支店のフロント・オフィスとバック・オフィスの両方を管理しており、その結果、彼の取引の悲惨な結果をかなりの間ロンドンの上司から隠すことができた。ジェロム・ケルビュはトレーダーになる前にソシエテ・ジェネラルのバック・オフィスで働いており、そのシステムの知識を活かしてポジションを隠すことができた。

### モデルを盲信するな

金融機関が被った大きな損失のいくつかは、使用していたモデルとコンピュータ・システムに起因するものであった。キダー・ピー・ボディが自分たちのシステムによって誤った事態を引き起こしてしまった、ことについては151ページで論じた。また、ナショナル・ウェストミンスター銀行の事例は間違ったモデルによる損失例である。この銀行は、スワップションの評価に間違ったモデルを用いて大きな損失を出した。

比較的単純なトレーディング戦略から大きな利益が報告されている場合は、損益の計算に使われているモデルに誤りがある可能性が高い。同様に、特定の種類の取引に対して特に競争力のある価格を表示しているような場合は、他の市場参加者と異なったモデルを使用している可能性が高く、何が起

こっているかを注意深く分析するべきである。トレーディング・ルームのヘッドにとって、特定の種類の取引ばかり行われることは、その種類の取引がほとんど行われないことと同じぐらい心配なことである。

### **当初収益の計上は保守的に行え**

金融機関が高度なエキゾチック商品を金融機関以外の企業に販売するとき、その価格はモデルに大きく依存する場合がある。たとえば、長期の金利オプションが内包された商品の価格は、使用する金利モデルに大きく依存することがある。このような場合、日々の時価評価に対してマーク・トゥ・モデル (marking to model) という言い方が使われる。その理由は、基準として使用できる同様の取引の市場価格が存在しないからである。

金融機関がある商品をその価値より1,000万ドル高い価格で、あるいはモデルから得られる価値より少なくとも1,000万ドル高い価格で、顧客に販売しようとしているとする。この1,000万ドルは当初収益 (inception profit) と呼ばれる。この当初収益はいつ認識されるべきであろうか。投資銀行によって、さまざまな取扱いがなされているようである。1,000万ドルを直ちに認識する銀行もあれば、もっと保守的に取引期間を通じて徐々に認識していく銀行もある。

当初収益を直ちに認識するのは非常に危険である。その理由は、自己に有利なモデルを使用し、多額のボーナスを受け取り、モデルと取引価値の綿密な検査を受ける前に会社を辞める、といった行動をトレーダーに促すからである。当初収益は徐々に認識するほうがずっと好ましく、そうすれば、取引を約定する前に複数の異なるモデルや複数の異なる仮定の影響について調べることをトレーダーに動機づけることができるからである。

### **顧客に適さない商品を販売するな**

法人顧客に不適切な商品を販売したいという誘惑に駆られることもあるだろう。特に、顧客のリスク選好が高い場合はそうである。しかし、それは近視眼的な行為である。最も記憶に残る例は、1994年春まで続いたバンカー

ズ・トラスト（BT）の営業活動であろう。BTの多くの顧客はリスクの高い、まったく不適当な商品の購入を勧誘されたのである。典型的な商品（たとえば1120ページで取り上げた5/30スワップ）は、顧客の借入コストを数ベーシス・ポイント安くする可能性が高く、大きな費用がかかる確率は小さいというものであった。1992年と1993年は、その商品はBTの顧客にとってメリットのあるものであったが、1994年に金利が急上昇したとき、すべてが台無しとなった。その後の悪い評判で、BTは大きな痛手を被った。長い期間をかけて築き上げた法人顧客との信頼関係や革新的なデリバティブに対する人がうらやむような評判が、数人の極端に強引なセールスマンの行動により、大部分失われてしまったのである。また、BTは法廷外で顧客と和解するために、多額の支払を強いられた。そして、1999年にドイツ銀行に買収されてしまった。

### 流動性リスクを無視するな

金融工学に携わる者は、活発に取引される商品の価格に基づいて、流動性の低いエキゾチック商品やその他の商品の価格付けを行うことが多い。次のようなものがその例である。

1. 活発に取引されている国債（on-the-run bond）からゼロ・カーブを計算し、それを用いて、あまり取引されていない債券（off-the-run bond）の価格付けを行う。
2. 活発に取引されているオプションから資産のインプライド・ボラティリティを求め、それを用いて、あまり取引されていないオプションの価格付けを行う。
3. 活発に取引されている金利キャップやスワップションにインプライドされている金利の挙動に関する情報を推定し、それを用いて複雑な仕組商品の価格付けを行う。

この慣習は理にかなっていないわけではない。しかし、あまり取引されていない商品が、常に自分たちの理論価格付近で取引できると仮定するのは危険である。金融市場がさまざまなショックに見舞われるとき、「質への逃避」

がしばしば起こる。そのとき、投資家にとって流動性がきわめて重要になり、流動性の低い商品は理論価格から大幅に割り引かれて売却されることが多い。サブプライム住宅ローン担保証券への信頼が失われたことを端に発生したクレジット市場に対する急激な動揺から、まさにこのことが2007年に起こった。

流動性リスクが原因で損失が発生したもう一つの例は、ビジネス寸見2.2で論じたロングターム・キャピタル・マネジメント（LTCM）の例である。このヘッジファンドは、コンバージェンス・アービトラージという戦略を用いていた。この戦略は、まず理論的には同じ価格で売られるべき二つの証券（もしくはポートフォリオ）を特定する。そして、一方の市場価格が他方の市場価格より低い場合に、安いほうの証券を購入して、高いほうの証券を売却するというものである。この戦略は、同じ理論価格をもつ二つの証券の市場価格はいずれ同じになる、という考えに基づいたものである。

1998年の夏に LTCM は巨額の損失を出した。これは、ロシアの債務不履行をきっかけに質への逃避が起こったことが主な原因である。LTCM は流動性の低い商品を買い、対応する流動性の高い商品を空売りする傾向にあった（たとえば、あまり取引されていない債券を購入し、活発に取引されている債券を空売りしていた）。ロシアの債務不履行以降、流動性の高い商品と対応する流動性の低い商品との価格間スプレッドが急激に広がった。LTCM は高いレバレッジをかけていたため、巨額の損失が発生し、そのポジションに対する追加担保の差入れに応じられなくなったのである。

LTCM の話は、世界が最悪の状況になったとき何が起こるかを知るために、シナリオ分析とストレステストの実施が重要であることを再認識させてくれるものである。LTCM は、自らが直面している流動性リスクを計測するために、過去に起きた極端な質への逃避の状況について分析すべきだったのかもしれない。

### 皆が同じ取引戦略を行っているときは注意せよ

多くの市場参加者が、本質的に同じ取引戦略を行っているような状況が起

きることもある。このような状況では、大きな市場変動が起こりやすく、不安定な市場となり、大きな損失を被る市場参加者が出てやすい危険な環境がつくり出される。

第17章で論じたポートフォリオ・インシュアランスと1987年10月の市場大暴落が、これの一例である。大暴落の数カ月前から、ブット・オプションを複製して自己のポートフォリオに保険をかけようとするポートフォリオ・マネジャーの数が増加していた。彼らは市場が上昇すると株式や株価指数先物を購入し、下落するとそれらを売却していた。この行動が不安定な市場をつくり出したのである。株価の比較的小さな下落でも、ポートフォリオ・インシュアランスを行っていた人々の売却の波を引き起こすことができた。それがさらに市場の下落に拍車をかけ、新たな売却の波を引き起こす、という連鎖が起こる状況にあった。ポートフォリオ・インシュアランスがなければ、1987年10月の暴落はあれほどひどくはならなかっただろう、ということにほんんど疑いの余地はない。

もう一つの例は、1998年の LTCM である。他の多くのヘッジファンドが同じようなコンバージェンス・アービトラージを行っていたという事実が、LTCM の問題をさらにむずかしくしていた。ロシアの債務不履行による質への逃避の後、LTCM は追加担保差入れに応じるため、ポジションの一部を手仕舞おうとした。不幸なことに、他のヘッジファンドも同様の問題に直面しており、同じような取引を行おうとしていた。これにより流動性スプレッドのさらなる拡大を招き、質への逃避に拍車をかけ、事態を悪化させたのである。たとえば、LTCM の米国国債のポジションを考えてみよう。LTCM は流動性の低いあまり取引されていない債券の買いと、流動性の高い活発に取引されている債券の売りをもっていた。質への逃避が起き、2種類の債券に対するイールド間のスプレッドが拡大したとき、LTCM はあまり取引されていない債券を売り、活発に取引されている債券を買い戻すことで、ポジションを手仕舞わなければならなかった。他の大手ヘッジファンドも同様の取引を行っていた。その結果、活発に取引されている債券の価格は、あまり取引されていない債券の価格に比べて上昇し、二つのイールド間

のスプレッドは、すでに拡大している状況からさらに広がったのである。

さらに別の例として、1990年代後半の英国の保険会社によるものがある。これらの保険会社は、退職後に個人が受け取る年金の利率が市場金利と保証レートの高いほうになるような契約を数多く結んだ。ほとんど同じ時期に、すべての保険会社がこれらの契約のリスクの一部をヘッジすることにし、金融機関から長期スワップションを購入した。金融機関はそのリスクをヘッジするために、英国長期国債を大量に購入した。その結果、債券価格が上昇し、長期金利は低下した。ダイナミック・ヘッジのためにさらに債券は買われ、長期金利は低下した。金融機関は損失を被り、長期金利が低下したために、保険会社はヘッジしないことを選択した部分のリスクからポジションが悪化した。

これらの出来事から学ぶべき最も重要な教訓は、金融市場で何が起きているかの全体像をつかみ、多くの市場参加者が同じ取引戦略を行っている状況に内在するリスクを理解することが重要である、ということであろう。

### 長期資産を短期負債で調達するな

4.10節で説明したように、金融機関にとって資産と負債の満期を一致させることは重要である。そうしていない場合、大きな金利リスクにさらされている。米貯蓄貸付組合は長期住宅ローンを短期預金で資金調達していたために、1960年代、1970年代、および1980年代に経営困難に陥っている。また、1984年のコンチネンタル銀行の破綻も同様の理由からである（ビジネス寸見4.3を参照）。

2007年の信用収縮までの間、サブプライム住宅ローンやその他の長期資産に対して、それらが仕組商品に組み入れられるまでの期間は、コマーシャルペーパーで資金調達される傾向があった（ビジネス寸見23.3を参照）。導管体や特別目的会社にはこの手の資金調達ニーズが常にあった。コマーシャルペーパーは一般的に毎月ロールオーバーされていた。たとえば、4月1日に発行されたコマーシャルペーパーは、5月1日に新規発行されるコマーシャルペーパーで調達された資金で償還される。次に、そのコマーシャルペー

パーは、6月1日に新規発行される別のコマーシャルペーパーで調達された資金で償還される、といった具合である。2007年8月にサブプライム住宅ローンが投資家の信頼を失ったとき、コマーシャルペーパーをロールオーバーすることは不可能になった。多くのケースで、銀行はそれに対して保証や資金を提供していた。そのため、流動性不足が生じた。その結果、長期資金の調達が行われていた場合に比べ、信用収縮はより厳しいものとなつた。

### **市場の透明性は重要である**

2007年の信用収縮からの一つの教訓は、市場の透明性が重要であるということである。2007年までは、投資家は原資産に対する本当の知識をもたずく、複雑な仕組商品を取引していた。投資家が知っていたのは、取引する証券の格付のみであった。後から振り返ってみると、投資家は原資産について情報をもっと要求すべきであったし、保有しようとしているリスクについてもっと注意深く査定すべきであった、ということができる。しかし、起った後にいいうのは簡単である。

2007年8月のサブプライム住宅ローンの大暴落によって、投資家はすべての仕組商品に対して信頼しなくなり、市場から撤退した。その結果、市場は崩壊し、仕組商品のトランシェは理論価格を大幅に下回る価格でしか売れなくなった。質への逃避が起こり、クレジット・スプレッドが拡大した。投資家が購入しようとしている資産担保証券を理解できるような市場の透明性があったならば、サブプライム住宅ローンによる損失は発生していたであろうが、質への逃避や市場の崩壊はこれほどまでに深刻なものにはならなかつたであろう。

### **34.3 金融機関以外の企業に対する教訓**

今度は、主に金融機関以外の企業にあてはまる教訓について考えよう。

## **取引内容を完全に理解せよ**

企業は、その企業自身が完全に理解していない取引や取引戦略を決して行うべきではない。これはわかりきったことのようであるが、金融機関以外の企業に勤めるトレーダーが、大きな損失が発生した後に、本当には何が起こっていたのか理解していなかったことを認め、投資銀行にだまされたと主張するケースの多さには驚かされる。オレンジ郡の財務担当者であったロバート・シトロンもその1人である。巨大なポジションを保有していたにもかかわらず、スワップや他の金利デリバティブの仕組みを驚くほど知らされていなかったハマースミス区とフラム区の担当者も同じである。

企業の上級管理職が部下の提案した取引を理解できないならば、その取引は承認されるべきではない。一般的に、取引とその取引を行う理論的根拠が複雑で、管理職がそれを理解できないならば、ほとんど確実に、それは企業にとって不適切な取引である。プロクター・アンド・ギャンブルとギブソン・グリーティングスが行った取引は、この基準に照らすと否認されるべき取引であった。

金融商品を完全に理解する一つの方法は、その商品の価値を求めてみるとある。企業は社内で評価できない商品を取引するべきではない。實際には、企業はデリバティブ業者に評価を頼っていることが多い。これは、プロクター・アンド・ギャンブルとギブソン・グリーティングスの例からわかるように、危険な状態である。彼らは取引を解約したいと思ったときに、自分たちではチェックする術のないバンカーズ・トラストの自社モデルで算出された価格が提示されるということに気づいたのである。

## **ヘッジャーがスペキュレーターにならないようにせよ**

投機はエキサイティングであるのに対し、ヘッジは相対的に退屈である、というのが人生の不幸な現実である。企業が外貨為替や商品価格、金利のリスクを管理するトレーダーを雇うとき、次のようなことが起きる危険性がある。最初は、トレーダーはこつこつと仕事を行い、経営陣の信頼を得るようになる。トレーダーは企業のエクスポートジャーナルを評価し、ヘッジを行う。時

がたつにつれ、トレーダーは市場を出し抜けると確信するようになり、次第にスペキュレーターに変ぼうしてしまう。最初のうちはうまくいくが、そのうち損を出すようになる。その損を取り返すために賭けを倍にし、さらに損失がふくらんでしまう、といったことが起きる。最終的には悲惨な結果となることが多い。

先に述べたように、明確なリスク・リミットが経営陣によって設けられるべきである。そして、そのリミットが確實に遵守されるように管理体制が構築されるべきである。企業が行う取引戦略の検討は、為替や金利、商品などの市場においてその企業が直面しているリスクの分析から始めるべきである。次に、それらのリスクを許容範囲まで減らす方法について判断を行うべきである。取引戦略が企業のもつエクスポートからかなり直接的に導き出されるものでない場合は、企業内に何か問題があることを明らかに示唆している。

### 財務部門をプロフィット・センターとすることに慎重になれ

過去20年間、企業の財務部門をプロフィット・センターと位置づける風潮があった。これは大変よいことのように思われる。財務担当者は、資金調達コストを削減し、できるだけ収益を生むリスク管理をするように動機づけられるからである。問題は、財務担当者が生み出せる収益の余地には限界があることである。資金を調達し余剰金を運用する際に、財務担当者が相手にするのは効率的な市場である。財務担当者が通常できることは、追加的なリスクのみをとって、最終収益を改善させるぐらいである。企業のヘッジ計画では、収益を増加させるための賢い判断が行えるある程度の余地が財務担当者に与えられている。しかし、ヘッジ計画の目標はリスクを減らすこと、期待収益を増加させることではないということを忘れてはならない。第3章で指摘したように、ヘッジを行うという判断は、およそ50%の確率で、ヘッジを行わないという判断をしたときよりも悪い結果につながるものである。財務部門をプロフィット・センターとすることは、財務担当者がスペキュレーターになることを動機づける危険性がある。それは、オレンジ郡やプロク

ター・アンド・ギャンブル、ギブソン・グリーティングスのような結果につながる可能性が高い。

## 要 約

デリバティブの利用による巨額損失の例は、多くの財務担当者にとって警鐘となった。いくつかの巨額損失を受けて、金融機関以外の企業ではデリバティブの利用の削減もしくは停止を発表したところもある。しかし、デリバティブは財務担当者にとってリスク管理を行う非常に効率的な手段なので、そうした決定は遺憾なことである。

こうした損失の背景には、第1章で強調した、デリバティブはヘッジにも投機にも利用できることがある。すなわち、それらを用いてリスクを減らすこと、リスクをとることもできる。ほとんどの損失は、デリバティブが不適切に利用されたことが原因で発生したものである。それらは、企業のリスク・ヘッジを行う権限を実質的にもつ従業員が投機を行ってしまった結果である。

これらの損失から学ぶべき重要な教訓は、内部統制（internal control）の重要性である。企業内の上級管理職は、デリバティブの利用方法や市場変数の変動に対して従業員のとれるリスクの許容範囲について、わかりやすく、曖昧さのない方針を定めるべきである。そして、経営者はその方針が確実に実行されるような統制を実施するべきである。きちんとリスクをモニターすることなしにデリバティブ取引の権限を個人に与えることが、惨事の原因となるのである。

## 参考文献

- Dunbar, N. *Inventing Money : The Story of Long-Term Capital Management and the Legends Behind It.* Chichester, UK : Wiley, 2000.
- Jorion, P. *Big Bets Gone Bad : Derivatives and Bankruptcy in Orange County.* New York : Academic Press, 1995.
- Jorion, P. "How Long-Term Lost Its Capital," *Risk* (September 1999).
- Ju, X., and N. Pearson. "Using Value at Risk to Control Risk Taking : How Wrong Can You Be?" *Journal of Risk*, 1 (1999) : 5-36.
- Persaud, A.D. (ed.) *Liquidity Black Holes : Understanding, Quantifying and Managing Financial Liquidity Risk.* London, Risk Books, 2003.
- Thomson, R. *Apocalypse Roulette : The Lethal World of Derivatives.* London : Macmillan, 1998.
- Zhang, P.G. *Barings, Bankruptcy and Financial Derivatives.* Singapore : World Scientific Publishing, 1995.

## [用語集]

**ABS** : Asset-Backed Security 参照。

**Accrual Swap** : ある条件が満たされたときのみ、一方の金利が付利される金利スワップ。

**Accrued Interest** : 前回利払日以降の経過日数に対する債券の利子。

**Adaptive Mesh Model** : Figlewski と Gao が開発したモデル。目の細かいツリーを目の粗いツリーに接ぎ木して、重要な領域における資産価格をより詳細にモデル化したもの。

**Agency Costs** : エージェント（代理人、たとえば経営者）がプリンシパル（依頼人、たとえば株主）の利益に反する行動をとるような状況から発生するコストのこと。

**American Option** : 満期までの任意の時点で権利行使可能なオプション。

**Amortizing Swap** : 時間経過とともにあらかじめ定められた方法で想定元本が減少するスワップ。

**Analytic Result** : 答が式の形で与えられている結果。

**Arbitrage** : 相互に比較してミスプライスされている二つ以上の証券を利用して利益を得る取引戦略。

**Arbitrageur** : 裁定取引を行う人。

**Asian Option** : 指定された期間における原資産の平均価格に依存するペイオフをもつオプション。

**Ask Price** : ディーラーが資産の売値として呈示する価格。

**Asked Price** : Ask Price 参照。

**Asset-Backed Security** : ローンや債券、クレジットカード売掛債権、その他の資産のポートフォリオから組成される証券。

**Asset-or-Nothing Call Option** : 資産価格が行使価格を上回ったときにはペイオフがその資産価格に等しく、そうでなければペイオフがゼロとなるオプション。

**Asset-or Nothing Put Option** : 資産価格が行使価格を下回ったときにはペイオフがその資産価格に等しく、そうでなければペイオフがゼロとなるオプション。

**Asset-Swap** : 債券のクーポンと LIBOR+スプレッドとの交換。

**As-You-Like-It Option** : Chooser Option 参照。

**At-the-Money Option** : 行使価格が原資産価格に等しいオプション。

- Average Price Call Option** : ペイオフが、資産の平均価格が行使価格を上回る金額とゼロとの大きいほうに等しいオプション。
- Average Price Put Option** : ペイオフが、行使価格が資産の平均価格を上回る金額とゼロとの大きいほうに等しいオプション。
- Average Strike Option** : ペイオフが、満期の資産価格と平均価格との差に依存するオプション。
- Backdating** : 現在よりも前の日付で書類を作成する慣行（ときに違法行為）。
- Back Testing** : 過去データを用いて、バリュー・アット・リスクやその他のモデルを検証すること。
- Backwards Induction** : オプションを評価するために、ツリーの終点から始点へ後向きに計算する方法。
- Barrier Option** : 原資産価格のパスがあるバリア（前もって定められたある水準）に到達したか否かに依存するペイオフをもつオプション。
- Base Correlation** : 特定の  $X$  の値に対して、0 % から  $X\%$  の CDO トランシェの価格が市場価格と一致するような相関。
- Basel II** : 2007年に導入された銀行の所要自己資本算出に関する新しい国際規制。
- Basis** : 商品の現物価格と先物価格との差。
- Basis Point** : 金利を表すのに用いるときは、1 ベーシス・ポイントは 1 % の 100 分の 1 (= 0.01 %)。
- Basis Risk** : 将来時点におけるベーシスの不確実性から生じるヘッジマーにとってのリスク。
- Basis Swap** : ある参照変動金利によって決められるキャッシュフローを別の参照変動金利によって決められるキャッシュフローと交換するスワップ。
- Basket Credit Default Swap** : 複数の参考体をもつクレジット・デフォルト・スワップ。
- Basket Option** : 資産のポートフォリオの価値に依存するペイオフをもつオプション。
- Bear Spread** : 行使価格  $K_1$  のプット・オプション 1 単位の売りと、行使価格  $K_2$  ( $K_2 > K_1$ ) のプット・オプション 1 単位の買いを組み合わせたポジション（ベア・スプレッドは、コール・オプションを用いてつくることもできる）。
- Bermudan Option** : 取引期間中の定められた複数の日に権利行使可能なオプション。
- Beta** : 資産のシステムティック・リスクの尺度。
- Bid-Ask Spread** : アスク価格がビッド価格を上回っている額。

**Bid-Offer Spread** : Bid-Ask Spread 参照。

**Bid Price** : ディーラーが資産の買値として表示する価格。

**Binary Credit Default Swap** : ある企業がデフォルトした際に固定額を支払う商品。

**Binary Option** : 不連続なペイオフをもつオプション。たとえば、キャッシュ・オア・ナッシング・オプションやアセット・オア・ナッシング・オプション。

**Binomial Model** : 資産価格を連続する小期間ごとに観測される値で表したモデル。各小期間での価格変化は 2 通りしかないと仮定される。

**Binomial Tree** : 二項モデルにおける資産価格の時間発展の様子を表すツリー。

**Bivariate Normal Distribution** : 正規分布に従う相関のある 2 変数に対する分布。

**Black's Approximation** : 配当のある株式に対するコール・オプションを評価するために Fischer Black が開発した近似方法。

**Black's Model** : 先物契約に対するヨーロピアン・オプションを評価するために Black-Scholes モデルを拡張したモデル。第26章で説明したように、実務では、このモデルは満期における資産価格の分布が対数正規分布に従っていると仮定した場合のヨーロピアン・オプションの評価に広く用いられている。

**Black-Scholes Model** : Fischer Black, Myron Scholes, Robert Merton によって開発された、株式のヨーロピアン・オプションの価格モデル。

**Board Broker** : 取引所で指値注文を扱う人。ボード・ブローカーは、他のトレーダーに利用可能な未成立の指値注文の情報を提供する。

**Bond Option** : 債券が原資産であるオプション。

**Bond Yield** : 債券のすべてのキャッシュフローに適用してキャッシュフローの現在価値を計算したときに、その合計が債券の市場価格に一致するような割引率。

**Bootstrap Method** : 市場データからゼロクーポン・イールドカーブを計算する方法。

**Boston Option** : Deferred Payment Option 参照。

**Box Spread** : コール・オプションを用いたブル・スプレッドとプット・オプションを用いたペア・スプレッドを組み合わせたポジション。

**Break Forward** : Deferred Payment Option 参照。

**Brownian Motion** : Wiener Process 参照。

**Bull Spread** : 行使価格  $K_1$  のコール・オプション 1 単位の買いと、行使価格  $K_2$  ( $K_2 > K_1$ ) のコール・オプション 1 単位の売りを組み合わせたポジション (ブル・スプレッドは、プット・オプションを用いてつくることもできる)。

**Butterfly Spread** : 行使価格  $K_1$  のコール・オプション 1 単位の買い、行使価格  $K_3$  のコール・オプション 1 単位の買い、および行使価格  $K_2$  ( $K_3 > K_2 > K_1$ かつ  $K_2 = 0.5(K_1 + K_3)$ ) のコール・オプション 2 単位の売りを組み合わせたポジション (バタフライ・スプレッドは、プット・オプションを用いてつくることができる)。

**Calendar Spread** : ある満期をもつコール・オプションの買いと、同じ行使価格で満期の異なるコール・オプションの売りを組み合わせたポジション (カレンダー・スプレッドは、プット・オプションを用いてつくることができる)。

**Calibration** : 活発に売買されているオプションの価格にインプライドされているモデルのパラメーターを求める方法。

**Callable Bond** : 満期までのある定められた時点で、あらかじめ決められた価格で発行体が買い戻すことのできる条項のある債券。

**Call Option** : ある定められた日に、ある決められた価格で資産を買うことができる選択権。

**Cancelable Swap** : あらかじめ決められた日に、契約者の一方が解約できるスワップ。

**Cap** : Interest Rate Cap 参照。

**Cap Rate** : 金利キャップのペイオフを決める金利。

**Capital Asset Pricing Method** : 資産の期待收益率とその資産のベータとを関係づけるモデル。

**Caplet** : 金利キャップの 1 構成要素。

**Cash Flow Mapping** : バリュー・アット・リスクを計算するために、金融商品を割引債のポートフォリオで表す方法。

**Cash-or-Nothing Call Option** : 資産の最終価格が行使価格を上回った場合には、あらかじめ決められた固定額のペイオフが発生し、そうでなければゼロとなるオプション。

**Cash-or-Nothing Put Option** : 資産の最終価格が行使価格を下回った場合には、あらかじめ決められた固定額のペイオフが発生し、そうでなければゼロとなるオプション。

**Cash Settlement** : 原資産の受渡しのかわりに現金で先物契約を清算する方法。

**CAT Bond** : 特定のカテゴリーに属する「大災害」が発生し、その保険支払請求額がある範囲を超えた場合に、金利や元本の支払が減少する債券。

**CDD** : 冷房度日 (cooling degree days)。日次平均気温が華氏65°を超えた部分の値とゼロの大きいほうの値。平均気温は、1日 (午前零時から午前零時まで) の

最高気温と最低気温の平均である。

**CDO** : Collateralized Debt Obligation 参照。

**CDO Squared** : CDO トランシェのポートフォリオがもつデフォルト・リスクを新しい証券に割り当てる商品。

**CDX NA IG** : 北米企業125社からなるポートフォリオ。

**Cheapest-to-Deliver Bond** : CBOT の債券先物契約に対して受渡可能な最割安な債券。

**Cholesky Decomposition** : 多次元正規分布からサンプリングする方法。

**Chooser Option** : 満期までのある時点でコールにするかプットにするかを保有者が選択できるオプション。

**Class of Options** : Option Class 参照。

**Clean Price of Bond** : 債券の呈示価格。債券に対して支払われる取引価格（すなわち dirty price）は、呈示価格に経過利子を加えたものである。

**Clearinghouse** : 取引所におけるデリバティブ取引の参加者の契約履行を保証する会社 (clearing corporation とも呼ばれる)。

**Clearing Margin** : 清算機関 (clearinghouse) の清算参加者が差し入れる証拠金。

**CMO** : Collateralized Mortgage Obligation 参照。

**Collar** : Interest Rate Collar 参照。

**Collateralization** : デリバティブ取引において契約当事者の片方または双方が担保を差し入れる仕組み。

**Collateralized Debt Obligation** : 信用リスクをパッケージ化する方法。債券ポートフォリオからいくつかの証券のクラス (トランシェと呼ばれる) がつくれられ、各クラスにデフォルトの費用を割り当てるルールが決められている。

**Collateralized Mortgage Obligation (CMO)** : 投資家をいくつかのクラスに分け、元本の期限前返済を各クラスへ振り分けるルールが決められているモーゲージ証券。

**Combination** : 同じ原資産に対するコールとプットの両方を含むポジション。

**Commission Brokers** : 他の人の取引を執行し、その手数料を請求する人。

**Commodity Futures Trading Commission** : 米国における先物取引を規制する団体。

**Commodity Swap** : キャッシュフローが商品価格に依存するスワップ。

**Compound Correlation** : CDO トランシェの市場価格にインプライドされている相関。

**Compound Option** : オプションを原資産とするオプション。

- Compounding Frequency** : 金利の計り方を定義するもの。複利回数。
- Compounding Swap** : 金利が支払われるかわりに最終日まで複利されるスワップ。
- Conditional Value at Risk (C-VaR)** : 損益分布の $(100 - X)\%$ の裾部分が実現したという条件のもとでの $N$ 日後の期待損失。変数 $N$ は保有期間、 $X\%$ は信頼水準を表す。
- Confirmation** : 店頭市場において二者間で口頭で合意された取引に対する確認書。
- Constant Elasticity of Variance (CEV) Model** : 変数の短期間の変化に対する分散がその変数の値に比例しているモデル。
- Constant Maturity Swap (CMS)** : スワップ・レートと固定金利または変動金利が各支払日に交換されるスワップ。
- Constant Maturity Treasury Swap** : 国債のイールドと固定金利または変動金利が各支払日に交換されるスワップ。
- Consumption Asset** : 投資よりもむしろ消費目的で保有される資産。
- Contango** : 先物価格が将来の現物価格の期待値を上回っている状態。
- Continuous Compounding** : 金利の呈示方法の一つ。複利期間を小さくしていったときの極限。連続複利。
- Control Variate Technique** : 数値計算法の精度を改善するためにしばしば用いられる手法。
- Convenience Yield** : 先物契約の買持ちでは得られない、資産そのものを所有することから得られる利益を測る尺度。
- Conversion Factor** : CBOT の債券先物契約で受渡しされる債券の価格を決めるのに用いられる比率。
- Convertible Bond** : 満期までの定められた時点で、あらかじめ決められた株数のその企業の株式に転換できる社債。
- Convexity** : 債券価格と債券イールドとの関係の曲率を測る尺度。
- Convexity Adjustment** : いくつかの意味で使われる用語。たとえば、先物レートをフォワード・レートに変換するのに必要となる調整や、Black モデルを利用するときにしばしば必要となるフォワード・レートの調整のことである。
- Copula** : 分布がわかっている変数間の相関を定義する一つの方法。
- Cornish-Fisher Expansion** : 確率分布のパーセント点とモーメントとの間に成立つ近似的な関係。
- Cost of Carry** : 資産の保管コストと購入資金調達コストから、資産から得られる収入を差し引いたもの。
- Counterparty** : 金融取引の相手側。

- Coupon** : 債券保有者に支払われる利子。
- Covariance** : 二つの変数の線形関係を図る尺度（それぞれの標準偏差の積を変数間の相関係数倍したものに等しい）。
- Covered Call** : 資産に対するコール・オプションの売りポジションとその資産の買いポジションを組み合わせたもの。
- Credit Contagion** : ある企業のデフォルトが別の企業のデフォルトを引き起こす傾向。
- Credit Default Swap** : 発行体がデフォルトしたときに、その債券を額面で売る権利を保有者に与える金融商品。
- Credit Derivative** : ペイオフが一つ以上の企業または国の信用度に依存するデリバティブ。
- Credit Rating** : 債券発行における信用度の尺度。
- Credit Rating Transition Matrix** : ある期間に、企業がある格付から別の格付に推移する確率を表したもの。
- Credit Risk** : デリバティブ取引で相手側のデフォルトにより損失を被るリスク。
- Credit Spread Option** : ペイオフが二つの資産のイールドの差に依存しているオプション。
- Credit Value at Risk** : ある定められた信頼水準を超えないような信用損失額。
- CreditMetrics** : 信用バリュー・アット・リスクを計算する一つの手続。
- Cross Hedging** : ある資産価格に対するエクスポージャーを別の資産に対する契約でヘッジすること。
- Cumulative Distribution Function** : 変数が  $x$  以下の値をとる確率を  $x$  の関数として表したもの。
- Currency Swap** : ある通貨の金利および元本を別の通貨の金利および元本と交換するスワップ。
- Day Count** : 金利の表示方法に関する慣行。
- Day Trade** : 約定したその日のうちに手仕舞う取引。
- Default Correlation** : 二つの企業がほぼ同時点でデフォルトする傾向を測る尺度。
- Default Intensity** : Hazard Rate 参照。
- Default Probability Density** : 将来のある短期間にデフォルトする無条件の確率。
- Deferred Payment Option** : 価格がオプション満期に支払われるオプション。
- Deferred Swap** : 将来のある時点でのスワップを開始する契約 (forward swapとも呼ばれる)。
- Delivery Price** : フォワード契約において（おそらく過去のある時点で）合意され

た価格。

**Delta** : 原資産価格に対するデリバティブ価格の変化率。

**Delta Hedging** : デリバティブのポートフォリオの価格が原資産価格の微小変化に対して影響を受けないようにするヘッジ方法。

**Delta-Neutral Portfolio** : デルタをゼロにして、原資産価格の微小変化に対して影響を受けないようにしたポートフォリオ。

**DerivaGem** : 本書に付属しているソフトウェア。

**Derivative** : 価格が別の資産価格に依存している、あるいは別の資産価格から派生している商品。

**Deterministic Variable** : 将来の値が既知の変数。

**Diagonal Spread** : 行使価格と満期の両方が異なる二つのコール・オプションからなるポジション (diagonal spread はブット・オプションを用いてつくることもできる)。

**Differential Swap** : ある通貨の変動金利と別の通貨の変動金利を交換する、想定元本が両サイドで同じスワップ。

**Diffusion Process** : 拡散過程。資産価値が連続的に (ジャンプなしで) 変化するモデル。

**Dirty Price of Bond** : 債券の取引価格。

**Discount Bond** : Zero-Coupon Bond 参照。

**Discount Instrument** : 米国短期国債のようなクーポン支払のない商品。

**Discount Rate** : 最終額面に対する百分率で表示される、米国短期国債または同様の商品に対する年換算のドル収益率。

**Dividend** : 株式の所有者に支払われる現金。

**Dividend Yield** : 株価に対する百分率で表した配当。

**Dollar Duration** : 債券の修正デュレーションと債券価格の積。

**Down-and-In Option** : 原資産価格があらかじめ決められた水準まで下落したときに効力が発生するオプション。

**Down-and-Out Option** : 原資産価格があらかじめ決められた水準まで下落したときに効力が消滅するオプション。

**Downgrade Trigger** : 片サイドの信用格付があるレベルを下回った場合に現金決済で契約が終了するという契約上の条項。

**Drift Rate** : 確率変数の単位時間当たりの平均上昇率。

**Duration** : 債券の平均残存期間の尺度。債券価格の変化率と債券イールドの値の変化との比に対する近似値にもなっている。

**Duration Matching** : 金融機関における資産と負債のデュレーションを一致させること。

**Dynamic Hedging** : 原資産の保有ポジションを定期的に変化させることによってオプションのポジションをヘッジする方法。通常はポジションをデルタ・ニュートラルに保つよう行われる。

**Early Exercise** : 満期日より前に行われる権利行使。

**Efficient Market Hypothesis** : 資産価格には関連する情報がすべて反映されているという仮説。

**Electronic Trading** : コンピュータを用いて買手と売手を付き合わせる取引システム。

**Embedded Option** : 別の商品の分離できない一部となっているオプション。

**Empirical Research** : 過去の市場データに基づく研究。

**Employee Stock Option** : 企業が発行する自社株に対するオプションで、報酬の一部として従業員に付与するもの。

**Equilibrium Model** : 経済モデルから導出される金利の挙動に対するモデル。

**Equity Swap** : 株式のポートフォリオのリターンと固定金利もしくは変動金利とを交換するスワップ。

**Eurocurrency** : 発行国の通貨当局の公式な管理外における貨幣。

**Eurodollar** : 米国外で銀行が保有しているドル。

**Eurodollar Futures Contract** : ユーロドル預金に対する先物契約。

**Eurodollar Interest Rate** : ユーロドル預金の金利。

**European Option** : 満期のみに権利行使可能なオプション。

**EWMA** : Exponentially weighted moving average の略。

**Exchange Option** : ある資産を別の資産と交換するオプション。

**Ex-dividend Date** : 配当が発表されたとき、配当落ち日も指定される。配当落ち日直前まで株式を保有していた投資家に配当は支払われる。

**Exercise Limit** : 5日間に行使できるオプション契約の最大数。

**Exercise Multiple** : 従業員ストック・オプションの行使時点における株価の行使価格に対する比。

**Exercise Price** : オプション契約で原資産が売買される価格 (strike priceとも呼ばれる)。

**Exotic Option** : 非標準的なオプション。

**Expectations Theory** : フォワード・レートが将来のスポット・レートの期待値に等しいという仮説。

**Expected Shortfall** : Conditional Value at Risk 参照。

**Expected Value of a Variable** : 変数のとりうる値を確率で重みづけして得られる変数の平均値。

**Expiration Date** : 契約期間の最終日。

**Explicit Finite Difference Method** : デリバティブの評価を微分方程式を解いて行うときに用いられる方法の一つ。時点  $t$  におけるデリバティブの価格が時点  $t + \Delta t$  における三つの値と関係づけられる。三項ツリー法と本質的に同じものである。

**Exponentially Weighted Moving Average Model** : 指数加重を用いて過去データから変数に対する予測を行うモデル。バリュー・アット・リスクの計算で、分散と共に分散を推定するのに用いられることがある。

**Exponential Weighting** : どれくらい前に観測が行われたかに依存して観測値に対する重みを決める方法。 $i$  期前の観測に対する重みは、 $i - 1$  期前の観測に対する重みの  $\lambda$  倍になる。ただし、 $\lambda < 1$  である。

**Exposure** : カウンターパーティーのデフォルトによって被る最大損失。

**Extendable Bond** : 保有者が満期を延長できる債券。

**Extendable Swap** : 契約者の一方が期間を延長できるスワップ。

**Factor** : 不確実性の要因。

**Factor Analysis** : 相関のある多くの変数に関する変動の大部分を説明できる少数のファクターをみつけることを目的とした分析の一つ（主成分分析と同様のもの）。

**FAS 123** : 従業員ストック・オプションに関する米国の会計基準。

**FAS 133** : ヘッジ商品に関する米国の会計基準。

**FASB** : 米国財務会計基準審議会。Financial Accounting Standards Board の略。

**Financial Intermediary** : 異なる経済主体の間の資金流通を容易にする銀行やその他の金融機関のこと。

**Finite Difference Method** : 微分方程式を解く一つの数値計算法。

**Flat Volatility** : 各キャップレットに同じボラティリティを用いてキャップの価格を求めるときのボラティリティに対する呼び方。

**Flex Option** : 取引所で取引される通常のオプションとは異なる条件で、取引所で取引されるオプション。

**Flexi Cap** : 行使できるキャップレットの総数に制限のある金利キャップ。

**Floor** : Interest Rate Floor 参照。

**Floor-Ceiling Agreement** : Collar 参照。

**Floorlet** : フロアの 1 構成要素。

**Floor Rate** : 金利フロアのペイオフを決める金利。

**Foreign Currency Option** : 外国為替レートに対するオプション。

**Forward Contract** : 保有者が将来のあらかじめ決められた時点であらかじめ決められた受渡価格で資産を買うもしくは売る義務を負う契約。

**Forward Exchange Rate** : 外国通貨 1 単位のフォワード価格。

**Forward Interest Rate** : 今日の市場金利から導かれる将来のある期間に対する金利。

**Forward Price** : 契約の価値がゼロになるようなフォワード契約の受渡価格。

**Forward Rate** : 今日のゼロ・レートから算出される将来のある期間に対する金利。

**Forward Rate Agreement (FRA)** : ある金利を将来のある期間に対するある元本に適用するという契約。

**Forward Risk-Neutral World** : リスクの市場価格がある資産のボラティリティに等しいとき、世界はその資産に関してフォワード・リスク中立であるという。

**Forward Start Option** : 将来のある時点でアット・ザ・マネーになるように設計されたオプション。

**Forward Swap** : Deferred Swap 参照。

**Futures Contract** : 保有者が将来の指定された期間にあらかじめ決められた受渡価格で資産を買うもしくは売る義務を負う契約。契約は日々値洗いされる。

**Futures Option** : 先物契約に対するオプション。

**Futures Price** : 先物契約に現在適用される受渡価格。

**Futures-Style Option** : オプションのペイオフに対する先物契約。

**Gamma** : 原資産価格に対するデルタの変化率。

**Gamma-Neutral Portfolio** : ガンマがゼロのポートフォリオ。

**GARCH Model** : 分散率 (variance rate) が平均回帰過程に従っているボラティリティの予測モデル。

**Gaussian Copula Model** : 二つ以上の変数間の相関構造を定義するモデル。いくつかのクレジット・デリバティブ・モデルにおいて、デフォルト時点の相関構造を定義するのに用いられている。

**Gaussian Quadrature** : 正規分布に基づいて積分するときの手法。

**Generalized Wiener Process** : 時点  $t$ までの変数の変化が、 $t$  に比例する平均と分散をもつ正規分布に従う確率過程。

**Geometric Average** :  $n$  個の数の積に対する  $n$  乗根。

**Geometric Brownian Motion**: 資産価格に対してよく用いられている、変数の対数が一般化されたウィナー過程 (generalized Wiener process) に従う確率過程。

**Girsanov's Theorem**: 測度 (measure) を変える（たとえば、実世界からリスク中立世界へ移る）とき、変数の期待値は変化するが、ボラティリティは同じままであることを示す結果。

**Greeks**: デルタ、ガンマ、ベガ、セータ、ローのようなヘッジ・パラメータ。

**Haircut**: 担保目的で差し入れられる資産の価値に適用される割引率。

**Hazard Rate**: それ以前にデフォルトしていないという条件付きでの微小時間にデフォルトする確率。

**HDD**: 暖房度日 (heating degree days)。ゼロと日次平均気温が華氏65°を下回った部分の値の大きいほうの値。平均気温は、1日 (午前零時から午前零時まで) の最高気温と最低気温の平均である。

**Hedge**: リスクを減らすために行う取引。

**Hedger**: ヘッジ取引を行う人。

**Hedge Ratio**: ヘッジに用いる商品のポジションの大きさとヘッジされるポジションの大きさとの比。

**Historical Simulation**: 過去データに基づくシミュレーション。

**Historic Volatility**: 過去データから推定されるボラティリティ。

**Holiday Calendar**: スワップの支払日を決めるときに用いる休日を定義したカレンダー。

**IMM Dates**: 3月、6月、9月、および12月の第三水曜日。

**Implicit Finite Difference Method**: デリバティブの評価を微分方程式を解いて行うときに用いられる方法の一つ。時点  $t + \Delta t$  におけるデリバティブの価格が時点  $t$  における三つの値と関係づけられる。

**Implied Correlation**: ガウシアン・コピュラ (Gaussian Copula) または同様のモデルを用いた場合のクレジット・デリバティブの価格にインプライドされている相関の値。

**Implied Distribution**: オプション価格にインプライドされている将来の資産価格の分布。

**Implied Tree**: 観測されるオプション価格と整合性をもつように構築された資産価格の変動を記述するツリー。

**Implied Volatility**: Black-Scholes モデルまたは同様のモデルを用いた場合のオプション価格にインプライドされているボラティリティ。

**Implied Volatility Function (IVF) Model :**ヨーロピアン・オプションの市場価格に適合できるようにつくられたモデル。

**Inception Profit :**デリバティブを理論価格よりも高い価格で売ることにより得られる利益。

**Index Amortizing Swap :**Indexed Principal Swap 参照。

**Index Arbitrage :**株価指数を構成する株式のポジションとその株価指数に対する先物契約のポジションをとって行う裁定取引。

**Index Futures :**株価指数やその他の指数に対する先物契約。

**Index Option :**株価指数やその他の指数に対するオプション。

**Indexed Principal Swap :**元本が時間とともに減少するスワップ。支払日における元本の減少額は金利のレベルに依存する。

**Initial Margin :**先物のトレーダーから取引時点に要求される現金。

**Instantaneous Forward Rate :**将来の微小期間に対するフォワード・レート。

**Interest Rate Cap :**指定された金利がある水準を上回ったときにペイオフが発生するオプション。その金利は定期的にリセットされる変動金利である。

**Interest Rate Collar :**金利キャップと金利フロアを組み合わせたもの。

**Interest Rate Derivative :**ペイオフが将来の金利に依存するデリバティブ。

**Interest Rate Floor :**金利がある水準を下回ったときにペイオフが発生するオプション。その金利は定期的にリセットされる変動金利である。

**Interest Rate Option :**ペイオフが将来の金利の水準に依存するオプション。

**Interest Rate Swap :**ある想定元本に対する固定金利と同じ想定元本に対する変動金利との交換。

**International Swaps and Derivatives Association :**店頭デリバティブの取引協会で、店頭取引で利用される基本契約書を作成している。

**In-the-Money Option :**(a)資産価格が行使価格を上回っているコール・オプション。(b)資産価格が行使価格を下回っているプット・オプション。

**Intrinsic Value :**コール・オプションに対しては、資産価格が行使価格を上回っている額とゼロとの大きいほうの値である。プット・オプションに対しては、行使価格が資産価格を上回っている額とゼロとの大きいほうの値である。

**Inverted Market :**満期が長いほど先物価格が減少している市場。

**Investment Asset :**投資目的で保有する投資家のいる資産。

**IO :**Interest Only の略。住宅ローン・プールの利子部分のキャッシュフローのみを保有者が受け取るモーゲージ証券。

**ISDA :**International Swaps and Derivatives Association 参照。

**Itô Process** : 長さ  $\Delta t$  の各微小時間における変数の変化が正規分布に従う確率過程。分布の平均と分散は  $\Delta t$  に比例し、必ずしも一定ではない。

**Itô's Lemma** : 確率変数の関数が満たす確率過程を、その確率変数自体が満たす確率過程から計算する方法を与える結果。

**ITraxx Europe** : 欧州企業の投資適格125社からなるポートフォリオ。

**Jump-Diffusion Model** : 資産価格が幾何ブラウン運動のような拡散過程にジャンプを重ね合わせた確率過程に従うとするモデル。

**Kurtosis** : 分布の裾に対する厚さの尺度。

**LEAPS** : Long-term equity anticipation securities の略。これらは個別株式や株価指数に対する比較的長期のオプションである。

**LIBID** : London interbank bid rate の略。ユーロ通貨預金に対して銀行が呈示するビッド・レート（すなわち、ある銀行が別の銀行から借り入れしようとするときのレート）。

**LIBOR** : London interbank offered rate の略。ユーロ通貨預金に対して銀行が呈示するオファー・レート（すなわち、ある銀行が別の銀行に貸出しようとするときのレート）。

**LIBOR Curve** : LIBOR ゼロクーポン・レートを満期の関数として表したもの。

**LIBOR-in-Arrears Swap** : 支払われる金利が（前回支払日に観測された金利ではなく）その支払日に観測された金利によって決まるスワップ。

**Limit Move** : 一つの取引セッションで取引所が認めている最大値幅。

**Limit Order** : 指定された価格またはそれより投資家に有利な価格でのみ執行される注文。

**Liquidity Preference Theory** : フォワード・レートが将来のスポット・レートの期待値を上回るという結論を導く理論。

**Liquidity Premium** : フォワード・レートが将来のスポット・レートの期待値を上回っている量。

**Liquidity Risk** : 保有している商品を理論価格で売却できないリスク。

**Locals** : 取引所のフロアで、他人の勘定ではなく、自己勘定で取引を行っている人。

**Lognormal Distribution** : 変数の対数が正規分布に従うとき、その変数は対数正規分布に従うという。

**Long Hedge** : 先物の買いポジションを伴うヘッジ。

**Long Position** : 資産の買いを伴うポジション。

**Lookback Option** : ベイオフがある期間における資産価格の最大値または最小値に

依存するオプション。

**Low Discrepancy Sequence** : Quasi-Random Sequence 参照。

**Maintenance Margin** : トレーダーの証拠金勘定の残高が維持証拠金のレベルを下回ったとき、トレーダーは当初証拠金のレベルまで残高を引き上げるための追加証拠金差入れの要求 (margin call) を受ける。

**Margin** : 先物やオプションのトレーダーから要求される現金残高 (または代用有価証券)。

**Margin Call** : 証拠金勘定の残高が維持証拠金のレベルを下回ったときに受ける追加証拠金差入れの要求。

**Market Maker** : 資産に対するピッドとオファーの両方を求めるに応じていつでも呈示するトレーダー。

**Market Model** : トレーダーに最も一般的に使われているモデル。

**Market Price of Risk** : 投資家が行うリスクとリターンとの交換に関する尺度。

**Market Segmentation Theory** : 短期金利は長期金利とは独立に市場で決定されるという理論。

**Marking to Market** : 直接関係する市場変数の現在値を反映するように商品の評価を行うこと。

**Markov Process** : 微小期間における変数の挙動がその期間のはじめにおける変数の値のみに依存し、過去の履歴には依存しない確率過程。

**Martingale** : ドリフトがゼロの確率過程。

**Maturity Date** : 契約期間の最終日。

**Maximum Likelihood Method** : 一連の観測値が発生する確率を最大にするようにパラメータの値を選択する方法。

**Mean Reversion** : 市場変数 (たとえば金利) がある長期的な平均水準に回帰する傾向。

**Measure** : 確率測度とも呼ばれ、それによってリスクの市場価格が決まる。

**Modified Duration** : 債券価格の変化率とそのイールドの実際の変化との関係をより正確に表すように標準的なデュレーションを修正したもの。呈示されているイールドの複利の頻度 (compounding frequency) を考慮にいれる修正が行われている。

**Money Market Account** : 最初は 1 ドルに等しく、時点  $t$  ではその時点の超短期無リスク金利で増加する投資。

**Monte Carlo Simulation** : デリバティブを評価するために、市場変数の変化をランダムにサンプリングする方法。

**Mortgage-Backed Security** : 住宅ローン・プールから実現するキャッシュフローの分配を受ける権利を所有者に与える証券。

**Naked Position** : 原資産の買いポジションと組み合わせないコール・オプションの売りポジション。

**Netting** : 取引相手のデフォルト時に、正と負の価値をもつ契約を相殺できること。

**Newton-Raphson Method** : 非線形な方程式を反復計算で解く方法。

**No-Arbitrage Assumption** : 市場価格には裁定機会は存在しないという仮定。

**No-Arbitrage Interest Rate Model** : 初期時点の金利の期間構造と正確に整合性のとれた金利の挙動を表現するモデル。

**Nonstationary Model** : ボラティリティ・パラメータが時間の関数になっているモデル。

**Nonsystematic Risk** : 分散除去可能なりスク。

**Normal Backwardation** : 先物価格が将来の現物価格の期待値を下回っている状態。

**Normal Distribution** : 統計学における標準的な釣鐘型の分布。

**Normal Market** : 満期が長いほど先物価格が増加している市場。

**Notional Principal** : 金利スワップにおける支払額を計算するときに用いられる元本。この元本は支払も受取りもされないので、「想定」されたものである。

**Numeraire** : 証券価格を測る単位を定義するものである。たとえば、IBM の価格をニューメレールとすれば、すべての証券価格は IBM に対して相対的に測られる。IBM が80ドルで、ある証券の価格が50ドルならば、IBM をニューメレールとするときは、その証券価格は0.625になる。

**Numerical Procedure** : 解析式が利用できない場合にオプションを評価する方法。

**OCC** : Options Clearing Corporation の略。Clearinghouse 参照。

**Offer Price** : Ask Price 参照。

**Open Interest** : 先物契約の未決済の買いポジションの総数（売りポジションの総数に等しい）。

**Open Outcry** : 取引所の立会場でトレーダーが会して行う取引方法。

**Option** : 資産を買うもしくは売る権利。

**Option-Adjusted Spread** : 金利デリバティブの理論価格が市場価格と等しくなるような国債カーブに対するスプレッド。

**Option Class** : 特定の株式に対する同じタイプ（コールまたはプット）のすべてのオプション。

**Option Series** : 同じ行使価格と満期日をもつあるクラスに属するすべてのオプション。

**Order Book Official** : Board Broker 参照。

**Out-of-the-Money Option** : (a)資産価格が行使価格を下回っているコール・オプション。(b)資産価格が行使価格を上回っているプット・オプション。

**Over-the-Counter Market** : トレーダーが電話取引する市場。通常、トレーダーは金融機関、企業、およびファンドマネジャーである。

**Package** : 標準的なコールとプットのポートフォリオに、場合によってはフォワード契約と資産そのものを組み合わせてつくられたデリバティブ。

**Par Value** : 債券の額面。

**Par Yield** : 価格が額面に等しくなるような債券のクーポン。

**Parallel Shift** : カーブ上のすべての点で同じ量だけ変化するようなイールドカーブの動き。

**Path-Dependent Option** : ペイオフが最終価値だけでなく、原資産変数のパス全体に依存するオプション。

**Payoff** : 契約期間の終了時にオプションやその他のデリバティブの保有者に実現する現金。

**Plain Vanilla** : 標準的な取引を表すのに使われる用語。

**P-Measure** : 実世界における測度。

**PO** : Principal Only の略。住宅ローン・プールの元本部分のキャッシュフローのみを保有者が受け取るモーゲージ証券。

**Poisson Process** : 事象がランダムに起こる状況を記述する確率過程。時間  $\Delta t$  に一つの事象が起こる確率は  $\lambda \Delta t$  で与えられる。ただし、 $\lambda$  はこの過程の強度である。

**Portfolio Immunization** : 金利の影響を比較的受けないポートフォリオをつくること。

**Portfolio Insurance** : ポートフォリオの価値がある水準を下回らないことを保証するような取引を行うこと。

**Position Limit** : トレーダー（あるいは行動をともにするトレーダーのグループ）が保有することを許されている最大のポジション。

**Premium** : オプションの価格。

**Prepayment Function** : 他の変数を用いて住宅ローンのポートフォリオにおける元本の期限前返済を推定する関数。

**Principal** : 負債商品の額面価値。

**Principal Components Analysis** : 相関のある多くの変数に関する変動の大部分を説明できる少数のファクターをみつけることを目的とした分析の一つ（因子分析と同様のもの）。

**Program Trading** : 取引がコンピュータによって自動的に生成され、取引所の立会場に伝達される仕組み。

**Protective Put** : 原資産の買いポジションを組み合わせたプット・オプション。

**Pull-to-Par** : 満期において債券価格を額面に戻すこと。

**Put-Call Parity** : 同じ行使価格と満期をもつヨーロピアン・コール・オプションの価格とヨーロピアン・プット・オプションの価格の間に成り立つ関係。

**Put Option** : ある定められた日に、ある決められた価格で資産を売ることができる選択権。

**Puttable Bond** : あらかじめ定められた時点に、あらかじめ決められた価格で発行体に売り戻す権利を保有者がもっている債券。

**Puttable Swap** : 一方が期限前解約できる権利をもっているスワップ。

**Q-Measure** : リスク中立世界における測度。

**Quanto** : ある通貨に関連する変数で定義されたペイオフが別の通貨で支払われるデリバティブ。

**Quasi-Random Sequence** : モンテカルロ・シミュレーションで用いられる、ランダムというよりも分布の代表的な標本点を生成するような数列。

**Rainbow Option** : 二つ以上の原資産変数に依存するペイオフをもつオプション。

**Range Forward Contract** : コールの買いとプットの売りの組合せ、もしくはコールの売りとプットの買いの組合せ。

**Ratchet Cap** : 金利計算期間に適用されるキャップ・レートが前回の金利計算期間に対する金利にスプレッドを加えたものに等しい金利キャップ。

**Real Option** : (金融資産ではなく) 実物資産に関係したオプション。実物資産には、土地、設備、機械などが含まれる。

**Rebalancing** : 定期的にトレーディング・ポジションを調整する操作。ポジションをデルタ・ニュートラルに保つ目的で行われることが多い。

**Recovery Rate** : デフォルト発生時の回収額を額面に対する百分率で表した値。

**Reference Entity** : 購入したクレジット・デフォルト・スワップにおいてデフォルトの保護対象となっている企業。

**Repo** : Repurchase agreement の略。証券を取引相手に売却し、後で少し高い価格で買い戻すことに同意することで借入れを行う方法。

**Repo Rate** : レポ取引における利子率。

**Reset Date** : スワップやキャップ、フロアにおいて、次の期間の変動金利を設定する日。

**Reversion Level** : 市場変数（たとえば金利）の値が回帰する水準。

**Rho** : 金利に対するデリバティブ価格の変化率。

**Rights Issue** : ある価格で新株を購入する権利を既存株主に与えるような証券の発行。

**Risk-Free Rate** : リスクなしで稼ぐことのできる金利。

**Risk-Neutral Valuation** : 世界がリスク中立であると仮定してオプションやその他のデリバティブを評価する方法。リスク中立化法を用いると、リスク中立世界だけでなく、あらゆる世界での正しいデリバティブの価格が得られる。

**Risk-Neutral World** : 投資家はリスクをとることに対して平均として超過収益を求めないと仮定された世界。

**Roll Back** : Backwards Induction 参照。

**Scalper** : 非常に短時間だけポジションを保有するトレーダー。

**Scenario Analysis** : 市場変数の将来とりうるさまざまな動きがポートフォリオの価値に与える影響を分析すること。

**SEC** : 米国証券取引委員会。Security and Exchange Commission の略。

**Settlement Price** : 1日の取引の終了を告げるベルが鳴る直前に取引された契約の価格の平均。時価評価には通常この価格が用いられる。

**Short Hedge** : 先物の売りポジションによるヘッジ。

**Short Position** : トレーダーが所有していない現物を売ることにより生じるポジション。

**Short Rate** : 非常に短い期間に対して適用される金利。

**Short Selling** : 別の投資家から借りた株式を市場で売却すること。

**Short-Term Risk-Free Rate** : Short Rate 参照。

**Shout Option** : 保有者が、契約期間中に一度、ペイオフの最小値を固定する権利をもつオプション。

**Simulation** : Monte Carlo Simulation 参照。

**Specialist** : 取引所で指値注文をうまく処理する責任を有する者。スペシャリストは未決済の指値注文に関する情報を、他のトレーダーには提供しない。

**Speculator** : 市場でポジションをとる者。資産価格が上昇すること、もしくは下落することに賭けている場合が多い。

**Spot Interest Rate** : Zero-Coupon Interest Rate 参照。

**Spot Price** : すぐに受渡しを行う場合の価格。

- Spot Volatilities** : 各キャップレットに対して異なるボラティリティを用いる場合のキャップの価格付けに用いられるボラティリティ。
- Spread Option** : 二つの市場変数の差に依存するペイオフをもつオプション。
- Spread Transaction** : 二つ以上の同じ種類のオプションからなるポジション。
- Static Hedge** : 最初にヘッジを行ってからポジションの変更を必要としないヘッジ。
- Static Options Replication** : ある境界上で価値がほぼ等しくなるような別のポートフォリオをみつけることによってポートフォリオをヘッジする方法。
- Step-up Swap** : あらかじめ決められた方法で、時間の経過とともに元本が増加するスワップ。
- Sticky Cap** : 金利計算期間に適用されるキャップ・レートが前回の金利計算期間のキャップ・レートを上限とした金利にスプレッドを加えたものに等しい金利キャップ。
- Stochastic Process** : 確率変数の確率的変動を記述した方程式。
- Stochastic Variable** : 将来の値が不確定な変数。
- Stock Dividend** : 現物株の割当てでもって支払われる配当。
- Stock Index** : 株式のポートフォリオ価値に連動する指数。
- Stock Index Futures** : 株価指数に対する先物。
- Stock Index Option** : 株価指数に対するオプション。
- Stock Option** : 株式に対するオプション。
- Stock Split** : 既存の株式 1 株を 1 株より多い新株に転換すること。
- Storage Costs** : 商品の保管コスト。
- Straddle** : 同じ行使価格のコール 1 単位とプット 1 単位の買いポジション。
- Strangle** : 行使価格の異なるコール 1 単位とプット 1 単位の買いポジション。
- Strap** : 同じ行使価格のコール・オプション 2 単位とプット・オプション 1 単位の買いポジション。
- Stress Testing** : 極端な市場変動のポートフォリオの価値への影響を調べること。
- Strike Price** : オプション契約において、資産を買うまたは売ることのできる価格 (exercise price とも呼ばれる)。
- Strip** : 同じ行使価格のコール・オプション 1 単位とプット・オプション 2 単位の買いポジション。
- Strip Bonds** : 米国長期国債のクーポンを元本と分離して売却することによってつくられる割引債。
- Subprime Mortgage** : 借入れ・返済履歴の乏しい、または借入れ・返済履歴のな

い借手に対して貸し付けられた住宅ローン。

**Swap** : あらかじめ定められた算式に基づいて、将来のキャッシュフローを交換する契約。

**Swap Rate** : スワップの価値がゼロになるような金利スワップにおける固定金利。

**Swaption** : 定められた固定金利と変動金利を交換する金利スワップを開始できるオプション。

**Swing Option** : 消費量の最小水準と最大水準が定められているエネルギー・オプション。オプション保有者がエネルギーの消費量を変えられる回数には、通常上限が設けられている。

**Synthetic CDO** : クレジット・デフォルト・スワップを売却することによって組成される CDO。

**Synthetic Option** : 原資産の売買によって複製されるオプション。

**Systematic Risk** : 分散除去できないリスク。

**Tailing the Hedge** : 日次値洗いの効果を考慮してヘッジに用いる先物契約数を調整すること。

**Tail Loss** : Conditional Value at Risk 参照。

**Take-and-Pay Option** : Swing Option 参照。

**Term Structure of Interest Rates** : 金利と満期との間の関係。

**Terminal Value** : 満期における価値。

**Theta** : 時間の経過に対するオプションや他のデリバティブの価格の変化率。

**Time Decay** : Theta 参照。

**Time Value** : 満期までに時間が残っていることから生じているオプションの価値（オプション価格から本源的価値を引いたものに等しい）。

**Timing Adjustment** : デリバティブのペイオフの発生時点の違いに対応して、変数のフォワード価値に対して行う調整。

**Total Return Swap** : 債券のような資産に対するリターンと LIBOR にスプレッドを加えたものを交換するスワップ。資産に対するリターンには、クーポンのような資産からの収入と資産価値の変化が含まれる。

**Tranche** : 異なるリスク特性をもったいくつの証券の一つ。CDO や CMO のトランシェがその例である。

**Transactions Costs** : 取引の執行コスト（手数料に、約定価格とビッド-オファーの仲値との差額を加えたもの）。

**Treasury Bill** : 米国短期国債。米国政府が財政資金調達のために発行する短期割引債。

**Treasury Bond** : 米国長期国債。米国政府が財政資金調達のために発行する長期利付債。

**Treasury Bond Futures** : 米国長期国債に対する先物契約。

**Treasury Note** : 米国中期国債。Treasury Bond 参照（米国中期国債は満期が10年以下のもの）。

**Treasury Note Futures** : 米国中期国債に対する先物契約。

**Tree** : オプションや他のデリバティブを評価する目的で、市場変数の価値の時間発展を表現したもの。

**Trinomial Tree** : 各ノードから三つの枝が分岐しているツリー。二項モデルと同様にデリバティブの評価に用いられる。

**Triple Witching Hour** : 株価指数先物、株価指数オプション、株価指数先物オプションのすべてが同時に満期を迎える時点を表す用語。

**Underlying Variable** : オプションや他のデリバティブの価格が依存している変数。

**Unsystematic Risk** : Nonsystematic Risk 参照。

**Up-and-In Option** : 原資産価格があらかじめ決められた水準まで上昇したときに効力が発生するオプション。

**Up-and-Out Option** : 原資産価格があらかじめ決められた水準まで上昇したときに効力が消滅するオプション。

**Uptick** : 価格が上昇すること。

**Value at Risk** : ある指定した信頼水準を超えないような損失額。

**Variance-Covariance Matrix** : いくつかの異なる市場変数に対する分散と共分散からなる行列。

**Variance-Gamma Model** : 小さなジャンプが頻繁に発生し、大きなジャンプがまれに発生するような純粹ジャンプモデル。

**Variance Margin** : 追加証拠金の差入要求があったとき、証拠金勘定の残高を当初証拠金まで引き上げるのに必要となる追加の証拠金。

**Variance Rate** : ボラティリティの2乗。

**Variance Reduction Procedures** : モンテカルロ・シミュレーションの誤差を小さくする方法。

**Variance Swap** : ある期間における分散率の実現値と固定の分散率とを交換するスワップ。分散率はともに同じ想定元本に適用される。

**Vega** : ボラティリティに対するオプションや他のデリバティブの価格の変化率。

**Vega-Neutral Portfolio** : ベガがゼロのポートフォリオ。

**Vesting Period** : オプションが行使できない期間。

**VIX Index** : S&P 500のボラティリティ指数。

**Volatility** : 資産の収益率に対する不確実性の尺度。

**Volatility Skew** : 対称的でないボラティリティ・スマイルを表す用語。

**Volatility Smile** : 行使価格に対するインプライド・ボラティリティの変化を表したもの。

**Volatility Surface** : 行使価格と満期に対するインプライド・ボラティリティの変化を示した表。

**Volatility Swap** : ある期間におけるボラティリティの実現値と固定のボラティリティとを交換するスワップ。ボラティリティはともに同じ想定元本に適用される。

**Volatility Term Structure** : 満期までの時間に対するインプライド・ボラティリティの変化を表したもの。

**Warrant** : 企業や金融機関が発行するオプション。コール・ワントは、企業が自社株に対して発行したものが多い。

**Weather Derivative** : 天候に依存するペイオフをもつデリバティブ。

**Wiener Process** : 長さ  $\Delta t$  の各微小時間における変数の変化が平均ゼロ、分散  $\Delta t$  の正規分布に従う確率過程。

**Wild Card Play** : 取引終了後のある時間内であれば終値で先物契約の現渡しが行える権利。

**Writing an Option** : オプションを売ること。

**Yield** : 商品から得られる收益率。

**Yield Curve** : Term Structure of Interest Rates 参照。

**Zero-Coupon Bond** : クーポンのない債券。

**Zero-Coupon Interest Rate** : 割引債から得られる金利。

**Zero-Coupon Yield Curve** : 満期までの時間に対してゼロクーポン・レートを描いた曲線。

**Zero Curve** : Zero-Coupon Yield Curve 参照。

**Zero Rate** : Zero-Coupon Interest Rate 参照。

## [DerivaGem ソフトウェア]

本書に付属しているソフトウェアは、DerivaGem for Excel, Version 1.52である。本ソフトウェアは Excel 2000またはそれ以降のバージョンと Windows 2000またはそれ以降のバージョンを必要とし、三つのファイル：DG152.DLL, DG152.xls, DG152functions.xls からなる。また、セットアップ用のルーチンもソフトウェアといっしょに用意されている。これを用いると、DG152.DLL が Windows¥System または WINNT¥System32 にロードされる(注1)。

本ソフトウェアを使用する前に、Office 2007のユーザーは「オプション」ボタンをクリックしてマクロを有効にしなければならない。Office 2007を使っていない場合は、マクロのセキュリティレベルを中か低に設定する必要がある。それにはExcel で「ツール」をクリックし、「マクロ」の次に「セキュリティ」を選択し、セキュリティレベルを変更すればよい。本ソフトウェアを利用する際にマクロを利用するかどうかを聞いてくるようになるので、「マクロを有効にする」を選択する。

本ソフトウェアの最新版は著者の Web サイト：

<http://www.rotman.utoronto.ca/~hull>

からダウンロードできる。

ソフトウェアは二つの部分：Options Calculator (DG152.xls) と Applications Builder (DG152functions.xls) からなる。両方とも、DG152.DLL を Window¥System または WINNT¥System32 フォルダにロードする必要がある。

新規ユーザーは Options Calculator からはじめることを勧める。

---

(注1) Windows エクスプローラの設定が\*.dll ファイルを表示しないようになっている場合もある。Windows Vista ではこうなっていても問題はないようである。Windows のそれ以前のバージョンで \*.dll ファイルが表示されるようにするには、次のようにすればよい。「ツール」をクリックして「フォルダオプション」を選択し、「表示」で「すべてのファイルとフォルダを表示する」を選択する。

## THE OPTIONS CALCULATOR

DG152.xls はユーザー・フレンドリーなオプション計算機であり、 三つのワークシートからなる。 1枚目のワークシートは株券オプション、 通貨オプション、 指数オプション、 および先物オプションに対して用いる。 2枚目のワークシートはヨーロピアンおよびアメリカンの債券オプションに対して用いる。 3枚目のワークシートはキャップ、 フロア、 およびヨーロピアン・スワップションに対して用いる。

本ソフトウェアを用いて、 広範囲のさまざまな商品に対して価格、 グリークス、 およびインプライド・ボラティリティを計算することができる。 オプションの価格とグリークスが入力値によって変化する様子をグラフとして表示することができる。 また、 計算の実行過程を示す二項ツリーと三項ツリーを表示することができる。

### 一般的な操作方法

Options Calculator を使うには、 ワークシートを選び、 適切なボタンをクリックして、 Option Type や Underlying Type などを選択する必要がある。 次に、 計算したいオプションのパラメータを入力し、 キーボードの Enter キーを押し、 Calculate をクリックする。 そうすると、 DerivaGem ソフトウェアは計算対象としているオプションの価格またはインプライド・ボラティリティを、 グリークスといっしょに表示する。 ツリーを用いて価格を計算し、 1枚目か 2枚目のワークシートを用いている場合には、 Display Tree をクリックするとそのツリーをみることができる。 第11章と第19章には、 ツリーのサンプルが表示されている。 三つのすべてのワークシートで、 多くのさまざまなグラフを表示することができる。 グラフを表示するには、 縦軸の変数、 横軸の変数、 および横軸の値の範囲を最初に選択しなければならない。 その後で、 キーボードの Enter キーを押し、 Draw Graph をクリックする。 一つ以上のセルの値を変更したときはいつでも、 ボタンをクリックする前にキーボードの Enter キーを押さなければならないことに注意しよう。

Excel のバージョンが7.0以降の場合には、 ソフトウェアを最初に保存す

るときに新しいバージョンに変更するかどうかを聞かれる。そのときは Yes ボタンを選択する。

### 株式、通貨、指数、および先物に対するオプション

1枚目のワークシート (Equity\_FX\_Index\_Futures) は、株式、通貨、指数、および先物のオプションに対して用いる。このシートを使うには、最初に Underlying Type (Equity, Currency, Index, または Futures) を選択する。次に、Option Type (Analytic European, Binomial European, Binomial American, Asian, Barrier Up and In, Barrier Up and Out, Barrier Down and In, Barrier Down and Out, Binary Cash or Nothing, Binary Asset or Nothing, Chooser, Compound Option on Call, Compound Option on Put, または Lookback) を選択する。それから、原資産に関するデータとオプションに関するデータを入力する。金利はすべて連続複利で表示されていることに注意しよう。

ヨーロピアンおよびアメリカンの株券オプションの場合には、配当を入力する表がポップアップする。1列目に各配当落ち日までの時間（現時点からの年数）、2列目に配当額を入力する。配当は日付順に入力する必要がある。

ボタンをクリックして、オプションはコールとプットのどちらであるか、およびインプライド・ボラティリティを計算しようとしているのかどうかを選択しなければならない。インプライド・ボラティリティの計算を選択した場合は、Price と書かれたセルにオプション価格を入力する。

すべてのデータを入力したら、キーボードの Enter キーを押し、Calculate をクリックする。インプライド・ボラティリティを選択した場合は、DerivaGem ソフトウェアは Volatility (% per year) と書かれたセルにインプライド・ボラティリティを表示する。インプライド・ボラティリティが選択されなかった場合は、そのセルに入力されたボラティリティを用いてオプション価格を計算し、その結果を Price と書かれたセルに表示する。

計算が終了すると、ツリー（使った場合には）を詳しく調べることができ、グラフを表示することができる。

Analytic European を選択すると、DerivaGem ソフトウェアは第13章、第15章、および第16章で説明した Black-Scholes 式を用いて価格を計算し、第17章で説明した式を用いてグリーケスを計算する。Binomial European または Binomial American を選択すると、第19章で説明したような二項ツリーが構築される。時間ステップ数は最大で500にすることができる。

入力データについては、シートをみればだいたいわかる。アジアン・オプションの場合、Current Average には開始時点からの平均価格を入力する。新規のアジアン・オプション (Time since Inception の値がゼロ) の場合は、Current Average セルは計算には無関係で、空白のままでもよい。ルックバック・オプションの場合、Call が評価されるときは Minimum to Date が使われ、Put が評価されるときは Maximum to Date が使われる。新規取引に對しては、これらの値は原資産の現在価格に等しくする。

## 債券オプション

2枚目のワークシート (Bond\_Options) は、債券のヨーロピアン・オプションとアメリカン・オプションに対して用いる。評価には Black モデル、1 ファクター正規モデル、1 ファクター対数正規モデルのいずれかを使うことができる。このシートを使うには、最初にプライシング・モデル (Black-European, Normal-Analytic European, Normal-Tree European, Normal-American, Lognormal-European, または Lognormal-American) を選択する。次に、Bond Data と Option Data に入力する。クーポンは年当りのレートで、支払頻度は Quarterly, Semi-Annual, Annual から選択できる。ゼロクーポン・イールドカーブは Term Structure と書かれた表に入力する。1列目に満期 (年単位)、2列目に対応する連続複利での金利を入力する。満期は日時順に入力する必要がある。DerivaGem ソフトウェアは図 4.1 のような区分的に線形なゼロ・カーブを仮定している。DerivaGem ソフトウェアでは、金利デリバティブを評価するとき、すべての時間は最も近い日数に丸められていることに注意しよう。

すべてのデータを入力したら、キーボードの Enter キーを押す。計算が

終了すると、ゼロ・カーブから計算された元本100ドルに対する債券の呈示価格が表示される。オプションがコールとプットのどちらであるか、および行使価格が呈示価格（クリーン・プライス）と取引価格（ダーティー・プライス）のどちらであるかを指定しなければならない（二つの違いについては28.1節の説明と例を参照）。行使価格は元本100ドルに対する価格で入力することに注意しよう。インプライド・ボラティリティを計算しようとしているのかどうかを指定しなければならない。インプライド・ボラティリティの計算を選択した場合に、正規モデルまたは対数正規モデルが使われているときは、DerivaGem ソフトウェアは回帰率を一定にして、短期金利のインプライド・ボラティリティを求めていている。

すべての入力が終了したら、キーボードの Enter キーを押し、Calculate をクリックする。計算が終了すると、ツリー（使った場合には）を詳しく調べることができ、グラフを表示することができる。表示されるツリーはオプションの満期までのものであることに注意しよう。DerivaGem ソフトウェアの内部では、原資産の債券の価値を計算するためにもっと大きなツリーが使われている。

Black モデルが選択されているときは、DerivaGem ソフトウェアは28.1節の式を用いている。また、入力されたイールド・ボラティリティは28.1節で説明した手続を用いて価格ボラティリティに変換されている。

## キャップとスワップション

3枚目のワークシート (Caps\_and\_Swap\_Options) は、キャップとスワップションに対して用いる。評価には Black モデル、1 ファクター正規モデル、1 ファクター対数正規モデルのいずれかを使うことができる。このシートを使うには、最初に Option Type (Swap Option または Cap/Floor) と Pricing Model (Black-European, Normal-European, または Lognormal-European) を選択する。次に、計算したいオプションのデータを入力する。Settlement Frequency は支払頻度のことで、Annual, Semi-Annual, Quarterly, または Monthly から選択できる。本ソフトウェアでは、キャップまた

はスワップションの満期から後ろ向きに支払日を計算していく。最初の金利計算期間は、通常の金利計算期間の0.5倍から1.5倍という標準的でない長さになる場合もある。本ソフトウェアは、価格からボラティリティまたはキャップ・レートやスワップ・レートを求めるのに使うこともできる。正規モデルまたは対数正規モデルが使われているときは、DerivaGem ソフトウェアは回帰率を一定にして、短期金利のインプライド・ボラティリティを求めている。ゼロクーポン・イールドカーブは、Term Structure と書かれた表に入力する。1列目に満期（年単位）、2列目に対応する連続複利での金利を入力する。満期は日時順に入力する必要がある。DerivaGem ソフトウェアは図4.1のような区分的に線形なゼロ・カーブを仮定している。

すべての入力が終了したら、Calculate をクリックする。計算が終了すると、グラフを表示することができる。Black モデルを使っているときは、DerivaGem ソフトウェアは28.2節と28.3節の式を用いている。

## グリークス

Equity\_FX\_Index\_Futures ワークシートでは、グリークスは以下のように計算される。

Delta : 原資産価格が1ドル増加したときのオプション価格の変化

Gamma : 原資産価格が1ドル増加したときのデルタの変化

Vega : ボラティリティが1%増加したときのオプション価格の変化  
(たとえば、ボラティリティが20%から21%に増加する)

Rho : 金利が1%増加したときのオプション価格の変化 (たとえば、金利が5%から6%に増加する)

Theta : 曆日で1日経過したときのオプション価格の変化

Bond\_Options ワークシートと Caps\_and\_Swap\_Options ワークシートでは、グリークスは以下のように計算される。

DV01 : ゼロ・カーブを1ペース・ポイント上方にパラレル・シフトさせたときのオプション価格の変化

Gamma01 : ゼロ・カーブを1ペース・ポイント上方にパラレル・シ

フトさせたときの DV01 の変化を100倍したもの  
Vega : ボラティリティが 1 %増加したときのオプション価格の変化 (たとえば、ボラティリティが20%から21%に増加する)

## THE APPLICATIONS BUILDER

DG152functions.xls はアプリケーション・ビルダーである。これには21の関数と、ユーザーが独自のアプリケーションを作成するときに参考となる七つのサンプル・アプリケーションが用意されている。

### 関　　数

Applications Builder には、次の21の関数が含まれている。完全な詳細については、最初のワークシート (FunctionSpecs) に記述されている。

1. Black\_Scholes : 株式、株価指数、通貨、または先物契約のヨーロピアン・オプションに対して Black-Scholes 式の計算を行う。
2. TreeEquityOpt : 株式、株価指数、通貨、または先物契約のヨーロピアンまたはアメリカン・オプションに対して二項ツリーの計算を行う。
3. BinaryOption : 株式、株価指数、通貨、または先物契約のバイナリー・オプションに対する計算を行う。
4. BarrierOption : 配当のない株式、株価指数、通貨、または先物契約のバリアー・オプションに対する計算を行う。
5. AverageOption : 配当のない株式、株価指数、通貨、または先物契約のアジアン・オプションに対する計算を行う。
6. ChooserOption : 配当のない株式、株価指数、通貨、または先物契約のチューザー・オプションに対する計算を行う。
7. CompoundOption : 配当のない株式、株価指数、通貨、または先物契約のコンパウンド・オプションに対する計算を行う。
8. LookbackOption : 配当のない株式、株価指数、通貨、または先物契約の (固定あるいは変動) ルックバック・オプションに対する計算

を行う。

9. EPortfolio : 株式、株価指数、通貨、または先物契約のオプション・ポートフォリオに対する計算を行う。
10. BlackCap : Black モデルを用いてキャップまたはフロアに対する計算を行う。
11. HullWhiteCap : Hull-White モデルを用いてキャップまたはフロアに対する計算を行う。
12. TreeCap : 三項ツリーを用いてキャップまたはフロアに対する計算を行う。
13. BlackSwapOption : Black モデルを用いてスワップションに対する計算を行う。
14. HullWhiteSwap : Hull-White モデルを用いてスワップションに対する計算を行う。
15. TreeSwapOption : 三項ツリーを用いてスワップションに対する計算を行う。
16. BlackBondOption : Black モデルを用いて債券オプションに対する計算を行う。
17. HullWhiteBondOption : Hull-White モデルを用いて債券オプションに対する計算を行う。
18. TreeBondOption : 三項ツリーを用いて債券オプションに対する計算を行う。
19. BondPrice : 債券を評価する。
20. SwapPrice : プレーン・バニラ金利スワップを評価する。ただし、開始時点より前のリセット日のキャッシュフローは無視する。
21. IPortfolio : 金利デリバティブのポートフォリオに対する計算を行う。

## サンプル・アプリケーション

DG152functions.xls には、七つのサンプル・アプリケーションのワーク

シートが含まれている。

- A. Binomial Convergence : 第11章と第19章で説明した二項モデルの収束性を調べるアプリケーションである。
- B. Greek Letters : 第17章で説明したグリークスのグラフを表示するアプリケーションである。
- C. Delta Hedge : 表17.2と表17.3のようなデルタ・ヘッジのパフォーマンスを調べるアプリケーションである。
- D. Delta and Gamma Hedge : バイナリー・オプションのポジションに対してデルタとガンマをヘッジしたときのパフォーマンスを調べるアプリケーションである。
- E. Value and Risk : 1銘柄の株式に対する三つのオプションからなるポートフォリオに対して、3種類の異なる方法でバリュー・アット・リスクを計算するアプリケーションである。
- F. Barrier Replication : 24.14節で説明したオプションの静的な複製例に関する計算を行うアプリケーションである。
- G. Trinomial Convergence : 第30章で説明した三項ツリー・モデルの収束性を調べるアプリケーションである。

## [先物とオプションを取引している主要な取引所]

|  |          |  |
|--|----------|--|
| American Stock Exchange                  | AMEX     | <a href="http://www.amex.com">www.amex.com</a>                   |
| Australian Stock Exchange                | ASX      | <a href="http://www.asx.com.au">www.asx.com.au</a>               |
| Bolsa de Mercadorias y Futuros, Brazil   | BM&F     | <a href="http://www.bmf.com.br">www.bmf.com.br</a>               |
| Bursa Malaysia                           | BM       | <a href="http://www.bursamalaysia.com">www.bursamalaysia.com</a> |
| Chicago Board of Trade                   | CBOT     | <a href="http://www.cbot.com">www.cbot.com</a>                   |
| Chicago Board Options Exchange           | CBOE     | <a href="http://www.cboe.com">www.cboe.com</a>                   |
| Chicago Mercantile Exchange              | CME      | <a href="http://www.cme.com">www.cme.com</a>                     |
| Eurex                                    | EUREX    | <a href="http://www.eurexchange.com">www.eurexchange.com</a>     |
| Euronext                                 | EURONEXT | <a href="http://www.euronext.com">www.euronext.com</a>           |
| Hong Kong Futures Exchange               | HKFE     | <a href="http://www.hkex.com.hk">www.hkex.com.hk</a>             |
| Intercontinental Exchange                | ICE      | <a href="http://www.theice.com">www.theice.com</a>               |
| International Petroleum Exchange, London | IPE      | <a href="http://www.ipe.uk.com">www.ipe.uk.com</a>               |
| International Securities Exchange        | ISE      | <a href="http://www.iseoptions.com">www.iseoptions.com</a>       |
| Kansas City Board of Trade               | KCBT     | <a href="http://www.kcbt.com">www.kcbt.com</a>                   |
| London Metal Exchange                    | LME      | <a href="http://www.lme.co.uk">www.lme.co.uk</a>                 |
| MEFF Renta Fija and Variable, Spain      | MEFF     | <a href="http://www.meff.es">www.meff.es</a>                     |
| Mexican Derivatives Exchange             | MEXDER   | <a href="http://www.mexder.com">www.mexder.com</a>               |
| Minneapolis Grain Exchange               | MGE      | <a href="http://www.mgex.com">www.mgex.com</a>                   |
| Montreal Exchange                        | ME       | <a href="http://www.me.org">www.me.org</a>                       |
| New York Board of Trade                  | NYBOT    | <a href="http://www.nybot.com">www.nybot.com</a>                 |
| New York Mercantile Exchange             | NYMEX    | <a href="http://www.nymex.com">www.nymex.com</a>                 |
| New York Stock Exchange                  | NYSE     | <a href="http://www.nyse.com">www.nyse.com</a>                   |
| Nordic Exchange                          | OMX      | <a href="http://www.omxgroup.com">www.omxgroup.com</a>           |
| Osaka Securities Exchange                | OSE      | <a href="http://www.ose.or.jp">www.ose.or.jp</a>                 |
| Philadelphia Stock Exchange              | PHLX     | <a href="http://www.phlx.com">www.phlx.com</a>                   |
| Singapore Exchange                       | SGX      | <a href="http://www.ses.com.sg">www.ses.com.sg</a>               |
| Sydney Futures Exchange                  | SFE      | <a href="http://www.sfe.com.au">www.sfe.com.au</a>               |
| Tokyo Grain Exchange                     | TGE      | <a href="http://www.tge.or.jp">www.tge.or.jp</a>                 |
| Tokyo Financial Exchange                 | TFX      | <a href="http://www.tfx.co.jp">www.tfx.co.jp</a>                 |

ここ数年、デリバティブ取引所の国際的な統合が数多くあった。たとえば、2006年10月にCBOTとCMEは世界最大のデリバティブ取引所を形成する目的で合併することの基本合意を発表した。EURONEXTとNYSEも2006年6月に合併することの基本合意を発表している。ASXは2006年7月にSFEと合併した。ICEは2006年9月にNYBOTを、2001年6月にIPEを買収することに合意した。EUREXはDeutsche Börse AGとSWX Swiss Exchangeによって共同運営されている。EURONEXTは二つのフランスの取引所に加え、London International Financial Futures Exchange (LIFFE)を所有している。NYSEは2005年9月にPacific Exchangeを買収した。おそらく、これらの統合は主に取引コストを下げる目的で規模の経済を追求して行われている。

## [ $N(x)$ の数表 $x \leq 0$ の場合]

この数表は  $x \leq 0$ に対する  $N(x)$ の値を示したものである。表にない  $x$  の値に対しては補間を用いる。たとえば、以下のように求める。

$$\begin{aligned}
 N(-0.1234) &= N(-0.12) - 0.34[N(-0.12) - N(-0.13)] \\
 &= 0.4522 - 0.34 \times (0.4522 - 0.4483) \\
 &= 0.4509
 \end{aligned}$$

| $x$  | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| -0.0 | 0.5000 | 0.4960 | 0.4920 | 0.4880 | 0.4840 | 0.4801 | 0.4761 | 0.4721 | 0.4681 | 0.4641 |
| -0.1 | 0.4602 | 0.4562 | 0.4522 | 0.4483 | 0.4443 | 0.4404 | 0.4364 | 0.4325 | 0.4286 | 0.4247 |
| -0.2 | 0.4207 | 0.4168 | 0.4129 | 0.4090 | 0.4052 | 0.4013 | 0.3974 | 0.3936 | 0.3897 | 0.3859 |
| -0.3 | 0.3821 | 0.3783 | 0.3745 | 0.3707 | 0.3669 | 0.3632 | 0.3594 | 0.3557 | 0.3520 | 0.3483 |
| -0.4 | 0.3446 | 0.3409 | 0.3372 | 0.3336 | 0.3300 | 0.3264 | 0.3228 | 0.3192 | 0.3156 | 0.3121 |
| -0.5 | 0.3085 | 0.3050 | 0.3015 | 0.2981 | 0.2946 | 0.2912 | 0.2877 | 0.2843 | 0.2810 | 0.2776 |
| -0.6 | 0.2743 | 0.2709 | 0.2676 | 0.2643 | 0.2611 | 0.2578 | 0.2546 | 0.2514 | 0.2483 | 0.2451 |
| -0.7 | 0.2420 | 0.2389 | 0.2358 | 0.2327 | 0.2296 | 0.2266 | 0.2236 | 0.2206 | 0.2177 | 0.2148 |
| -0.8 | 0.2119 | 0.2090 | 0.2061 | 0.2033 | 0.2005 | 0.1977 | 0.1949 | 0.1922 | 0.1894 | 0.1867 |
| -0.9 | 0.1841 | 0.1814 | 0.1788 | 0.1762 | 0.1736 | 0.1711 | 0.1685 | 0.1660 | 0.1635 | 0.1611 |
| -1.0 | 0.1587 | 0.1562 | 0.1539 | 0.1515 | 0.1492 | 0.1469 | 0.1446 | 0.1423 | 0.1401 | 0.1379 |
| -1.1 | 0.1357 | 0.1335 | 0.1314 | 0.1292 | 0.1271 | 0.1251 | 0.1230 | 0.1210 | 0.1190 | 0.1170 |
| -1.2 | 0.1151 | 0.1131 | 0.1112 | 0.1093 | 0.1075 | 0.1056 | 0.1038 | 0.1020 | 0.1003 | 0.0985 |
| -1.3 | 0.0968 | 0.0951 | 0.0934 | 0.0918 | 0.0901 | 0.0885 | 0.0869 | 0.0853 | 0.0838 | 0.0823 |
| -1.4 | 0.0808 | 0.0793 | 0.0778 | 0.0764 | 0.0749 | 0.0735 | 0.0721 | 0.0708 | 0.0694 | 0.0681 |
| -1.5 | 0.0668 | 0.0655 | 0.0643 | 0.0630 | 0.0618 | 0.0606 | 0.0594 | 0.0582 | 0.0571 | 0.0559 |
| -1.6 | 0.0548 | 0.0537 | 0.0526 | 0.0516 | 0.0505 | 0.0495 | 0.0485 | 0.0475 | 0.0465 | 0.0455 |
| -1.7 | 0.0446 | 0.0436 | 0.0427 | 0.0418 | 0.0409 | 0.0401 | 0.0392 | 0.0384 | 0.0375 | 0.0367 |
| -1.8 | 0.0359 | 0.0351 | 0.0344 | 0.0336 | 0.0329 | 0.0322 | 0.0314 | 0.0307 | 0.0301 | 0.0294 |
| -1.9 | 0.0287 | 0.0281 | 0.0274 | 0.0268 | 0.0262 | 0.0256 | 0.0250 | 0.0244 | 0.0239 | 0.0233 |
| -2.0 | 0.0228 | 0.0222 | 0.0217 | 0.0212 | 0.0207 | 0.0202 | 0.0197 | 0.0192 | 0.0188 | 0.0183 |
| -2.1 | 0.0179 | 0.0174 | 0.0170 | 0.0166 | 0.0162 | 0.0158 | 0.0154 | 0.0150 | 0.0146 | 0.0143 |
| -2.2 | 0.0139 | 0.0136 | 0.0132 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0122 | 0.0119 | 0.0116 | 0.0113 | 0.0110 |
| -2.3 | 0.0107 | 0.0104 | 0.0102 | 0.0099 | 0.0096 | 0.0094 | 0.0091 | 0.0089 | 0.0087 | 0.0084 |
| -2.4 | 0.0082 | 0.0080 | 0.0078 | 0.0075 | 0.0073 | 0.0071 | 0.0069 | 0.0068 | 0.0066 | 0.0064 |
| -2.5 | 0.0062 | 0.0060 | 0.0059 | 0.0057 | 0.0055 | 0.0054 | 0.0052 | 0.0051 | 0.0049 | 0.0048 |
| -2.6 | 0.0047 | 0.0045 | 0.0044 | 0.0043 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0039 | 0.0038 | 0.0037 | 0.0036 |
| -2.7 | 0.0035 | 0.0034 | 0.0033 | 0.0032 | 0.0031 | 0.0030 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0026 |
| -2.8 | 0.0026 | 0.0025 | 0.0024 | 0.0023 | 0.0023 | 0.0022 | 0.0021 | 0.0021 | 0.0020 | 0.0019 |
| -2.9 | 0.0019 | 0.0018 | 0.0018 | 0.0017 | 0.0016 | 0.0016 | 0.0015 | 0.0015 | 0.0014 | 0.0014 |
| -3.0 | 0.0014 | 0.0013 | 0.0013 | 0.0012 | 0.0012 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 |
| -3.1 | 0.0010 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0008 | 0.0007 | 0.0007 |
| -3.2 | 0.0007 | 0.0007 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0006 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 |
| -3.3 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0003 |
| -3.4 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0002 |
| -3.5 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 |
| -3.6 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| -3.7 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| -3.8 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| -3.9 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| -4.0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |

## [ $N(x)$ の数表 $x \geq 0$ の場合]

この数表は  $x \geq 0$  に対する  $N(x)$  の値を示したものである。表にない  $x$  の値に対しては補間を用いる。たとえば、以下のように求める。

$$\begin{aligned}
 N(0.6278) &= N(0.62) + 0.78[N(0.63) - N(0.62)] \\
 &= 0.7324 + 0.78 \times (0.7357 - 0.7324) \\
 &= 0.7350
 \end{aligned}$$

| $x$ | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8886 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9963 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9986 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |
| 3.1 | 0.9990 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9991 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9992 | 0.9993 | 0.9993 |
| 3.2 | 0.9993 | 0.9993 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9994 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 |
| 3.3 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9995 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9996 | 0.9997 |
| 3.4 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9997 | 0.9998 |
| 3.5 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9998 |
| 3.6 | 0.9998 | 0.9998 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.7 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.8 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 3.9 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |
| 4.0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

## 人名索引

- Abramowitz, M. .... 431  
Aitchison, J. .... 410  
Allayannis, G. .... 99  
Allen, S.L. .... 139  
Altman, E.I. .... 746, 780  
Amato, J.D. .... 756  
Amin, K. .... 499, 1095  
Amran, M. .... 1145  
Andersen, L.B.G. .... 827, 828,  
                            831, 907, 912, 930, 932,  
                            934, 1085, 1089, 1090, 1095  
Andreasen, J. .... 1085, 1089, 1090, 1095  
Ang, A. .... 828  
Antikarov, V. .... 1145  
Arditti, F. .... 891  
Artzner, P. .... 675, 702  
Arzac, E.R. .... 290  
Bakshi, G. .... 600  
Bartter, B. .... 376, 666, 1031  
Basak, S. .... 702  
Basu, S. .... 827, 831  
Bates, D.S. .... 601  
Baxter, M. .... 964  
Baz, J. .... 256  
Beaglehole, D.R. .... 890, 892  
Beder, T. .... 702  
Bharadwaj, A. .... 345  
Biger, N. .... 499  
Black, F. .... 318, 407, 441, 445, 520,  
                            526, 1000, 1040, 1064  
Blattberg, R. .... 445  
Bodie, Z. .... 499  
Bodnar, G.M. .... 99  
Bodurtha, J.N. .... 934  
Bollerslev, T. .... 718, 737  
Boudoukh, J. .... 702  
Box, G.E.P. .... 727  
Boyle, P.P. .... 666, 919, 934  
Brace, A. .... 1076, 1085, 1095  
Brady, B. .... 746  
Brealey, R.A. .... 399  
Breeden, D.T. .... 607  
Brennan, M.J. .... 1034  
Broadie, M. .... 319, 666, 846, 851, 932  
Brotherton-Ratcliffe, R. .... 650,  
                            907, 934, 1021  
Brown, G.W. .... 99  
Brown, J.A.C. .... 410  
Brown, K.C. .... 256  
Buffum, D. .... 912  
Buhler, W. .... 1095  
Burghardt, G. .... 210  
Cai, L. .... 891  
Canter, M.S. .... 99, 892  
Cantor, R. .... 746  
Cao, C. .... 600  
Cao, M. .... 891  
Carpenter, J. .... 476  
Carr, P. .... 859, 868, 900, 935  
Carverhill, A. .... 1096  
Chance, D. .... 1121  
Chancellor, E. .... 24  
Chang, E.C. .... 900, 935  
Chang, R.P. .... 180  
Chaput, J.S. .... 345  
Chen, J. .... 828  
Chen, R.-R. .... 524  
Chen, Z. .... 600  
Cheyette, O. .... 1096  
Cleowlow, L. .... 665, 868, 892

|                  |  |                  |                      |
|------------------|--|------------------|----------------------|
| Cole, J.B.       | 892  | Flannery, B.P.   | 650,651,665,723,1061 |
| Conze, A.        | 934  | Flavell, R.      | 256                  |
| Cooper, I.       | 256  | Freed, L.        | 828                  |
| Cootner, P.H.    | 399  | French, K.R.     | 446                  |
| Copeland, T.     | 1145   | Froot, K.A.      | 892                  |
| Core, J.E.       | 476  | Frye, J.         | 697,703              |
| Coval, J.E.      | 376  | Gao, B.          | 635,666,922,935      |
| Cox, D.R.        | 399  | Garman, M.       | 848,964              |
| Cox, J.C.        | 180,186,376,446,614,665,<br>897,934,964,1033,1054,1064 | Garman, M.B.     | 499                  |
| Culp, C.         | 99   | Gastineau, G.L.  | 62                   |
| Cumby, R.        | 737  | Gatarek, D.      | 1076,1085,1095       |
| Daglish, T.      | 596  | Gatto, M.A.      | 848,868              |
| Das, S.          | 828,831  | Geczy, C.        | 99                   |
| Dattatreya, R.E. | 256  | Geman, H.        | 892                  |
| Delbaen, F.      | 675,702  | Geng, G.         | 828                  |
| Demeterfi, K.    | 859,868  | Geske, R.        | 442,841,868          |
| Derman, E.       | 593,601,859,<br>863,868,906,934                        | Ghon, R.S.       | 180                  |
| Detemple, J.     | 319  | Giddy, I.H.      | 499                  |
| Dowd, K.         | 703  | Glasserman, P.   | 666,846,851          |
| Duan, J.-C.      | 905,934  | Goldman, B.      | 848,868              |
| Dufey, G.        | 499  | Gonedes, N.      | 445                  |
| Duffie, D.       | 210,703,780,964,1096                                   | Grabbe, J.O.     | 499                  |
| Dunbar, N.       | 1166   | Graham, J.R.     | 100                  |
| Dupire, B.       | 906,907,935  | Gregory, J.      | 832                  |
| Eber, J.-M.      | 675,702  | Grinblatt, M.    | 139,210              |
| Ederington, L.H. | 99,345,601   | Guan, W.         | 601                  |
| Edwards, F.R.    | 99   | Guay, W.R.       | 476                  |
| Embrechts, P.    | 680,703  | Gupta, A.        | 256                  |
| Engle, R.F.      | 715,718,725,734,737                                    | Hamilton, D.T.   | 746                  |
| Ergener, D.      | 863,868  | Hanley, M.       | 892                  |
| Eydeland, A.     | 892  | Harrison, J.M.   | 964                  |
| Fabozzi, F.J.    | 139,210  | Hasbrook, J.     | 737                  |
| Fama, E.F.       | 445,446  | Haushalter, G.D. | 100                  |
| Feller, W.       | 399  | Hayt, G.S.       | 99                   |
| Figlewski, S.    | 635,666,737,922,935                                    | Heath, D.        | 675,702,1072,1096    |
| Finger, C.C.     | 780  | Hendricks, D.    | 703                  |
|                  |  | Heron, R.        | 474,476              |
|                  |  | Heston, S.L.     | 905,935              |

- Hicks, J.R. .... 175  
Hilliard, J.E. .... 526  
Ho, T.S.Y. .... 203, 1036, 1064  
Hopper, G. .... 703  
Hoskins, W. .... 210  
Hotta, K. .... 256  
Hua, P. .... 703  
Huddart, S. .... 476  
Hull, J.C. .... 464, 470, 476, 499, 557, 558,  
  587, 596, 630, 648, 662, 666, 695, 703, 750,  
  752, 780, 803, 827, 829, 831, 904, 905, 908,  
  913, 924, 925, 935, 1038, 1040, 1046, 1054,  
  1056, 1064, 1082, 1085, 1089, 1096  
Hunter, R. .... 891  
Iben, B. .... 1021  
Iben, T. .... 781  
Ingersoll, J.E. .... 180, 186, 908,  
  964, 1033, 1054, 1064  
Inui, K. .... 1096  
Itô, K. .... 395  
Jackson, P. .... 703  
Jackwerth, J.C. .... 601  
Jain, G. .... 666  
Jamshidian, F. .... 694, 703, 1021, 1096  
Jarow, R.A. .... 180, 499, 1072, 1096  
Jeffrey, A. .... 1096  
Jegadeesh, N. .... 210  
Jermakyan, M. .... 934  
Jones, F.J. .... 62  
Jorion, P. .... 62, 139, 499, 703, 1166  
Joskow, P. .... 892  
Ju, X. .... 1167  
Kamal, M. .... 859, 868  
Kan, R. .... 1096  
Kane, A. .... 737  
Kane, E.J. .... 180  
Kani, I. .... 863, 868, 906, 934  
Kapadia, N. .... 828  
Karasinski, P. .... 1040, 1064  
Karlin, S. .... 400  
Kawaller, I.G. .... 62  
Kealhofer, S. .... 780  
Kemna, A. .... 853  
Kendall, R. .... 892  
Keynes, J.M. .... 175  
Kijima, M. .... 1064, 1096  
Kleinsteiner, A.D. .... 139  
Kluppelberg, C. .... 680, 703  
Koch, P.D. .... 62  
Kohlhagen, S.W. .... 499  
Koller, T. .... 1145  
Kon, S.J. .... 445  
Kou, S.G. .... 846, 851  
Kreps, D.M. .... 964  
Kulatilaka, N. .... 1145  
Kwok, Y.K. .... 850  
Lang, M. .... 476  
Lau, S.H. .... 919, 934  
Laurent, J.-P. .... 832  
Lauterbach, B. .... 601  
Lee, R. .... 859, 868  
Lee, S.-B. .... 203, 1036, 1064  
Li, A. .... 1064  
Li, D.X. .... 781, 832  
Lie, E. .... 473, 474, 476  
Lieu, D. .... 524  
Litterman, R. .... 781  
Litzenberger, R.H. .... 256, 607, 890, 892  
Ljung, G.M. .... 727  
Longin, F.M. .... 703  
Longstaff, F.A. .... 139, 927, 935, 1035,  
  1064, 1089, 1090, 1144  
Lowenstein, R. .... 62  
Madan, D.B. .... 900, 935  
Margrabe, W. .... 856, 868  
Markowitz, H. .... 684

|                 |  |                        |  |
|-----------------|--|------------------------|--|
| Marshall, C.    | 703  | Petersen, M.A.         | 100  |
| Marston, R.C.   | 99   | Pilipovic, D.          | 887  |
| Maude, D.J.     | 703  | Pindyck, R.S.          | 180  |
| McDonald, R.    | 891  | Pliska, S.R.           | 964  |
| McMillan, L.G.  | 291,345                                    | Posner, S.E.           | 868  |
| McNeil, A.J.    | 680,703                                    | Predescu, M.           | 750,752,780,828  |
| Melick, W.R.    | 601  | Press, W.H.            | 650,651,665,723,1061                                       |
| Mello, A.S.     | 100,256                                    | Rawnsley, J.H.         | 24   |
| Merton, R.C.    | 24,319,407,445,<br>490,499,757,781,899,935 | Rebonato, R.           | 935,1064,1096  |
| Mezrich, J.     | 725,734,737                                | Reiner, E.             | 868,869,1021   |
| Mikosch, T.     | 680,703                                    | Reis, J.               | 526  |
| Milevsky, M.A.  | 868  | Remolona, E.M.         | 756  |
| Miller, H.D.    | 399  | Renault, O.            | 828  |
| Miller, M.H.    | 24,99                                      | Rendleman, R.J.        | 100,206,<br>345,376,666,1031                               |
| Miltersen, K.R. | 526,1076,1096                              | Rennie, A.             | 964  |
| Minton, B.A.    | 99,256                                     | Resti, A.              | 746  |
| Mintz, D.       | 645  | Reynolds, C.E.         | 890,892  |
| Moon, M.        | 1145                                       | Rich, D.               | 704,1121   |
| Morton, A.      | 1072,1095,1096                             | Richard, S.            | 180  |
| Murrin, J.      | 1145                                       | Richardson, M.         | 445,702  |
| Musiela, M.     | 1076,1085,1095                             | Ritchken, P.           | 868,935,1064,1096  |
| Nagayama, I.    | 1064                                       | Robinson, F.L.         | 139  |
| Natenberg, S.   | 595  | Rodriguez, R.J.        | 781  |
| Neftci, S.      | 400,703                                    | Roll, R.               | 442,446  |
| Nelson, D.      | 718,737                                    | Ronn, A.G.             | 345  |
| Ness, A.        | 85   | Ronn, E.I.             | 345  |
| Neuberger, A.J. | 100  | Ross, S.A.             | 180,186,376,446,614,665,<br>897,934,948,964,1033,1054,1064 |
| Ng, V.          | 718,737                                    | Routledge, B.R.        | 180  |
| Noh, J.         | 737  | Rubinstein, M.         | 476,601,614,665,841,<br>857,868,906,925,935                |
| Oldfield, G.S.  | 180  | Sandmann, K.           | 1076,1096  |
| Ou, S.          | 746  | Sandor, R.L.           | 892  |
| Pan, J.         | 703  | Sankarasubramanian, L. | 868,<br>1064,1096  |
| Parsons, J.E.   | 100  | Santa-Clara, P.        | 1090   |
| Pascutti, M.    | 256  | Scholes, M.            | 318,407,445  |
| Pearson, N.     | 1167                                       |                        |  |
| Perraudin, W.   | 703  |                        |  |
| Persaud, A.D.   | 1167                                       |                        |  |

|                    |   |
|--------------------|---|
| Schönbucher, P.J.  | 832   |
| Schrard, C.        | 99  |
| Schultz, P.        | 601   |
| Schwartz, E.S.     | 526, 927, 935, 1034,<br>1035, 1064, 1089, 1090, 1144, 1145  |
| Scott, L.          | 524   |
| Seppi, D.J.        | 180   |
| Sevigny, A.        | 828   |
| Shapiro, A.        | 702   |
| Shumway, T.        | 376   |
| Sidenius, J.       | 827, 828, 831   |
| Siegel, M.         | 703   |
| Singleton, K.      | 780   |
| Sironi, A.         | 746   |
| Smith, C.W.        | 100, 446  |
| Smith, D.J.        | 62, 256, 1119, 1121   |
| Smith, T.          | 445   |
| Sobol', I.M.       | 651   |
| Sondermann, D.     | 1076, 1096  |
| Sosin, H.          | 848, 868  |
| Spatt, C.S.        | 180   |
| Stegun, I.         | 431   |
| Stigum, M.         | 139   |
| Stoll, H.R.        | 319   |
| Strickland, C.     | 665, 868, 892   |
| Stulz, R.M.        | 100, 869  |
| Stutzer, M.        | 935   |
| Subrahmanyam, M.G. | 256   |
| Sun, T.            | 256   |
| Sundaresan, S.     | 180, 256  |
| Suo, W.            | 596, 905, 908, 935  |
| Taleb, N.N.        | 573   |
| Tavakoli, J.M.     | 832   |
| Taylor, H.M.       | 400   |
| Taylor, S.J.       | 601   |
| Teukolsky, S.A.    | 650, 651,<br>665, 723, 1061   |
| Teweles, R.J.      | 62  |
| Thiagarajan, S.R.  | 100   |
| Thomas, C.P.       | 601   |
| Thomson, R.        | 1167  |
| Tilley, J.A.       | 926, 935  |
| Titman, S.         | 257   |
| Todd, R.           | 62  |
| Tompkins, R.       | 595   |
| Trevor, R.         | 935   |
| Trigeorgis, L.     | 1145  |
| Tufano, P.         | 100   |
| Turnbull, S.M.     | 853, 869  |
| Ulrig-Homberg, M.  | 1095  |
| Varma, P.          | 746   |
| Vasicek, O.A.      | 775, 781, 1032, 1064  |
| Vetterling, W.T.   | 650, 651,<br>665, 723, 1061   |
| Vijh, A.M.         | 868   |
| Viswanathan, R.    | 934   |
| Vorst, A.          | 853   |
| Wakeman, L.M.      | 853, 869  |
| Walter, U.         | 1095  |
| Wang, C.           | 256   |
| Warwick, B.        | 62  |
| Weber, T.          | 1095  |
| Wei, J.            | 891   |
| Weston, J.         | 99  |
| Whaley, R.         | 442   |
| White, A.          | 464, 470, 476, 557, 558, 587,<br>630, 648, 662, 666, 695, 703, 750, 752,<br>780, 803, 827, 829, 831, 904, 905, 913,<br>924, 925, 935, 1038, 1040, 1046, 1054,<br>1056, 1064, 1082, 1085, 1089, 1096 |
| Whitelaw, R.       | 702   |
| Wiggins, J.B.      | 345   |
| Wilmott, P.        | 666, 703  |
| Wong, H.Y.         | 850   |
| Xu, X.             | 601   |
| Yermack, D.        | 473, 476  |

|                  |         |              |         |
|------------------|---------|--------------|---------|
| Zhang, P.G. .... | 25,1167 | Zou, J. .... | 859,868 |
| Zhu, Y. ....     | 694,703 |              |         |

# 事項索引

## A

- ABS ..... 806  
ABS CDO ..... 808  
accrual swap ..... 253  
Adaptive Mesh Model ..... 922,634  
agency cost ..... 460  
ALM ..... 135,208  
Amazon.com の評価 ..... 1131  
American option ..... 9,264  
amortizing swap ..... 252,1100  
as you like it option ..... 842  
Asset Swap ..... 750  
asset-backed security ..... 806  
asset-or-nothing call ..... 847  
asset-or-nothing put ..... 848  
at the money ..... 273  
attachment point ..... 818

## B

- barrier option ..... 843  
base correlation ..... 823  
basis ..... 77  
basis point ..... 129  
basis risk ..... 77  
basis swap ..... 1101  
basket credit default swap ..... 804  
basket option ..... 857  
bear spread ..... 330  
Bermudan option ..... 839  
BGM モデル ..... 1076  
binary option ..... 847  
binomial tree ..... 350  
BIS Accord ..... 676  
Black の近似 ..... 441

## Black モデル

..... 520,957,975,985,993,997

- Black-Karasinski モデル ..... 1039  
Black-Scholes 價格式 ..... 427  
Black-Scholes の公式 ..... 489,492  
Black-Scholes モデル ..... 582  
Black-Scholes-Merton 微分方程式 ..... 419  
Black-Scholes-Merton モデル ..... 407  
bootstrap method ..... 117  
box spread ..... 332  
Brownian motion ..... 384  
bull spread ..... 327  
butterfly spread ..... 334

## C

- calendar spread ..... 337  
callable bond ..... 974  
call option ..... 9,264  
caplet ..... 982  
cash-flow mapping ..... 687  
cash-or-nothing call ..... 847  
cash-or-nothing put ..... 847  
CAT 債 ..... 889  
CBOE ..... 2  
CBOT ..... 2,889  
CDD ..... 811,882  
CDS スプレッド ..... 791,793  
CDX NA IG ..... 800,813  
CEV モデル ..... 897  
Cholesky decomposition ..... 642  
chooser option ..... 842  
clearing margin ..... 44  
clearinghouse ..... 43  
CME ..... 2,883

|   |          |                             |         |
|---|----------|-----------------------------|---------|
| CMO                                       | 1091     | currency swap               | 241     |
| CMS                                       | 1108     | C-VaR                       | 675     |
| CMT                                       | 1110     |                             |         |
| collar                                    | 983      | <b>D</b>                    |         |
| collateralized debt obligation            | 811      | day trade                   | 43      |
| collateralized mortgage obligation        | 1091     | default correlation         | 769     |
| combination                               | 339      | default intensity           | 745     |
| commission broker                         | 52       | deferred swap               | 991     |
| Commodity Futures Trading Com-<br>mission | 54       | delta                       | 363     |
| commodity swap                            | 254      | delta hedging               | 364     |
| compound correlation                      | 823      | delta neutral               | 538,545 |
| compounding swap                          | 253,1102 | DerivaGem ソフトウェア            | 1191    |
| compound option                           | 841      | detachment point            | 818     |
| constant maturity swap                    | 253,1108 | diagonal spread             | 339     |
| constant maturity Treasury swap           | 253,1110 | differential swap           | 1110    |
| consumption asset                         | 146      | diff swap                   | 1110    |
| contango                                  | 178      | discount rate               | 191     |
| continuous compounding                    | 112      | down-and-in call            | 844     |
| control variate technique                 | 630      | down-and-in put             | 846     |
| convenience yield                         | 172      | down-and-out call           | 844     |
| conversion factor                         | 194      | down-and-out put            | 846     |
| convertible bond                          | 288      | drift rate                  | 387     |
| convexity                                 | 133      | duration                    | 127     |
| convexity adjustment                      | 1009     | duration matching           | 208     |
| Cooling Degree Day                        | 882      | dynamic hedging             | 538     |
| copula correlation                        | 771      |                             |         |
| Cornish Fisher 展開                         | 693      | <b>E</b>                    |         |
| cost of carry                             | 173      | Earth Satellite Corporation | 883     |
| covered call                              | 282,325  | equity swap                 | 254     |
| Cox-ingersoll-Ross モデル                    | 1033     | European option             | 9,264   |
| Crank-Nicolson 法                          | 663      | EWMA                        | 715,720 |
| credit contagion                          | 756      | exchange option             | 856     |
| credit default swap                       | 790      | exercise limit              | 277     |
| CreditMetrics                             | 777      | exercise multiple           | 470     |
| cross hedging                             | 81       | exercise price              | 9,264   |

|                                   |         |
|-----------------------------------|---------|
| explicit finite difference method | 882     |
| .....                             | 658     |
| extendable swap                   | 254     |
| F                                 |         |
| FAS 123                           | 57,463  |
| FASB                              | 57      |
| FBI                               | 56      |
| Fitch                             | 743     |
| flat volatility                   | 986     |
| flexi cap                         | 1082    |
| FLEX Option                       | 274     |
| floor                             | 983     |
| floorlet                          | 983     |
| FNMA                              | 1090    |
| forward contract                  | 5       |
| forward risk neutral world        | 951     |
| forward start option              | 840     |
| forward swap                      | 252     |
| FRA                               | 124     |
| futures contract                  | 8       |
| futures option                    | 505     |
| futures-style option              | 523     |
| G                                 |         |
| gamma                             | 549     |
| GAP 管理                            | 209     |
| GARCH モデル                         | 718     |
| Gaussian copula model             | 770     |
| generalized Wiener process        | 387     |
| geometric Brownian motion         | 391     |
| Girsanov's theorem                | 367     |
| GNMA                              | 1090    |
| Greeks                            | 531     |
| H                                 |         |
| haircut                           | 766     |
| hazard rate                       | 745     |
| HDD                               | 882     |
| Heath-Jarrow-Morton モデル           | 1072    |
| Heating Degree Day                | 882     |
| hedge ratio                       | 82      |
| Ho-Lee モデル                        | 1036    |
| Hull-White(1 ファクター) モデル           | 1038    |
| I                                 |         |
| IAS 2                             | 463     |
| IAS 39                            | 58      |
| implied distribution              | 586     |
| implied volatility                | 436     |
| inception profit                  | 1158    |
| index amortizing swap             | 1118    |
| index arbitrage                   | 164     |
| index currency option notes       | 27      |
| indexed principal swap            | 1118    |
| interest rate cap                 | 980     |
| in the money                      | 273     |
| intrinsic value                   | 274     |
| inverted market                   | 50      |
| investment asset                  | 145     |
| investment grade                  | 743     |
| IO                                | 1092    |
| ISDA                              | 226     |
| Itô process                       | 389     |
| Itô's lemma                       | 382     |
| iTraxx Europe                     | 800,813 |
| J                                 |         |
| J.P. Morgan                       | 717     |
| jump-diffusion model              | 897     |
| K                                 |         |
| <i>k</i> th-to-default 型 CDS      | 804     |
| kurtosis                          | 586     |

## L

|                             |           |
|-----------------------------|-----------|
| LEAPS                       | 272       |
| Levenberg–Marquardt 法       | 1061      |
| Levy 過程                     | 897       |
| LIBID                       | 108       |
| LIBOR                       | 108       |
| LIBOR-in arrears swap       | 253, 1107 |
| LIBOR／スワップ・ゼロ・カーブ           |           |
|                             | 233       |
| LIBOR ゼロ・カーブ                | 233       |
| LIBOR ゼロ・レート                | 204       |
| LIBOR マーケット・モデル             | 1076      |
| limit order                 | 52        |
| liquidity preference theory | 134       |
| locals                      | 52        |
| long position               | 5         |
| low-discrepancy sequence    | 649       |

## M

|                            |         |
|----------------------------|---------|
| maintenance margin         | 40      |
| Margin                     | 280     |
| margin call                | 41, 280 |
| market segmentation theory | 134     |
| Markov process             | 382     |
| martingale                 | 942     |
| maturity                   | 9       |
| maturity date              | 264     |
| maximum likelihood method  | 721     |
| MBS                        | 1090    |
| mean reversion             | 1031    |
| measure                    | 942     |
| Merton モデル                 | 757     |
| modified duration          | 130     |
| Moody's                    | 743     |
| mortgage-backed security   | 1090    |

## N

|                      |                |
|----------------------|----------------|
| naked position       | 533            |
| Nasdaq100            | 89, 270        |
| Newton–Raphson 法     | 115, 436, 1054 |
| no-arbitrage model   | 1035           |
| nonsystematic        | 949            |
| normal backwardation | 178            |
| normal market        | 49             |
| notional principal   | 790            |

## O

|                         |      |
|-------------------------|------|
| OCC                     | 283  |
| off-the-run bond        | 1159 |
| on-the-run bond         | 1159 |
| open interest           | 49   |
| option-adjusted spread  | 1093 |
| out of the money        | 273  |
| over-the-counter market | 3    |

## P

|                        |        |
|------------------------|--------|
| package                | 838    |
| par yield              | 116    |
| plain vanilla          | 217    |
| plain vanilla product  | 837    |
| PO                     | 1092   |
| portfolio immunization | 208    |
| position limit         | 276    |
| prepayment function    | 1091   |
| program trading        | 164    |
| protective put         | 325    |
| put option             | 9, 264 |
| puttable bond          | 975    |
| puttable swap          | 254    |
| P-速度                   | 367    |

## Q

|        |      |
|--------|------|
| quanto | 1015 |
|--------|------|

|                            |            |
|----------------------------|------------|
| quanto swap                | 254        |
| Q-速度                       | 367        |
| R                          |            |
| rainbow option             | 857        |
| range forward contract     | 485,838    |
| ratchet cap                | 1082       |
| real option                | 2          |
| rebalancing                | 538        |
| reference entity           | 790        |
| Rendleman-Bartter モデル      | 1030       |
| repo                       | 110        |
| repo rate                  | 110        |
| rho                        | 558        |
| RiskMetrics                | 717        |
| risk-neutral valuation     | 356        |
| Russell1000                | 89         |
| S                          |            |
| S&P                        | 743        |
| S&P100                     | 270,481    |
| S&P500                     | 88,270,481 |
| S&P500株価指数先物               | 45         |
| scalper                    | 52         |
| SEC                        | 55,284,471 |
| settlement price           | 49         |
| short position             | 5          |
| short selling              | 146        |
| shout option               | 851        |
| Siegel のパラドックス             | 1019       |
| spot option                | 505        |
| spot volatility            | 986        |
| spread transaction         | 43         |
| static hedge               | 538        |
| static options replication | 863        |
| step-up swap               | 252,1100   |
| sticky cap                 | 1082       |
| stochastic process         | 381        |
| stock split                | 274        |
| straddle                   | 339        |
| strangle                   | 342        |
| strap                      | 341        |
| strike price               | 9,264      |
| strip                      | 341        |
| swap rate                  | 225        |
| swaption                   | 254,990    |
| swing option               | 886        |
| systematic                 | 949        |
| T                          |            |
| tailing the hedge          | 86         |
| take-and-pay option        | 886        |
| Tax Relief Act of 1997     | 286        |
| term structure model       | 1028       |
| theta                      | 546        |
| time decay                 | 546        |
| time value                 | 274        |
| total return swap          | 804        |
| U                          |            |
| up-and-in call             | 845        |
| up-and-in put              | 845        |
| up-and-out call            | 845        |
| up-and-out put             | 845        |
| uptick                     | 148        |
| V                          |            |
| Value at Risk              | 673        |
| variance-gamma model       | 900        |
| variance rate              | 387        |
| variance swap              | 858        |
| Vasicek モデル                | 1032       |
| vega                       | 555        |
| VIX 指数                     | 437,862    |
| volatility                 | 299        |
| volatility skew            | 590        |

|                           |                       |                    |   |
|---------------------------|-----------------------|--------------------|---|
| volatility swap           | 254,858               | アベレージ・ストライク・コール    | 852   |
| volatility term structure | 730                   | アベレージ・ストライク・プット    | 852   |
| <b>W</b>                  |                       |                    |   |
| Wiener process            | 384                   | アベレージ・プライス・コール     | 852   |
| Wild Card Play            | 196                   | アベレージ・プライス・プット     | 852   |
| <b>Z</b>                  |                       |                    |   |
| Zions Bancorp             | 471                   | アマランス              | 1149  |
| <b>あ</b>                  |                       |                    |   |
| アービトラージャー                 | 13,21,149,150,154,155 | アメリカン・オプション        | 9,264,267,311,313,316,<br>362,440,442,612,926 |
| アウト・オブ・ザ・マネー              | 273,540,547,552       | アメリカン債券オプション       | 1058  |
| アウトサイド・モデル・ヘッジ            | 1062                  | アメリカン先物オプション       | 522   |
| アクルーアル・スワップ               | 253,1114              | アメリカン証券取引所         | 270   |
| アジアン・オプション                | 852,877,912           | アモチ・スワップ           | 252,1100                                      |
| アセット・オア・ナッシング・コール         | 847                   | アライド・アイリッシュ銀行      | 1149  |
| アセット・オア・ナッシング・プット         | 848                   | アライド・ライオンズ         | 1151  |
| アセットスワップ                  | 750                   | アリアー・スワップ          | 1107  |
| アタッチメント・ポイント              | 818                   | <b>い</b>           |   |
| アダプティブ・メッシュ・モデル           | 634,922               | イールド・ボラティリティ       | 979   |
| アット・ザ・マネー                 | 273,462,539,547,552   | 維持証拠金              | 40  |
| アップ・アンド・アウト・コール           | 845                   | 委託手数料              | 279   |
| アップ・アンド・アウト・プット           | 845                   | 一般化されたウィナー過程       | 387   |
| アップ・アンド・イン・コール            | 845                   | 伊藤過程               | 389   |
| アップ・アンド・イン・プット            | 845                   | 伊藤の補題              | 382,395,404,947,950,969                       |
| アップティック                   | 148                   | イン・ザ・マネー           | .....273,328,539,547,552,590                  |
| アドアップ                     | 804                   | インタレスト・オンリー        | 1092  |
| 後払い LIBOR スワップ            | 253                   | 陰的有限差分法            | 652   |
| 後払いオプション                  | 839                   | インデックス・アモチ・スワップ    | .....1118                                     |
|                           |                       | インプライド・コピュラ        | 828   |
|                           |                       | インプライドされた確率分布      | 591   |
|                           |                       | インプライドされた分布        | 586   |
|                           |                       | インプライドされたリスク中立確率分布 | 607   |
|                           |                       | インプライド相関           | 823   |
|                           |                       | インプライド配当利回り        | 494   |

|                     |                              |
|---------------------|------------------------------|
| インプライド・ボラティリティ      | 435,995                      |
| インプライド・ボラティリティ関数モデル | 906                          |
| う                   |                              |
| ウイナー過程              | 384                          |
| ウォーターフォール           | 807                          |
| ウォール・ストリート・ジャーナル    | 47,88,168,192                |
| ウォッシュ・セール規則         | 285                          |
| 受渡し                 | 174                          |
| 受渡意思通知書             | 50                           |
| 受渡価格                | 7                            |
| 売りヘッジ               | 68                           |
| 売りポジション             | 5,12,32                      |
| え                   |                              |
| 営業日基準               | 226                          |
| エキゾチック・オプション        | 289,837                      |
| エクイティ・スワップ          | 254,1112                     |
| エクイティ・トランシェ         | 807                          |
| エクスチェンジ・オプション       | 856,958                      |
| エクスポージャー            | 250,761                      |
| エネルギー・デリバティブ        | 884                          |
| 延期オプション             | 1138                         |
| 円周率の計算              | 636                          |
| 延長オプション             | 1138                         |
| 延長可能スワップ            | 254                          |
| エンロンの破綻             | 767                          |
| お                   |                              |
| 追い証                 | 280                          |
| オーバーナイト・レポ          | 110                          |
| オープン・オーダー           | 54                           |
| オファー                | 3,232                        |
| オプション               | 9                            |
| オプション価格             | 297                          |
| オプション価格の上限と下限       | 302                          |
| オプション・クラス           | 273                          |
| オプション・シリーズ          | 273                          |
| オプション清算機関           | 283                          |
| オプション調整後スプレッド       | 1093                         |
| オプション・フェンス          | 838                          |
| オレンジ郡               | 122,1148,1152,1154,1164,1165 |
| か                   |                              |
| 会計処理                | 56,463                       |
| 外国為替の建値             | 60                           |
| 買占め                 | 55                           |
| 回収率                 | 746,797                      |
| 買いヘッジ               | 70                           |
| 買いポジション             | 5,12,32                      |
| 買戻条件付売却取引           | 110                          |
| 解約権付コンパウンド・スワップ     | 1116                         |
| 解約権付スワップ            | 1115                         |
| ガウシアン・コピュラモデル       | 770,775                      |
| ガウス数値積分公式           | 819                          |
| 拡散モデル               | 897                          |
| 拡大オプション             | 1138,1143                    |
| 格付推移行列              | 778                          |
| 確約権付フォワード契約         | 839                          |
| 確率過程                | 381                          |
| 確率ボラティリティモデル        | 903                          |
| 加重サンプリング            | 648                          |
| カバード・コール            | 282                          |
| カバード・コールの売り         | 325                          |
| カバード・ポジション          | 533                          |
| 株価過程                | 389                          |
| 株価指數オプション           | 270,371,480                  |
| 株券オプション             | 269,296,590                  |
| 株式配当                | 276                          |

|                 |                     |                 |                 |
|-----------------|---------------------|-----------------|-----------------|
| 株式分割            | 274                 | キャリブレーション対象商品   | 1060            |
| 株式ポートフォリオのヘッジ   | 89                  | キャンセラブル・フォワード   | 839             |
| カラー             | 983                 | 休日指定都市          | 227             |
| 空売り             | 146                 | 境界条件            | 423             |
| カレンダー・スプレッド     | 336                 | 共分散             | 732             |
| 為替リスク           | 244                 | 曲率              | 549             |
| 完全ヘッジ           | 67                  | ギルサノフの定理        | 367             |
| ガンマ             | 549,620,664,999     | 銀行規制当局          | 676             |
| ガンマ・ニュートラル      | 551                 | 均衡モデル           | 1030            |
| <b>き</b>        |                     |                 |                 |
| 幾何ブラウン運動        | 391                 | 金融仲介業者          | 222             |
| 期間              | 839                 | 金利              | 106             |
| 期間構造モデル         | 1028                | 金利先物            | 188             |
| 期限前行使           | 267,311,316,459,497 | 金利先物オプション       | 508             |
| 期限前返済閑数         | 1091                | 金利先渡契約          | 124             |
| キダー・ピー・ボディ      | 151,1150,1156,1157  | 金利スワップ          | 1100            |
| 期待仮説            | 133                 | 金利ツリー           | 1043            |
| 期待現物価格          | 174                 | 金利デリバティブ        | 1062            |
| 期待収益率           | 355,412             | 金利パリティ          | 166             |
| 期待ショートフォール      | 675                 | <b>く</b>        |                 |
| 希薄化             | 434,472             | クオント            | 1015            |
| ギブソン・グリーティングス   | 1151,1156,1164,1166 | クオント・スワップ       | 254             |
| 基本契約書           | 226                 | グッチ・グループ        | 275             |
| 逆鞘市場            | 50                  | グッド・ティル・キャンセルド  | ・               |
| キャッシュ・オア・ナッシング・ |                     | オーダー            | 54              |
| コール             | 847                 | グリークス           | 531,596,644,998 |
| キャッシュ・オア・ナッシング・ |                     | グリーンスパン         | 1149            |
| プット             | 847                 | クリーン・プライス       | 976             |
| キャッシュフロー・マッピング  |                     | クレジット指数         | 800             |
|                 | 687,695,709         | クレジット・デフォルト・スワッ | ・               |
| キャップ            | 980                 | プ               | 790,793         |
| キャップ・レート        | 981                 | クレジット・デフォルト・スワッ | ・               |
| キャップレット         | 982                 | プ・オプション         | 803             |
| キャリー・コスト        | 173                 | クレジット・デリバティブ    | 787             |
| キャリブレーション       | 1060,1087           | クロスカレンシー・金利スワップ | ・               |
|                 |                     |                 | 253,1105        |
|                 |                     | クロスカレンシー・デリバティブ | ・               |
|                 |                     |                 | 1015            |

|                 |           |                              |                 |  |  |
|-----------------|-----------|------------------------------|-----------------|--|--|
| クロス・ガンマ         | 693       | コモディティ・スワップ                  | 254,1118        |  |  |
| グロス・ベース         | 44        | コレスキーフ分解                     | 642             |  |  |
| クロスヘッジ          | 81        | コンスタント・マチュリティ・ス<br>ワップ       | 253,1108        |  |  |
| け               |           |                              |                 |  |  |
| 経路依存型デリバティブ     | 912       | コンスタント・マチュリティ・ト<br>レジャー・スワップ | 253,1110        |  |  |
| 現金決済            | 51        | コンストラクティブ・セール                | 286             |  |  |
| 限月              | 37        | コンタンゴ                        | 178             |  |  |
| 検証              | 639       | コンバージェンス・アービトラー<br>ジ         | 46,1160         |  |  |
| 現物オプション         | 505,511   | コンバージョン・ファクター                | 194             |  |  |
| 現物資産型CDO        | 812       | コンパウンド・オプション                 | 841             |  |  |
| 原油先物            | 884       | コンパウンド・スワップ                  | 253,1102        |  |  |
| 原油デリバティブ        | 884       | コンパウンド相関                     | 823             |  |  |
| 権利確定期間          | 458       | コンビニエンス・イールド                 | 172             |  |  |
| 現渡し             | 35,50     | コンピネーション                     | 339             |  |  |
| こ               |           |                              |                 |  |  |
| 交換比率            | 908       | コンペキシティ                      | 133             |  |  |
| 行使              | 283       | コンペキシティ調整                    | 1007,1026,1109  |  |  |
| 行使価格            | 9,264,272 | さ                            |                 |  |  |
| 行使境界パラメータ化法     | 930       | 債券イールド                       | 115             |  |  |
| 行使乗数            | 470       | 債券オプション                      | 974,991,1041    |  |  |
| 行使制限            | 277       | 債券価格                         | 954             |  |  |
| 構造モデル           | 769       | 債券の価格付け                      | 114             |  |  |
| 後退差分近似          | 653       | 最終通知日                        | 51              |  |  |
| コーラブル債          | 974       | 最終取引日                        | 51              |  |  |
| コール・オプション       | 9,264     | 最小2乗法                        | 927             |  |  |
| 国際会計基準審議会       | 58        | 最小分散ヘッジ比率                    | 82              |  |  |
| 国際会計基準理事会       | 463       | 再付与                          | 461             |  |  |
| 国債先物            | 192       | 再保険                          | 888             |  |  |
| 国際スワップ・デリバティブ協会 | 226       | 債務担保証券                       | 811             |  |  |
| 国際石油取引所         | 884       | 最尤法                          | 721             |  |  |
| 国債レート           | 149       | 最割安銘柄                        | 195             |  |  |
| 50デルタ・オプション     | 594       | 先スタート・オプション                  | 840             |  |  |
| 固定ルックバック        | 850       | 先物                           | 36              |  |  |
| コピュラ相関          | 771       | 先物オプション                      | 271,373,505,511 |  |  |
| コミッショナ・ブローカー    | 52        | 先物価格                         | 38,145          |  |  |
|                 |           | 先物契約                         | 8,32            |  |  |

|                  |                      |
|------------------|----------------------|
| 先物スタイルのオプション     | 523                  |
| 先物取引の規制          | 54                   |
| 先物レート            | 201                  |
| 指値注文             | 52                   |
| 指値付ストップ注文        | 53                   |
| サブプライム住宅ローン      |                      |
| サブプライム住宅ローンによる損失 | 1151                 |
| 三項ツリー            | 633,660,1044         |
| 参照体              | 790                  |
| し                |                      |
| シェル              | 1152                 |
| シカゴ・オプション取引所     |                      |
| シカゴ商品取引所         | 2,10,269,481         |
| シカゴ・マーカンタイル取引所   | 2,8                  |
| 時間価値             | 274                  |
| 時間指定当日注文         | 54                   |
| 事業評価             | 1131                 |
| 試行回数             | 643                  |
| 資産担保証券           | 806                  |
| 資産負債管理           | 135,208              |
| 市場分断仮説           | 134                  |
| 市場リスク            | 250                  |
| 指標加重移動平均         | 715                  |
| 指標裁定取引           | 164                  |
| システムティック         | 949                  |
| システムティック・リスク     | 176,755              |
| 実世界              | 357                  |
| 質への逃避            | 1159                 |
| シドニー先物取引所        | 32                   |
| シナリオ分析           | 561,1156             |
| 資本資産価格モデル        | 176,948,1125         |
| 資本投資の評価          | 1125                 |
| シャウト・オプション       | 851                  |
| ジャンプ             | 597                  |
| ジャンプ拡散モデル        | 897,898              |
| 収益率              | 410                  |
| 従業員ストック・オプション    |                      |
| 修正デュレーション        | 130                  |
| 従来のリスク中立世界       | 942,947              |
| 縮小オプション          | 1138                 |
| 主成分分析            | 696                  |
| 瞬間的な短期金利         | 1029                 |
| 順報市場             | 49                   |
| 純粹ジャンプモデル        | 897                  |
| 準乱数              | 649                  |
| 条件付きデフォルト確率      | 745                  |
| 証拠金              | 39,280               |
| 証拠金勘定            | 18,40,147            |
| 消費資産             | 146                  |
| 商品価格             | 1133                 |
| 商品先物             | 169                  |
| 情報の非対称性          | 799                  |
| 正味現在価値法          | 1125                 |
| シーリング・オプション      | 838                  |
| シンガポール国際通貨取引所    | 32                   |
| 新規事業の評価          | 1131                 |
| シングル・トランシェ取引     | 813                  |
| シンセティック CDO      | 812,816              |
| 信用買い             | 280                  |
| 信用格付             | 743                  |
| 信用事由             | 790                  |
| 信用取縮             | 809                  |
| 信用の伝染            | 756                  |
| 信用バリュー・アット・リスク   | 775                  |
| 信用リスク            | 4,44,107,249,742,759 |
| 信用リスクの軽減         | 764                  |
| す                |                      |
| スイング・オプション       | 886                  |
| 数値計算法            | 611                  |
| スカルパー            | 52                   |

|                    |                          |
|--------------------|--------------------------|
| スタティック・ヘッジ         | 538                      |
| スティッキー・キャップ        | 1082                     |
| ステップ・アップ・スワップ      |                          |
|                    | 252,1100                 |
| ストップ・アンド・リミット・オーダー | 53                       |
| ストップ高              | 37                       |
| ストップ注文             | 53                       |
| ストップ安              | 37                       |
| ストップ・ロス戦略          | 534                      |
| ストップ・ロス注文          | 53                       |
| ストラップ              | 341                      |
| ストラドル              | 339                      |
| ストラングル             | 342                      |
| ストリップ              | 341                      |
| ストリップ MBS          | 1092                     |
| ストリップス債            | 116,151                  |
| ストレス・テスト           | 695,1156                 |
| スプレッド取引            | 43,327                   |
| スペキュレーター           | 17,1164                  |
| スポット価格             | 8                        |
| スポット契約             | 5                        |
| スポットトレーダー          | 5                        |
| スポット・ボラティリティ       | 986                      |
| 住友商事               | 1152                     |
| スワップ               | 216                      |
| スワップション            | 254,990,1084             |
| スワップ・ゼロ・カープ        | 233                      |
| スワップ・レート           | 225,232,992,1011         |
| せ                  |                          |
| 正規分布               | 383,408                  |
| 正規分布の累積分布関数        | 431                      |
| 制御地域               | 885                      |
| 制御変量法              | 630,647                  |
| 税金                 | 58,284                   |
| 清算機関               | 43                       |
| 清算値                | 49                       |
| 成長係数               | 614                      |
| 静的な複製              | 863                      |
| 政府系機関モーゲージ証券       | 1090                     |
| 政府抵当金庫             | 1090                     |
| セータ                | 546,621,664              |
| ゼロ・カープ             | 118                      |
| ゼロクーポン・レート         | 114                      |
| ゼロ・コスト・カラー         | 838                      |
| ゼロ・レート             | 114                      |
| 1987年10月19日        |                          |
|                    | 164,569,572,592,695,1161 |
| 線形モデル              | 684                      |
| 前進差分近似             | 653                      |
| 尖度                 | 586                      |
| 全米先物協会             | 55                       |
| そ                  |                          |
| 相関                 | 732                      |
| 相関スマイル             | 824                      |
| 早期行使               | 459                      |
| 想定元本               | 219,790                  |
| 層別サンプリング           | 648                      |
| 測度                 | 942                      |
| 測度変換               | 367                      |
| ソシエテ・ジェネラル         | 1151,1157                |
| た                  |                          |
| ダーティ・プライス          | 976                      |
| ターム・レポ             | 110                      |
| ダイアゴナル・スプレッド       | 339                      |
| 第一通知日              | 51                       |
| 対数正規性              | 397,408                  |
| 対数正規分布             | 398,409                  |
| ダイナミック・ヘッジ         | 538,560                  |
| 大暴落恐怖症             | 592                      |
| タイミング調整            | 1012,1109,1115           |
| タイム・ディケイ           | 546                      |
| 代理人コスト             | 460                      |

|                        |                     |                                     |
|------------------------|---------------------|-------------------------------------|
| 大和銀行                   | 1150                | 886                                 |
| ダウ平均                   | 88,270,481          | 5,191,193,976,1058                  |
| ダウン・アンド・アウト・コール        | 844                 | ディスカウント・ブローカー 279                   |
|                        |                     | ディスクレショナリー・オーダー 54                  |
| ダウン・アンド・アウト・プット        | 846                 | デイ・トレーダー 52                         |
|                        |                     | ディファード・スワップ 991                     |
| ダウン・アンド・イン・コール         | 844                 | ディファレンシャル・スワップ 254,1110             |
| ダウン・アンド・イン・プット         | 846                 | ディフ・スワップ 1110                       |
| ダウングレード・トリガー           | 767                 | ティラー展開 580                          |
| 建玉                     | 49,278              | テールロス 675                           |
| 建玉制限                   | 38,276              | 手仕舞い 33                             |
| 建値                     | 37                  | 手仕舞注文 278                           |
| ダブル $t$ コピュラ           | 827                 | デタッチメント・ポイント 818                    |
| 短期金利                   | 1028                | 撤退オプション 1137,1143                   |
| 単体オプション                | 281                 | テナー 981                             |
| 暖房度日                   | 882                 | デフォルト確率 747,748,750,751,752,754,757 |
| 担保契約                   | 766                 | デフォルト強度 744,745                     |
| ち                      |                     |                                     |
| 着地取引                   | 2                   | デフォルト相関 769,815                     |
| チューザー・オプション            | 842                 | デフォルト・リスク 761                       |
| 注文の種類                  | 52                  | デュレーション 127,131                     |
| 超過損害額再保険契約             | 889                 | デュレーションに基づくヘッジ戦略 205                |
| 超過損害レベル                | 889                 | デュレーション・ベース・ヘッジ・レシオ 206             |
| つ                      |                     |                                     |
| 追加証拠金                  | 41                  | デュレーション・マッチング 208                   |
| 通貨オプション                | 270,372,484,495,585 | デリバティブ 1                            |
| 通貨オプションの価格式            | 495                 | デルタ 363,537,563,620,664,998         |
| 通貨先物                   | 168                 | デルタ, セータ, ガンマの間の關係 554              |
| 通貨スワップ                 | 241,1105            | デルタ・ニュートラル 538,545,549              |
| 2 ファクター Hull-White モデル | 1040                | デルタ・ヘッジ 364,537,863                 |
| て                      |                     |                                     |
| デイカウント・コンベンション         | 189,225,990,996     | 転換社債 288,908                        |
| テイク・アンド・ペイ・オプション       |                     | 天候デリバティブ 2,882                      |
|                        |                     | 天候リスク・マネジメント協会 883                  |
|                        |                     | 電子取引 3                              |
|                        |                     | 電子取引市場 277                          |

|            |       |
|------------|-------|
| 店頭オプション市場  | 288   |
| 店頭市場       | 3     |
| 天然ガス       | 885   |
| 天然ガスデリバティブ | 884   |
| 電力デリバティブ   | 2,884 |

## と

|                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| ドイツ銀行               | 1159               |
| 導管体                 | 806                |
| 投機                  | 17,19              |
| 東京金融先物取引所           | 32                 |
| 投資機会のオプション          | 1137               |
| 投資資産                | 145                |
| 当日注文                | 54                 |
| 投資適格                | 743                |
| 当初収益                | 1158               |
| 当初証拠金               | 40,281,282         |
| 同値マルチングール測度         | 942,949            |
| トータル・リターン・スワップ      | 804                |
| 特別目的会社              | 806                |
| トップ・ストラドル           | 340                |
| トップ・パーティカル・コンビネーション | 343                |
| トランシェ               | 806                |
| 取引価格                | 191,976,1058       |
| 取引確認書               | 227,1101,1103,1113 |
| 取引可能なデリバティブ         | 424                |
| 取引コスト               | 545                |
| 取引証拠金               | 44                 |
| 取引所市場               | 2                  |
| 取引単位                | 36                 |
| ドリフト率               | 387                |
| ドル・デュレーション          | 131                |
| トレジャリー・ゼロ・レート       | 116                |
| トレジャリー・レート          | 107                |

## な

|      |      |
|------|------|
| 内部統制 | 1166 |
|------|------|

|                   |           |
|-------------------|-----------|
| ナショナル・ウェストミンスター銀行 | 1150,1157 |
| NASDAQ            | 89        |
| 成行注文              | 52        |

## に

|                    |                         |
|--------------------|-------------------------|
| 二項ツリー              | 350,515,612,622,632,635 |
| 二項分布に基づく相関         | 773                     |
| 二項モデル              | 351,612,625             |
| 2次再サンプリング          | 649                     |
| 2次のモデル             | 690                     |
| 日経225先物            | 162                     |
| 日経平均               | 1015                    |
| ニュートラル・カレンダー・スプレッド | 337                     |
| ニューメレール            | 951                     |
| ニューメレール比           | 961                     |
| ニューメレール変換          | 960                     |
| ニューヨーク証券取引所        | 21,88                   |
| ニューヨーク商品取引所        | 35                      |
| ニューヨーク・マーカンタイル取引所  | 884                     |

## ね

|             |         |
|-------------|---------|
| 値洗い         | 39      |
| ネイキッド・ポジション | 533     |
| ネットティング     | 764     |
| ネット・ベース     | 44      |
| 年換算日数       | 990,996 |
| 年金係数        | 955     |

## の

|              |     |
|--------------|-----|
| ノックアウト・オプション | 843 |
| ノックイン・オプション  | 843 |

## は

|         |     |
|---------|-----|
| パー・イールド | 116 |
| バーゼルII  | 776 |

|                        |   |
|------------------------|---|
| 配当                     | 274,301,316,438,625                     |
| 配当落ち日                  | 316,438                                 |
| 配当利回り                  | 370,487                                 |
| バイナリー・オプション            | 847                                     |
| バイナリー型クレジット・デフォルト・スワップ | 797                                     |
| バケット                   | 209                                     |
| ハザード率                  | 745                                     |
| 始値                     | 47                                      |
| バスケット・オプション            | 857,877                                 |
| バスケット型クレジット・デフォルト・スワップ | 803                                     |
| バスケット型 CDS             | 804                                     |
| バタフライ・スプレッド            | 334,343,608                             |
| バック・オフィス               | 1157                                    |
| バックデーターティング            | 472                                     |
| バック・テスト                | 695                                     |
| バックワーデーション             | 178                                     |
| パッケージ                  | 838                                     |
| ハマースミス区とフラム区           | 251,1151,1164                           |
| バミューダン・オプション           | 839                                     |
| バミューダン・スワップション         | 1089                                    |
| パラレル・シフト               | 686,697                                 |
| バリア・オプション              | 843,918                                 |
| バリアンス-ガンマモデル           | 900                                     |
| バリアンス・スワップ             | 858                                     |
| ハリケーン・アンドリュー           | 889                                     |
| バリュー・アット・リスク           | 673                                     |
| バンカーズ・トラスト             | 1119,1158                               |
| 半正定値                   | 735                                     |
| ハント兄弟                  | 56                                      |
| ひ                      |   |
| 比較優位論                  | 228,242                                 |
| 非システムティック              | 949                                     |
| 非システムティック・リスク          | 176                                     |
| ヒストリカル・シミュレーション        |   |
| 法                      | 677                                     |
| ヒストリカルなデフォルト確率         | 743                                     |
| ヒストリカル・ボラティリティ         | 415                                     |
| ビッド                    | 3,232                                   |
| ビッド-オファー・スプレッド         | 224,278,290                             |
| 日計り商い                  | 43                                      |
| ふ                      |   |
| ファースト・トゥ・デフォルト型 CDS    | 804                                     |
| ファクター                  | 696                                     |
| ファクター・スコア              | 698                                     |
| ファクターに基づく相関構造          | 772                                     |
| ファクター・ローディング           | 698                                     |
| フィラデルフィア証券取引所          |   |
| ファイル・オア・キル・オーダー        | 54                                      |
| ブートストラップ法              | 117                                     |
| フォワード価格                | 8,145                                   |
| フォワード・クレジット・デフォルト・スワップ | 802                                     |
| フォワード契約                | 5,157,396,426                           |
| フォワード・スワップ             | 252,991                                 |
| フォワード・バンド              | 838                                     |
| フォワード・リスク中立世界          |   |
| フォワード・リート              | 951,957,959,988,995,1008,1012,1015,1077 |
| フォワード・レート              | 120,201,237,1006                        |
| フォワード・レート・ボラティリティ      |   |
| 複数資産に関するオプション          | 857                                     |
| 複製                     | 565                                     |
| 複利の回数                  | 111                                     |
| 不公正取引                  | 55                                      |
| 負相関変量法                 | 646                                     |
| プッタブル債                 | 975                                     |

|                 |   |
|-----------------|---|
| ブッタブル・スワップ      | 254   |
| プット・オプション       | 9,264                                       |
| プット・コール・パリティ    |   |
| .....           | 307,317,325,489,494,<br>512,533,583,842,984 |
| 部分シミュレーション法     | 694   |
| プライス・センシティビティ・ヘ |   |
| ツジ・レシオ          | 206   |
| プラウン運動          | 384   |
| ブラックマンデー        | 164   |
| フラット・ボラティリティ    | 986   |
| プリンシバル・オンリー     | 1092  |
| ブル・カレンダー・スプレッド  | 337   |
| フルサービス・ブローカー    | 279   |
| ブル・スプレッド        | 327   |
| ブレイク・フォワード      | 839   |
| ブレーン・バニラ        | 217   |
| ブレーン・バニラ商品      | 837   |
| フレキシブル・キャップ     | 1082  |
| フレキシブル・フォワード    | 838   |
| フレックス・オプション     | 274,481                                     |
| フロア             | 983   |
| フロアレット          | 983   |
| プロクター・アンド・ギャンブル |   |
| .....           | 1119,1152,1156,1164,1165                    |
| プログラム売買         | 164   |
| プロテクティブ・プット     | 325   |
| フロント・オフィス       | 1157  |
| 分散共分散行列         | 735   |
| 分散減少法           | 646   |
| 分散効果            | 684   |
| 分散投資の恩恵         | 1155  |
| 分散率             | 387,713                                     |
| ペアリング銀行         |   |
| .....           | 22,1148,1149,1153,1157                      |
| 平均回帰            | 720,1031,1135                               |
| 米国エネルギー省        | 882   |
| 米国財務会計基準審議会     | 57  |
| 米国短期国債          | 191   |
| 米国中期国債          | 36  |
| 米国中期国債先物        | 193   |
| 米国長期国債先物        | 193   |
| 米国長期国債先物オプション   | 508   |
| 米財務省            | 55  |
| 米証券取引委員会        | 55  |
| 米商品先物取引委員会      | 54  |
| 米ドル指數           | 89  |
| 米連邦準備制度理事会      | 55  |
| ベース             | 77  |
| ベース・スワップ        | 1101  |
| ベース・ポイント        | 129   |
| ベース・リスク         | 77,78                                       |
| ベース相関           | 823   |
| ベータ             | 90,93                                       |
| ベガ              | 554,621,664,999                             |
| ベガ・ニュートラル       | 555   |
| ヘッジ             | 15,998,1062                                 |
| ヘッジ・アンド・フォゲット   | 67,538                                      |
| ヘッジ会計           | 57  |
| ヘッジのテーリング       | 86  |
| ヘッジ・パフォーマンス     | 536,543                                     |
| ヘッジ比率           | 82  |
| ヘッジファンド         | 13  |
| ヘッジャード          | 15,67,1164                                  |
| 変動ルックパック        | 848   |

## ^

|                |     |
|----------------|-----|
| ヘアカット          | 766 |
| ペア・カレンダー・スプレッド | 337 |
| ペア・スプレッド       | 330 |

## ほ

|                   |     |
|-------------------|-----|
| ポアソン過程            | 899 |
| ボード・オーダー          | 53  |
| ポートフォリオ・イミュニゼーション |     |

|                 |                             |
|-----------------|-----------------------------|
| ヨン              | 208                         |
| ポートフォリオ・インシュアラン |                             |
| ス               | 481,565,1161                |
| 保管コスト           | 169                         |
| 保険デリバティプ        | 2,888                       |
| ポジション・トレーダー     | 52                          |
| ボストン・オプション      | 839                         |
| ボストン・オプション取引所   | 270                         |
| ボックス・スプレッド      | 332,333                     |
| ホップスコッチ法        | 662                         |
| ボトム・ストラドル       | 340                         |
| ボトム・パーティカル・コンビネ |                             |
| ーション            | 342                         |
| 保有期間            | 677                         |
| ボラティリティ         |                             |
|                 | 299,365,414,568,596,681,728 |
| ボラティリティ曲面       | 594                         |
| ボラティリティ・スキュー    | 590,1088                    |
| ボラティリティ・スマイル    |                             |
|                 | 582,585,589,590             |
| ボラティリティ・スワップ    | 254,858                     |
| ボラティリティの期間構造    |                             |
|                 | 594,729,1042                |
| ボラティリティの原因      | 418                         |
| ボラティリティの推定      | 415,713                     |
| ボルサ商品先物取引所      | 32                          |
| 本源的価値           | 274                         |
| ま               |                             |
| マーク・トゥ・モデル      | 1158                        |
| マーケット・イフ・タッチド・オ |                             |
| ーダー             | 53                          |
| マーケット・ノット・ヘルド・オ |                             |
| ーダー             | 54                          |
| マーケット・メーカー      | 224,277                     |
| マネー・マーケット・アカウント |                             |
|                 | 951                         |
| マルコフ過程          | 382                         |
| マルチングール         | 942,949                     |
| 満期日             | 9,264,271                   |
| み               |                             |
| ミッドカーブ・ユーロ・ドル金利 |                             |
| 先物              | 508                         |
| ミッドランド銀行        | 1150                        |
| ミドル・オフィス        | 1157                        |
| ミニ S&P500       | 89                          |
| ミニ Nasdaq100    | 89                          |
| ミニ-マックス         | 838                         |
| ミューチュアルファンド     | 413                         |
| む               |                             |
| 無裁定モデル          | 1035                        |
| 無条件のデフォルト確率     | 744                         |
| 無リスク金利          | 90,107,108,149,233,749      |
| め               |                             |
| メザニン・トランシェ      | 807,813                     |
| メタルゲゼルシャフト      | 97,1152                     |
| も               |                             |
| モーゲージ証券         | 1090                        |
| モーメント・マッチング     | 649                         |
| モデル・ビルディング法     | 680                         |
| モンテカルロ・シミュレーション |                             |
|                 | 392,536,611,636,693,        |
|                 | 912,926,1075,1093           |
| ね               |                             |
| 有限差分法           | 651                         |
| 誘導モデル           | 769                         |
| ユーレックス          | 32                          |
| ユーロ・ドル金利        | 199                         |
| ユーロ・ドル金利先物      | 199,233                     |
| ユーロ・ドル金利先物オプション |                             |
|                 | 508                         |

## よ

- よい方向のリスク ..... 763  
 陽的有限差分法 ..... 655,658  
 ヨーロピアン・オプション ..... 9,264,438  
 ヨーロピアン・コール・オプション ..... 427  
 ヨーロピアン・スワップション ..... 1084  
 ヨーロピアン・ブット・オプション ..... 427  
 予想残存期間 ..... 466

## ら

- ラチャット・キャップ ..... 1082  
 乱数 ..... 642  
 ランダムウォーク ..... 350  
 ランダムな因子負荷 ..... 828

## り

- リアル・オプション ..... 2,1124  
 利鞘 ..... 134  
 離散時間確率過程 ..... 381  
 リスク中立化法 ..... 355,425,490,613,754,881,1127  
 リスク中立世界 ..... 357  
 リスクとリターン ..... 175  
 リスクの市場価格 ..... 942,944,1129  
 リスク・リミット ..... 1153  
 リトラクタブル債 ..... 975  
 リバース・カレンダー・スプレッド ..... 338  
 リバランス ..... 421,538  
 流動性選好説 ..... 134  
 流動性リスク ..... 1159

## る

- ルックバック・オプション ..... 848,912

## れ

- 冷房度日 ..... 882  
 レインボーオプション ..... 857  
 レポ ..... 110  
 レポ・レート ..... 110  
 レンジ・フォワード契約 ..... 485,838  
 連続時間確率過程 ..... 381,383  
 連続複利 ..... 112  
 連邦抵当金庫 ..... 1090

## ろ

- ロイズ保険組合 ..... 889  
 ロー ..... 558,621  
 ローカルズ ..... 52  
 ローリング・フォワード・リスク  
     中立世界 ..... 1077  
 ロールオーバー ..... 96  
 ローン・コミットメント ..... 975  
 ロックアウト ..... 839  
 ロックアウト期間 ..... 974  
 ロングターム・キャピタル・マネジメント ..... 46,1150,1160  
 ロンドン証券取引所 ..... 21

## わ

- ワイルド・カード・プレイ ..... 196  
 ワラント ..... 287,432  
 割引国債 ..... 117  
 割引債価格 ..... 952  
 割引率 ..... 191  
 悪い方向のリスク ..... 764

### 〈著者紹介〉

#### ジョン・ハル (John. C. Hull)

トロント大学経営学教授。同僚のアラン・ホワイト (Alan White) 教授とともに、金利の期間構造、ならびに金利派生証券に関する研究で数多くの業績があり、なかでも自ら開発した Hull-White モデルは有名。また、大学で教鞭をとるかたわら、A-J Financial Systems Inc. を主宰、理論を実務で実践するという観点から、コンピュータ・ソフトウェアの開発、セミナーでの講演にも注力し、実務界からも高い評価を得ている。

### フィナンシャルエンジニアリング〈第7版〉 ——デリバティブ取引とリスク管理の総体系

---

平成21年12月22日 第1刷発行

著 者 ジョン・ハル

訳 者 三菱UFJ証券市場商品本部

発行者 倉田 熟

印 刷 三松堂印刷株式会社

---

〒160-8520 東京都新宿区南元町19

発 行 所 社団法人 金融財政事情研究会

編集部 TEL 03(3355)2251 FAX 03(3357)7416

販 売 株式会社 きんざい

販売受付 TEL 03(3358)2891 FAX 03(3358)0037

URL <http://www.kinzai.jp/>

---

・本書の内容の一部あるいは全部を無断で、複写・複製・転載および磁気または光記録媒体、コンピュータネットワーク上等へ入力することは、法律で認められた場合を除き、著作者および出版社の権利の侵害となります。

・落丁・乱丁はおとりかえします。価格はカバーに表示しております。

ISBN978-4-322-11333-4