章末問題の解答例

（リーマンショック後の金融工学）

Version 1.0（2021 年 9 月 9 日）

藤原 哉[†]

[†] 農林中央金庫，前金融庁検査官

Disclaimer：本書の内容は筆者個人の意見であり所属する組織の見解ではない

目次

第 1 章

本書の目的

1.

各自でデータを入手すること

2.

定義から

$$
\begin{aligned}
D_t^*(T_0) &= D_(T_0) - \left(S_t^L(T_0,T_0) - S_t^D(T_0,T_0)\right)A(t,T_0) = D_t(T_0) \\
D_t^*(T_N) &= D_t(T_N) - S_t^L(T_0,T_N)A(t,T_N) + S_t^D(T_0,T_N)A(t,T_N)
\end{aligned}
$$

である。これより

$$
D_t^*(T_0) - D_t^*(T_N) = D_t(T_0) - D_t(T_N) - S_t^D(T_0,T_N)A(t,T_N) + S_t^L(T_0,T_N)A(t,T_N)
$$

となる。$D_t(T_0) - D_t(T_N) = S_t^D(T_0,T_N)A(t,T_N)$ なので代入すると

$$
D_t^*(T_0) - D_t^*(T_N) = S_t^L(T_0,T_N)A(t,T_N)
$$

が得られる。

3.

OIS では満期により利払いのルールが異なる。

1. 満期が 1 年以内：満期日だけ
2. 満期が 1 年超 2 年以内：満期日の 1 年前と満期日
3. 満期が 2 年超：満期まで 1 年ごと

これより、割引率と OIS の関係は現時点を T_0、満期を T_{mat}、OIS レートを $C^{OIS}_{T_{mat}}$ とすると

$T_{mat} \leq 1$ の場合

$$DF(T_0, T_{mat}) = \frac{1}{1 + (T_{mat} - T_0) \times C^{OIS}_{T_{mat}}}$$

$T_{mat} \in (1, 2]$ の場合

$$DF(T_0, T_{mat}) = \frac{1 - C^{OIS}_{T_{mat}} \times (T_1 - T_0) \times DF(T_0, T_1)}{1 + C^{OIS}_{T_{mat}}}$$
$$T_1 = T_{mat} - 1$$

$T_{mat} > 2$ の場合

$$DF(T_0, T_{mat}) = \frac{1 - C^{OIS}_{T_{mat}} \times (DF(T_0, T_1) + \cdots + DF(T_0, T_{N-1}))}{1 + C^{OIS}_{T_{mat}}}$$

4.

満期 T_n のスワップレートを $S^L_t(T_n)$ とすると FRA との関係は

$$S^L_t(T_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \delta_i D_t(T_i) FRA_t(T_{i-1}, T_i)}{\sum_{i=1}^{n} \delta_i D_t(T_i)}$$

である。これより

$$FRA_t(T_{n-1}, T_n) = \frac{S^L_t(T_n) \sum_{i=1}^{n} \delta_i D_t(T_i) - \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i D_t(T_i) FRA_t(T_{i-1}, T_i)}{\delta_n D_t(T_n)}$$

となる。円市場の場合は 6 ヶ月ベースであるので

$$S^L_{T_0}(T_1 = 0.5) = Libor6M = FRA_t(T_0, T_1)$$

となる。次に $FRA_t(T_0, T_1)$ が既知なので

$$FRA_t(T_1, T_2) = \frac{S^L_t(T_2) \sum_{i=1}^{2} \delta_i D_t(T_i) - \delta_1 D_t(T_1) FRA_t(T_0, T_1)}{\delta_2 D_t(T_2)}$$

と $FRA_t(T_1, T_2)$ を求める。同様にして $FRA_t(T_2, T_3), ..., FRA_t(T_{n-1}, T_n)$ を計算することができる。

第 2 章

価格付け理論の概要

1.

コールオプションのペイオフは

$$(X-1.5)_+ = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.5 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.5 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので、価格は、

$$\pi\left((X-1.5)_+\right) = 1.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.3 + 0 \times 0.2 = 0.75$$

となる。

プットオプションのペイオフは

$$\left(2-X^2\right)_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.75 \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.75 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので、価格は、

$$\pi\left((2-X^2)_+\right) = 0 \times 0.4 + 0 \times 0.3 + 1.75 \times 0.2 = 0.35$$

となる。

エクスチェンジオプションのペイオフは

$$(X-V)_+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であるので、価格は、

$$\pi\left((X-V)_+\right) = 2 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 0 \times 0.2 = 1.1$$

となる。

2.

$$\pi(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(Se^{\mu\omega}-K\right)_{+}e^{-\alpha\omega}\mathrm{d}\omega$$

$\omega^*=-\frac{1}{\mu}\log\frac{S}{K}$ とすると、

$$\pi(X)=S\int_{\omega^*}^{\infty}e^{\mu\omega}e^{-\alpha\omega^2}\mathrm{d}\omega-K\int_{\omega^*}^{\infty}e^{-\alpha\omega^2}\mathrm{d}\omega$$

となる。右辺第 1 項は、

$$S\int_{\omega^*}^{\infty}e^{\mu\omega}e^{-\alpha\omega^2}\mathrm{d}\omega=Se^{-\frac{\mu^2}{4\alpha}}\int_{\omega^*}^{\infty}e^{-\alpha(\omega)^2}\mathrm{d}\omega=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}Se^{-\frac{\mu^2}{4\alpha}}\int_{\sqrt{2\alpha}\left(\omega^*-\frac{\mu}{2\alpha}\right)}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x$$

となる。ただし、$x=\sqrt{2\alpha}\left(\omega-\frac{\mu}{2\alpha}\right)$ と変数変換している。標準正規分布の分布関数を $N(\cdot)$ とすると、

$$S\int_{\omega^*}^{\infty}e^{-\alpha\omega^2+\mu\omega}\mathrm{d}\omega=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}Se^{-\frac{\mu^2}{4\alpha}}N\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\mu}\log\frac{S}{K}+\frac{\mu}{\sqrt{2\alpha}}\right)$$

である。右辺第 2 項も同様に計算できて

$$K\int_{\omega^*}^{\infty}e^{-\alpha\omega^2}\mathrm{d}\omega=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}K\int_{\sqrt{2\alpha}\omega^*}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}KN\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\mu}\log\frac{S}{K}\right)$$

となる。以上をまとめると、

$$\pi(X)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[Se^{-\frac{\mu^2}{4\alpha}}N\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\mu}\log\frac{S}{K}+\frac{\mu}{\sqrt{2\alpha}}\right)-KN\left(\frac{\sqrt{2\alpha}}{\mu}\log\frac{S}{K}\right)\right]$$

となる。

3.

(2.2.13) の導出

$$\begin{aligned}X_0=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_1^*\right]=\sum_j q_{0,i,j}\sum_k q_{1,j,k}X_2^*(\omega_k)&=\sum_k\sum_j q_{0,i,j}q_{1,j,k}X_2^*(\omega_k)\\&=\sum_k q_2^k X_2^*(\omega_k)=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_2^*\right]\end{aligned}$$

(2.2.15) の導出、時点 1 の状態を ω_j とすると、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1^{\mathbb{P}}\left[\eta_2 X_2\right] &= \sum_k p_{1,j,k}\eta_2(\omega_k)X_2(\omega_k) = \sum_k p_{1,j,k}\frac{\eta_1(\omega_j)q_{1,j,k}}{p_{1,j,k}R_1(\omega_j)}X_2(\omega_k) \\ &= \eta_1(\omega_j)R_0\sum_k q_{1,j,k}\frac{X_2(\omega_k)}{R_0R_1(\omega_j)} = \eta_1 R_0\mathbb{E}_1^{\mathbb{Q}}\left[X_2^*\right] = \eta_1 R_0 X_1^* = \eta_1 X_1\end{aligned}$$

4.

3 元連立方程式は一意の正の解 $(\pi_H = 0.2, \pi_M = 0.4, \pi_L = 0.4)$ を持つので完備である。チューザーオプションのペイオフは $\max(S_1, S_2) = \begin{pmatrix}120\\100\\95\end{pmatrix}$ となる。これより価格は、

$$\begin{aligned}\pi(\max(S_1, S_2)) &= 120\times\pi_H + 100\times\pi_M + 95\times\pi_L \\ &= 120\times 0.2 + 100\times 0.4 + 95\times 0.4 = 102\end{aligned}$$

となる。

5.

k 回上昇、$T-k$ 回下降しているので、$S_T = Su^kd^{T-k}$ となる確率は、

$$\mathbb{Q}\left(Su^kd^{T-k}\right) = \begin{pmatrix}T\\K\end{pmatrix}q^k(1-q)^{T-K}$$

となる。ただし、$\begin{pmatrix}T\\K\end{pmatrix} = \frac{T!}{K!(T-k)!}$ である。

6.

ある時点の価格を P, その次の時点での上昇価格を P_u, 下降価格を P_d、粗利を $R = \frac{1}{2}\left(\frac{P_u}{P} + \frac{P_d}{P}\right)$, リスク中立確率での上昇確率を q とすると

$$P = \frac{1}{R}\left(P_u\times q + P_d\times(1-q)\right) = \frac{2P}{P_u + P_d}\left(P_u\times q + P_d\times(1-q)\right)$$

となる。これを q について解くと $q = \frac{1}{2}$ となる。行使価格が 100 円のプットオプションなので、各ノードでの原資産価格を $P_t(\omega)$ とするとオプションの本源的価値は $(100 - P_t(\omega))_+$ となる。各ノードでのオプションの継続価値を $\hat{V}_t(\omega)$ とすると各ノード

でのオプション価値は $V_t(\omega) = \max(\hat{V}_t(\omega), (100 - P_t(\omega)_+)$ となる。原資産価格を表 2.1、粗利を表 2.2、時点 3 の AD 証券の価値を表 2.3、オプションの本源的価値を表 2.4、アメリカンオプションの価値を表 2.5 で示す。

表 2.1　原資産価格

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
-	-	-	115
-	-	110	106
-	105	102	99
100	97	95	90

表 2.2　粗利

t = 0	t = 1	t = 2
-	-	1.004545
-	1.009524	1.004902
1.01	1.015464	0.994737

表 2.3　AD 証券価値（時点 3）

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
-	-	-	1	-	-	-	0
-	-	0.497738	0	-	-	0.497738	1
-	0.246521	0	0	-	0.492954	0.497561	0
0.12204	0	0	0	0.36532	0.244992	0	0
t = 0	t = 1	t = 2	t = 3	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
-	-	-	0	-	-	-	0
-	-	0	0	-	-	0	0
-	0.246434	0.497561	1	-	0	0	0
0.365802	0.492487	0.502646	0	0.122523	0.247496	0.502646	1

表 2.4　オプション本源的価値

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
-	-	-	0
-	-	0	0
-	0	0	1
0	3	5	10

表 2.5　アメリカンオプション価値

t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
-	-	-	0
-	-	0	0
-	0.246434	0.497561	1
1.607145	3	5.529101	10

7.

表 2.6 に 6. と同じ条件で計算した権利行使価格別のヨーロピアン／アメリカン プットオプションの価値を示す。

表 2.6　プットオプション価値

行使価格	95	96	97	98	99	100
ヨーロピアン	0.612613	0.735135	0.857658	0.98018	1.102703	1.591028
アメリカン	0.612613	0.735135	0.857658	0.98018	1.102703	1.591028
行使価格	101	102	103	104	105	-
ヨーロピアン	2.079353	2.567678	3.056003	3.544328	4.032653	-
アメリカン	2.224192	2.841238	3.458284	4.07533	4.695965	-

8.

略

9.

略

10.

平均と分散から二項ツリーでの上昇率 u、下降率 d を求める。
平均の計算

$$S_n(k) = S_0 u^k d^{n-k}$$
$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{S_n}{S_0}\right] = \sum_{k=0}^{n} p(k)\frac{S_n(k)}{S_0} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}0.5^k(1-0.5)^{n-k}u^k d^{n-k} = \left(\frac{u+d}{2}\right)^n$$

分散は $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{S_n}{S_0}\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{S_n}{S_0}\right]\right)^2$ と計算できるので

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{S_n}{S_0}\right)^2\right] = \sum_{k=0}^{n} p(k)\left(\frac{S_n(k)}{S_0}\right)^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}0.5^k(1-0.5)^{n-k}u^{2k}d^{2(n-k)} = \left(\frac{u^2+d^2}{2}\right)^2$$

であるので

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\left(\frac{S_n}{S_0}\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{S_n}{S_0}\right]\right)^2 = \left(\frac{u^2+d^2}{2}\right)^2 - \left(\frac{u+d}{2}\right)^{2n}$$

となる。平均リターンは 2%, ボラティリティ（リターンの標準偏差）は 20% であるので

$$\left(\frac{u+d}{2}\right)^n = 1.02$$
$$\left(\frac{u^2+d^2}{2}\right)^n - \left(\frac{u+d}{2}\right)^{2n} = 0.04$$

1 年を 365 日 ($n = 365$) として数値計算で u, d を求めると

$$u = 1.0102\cdots$$
$$d = 0.9899\cdots$$

となる。$R = \frac{u+d}{2}$ と仮定するとリスク中立確率は

$$q_u = \frac{R-d}{u-d} = \frac{1}{2}$$
$$q_d = 1 - q_u = \frac{1}{2}$$

となる。よって、ストライクは 100 であるので満期でのペイオフは

$$V_{20}(k) = 100 \times \left(1 - u^k d^{20-k}\right)_+, k = 0, \cdots, 20$$

となり、評価日の翌日から満期の前日までは

$$V_t(k) = \max\left(100 \times \left(1 - u^k d^{t-k}\right)_+, \frac{1}{R}\frac{V_{t+1}(k) + V_{t+1}(k+1)}{2}\right)$$
$$t = 1, \cdots, 19,\ k = 0, \cdots, t$$

となる。評価日では

$$V_0 = \frac{1}{R}\frac{V_1(0) + V_1(1)}{2}$$

となる。以上の計算を満期日から backward に行えば良い。計算結果は 1.7466 である。

11.

$D^{-1}Q$ の固有値、固有ベクトルを計算すればよいので

$$D^{-1}Q = \begin{pmatrix} e^{\frac{0.002}{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{0.002\times 2}{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{0.002\times 3}{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{0.002\times 4}{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\frac{0.002\times 5}{12}} \end{pmatrix}^{-1}$$
$$\times \begin{pmatrix} 0.998 & 0.002 & 0 & 0 & 0 \\ 0.004 & 0.992 & 0.004 & 0 & 0 \\ 0 & 0.006 & 0.988 & 0.006 & 0 \\ 0 & 0 & 0.008 & 0.984 & 0.008 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0.99 \end{pmatrix}$$

これより正の固有値、固有ベクトルは

$$\lambda = 0.9997, z = \begin{pmatrix} 0.5263 \\ 0.4806 \\ 0.4340 \\ 0.3990 \\ 0.3802 \end{pmatrix}$$

である。よって、現実の推移確率は

$$P = \begin{pmatrix} 0.9982 & 0.0018 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0044 & 0.9920 & 0.0036 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0066 & 0.9878 & 0.0055 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0087 & 0.9837 & 0.0076 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0105 & 0.9895 \end{pmatrix}$$

となる。

第 3 章

確率解析

1.

密度関数を $f(x)$ とすると

$$f(x)=\frac{\partial}{\partial x}\Phi\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\int_{\infty}^{\frac{\log x-\mu}{\sigma}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma x}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

2.

(3.1.3) の導出

$$\begin{aligned}m_X(t)=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{tX}\right]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\frac{\left(x-(\mu+\sigma^2t)\right)^2}{\sigma^2}}\mathrm{d}x\\&=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}\end{aligned}$$

$z=\frac{x-(\mu+\sigma^2t)}{\sigma}$ と変数変換を行っている。

(3.1.4) の導出

$$m_{X_1,X_2}(s,t)=\mathbb{E}\left[e^{sX_1+tX_2}\right]=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{sx+ty}e^{-\frac{1}{2}Q(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$Q(x,y)=\frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}$$

$u = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, v = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ とすると

$$sx + ty - \frac{1}{2}Q(x,y) = s\mu_1 + s\sigma_1 u + t\mu_2 + t\sigma_2 v - \frac{1}{2(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + v^2)$$

$$= s\mu_1 + t\mu_2 + \frac{\sigma_1^2 s^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 st + \sigma_2^2 t^2}{2} - \frac{\left(u - \rho v - (1-\rho^2)s\sigma_1\right)^2}{2(1-\rho^2)} - \frac{(v - \rho s\sigma_1 - t\sigma_2)^2}{2}$$

となるので

$$\begin{aligned} m_{X_1,X_2}(s,t) &= e^{s\mu_1 + t\mu_2 + \frac{\sigma_1^2 s^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 st + \sigma_2^2 t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left(u-\rho v-(1-\rho^2)s\sigma_1\right)^2}{2(1-\rho^2)}} \mathrm{d}u \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v-\rho s\sigma_1 - t\sigma_2)^2}{2}} \mathrm{d}v \\ &= e^{s\mu_1 + t\mu_2 + \frac{\sigma_1^2 s^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 st + \sigma_2^2 t^2}{2}} \end{aligned}$$

3.

積率母関数は

$$\begin{aligned} \phi_n(t) = \mathbb{E}\left[e^{t\bar{S}_n}\right] &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{\frac{tk - tnp}{\sqrt{np(1-p)}}} \\ &= e^{-\frac{tnp}{\sqrt{np(1-p)}}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^k (1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\frac{tnp}{\sqrt{np(1-p)}}} \left(1 + p\left(e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} - 1\right)\right)^n \end{aligned}$$

であり、対数をとると

$$\log\phi_n(t) = -\frac{tnp}{\sqrt{np(1-p)}} + n\log\left(1 + p\left(e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} - 1\right)\right)$$

となる。$n \to \infty$ のとき $e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} - 1 \to 0$ であるので、

$$\begin{aligned} \log\left(1 + p\left(e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} - 1\right)\right) &\approx p\left(e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} - 1\right) - \frac{1}{2}p^2\left(e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} - 1\right)^2 \\ &\approx \frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{2}\frac{pt^2}{np(1-p)} - \frac{1}{2}\frac{p^2t^2}{np(1-p)} \\ &= \frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{2n}t^2 \end{aligned}$$

よって、

$$\log \phi_n(t) \approx -\frac{tnp}{\sqrt{np(1-p)}} + n\left(\frac{pt}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{1}{2n}t^2\right) = \frac{1}{2}t^2$$

となるので $n \to \infty$ のときに $\phi_n(t) \to e^{\frac{1}{2}t^2}$ となることがわかる。

4.

$t' = \frac{t}{\alpha^2}, s' = \frac{s}{\alpha^2}$ とすると $X_t = \alpha z_{t'}$ であり $X_{t+s} - X_t = \alpha\left(z_{t'+s'} - z_{t'}\right)$ である。z_t は標準ブラウン運動なので X_t は連続で独立増分を持つことが分かる。また、$\mathrm{Var}(X_{t+s} - X_s) = \alpha^2\left(t' + s' - t'\right) = \alpha^2 s' = s$ となるので $X_{t+s} - X_t \sim N(0, s)$ である。

5.

$X_s = x = \mu s + \sigma z_s$ であるので $X_{t+s} = \mu(t+s) + \sigma z_{t+s} = x + \mu t + \sigma(z_{t+s} - z_t)$ であるので

$$X_{t+s}|(X_s = x) \sim N(x + \mu t, \sigma^2 t)$$

よって、

$$P(x, y, t) = \mathbb{P}\left\{X_{s+t} \le y | X_s = x\right\} = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}} e^{-\frac{(z-x-\mu t))^2}{2\sigma^2 t}} \mathrm{d}z$$

となる。これを微分すると

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, y, t) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}} e^{-\frac{(z-x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} \left[\frac{(z-x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t^2} + \mu\frac{z-x-\mu t}{\sigma^2 t} - \frac{1}{2t}\right] \mathrm{d}z$$
$$\frac{\partial}{\partial x}P(x, y, t) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}} e^{-\frac{(z-x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} \left[\frac{z-x-\mu t}{\sigma^2 t}\right] \mathrm{d}z$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x, y, t) = \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}} e^{-\frac{(z-x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} \left[\frac{(z-x-\mu t)^2}{\sigma^4 t^2} - \frac{1}{\sigma^2 t}\right] \mathrm{d}z$$

となるので

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x, y, t) = \mu\frac{\partial}{\partial x}P(x, y, t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x, y, t)$$

であることがわかる。

6.

a) $Y_t = e^{-rt}S_t^2$

$$\mathrm{d}Y_t = -re^{-rt}S_t^2\mathrm{d}t + e^{-rt}\left[2S_t\mathrm{d}S_t + \mathrm{d}S_t^2\right] = e^{-rt}S_t^2\left[-r\mathrm{d}t + 2\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} + \left(\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}\right)^2\right]$$

$$\frac{\mathrm{d}Y_t}{Y_t} = (2\mu - r + \sigma^2)\mathrm{d}t + 2\sigma\mathrm{d}z_t$$

b) $Y_t = (\log S_t)^2$

$$\mathrm{d}Y_t = 2\log S_t\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} + (1-\log S_t)\left(\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}\right)^2 = \left(2\mu\sqrt{Y_t} + (1-\sqrt{Y_t})\sigma^2\right)\mathrm{d}t + 2\sigma\sqrt{Y_t}\mathrm{d}z_t$$

c) $Y_t = \cos S_t + \sin S_t$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_t &= (\cos S_t - \sin S_t)\mathrm{d}S_t - \frac{1}{2}(\cos S_t + \sin S_t)\mathrm{d}S_t^2\\ \frac{\mathrm{d}Y_t}{Y_t} &= \left(\frac{1-\tan S_t}{1+\tan S_t}\mu S_t - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t + \frac{1-\tan S_t}{1+\tan S_t}\sigma S_t\mathrm{d}z_t\end{aligned}$$

7.

a) $Y_t = e^{-\int_0^t \mu(s)ds}X_t$ とおくと、

$$\begin{aligned}dY_t &= -\mu(t)e^{-\int_0^t \mu(s)ds}X_t dt + e^{-\int_0^t \mu(s)ds}dX_t\\ &= e^{-\int_0^t \mu(s)ds}b(t)dt + e^{-\int_0^t \mu(s)ds}\sigma(t)dz_t\end{aligned}$$

となる。これを積分すると、

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s \mu(u)du}b(s)ds + \int_0^t e^{-\int_0^s \mu(u)du}\sigma(s)dz_s$$

となる。これより、

$$X_t = e^{\int_0^t \mu(s)ds}\left[x + \int_0^t e^{-\int_0^s \mu(u)du}b(s)ds + \int_0^t e^{-\int_0^s \mu(u)du}\sigma(s)dz_s\right]$$

と解を得ることができる。

b) $\mu(t) = \frac{-1}{T-t}$, であることから

$$\begin{aligned}\int_0^t \mu(s)ds &= \int_0^t \frac{-1}{T-s}ds = \log\left(\frac{T-t}{T}\right) \\ e^{\int_0^t \mu(s)ds} &= \frac{T-t}{T} \\ e^{-\int_0^s \mu(u)du} &= \frac{T}{T-s}\end{aligned}$$

となる。また、$b(t) = \frac{b}{T-t}$ であるので

$$X_t = \frac{T-t}{T}\left[x - \frac{bt}{T-t} + \int_0^t \sigma(s)\frac{T}{T-s}\mathrm{d}z_s\right]$$

8.

$t > 0$ であるので $z_t^2 - t < z_t^2$ よって $\mathbb{E}\left[|X_t|\right] < \mathbb{E}\left[z_t^2\right] = t < \infty$ となる。また、

$$X_{t+s} = z_{t+s}^2 - (t+s) = (z_{t+s} - z_t)^2 + 2(z_{t+s} - z_t)z_t + z_t^2 - t - s$$

であるので、

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_t\left[X_{t+s}\right] &= \mathbb{E}_t\left[(z_{t+s} - z_t)^2\right] - s + 2z_t\mathbb{E}_t\left[(z_{t+s} - z_t)\right] + z_t^2 - t \\ &= z_t^2 - t = X_t\end{aligned}$$

となる。よって、$X_t = z_t^2 - t$ はマルチンゲールである。

第 4 章

古典的なリスク中立化法

1.

$B_t = xS_t + yC_t$ とすると $B_t \frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} = xS_t \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} + yC_t \frac{\mathrm{d}C_t}{C_t}$ であるので、

$$r(xS_t + yC_t)\mathrm{d}t = xS_t(\mu \mathrm{d}t + \sigma_t \mathrm{d}z_t) + yC_t(\mu^C \mathrm{d}t + \sigma_t^C \mathrm{d}z_t)$$

となる。整理すると

$$\left[xS_t(\mu - r) + yC_t(\mu^C - r)\right] \mathrm{d}t + \left[xS_t\sigma + yC_t\sigma^C\right] \mathrm{d}z_t = 0$$

となり、ドリフト項、ボラティリティ項がゼロとなる条件は、

$$\begin{aligned} &xS_t(\mu - r) + yC_t(\mu^C - r) = 0 \\ &xS_t\sigma yC_t\sigma^C = 0 \end{aligned}$$

である。第 2 式より $xS_t = -yC_t \frac{\sigma^C}{\sigma}$ であり、第 1 式に代入して整理すると

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu^C - r}{\sigma^C}$$

を得る。

同様に $S_t = xB_t + yC_t$ とおくと $S_t \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = xB_t \frac{\mathrm{d}B_t}{B_t} + yC_t \frac{\mathrm{d}C_t}{C_t}$ であるので

$$(xB_t + yC_t)(\mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z_t) = xB_t r \mathrm{d}t + yC_t(\mu^C \mathrm{d}t + \sigma^C \mathrm{d}z_t)$$

となる。整理すると

$$\left[xB_t(\mu - r) + yC_t(\mu - \mu^C)\right] \mathrm{d}t + \left[xB_t\sigma + yC_t(\sigma - \sigma^C)\right] \mathrm{d}z_t = 0$$

となる。ドリフト項、ボラティリティ項がゼロとなる条件は

$$\begin{aligned} &xB_t(\mu - r) + yC_t(\mu - \mu^C) = 0 \\ &xB_t\sigma + yC_t(\sigma - \sigma^C) = 0 \end{aligned}$$

である。第 2 式より $xB_t = yC_t\left(\frac{\sigma^C}{\sigma} - 1\right)$ となり、これを第 1 式に代入して整理すると

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\mu^C - r}{\sigma^C}$$

2.

満期でのコールオプション、プットオプションのペイオフはそれぞれ $(S_T - K)_+, (K - S_T)_+$ であるので、

$$C(T) - P(T) = (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K$$

となる。これより

$$\begin{aligned} C(t) - P(t) &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}\left(C(T) - P(T)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}S_T - e^{-r(T-t)}K\right] = S_t - e^{-r(T-t)}K \end{aligned}$$

となる。

プット・コールパリティより

$$\begin{aligned} P(t) &= C(t) - S_t + Ke^{-r(T-t)} = S_t\Phi(d) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d - \sigma\sqrt{T-t}) - S_t + Ke^{-r(T-t)} \\ &= -S_t\left(1 - \Phi(d)\right) + Ke^{-r(T-t)}\left(1 - \Phi\left(d - \sigma\sqrt{T-t}\right)\right) \end{aligned}$$

となる。$1 - \Phi(d) = \Phi(-d)$ であるので

$$P(t) = -S_t\Phi(-d) + Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-d + \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

となる。

3.

コールオプションの価格を C とすると

$$\begin{aligned} &\text{デルタ}:\frac{\partial}{\partial S}C = \Phi(d) \\ &\text{ガンマ}:\frac{\partial^2}{\partial S^2}C = \frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d^2} \\ &\text{セータ}:\frac{\partial}{\partial t}C = -rKe^{-r(T-t)}\Phi\left(d - \sigma\sqrt{T-t}\right) - \frac{\sigma S_t}{2\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d^2} \\ &\text{ベガ (カッパ)}:\frac{\partial}{\partial\sigma}C = S_t\sqrt{T-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d^2} \\ &\text{ロー}:\frac{\partial}{\partial r}C = (T-t)Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(d - \sigma\sqrt{T-t}\right) \end{aligned}$$

となる。プットのグリークスはプット・コールパリティを用いて

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial S}P &= \frac{\partial}{\partial S}C - 1 = -\Phi(-d) \\
\frac{\partial^2}{\partial S^2}P &= \frac{\partial^2}{\partial S^2}C \\
\frac{\partial}{\partial t}P &= rKe^{-r(T-t)}\Phi\left(-d+\sigma\sqrt{T-t}\right) - \frac{\sigma S_t}{2\sqrt{T-t}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d^2} \\
\frac{\partial}{\partial \sigma}P &= \frac{\partial}{\partial \sigma}C \\
\frac{\partial}{\partial r}P &= \frac{\partial}{\partial r}C - (T-t)Ke^{-r(T-t)} = -(T-t)Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(-d+\sigma\sqrt{T-t}\right)
\end{aligned}
$$

4.

3. の解答よりベガは

$$
\frac{\partial}{\partial \sigma}C = S_t\sqrt{T-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d^2}
$$

であるので、$\frac{\partial}{\partial \sigma}C > 0$ は明らかである。ボラティリティスマイルの図は各自で作成のこと。

5.

$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_n^i}{B_n}\right] = \frac{S_n^{i-1}}{B_{n-1}}$ とならないといけない。変形すると $\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[X_n^i\right] = R$ となるので、リスク中立確率での上昇確率を q_u、下降確率を q_d とすると

$$
\begin{aligned}
u^1 q_u + (1 - q_u - q_d) + d^1 q_d = R \\
u^2 q_u + (1 - q_u - q_d) + d^2 q_d = R
\end{aligned}
$$

である。これより

$$
\begin{pmatrix} q_u \\ q_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^1 - 1 & d^1 - 1 \\ u^2 - 1 & d^2 - 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} R-1 \\ R-1 \end{pmatrix} = \frac{R-1}{(u^1-1)(d^2-1)-(u^2-1)(d^1-1)}\begin{pmatrix} d^2 - d^1 \\ u^1 - u^2 \end{pmatrix}
$$

となる。

6.

$$\mathbb{Q}\left(\{X_n=\mu\}\right)=\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\lambda X_n}\mathbf{1}_{\{X_n=\mu\}}\right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\lambda X_n}\right]}=\frac{pe^{\lambda\mu}}{pe^{\lambda\mu}+(1-p)e^{-\lambda\mu}}$$
$$\mathbb{Q}\left(\{X_n=-\mu\}\right)=\frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\lambda X_n}\mathbf{1}_{\{X_n=-\mu\}}\right]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\lambda X_n}\right]}=\frac{(1-p)e^{-\lambda\mu}}{pe^{\lambda\mu}+(1-p)e^{-\lambda\mu}}$$

であるので、

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{X_n}\right]=\mathbb{Q}\left(\{X_n=\mu\}\right)e^{\mu}+\mathbb{Q}\left(\{X_n=-\mu\}\right)e^{-\mu}=e^{r}$$

となる必要がある。これより

$$\lambda=\frac{1}{2\mu}\left[\log\frac{1-p}{p}+\log\left(1-e^{-(\mu+r)}\right)-\log\left(e^{(\mu-r)}-1\right)\right]$$

となる。ただし、$\mu>r$ である。

7.

離散化すると

$$\mathrm{d}S_{t+\Delta t}=S_t+rS_t\Delta t+\sigma\sqrt{S_t}\mathrm{d}z_t$$

である。時間刻みを $\frac{1}{240}$、シミュレーションのパス数を 10^7 にすると誤差は 0.001 程度となる。ストライクを変えた時のコールオプション価格を表 4.1、グラフを図 4.1 に示す。

表 4.1　コールオプション価格

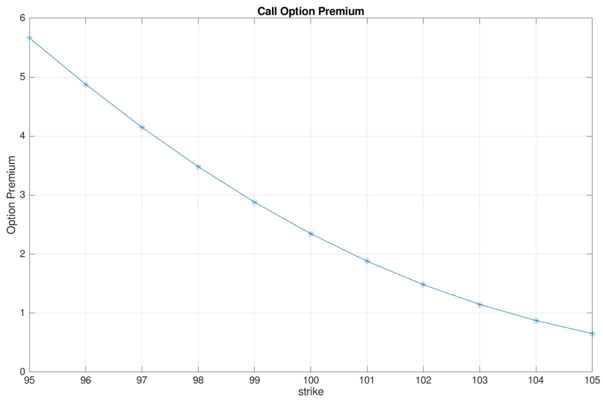
ストライク	95	96	97	98	99	100
オプション価格	5.65	4.88	4.15	3.48	2.88	2.34
ストライク	101	102	103	104	105	-
オプション価格	1.88	1.48	1.15	0.87	0.65	-

8.

時刻 T での資産価格は

$$S_T^i=S_0^i e^{rT-\frac{1}{2}\sigma_i^2T+\sigma_i z_T^i},\ i=1,2$$

図 4.1　コールオプション価格



である。オプション価格は

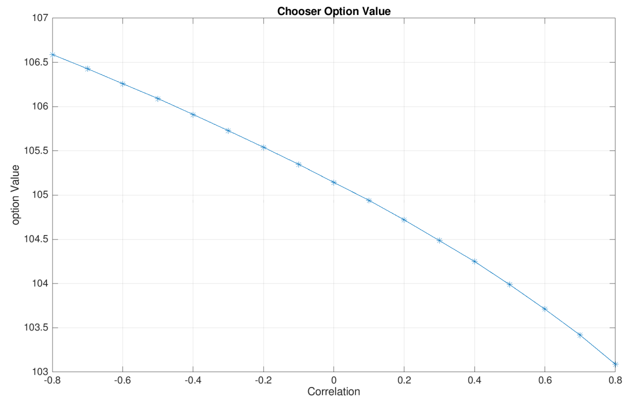
$$V_0 = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \max(S_T^1, S_T^2) \right]$$

である。モンテカルロシミュレーションでのパス数を 10^7 として相関を変化させた時のオプション価格を表 4.2, グラフを図 4.2 に示す。

表 4.2　”チューザーオプション価格”

相関係数	-0.8	-0.7	-0.6	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
オプション価格	106.59	106.43	106.26	106.09	105.91	105.72	105.54	105.35	105.14
相関係数	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	-
オプション価格	104.94	104.72	104.49	104.25	103.99	103.71	103.42	103.09	-

図 4.2　チューザーオプション価格



9.

原資産、取引量をそれぞれ離散化すると

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{r\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t + \sigma(z_{t+\Delta t} - z_t)}$$
$$v_{t+\Delta t} = v_t + c(m - v_t)\Delta t + \gamma\sqrt{v_t}(\omega_{t+\Delta t} - \omega_t)$$

である。$z_{t+\Delta t} - z_t$ と $\omega_{t+\Delta t} - \omega_t$ は独立でそれぞれ正規分布 $N(0, \Delta t)$ に従う。時間刻みを $dt = \frac{1}{240}$ として S_t, v_t のパスを生成し積分は台形公式で近似する。つまり

$$\int_0^T v_t S_t \mathrm{d}t \simeq \frac{v_{t_0}S_{t_0} + v_{t_1}S_{t_1}}{2}(t_1 - t_0) + \cdots + \frac{v_{t_{N-1}}S_{t_{N-1}} + v_{t_N}S_{t_N}}{2}(t_N - t_{N-1})$$
$$\int_0^T v_t \mathrm{d}t \simeq= \frac{v_{t_0} + v_{t_1}}{2}(t_1 - t_0) + \cdots + \frac{v_{t_{N-1}} + v_{t_N}}{2}(t_N - t_{N-1})$$

とする。シミュレーション回数が 10^7 のときの VWAP オプション価格は 2.359 である。

第 5 章

シングルカーブモデル

1.

$x_t = e^{-\beta t} r_t$ とおくと

$$\mathrm{d}x_t = -\beta e^{-\beta t} r_t \mathrm{d}t + e^{-\beta t}\mathrm{d}r_t = e^{-\beta t}\alpha \mathrm{d}t + e^{-\beta t}\sigma \mathrm{d}z_t$$

となる。これを積分すると

$$\begin{aligned} x_t &= x_0 + \alpha \int_0^t e^{-\beta s}\mathrm{d}s + \sigma \int_0^t e^{-\beta s}\mathrm{d}z_s \\ &= r_0 + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta t} + \sigma \int_0^t e^{-\beta s}\mathrm{d}z_s \end{aligned}$$

である。これより

$$r_t = -\frac{\alpha}{\beta} + \left(r_0 + \frac{\alpha}{\beta}\right)e^{\beta t} + \sigma \int_0^t e^{\beta(t-s)}\mathrm{d}z_s$$

となる。

2.

$D(t,T) = e^{-\int_t^T f_t(u)\mathrm{d}u}$ であるので、

$$\begin{aligned} \mathrm{dlog}\, D(t,T) &= \mathrm{d}\left(-\int_t^T f_t(u)\mathrm{d}u\right) = f_t(t)\mathrm{d}t - \int_t^T \mathrm{d}f_t(u)\mathrm{d}u \\ &= f_t(t)\mathrm{d}t - \left(\int_t^T \alpha(t,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t - \left(\int_t^T \sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z_t \end{aligned}$$

となり、

$$\mathrm{d}D(t,T) = D(t,T)\mathrm{d}\left(-\int_t^T f_t(u)\mathrm{d}u\right) + \frac{1}{2}D(t,T)\mathrm{d}\left(-\int_t^T f_t(u)\mathrm{d}u\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}D(t,T)}{D(t,T)} = \left(r_t - \int_t^T \alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2\right)\mathrm{d}t - \left(\int_t^T \sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z_t$$

となる。ただし、$r_t = f_t(t)$ である。リスクの市場価格は $\frac{\text{ドリフト項} - r_t}{\text{ボラティリティ}}$ であるので

$$\lambda_t = \frac{-\int_t^T \alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma(f_t(u),t,u)\mathrm{d}u\right)^2}{\int_t^T \sigma(f_t(u),t,u)\mathrm{d}u}$$

となる。

3.

リスク中立確率測度では割引債のドリフトは r_t となるので、2. の結果より

$$-\int_t^T \alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2 = 0$$

である。T で微分すると

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\mathrm{d}u$$

となる。

4.

$V = xD(t,T_1) + yD(t,T_2)$ とおくと仮定より

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= V\frac{\mathrm{d}V}{V} = r_t V \mathrm{d}t = r_t\left(xD(t,T_1) + yD(t,T_2)\right)\mathrm{d}t \\
&= x\mathrm{d}D(t,T_1) + y\mathrm{d}D(t,T_2) = xD(t,T_1)\frac{\mathrm{d}D(t,T_1)}{D(t,T_1)} + yD(t,T_2)\frac{\mathrm{d}D(t,T_2)}{D(t,T_2)} \\
&= xD(t,T_1)\left\{r_t - \int_t^{T_1}\alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^{T_1}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2\right\}\mathrm{d}t \\
&\quad + yD(t,T_2)\left\{r_t - \int_t^{T_2}\alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^{T_2}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2\right\}\mathrm{d}t \\
&\quad - \left[xD(t,T_1)\left(\int_t^{T_1}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right) + yD(t,T_2)\left(\int_t^{T_2}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)\right]\mathrm{d}z_t
\end{aligned}$$

これを整理すると

$$\begin{aligned}
& xD(t,T_1)\left\{- \int_t^{T_1}\alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^{T_1}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2\right\}\mathrm{d}t \\
& + yD(t,T_2)\left\{- \int_t^{T_2}\alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^{T_2}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2\right\}\mathrm{d}t \\
& - \left[xD(t,T_1)\left(\int_t^{T_1}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right) + yD(t,T_2)\left(\int_t^{T_2}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)\right]\mathrm{d}z_t = 0
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
& xD(t,T_1)\left\{- \int_t^{T_1}\alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^{T_1}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2\right\}\mathrm{d}t \\
& + yD(t,T_2)\left\{- \int_t^{T_2}\alpha(t,u)\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\left(\int_t^{T_2}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2\right\} = 0 \\
& \left[xD(t,T_1)\left(\int_t^{T_1}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right) + yD(t,T_2)\left(\int_t^{T_2}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)\right]\mathrm{d}z_t = 0
\end{aligned}$$

となる必要がある。第 2 式より

$$xD(t,T_1) = -yD(t,T_2)\frac{\int_t^{T_2}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u}{\int_t^{T_1}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u}$$

であり、これを第 1 式に代入して整理すると

$$\frac{-\int_t^{T_1}\alpha(t,u)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\left(\int_t^{T_1}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2}{\int_t^{T_1}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u}=\frac{-\int_t^{T_2}\alpha(t,u)\mathrm{d}u+\frac{1}{2}\left(\int_t^{T_2}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u\right)^2}{\int_t^{T_2}\sigma\left(f_t(u),t,u\right)\mathrm{d}u}$$

となる。これと 2. の解答で示した割引債の確率微分方程式より

$$\frac{\mu_t^1-r_t}{\sigma_t^1}=\frac{\mu_t^2-r_t}{\sigma_t^2}$$

となっていることがわかる。

5.

$x_t=r_te^{\alpha t}$ とおくと

$$\mathrm{d}x_t=\mathrm{d}r_te^{\alpha t}+\alpha r_te^{\alpha t}\mathrm{d}t=\alpha\bar{r}e^{\alpha t}\mathrm{d}t+\sigma e^{\alpha t}\mathrm{d}z_t^*$$

となる。これを解くと

$$r_s=r_te^{-\alpha(s-t)}+\bar{r}\left(1-e^{-\alpha(s-t)}\right)+\sigma e^{-\alpha s}\int_t^s e^{\alpha u}\mathrm{d}z_u^*$$

である。これより

$$\int_t^T r_s\mathrm{d}s=\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}+\bar{r}(T-t)-\bar{r}\frac{1-e^{\alpha(T-t)}}{\alpha}+\frac{\sigma}{\alpha}\int_t^T\left(1-e^{-\alpha(T-s)}\right)\mathrm{d}z_u^*$$

となり、$\int_t^T r_s\mathrm{d}s$ はガウシアンであることがわかる。よって

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}\right]=e^{-\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right]+\frac{1}{2}VAR_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right]}$$

となる。

$$\begin{aligned}&-\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right]+\frac{1}{2}VAR_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T r_s\mathrm{d}s\right]\\&=-\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}r_t-\left[T-t-\frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}\right]\bar{r}+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\alpha^2}(T-t)\\&-\frac{\sigma^2}{\alpha^3}\left(1-e^{-\alpha(T-t)}\right)+\frac{\sigma^2}{4\alpha^3}\left(1-e^{-2\alpha(T-t)}\right)\end{aligned}$$

であるので、これを整理すると

$$D_t(T)=\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}\right]=H_1(t,T)e^{-H_2(t,T)r_t}$$

となる。

6.

Caplet の評価式の導出は以下で示すフロアレットの価格式の導出と同じ手順である。
フロアレットの価格は

$$\delta_i B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(K-L_i)_+}{B_{T_{i+1}}}\right] = \delta_i B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(K-L_i)_+}{B_{T_i}} D_{T_i}(T_{i+1})\right]$$

である。

$$\frac{(K-L_i)_+}{B_{T_i}} D_{T_i}(T_{i+1}) = \frac{(K D_{T_i}(T_{i+1}) - L_i D_{T_i}(T_{i+1}))_+}{B_{T_i}} = \frac{(\delta_i K D_{T_i}(T_{i+1}) - 1 + D_{T_i}(T_{i+1}))_+}{\delta_i B_{T_i}}$$

$$= \frac{1+\delta_i K}{\delta_i B_{T_i}}\left(D_{T_i}(T_{i+1}) - \frac{1}{1+\delta_i K}\right)_+$$

となるので

$$\delta_i B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(K-L_i)_+}{B_{T_{i+1}}}\right] = (1+\delta_i K)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_t}{B_{T_i}}\left(D_{T_i}(T_{i+1}) - \frac{1}{1+\delta_i K}\right)_+\right]$$

となり、割引債のコールオプションであることがわかる。

7.

コールオプションと同様に Jamshidian トリックによりプットオプションの価値は

$$\tilde{P}_t = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u}\left(K_k^* - D_T(T_k)\right)_+\right]$$

となる。割引債オプションの価値は先渡測度 $\mathbb{Q}^T$ を用いると

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u \mathrm{d}u}\left(K_k^* - D_T(T_k)\right)_+\right] = D_t(T)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^T}\left[\left(K_k^* - D_T^T(T_k)\right)_+\right]$$

となる。$\mathbb{Q}^T$ のもとでは

$$\frac{\mathrm{d}D_t^T(T_k)}{D_t^T(T_k)} = \left(\sigma_t(T_k) - \sigma_t(T)\right)\mathrm{d}z_t^T$$

であり、Vasicek モデルでは $\sigma_t(T_K) - \sigma_t(T) = \frac{\sigma}{\alpha}e^{\alpha t}\left(e^{-\alpha T_k} - e^{-\alpha T}\right)$ なので

$$D_T^T(T_k) = D_t(T, T_k) e^{-\frac{1}{2}\sigma(t,T,T_k)^2 + \int_t^T (\sigma_s(T_k) - \sigma_s(T))\mathrm{d}z_s^T}$$

$$D_t(T, T_k) = \frac{D_t(T_k)}{D_t(T)}$$

$$\sigma(t,T,T_k)^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}\left(1 - e^{-\alpha(T_k - T)}\right)^2\left(1 - e^{-2\alpha(T-t)}\right)$$

となる。したがって

$$
\begin{aligned}
&D_t(T)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^T}\left[\left(K_k^* - D_T^T(T_k)\right)_+\right] \\
&= D_t(T)\left[K_k^*\Phi\left(\frac{\log\frac{K_k^*}{D_t(T,T_k)}}{\sigma(t,T,T_k)} + \frac{1}{2}\sigma(t,T,T_k)\right) - D_t(T,T_K)\Phi\left(\frac{\log\frac{K_k^*}{D_t(T,T_k)}}{\sigma(t,T,T_k)} - \frac{1}{2}\sigma(t,T,T_k)\right)\right]
\end{aligned}
$$

となる。

8.

補題 5.1

$X_t \log S_t$ とすると

$$
\mathrm{d}X_t = \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}S_t^2}{S_t^2} = \sigma(t)\mathrm{d}z_t - \frac{1}{2}\sigma(t)^2\mathrm{d}t
$$

となる。積分すると

$$
X_t = X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s)^2\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}z_s
$$

となり、これより

$$
S_t = Se^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma(s)^2\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}z_s}
$$

となる。$\sigma(0,t)^2 = \int_0^t \sigma(s)^2\mathrm{d}s$ とすると

$$
\mathbb{E}\left[(S_t - K)_+\right] = \mathbb{E}\left[\left(Se^{-\frac{1}{2}\sigma(0,t)^2 + \sigma(0,t)\varepsilon} - K\right)_+\right]
$$

となる。ただし、ε は標準正規分布に従う確率変数である。

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left(Se^{-\frac{1}{2}\sigma(0,t)^2 + \sigma(0,t)\varepsilon} - K\right)_+\right] = \int_{\varepsilon_K}^{\infty}\left(Se^{-\frac{1}{2}\sigma(0,t)^2 + \sigma(0,t)\varepsilon} - K\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}\mathrm{d}\varepsilon \\
&\varepsilon_K = \frac{\log K - \log S}{\sigma(0,t)} + \frac{1}{2}\sigma(0,t)
\end{aligned}
$$

となるので、後はこの積分計算を行えばよい。

定理 5.2

キャプレット価格はフォワード測度 $\mathbb{Q}^{T_{i+1}}$ の下で

$$
\mathrm{Cpl}_t(T_i, K) = \delta_i D_t(T_{i+1})\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{T_{i+1}}}\left[(L_{T_i}^i - K)_+\right]
$$

であり、フォワード Libor は

$$L_{T_i}^i = L_t^i e^{-\frac{1}{2}\int_t^{T_i} \sigma_i(s)^s \mathrm{d}s + \int_t^{T_i} \sigma_i(s) \mathrm{d}z_s^{T_{i+1}}}$$

である。よって、補題 5.1 を適用すると定理 5.2 が得られる。

9.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L_t^i}{L_t^i} &= \frac{1+\delta_i L_t^i}{\delta_i L_t^i}\left(\sigma_t(T_i) - \sigma_t(T_{i+1})\right)\left(-\sigma_t(T_{i+1})\mathrm{d}t + \mathrm{d}z_t^{\mathbb{Q}}\right) \\ \mathrm{d}z_t^{T_{i+1}} &= -\sigma_t(T_{i+1})\mathrm{d}t + \mathrm{d}z_t^{\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

であるので、

$$\frac{\mathrm{d}L_t^i}{L_t^i} = \frac{1+\delta_i L_t^i}{\delta_i L_t^i}\left(\sigma_t(T_i) - \sigma_t(T_{i+1})\right)\mathrm{d}z_t^{T_{i+1}}$$

となる。$\sigma_i(t) = \frac{1+\delta_i L_t^i}{\delta_i L_t^i}\left(\sigma_t(T_i) - \sigma_t(T_{i+1})\right)$ とすればよい。

10.

7. で求めている割引債プットオプションと同じである。

第 6 章

マルチカーブモデル

1.

リスク資産 i の価格を S_t^i、保有量を θ_t^i とし、

$$\frac{\mathrm{d}S_t^i}{S_t^i} = \mu_t^i \mathrm{d}t + \sigma_t^i \mathrm{d}z_t^i$$

とする。R_t^i はリスク資産 i と同額のキャッシュ量 ($R_t^i = \theta_t^i S_t^i$) とする。リスク資産 i を担保とするときの担保金利 (レポレート) を $r_t^{R^i}$ とする。このとき

$$V_t = \sum_i \theta_t^i S_t^i + \theta_t^C B_t^C + \theta_t^F B_t^F - \sum_i R_t^i$$

とすると、

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V_t &= \sum_i \theta_t^i \mathrm{d}S_t^i + \theta_t^C \mathrm{d}B_t^C + \theta_t^F \mathrm{d}B_t^F - \sum_i \mathrm{d}R_t^i \\
&= \left[\sum_i \theta_t^i S_t^i \left(\mu_t^i - r_t^{R^i}\right) + r_t^C \theta_t^C B_t^C + r_t^F \theta_t^F B_t^F\right] \mathrm{d}t + \sum_i \theta_t^i S_t^i \sigma_t^i \mathrm{d}z_t^i
\end{aligned}$$

となる。

$$\mathrm{d}z_t^{*,i} = dz_t^i + \lambda_t^i \mathrm{d}t$$
$$\lambda_t^i \equiv \frac{\mu_t^i - r_t^{R^i}}{\sigma_t^i}$$

と定義すると

$$\mathrm{d}V_t = \left(r_t^C C_t + r_t^F F_t\right) \mathrm{d}t + \sum_i \theta_t^i S_t^i \sigma_t^i \mathrm{d}z_t^{*,i}$$

となる。

2.

$$
\begin{aligned}
C_t &= e^{-r^C(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[(S_T-K)_+\right] \\
S_T &= S_t e^{\left(r^R-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma(z_T^*-Z_t^*)}
\end{aligned}
$$

これらより、

$$
\begin{aligned}
C_t &= S_t e^{\left(r^R-r^C\right)(T-t)}\Phi(d) - Ke^{-r^C(T-t)}\Phi\left(d-\sigma\sqrt{T-t}\right) \\
d &= \frac{\log\frac{S}{K}+r^R(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

となる。

次に $\Delta = r^R - r^C$ とすると

$$
\begin{aligned}
C_t &= S_t \mathrm{e}^{\Delta(T-t)}\Phi(d) - K\mathrm{e}^{-r^C(T-t)}\Phi(d-\sigma\sqrt{T-t}) \\
d &= \frac{\log S_t - \log K + r^C(T-t)+\Delta(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

となる。$\Delta = 0$ のときにシングルカーブの Black-Scholes 式になる。よって、

$$
\frac{\partial}{\partial\Delta}C_t = (T-t)\left[S_t\mathrm{e}^{\Delta(T-t)}\Phi(d)+\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[S_t\mathrm{e}^{\Delta(T-t)}\phi(d)-K\mathrm{e}^{-r^C(T-t)}\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})\right]\right]
$$

となる。また、

$$
\begin{aligned}
\phi(d-\sigma\sqrt{T-t}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(d-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2} = \phi(d)\mathrm{e}^{d\times\sigma\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} \\
&= \phi(d)\mathrm{e}^{\log S_t/K+(r^C+\Delta)(T-t)} = \frac{S_t}{K}\mathrm{e}^{(r^C+\Delta)(T-t)}\phi(d)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
K\mathrm{e}^{-r^C(T-t)}\phi(d-\sigma\sqrt{T-t}) = S_t e^{\Delta(T-t)}\phi(d)
$$

であることがわかる。ゆえに

$$
\frac{\partial}{\partial\Delta}C_t(\Delta=0) = (T-t)S_t\Phi(d) \geq 0
$$

となり、スプレッド $\Delta = r^R - r^C$ が大きくなるとシングルカーブでの価格よりも高くなることがわかる。

3.

Libor の割引債価格は

$$L_t(T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u^L du}\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u^c + s_u du}\right]$$

と表される。ところで、

$$\begin{aligned} dr_t^c &= (\bar{r}^c + \alpha^c r_t^c)dt + \sigma^c dz_t \\ ds_t &= (\bar{s} + \alpha^s s_t)dt + \sigma^s dw_t \\ corr(dz_t, dw_t) &= \rho dt \end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \int_t^T r_u^c du &= \frac{1-e^{-\alpha^c(T-t)}}{\alpha^c} r_t^c + \bar{r}^c(T-t) - \frac{1-e^{-\alpha^c(T-t)}}{\alpha^c}\bar{r}^c + \frac{\sigma^c}{\alpha^c}\int_t^T \left(1-e^{-\alpha^c(T-u)}\right) dz_u \\ \int_t^T s_u du &= \frac{1-e^{-\alpha^s(T-t)}}{\alpha^s} s_t + \bar{s}(T-t) - \frac{1-e^{-\alpha^s(T-t)}}{\alpha^s}\bar{s} + \frac{\sigma^s}{\alpha^s}\int_t^T \left(1-e^{-\alpha^s(T-u)}\right) dw_u \end{aligned}$$

である。これより、$\int_t^T r_u^c + s_u du$ はガウシアンであるので

$$L_t(T) = e^{-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T r_u^c + s_u du\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T r_u^c + s_u du\right]}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T r_u^c + s_u du\right] &= (\bar{r}^c + \bar{s})(T-t) + \frac{1-e^{\alpha^c(T-t)}}{\alpha^c}(r_t^c - \bar{r}^c) + \frac{1-e^{\alpha^s(T-t)}}{\alpha^s}(s_t - \bar{s}) \\ \mathrm{Var}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T r_u^c + s_u du\right] &= \left(\frac{\sigma^c}{\alpha^c}\right)^2 \int_t^T \left(1-e^{-\alpha^c(T-u)}\right)^2 du + \left(\frac{\sigma^s}{\alpha^s}\right)^2 \int_t^T \left(1-e^{-\alpha^s(T-u)}\right)^2 du \\ &\quad + 2\rho\frac{\sigma^c}{\alpha^c}\frac{\sigma^s}{\alpha^s}\int_t^T \left(1-e^{-\alpha^c(T-u)}\right)\left(1-e^{-\alpha^s(T-u)}\right) du \end{aligned}$$

である。さらに、

$$\begin{aligned} \int_t^T \left(1-e^{\alpha^c(T-u)}\right)\left(1-e^{\alpha^s(T-u)}\right) du &= (T-t) - \frac{1-e^{-\alpha^c(T-t)}}{\alpha^c} \\ &\quad - \frac{1-e^{-\alpha^s(T-t)}}{\alpha^s} + \frac{1-e^{(\alpha^c+\alpha^s)(T-t)}}{\alpha^c+\alpha^s} \end{aligned}$$

である。

4.

$L_T(T_i) = G(t, T_i)D_t(T_i)$ であるので、$\tilde{c}_i = c_i G(t, T_i)$ とおくと

$$L_t^C(T) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i D_t(T_i)$$

である。ストライクが K^C、満期が τ であるコールオプションの価値は

$$C_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^\tau r_s \mathrm{d}s}\left(L_\tau(T) - K^C\right)_+\right] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^\tau r_s \mathrm{d}s}\left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{c}_k D_\tau(T_k) - K^C\right)_+\right]$$

である。$D_t(T)$ が短期金利の関数で短期金利に対して厳密な単調減少であれば Jamshidian トリックにより OIS 割引債のコールオプションのポートフォリオで表現される。

5.

Libor キャプレットの式に (6.24) を代入すると

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_{i+1}} r_u^C \mathrm{d}u}\delta_i\left(\frac{1}{G(T_i, T_{i+1})}D_i - \frac{1}{\delta_i}\left(1 - \frac{1}{G(T_i, T_{i+1})}\right) - K\right)_+\right]$$

となる。$D_i = \frac{1-D_{T_i}(T_{i+1})}{\delta_i D_{T_i}(T_{i+1})}$、$D_{T_i}(T_{i+1}) = \mathbb{E}_{T_i}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_{T_i}^{T_{i+1}}}\right]$ を用いると

$$(1 + \delta_i K)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_i} r_s \mathrm{d}s}\left(\frac{1}{G(T_i, T_{i+1})(1 + \delta_i K)} - D_{T_i}(T_{i+1})\right)_+\right]$$

となる。Vasicek モデルでの金利プロセスは

$$\mathrm{d}r_t = (\theta - \kappa r_t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z_t$$

であるので、割引債価格は

$$\begin{aligned}
D_t(T) &= H_1(t, T)e^{-r_t H_2(t,T;\kappa)} \\
H_1(t, T) &= e^{\frac{\theta}{\kappa}(H_2(t,T;\kappa)-(T-t))+\frac{\sigma^2}{2\kappa^2}(H_2(t,T;2\kappa)-2H_2(t,T;\kappa)+(T-t))} \\
H_2(t, T; \kappa) &= \frac{1 - e^{-\kappa(T-t)}}{\kappa}
\end{aligned}$$

となる。これより割引債のボラティリティは $\sigma H_2(t, T; \kappa)$ であるので、T 先渡測度 $\mathbb{Q}^T$ のもとでの短期金利プロセスは

$$\mathrm{d}r_t = (\theta - \kappa r_t)\mathrm{d}t + \sigma^2 H_2(t, T; \kappa)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z_t^T$$

であるので、積分すると

$$r_T = r_t e^{-\kappa(T-t)} + \theta H_2(t,T;\kappa) + \frac{\sigma^2}{\kappa}\left(H_2(t,T;\kappa) - H_2(t,T;2\kappa)\right) + \sigma \int_t^T e^{-\kappa(T-u)} \mathrm{d}z_u$$

となる。T_i 先渡測度でのキャプレットの価格式は

$$D_t(T_i)\,(1+\delta_i K)\,\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_{T_i}}\left[\left(\frac{1}{G(T_i,T_{i+1})(1+\delta_i K)} - D_{T_i}(T_{i+1};r_{T_i})\right)_+\right]$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} D_{T_i}(T_{i+1};r_{T_i}) &= H_1(T_i,T_{i+1})e^{-r_{T_i}H_2(T_i,T_{i+1};\kappa)} \\ r_{T_i} &= m(t,T_i) + \sigma(t,T_i)\varepsilon,\ \varepsilon \sim N(0,1) \\ m(t,T_i) &= r_t e^{-\kappa(T_i-t)} + \theta H_2(t,T_i;\kappa) + \frac{\sigma^2}{\kappa}\left(H_2(t,T_u;\kappa) - H_2(t,T_i;2\kappa)\right) \\ \sigma(t,T_i) &= \sigma\sqrt{H_2(t,T_i;\kappa)} \end{aligned}$$

である。これよりキャプレットの価格式は

$$\mathrm{Cpl}_t(T_i,K) = \frac{D_t(T_i)}{G(T_i,T_{i+1})}\Phi(-\varepsilon^*) - D_t^*(T_{i+1})\Phi(-\varepsilon^* - H_2(T_i,T_{i+1};\kappa)\sigma(t,T_i))$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} D_t^*(T_{i+1}) &= D_t(T_i)D_{T_i}(T_{i+1};m(t,T_i))(1+\delta_i K)e^{\frac{1}{2}H_2(T_i,T_{i+1};\kappa)^2\sigma(t,T_i)^2} \\ \varepsilon^* &= \frac{\log\left(H_1(T_i,T_{i+1})G(T_i,T_{i+1})(1+\delta_i K)\right)}{H_2(T_i,T_{i+1};\kappa)\sigma(t,T_i)} - \frac{m(t,T_i)}{\sigma(t,T_i)} \end{aligned}$$

である。

6.

満期が T_n のスワップレートを $S_t^L(T_n)$ とする。(6.4.4) より

$$S_t^L(T_1) = \frac{H_0 D_t(T_0) - D_t(T_1)}{\delta_0 D_t(T_1)}$$

となるので、

$$H_0 = \frac{D_t(T_1) + \delta_0 D_t(T_1) S_t^L(T_1)}{D_t(T_0)}$$

である。また、$n > 1$ において (6.4.4) より

$$H_{n-1} = \frac{D_t(T_n) - \sum_{i=0}^{n-2}\left(H_i D_t(T_i) - D_t(T_{i+1})\right) + S_t^L(T_n)\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i D_t(T_{i+1})}{D_t(T_{n-1})}$$

となる。これより $H_0, H_1, \cdots$ が推定できることがわかる。

7.

(6.4.3) を用いると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i (L^i_\tau - K) D_\tau(T_{i+1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\delta_i L^i_\tau - \delta_i K\right) D_\tau(T_{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left[H_i D_\tau(T_i) - D_\tau(T_{i+1}) - \delta_i K D_\tau(T_{i+1})\right] \\
&= H_0 D_\tau(T_0) - (1 + \delta_0 K - H_1) D_\tau(T_1) - \cdots \\
&-(1 + \delta_{n-2} K - H_{n-1}) D_\tau(T_{n-1}) - (1 + \delta_{n-1} K) D_\tau(T_n)
\end{aligned}
$$

となる。$\tau = T_0, c_i = 1 + \delta_{i-1} K - H_i,\ *i = 1, \cdots, n-1, c_n = 1 + \delta_{n-1} K$ とすると

$$
\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i (L^i_\tau - K) D_\tau(T_{i+1}) = H_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i D_\tau(T_i)
$$

となることがわかる。

8.

5 章末問題 7. の解答を参照のこと。

第 7 章

通貨スワップ

1.

ドルサイドの価値はゼロであるので (7.5) より

$$-X_0 + \tilde{D}_0^d(T)X_0 + \delta X_0 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{D}_0^d(T_{i+1})L_0^i + \delta\alpha(0,T)X_0 \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{D}_0^d(T_{i+1}) = 0$$

となる。これより $n=1$ のとき

$$\tilde{D}_0^d(T_1) = \frac{1}{1+\delta\left(L_0^0 + \alpha(0,T_1)\right)}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\tilde{D}_0^d(T_n) = \frac{1-\delta\sum_{i=0}^{n-2}\tilde{D}_0^d(T_{i+1})\left(L_0^i + \alpha(0,T_n)\right)}{1+\delta\left(L_0^{n-1} + \alpha(0,T_n)\right)}$$

2.

(7.1.8) より

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\tilde{X}_t &= \mathrm{d}X_t \frac{B_t^f}{B_t^d} + X_t \frac{\mathrm{d}B_t^f}{B_t^d} - X_t \frac{B_t^f}{\left(B_t^d\right)^2}\mathrm{d}B_t^d \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} + \frac{\mathrm{d}B_t^f}{B_t^d} - \frac{\mathrm{d}B_t^d}{B_t^d}\right) X_t \frac{B_t^f}{B_t^d} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} + (r_t^f - r_t^d)\mathrm{d}t\right)\tilde{X}_t
\end{aligned}$$

となる。これより

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = (r_t^d - r_t^f)\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{d}\tilde{X}_t}{\tilde{X}_t} = (r_t^d - r_t^f)\mathrm{d}t + \sigma_t^X \mathrm{d}z_t^X$$

である。

3.

(7.1.10) より

$$X_{T_0} = X_t e^{\int_t^{T_0} r_s^d \mathrm{d}s - \int_t^{T_0} r_s^f \mathrm{d}s - \frac{1}{2}(\sigma^X)^2 (T_0 - t) + \sigma^X \left(z_{T_0}^X - z_t^X\right)}$$

である。国内リスク中立過程 $\mathbb{Q}^d$ での国内／海外金利過程を

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r_t^d &= (\theta^d - \kappa^d r_t^d)\mathrm{d}t + \sigma^d \mathrm{d}z_t^d \\ \mathrm{d}r_t^f &= (\theta^f - \kappa^f r_t^f - \rho_{X,f}\sigma^f \sigma^X)\mathrm{d}t + \sigma^f \mathrm{d}z_t^f \end{aligned}$$

とする。$\int_t^{T_0} r_s^d \mathrm{d}s, \int_t^{T_0} r_s^f \mathrm{d}s$ は正規分布となるので

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^d}\left[X_{T_0}\right] = X_t e^{\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^d}\left[\int_t^{T_0} r_s^d \mathrm{d}s - \int_t^{T_0} r_s^f \mathrm{d}s\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}^{\mathbb{Q}^d}\left[\int_t^{T_0} r_s^d \mathrm{d}s - \int_t^{T_0} r_s^f \mathrm{d}s\right]}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^d}\left[X_{T_0}\right] = X_t e^{Y(t,T_0)} \\ &\quad Y(t,T_0) = H^d(t,T_0)\left(r_t^d - \theta^d\right) + \theta^d (T_0 - t) - H^f(t,T_0)\left(r_t^f - (\theta^f - \rho_{X,f}\sigma^f\sigma^X)\right) \\ &\qquad\qquad -(\theta^f - \rho_{X,f}\sigma^f\sigma^X)(T_0 - t) + \Theta^d(t,T_0) + \Theta^f(t,T_0) + \Xi^d(t,T_0) + \Xi^f(t,T_0) \\ &\qquad\qquad -\rho_{d,f}\frac{\sigma^d}{\kappa^d}\frac{\sigma^f}{\kappa^f}\left((T_0 - t) - H^d(t,T_0) - H^f(t,T_0) + H^{d+f}(t,T_0)\right) \end{aligned}$$

となる。ただし、$i = d, f$ として

$$\begin{aligned} \Theta^i(t,T) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^i}{\sigma^i}\right)^2 \left((T - t) - 2H^i(t,T) + H^{2i}(t,T)\right) \\ \Xi^i(t,T) &= \rho_{X,i}\sigma^X \frac{\sigma^i}{\kappa^i}\left((T - t) - H^i(t,T)\right) \\ H^i(t,T) &= \frac{1 - e^{-\kappa^i (T-t)}}{\kappa^i} \\ H^{2i}(t,T) &= \frac{1 - e^{-2\kappa^i (T-t)}}{2\kappa^i} \\ H^{d+f}(t,T) &= \frac{1 - e^{-(\kappa^d + \kappa^f)(T-t)}}{\kappa^d + \kappa^f} \end{aligned}$$

である。

4.

$$\mathrm{d}(X_t S_t^f) = S_t^f \mathrm{d}X_t + X_t \mathrm{d}S_t^f + \mathrm{d}X_t \mathrm{d}S_t^f = \left(\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} + \frac{\mathrm{d}S_t^f}{S_t^f} + \frac{\mathrm{d}X_t}{X_t}\frac{\mathrm{d}S_t^f}{S_t^f} \right) X_t S_t^f$$

であるので、

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\left(X_t S_t^f\right)}{X_t S_t^f} &= \frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} + \frac{\mathrm{d}S_t^f}{S_t^f} + \frac{\mathrm{d}X_t}{X_t}\frac{\mathrm{d}S_t^f}{S_t^f} \\
&= (r_t^d - r_t^f)\mathrm{d}t + \sigma_t^X \mathrm{d}z_t^X + \mu_t^{S^f}\mathrm{d}t + \sigma_t^{S^f}\mathrm{d}\tilde{z}_t^{S^f} + \rho_t^{X,S^f}\sigma_t^X \sigma_t^{S^f}\mathrm{d}t \\
&= \left[(r_t^d - r_t^f) + \mu_t^{S^f} + \rho_t^{X,S^f}\sigma_t^X \sigma_t^{S^f}\right]\mathrm{d}t + \sigma_t^X \mathrm{d}z_t^X + \sigma_t^{S^f}\mathrm{d}\tilde{z}_t^{S^f}
\end{aligned}$$

となる。

5.

海外資産の海外先渡測度、国内先渡測度での現在価値計算は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T^f}\left[S_T^f\right] &= \frac{S_t^f}{D_t^f(T)} \\
\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T^d}\left[X_T S_T^f\right] &= \frac{X_t S_t^f}{D_t^d(T)}
\end{aligned}$$

ここでフォワード為替レートを $X_t(T) = \frac{D_t^f(T) X_t}{D_t^d(T)}$ とすると $X_T(T) = X_T$ であるので

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T^f}\left[S_T^f\right] = \frac{1}{X_t(T)}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T^d}\left[X_T(T) S_T^f\right]$$

となる。これより $X_t(T)$ は測度 $\mathbb{Q}_T^d$ を測度 $\mathbb{Q}_T^f$ に変換するラドン・ニコディム微分過程であるので、$X_t(T)$ は測度 $\mathbb{Q}_T^d$ の下での指数マルチンゲールである。よって、

$$\frac{\mathrm{d}X_t(T)}{X_t(T)} = \sigma_t^X \mathrm{d}z_t^X$$

と表すことができる。海外先渡測度 $\mathbb{Q}_T^f$ のもとで

$$\frac{\mathrm{d}S_t^{T,f}}{S_t^{T,f}} = \sigma_t^f \mathrm{d}\tilde{z}_t^{T,f}$$

となる。国内先渡測度 $\mathbb{Q}_T^d$ のもとで

$$\frac{\mathrm{d}S_t^{T,f}}{S_t^{T,f}} = \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t^f \mathrm{d}z_t^{T,f}$$

とする。$X_t(T)S_t^{T,f}$ は国内先渡測度 $\mathbb{Q}_T^d$ のもとでマルチンゲールであるので

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(X_t(T)S_t^{T,f}) &= \mathrm{d}X_t(T)S_t^{T,f} + X_t(T)\mathrm{d}S_t^{T,f} + \mathrm{d}X_t(T)\mathrm{d}S_t^{T,f} \\
&= X_t(T)S_t^{T,f}\left(\sigma_t^X \mathrm{d}z_t^x + \mu_t \mathrm{d}t + \sigma_t^f \mathrm{d}z_t^{T,f} + \rho^{X,S^f}\sigma_t^X\sigma_t^f \mathrm{d}t\right) \\
&= X_t(T)S_t^{T,f}\left(\left(\mu_t + \rho^{X,S^f}\sigma_t^X\sigma_t^f\right)\mathrm{d}t + \sigma_t^X \mathrm{d}z_t^X + \sigma_t^f \mathrm{d}z_t^{T,f}\right)
\end{aligned}$$

となることから、$\mu_t = -\rho^{X,S^f}\sigma_t^X\sigma_t^f$ であることがわかる。よって、

$$\frac{\mathrm{d}S_t^{T,f}}{S_t^{T,f}} = -\rho^{X,S^f}\sigma_t^X\sigma_t^f \mathrm{d}t + \sigma_t^f \mathrm{d}z_t^{T,f}$$

6.

$$\begin{aligned}
B_t^{F,d} &= e^{\int_0^t r_u^{F,d}\mathrm{d}u} \\
L_{T_0}^d(T_{i+1}) &= \mathbb{E}_{T_0}^{\mathbb{Q}^d}\left[e^{-\int_{T_0}^{T_{i+1}} r_u^{F,d}\mathrm{d}u}\right]
\end{aligned}$$

であるので、条件付期待値の塔の性質より

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^d}\left[X_0\frac{B_t^{F,d}}{B_{T_0}^{F,d}}L_{T_0}^d(T_{i+1})\right] &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^d}\left[X_0\frac{e^{\int_0^t r_u^{F,d}\mathrm{d}u}}{e^{\int_0^{T_0} r_u^{F,d}\mathrm{d}u}}\mathbb{E}_{T_0}^{\mathbb{Q}^d}\left[e^{-\int_{T_0}^{T_{i+1}} r_u^{F,d}\mathrm{d}u}\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^d}\left[X_0 e^{-\int_t^{T_{i+1}} r_u^{F,d}\mathrm{d}u}\right] = L_t^d(T_{i+1})\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_L^{d,T_{i+1}}}[X_0]
\end{aligned}$$

となる。最後の等式は円リスク中立確率測度から円フォワード Libor 測度へ測度変換を行っている。

7.

最初の期間では

$$X_{T_0}P_{T_0}\left[-1 + L_t^{f,mod}(T_i)(1+\delta_0 L_{T_0}^{i,f})\right] = \alpha(T_1)\delta_0 L_{T_0}^d(T_1)$$

となるので、

$$L_t^{f,mod}(T_1) = \frac{1+\alpha(T_1)\delta_0 L_{T_0}(T_1)}{1+\delta_0 L_{T_0}^{i,f}}$$

となる。

$n \geq 2$ では

$$L^{f,mod}_{T_0}(T_n) = \frac{L^{f,mod}_{T_0}(T_{n-1})}{1+\delta_{n-1}L^{n-1,f}_{T_{n-1}}}\left(1+\alpha(T_n)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\delta_i L^d_{T_0}(T_{i+1})}{L^d_{T_0}(T_{n-1})}\right.$$
$$\left.-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{L^d_{T_0}(T_i)}{L^d_{T_0}(T_{n-1})}\left[-1+\frac{L^{f,mod}_{T_0}(T_{i+1})}{L^{f,mod}_{T_0}(T_i)}(1+\delta_i L^{i,f}_{T_i})\right]\right)$$

となる。

8.

$$\begin{aligned}
V^d_t &= \sum_{i=0}^{n-1} B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[\frac{V^d_i}{B_{T_i}}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} B_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[\frac{-1+D^d_{T_i}(T_{i+1})+\delta_i\alpha D^d_{T_i}(T_{i+1})+\delta_i D^d_{T_i}(T_{i+1})L^{i,d}_{T_i}}{B_{T_i}}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[-\frac{B_t}{B_{T_i}}\right]+(1+\delta_i\alpha)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[\frac{B_t}{B_{T_i}}D^d_{T_i}(T_{i+1})\right]+\delta_i\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[\frac{B_t}{B_{T_i}}D^d_{T_i}(T_{i+1})L^{i,d}_{T_i}\right]\right\}
\end{aligned}$$

ところで、

$$\begin{aligned}
&D^d_t(T_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[\frac{B_t}{B_{T_i}}\right] \\
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[\frac{B_t}{B_{T_i}}D^d_{T_i}(T_{i+1})\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[\frac{B_t}{B_{T_{i+1}}}\right] = D_t(T_{i+1}) \\
&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[\frac{B_t}{B_{T_i}}D^d_{T_i}(T_{i+1})L^{i,d}_{T_i}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d}_t\left[\frac{B_t}{B_{T_{i+1}}}L^{i,d}_{T_i}\right] = D_t(T_{i+1})\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^d_{T_{i+1}}}_t\left[L^{i,d}_{T_i}\right] = D_t(T_{i+1})FRA^d_t(T_i,T_{i+1})
\end{aligned}$$

である。ただし、$\mathbb{Q}^d_{T_{i+1}}$ は国内フォワード測度を表している。これより

$$V^d_t = -D^d_t(T_0)+D^d_t(T_n)+\alpha A^d(t,T_n)+\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i D_t(T_{i+1})FRA^d_t(T_i,T_{i+1})$$

となることがわかる。

[9]

$\mathbb{Q}^f$ の下でのハル・ホワイトモデルの割引債価格は

$$
\begin{aligned}
D_t^f(T) &= H_1(t,T)e^{-H_2(t,T)r_t^f} \\
H_1(t,T) &= e^{\frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)H_2^2(u,T)\mathrm{d}u - \int_t^T \phi(u)H_2(u,T)\mathrm{d}u} \\
H_2(t,T) &= \frac{1-e^{-\alpha(T-t)}}{\alpha}
\end{aligned}
$$

であるので、これより割引債価格が従う確率微分方程式は

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\log D_t^f(T) &= \mathrm{d}\log H_1(t,T) - \mathrm{d}\Big(H_2(t,T)r_t^f\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\sigma^2(t)H_2^2(t,T)\mathrm{d}t + \phi(t)H_2(t,T)\mathrm{d}t - r_t^f e^{-\alpha(T-t)}\mathrm{d}t \\
&\quad -H_2(t,T)\left(\phi(t)-\alpha r_t^f\right)\mathrm{d}t - H_2(t,T)\sigma(t)\mathrm{d}z_t^f \\
&= r_t^f\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\sigma^2(t)H_2^2(t,T)\mathrm{d}t + \sigma(t)H_2(t,T)\mathrm{d}z_t^f
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\frac{\mathrm{d}D_t^f(T)}{D_t^f(T)} = r_t^f\mathrm{d}t + \sigma(t)H_2(t,T)\mathrm{d}z_t^f
$$

である。これに (7.1.14) を用いて $\mathbb{Q}^d$ での割引債価格の確率微分方程式は

$$
\frac{\mathrm{d}D_t^f(T)}{D_t^f(T)} = \Big(r_t^f - \rho_t^{X,f}\sigma_t^X\sigma(t)H_2(t,T)\Big)\mathrm{d}t + \sigma(t)H_2(t,T)\mathrm{d}\tilde{z}_t^f
$$

となる。

一方、$\mathbb{Q}^d$ での海外金利過程を

$$
\mathrm{d}r_t^f = \Big(\phi(t) - \alpha r_t^f + \lambda(t)\Big)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}\tilde{z}_t^f
$$

とおく。このとき割引債価格は

$$
\begin{aligned}
D_t^f(T) &= \tilde{H}_1(t,T)e^{-H_2(t,T)r_t^f} \\
\tilde{H}_1(t,T) &= e^{\frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2(u)H_2^2(u,T)\mathrm{d}u - \int_t^T \phi(u)H_2(u,T)\mathrm{d}u - \int_t^T \lambda(u)H_2(u,T)\mathrm{d}u}
\end{aligned}
$$

である。これより

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\log D_t^f(T) &= \mathrm{d}\log \tilde{H}_1(t,T) - \mathrm{d}\Big(H_2(t,T)r_t^f\Big) \\
&= r_t^f\mathrm{d}t + \lambda(t)H_2(t,T)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\sigma^2(t)H_2^2(t,T)\mathrm{d}t + \sigma(t)H_2(t,T)\mathrm{d}\tilde{z}_t^f
\end{aligned}
$$

となるので

$$\frac{\mathrm{d}D_t^f(T)}{D_t^f(T)} = \left(r_t^f + \lambda(t)H_2(t,T)\right)\mathrm{d}t + \sigma(t)H_2(t,T)\mathrm{d}\tilde{z}_t^f$$

である。先に求めた割引債価格の確率微分方程式と比較して

$$\lambda(t) = -\rho_t^{X,f}\sigma_t^X\sigma(t)$$

であることがわかる。ゆえに

$$\mathrm{d}r_t^f = \left(\phi(t) - \alpha r_t - \rho_t^{X,f}\sigma_t^X\sigma(t)\right)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}\tilde{z}_t^f$$

となる。

第 8 章

XVA の評価

1.

金利モデルはハル・ホワイトモデルなので

$$\mathrm{d}r_t = (\phi(t) - \alpha r_t)\,\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}z_t$$
$$L_\tau(T_i) = H_1(\tau, T_i) e^{-H_2(\tau, T_i)\tau_i}$$

となる。$R_B, \lambda(t)$ は確定的であるので

$$U_t = (1 - R_b) \int_t^\tau \lambda(u) e^{-\int_t^u \lambda(s)\mathrm{d}s} \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^u r_s \mathrm{d}s} \left(V_N\right)_+ \right] \mathrm{d}u$$

となる。期待値計算をフォワード測度 $\mathbb{Q}_u$ で行う、つまり

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^u r_s \mathrm{d}s} \left(V_u^N\right)_+ \right] = D_t(u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_u} \left[\left(V_u^N\right)_+ \right]$$

とする。フォワード測度 $\mathbb{Q}_u$ での金利は

$$r_u = r_t e^{-\alpha(u-t)} + \int_t^u \phi(s) e^{-\alpha(u-s)} \mathrm{d}s + \sigma^2 \int_t^u H_2(s, u) \mathrm{d}s + \sigma \int_t^u e^{-\alpha(u-s)} \mathrm{d}z_s$$

である。固定受けの場合には

$$V_u^N = \sum_{i=k+1}^n c_i L_u(T_i; r_u) - 1$$
$$c_i = \begin{cases} S & i < n \\ S + 1 & i = n \end{cases}$$

であるので

$$\left(V_u^N\right)_+ = \left(\sum_{i=k+1}^n c_i L_u(T_i; r_u) - 1 \right)_+$$

となる。これは利付債コールオプションのペイオフである。$\sum_{i=k+1}^{n} c_i L_u(T_i; r_u^*) = 1$ として Jamshidian トリックを用いると

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=k+1}^{n} c_i L_u(T_i; r_u) - 1\right)_+ &= \left(\sum_{i=k+1}^{n} c_i L_u(T_i; r_u) - \sum_{i=k+1}^{n} c_i L_u(T_i; r_u^*)\right)_+ \\ &= \sum_{i=k+1}^{n} c_i \left(L_u(T_i; r_u) - L_u(T_i; r_u^*)\right) 1_{r_u \le r_u^*}\end{aligned}$$

であり、

$$D(t,u)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_u}\left[\left(V_u^N\right)_+\right] = \sum_{i=k(u)+1}^{n} c_i D(t,u)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_u}\left[\left(L_u(T_i; r_u) - L_u(T_i; r_u^*)\right)\mathbf{1}_{r_u \le r_u^*}\right]$$

となる。k は時刻 u に依存するので

$$\begin{aligned}U_t &= (1-R_B)\int_t^T \lambda(u) e^{-\int_t^u \lambda(s)\mathrm{d}s}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^u r_s \mathrm{d}s}\left(V_u^N\right)_+\right]\mathrm{d}u \\ &= (1-R_B)\int_t^T \lambda(u) e^{-\int_t^u \lambda(s)\mathrm{d}s}\sum_{i=k(u)+1}^{n} c_i D_t(u)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_u}\left[\left(L_u(T_i; r_u) - L_u(T_i; r_u^*)\mathbf{1}_{r_u \le r_u^*}\right)\right]\mathrm{d}u\end{aligned}$$

となり、割引債のコールオプションのポートフォリオで表される。

固定払いの場合には、同様の計算により利付債のプットオプションとなる。Jamshidian トリックにより

$$\begin{aligned}U_t &= (1-R_B)\int_t^T \lambda(u) e^{-\int_t^u \lambda(s)\mathrm{d}s}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^u r_s \mathrm{d}s}\left(-V_u^N\right)\right]\mathrm{d}u \\ &= (1-R_B)\int_t^T \lambda(u) e^{-\int_t^u \lambda(s)\mathrm{d}s}\sum_{i=k(u)+1}^{n} c_i D_t(u)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_u}\left[\left(L_u(T_i; r_u^*) - L_u(T_i; r_u)\right)\mathbf{1}_{r_u \ge r_u^*}\right]\mathrm{d}u\end{aligned}$$

となり、割引債のプットオプションのポートフォリオで表される。

2.

$$\begin{aligned}V_t^A = B_t^F \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\Bigg[&\int_t^{\hat{\tau}} \frac{\mathrm{d}G_u}{B_u^F} + \mathbf{1}_{\hat{\tau}<T}\frac{V_{\hat{\tau}}^N}{B_{\hat{\tau}}} - \mathbf{1}_{\tau_B=\tau<T}\frac{V_{\tau_B}^N}{B_{\tau_B}} - \mathbf{1}_{\tau_A=\tau<T}\frac{V_{\tau_A}}{B_{\tau_A}} \\ &+\mathbf{1}_{\tau_B=\tau<T}\frac{R_B\left(V_{\tau_B}^N\right)_+ - \left(-V_{\tau_B}^N\right)_+}{B_{\tau_B}^F} + \mathbf{1}_{\tau_A=\tau<T}\frac{\left(V_{\tau_A}^N\right)_+ - R_A\left(-V_{\tau_A}^N\right)_+}{B_{\tau_A}^F}\Bigg]\end{aligned}$$

$V = (V)_+ - (-V)_+$ であるので

$$V_t^A = B_t^F \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^{\hat{\tau}} \frac{\mathrm{d}G_u}{B_u^F} + \mathbf{1}_{\hat{\tau}<T}\frac{V_{\hat{\tau}}^N}{B_{\hat{\tau}}}\right] - (1-R_B)B_t^F\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\tau_B=\tau<T}\frac{\left(V_{\tau_B}^N\right)_+}{B_{\tau_B}}\right]$$
$$+(1-R_A)B_t^F\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\tau_A=\tau<T}\frac{\left(-V_{\tau_A}^N\right)_+}{B_{\tau_A}}\right]$$

$V_t^N = B_t^F\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^{\hat{\tau}} \frac{\mathrm{d}G_u}{B_u^F} + \mathbf{1}_{\hat{\tau}<T}\frac{V_{\hat{\tau}}^N}{B_{\hat{\tau}}}\right]$ であるので

$$V_t^A = V_t^N - CV_t + DV_t$$
$$CV_t = (1-R_B)B_t^F\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\tau_B=\tau<T}\frac{\left(V_{\tau_B}^N\right)_+}{B_{\tau_B}}\right]$$
$$DV_t = (1-R_A)B_t^F\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{1}_{\tau_A=\tau<T}\frac{\left(-V_{\tau_A}^N\right)}{B_{\tau_A}}\right]$$

となることがわかる。

3.

DVA は

$$DV_t = (1-R_A)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T \lambda_A(s)e^{-\int_t^u\left(r_s^F+\lambda_A(s)+\lambda_B(s)\right)\mathrm{d}s}\left(-V_u^N\right)_+\mathrm{d}u\right]$$

である。デフォルト強度 $\lambda_A(t), \lambda_B(t)$ は確定的とし、$(-V_u^N)_+$ は利付債 (満期が T) のプットオプションのペイオフであるので

$$\bar{\Lambda}(t,u) = \lambda_A(u)e^{-\int_t^u(\lambda_A(s)+\lambda_B(s))\mathrm{d}s}$$
$$\tilde{P}_u(T,1) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^u r_s^F\mathrm{d}s}\left(-V_u^N\right)_+\right]$$

とおくと

$$DV_t = (1-R_A)\int_t^T \bar{\Lambda}(t,u)\tilde{P}_u(T,1)\mathrm{d}u$$

となる。

4.

極度額は受入／差入で同じ金額として $M_1 \geq 0$ とする。$V_t \geq M_1$ のときは受入担保は $V_t - M_1$ であり、$V_t \leq -M_1$ であれば差入担保は $V_t + M_1$ である。よって、

$$X_t = (V_t - M_1)\mathbf{1}_{V_t\geq M_1} + (V_t + M_1)\mathbf{1}_{V_t\leq -M_1}$$

5.

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_t^A &= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\hat{\tau}} \frac{\mathrm{d}G_u}{B_u} + \mathbf{1}_{\tau<T} \frac{\theta_\tau}{B_\tau} - \int_t^{\hat{\tau}} \frac{\left(r_u^R - r_u^C\right) X_u}{B_u} \mathrm{d}u \right] \\
&= B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\hat{\tau}} \frac{\mathrm{d}G_u}{B_u} + \mathbf{1}_{\tau<T} \frac{V_\tau^N}{B_\tau} \right. \\
&\quad + \mathbf{1}_{\tau<T} \frac{1}{B_\tau} \left(Q_\tau - V_\tau - \mathbf{1}_{\tau_B<\tau} (1-R_B) \left(Q_\tau - X_\tau\right)_+ \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{1}_{\tau_A<\tau} (1-R_A) \left(- \left(Q_\tau - X_\tau\right)_+ \right) \right) - \int_t^{\hat{\tau}} \frac{(r_u^R - r_u^C) X_u}{B_u} \mathrm{d}u \right] \\
&= V_t^N + \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\tau<T} D_t(\tau) \left(Q_\tau - V_\tau^N \right) \right] - \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\hat{\tau}} D_t(u) (r_u^B - r_u^C) X_u \mathrm{d}u \right] \\
&\quad - (1-R_B) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\tau_B=\tau<T} D_t(\tau) \left(Q_\tau - X_\tau\right)_+ \right] \\
&\quad + (1-R_A) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\tau_A=\tau<T} D_t(\tau) \left(- \left(Q_\tau - X_\tau\right) \right)_+ \right]
\end{aligned}
$$

6.

$F_t = (F_t)_+ - (-F_u)_+$ を用いると

$$
\begin{aligned}
FV_t &= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\hat{\tau}} D_t(u) (r_u^F - r_u^C) F_u \mathrm{d}u - \mathbf{1}_{\tau_A=\tau<T} (1-R_A) D_t(\tau) F_\tau \right] \\
&= \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\hat{\tau}} D_t(u) (r_u^F - r_u^C) (F_u)_+ \mathrm{d}u \right] - \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\int_t^{\hat{\tau}} D_t(u) (r_u^F - r_u^C) (-F_u)_+ \mathrm{d}u \right] \\
&\quad + (1-R_A) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\tau_A=\tau<T} D_t(\tau) (-F_\tau)_+ \right] - (1-R_A) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\mathbf{1}_{\tau_A=\tau<T} D_t(\tau) (F_\tau)_+ \right]
\end{aligned}
$$

となる。

7.

当初証拠金がない場合 ($I_t^A = I_t^B = 0$) には

$$\begin{aligned} CV_t &= (1 - R_B) \int_t^T \lambda_B(u) \tilde{D}(t,u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[(V_u^N - X_u)_+ \right] \\ DV_t &= (1 - R_A) \int_t^T \lambda_A(u) \tilde{D}(t,u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\left(-(V_u^N - X_u) \right)_+ \right] \\ MV_t &= 0 \end{aligned}$$

となる。KV_t は不変である。よって、

$$\begin{aligned} \hat{V}_t &= V_t^N - CV_t + DV_t + FV_t - KV_t \\ &= V_t^N - (1 - R_B) \int_t^T \lambda_B(u) \tilde{D}(t,u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[(V_u^N - X_u)_+ \right] \mathrm{d}u \\ &\quad + \int_t^T (r_u^F - r(u)) \tilde{D}(t,u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\left(-(V_u^N - X_u) \right)_+ \right] \mathrm{d}u \\ &\quad - \int_t^T (r_u^F - r(u)) \tilde{D}(t,u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[(V_u^N - X_u)_+ \right] \mathrm{d}u \\ &\quad + (1 - R_A) \int_t^T \lambda_A(u) \tilde{D}(t,u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[(V_u^N - X_u)_+ \right] \mathrm{d}u - KV_t \\ &= V_t^N + FB_t - FC_t - KV_t - \int_t^T \Lambda(u) \tilde{D}(t,u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[(V_u^N - X_u)_+ \right] \mathrm{d}u \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= (1 - R_B)\lambda_B(t) - (1 - R_A)\lambda_A(t) \\ FB_t &= \int_t^T (r_u^F - r(u)) \tilde{D}(t,u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[\left(-(V_u^N - X_u) \right)_+ \right] \mathrm{d}u \\ FC_t &= \int_t^T (r_u^F - r(u)) \tilde{D}(t,u) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}} \left[(V_u^N - X_u)_+ \right] \mathrm{d}u \end{aligned}$$

である。

第 9 章

マイナス金利モデル

1.

シフト割引債価格とシフト関数は

$$D_t(T) = e^{\Theta(T)-\Theta(t)}\tilde{D}_t(T)$$
$$\theta_t = \frac{\partial}{\partial t}\log D_0(t) - \frac{\partial}{\partial t}\log \tilde{D}_0(t)$$

である。ただし、$\tilde{D}_0(t)$ はモデル割引債価格である。
CIR モデルでの割引債価格は

$$\tilde{D}_t(T) = H_1(t,T)e^{-H_2(t,T)r_t}$$
$$H_1(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{\frac{(\kappa+\gamma)(T-t)}{2}}}{(\kappa+\gamma)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right]^{\frac{2\kappa\bar{r}}{\sigma^2}}$$
$$H_2(t,T) = \frac{2\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\kappa+\gamma)\left(e^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}$$
$$\gamma = \sqrt{\kappa^2+2\sigma^2}$$

であるので、シフト関数の式に代入して整理すると

$$\begin{aligned}\theta_t &= \frac{\partial}{\partial t}\log D_0(T) - \frac{\partial}{\partial t}\log \tilde{D}_0(t)\\ &= \frac{\partial}{\partial t}\log D_0(T) - \frac{\left(\kappa^2-\gamma^2\right)\left(e^{\gamma t}-1\right)\frac{\kappa}{\sigma^2}\bar{r}}{(\kappa+\gamma)\left(e^{\gamma t}-1\right)+2\gamma} + \frac{4\gamma^2 e^{\gamma t}}{\left((\kappa+\gamma)\left(e^{\gamma t}-1\right)+2\gamma\right)^2}\end{aligned}$$

2.

市場データは各自で入手し θ に非負制約を課して割引債価格とキャプレット価格へのキャリブレーション (非線形最小二乗法による数値的な評価) を行う。

3.

フロアレット価格は $L_i = \frac{1-D_{T_i}(T_{i+1})}{\delta_i D_{T_i}(T_{i+1})}$ を用いると

$$\delta_i B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(K-L_i)_+}{B_{T_{i+1}}}\right] = (1+\delta_i K) B_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{B_{T_i}}\left(D_{T_i}(T_{i+1}) - \frac{1}{1+\delta_i K}\right)_+\right]$$

となる。また

$$\begin{aligned} D_t(T) &= e^{\Theta(T)-\Theta(t)}\tilde{D}_t(T) \\ B_t &= e^{-\Theta(t)}\tilde{B}_t \end{aligned}$$

であるので、代入すると

$$\begin{aligned} &= (1+\delta_i K)e^{-\Theta(t)}\tilde{B}_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{e^{\Theta(T_i)}}{\tilde{B}_{T_i}}\left(e^{\Theta(T_{i+1})-\Theta(T_i)}\tilde(D)_{T_i}(T_{i+1}) - \frac{1}{1+\delta_i K}\right)_+\right] \\ &= (1+\delta_i K)e^{\Theta(T_{i+1})-\Theta(t)}\tilde{B}_t \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{\tilde{B}_{T_i}}\left(\tilde{D}_{T_i}(T_{i+1}) - \frac{e^{-(\Theta(T_{i+1})-\Theta(T_i))}}{1+\delta_i K}\right)_+\right] \\ &= (1+\delta_i K)e^{\Theta(T_{i+1})-\Theta(t)}\tilde{Call}(T_i, T_{i+1}, \tilde{K}) \end{aligned}$$

となる。スワップレートは

$$\begin{aligned} Swap_t(T_n) &= \frac{D_t(T_0) - D_t(T_n)}{\sum_{i=0}^{n-1}\delta_i D_t(T_{i+1})} = \frac{e^{\Theta(T_0)-\Theta(t)}\tilde{D}_t(T_0) - e^{\Theta(T_n)-\Theta(t)}\tilde{D}_t(T_n)}{\sum_{i=0}^{n-1} e^{\Theta(T_{i+1})-\Theta(t)}\tilde{D}_t(T_{i+1})} \\ &= \frac{\tilde{D}_t(T_0) - e^{\Theta(T_n)-\Theta(T_0)}\tilde{D}_t(T_n)}{\sum_{i=0}^{n-1} e^{\Theta(T_{i+1})-\Theta(T_0)}\tilde{D}_t(T_{i+1})} \end{aligned}$$

となる。

4.

キャプレット価格は

$$Cpl_i = \delta_i D_0(T_{i+1})\left\{L_i\Phi(d_i) - K\Phi(d_i-\nu_i)\right\}$$

であるので、デルタは

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L_i}Cpl_i &= \delta_i\left\{L_i\Phi(d_i) - K\Phi(d_i-\nu_i)\right\}\frac{\partial}{\partial L_i}D_0(T_{i+1}) \\ &\quad +\delta_i D_0(T_{i+1})\left[\Phi(d_i) + L_i\phi(d_i)\frac{\partial}{\partial L_i}d_i - K\phi(d_i-\nu_i)\frac{\partial}{\partial L_i}d_i\right] \end{aligned}$$

となる。また

$$\frac{\partial}{\partial L_i} D_0(T_{i+1}) = -D_0(T_{i+1}) \frac{\delta_i}{1+\delta_i L_i}$$
$$\frac{\partial}{\partial L_i} d_i = \frac{1}{L_i \sigma_i \sqrt{T_i}}$$

であるので、代入すると

$$\frac{\partial}{\partial L_i} Cpl_i = \delta_i D_0(T_{i+1}) \left[\frac{\Phi(d_i) + \delta_i K \Phi(d_i - \nu_i)}{1+\delta_i L_i} + \frac{L_i \phi(d_i) - K\phi(d_i - \nu_i)}{L_i \sigma_i \sqrt{T_i}} \right]$$

となる。

5.

θ_i に対する感応度は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta_i} Cpl_i &= \delta_i D_0(T_{i+1}) \left\{ L_i \phi(d_i) - K\phi(d_i - \nu_i) \right\} \frac{\partial}{\partial \theta_i} d_i \\ &= -\frac{\delta_i D_0(T_{i+1})}{(K+\theta_i)\sigma_i \sqrt{T_i}} \left\{ L_i \phi(d_i) - K\phi(d_i - \nu_i) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_i} d_i &= -\frac{1}{(K+\theta_i)\sigma_i \sqrt{T_i}} \end{aligned}$$

である。また、デルタの θ_i に対する感応度は

$$\frac{\partial^2}{\partial L_i \partial \theta_i} Cpl_i = -\frac{\delta_i D_0(T_{i+1})}{(K+\theta_i)\sigma_i \sqrt{T_i}} \left[\frac{\phi(d_i) + \delta_i K \phi(d_i - \nu_i)}{1+\delta_i L_i} + \frac{L_i \phi'(d_i) - K\phi'(d_i - \nu_i)}{L_i \sigma_i \sqrt{T_i}} \right]$$

である。ただし、

$$\phi'(x) = \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

である。

6.

スワプションの価値はスワップ測度のもとで

$$V_t = A_t(T) \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{S,T}} \left[(S_\tau - K) \right]$$

である。ノーマルモデルでは

$$S_\tau = S_0 + \sigma_n z_\tau^{\mathbb{Q}^{S,T}}$$

であるので

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{S,T}}\left[(S_\tau - K)_+\right] &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_0 + \sigma_n\sqrt{\tau}\varepsilon - K\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}\mathrm{d}\varepsilon \\
&= (S_0 - K)\int_{\varepsilon^*}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}\mathrm{d}\varepsilon + \sigma_n\sqrt{\tau}\int_{\varepsilon^*}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varepsilon e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2}\mathrm{d}\varepsilon \\
&\quad (S_0 - K)\Phi(-\varepsilon^*) + \sigma_n\sqrt{\tau}\phi(\varepsilon^*) \\
\varepsilon^* &= \frac{K - S_0}{\sigma_n\sqrt{\tau}}
\end{aligned}$$

となる。よって、スワプションの価値は

$$V_t = A_t(T)\left[(S_0 - K)\Phi(-\varepsilon^*) + \sigma_n\sqrt{\tau}\phi(\varepsilon^*)\right]$$

である。

7.

ノーマルモデルでのキャプレット価格は

$$\begin{aligned}
Cpl_i &= \delta_i D_0(T_{i+1})\left\{(L_i - K)\Phi(-d) + \sigma_i\sqrt{T_i}\phi(d)\right\} \\
d &= \frac{K - L_i}{\sigma_i\sqrt{T_i}}
\end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial L_i}d &= -\frac{1}{\sigma_i\sqrt{T_i}} \\
\phi'(x) &= \frac{\mathrm{d}\phi(x)}{\mathrm{d}x} = -x\phi(x)
\end{aligned}$$

であるので、デルタは

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial L_i}Cpl_i &= \delta_i D_0(T_{i+1})\left\{\Phi(-d) - (L_i - K)\phi(d)\frac{\partial}{\partial L_i}d + \sigma_i\sqrt{T_i}\phi'(d)\frac{\partial}{\partial L_i}d\right\} \\
&= \delta_i D_0(T_{i+1})\phi(-d)
\end{aligned}$$

となる。