ベクトルの一次変換 ワーク (『技術者のための線形代数学』より)

1

次の写像 φ を考える．※ただし $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$ とする．

$$\varphi\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \varphi(\mathbf{x}) = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

実数ベクトル $\mathbf{x} = (x, y)^{\mathrm{T}}$ を標準基底の線形結合で表すと次のようになる．

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

標準基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の行き先は次のようになる．

$$\varphi(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

したがって $\varphi(\mathbf{x})$ について次の関係が成り立つ．

(1-1)

$$\varphi(\mathbf{x}) = x\varphi(\mathbf{e}_1) + y\varphi(\mathbf{e}_2)$$

記号を下記のように整理すると，

$$\mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x}) \mathbf{e}'_1 = \varphi(\mathbf{e}_1) \mathbf{e}'_2 = \varphi(\mathbf{e}_2)$$

(1-1) は下記のように書き直すことができる．

$$\mathbf{x}' = x\mathbf{e}'_1 + y\mathbf{e}'_2$$

2

基底ベクトル $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ を任意に決めると $\mathbf{R}^2$ の任意の要素 $\mathbf{x}$ をその線形結合で表すことができる.

$$\mathbf{x} = a\mathbf{e}'_1 + b\mathbf{e}'_2$$

$\mathbf{x}$ に一次変換 φ を適用すると次のようになる.

$$\varphi(\mathbf{x}) = a\varphi(\mathbf{e}'_1) + b\varphi(\mathbf{e}'_2)$$

これは次の手順で証明することができる.

(※いったんここまで 2025-11-16)