

月相和二十四节气的计算

廖育栋(Yuk Tung Liu)

初稿:2018年11月8日, 上一次重大修改:2025年12月24日

英文 English 傳統中文

农历月日的编排是根据合朔和中气而定, 但是按传统, 农历也列出望、上下弦和二十四节气的日期。本文详细说明推算月相和二十四节气时刻的方法。有关二十四节气的基本概念可参阅此网页, 编算农历的法则可参阅此网页。

月相和二十四节气的时刻计算颇为复杂, 但是所有需要的资料和数据现在都可免费获得。任何人只要熟悉数值计算方法及计算机¹程序都可以按照本文的方法自行计算月相和二十四节气的准确时刻。

叙述计算方法前, 先要略为讲解一些重要概念。本文假设读者已熟悉此网页介绍的天文学和历法概念。本文第一节简单介绍现时世界上精确历表采用的质心力学时(barycentric dynamical time)TDB及其与地球时(terrestrial time)TT和国际原子时(international atomic time)TAI的关系。不熟悉广义相对论的读者大可不理睬其中公式。第二节介绍几种现代天文学常用的天球座标系统, 第三节列出IAU 2006/2000A岁差和章动模型的计算公式。

要计算准确的月相和节气时刻, 准确的太阳和月球历表不可缺少。我用美国喷射推进实验室(Jet Propulsion Laboratory, JPL)制定的历表。第四节介绍JPL历表, 讲述如何下载历表数据和如何用下载的数据计算太阳和月球位置。JPL历表其中一个目的是用于航天活动, 月球和行星位置和速度用国际天球座标系(ICRS)的直角座标表示, 所以必须把这些数据转换成黄道座标系统才可用来计算月相和节气。第五节讲述如何计算光行时及光行差以求得视位置, 第六节列出由JPL历表来计算视黄经的详细步骤, 第七节讲述如何用牛顿—拉弗森方法(Newton-Raphson method)来计算月相和二十四节气的TDB时刻, 最后一节讲述如何把TDB时刻转化为UTC时刻。

本文只是简略介绍各种概念, 读者如想较深入地了解这些概念, 可参考Urban和Seidelmann的书*Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*([Urban & Seidelmann 2013])。

1 历书时和质心力学时

十七世纪至十九世纪末的天文历表都用以地球自转为基础而定的时间, 当时的设想是地球自转是均匀的, 因此以其制定的时间也是均匀的。后来天文观测精度渐渐提高, 观测数据显示地球自转其实是不均匀的。于是天文学家订立以地球公转为基础而定的时间, 称为「历书时」(ephemeris time), 简称ET, 用来作天文历表的均匀时间标准。高精度的观测数据也显示牛顿力学在计算行星位置上有所不足, 于是天文学家用广义相对论修正牛顿力学方程来计算行星位置。

¹「电子计算机」或「计算机」又称「电脑」, 同样是翻译英文的computer。本文用「电子计算机」或简称「计算机」来译computer, 因为觉得这译法比较贴切和符合computer的实际功能。

根据广义相对论，时间流逝的快慢会随着观测者的运动速度及相对其他物体的位置而变，² 所以要计及广义相对论效应时不能用ET来计算，必须用更精密的均匀时间来编算天文历表。以广义相对论为基础的天体力学用四个座标值 (t, x^i) ($i = 1, 2, 3$)描述太阳系天体的四维时空位置，这个座标系统称为「质心天球参考系」(barycentric celestial reference system)，简称BCRS。其中 t 描述时间，称为「质心座标时」(barycentric coordinate time)，简称TCB。TCB是一个均匀时间系统，与观测者的运动无关，适宜用来计算天体位置。牛顿的万有引力用以下四维度规所取代[即[Urban & Seidelmann 2013]书中公式(2.38)]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{2w^2}{c^4} \right) d(ct)^2 - \frac{4w_i}{c^3} d(ct) dx^i + \delta_{ij} \left[1 + \frac{2w}{c^2} + O(c^{-4}) \right] dx^i dx^j, \quad (1)$$

此处用了爱因斯坦的求和约定：相同的下标和上标(如 $w_i dx^i$)须要求和。式中 c 是光速， w 在弱重力³的极限时退化为 $-\Phi$ ，这里 Φ 是牛顿力学的重力势(gravitational potential)：

$$\Phi(t, \mathbf{x}) = -G \int d^3x' \frac{\rho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2)$$

式中 ρ 是密度(即单位体积内的质量)。 w_i 由泊松方程(Poisson equation)来定义，方程式的源项(source term)与动量密度(momentum density)成正比。

TCB可视为远离太阳系及相对于太阳系质心静止的观测者量度的固有时(proper time)，所以与太阳系天体运行无关。质心天球参考系适宜用来计算天文历表，但是大多数的观测在地球表面进行，所以天文学家也建立了以地球为中心的一套座标系统，称为「地心天球参考系」(geocentric celestial reference system)，简称GCRS。在GCRS里，时空座标以 (T, X^i) ($i = 1, 2, 3$)描述，其中 T 称为「地心座标时」(geocentric coordinate time)，简称TCG。GCRS的座标原点随地球质心移动，其空间座标轴相对于BCRS的空间座标轴维持不旋转。TCG的选取是要使地球附近的时空度规可以写成如(1)的类似公式。由于GCRS随地球运行，而且处于太阳系重力场中，TCG流逝速率比TCB慢，这是广义相对论的重力时间延缓(gravitational time dilation)和狭义相对论的时间延缓(time dilation)效应结合的结果。TCG和TCB的变换见于[Urban & Seidelmann 2013]书中公式(3.25)：

$$\text{TCB} - \text{TCG} = c^{-2} \left[\int_{t_0}^t \left(\frac{v_e^2}{2} - \Phi_{\text{ext}}(\mathbf{x}_e) \right) dt + \mathbf{v}_e \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_e) \right] + O(c^{-4}), \quad (3)$$

式中 \mathbf{x}_e 和 \mathbf{v}_e 分别是地球质心的BCRS位置向量和速度向量， \mathbf{x} 是观测者的BCRS位置向量， Φ_{ext} 是地球以外的太阳系天体的重力势总和。 t_0 是常数，其作用是使1977年1月1日TAI零时时TCB、TCG、和ET三者时刻相等。

由于TCG的定义中没有计及地球的重力，其时间流逝速率比TAI快，这又是广义相对论和狭义相对论时间延缓两效应总和的结果。于是天文学家又定义「地球时」(terrestrial time)，简称TT，其时间流逝速率和TAI一致。地球时以前称为「地球力学时」(terrestrial dynamical time, TDT)，后来改称地球时。TT的流逝速率比TCG慢，其值是在大地水准面(geoid)上 $-\Phi_{\text{eff}}/c^2$ 的值，这里 c 是光速， $\Phi_{\text{eff}} = \Phi_E - v_{\text{rot}}^2/2$ 是地球重力势减去离心势， v_{rot} 是

²全球定位系统(Global Positioning System，简称GPS)也许是展示此相对论效应的最佳例子。GPS定位以比较数个GPS卫星发射射电波的时间及用者接收到射电波的时间为基础，要达到十五米的定位精度，GPS卫星和用家的钟必需维持五十纳秒(1纳秒 = 10^{-9} 秒)的计时精度，此乃光行十五米所需的时间。然而GPS卫星在二万公里上空以时速一万四千公里绕地球转，用相对论算得GPS卫星的时间流速比地面快，积一分钟有26.6纳秒的偏差，积一日有38.3微秒的偏差。如果忽略此效应，GPS定位在两分钟内便失效。详情可参阅Clifford Will的文章“Einstein's Relativity and Everyday Life”(“爱因斯坦的相对论和日常生活”)。

³本文把gravity或gravitation译为「重力」，很多文献和书籍却译作「引力」，我认为这译法不大贴切，故不取。

地球自转速率。大地水准面可视为地球表面的平均海水面， Φ_{eff} 虽然在地球上处处不同，但在大地水准面上的值相同，因为大地水准面就是定义为 Φ_{eff} 的某个等值面。所以 $d\text{TT}/d\text{TCG} = 1 - L_G$ ，而 L_G 根据实测定为 $L_G = 6.969290134 \times 10^{-10}$ 。TT和TCG因此有以下线性关系[取自[Urban & Seidelmann 2013]书中公式(3.27)]:

$$\text{TT} = \text{TCG} - L_G(\text{JD}_{\text{TCG}} - 2443144.5003725) \cdot 86400 \text{秒}, \quad (4)$$

其中 JD_{TCG} 是TCG用儒略日数来表示。式中常数2443144.500375是为了使TT、TCG、和ET三者的时刻在1977年1月1日TAI零时的时刻相等。由于TT和TAI的时间流逝速率相等，TT和TAI只差了一个常数:

$$\text{TT} = \text{TAI} + 32.184 \text{秒} \quad (5)$$

这个常数是为了使TT和ET在1977年1月1日TAI零时的时刻相等。

TCB适宜用来计算天文历表，TT则可用原子钟直接量度。两者的转换可用公式(3)和(4)和太阳系天体位置用数值积分法计算，所以TT不适宜用来计算天文历表。为方便起见，天文学家创立另一个时间来近似TT，这时间称为「质心力学时」(barycentric dynamical time)，简称TDB。TDB是TCB的线性函数，尽可能使之接近TT。问题是TT与TCB的偏差随地球运行而变化，两者的差异并非线性函数所能表示，我们只能使TDB的时间流逝接近TT时间流逝在某段时间的平均值，这样TDB和TT在这段时间内的偏差只呈现周期性变化。这些周期性变化缘于地球公转轨道是椭圆，其运行时快时慢，与太阳的距离也时近时远，两者的变化周期为一年，此外，月球和其他行星的重力场也随着它们与地球的相对位置变化而变。按照国际天文联合会(International Astronomical Union, IAU)2006年通过的B3决议，TDB用以下公式定义:

$$\text{TDB} = \text{TCB} - L_B(\text{JD}_{\text{TCB}} - 2443144.5003725) \cdot 86400 \text{秒} - 6.55 \times 10^{-5} \text{秒}, \quad (6)$$

其中 $L_B = 1.550519768 \times 10^{-8}$ ， JD_{TCB} 是TCB用儒略日数来表示。 L_B 的数值可视为 $1 - d\text{TT}/dt$ 在某段时间的平均值。

TDB继承了ET成为现代天文历表的时间标准。TT与TDB的换算可用以下近似公式[取自[Urban & Seidelmann 2013]书中图3.2]:

$$\begin{aligned} \text{TDB} = & \text{TT} + 0.001658 \text{秒} \sin(g + 0.0167 \sin g) \\ & + \text{月球与行星项, 大致幅度是 } 10^{-5} \text{秒} \\ & + \text{每日变化项, 大致幅度是 } 10^{-6} \text{秒}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 g 是地球的轨道平近点角(mean anomaly)，所以 $g + 0.0167 \sin g$ 是偏近点角(eccentric anomaly)的近似值，因为0.0167是地球轨道偏心率。较详细的公式可参考美国海军天文台在2005年发布的文件([Kaplan 2005])中公式(2.6)及 [Park et al 2021] 文章第(3)式。其实TT和TDB在几千年之间的偏差不会超过二毫秒(即0.002秒)，所以在计算月相和节气时不必计较两者的差异，可视两者为等同。

2 天球座标系

2.1 国际天球参考系(ICRS)

上一节说太阳系的时空度规以质心参考系(BCRS)表示，其座标原点是太阳系的质心。但是BCRS是动力学概念，说「用BCRS」相当于在牛顿力学里说「用质心惯性参考系」。BCRS没有定义座标轴的方向⁴

⁴国际天文联会在2006年B2决议建议补足BCRS的定义：「除非特别说明，在所有实际应用上，可假设BCRS的座标轴方向与ICRS的座标轴方向一致，GCRS的座标轴方向则由BCRS和GCRS的转换公式决定。」

国际天球参考系(International Celestial Reference System, 简称ICRS)是运动学概念, 其原点也是太阳系的质心, 然后建立一套方向固定的坐标轴, 为了做到这一点, 坐标轴的方向用遍布天球的数百个河外射电源(大多数是类星体)而定。所定的方向接近J2000.0历元平赤道坐标轴(下面会解释), 两者的偏差不多于0.0173角秒。ICRS的 x 轴指向J2000.0的平春分点, z 轴接近J2000.0的平北天极, y 轴在 x 轴以东 90° 并与 x 轴和 z 轴垂直。ICRS是右手坐标系(right-handed coordinate system)。如下面所述, ICRS和J2000.0历元平赤道和平春分点的赤道坐标变换可用参考架偏差矩阵(frame bias matrix)表示。

用河外射电源来建立ICRS坐标系, 基本假设是这些遥远天体相对于BCRS的坐标轴不旋转。这假设其实应该用观测检验, 看看行星的ICRS位置是否符合用BCRS导出的运动方程, 并无需引入额外的科里奥利力(Coriolis force)和离心力(centrifugal force)。到目前为止的观测数据没有发现与这假设有偏差。

由于太阳系质心绕银河系中心转, 河外射电源相对于太阳系质心的视位置受到太阳系质心运动的光行差影响, 而这光行差效应会随太阳系质心的速度变化而改变, 河外射电源的视位置因而会漂移, 从而影响ICRS的定位精度。这漂移已经从几十年的甚长基线干涉测量(VLBI)的数据测出([Titov, Lambert & Gontier 2011]), 漂移幅度约为每年6微角秒, 与预期的数值吻合。由于观测精度不段提高, 这漂移效应在将来便不可忽略了。

2.2 地心天球参考系(GCRS)

地心天球参考系(Geocentric Celestial Reference Sysytem, 简称GCRS)的坐标原点是地球质心。GCRS的空间坐标 X^i 与BCRS的空间坐标 x^i 的关系是

$$X^i = x^i - x_E^i + O((v_E/c)^2), \quad (8)$$

式中 x_E^i 是地球质心的BCRS位置, 而 $(v_E/c)^2$ 项来自广义相对论的修正, 但是 $(v_E/c)^2 \sim 10^{-8} = 0.002''$ 。太阳运行的速度大约是每秒 $0.04''$, 月球运行的速度大约是每秒 $0.5''$, 所以略去了 $(v_E/c)^2$ 项只会在计算二十四节气时刻时有约0.05秒的误差, 计算月相时刻时则只会有约0.004秒的误差。这样的误差比《农历的编算和颁行》([GB/T 33661-2017])里的一秒精度要求小得多, 所以可以忽略。

GCRS和BCRS的情况一样, GCRS并没有明确定义坐标轴的方向。这里用国际天文联合会2006年B2决议的推荐: BCRS坐标轴的方向和ICRS的坐标轴方向一致。GCRS的坐标定义包括与BCRS的坐标无旋转, 由于忽略了 $(v_E/c)^2$ 项, GCRS的坐标轴方向也可视为和ICRS的坐标轴方向一致。

2.3 赤道与黄道坐标系

ICRS的坐标轴是固定的, 用来描述天体的位置十分方便。但是很多观测在地球表面上进行, 传统上习惯用地球自转轴或地球公转轨道平面而定的参考系表示天体位置。用地球自转轴来定的参考系称为「赤道坐标系」, 而用地球公转轨道平面来定的参考系称为「黄道坐标系」。

2.3.1 赤道、黄道及春分点

地球自转轴在空间的运动颇为复杂, 可分为「岁差」和「章动」两成分。岁差和章动稍后会介绍。包括岁差和章动而定的地球自转轴的方向称为「天球中间极」(Celestial Intermediate Pole, 简称CIP), CIP可视为地球自转轴的平均指向。只考虑岁差但不计章动而定的地球自转轴在空间的指向是平北天极。

「真赤道」(true equator)定义为垂直于CIP并通过地球质心的平面。由于岁差和章动，真赤道在天球的位置不断变动。「平赤道」(mean equator)定义为垂直于平北天极并通过地球质心的平面。由于岁差，平赤道在天球的位置也不断变动。

「黄道」是地球公转轨道投射到天球的大圆。但是由于行星对地球的重力摄动，地球公转轨道不断变化。为了精确定义黄道，国际天文联合会建议将黄极定义为通过天球中心与地月质心在BCRS的平均轨道角动量向量平行的直线与天球的交点。黄道则是垂直于黄极的大圆。

黄道与赤道相交于两点，称为「春分点」和「秋分点」。春分点是太阳从赤道以南运行到赤道以北的那个交点。黄道与真赤道的交点称为「真春分点」和「真秋分点」，而黄道与平赤道的交点称为「平春分点」和「平秋分点」。

2.3.2 岁差、章动及极移运动

受到太阳、月球和行星对地球扁球体的重力影响，地球自转轴的方向不断变动。地球自转轴除了在空间的方向不断变化外，相对于地壳的位置也不断移动，称为极移运动(polar motion)。

地球自转轴的运动包括非周期性和周期性两成分，周期性运动也有各种不同周期，非周期性运动以及周期长于约一万年的运动统称为「岁差」，周期短于约一万年但长于两天的周期性运动称为「章动」。至于短于两天的周期性运动无法与因潮汐而引起的极移分开，所以拨入极移运动。

岁差主要的成分是地球自转轴绕公转轴进动，周期是二万六千年，这使北天极绕黄极转，以及春分点每年沿黄道西退 $50.3''$ 。章动的主要成分是周期为18.6年、幅度约 $9''$ 的运动，成因是月球绕地球的轨道轴绕黄极进动。极移运动的幅度约 $0.3''$ ，除了提及过的潮汐成分外，还有其他成分，例如周期为433天的钱德勒摆动(Chandler wobble)。计算二十四节气和月相时刻不需要理会极移运动，因为二十四节气和月相用太阳和月球的地心位置（即相对于地球质心的位置）来定义，而不是用相对于地面上某观测站的太阳和月球视位置来定义，所以不涉及极移运动。

地月系统绕日轨道因为受到其他行星的重力摄动而在空间移动，所以黄道也在天球移动，称为「黄道岁差」(precession of the ecliptic)，以区别「赤道岁差」⁵(precession of the equator)。

2.3.3 瞬时赤道座标

赤道座标由天赤道和春分点来定。座标的 x 轴指向春分点， z 轴指向北天极， y 轴在赤道平面并在春分点以东 90° 。由于天赤道和春分点都在动，用赤道座标表示天体位置时必须注明所用的历元(epoch)，例如历元J2000.0(即2000年1月1日TDB正午的天赤道和春分点)。

其中一个常用的赤道坐标系是用历元J2000.0的平赤道和平春分点的赤道坐标系。上面说过，这个赤道坐标系几乎与ICRS一致，两者的座标轴只有微少偏差，两者的变换可用参考架偏差矩阵(frame bias matrix) \mathbf{B} 来表示。具体地说，用 \mathbf{x}_{ICRS} 纵向向量代表ICRS的座标值，再用 \mathbf{x}_{2000} 纵向向量代表J2000.0历元平赤道和平春分点的赤道座标值，则两者的关系由下面公式给出。

$$\mathbf{x}_{2000} = \mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{ICRS}}. \quad (9)$$

参考架偏差矩阵 \mathbf{B} 的公式可参考[Urban & Seidelmann 2013]书中公式(4.4):

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\delta\alpha_0^2 + \xi_0^2) & \delta\alpha_0 & -\xi_0 \\ -\delta\alpha_0 - \eta_0\xi_0 & 1 - \frac{1}{2}(\delta\alpha_0^2 + \eta_0^2) & -\eta_0 \\ \xi_0 - \eta_0\delta\alpha_0 & \eta_0 + \xi_0\delta\alpha_0 & 1 - \frac{1}{2}(\eta_0^2 + \xi_0^2) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

⁵「赤道岁差」以前称为「日月岁差」(luni-solar precession)，而「黄道岁差」以前称为「行星岁差」(planetary precession)。但这些术语有欠准确，因为行星的重力摄动也使地球自转轴移动，只是其幅度比太阳和月球的幅度小得多而已。

其中 $d\alpha_0 = -0.0146''$ 、 $\xi_0 = -0.016617''$ 、 $\eta_0 = -0.0068192''$ ，三个数字都要先转化为弧度然后代入公式，结果如下：

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.999999999999999425 & -7.078279744 \times 10^{-8} & 8.05614894 \times 10^{-8} \\ 7.078279478 \times 10^{-8} & 0.999999999999999695 & 3.306041454 \times 10^{-8} \\ -8.056149173 \times 10^{-8} & -3.306040884 \times 10^{-8} & 0.9999999999999996208 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

欲将 \mathbf{x}_{2000} 转化成瞬时赤道座标(即相对于历元 t 的真赤道座标)，可用岁差矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 和章动矩阵 $\mathbf{N}(t)$ 乘之：

$$\mathbf{x}_{\text{eq}} = \mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_{2000} = \mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{ICRS}}. \quad (12)$$

$\mathbf{P}(t)$ 和 $\mathbf{N}(t)$ 的计算方法在第三节叙述。

2.3.4 瞬时黄道座标

计算月相和二十四节气需要知道太阳和月球在瞬时黄道的座标值。黄道座标系由黄道和春分点来定。座标的 x 轴指向春分点， z 轴指向黄极， y 轴在黄道平面、春分点以东 90° 。由此可推出某天体的黄道座标值可由其赤道座标值沿 x 轴旋转 ϵ 角度而得，这里 ϵ 称为「黄赤交角」，即黄道与真赤道的倾斜角度，亦等于黄极与天球中间极CIP的角距离。值得注意的是黄赤交角 $\epsilon = \epsilon(t)$ 因岁差和章动会随时间变化。黄赤交角可用下面的公式(30)计算。如果用 \mathbf{x}_{eq} 纵向量代表某天体在瞬时赤道的座标值，用 \mathbf{x}_{ec} 纵向量代表该天体在瞬时黄道的座标值，则两者的关系如下：

$$\mathbf{x}_{\text{ec}} = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{x}_{\text{eq}} = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{x}_{\text{ICRS}}, \quad (13)$$

其中旋转矩阵如下：

$$\mathbf{R}_1(\epsilon(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon(t) & \sin \epsilon(t) \\ 0 & -\sin \epsilon(t) & \cos \epsilon(t) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

「黄经」 λ 定义为 $\arg(x_{\text{ec}} + iy_{\text{ec}})$ ，这里 $\arg(z)$ 表示复数 z 的辐角。黄经也可以写成 $\lambda = \tan^{-1}(y_{\text{ec}}/x_{\text{ec}})$ ，只是角度要取适当的象限。很多计算机程式提供反正切函数并给出适当的象限，例如FORTRAN、C和python的`atan2`函数。

3 岁差和章动

3.1 岁差矩阵

用 $\mathbf{X} = (X \ Y \ Z)^T$ 代表相对于在TDB时刻 t 的瞬时平赤道和平春分点的赤道座标值，再用 $\mathbf{X}_0 = (X_0 \ Y_0 \ Z_0)^T$ 代表J2000.0历元平赤道和平春分点的赤道座标值，其中上标T代表矩阵转置(transpose)，所以 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}_0 都是纵向量，两者的关系以岁差矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 表示：

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}(t)\mathbf{X}_0. \quad (15)$$

2006年8月，国际天文联会在第二十六届全体大会通过了一项决议，建议采用Capitanie等人在2003年制定的P03岁差模型([Capitaine et al 2003])来计算岁差。这个岁差模型称为IAU2006岁差理论。根据这个模型，岁差矩阵公式如下：

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{R}_3(\chi_A)\mathbf{R}_1(-\omega_A)\mathbf{R}_3(-\psi_A)\mathbf{R}_1(\epsilon_0), \quad (16)$$

式中 x 轴旋转矩阵 \mathbf{R}_1 见于公式(14)，而 z 轴旋转矩阵 \mathbf{R}_3 的公式如下：

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

其中 $\epsilon_0 = 84381.406''$ 是J2000.0历元黄道与J2000.0历元平赤道的倾角，而 ψ_A 、 ω_A 和 χ_A 三个角度可从美国海军天文台在2005年发布的文件[Kaplan 2005]公式(5.7)获得，也可从国际地球自转和参考系服务规范(IERS Conventions)在2010年发布的文件[IERS Conventions 2010]中公式(5.39)和(5.40)找到。下面把这些公式列出。

$$\begin{aligned} \psi_A &= 5038.481507''T - 1.0790069''T^2 - 0.00114045''T^3 + 0.000132851''T^4 - 9.51'' \times 10^{-8}T^5 \\ \omega_A &= 84381.406'' - 0.025754''T + 0.0512623''T^2 - 0.00772503''T^3 - 4.67'' \times 10^{-7}T^4 \\ &\quad + 3.337'' \times 10^{-7}T^5 \\ \chi_A &= 10.556403''T - 2.3814292''T^2 - 0.00121197''T^3 + 0.000170663''T^4 - 5.60'' \times 10^{-8}T^5, \end{aligned} \quad (18)$$

式中 $T = (JD - 2451545)/36525$ 是时刻 t 离J2000.0的儒略世纪，而JD是时刻 t 对应的TDB儒略日数。公式(16)涉及四个矩阵的相乘，乘积结果在[Kaplan 2005]文件中公式(5.10)列出：

$$\begin{aligned} P_{11}(t) &= C_4C_2 - S_2S_4C_3 \\ P_{12}(t) &= C_4S_2C_1 + S_4C_3C_2C_1 - S_1S_4S_3 \\ P_{13}(t) &= C_4S_2S_1 + S_4C_3C_2S_1 + C_1S_4S_3 \\ P_{21}(t) &= -S_4C_2 - S_2C_4C_3 \\ P_{22}(t) &= -S_4S_2C_1 + C_4C_3C_2C_1 - S_1C_4S_3 \\ P_{23}(t) &= -S_4S_2S_1 + C_4C_3C_2S_1 + C_1C_4S_3 \\ P_{31}(t) &= S_2S_3 \\ P_{32}(t) &= -S_3C_2C_1 - S_1C_3 \\ P_{33}(t) &= -S_3C_2S_1 + C_3C_1 \end{aligned} \quad (19)$$

式中的C和S项如下：

$$\begin{aligned} S_1 &= \sin \epsilon_0 & C_1 &= \cos \epsilon_0 \\ S_2 &= \sin(-\psi_A) & C_2 &= \cos(-\psi_A) \\ S_3 &= \sin(-\omega_A) & C_3 &= \cos(-\omega_A) \\ S_4 &= \sin \chi_A & C_4 &= \cos \chi_A \end{aligned} \quad (20)$$

3.2 章动矩阵

章动计算根据国际天文联合会推荐的IAU2000A模型并加了IAU2006岁差模型对IAU2000A的微小修正。计算章动矩阵 $\mathbf{N}(t)$ 之前须先计算以下十四个角度。这些公式取自[IERS Conventions 2010]公式(5.43)和(5.44)。

$$\begin{aligned} F_1 \equiv l &= \text{月球平近点角} \\ &= 134.96340251^\circ + 1717915923.2178''T + 31.8792''T^2 \\ &\quad + 0.051635''T^3 - 0.00024470''T^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 \equiv l' &= \text{太阳平近点角} \\ &= 357.52910918^\circ + 129596581.0481''T - 0.5532''T^2 \end{aligned}$$

$$+0.000136''T^3 - 0.00001149''T^4$$

$$\begin{aligned} F_3 \equiv F &= L - \Omega = \text{月球平黄经} - \Omega \\ &= 93.27209062^\circ + 1739527262.8478''T - 12.7512''T^2 \\ &\quad - 0.001037''T^3 + 0.00000417''T^4 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} F_4 \equiv D &= \text{月球与太阳的平距角} \\ &= 297.85019547^\circ + 1602961601.2090''T - 6.3706''T^2 \\ &\quad + 0.006593''T^3 - 0.00003169''T^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_5 \equiv \Omega &= \text{月球轨道的升交点平黄经} \\ &= 125.04455501^\circ - 6962890.5431''T + 7.4722''T^2 \\ &\quad + 0.007702''T^3 - 0.00005939''T^4 \end{aligned}$$

余下的角度是太阳系八大行星的平黄经和平黄经总岁差，给出的角度单位是弧度。

$$\begin{aligned} F_6 &\equiv L_{\text{Mercury}} = 4.402608842 + 2608.7903141574T \\ F_7 &\equiv L_{\text{Venus}} = 3.176146697 + 1021.3285546211T \\ F_8 &\equiv L_{\text{Earth}} = 1.753470314 + 628.3075849991T \\ F_9 &\equiv L_{\text{Mars}} = 6.203480913 + 334.0612426700T \\ F_{10} &\equiv L_{\text{Jupiter}} = 0.599546497 + 52.9690962641T \\ F_{11} &\equiv L_{\text{Saturn}} = 0.874016757 + 21.3299104960T \\ F_{12} &\equiv L_{\text{Uranus}} = 5.481293872 + 7.4781598567T \\ F_{13} &\equiv L_{\text{Neptune}} = 5.311886287 + 3.8133035638T \\ F_{14} &\equiv p_A = 0.02438175T + 0.00000538691T^2 \end{aligned} \quad (22)$$

下一步是用以下公式计算黄经章动 $\Delta\psi$ 和黄赤交角章动 $\Delta\epsilon$ ：

$$\Delta\psi = \sum_{i=1}^{1320} [A_i \sin \theta_i^A + A_i'' \cos \theta_i^A] + \sum_{i=1}^{38} [A_i' \sin \theta_i^{A'} + A_i''' \cos \theta_i^{A'}]T \quad (23)$$

$$\Delta\epsilon = \sum_{i=1}^{1037} [B_i \cos \theta_i^B + B_i'' \sin \theta_i^B] + \sum_{i=1}^{19} [B_i' \cos \theta_i^{B'} + B_i''' \sin \theta_i^{B'}]T, \quad (24)$$

式中正弦和余弦函数里的角度如下：

$$\theta_i^A = \sum_{j=1}^{14} C_{ij}^A F_j, \quad \theta_i^{A'} = \sum_{j=1}^{14} C_{ij}^{A'} F_j, \quad \theta_i^B = \sum_{j=1}^{14} C_{ij}^B F_j, \quad \theta_i^{B'} = \sum_{j=1}^{14} C_{ij}^{B'} F_j. \quad (25)$$

A_i 、 A_i' 、 A_i'' 、 A_i''' 、 C_{ij}^A 和 $C_{ij}^{A'}$ 这些系数可从IERS的ftp地址
ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter5/tab5.3a.txt 获得。 A_i 和 A_i'' 列在表中头1320行中的第

二和第三栏； A'_i 和 A'''_i 列在表中最后38行中的第二和第三栏； C^A_{ij} 列在表中头1320行中的第四到第十七栏； $C^A'_{ij}$ 列在表中最后38行中的第四到第十七栏。 $B_i, B'_i, B''_i, B'''_i, C^B_{ij}$ 和 $C^{B'}_{ij}$ 这些系数可从IERS的ftp地址 <ftp://tai.bipm.org/iers/conv2010/chapter5/tab5.3b.txt> 获得。

为了确保读取表中的数据无误，下面列出 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\epsilon$ 的头几项以供参考：

$$\begin{aligned}\Delta\psi = & -17.20642418'' \sin \Omega + 0.003386'' \cos \Omega \\ & -1.31709122'' \sin(2F - 2D + 2\Omega) - 0.0013696'' \cos(2F - 2D + 2\Omega) + \cdots\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon = & 0.0015377'' \sin \Omega + 9.2052331'' \cos \Omega \\ & -0.0004587'' \sin(2F - 2D + 2\Omega) + 0.5730336'' \cos(2F - 2D + 2\Omega) + \cdots\end{aligned}\quad (27)$$

章动矩阵 N 的计算公式如下：

$$N = R_1(-\epsilon)R_3(-\Delta\psi)R_1(\epsilon_A), \quad (28)$$

式中 ϵ_A 是瞬时黄道相对于瞬时平赤道的倾角，而 ϵ 是瞬时黄道相对于瞬时真赤道的倾角，计算公式如下：

$$\begin{aligned}\epsilon_A = & 84381.406'' - 46.836769''T - 0.0001831''T^2 + 0.00200340''T^3 \\ & -0.000000576''T^4 - 0.0000000434''T^5\end{aligned}\quad (29)$$

$$\epsilon = \epsilon_A + \Delta\epsilon \quad (30)$$

其实如果只计算天体相对于瞬时黄道的座标值，章动的计算可以简化。从公式(13)可知要计算 $R_1(\epsilon)N$ 的乘积，又从公式(28)和 $R_1(\epsilon)R_1(-\epsilon) = I$ (单位矩阵)可得

$$R_1(\epsilon)N = R_3(-\Delta\psi)R_1(\epsilon_A) = \begin{pmatrix} \cos \Delta\psi & -\sin \Delta\psi \cos \epsilon_A & -\sin \Delta\psi \sin \epsilon_A \\ \sin \Delta\psi & \cos \Delta\psi \cos \epsilon_A & \cos \Delta\psi \sin \epsilon_A \\ 0 & -\sin \epsilon_A & \cos \epsilon_A \end{pmatrix}. \quad (31)$$

也就是说不用计算黄赤交角章动 $\Delta\epsilon$ 。

黄经章动 $\Delta\psi$ 含一千多项，前面说过要达到《农历的编算和颁行》([GB/T 33661-2017])规定的一秒精度要求就要把太阳视位置计算准到 $0.04''$ 。所以其实不必把 $\Delta\psi$ 公式中一千多项全部计算，因为其中有很多项是很小的。其中一个办法是用IAU2000B章动模型，这是一个精度比较底的章动模型，计算公式少于80项，所得的结果与IAU2000A的偏差在1995年到2050年内不超过 $0.001''$ 。但是我还是用IAU2000A模型并把所有1358项都计算在内。这样的确使计算变慢，但是即使用我家里的电子计算机，计算从1600年至3500年里所有月相(包括朔、上弦、望和下弦)以及所有二十四节气的时刻也只用了约六秒。这样的速度还可以接受，尤其考虑到对于每一个太阳和月球历表，这些TDB时刻只须算一次。其实章动只影响二十四节气的时刻，这点会在第七节说明。

4 喷射推进实验室的历表

美国喷射推进实验室(JPL)编制及不断改良的历表用DE+数字表示，DE后的数字代表某个年代制定的模型。DE系列历表都是用数值积分法推算太阳系行星及月球的位置和速度。历表目的是用于航天活动和天文观测，JPL自1960年代以来不断改良DE历表。较新的两个历表是2020年6月发表的DE440和DE441([Park et al 2021])。美国海军天文台和英国皇家航海历书局联合编的《天文年历》(*Astronomical Almanac*)自2024年起采用DE440历表的数据，JPL的Horizons网站现在用DE441的数据计算太阳系天体的位置。我的农历网站里月相和二十四节气时刻以前用DE431历表([Folkner et al 2014])的数据，后来改用DE441来计算。

DE440和DE441历表考虑到343颗小行星及三十颗柯伊伯带天体(Kuiper belt object)对大行星的重力摄动, 其余的柯伊伯带以一圆环替代, 圆环则以三十六个等质量的质点分布在四十四天文单位的黄道平面表示。太阳系各天体的运动计及广义相对论对牛顿力学的修正, 广义相对论的效应以参数化后牛顿 n 体度规推出的动力学方程描述, 此外还计及地球、月球、及太阳因偏离完美球状而引起的额外加速度, 因太阳自转而产生的伦塞-西凌效应(Lense-Thirring effect), 此效应虽然微小, 但对拟合信使号探测器的水星测距数据很重要, 也对水星近日点进动的速率有微小修正。此外, 地球定向(Earth orientation)用 Vondrák 等人的岁差模型([Vondrák et al 2011])计算, 月球运动加了测地岁差(geodetic precession), 地月系统的运动还加了太阳辐射压力(radiation pressure)而生的加速度。

DE440和DE441用了很多观测数据。内行星的数据取自信使号水星探测器(MESSINGER)、金星快车(Venus Express)及环绕火星的众多探测器; 月球位置用激光测月(lunar laser ranging)测量; 木星位置加了朱诺号探测器(Juno spacecraft)的甚长基线阵(Very Long Baseline Array, 简称 VLBA)测距数据, 大大增加了木星位置的精度; 土星的位置用卡西尼号探测器(Cassini spacecraft)改良了的 VLBA 测距数据; 天王星和海王星的位置用传统的光学测量及旅行者号(Voyager)探测器经过二行星时的测距数据; 冥王星的位置用掩星观测测量, 被掩恒星的位置用盖亚(Gaia)天文卫星的测量数据计算。

DE440和DE441历表最主要的差别在于两历表对月球运动的处理方法不同。DE440加了月球液体核心对固体月慢的阻尼项, 使月球位置准确地符合近代的观测数据, 但是由于无法准确测出月球核心的状况, 这阻尼项的误差随时间迅速增加, 所以只适宜用来推算近几百年的月球位置。DE441没有计及这个月核月慢阻尼项, 虽然月球位置在近百年内没有DE440准, 却适宜用来推算超过几百年前后的月球位置。所以DE440历表的年限是1550年至2650年, 而DE441历表的年限则是-13200年至17191年。

4.1 下载和读取JPL历表

JPL的DE历表以二进制电子文件(binary file)发布。电子文件存有切比雪夫多项式(Chebyshev polynomials)系数, 作用是以内插方法计算太阳、行星和月球位置和速度的座标值。切比雪夫多项式系数分时段列出, 时段的长度一般是32天。多项式系数的数目按天体而定, 选择原则是要使切比雪夫内插法所得的位置与DE历表给出的位置偏差不超过0.5毫米([Newhall 1989]), 即 3.3×10^{-15} 天文单位(astronomical unit)。这内插法的误差小于编制DE历表数值积分法的估计误差, 所以用内插法所得的数据可视为等同于数值积分的数据。

DE历表的电子文件可从JPL的ftp地址(例如ftp://ssd.jpl.nasa.gov/pub/eph/planets/Linux/)下载。主要文件用二进制格式, 需要用软件读取然后用内插法计算天体的位置和速度。我用Project Pluto编制的C程式读取DE历表并计算天体的位置和速度。上述JPL的ftp地址对每一个DE历表都提供一个检验档案, 这档案载有数千或数万个TDB时刻的天体位置或速度的座标值, 目的是供用家检验所用的程式是否正确读取及计算天体的位置和速度。

我从上述JPL的ftp地址下载了DE405、DE406、DE430、DE431、DE440和DE441历表的电子文件。DE405的文件大小是53.3MB; DE406占190MB; DE430占85.5MB; DE431占2.6GB; DE440占97.5MB; DE441占2.6GB。对于每一个下载的历表, 我都用Project Pluto的C程式计算JPL提供的检验档案里的数据, 证实了该C程式算出的数据与检验档案里的数据偏差小于计算机的浮点舍入误差(floating-point round-off error), 即相对误差小于 $2^{-53} \approx 1.11 \times 10^{-16}$ 。

4.2 计算地心几何位置及速度

Project Pluto的软件提供了一个C程式函数, 可以用来计算在特定的TDB时刻某天体(太阳、行星或月球)相对于目标天体(太阳、行星或月球)位置和速度的直角座标值。该函数先用切比雪夫内插法计算某天体的BCRS位置和速度的座标值 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{v}(t)$, 以及目标天体的BCRS位置和速度

的座标值 $\mathbf{x}_t(t)$ 和 $\mathbf{v}_t(t)$ ，然后该天体相对于目标天体的位置座标值用 $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_t(t)$ 计算、相对速度的座标值用 $\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_t(t)$ 计算。要计算月相和二十四节气的时刻，须计算地心视黄经。所以目标天体是地球，算出来的 $\mathbf{X} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E(t)$ 和 $\mathbf{V} = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_E(t)$ 称为「地心几何位置」和「地心几何速度」，座标轴的方向与ICRS的座标轴方向一致。要把地心几何位置转化为地心视位置，须计算光行时和光行差的修正，然后计算岁差和章动把视位置从ICRS座标值转化成瞬时黄道和真春分点的座标值，再从瞬时黄道座标值算出地心视黄经。下面两节会详细叙述这些步骤。

5 光行时和光行差

由于光速有限，我们在地球上看到天体的位置是较早时该天体的位置，称为「推迟位置」(retarded position)，即天体在时刻 t_r 的位置，其发出的光刚刚在时刻 t 到达地球。如果用 $\mathbf{x}(t)$ 表示某太阳系天体在TDB时刻 t 的BCRS位置、 $\mathbf{x}_E(t)$ 表示地球的BCRS位置，则该天体在GCRS的推迟位置是 $\mathbf{X}_r(t) = \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)$ ，这个位置修正称为「光行时修正」(light-time correction)。「推迟时」 t_r 和 t 有以下关系：

$$t_r = t - \frac{|\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|}{c} \quad (32)$$

其中 $c = 299792.458$ 公里/秒是光速。这公式忽略了广义相对论里因时空弯曲而引起的时间修正，这修正十分微小：对太阳的时间修正小于 10^{-4} 秒、对月球的时间修正只有 $\sim 10^{-8}$ 秒。推迟时 t_r 出现在公式(32)的两边，也就是说 t_r 应用迭代方式算出。但是太阳和月球的运行速度远小于光速，用以下近似公式计算 t_r 就足够了。

$$t_r \approx t - \frac{|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E(t)|}{c}. \quad (33)$$

这个近似公式的相对误差是 $\sim (v/c)^2$ ，这里 v 是天体在BCRS的运行速率。太阳的质量占太阳系总质量的99.86%，所以太阳在BCRS几乎不动(参看附录A)，因此太阳的 $(v/c)^2$ 十分微小。月球绕地球的运行速率约每秒一公里，而地月质心绕日的速率约每秒三十公里，所以月球的BCRS速率大约是每秒三十公里，而 $(v/c)^2 \sim 10^{-8}$ ，也就是说用上面近似公式计算 t_r 造成的误差只会使月球位置误差为 $0.002''$ ，所以可以忽略。

光行差也是由于光速有限而引起的。假设某观测者测量某物体位于方向 \mathbf{n} ，另一观测者正处于第一观测者相同的位置，但以速度 \mathbf{v} 相对于第一个观测者移动，则该物体相对于第二个观测者的方向是 \mathbf{n}' ， \mathbf{n} 和 \mathbf{n}' 都是单位向量，两者的关系可用狭义相对论中的洛伦兹变换(Lorentz transformation)推出⁶(见附录C)：

$$\mathbf{n}' = \frac{\gamma^{-1}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}/(1 + \gamma^{-1})}{1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}, \quad (34)$$

其中 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ 、 $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 。我们现在要求太阳和月球的地心视位置，地球质心在BCRS动，所以 $\mathbf{n} = \mathbf{X}_r/|\mathbf{X}_r|$ ，而 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_E = \dot{\mathbf{x}}_E$ 是地球质心在BCRS的速度。由于 $|\mathbf{v}_E| \approx 30$ 公里/秒，所以只须把光行差算准到 v/c 就足够了。把洛伦兹变换公式展开到 v/c 项时，所得的光行差公式与牛顿运动学推出的公式一致：

$$\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}}{|\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}|}, \quad (35)$$

⁶广义相对论效应(例如光线的重力偏折)可略去，因为其修正对太阳和月球都非常小。

这称为「周年光行差」(annual aberration)，因为 β 随地球绕日公转呈现一年的周期变化。另一种光行差称为「周日光行差」(diurnal aberration)，这是由地球自转而产生的光行差，但是周日光行差只影响天体相对于地面上的视位置。月相和节气是根据太阳和月球的地心视位置来定，不涉及周日光行差。

光行差把天体的位置移了 $\sim v_E/c \approx 10^{-4} \approx 20.5''$ 。虽然太阳的光行时修正很微小，但是如果忽略光行差，二十四节气的时刻会有约八分钟的偏差，而八分钟是光从太阳到地球所需的大约时间，这并不是巧合。[Urban & Seidelmann 2013]书中第7.2.3节讲述了一个简单方法计算光行时和光行差的总效应，这总效应又称「行星光行差」(planetary aberration)。这里把书中的所述的方法简单推导出来。从 $\mathbf{n} = \mathbf{X}_r/|\mathbf{X}_r|$ 和公式(35)可得：

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}' &\propto \frac{\mathbf{X}_r}{|\mathbf{X}_r|} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_E}{c} \\
&= \frac{\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)}{|\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_E}{c} \\
&\propto \mathbf{x}(t_r) - \left[\mathbf{x}_E(t) - \frac{|\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|}{c} \dot{\mathbf{x}}_E \right] \\
&\approx \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E \left(t - \frac{|\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|}{c} \right) \\
&= \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t_r).
\end{aligned} \tag{36}$$

也就是说，光行时和光行差的总效应算准到 v/c 时得出的位置可用以下简单公式算出：

$$\mathbf{X}_{\text{proper}}(t) = \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t_r). \tag{37}$$

太阳的推迟时 t_r 是光从太阳到地球所需的时间，约为八分钟。月球的推迟时 t_r 约1.3秒，要达到《农历的编算和颁行》([GB/T 33661-2017])规定的一秒精度要求也不可忽略。用公式(37)来计算光行时和光行差的总效应十分方便，如前述，Project Pluto已提供了C程式函数计算任何TDB时刻太阳系天体的地心几何位置 $\mathbf{x} - \mathbf{x}_E$ 。公式(37)说在时刻 t 的 $\mathbf{X}_{\text{proper}}$ 等于在时刻 t_r 的地心几何位置。

除了 $\mathbf{X}_{\text{proper}}$ 外，计算 $\mathbf{X}_{\text{proper}}$ 对时间的导数也很有用。对公式(37)两边取时间导数得：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}(t) = [\dot{\mathbf{x}}(t_r) - \dot{\mathbf{x}}_E(t_r)] \frac{dt_r}{dt}. \tag{38}$$

用 $D(t_r) = |\mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t)|$ 代表天体的推迟距离，结合公式(32)可得：

$$\frac{dt_r}{dt} = 1 - \frac{\dot{D}(t_r)}{c} \frac{dt_r}{dt} \Rightarrow \frac{dt_r}{dt} = \frac{1}{1 + v_r(t_r)/c}, \tag{39}$$

式中 $v_r = dD/dt$ 是天体相对于地球的径向速度(radial velocity)。公式(38)可写成：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}(t) = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t_r) - \dot{\mathbf{x}}_E(t_r)}{1 + v_r(t_r)/c} \tag{40}$$

公式右边的分母是解开超光速运动之谜的关键。超光速运动见于活动星系核发出的喷流，其解释相当简单：如果喷流以接近光速并大致沿观测者的视线方向移动，则 $1 + v_r/c \ll 1$ 并有可能使喷流的切向速率(tangential speed)大于光速。但是 v_r/c 对于月球和太阳则可忽略，原因是地球绕日公转轨道和月球绕地球轨道都很接近圆形，所以相对距离 D 变化很小，径向速度也

相应地小。太阳的径向速度约 $|v_r| \sim 0.5$ 公里/秒(参看附录A)，月球的径向速度约 $|v_r| \sim 0.05$ 公里/秒(参看附录B)。忽略了分母 $(1 + v_r/c)$ 只会使太阳的 $|\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}|$ 有约 10^{-6} 的相对误差，使月球的 $|\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}|$ 有约 10^{-7} 的相对误差。第七节会说到这误差基本上不会影响月相和二十四节气时刻的准确度，所以我把分母 $(1 + v_r/c)$ 略去，用以下公式计算 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}$ ：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t_r) - \dot{\mathbf{x}}_E(t_r) = \mathbf{v}(t_r) - \mathbf{v}_E(t_r). \quad (41)$$

上面说过Project Pluto有C程式函数计算任何时刻的地心几何速度 $\mathbf{v} - \mathbf{v}_E$ 。公式(41)说在时刻 t 的 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}$ 等于在时刻 t_r 的地心几何速度。

6 地心视黄经

朔、上弦、望、下弦和二十四节气是用太阳和月球的地心视黄经来定义的。某TDB时刻 t 的地心视黄经可综合第二节、第三节和第五节的公式计算。这里把步骤列出。

1. 计算天体(太阳或月球)的GCRS几何位置 $\mathbf{X}_{\text{geometric}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_E(t)$ ，这里 \mathbf{x} 是该天体的BCRS位置， \mathbf{x}_E 是地球的BCRS位置。这可直接用Project Pluto提供的C函数计算。
2. 用近似公式 $t_r \approx t - |\mathbf{X}_{\text{geometric}}(t)|/c$ 计算推迟时 t_r 。
3. 用公式 $\mathbf{X}_{\text{proper}}(t) \approx \mathbf{x}(t_r) - \mathbf{x}_E(t_r)$ 计算经光行时和光行差修正后的天体位置。这步也是直接用Project Pluto的C函数计算，所得的是天体的GCRS座标值。如前述，GCRS座标原点在地球质心，座标轴方向与ICRS座标轴方向一致。
4. 用公式(18)、(19)和(20)计算岁差矩阵 $\mathbf{P}(t)$ ，再用公式(21)–(23)、(25)、(29)和(31)计算矩阵积 $\mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)$ 。
5. 用以下公式把天体的位置从GCRS的座标值 $\mathbf{X}_{\text{proper}}(t)$ 转化为瞬时黄道和真春分点的黄道座标值：

$$\mathbf{X}_{\text{ec}}(t) = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{X}_{\text{proper}}(t), \quad (42)$$

其中参考架偏差矩阵 \mathbf{B} 由公式(11)给出。

6. 天体的地心视黄经 λ 用公式 $\lambda = \arg(X_{\text{ec}} + iY_{\text{ec}})$ 得出，即 $\lambda = \tan^{-1}(Y_{\text{ec}}/X_{\text{ec}})$ 并取适当象限。

计算 λ 的时间导数也很有用。对公式 $\lambda(t) = \tan^{-1}[Y_{\text{ec}}(t)/X_{\text{ec}}(t)]$ 求时间导数得：

$$\dot{\lambda}(t) = \frac{X_{\text{ec}}\dot{Y}_{\text{ec}} - Y_{\text{ec}}\dot{X}_{\text{ec}}}{X_{\text{ec}}^2 + Y_{\text{ec}}^2}. \quad (43)$$

要计算 \dot{X}_{ec} 和 \dot{Y}_{ec} ，可对公式(42)求时间导数：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{ec}}(t) = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}(t) + \frac{d}{dt}[\mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)]\mathbf{B}\mathbf{X}_{\text{proper}}(t). \quad (44)$$

第一项缘于天体与地球的相对运动；第二项缘于瞬时黄道和真春分点的黄道座标轴因岁差和章动而变动。第二项显然远小于第一项，可以忽略。也就是说天体地心视位置的瞬时黄道座标对时间的导数可用以下公式计算：

$$\dot{\mathbf{X}}_{\text{ec}}(t) \approx \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}(t) = \mathbf{R}_1(\epsilon(t))\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{B}[\mathbf{v}(t_r) - \mathbf{v}_E(t_r)]. \quad (45)$$

式中 $\mathbf{v}(t_r) - \mathbf{v}_E(t_r)$ 也是直接用Project Pluto的C函数计算。

这里不妨粗略计算因忽略了第二项而引起的误差。地球绕日的恒星周期是365.2564日，所以太阳在黄道的GCRS座标值每日的变化大约是 $360^\circ/365.2564 \approx 1^\circ$ ，因此太阳的 $|\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}|/|\mathbf{X}_{\text{proper}}| \approx 1^\circ/\text{日}$ 。月球绕地球的恒星周期是27.3217日，重复以上计算可得月球的 $|\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}|/|\mathbf{X}_{\text{proper}}| \approx 13^\circ/\text{日}$ 。现在比较一下岁差和章动的效应。岁差的主要成分是使春分点沿黄道移动 $50.3''/\text{年}$ ，即 $|\dot{\mathbf{P}}| \sim 0.14''/\text{日}$ ，这里 $|\dot{\mathbf{P}}|$ 是指矩阵元素绝对值之最大者。章动的主要成分是周期为18.6年、因月球绕地球轨道进动而产生的摆动，其效应见于公式(26)的第一项。因此 $|d(\mathbf{R}_1(\epsilon)\mathbf{N})/dt| \sim 17.2''|\dot{\Omega}|$ ，而从公式(21)可得 $|\dot{\Omega}| \approx 7000000''/\text{世纪} \approx 10^{-3}$ 弧度/日，由此可算出 $|d(\mathbf{R}_1(\epsilon)\mathbf{N})/dt| \sim 0.02''/\text{日}$ 。因此第二项由岁差主宰。对太阳来说， $|\dot{\mathbf{P}}|/|\mathbf{X}_{\text{proper}}| \sim 4 \times 10^{-5}$ 。对月球来说，其值是 $\sim 3 \times 10^{-6}$ 。总括来说，忽略了第二项会使太阳的 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{ec}}$ 有约 4×10^{-5} 的相对误差，使月球的 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{ec}}$ 有约 3×10^{-6} 的相对误差。下一节会说明这样的误差基本上不影响计算月相和二十四节气时刻的准确度。

7 计算月相和二十四节气的TDB时刻

二十四节气的定义是太阳的地心视黄经达到 15° 的整数倍的时刻。用弧度表示， 15° 是 $\pi/12$ 弧度。此后所有角度都用弧度表示。朔的定义是月球的地心视黄经与太阳地心视黄经相等的时刻。为方便起见，这里引入一个函数 P ，定义如下：

$$P(x) \equiv x - 2\pi \left\lfloor \frac{x + \pi}{2\pi} \right\rfloor, \quad (46)$$

其中 $[x]$ 表示小于 x 的最大整数，也就是说算符 $\lfloor \cdot \rfloor$ 与C和python的floor函数一致。 $P(x)$ 其实是把 x 加上 2π 的整数倍，使其值规范在 $[-\pi, \pi)$ 区间内。

朔的定义可用函数 P 写成 $P(\lambda_M - \lambda_S) = 0$ ，这里 λ_S 是太阳的地心视黄经， λ_M 是月球的地心视黄经。上弦的定义是 $P(\lambda_M - \lambda_S) = \pi/2$ ；望的定义是 $P(\lambda_M - \lambda_S) = -\pi$ ；下弦的定义是 $P(\lambda_M - \lambda_S) = -\pi/2$ 。

计算月相和二十四节气的时刻最终是要求出方程 $f(t) = 0$ 的根，下表列出计算月相和二十四节气所需的函数 f 。注意 λ_S 和 λ_M 都是时间 t 的函数。

月相	函数 f
朔	$P(\lambda_M - \lambda_S)$
上弦	$P(\lambda_M - \lambda_S - \pi/2)$
望	$P(\lambda_M - \lambda_S - \pi)$
下弦	$P(\lambda_M - \lambda_S + \pi/2)$

节气	函数 f	中气	函数 f
J1 (立春)	$P(\lambda_S + \pi/4)$	Z1 (雨水)	$P(\lambda_S + \pi/6)$
J2 (惊蛰)	$P(\lambda_S + \pi/12)$	Z2 (春分)	$P(\lambda_S)$
J3 (清明)	$P(\lambda_S - \pi/12)$	Z3 (谷雨)	$P(\lambda_S - \pi/6)$
J4 (立夏)	$P(\lambda_S - \pi/4)$	Z4 (小满)	$P(\lambda_S - \pi/3)$
J5 (芒种)	$P(\lambda_S - 5\pi/12)$	Z5 (夏至)	$P(\lambda_S - \pi/2)$
J6 (小暑)	$P(\lambda_S - 7\pi/12)$	Z6 (大暑)	$P(\lambda_S - 2\pi/3)$
J7 (立秋)	$P(\lambda_S - 3\pi/4)$	Z7 (处暑)	$P(\lambda_S - 5\pi/6)$
J8 (白露)	$P(\lambda_S - 11\pi/12)$	Z8 (秋分)	$P(\lambda_S - \pi)$
J9 (寒露)	$P(\lambda_S + 11\pi/12)$	Z9 (霜降)	$P(\lambda_S + 5\pi/6)$
J10 (立冬)	$P(\lambda_S + 3\pi/4)$	Z10 (小雪)	$P(\lambda_S + 2\pi/3)$
J11 (大雪)	$P(\lambda_S + 7\pi/12)$	Z11 (冬至)	$P(\lambda_S + \pi/2)$
J12 (小寒)	$P(\lambda_S + 5\pi/12)$	Z12 (大寒)	$P(\lambda_S + \pi/3)$

表中的二十四节气分节气和中气列出，节气用J+数字标记，中气用Z+数字标记。这些标记在以下7.4节所述的时间表用到。

月相的计算只涉及日月黄经之差 $\lambda_M - \lambda_S$ ，即日月的角距离投射到黄道的角度，这与章动无关，因为章动是由地球自转轴在空间之摆动而生。计算月相时可把黄经章动定为零： $\Delta\psi = 0$ 。这也可从数式看出：章动矩阵中 $\mathbf{R}_3(-\Delta\psi)$ 的作用是把黄经加上修正项 $\Delta\psi$ ，由于 λ_M 和 λ_S 都加上了相同的修正项， $\lambda_M - \lambda_S$ 便把加上的 $\Delta\psi$ 抵消了，我也从实际的数值计算上证实确是如此。从物理学上也可看出 $\lambda_M - \lambda_S$ 只涉及黄道岁差，而不涉及赤道岁差（见下面7.3节）。但是我并没有简化岁差的计算，因为计算岁差并不费时。

7.1 牛顿—拉弗森求根法

要计算月相和二十四节气的TDB时刻，最好的解 $f(t) = 0$ 方程的方法是用牛顿—拉弗森(Newton-Raphson)求根法。这是一个用迭代方式来逼近 $f(t) = 0$ 方程的根。设若 t_n 为第 n 次迭代的数值，则下一轮迭代的数值用以下公式计算：

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{\dot{f}(t_n)} \quad (47)$$

在计算二十四节气时，函数 f 的时间导数 $\dot{f} = \dot{\lambda}_S$ ；在计算月相时， $\dot{f} = \dot{\lambda}_M - \dot{\lambda}_S$ 。 $\dot{\lambda}_S$ 和 $\dot{\lambda}_M$ 可用上一节的方法计算。要用迭代公式(47)，必须提供初始值 t_1 。我们知道地球绕日轨道和月球绕地球轨道都接近圆形，所以太阳和月球在天球上的视运动大致均匀，故可用类似「平气」或「平朔」方法计算 t_1 ，明确地说是假设 $\dot{\lambda}_S$ 和 $\dot{\lambda}_M$ 是常数，由此估算月相或二十四节气的大约时刻。要计算 $f(t) = 0$ 在接近给定TDB时刻 t_0 的根，可用 $t_1 = t_0 - f(t_0)/\dot{f}(t_0)$ 作为初始值。但是这样只会求得 $f(t) = 0$ 的一个根，我们知道 $f(t) = 0$ 有多重根，有时候或会要求某个特定的根。例如要求某个冬至之前的第一个朔，或是某个朔之后的第一个望。在这些情况下，要求的根可以表达成在某时刻 t_0 之前或之后的第一个根，而 t_1 的计算可以修改如下：

$$t_1 = t_0 - \frac{f(t_0)}{\dot{f}(t_0)} + \frac{2k\pi}{\dot{f}(t_0)}, \quad (48)$$

式中 k 是整数，其值视乎情况可以是0、1或-1。因为 \dot{f} 接近常数， $2\pi/\dot{f}$ 也接近常数。在计算二十四节气时， $2\pi/\dot{f}$ 接近回归年365.2422日；在计算月相时， $2\pi/\dot{f}$ 接近朔望月的平均值29.5306日。所以上面公式其实是先把 t_1 定为 $t_0 - f(t_0)/\dot{f}(t_0)$ ，然后视乎情况加上或减去一个周期。这里考虑以下两种情况。

情况一：要求 t_0 之前的第一个根。在这情况下，要使 $t_1 < t_0$ 。如果 $f(t_0) > 0$ ，则选 $k = 0$ ；如果 $f(t_0) < 0$ ，则选 $k = -1$ 。（注意 $f(t_0) \in [-\pi, \pi)$ 而且 $\dot{f}(t_0) > 0$ ）

情况二：要求 t_0 之后的第一个根。在这情况下，要使 $t_1 > t_0$ 。如果 $f(t_0) > 0$ ，则选 $k = 1$ ；如果 $f(t_0) < 0$ ，则选 $k = 0$ 。

定了 t_1 后，即可启动迭代程序，数列 $\{t_n\}$ 迅速收敛。我定的收敛条件是当 $|t_n - t_{n-1}| < \varepsilon$ 时就终止迭代程序，而我选 $\varepsilon = 10^{-8}$ 日 = 0.000864秒，从公式(47)可知这收敛条件等于 $|f(t_{n-1})/\dot{f}(t_{n-1})| < \varepsilon$ 。把 ε 定为 10^{-8} 日其实已接近计算机的浮点舍入误差。原因是Project Pluto的C函数用儒略日数作TDB时间的输入，然后计算天体的位置和速度。J2000.0的儒略日数是2451545，这是七个位的整数，其实从公元前1976年到公元22666年间儒略日数的整数部分都是七位数，所以时刻算准到 10^{-8} 日就等于说儒略日数算准到15个有效数位。

用牛顿—拉弗森方法计算月相和二十四节气时刻十分有效，定了 t_1 后，只须经三到四次迭代过程就已达到指定的收敛条件。所以即使用我家里已稍为嫌旧的电子计算机，计算从1600年到3500年所有朔、上弦、望、下弦和所有二十四节气的时刻只用了大约十七秒。⁷编程式的初期，我并没有用公式(31)简化 $R_1(\epsilon)N$ 的计算，把不必要的黄赤交角章动 $\Delta\epsilon$ 也计算了，计算月相时把不必要的 $\Delta\psi$ 也计算了，那时用了大约九十秒的时间才算完。 $\Delta\epsilon$ 的公式有1056项由三角函数组成的级数，而黄经章动 $\Delta\psi$ 的公式有1358项三角函数组成的级数。我也试过只计算 $\Delta\psi$ 和 $\Delta\epsilon$ 的头几项，那时只用了几秒就把1600年到3500年的所有月相和节气时刻算完。由此可知在那十七秒里，大部分的时间花在计算 $\Delta\psi$ 上。假如我不是用JPL的历表，而用半解析(semi-analytic)的历表例如VSOP87或ELP/MPP02历表，情况也许不同，因为这些历表含三角函数项达到数千以至数万，比章动的级数项还要多数倍至数十倍。这就是JPL历表的一个很大的优点，天体的位置和速度用切比雪夫内插法计算，不但计算速度快而且比那些半解析历表更准确。但是JPL历表也有缺点。其一是历表的电子文件大，这是为了使切比雪夫内插法的准确度达到数值积分法本身的准确度。不过目前最大的JPL文件(用于DE431历表)是2.6GB，相对于现在一般记忆体的容量来说还不算很大。另一个缺点是JPL历表只能计算历表包含的年限，年限以外的数据不能用外插法取得。不过DE431历表的年限是从-13200年到17191年，对很多应用应该已足够了。

上面说过，我设定的收敛条件相当于 $|f(t)/\dot{f}(t)| < \varepsilon$ 。因此计算出的时刻准确度基本上由 $f(t)$ 与0的偏差而定， $\dot{f}(t)$ 的作用是提供换算因子使 $f(t)$ 与0的偏差转化为时间误差。前面说过我计算 λ_S 和 λ_M 时略去了某些项。具体地说，略去了公式(38)中的 dt_r/dt 使 λ_S 有 $\sim 10^{-6}$ 的相对误差，使 λ_M 有 $\sim 10^{-7}$ 的相对误差；略去了公式(44)的第二项使 λ_S 有 $\sim 4 \times 10^{-5}$ 的相对误差，使 λ_M 有 $\sim 3 \times 10^{-6}$ 的相对误差。由于计算出的时刻误差由 $|f(t)/\dot{f}(t)| < \varepsilon$ 所决定， \dot{f} 的误差相当于改变了 ε 的数值。例如假设 \dot{f} 的相对误差是 10^{-4} ，在最坏的程况下等于把 ε 的数值变成 1.0001ε ，由于 $\varepsilon = 10^{-8}$ 日 = 0.000864秒， $1.0001\varepsilon = 0.0008640864$ 秒。所以计算出的时刻精确度几乎不因 \dot{f} 的微小误差而受影响。即使 \dot{f} 的相对误差大到10%也无碍，只要把 ε 的数值定得远少于真正要达到的精度就可以了。因为 \dot{f} 接近常数，我因好奇试把 \dot{f} 在计算节气时定为常数 $2\pi/365.2422$ 日、在计算月相时定为常数 $2\pi/29.5306$ 日，然后计算从1600年到3500年的月相和二十四节气时刻，发现所算出的节气时刻与用精确 \dot{f} 算出的节气时刻偏差不超过0.00016秒、月相的时刻偏差不超过0.00024秒，这些偏差都小于预设的 ε 。但是这并不是说精确的 \dot{f} 毫无用处。虽然用这些粗糙的 \dot{f} 不影响算出时刻的精度，但是收敛过程变得慢了。用粗糙的 \dot{f} 计算节气时要用上多至七次迭代过程才达到预设的收敛条件、计算月相时则须要用到多至十二次迭代过程才能收敛，这使计算过程慢了很多。其实这也不奇怪，牛顿—拉弗森方法是二阶的方法(second-order scheme)，收敛速度比一阶方法快得多，但是二阶收敛的先决条件是 \dot{f} 必需算得

⁷2021年6月：旧计算机已被弃置，用新机计算1600年到3500年所有朔、上弦、望、下弦和所有二十四节气的时刻只需约六秒，但是换了新的C++编译器，而且在不同的Linux发行版运算。运算速度之激增很可能是由于硬件及软件的改良。

准。用JPL历表计算准确的 f 并不困难： f 涉及地球、月球和太阳的运动速度，而天体的速度在JPL发布的历表里取位置对时间的导数而得，位置用切比雪夫多项式展开，所以速度涉及切比雪夫多项式的导数。切比雪夫多项式及其导数都可用递归公式(recurrence equations)计算。

7.2 不同历表和岁差模型的时间差异

我用JPL的DE431、DE430、DE406、DE440和DE441历表计算了月相和二十四节气的TDB时刻，然后比较这些历表算出来的时刻差异。DE430和DE431的差别只在于DE430加了月核一月慢的阻尼项来计算月球位置。JPL建议用DE430历表来计算在J2000.0前后几百年的月球位置，而在这段时间之外的月球位置应用DE431历表。我比较了用DE430和DE431历表从1600年到2500年期间的月相和节气时刻，发现算出的月相时刻偏差不超过0.85秒、节气时刻偏差不超过0.000419秒($< \varepsilon$)。而在1600年到2200年内的月相时刻偏差不超过0.2秒、节气时刻偏差不超过0.00015秒($< \varepsilon$)。注意节气时刻偏差小于预设的计算精度 $\varepsilon = 0.000864$ 秒，所以由两历表算出的二十四节气时刻基本上没有差别。

DE405历表于1998年发行。美国海军天文台和英国皇家航海历书局联合编的《天文年历》(*Astronomical Almanac*)从2003年到2014年的数据就是取自DE405历表。DE406历表在同一年与DE405历表同时发行，DE406和DE405是用同一数值积分法来计算太阳系行星和月球位置，只是DE406的年限比较长(-3000年到3000年)，为了使发行的电子文件不至太大(以当年的标准来说)，DE406发行时把切比雪夫多项式系数的数目减小了，所以发行的历表精度比较低。我比较过从DE431和DE406算出的月相和节气时刻，发现从1600年到2500年，二十四节气时刻偏差不超过0.14秒、月相时刻偏差不超过0.18秒。

DE440和DE441历表于2020年发行。比较DE431和DE440在1600年至2500年的气朔时刻，发现节气时刻最大偏差是0.81秒，月相时刻的最大偏差是1.06秒。如果将比较年份缩到1800年至2200年，节气时刻最大偏差是0.15秒，月相时刻的最大偏差是0.08秒。比较DE431和DE441在1600年至2500年的气朔时刻，发现节气时刻最大偏差是0.81秒，月相时刻的最大偏差是1.15秒。如果将比较年份缩到1800年至2200年，节气时刻最大偏差是0.15秒，月相时刻的最大偏差是0.11秒。

Vondrák等人在2011年发表的一篇文章([Vondrák et al 2011])指出，IAU2006岁差模型只适用于J2000.0的前后一千年左右，在这时段以外的精度大减。[Vondrák et al 2011]文章的作者创立了一套新岁差模型，可以用来计算J2000.0前后二十万年的岁差。广受欢迎的开放源代码天象软件(open-source planetarium software)Stellarium采用了这个新岁差模型，我建立的星图网站也用这岁差模型。JPL在2020年编制DE440和DE441历表时用此岁差模型取代了比较旧的Lieske (1979) 岁差模型来计算地球定向。

此岁差模型有几个版本，我用最接近IAU2006模型的算法，将公式(18)中的角度 ψ_A 、 ω_A 和 χ_A 改用[Vondrák et al 2011]文章中的公式(11)、(13)、表4和表6计算。我用DE431历表计算太阳和月球的GCRS位置，然后比较用两岁差模型计算的月相和节气时刻。结果是在1600年与2500年内，两岁差模型的二十四节气时刻偏差不超过0.19秒、月相时刻偏差不超过0.00037秒($< \varepsilon$)；在1600年与3500年内，两岁差模型的二十四节气时刻偏差会达到3秒、但月相时刻偏差不超过0.0035秒。月相和节气的时刻偏差相差很大，其实这并不难理解。二十四节气用太阳的视黄经来定，即真春分点和太阳沿黄道的角距离。月相由月球和太阳的视黄经之差来定，即月球和太阳的角距离投射到黄道的角度。所以月相只涉及黄道岁差，二十四节气却涉及赤道岁差和黄道岁差，黄道岁差远小于赤道岁差，加上月亮运行比较快，使月相时刻的差异远小于节气时刻的差异。

综合以上各项比较，我估计用DE431历表和IAU2006岁差模型计算出的月相和二十四节气的TDB时刻在1800年至2200年内的误差应该小于0.2秒。

DE441和DE431的年限相同，所以可以比较两历表在较长时期的偏差。发现两者在-2000年至2500年节气的TDB时刻最大偏差发生在-2000年，偏差为45秒，月相TDB时刻

最大偏差发生在 -1999年, 偏差为 416秒。这显示两历表在远古时期有较大偏差, 但是历法和日月食计算以 UT1 为准, TDB 与 UT1 的偏差以 $\Delta T = TT - UT1 \approx TDB - UT1$ 表示。可惜的是 1600年以前没有准确的 ΔT 观测数据, -2000年期间 ΔT 的估计误差是 0.3小时 (见英国皇家航海历书局的 Earth Rotation (地球自转) 网页, 此误差比 DE431 和 DE441 两历表在这时期的气朔 TDB 时刻偏差大。

7.3 Fukushima-Williams 岁差公式

IAU 2006 岁差模型的矩阵公式(16)采用Capitanie、Wallace和Chapront提出的公式。其实计算岁差还有若干个等价的表示式(见[Urban & Seidelmann 2013]第6.6.2节), 其中值得一提的是Fukushima-Williams公式:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_1(-\epsilon_A)\mathbf{R}_3(-\Psi)\mathbf{R}_1(\phi)\mathbf{R}_3(\gamma). \quad (49)$$

如果用 C_0 表示J2000.0的历元北黄极, C 表示瞬时北黄极, P_0 表示J2000.0的历元平北天极, P 表示瞬时平北天极。 γ 是从 P_0 看由 C_0 到 C 的角度, ϕ 是从 P_0 到 C 的角距离, Ψ 是从 C 看由 P_0 到 P 的角度, ϵ_A 是瞬时黄道相对于瞬时平赤道的倾角。[Urban & Seidelmann 2013]书中图6.4描绘了这些角度。也可用另一方式描述这三个角度: ϕ 是瞬时黄道相对于J2000.0历元平赤道的倾角, γ 是 C 的J2000.0历元平赤经和 C_0 的J2000.0历元平赤经(其值是 $-\pi/2$)之差, Ψ 是 P 的瞬时平黄经(其值是 $\pi/2$)和 P_0 的瞬时平黄经之差。从这些描述可知 γ 和 ϕ 涉及黄道岁差, Ψ 涉及从瞬时黄道参考系观看的赤道岁差。结合公式(31)和(49)得出

$$\mathbf{R}_1(\epsilon)\mathbf{NP} = \mathbf{R}_3(-\Delta\Psi)\mathbf{R}_3(-\Psi)\mathbf{R}_1(\phi)\mathbf{R}_3(\gamma) = \mathbf{R}_3(-\Delta\Psi - \Psi)\mathbf{R}_1(\phi)\mathbf{R}_3(\gamma). \quad (50)$$

其中 $\mathbf{R}_3(-\Delta\Psi - \Psi)$ 矩阵把黄经加上了 $\Psi + \Delta\Psi$, 在计算 $\lambda_M - \lambda_S$ 时把加上去的值抵消了, 所以计算月相时不须要计算 $\mathbf{R}_3(-\Delta\Psi - \Psi)$ 矩阵。这公式明确显示月相的时刻只涉及黄道岁差, 而与赤道岁差和章动无关。

计算与IAU 2006模型类同的岁差模型, 可用[Urban & Seidelmann 2013]表6.3的公式计算 γ 、 ϕ 和 Ψ :

$$\begin{aligned} \gamma &= 10.556403''T + 0.4932044''T^2 - 0.00031238''T^3 \\ &\quad - 2.788'' \times 10^{-6}T^4 + 2.60'' \times 10^{-8}T^5 \\ \phi &= 84381.406'' - 46.811015''T + 0.0511269''T^2 + 0.00053289''T^3 \\ &\quad - 4.40'' \times 10^{-7}T^4 - 1.76'' \times 10^{-8}T^5 \\ \Psi &= 5038.481507''T + 1.5584176''T^2 - 0.00018522''T^3 \\ &\quad - 2.6452'' \times 10^{-5}T^4 - 1.48'' \times 10^{-8}T^5 \end{aligned} \quad (51)$$

公式(50)配(51)所算出的矩阵 $\mathbf{R}_1(\epsilon)\mathbf{NP}$ 和用IAU2006/2000A岁差和章动模型算出的矩阵(即用公式(16)、(18)和(31))虽然在数值上不完全相同, 但两者的结果相对于IAU2006岁差模型的精度来说是等同的。我比较了用公式(50)配(51)和用IAU2006/2000A模型的计算结果(月球和太阳位置都用DE431历表计算), 发现在1600年到3500年间, 月相和二十四节气的时刻差异都不大于0.00016秒($< \epsilon$)。公式(50)虽然比较简洁优美, 但并没有显著提高整体计算效率, 这也是意料之中, 因为计算岁差并不费时。

7.4 月相和二十四节气之TDB时间表

虽然计算月相和二十四节气的TDB时刻颇为复杂, 但是选定了某一特定历表以及岁差和章动模型后只需要计算一次。我用DE441历表的数据计算这些时刻, 主要是因为这历表的年限比较长(-13200年至17191年)。我把算出的时刻存在两个ASCII档案里。第一个档

案的名称是TDBtimes.txt，存有从1600年到3500年月相和二十四节气的TDB时刻。第二个档案的名称是TDBtimes_extended.txt，存有从-4000年到8000年的TDB时刻。这两个档案可从我的GitHub贮存室 src 文件夹里下载。第二个档案经过了压缩，在贮存室的名称是TDBtimes_extended.txt.gz，可用Linux的gzip程式或其他类似的程式解压。

TDBtimes.txt的时刻用DE441历表加上IAU2006/2000A岁差和章动模型计算。上面说过IAU2006岁差模型只适用于J2000.0前后约一千年。TDBtimes_extended.txt的时刻改用[Vondrák et al 2011]的岁差模型计算，这岁差模型的有效年限是J2000.0前后约二十万年。至于IAU2000A章动模型的有效年限不大明确，这章动模型用到上面公式(21)中月亮和太阳相关的角度，这些公式取自[Simon et al 1994]文章，文章作者建议用这些公式时最好把使用年份限制在公元前4000年到公元8000年间。我想IAU2000A章动模型的有效年限大概也是这个时期，所以TDBtimes_extended.txt列出从-4000年(即公元前4001年)到8000年的时刻。

两个档案的数据结构是为了方便编算农历而设。下面先讲解TDBtimes.txt的数据结构，然后讲述使用TDBtimes_extended.txt时要注意的事项。

TDBtimes.txt文件含1901行和87栏。第一栏是公历年。第二栏以jd0标记，是公历年1月-1日TDB16时的儒略日数，即1月0日(TDB+8)零时的儒略日数。例如在公元2000年那行jd0栏的值是2451543.166666667，是2000年1月-1日TDB16时(即1999年12月30日TDB16时)的儒略日数。jd0栏的值总会是某整数+1/6，因为其TDB时刻总是16时。jd0的值是该行其他栏列出日期的起始时刻，即是说该行其他栏所列日期的儒略日数是jd0+所列的日数。

第三栏以Z11a标记，是最接近jd0的那个冬至时刻，对于TDBtimes.txt涵盖的年份，这个冬至是前一个公历年的冬至。例如公元2000年那行的Z11a栏是-8.343841734507215，就是说1999年冬至的儒略日数是2451543.166666667 - 8.343841734507215，即1999年12月22日TDB 7:44:52。第四至二十七栏是Z11a以后的二十四节气时刻，由J12(小寒)到Z11b(冬至)。Z11b栏的冬至时刻和下一行的Z11a栏的时刻一致，数值不同是因为两行的jd0值不同。二十四节气各栏的标记用J+数字表示节气、用Z+数字表示中气。所用标记的二十四节气名称可从在上面二十四节气表查得。

第二十八栏以Q0_01标记，是发生在Z11a栏冬至之前的第一个朔的时刻。余下的栏(第二十九至第八十七栏)所列的时刻是上弦(标以Q1_xx)、望(标以Q2_xx)、下弦(标以Q3_xx)和其他的朔(标以Q0_xx)依时间次序排列。这里xx的值从01到15，是从Q0_01栏的朔算起的朔望月数。每行列出涵盖15个朔望月里的朔、上弦、望和下弦时刻。

TDBtimes_extended.txt的数据结构和TDBtimes.txt一样，但有一点要注意。根据目前通用的公历纪日法，1582年10月15日起才开始使用格里高利历，之前是用儒略历。所以1583年前的jd0是指儒略历1月0日(TDB+8)零时的儒略日数。1582年10月4日之后的那一天是10月15日(虽然并不是所有国家都在这一天改用格里高利历)，所以1582年和1583年的jd0只相差355天。由于儒略历一年的平均值(365.25日)比回归年稍长，1583年前二十四节气的平均时刻渐渐在儒略历里后退，128年后退一天。当追溯上古年份时，就会发现节气的时刻在儒略历的日期比现在要迟。例如现在冬至在公历的12月22日左右，在公元前1129年前却会出现在1月份。

两档案的数据结构是为了方便计算农历而定。用每行的数据可以计算由Z11a冬至到Z11b冬至之间一岁内所有农历月。Q0_01栏的朔通常是对应农历十一月初一，但也有例外。根据规定Q0_02栏的朔必定发生在Z11a冬至之后，但是如果Q0_02栏的朔发生在冬至之后数小时，这个朔有可能和Z11a冬至落在同一日，如果出现这情况，Q0_02栏的朔才是对应农历十一月初一，要知道是否如此就要知道一日的起始和终结时刻。但农历用UTC+8为时间标准，所以必须把TDB转化为UTC+8后才能准确判断。一岁最多可以有十三个农历月(包括第一个十一月但不计第二个十一月)，所以需要十四个朔日来定十三个农历月的起始和终结日期。如果第一个十一月初一对应的朔是Q0_02栏的朔，则冬至日必定是十一月初一，简单计算可推出这个岁只能有十二个农历月。所以不论怎样十四个朔日足以决定一岁内所有农历月的起始和终结日期。每行列出十五个朔望月内的月相时刻对编算一岁内的农历月绰绰有余，而且会有若干月相与上一行和下一行重叠。这当然都不要紧，文件里的数据结构全是为了方便编算农历。

8 TDB和UTC的转换

选定了历表以及岁差和章动模型后，月相和二十四节气的TDB时刻只须算一次。TDB和UTC的转换却会随新数据的出现而变，所以把TDB时刻计算和TDB到UTC+8的转换分开有好处，当有新的转换时只须更新转换公式而无需重算月相和节气的时刻。如果TDBtimes.txt和TDBtimes_extended.txt文件里的月相和节气时刻用UTC+8，新的变换出现后文件里的数据就过时了。

UTC在1960年制定，经过多次修改，到1972年才定下来。为了避免混乱，我的农历网站所列的时刻在1972年以前是UT1+8，从1972年起才用UTC+8。由于TDB与TT在数千年来相差不超过0.002秒，可视两者为等同。TT到UT1的转换公式可用 [Stephenson et al 2016] 和 [Morrison et al 2021] 的 $\Delta T = TT - UT1$ 拟合及外推公式，1972年到现在的TT-UTC可根据闰秒表计算(例如

<https://zh.wikipedia.org/zh-hant/%E9%97%B0%E7%A7%92>)。具体地说，

$$TT - UTC = (TT - TAI) + (TAI - UTC) = 42.184\text{秒} + \text{自1972年来加到UTC的闰秒总数} \quad (52)$$

[Stephenson et al 2016] 和 [Morrison et al 2021] 的公式用了月球潮汐加速率 $\alpha = -25.82''/\text{cy}^2$ ($1 \text{ cy} = 36525 \text{ 日}$) 制定，以符合 DE431 的月球模型，然而 DE441 改了月球模型的参数，潮汐加速率更接近 $\alpha = -25.936''/\text{cy}^2$ (见 Horizon 网站2021年4月12日发布的消息)，所以 [Stephenson et al 2016] 和 [Morrison et al 2021] 的公式须要加上修正项以符合 DE441 的数据，详情可参阅我的日月食网站说明：

<http://ytliu.epizy.com/eclipse/dynamical.time.html>。

未来的TT-UTC可用 [Stephenson et al 2016] 和 [Morrison et al 2021] 的 ΔT 外推公式加潮汐加速率修正计算。此外推公式可从其长期日长变化(lod)公式积分而得：

$$\begin{aligned} t &= (y - 1825)/100, \quad f(y) = 31.4115t^2 + 284.8436 \cos[2\pi(t + 0.75)/14], \\ \Delta T &= c_2 + f(y) + 0.1056[(y/100 - 19.55)^2 - 0.49], \end{aligned} \quad (53)$$

其中 y 是年份， t 是从1825年累积的世纪数， $c_2 = -150.568$ ，此式给出的 ΔT 以秒为单位。对于某一儒略日数JD，年份 y 可用公式 $y = (JD - 2451544.5)/365.2425 + 2000$ 计算。根据规定UTC和UT1相差不超过0.9秒，所以用 ΔT 作TT-UTC的近似值，误差应比 ΔT 的预推公式小。

这拟合及外推公式用于我的日月食网站，我也建立了 GitHub 项目 提供 python 代码计算 ΔT 及误差估算。

以下举两个例子展示换算方法。

例一：从TDBtimes.txt文件Z02栏得知2025年春分的TDB时刻离2025年1月0日零时(TDB+8)有79.71016342905716日，即2025年3月20日17:02:38.120(TDB+8)。根据闰秒数据，从1972年到2025年加到UTC的闰秒总数是27秒，由此可得TT-UTC=69.184秒。把上述TDB+8时刻减去69.184秒，得到的春分时刻是2025年3月20日17:01:29(UTC+8)。这时刻与中国科学院紫金山天文台编的《十年袖珍月历(2025-2034)》数据(3月20日 17:01:29 UTC+8)一致。

例二从TDBtimes.txt文件里得知在2165年Q0_13栏列出的合朔时刻离2165年1月0日零时(TDB+8)有338.0018570063848日，即2165年12月4日00:02:40.445(TDB+8)。用外推公式(53)算得 $\Delta T \approx 131.9$ 秒。假设TT-UTC= ΔT =131.9秒，可得该合朔时刻是2165年12月4日00:00:29(UTC+8)，离午夜零时只有29秒。如果真实的TT-UTC比外推值大了超过29秒，则这个合朔日期会在12月3日。这个合朔日期决定农历十一月初一的日期。所以只能说2165年农历乙丑年十一月初一的日期现在无法准确断定，预推的日期是12月4日，但有可能是12月3日，确实情况要视乎在2165年12月时将会有多少闰秒加到UTC上，现在只能等待2165年的来临。

由于地球自转不均匀，数十年后的闰秒数目难以准确预测。这使数十年后的TDB到UTC转换十分困难，所以转换公式会因新数据的出现而变，使情况更复杂的是UTC政策在2035年或更早会有重大调正。[CGPM27 2022]

参考文献

- [Capitaine et al 2003] N. Capitaine, P.T. Wallace, and J. Chapront, “Expressions for IAU 2000 precession quantities”, *Astron. Astrophys.*, 412(2), pp. 567-586, 2003, doi:10.1051/0004-6361:20031539.
- [CGPM27 2022] 见第27届国际度量衡大会（CGPM）决议4（2022年11月19日）；会议视讯报告；七项重要决议。
- [Folkner et al 2014] W.M. Folkner et al, “The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431”, IPN Progress Report 42-196, February 15, 2014.
- [GB/T 33661-2017] 《农历的编算和颁行》，中华人民共和国国家质量监督检验检疫总局及中国国家标准化管理委员会联合发布，中国科学院紫金山天文台草拟。
“国家标准《农历的编算和颁行》解读材料”，中国科学院紫金山天文台。
- [IERS Conventions 2010] IERS Conventions 2010, edited by G. Petit and B. Luzum.
- [Kaplan 2005] G.H. Kaplan, “The IAU Resolutions on Astronomical Reference Systems, Time Scales, and Earth Rotation Models: Explanation and Implementation”, U.S. Naval Observatory Circular No. 179, U.S. Naval Observatory, Washington, D.C. 20392 (2005).
- [Morrison et al 2021] L.V. Morrison, F.R. Stephenson, C.Y. Hohenkerk, and M. Zawilski, “Addendum 2020 to ‘Measurement of the Earth’s rotation: 720 BC to AD 2015’”, *Proc. R. Soc. A.*, 477:20200776 (2021).
- [Newhall 1989] X.X. Newhall, “Numerical Representation of Planetary Ephemerides”, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Vol. 45, p.305, 1989.
- [Park et al 2021] R.S. Park et al, “The JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE440 and DE441”, *The Astronomical Journal*, 161, 105, 2021.
- [Simon et al 1994] J.L. Simon et al, Numerical expressions for precession formulae and mean elements for the Moon and the planets, *Astron. Astrophys.*, 282, 663 (1994).
- [Stephenson et al 2016] F.R. Stephenson, L.V. Morrison, and C.Y. Hohenkerk, “Measurement of the Earth’s rotation: 720 BC to AD 2015”, *Proc. R. Soc. A.*, 472:20160404 (2016).
- [Titov, Lambert & Gontier 2011] O. Titov, S.B. Lambert and A.-M. Gontier, VLBI measurement of the secular aberration drift, *Astron. Astrophys.*, 529, A91 (2011).

[Urban & Seidelmann 2013] S.E. Urban and P.K. Seidelmann, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*, 3rd edition, University Science Books, Mill Valley, California (2013). 勘误:
https://aa.usno.navy.mil/downloads/exp_supp_errata.pdf

[Vondrák et al 2011] J. Vondrák, N. Capitaine, and P. Wallace, “New precession expressions, valid for long time intervals”, *Astron. Astrophys.*, 534, A22 (2011).

附录

本附录的内容对月相和节气的计算关系不大，放在这里是因为第五节提及过这些计算结果，另一方面，这些计算本身也颇有趣。

A 太阳的位置和速度

第五节提到太阳的质量占太阳系总质量的99.86%，因此太阳相对于太阳系质心的移动甚微。在展示详细计算前，不妨先简单估算大概数值。

除了太阳外，太阳系最大质量的天体是木星，其质量是 $M_J = M_\odot/1047$ ，其中 M_\odot 是太阳质量。木星的轨道有微小的偏心率(≈ 0.05)，轨道半长径是 $a_J = 5.2$ 天文单位 $= 1120R_\odot$ ，这里 $R_\odot = 6.957 \times 10^5$ 公里是太阳半径。木星的轨道周期是 $P_J = 4332.6$ 日。受木星的重力影响，太阳也会以微椭圆轨道运行，轨道半长径是 $a_\odot = (M_J/M_\odot)a_J = 1.07R_\odot$ ，运行速率是 $v_\odot \approx 2\pi a_\odot/P_J = 12.5$ 米/秒。

现在来看精确的计算结果。太阳的BCRS位置和速度可直接用JPL的历表得出，下面所示的数据都是用DE431历表计算的。图一和图二展示太阳相对于太阳系质心在1950年至2050年的运动轨迹，太阳位置用J2000.0的历元黄道及平春分点的黄道座标表示。具体地说，太阳的座标位置向量 $\mathbf{X}_{\text{ec2000}} = (X_{\text{ec2000}} \ Y_{\text{ec2000}} \ Z_{\text{ec2000}})^T$ 用以下公式计算：

$$\mathbf{X}_{\text{ec2000}} = \mathbf{R}_1(\epsilon_0)\mathbf{B}\mathbf{x}, \quad (54)$$

式中 \mathbf{x} 是太阳的BCRS座标向量， \mathbf{B} 是参考架偏差矩阵(11)， \mathbf{R}_1 是沿 x 轴的旋转矩阵(14)， $\epsilon_0 = 84381.406''$ 是J2000.0历元黄道与平赤道的倾角。

从两图可见太阳的运动比椭圆轨迹复杂，显示太阳系其他天体对太阳的重力影响不可忽视。图三展示太阳相对于太阳系质心的运动速率随时间的变化。数据显示太阳的速率小于16.5米/秒，均方根速率(root mean square speed)是12.8米/秒。由此可推出光行时对太阳的位置修正是 $v/c < 5.5 \times 10^{-8}$ 弧度 $= 0.01''$ 。

第五节也提到太阳相对于地球的径向速度约为0.5公里/秒，这速度主要来自地球的轨道偏心率。径向速度的值是用公式 $|v_r| \sim v_{\text{orb}}e$ 粗略估算，其中 $v_{\text{orb}} \approx 30$ 公里/秒是地球公转速率，而 $e = 0.0167$ 是地球的轨道偏心率。这个粗略公式可推导如下。当天体以牛顿力学二体问题(two-body problem)描述的椭圆轨道运行时，其径向位置 r 由以下公式描述：

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad (55)$$

其中 a 是轨道半长径， θ 是真近点角(true anomaly)。对上面公式取时间导数得：

$$v_r = \dot{r} = -\frac{er \sin \theta \dot{\theta}}{1 + e \cos \theta} = -\frac{eh \sin \theta}{r(1 + e \cos \theta)} = -\frac{eh \sin \theta}{a(1 - e^2)}, \quad (56)$$

其中 $h = r^2\dot{\theta}$ 是轨道角动量除以折合质量(reduced mass)。从牛顿力学的二体问题计算可推出以下方程式:

$$p = a(1 - e^2) = \frac{h^2}{GM}, \quad P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}, \quad (57)$$

这里 p 称为「半通径」(semi-latus rectum)、 G 是牛顿重力常数、 M 是系统的总质量、 P 是轨道周期。右边的公式又称「开普勒第三定理」(牛顿版)。从左边的公式可得 $h = \sqrt{GMa(1 - e^2)}$ 。公式(56)可改写成

$$v_r = -e \sqrt{\frac{GM}{a(1 - e^2)}} \sin \theta = -\frac{2\pi a}{P} \frac{e \sin \theta}{\sqrt{1 - e^2}} = -\frac{e \bar{v}_{\text{orb}} \sin \theta}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (58)$$

其中 $\bar{v}_{\text{orb}} = 2\pi a/P$ 是平均轨道速率。当轨道偏心率 e 是小数目时, 上面公式可写成 $|v_r| \sim e \bar{v}_{\text{orb}}$, 亦即是那个粗略公式。

图四展示太阳在2010年至2020年相对于地球的径向速度, 径向速度也是用DE431历表计算。从图中可见径向速度呈现类似正弦波的周期变化, 这与预期的一致, 类似正弦波的变化来自 $\sin \theta$ 项。值得注意的是 θ 与时间的关系近似线性函数, 其与线性函数的偏离源自地球的微小轨道偏心率。⁸ 径向速率 $|v_r|$ 的最大值是0.515公里/秒, 与用粗略公式算出的值十分接近。

B 月球的径向速度

第五节提到月球相对于地球的径向速率是 $|v_r| \sim 0.05$ 公里/秒, 这也是用粗略公式 $|v_r| \sim e v_{\text{orb}}$ 估算的。对月球轨道而言, $v_{\text{orb}} \approx 2\pi a/P \approx 1$ 公里/秒、 $e \approx 0.05$ 。图五展示用DE431来计算月球的 v_r 在2018年至2020年间的变化。图中可见月球的径向速度比太阳的复杂, 并不是简单的类似正弦波的变化。月球 $|v_r|$ 的最大值是0.074公里/秒, 是上述估算值的1.5倍。造成这么大差异的原因是太阳及其他行星对月球轨道的重力摄动, 其中太阳的重力摄动最为重要。由于地月系统绕太阳公转, 太阳对月球绕地球轨道的重力摄动表现在太阳对月球的潮汐力, 即太阳对月球重力与对地月质心的重力之差。太阳对月球的潮汐力是地球对月球重力的0.6%。月球绕地球转, 其相对于太阳的位置不断改变, 受到太阳的潮汐力呈现周期性变化, 使到月球轨道参数也呈现周期性变化。也就是说, 月球的轨道半长径和轨道偏心率因太阳的重力摄动而变化。

月球的瞬时轨道参数可用JPL历表计算, 展示计算结果前应稍为解释瞬时轨道的概念。当天体受到重力摄动时, 其轨道会偏离以牛顿力学二体问题所描述的开普勒轨道(Keplerian orbit), 描述这些受摄动的轨道通常做法是计算天体的「吻切轨道根数」(osculating orbital elements)。「吻切」译自英文osculate, 在这里的意思是一条曲线与另一条曲线相接触, 在接触点处两曲线的切线(tangent)相同。吻切轨道根数的概念很简单。根据牛顿力学的二体问题计算结果, 二体的相对运动可用六个轨道根数描述: $(a, e, i, \omega, \Omega, T_0)$ 。这里 a 是轨道半长径(orbital semi-major axis)、 e 是轨道偏心率(orbital eccentricity)、 i 是轨道倾角(orbital inclination)、 ω 是近点幅角(argument of periapsis)、 Ω 是升交点经度(longitude of ascending node)、 T_0 是过近拱点时刻(time of periapsis passage)。 i 、 ω 和 Ω 是三个欧拉角(Euler angles), 用以描述轨道相对于某个给定参考架(reference frame)的方向; a 和 e 描述轨道的大小和形状; T_0 给出二体最接近的一个时刻。对于某一特定轨道, T_0 显然可以有多个数值, 但彼此之间的差异必定是轨道周期 P 的整数倍, 而 P 由开普勒第三定理给出: $P = 2\pi \sqrt{a^3/(GM)}$ 。

⁸真近点角 $\theta(t)$ 可用天体力学的标准公式计算。首先是用公式 $M(t) = 2\pi(t - T_0)/P$ 来计算平近点角(mean anomaly) M 。这里 T_0 是地球过近日点的时刻、 P 是轨道周期。下一步是解开普勒方程 $E - e \sin E = M$ 而求出偏近点角(eccentric anomaly) E 。最后用公式 $\tan(\theta/2) = \sqrt{(1+e)/(1-e)} \tan(E/2)$ 计算真近点角 θ 。从这些公式可见平近点角 $M(t)$ 是时间的线性函数, 但 $E(t)$ 和 $\theta(t)$ 却不是。较为简单的解释是地球绕日运行速率因其椭圆轨道缘故而不断变化。当地球离太阳较近时, 运行速率较快, 因此 θ 增加得较快; 当地球离太阳较远时, 运行速率较慢, 因此 θ 增加得较慢。所以 θ 不是时间的线性函数。

知道了六个轨道根数后，可以计算出任何时刻二体的相对位置和相对速度。反之，如果知道了二体沿二体问题描述的开普勒轨道运行，也知道了系统的总质量，只要测定某个时刻二体的相对位置和相对速度，便何用二体问题的公式推出六个轨道根数。位置和速度都是三维向量，有六个值，正好与轨道根数的数目相同。可以证明如果 $i \neq 0$ 及 $e \neq 0$ ，二体在某一时刻的相对位置和相对速度与五个轨道根数 a 、 e 、 i 、 ω 、 Ω 有一一对应的关系，而 T_0 可以计算到某一特定数值加上 P 的整数倍。所以只要二体的运行遵从二体问题所描述的轨道，所用参考架的座标轴相对于系统的质心固定，用任何时刻二体的相对位置和相对速度都可求得相同的六个轨道根数(T_0 的值可以相差 P 的整数倍)。当二体的轨道受到重力摄动时，仍可以用相同的公式来计算轨道根数，但是算出的轨道根数会随时间而变，这称为「吻切轨道根数」，其意义是假如重力摄动突然在这时消失，二体便会沿以吻切轨道根数所描述的开普勒轨道运行。

月球轨道的吻切半长径 a 和偏心率 e 可从月球的地心位置 \mathbf{X} 和速度 \mathbf{V} 轻易计算。从牛顿力学二体问题的动力学方程可得以下公式：

$$\epsilon = -\frac{GM}{2a} = \frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{R} \Rightarrow a = \left(\frac{2}{R} - \frac{V^2}{GM} \right)^{-1}, \quad (59)$$

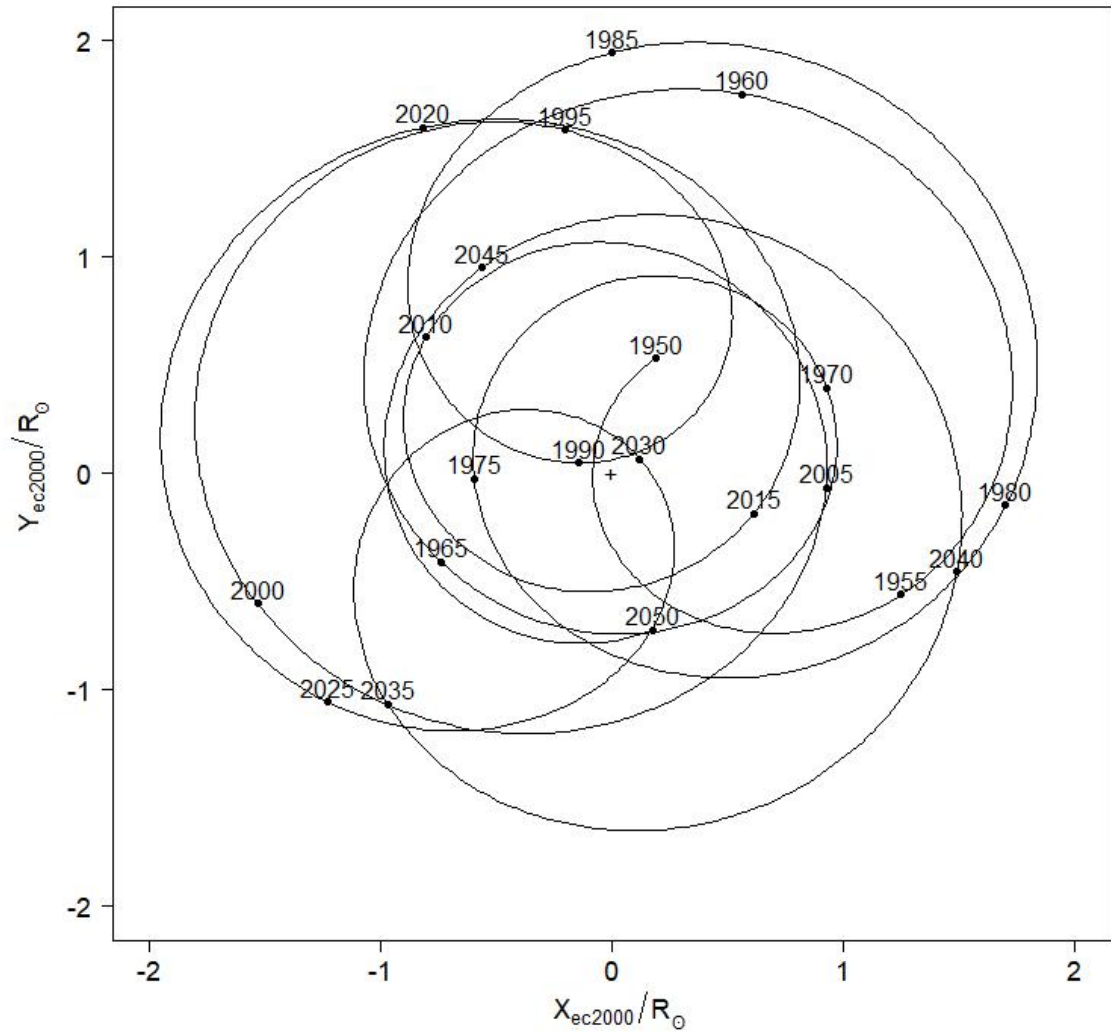
其中 ϵ 是轨道总能量除以折合质量、 $R = |\mathbf{X}|$ 、 $V = |\mathbf{V}|$ 。这公式也可以从天体力学的活力公式(*vis-viva equation*)直接推出。对于地月系统，用[Folkner et al 2014]表八数据可得 $GM = GM_{\text{地球}} + GM_{\text{月球}} = 8.997011390199871 \times 10^{-10}$ 天文单位³/日²。吻切轨道偏心率可用以下公式计算：

$$e = \sqrt{1 + \frac{\epsilon h^2}{(GM)^2}}, \quad (60)$$

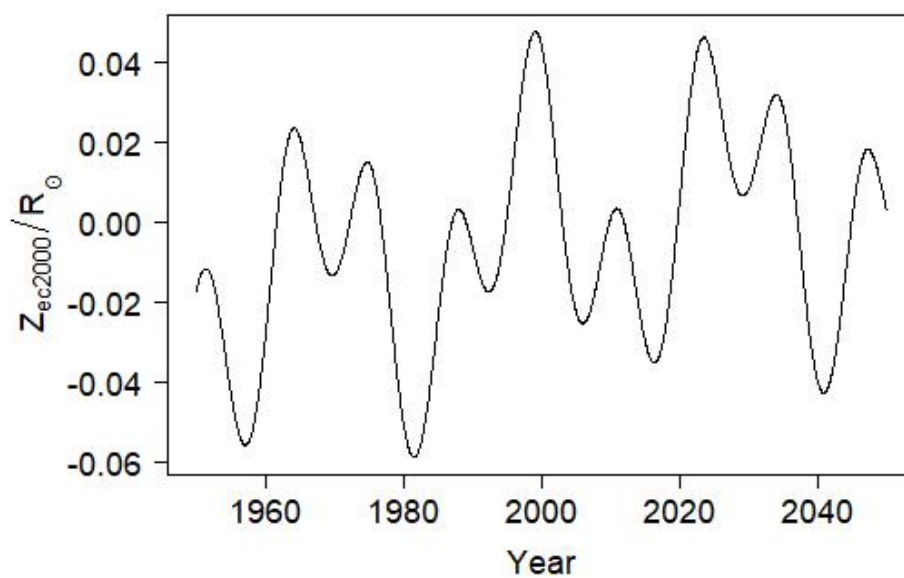
式中 ϵ 和 h^2 可用以下公式计算：

$$\epsilon = \frac{1}{2}V^2 - \frac{GM}{R}, \quad h^2 = |\mathbf{X} \times \mathbf{V}|^2 = R^2V^2 - (\mathbf{X} \cdot \mathbf{V})^2. \quad (61)$$

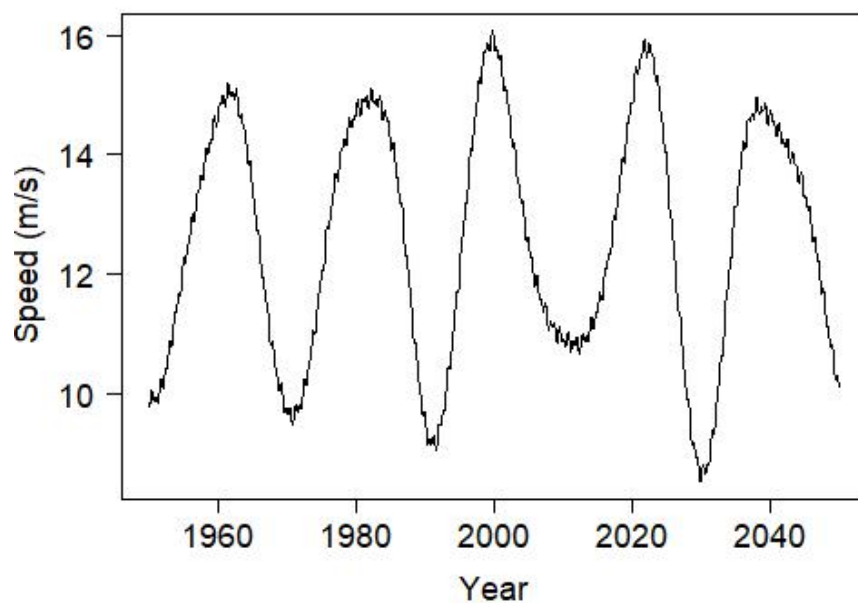
图六和图七展示用DE431历表计算出的月球轨道吻切半长径和偏心率在2018年至2020年的变化。数据显示在1600年至3500年间半长径的变化只有2%，但是偏心率可在0.0256和0.0775之间变动，平均值是0.056。偏心率的最大值是最小值的三倍，难怪径向速率的最大值是估算值的1.5倍。不过这偏差并不影响第五节的结论：在计算 $\dot{\mathbf{X}}_{\text{proper}}$ 时略去了 $1/(1 + v_r/c)$ 项对 $\dot{\lambda}_M$ 的计算误差仍是微不足道。



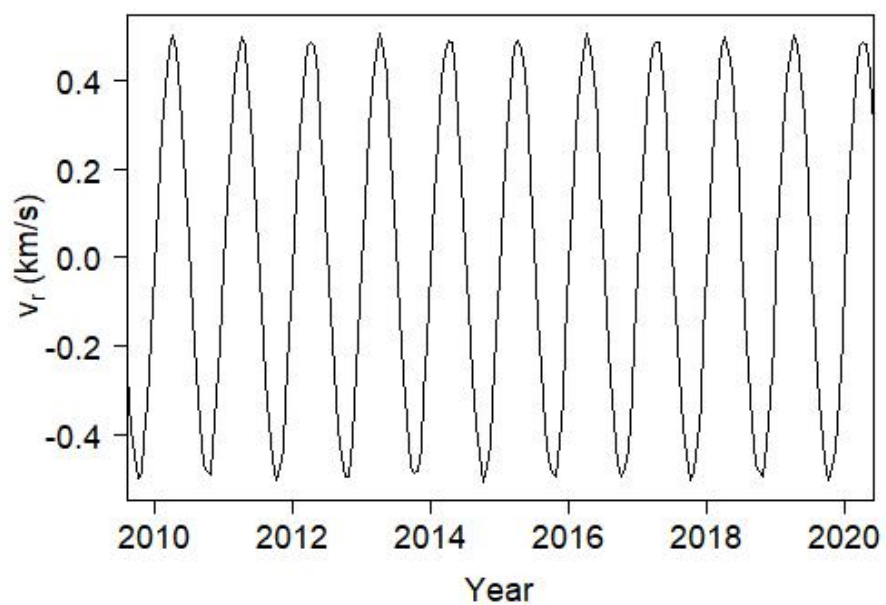
图一:太阳在1950年至2050年相对于太阳系质心的位置投射到J2000.0历元黄道的轨迹。图中的加号(+)表示太阳系质心的位置；图中数字表示年份； $R_{\odot} = 6.957 \times 10^5$ 公里是太阳半径。



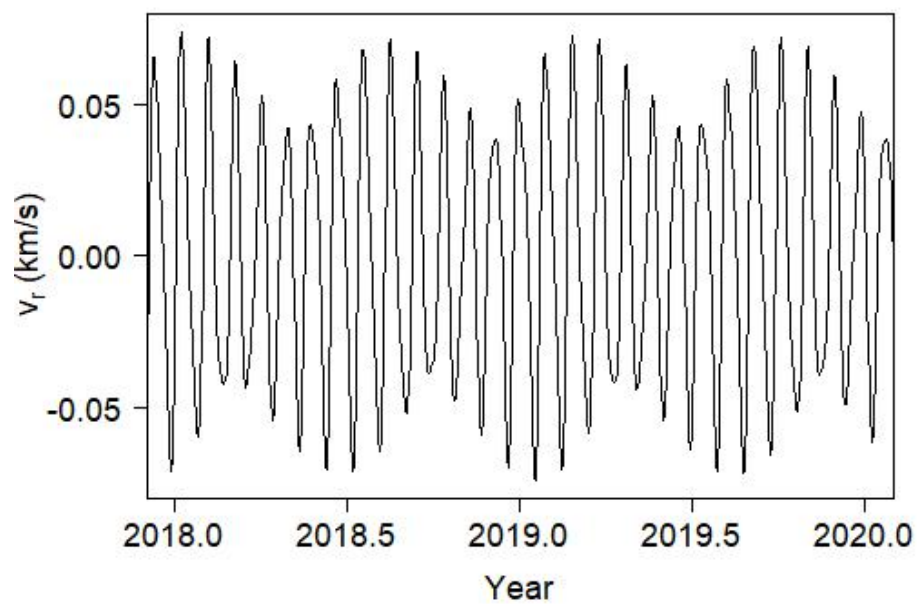
图二:太阳相对于J2000.0历元黄道的垂直位置。年份Year用以下公式计算: $Year = 2000 + (JD - 2451544.5)/365.25$, 式中JD是TDB对应的儒略日数。



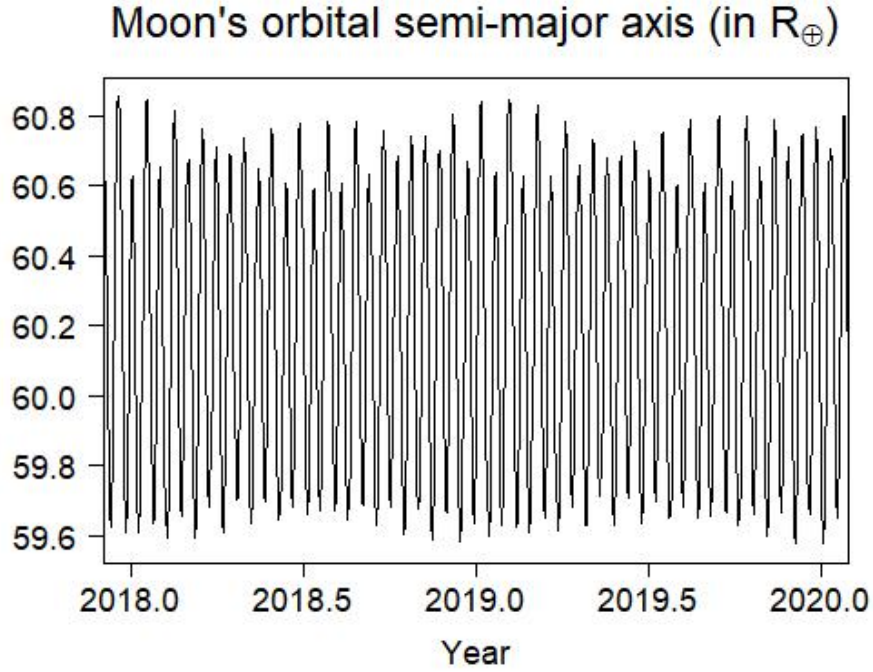
图三:太阳相对于太阳系质心的运行速率。



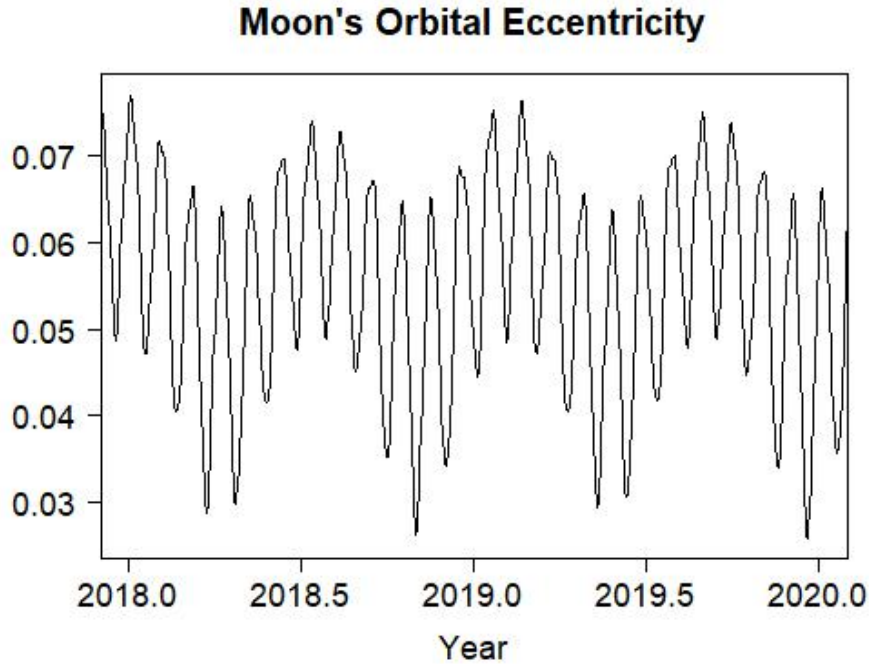
图四:太阳相对于地球的径向速度。



图五:月球相对于地球的径向速度。



图六:月球的轨道半长径, 这里 $R_{\oplus} = 6371$ 公里是地球半径。



图七:月球的轨道偏心率。

C 狭意相对论的光行差

这里推导狭意相对论的光行差公式(34)。

设 \mathbf{p} 为光子相对于某观测者的三维动量向量, \mathbf{p}' 为此光子相对于第二观测者的三维动量向量。设 \mathbf{v} 为第二观测者相对于第一观测者的移动速度, 又设 $p = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} = E/c$ 为光子相

对于第一观者的能量/光速， $p' = \sqrt{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p}'} = E'/c$ 为此光子相对于第二观者的能量/光速。则 $\mathbf{n} = -\mathbf{p}/p$ 为第一观测者观测到光子射入方向的单位向量， $\mathbf{n}' = -\mathbf{p}'/p'$ 为第二观测者观测到此光子射入方向的单位向量，设 $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c = \beta \hat{\boldsymbol{\beta}}$ 。建立坐标系使 x 轴方向与 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 平行，根据洛伦兹变换，

$$\begin{pmatrix} p' \\ p'_x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ p_x \end{pmatrix}, \quad (62)$$

其中 $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ 、 $p_x = \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{p}$ 、 $p'_x = \hat{\boldsymbol{\beta}} \cdot \mathbf{p}'$ 。从 p' 公式推出

$$p' = \gamma(p - \beta p_x) \Rightarrow \frac{p'}{p} = \gamma(1 - \beta p_x/p) = \gamma(1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}). \quad (63)$$

从 p'_x 公式推出

$$p'_x = \gamma(p_x - \beta p) = -\gamma p(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}} + \beta). \quad (64)$$

\mathbf{p}' 垂直于 $\boldsymbol{\beta}$ 的分量不变，因此有

$$\mathbf{p}'_{\perp} = \mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - (\mathbf{p} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}} = -p[\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}]. \quad (65)$$

由此得

$$\mathbf{p}' = p'_x \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{p}'_{\perp} \quad (66)$$

$$-p'\mathbf{n}' = -\gamma p[(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \beta] - p[\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}] \quad (67)$$

$$\mathbf{n}' = \frac{p}{p'}[\mathbf{n} + \gamma\boldsymbol{\beta} + (\gamma - 1)(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}]. \quad (68)$$

将(63)代入上式得

$$\mathbf{n}' = \frac{\gamma^{-1}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta} + (1 - \gamma^{-1})(\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}}}{1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}. \quad (69)$$

由于 $1 - \gamma^{-1} = 1 - \sqrt{1 - \beta^2} = \beta^2/(1 + \sqrt{1 - \beta^2})$ ，上式可写成

$$\mathbf{n}' = \frac{\gamma^{-1}\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}/(1 + \gamma^{-1})}{1 + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}}. \quad (70)$$

这就是(34)式，也是[Urban & Seidelmann 2013]的(7.40)，只是[Urban & Seidelmann 2013]所用的符号和此处不同，那里的 \mathbf{p}_1 相当于这里的 \mathbf{n}' ，那里的 \mathbf{p} 相当于这里的 \mathbf{n} ，那里的 β 相当于这里的 γ ，那里的 \mathbf{V} 相当于这里的 \mathbf{v} 。