



UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Universidad Nacional de Colombia

Departamento de Matemáticas

Análisis Numérico 2

**Soluciones al problema de difusión con interfase fractal de la curva de
Koch**

Yessica Vanessa Trujillo Ladino

ytrujillol@unal.edu.co

Profesor: Juan Galvis

jcgalvisa@unal.edu.co

Junio-2023

Resumen

En este proyecto, se estudiarán los conjuntos autosimilares, centrándose en la curva de Koch. Además de analizar las propiedades de estos conjuntos, se modelará el proceso de difusión en dominios fractales, específicamente en la curva de Koch. También se explorará la difusión en un dominio dividido en dos fases, utilizando la curva de Koch como interfaz. Para lograr esto, se emplearán propiedades de la energía asociadas al problema de Dirichlet y se utilizará el método de elementos finitos para obtener aproximaciones numéricas de los modelos desarrollados. Se analizará la forma en que las soluciones numéricas obtenidas a través del método de elementos finitos se comportan en términos de su regularidad y convergencia. Esto nos ayudará a determinar si los resultados obtenidos son precisos.

Abstract

In this project, self-similar sets will be studied, focusing on the Koch curve. In addition to analyzing the properties of these sets, the process of diffusion in fractal domains will be modeled, specifically in the Koch curve. The diffusion in a domain divided into two phases will also be explored, using the Koch curve as an interface. To achieve this, energy properties associated with the Dirichlet problem will be employed, and the finite element method will be used to obtain numerical approximations of the developed models. The behavior of the numerical solutions obtained through the finite element method in terms of their regularity and convergence will be analyzed. This will help us determine the accuracy of the obtained results.

Índice

1. Introducción	5
2. Conceptos previos	7
2.1. Métricas y espacios	7
2.2. Método de elementos finitos en 2D	11
2.3. Teoría del error	14
3. Difusión con interfase suave	16
3.1. Ejemplo de difusión con interfase recta	17
3.2. Ejemplo de difusión con interfase curva	20
4. Conjuntos autosimilares	24
4.1. Teorema de contracción de Banach	24
4.2. Métrica de Hausdorff	26
4.3. Construcción de conjuntos autosimilares	29
4.4. Fractales	31
4.4.1. La curva de Koch	31
4.4.2. El copo de nieve de Koch	32
4.4.3. El Triángulo de Sierpinski	34
5. Laplaciano de un grafo	36
5.1. Laplaciano de un grafo	36
5.2. Energía asociada al Laplaciano de un grafo	37
5.2.1. El principio de Dirichlet en \mathbb{R}^n	37
5.2.2. Medida autosimilar	38
5.2.3. Forma de la energía en un grafo	38
6. Difusión en el fractal de la curva de Koch	40
6.1. Difusión sobre el prefractal de la curva de Koch	40
6.2. Soluciones en el prefractal	41
7. Difusión con interfase fractal de la curva de Koch	44
7.1. Difusión con interfase prefractal	46
7.2. Soluciones con interfase prefractal	46
8. Conclusiones	55
9. Bibliografía	56

Índice de figuras

1.	Una triangulación de elementos finitos en D .	12
2.	Función base φ_j en D .	13
3.	Elementos en T^h .	14
4.	Dominio con interfase suave.	16
5.	Dominio $D = [0, 1] \times [0, 1]$ con una interfase recta.	18
6.	Triangulación en $D = [0, 1] \times [0, 1]$, con $n = 5$.	18
7.	Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).	19
8.	Soluciones en $3D$ con P_1 (izquierda) y con P_2 (derecha).	19
9.	Triangulación en $D = [0, 1] \times [0, 1]$, con $n = 50$.	19
10.	Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).	20
11.	Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).	20
12.	Dominio $D = [0, 1] \times [0, 1]$ con una interfase curva.	21
13.	Triangulación en D con $n = 5$.	21
14.	Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).	22
15.	Soluciones en $3D$ con P_1 (izquierda) y con P_2 (derecha).	22
16.	Triangulación en $D = [0, 1] \times [0, 1]$, con $n = 50$.	22
17.	Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).	23
18.	Soluciones en $3D$ con P_1 (izquierda) y con P_2 (derecha).	23
19.	Punto fijo de la función $f(x) = \cos(x)$ en $([0, 1], d_{\text{usual}})$.	26
20.	Primeras seis iteraciones de la curva de Koch.	32
21.	Primeras seis iteraciones del copo de nieve de Koch.	34
22.	Primeras seis iteraciones del triángulo de Sierpinski.	35
23.	Grafo etiquetado con 3 vértices y 4 aristas.	36
24.	Σ_1 (Izquierda) y Aproximación de $u(x, y)$ en el espacio de la curva de Koch (Derecha).	42
25.	Σ_3 (Izquierda) y Aproximación de $u(x, y)$ en el espacio de la curva de Koch (Derecha).	42
26.	Σ_5 (Izquierda) y Aproximación de $u(x, y)$ en el espacio de la curva de Koch (Derecha).	43
27.	Σ_7 (Izquierda) y Aproximación de $u(x, y)$ en el espacio de la curva de Koch (Derecha).	43
28.	Dominio con interfase la curva de Koch.	44
29.	Triangulación en D_0 con $n' = 5$ (114 triángulos).	47
30.	Solución en D_0 usando P_1 (izquierda) y visualización en $3D$ de la solución (derecha).	47
31.	Triangulación en D_1 con $n' = 5$ (236 triángulos).	48
32.	Solución en D_1 usando P_1 (izquierda) y visualización en $3D$ de la solución (derecha).	49
33.	Triangulación en D_2 con $n' = 5$ (1112 triángulos).	50
34.	Solución en D_2 usando P_1 (izquierda) y visualización en $3D$ de la solución (derecha).	50
35.	Triangulación en D_3 con $n' = 5$ (7120 triángulos).	51
36.	Solución en D_3 usando P_1 (izquierda) y visualización en $3D$ de la solución (derecha).	52
37.	Triangulación en D_4 con $n' = 2$ (9834 triángulos).	53
38.	Solución en D_4 usando P_1 (izquierda) y visualización en $3D$ de la solución (derecha).	53

1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales son una herramienta para modelar y entender muchos fenómenos físicos, naturales y sociales complejos. Las EDP's tienen aplicaciones en diferentes áreas como por ejemplo el modelamiento de fenómenos físicos como el flujo de fluidos, la propagación del sonido y la luz, la difusión del calor y la electricidad, la mecánica cuántica y la relatividad general, entre otros, ver [8, 9]. En ingeniería las EDP's son principalmente utilizadas para resolver problemas de optimización de estructuras, la simulación de sistemas eléctricos y electrónicos, la predicción de la dinámica de fluidos en sistemas mecánicos, ver [9]. En economía y finanzas se utilizan en el estudio de modelos económicos y financieros para predecir la evolución de los precios (como en la bolsa de valores), la tasa de interés y otros indicadores económicos, ver [10]. En biología son usadas para estudiar la dinámica de la población, propagación de ondas eléctricas en el cerebro y difusión de sustancias químicas, ver [11, 24]. También en la meteorología y la climatología las EDP's son usadas para predecir la evolución del clima y el tiempo, ver [12]. Esto demuestra que las ecuaciones diferenciales parciales forman parte de nuestra vida cotidiana.

Los fractales son objetos geométricos que exhiben una estructura irregular y autosimilar en diferentes escalas, lo que significa que la forma del objeto se repite a diferentes niveles de magnificación, ver [14]. Los fractales tienen aplicaciones en muchos campos, tales como la física y la matemática y la biología, ver [13]. Los fractales se utilizan para modelar y describir fenómenos naturales y artificiales que tienen una estructura irregular y compleja, como las ramificaciones de los árboles, los patrones de crecimiento de copos de nieve, las formas de las montañas, las nubes, las costas y los ríos, la curva formada por las olas (esta es conocida como la curva de Koch), entre otros, ver [14]. Los fractales también se han utilizado para modelar sistemas biológicos, como la forma de los pulmones y los vasos sanguíneos, y para la generación de paisajes y texturas en gráficos por computador, ver [15].

Los enfoques de la difusión en dominios fractales son: el estudio de la propagación de partículas o moléculas en medios irregulares y fractales, la dispersión de partículas en el aire, la difusión de moléculas en las células, e incluso el problema de quebrar en dos una barra de metal o un material similar, la superficie que se forma en el punto de quiebre no siempre es suave y esta puede ser modelada por un conjunto fractal, ver [16]. En un medio fractal, el proceso de difusión es más lento que en un medio regular debido a su estructura no homogénea, ver [3, 16].

La difusión en un medio fractal se puede modelar con una EDP. La solución de la ecuación de difusión fractal la podemos hallar con ayuda de teoría de la medida, teoría de la probabilidad y geometría fractal, tal como se verá más adelante, ver [1, 3, 16].

El método de elementos finitos (FEM) es un método numérico utilizado para dar aproximaciones numéricas de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), ver [5, 17]. El objetivo principal de este método es discretizar un dominio continuo en subdominios más pequeños llamados elementos finitos. Estos elementos finitos son formas geométricas básicas, como triángulos o cuadriláteros para problemas bidimensionales, tetraedros o hexaedros en el caso de problemas tridimensionales. Al dividir el dominio

en elementos finitos, el problema original se transforma en un conjunto de ecuaciones algebraicas, que se ensamblan para formar un sistema de ecuaciones, dicho sistema se resuelve numéricamente utilizando técnicas de álgebra lineal, como la eliminación de Gauss, la descomposición LU o métodos iterativos, ver [25]. Una vez resuelto el sistema, se obtiene la solución aproximada para la variable desconocida en cada punto del dominio discretizado. Conociendo esto se evalúa la solución obtenida y se realiza un análisis de error y precisión. Si la solución no es lo suficientemente precisa, se puede realizar un refinamiento de la malla, es decir, se puede subdividir nuevamente el dominio en elementos más pequeños y aplicar nuevamente el método, ver [5, 17].

En este trabajo se mostrará cómo se modela y resuelve el problema de difusión con dos fases, donde la interfase es una curva suave. A continuación, se presentará la construcción y algunas propiedades de los conjuntos autosimilares, que serán aproximados en la métrica de Hausdorff por conjuntos de grafos asociados, es decir, pre-fractales. El enfoque se centrará en el estudio de la curva de Koch y posteriormente se resolverá el problema de Dirichlet en esta curva utilizando el método de elementos finitos extendido a conjuntos autosimilares. Se ilustrarán las soluciones obtenidas numéricamente en algunos pre-fractales. Mas adelante, se presentará el modelo de difusión en dos fases, donde la interfase estará representada por la curva de Koch, este problema también se resolverá utilizando el método de elementos finitos (FEM). Se ilustrarán las soluciones encontradas y se analizará el desempeño y la convergencia de dichas soluciones.

2. Conceptos previos

Antes de introducir de manera formal los conjuntos autosimilares y solucionar el problema de difusión, comenzaremos dando definiciones y enunciando teoremas que resultan fundamentales para la comprensión de los temas a tratar. Adicional a esto se va a mostrar una breve introducción al método de elementos finitos (FEM) con el cual se da solución a problemas de difusión. El material aquí presentado fue tomado de [4, 5, 7]

2.1. Métricas y espacios

Para comenzar, es necesario establecer los espacios en los que vamos a trabajar. Los **espacios de Sóbolev** son los adecuados para esto.

Empezamos considerando un espacio vectorial real E , donde $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ define un producto interno si se satisfacen que $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in E$, $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $x, y \in E$, y $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ para todo $x, y, z \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A partir de un espacio vectorial E se dice que $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma, si, dados $x, y \in E$ se tiene que $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$, $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y si satisface la desigualdad triangular $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un ejemplo usual de norma es la norma Euclidiana en \mathbb{R}^n

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2},$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Así, todo producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre un espacio vectorial V induce una norma, se conoce como la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y a la función $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Se trabajara espacios vectoriales normados tal como se sigue en la siguiente definición.

Definición 2.1.1 (Sucesión de Cauchy) Sea V un espacio vectorial con norma $\| \cdot \|$, y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en V . Si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$ se tiene que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$, entonces se dice que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy.

Es natural pensar en la utilidad de las sucesiones de Cauchy, de aquí se sigue la siguiente definición, ver [7].

Definición 2.1.2 (Espacio completo) Sea V un espacio vectorial normado, se dice que V es un espacio vectorial completo si toda sucesión de Cauchy converge.

A través de clases de equivalencia dadas por sucesiones de Cauchy es posible completar cualquier espacio vectorial normado, ver [7].

Definición 2.1.3 (Espacios de Hilbert) Si V un espacio vectorial con producto interno $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ completo con la norma inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ decimos que V es un espacio de Hilbert.

Veamos ahora un ejemplo común de un espacio de Hilbert para familiarizarnos un poco con su definición.

Ejemplo 2.1.1 *El espacio vectorial \mathbb{R}^n con el producto punto usual que induce la norma euclidiana es un espacio de Hilbert.*

A continuación se introduce la noción de métrica, esto fue tomado de [7].

Definición 2.1.4 (Espacio métrico) *Un espacio métrico es un conjunto M , no vacío, de puntos dotado de una función $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ (que llamaremos métrica del espacio) que satisface las siguientes propiedades, cualesquiera que sean los puntos x, y, z de M :*

- (i) $d(x, x) = 0$,
- (ii) $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$,
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Desigualdad triangular).

El valor $d(x, y)$ puede considerarse como la distancia entre x e y .

Un espacio métrico se designa por medio de (M, d) .

Ejemplo 2.1.2 *Sea $M = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = \|x - y\|$. Esta métrica se llama métrica euclídea.*

A continuación, se dará una breve introducción de lo que significa un conjunto compacto, para esto recordemos que $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se dice un cubrimiento abierto de S si cada O_α es abierto en V , y $S \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha$. Además, un subcubrimiento finito de $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se define como una familia finita $\{O_{\alpha_n}\}_{1 \leq n \leq k}$ contenida en $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $S \subseteq \bigcup_{1 \leq n \leq k} O_{\alpha_n}$, ver [7].

Definición 2.1.5 (Compacidad) *Un conjunto $S \subseteq V$, con V un espacio vectorial normado, se dice compacto, si todo cubrimiento abierto $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de S admite un subcubrimiento finito $\{O_{\alpha_n}\}_{1 \leq n \leq k}$.*

Se pueden derivar varias caracterizaciones de lo que implica ser un conjunto compacto a partir de esta definición. Un ejemplo de esto es \mathbb{R}^n , aquí los conjuntos compactos son conjuntos cerrados y acotados.

Como se menciono anteriormente el propósito de esta sección es mostrar los espacios de Sóbolev, antes de continuar es necesario dar una breve introducción a ciertos conceptos de teoría de la medida. Comenzaremos definiendo que es una σ -álgebra, para más detalle de esto ver [4].

Definición 2.1.6 (σ -álgebra) *Sea Ω un conjunto no vacío. Llamamos σ -álgebra de conjuntos sobre Ω a $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ si satisface:*

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- (ii) Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, es decir, es cerrada bajo complementos.
- (iii) Si $A_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$, es decir, es cerrada bajo uniones enumerables.

Además de ser cerrada para uniones enumerables, una σ -álgebra también es cerrada por intersecciones enumerables, esto es $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c$.

Definición 2.1.7 Diremos que una función $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ definida sobre una σ -álgebra de conjuntos es una medida si satisface:

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (ii) Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq B$ entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (iii) Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de subconjuntos disjuntos de \mathcal{F} entonces $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, esto es conocido como σ -aditividad.

El objetivo es encontrar una colección de conjuntos $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y una medida $m_n : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ tal que se cumpla lo siguiente

- Si $A \in \mathcal{F}_n$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $x + A \in \mathcal{F}_n$ y $m_n(A) = m_n(x + A)$,
- Se tiene que $[0, 1]^n \in \mathcal{F}_n$ y $m_n([0, 1]^n) = 1$,

donde m_n es llamada medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n y los elementos de \mathcal{F}_n son llamados conjuntos Lebesgue medibles.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ donde $m_n^*(A)$ se conoce como la medida exterior de A , y se puede ver como la medida del cubrimiento finito de A .

Proposición 2.1.1 La función $m^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty]$ satisface lo siguiente

1. $m_n^*(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subseteq B$ entonces $m_n^*(A) \leq m_n^*(B)$.
3. Sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia de conjuntos tales que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ entonces $m_n^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_n^*(A_i)$ (σ -subaditividad).
4. $m_n^*(A) = m_n^*(x + A)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ya conocemos que es una medida, ahora demos una definición que nos ayudara a conocer cuando un conjunto es medible.

Definición 2.1.8 (Caratheodory) Diremos que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible (o Lebesgue medible) si para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ se tiene

$$m_n^*(A) = m_n^*(A \cap E) + m_n^*(A \cap E^c).$$

Se denotara por μ_n a la colección de todos los conjuntos medibles.

Teorema 2.1.1 μ es una σ -álgebra y la restricción de m_n^* a μ_n ($m_n^*|_{\mu_n}$) es σ -aditiva.

Para detalles de la demostración puede consultar [4].

Se tiene que $m_n^*|_{\mu_n}$ es una medida, más en específico es la medida de Lebesgue.

Así como es posible medir conjuntos también podemos medir funciones.

Definición 2.1.9 (Función medible) Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, se dice que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función medible si para todo $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto se tiene que $f^{-1}(V) \in \mu_n$. Si para todo $V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ (σ -álgebra de Borel de \mathbb{R}^n) diremos que f es Borel medible.

Se tiene que Borel medible implica Lebesgue medible, pero no al contrario. Para referirnos a Lebesgue medible se acostumbra a usar la expresión medible.

Definición 2.1.10 (Función simple) Dado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible se dice que $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función simple si f es medible y el cardinal de $f(\Omega)$ es finito.

Se denota por $S(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones simples de Ω en \mathbb{R} .

Ejemplo 2.1.3 Sea $E \subseteq \Omega$ un subconjunto medible en \mathbb{R}^n , se tiene que

$$\begin{aligned} f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 \text{ si } x \in E, \\ x &\mapsto 0 \text{ si } x \notin E, \end{aligned}$$

es una función simple, esta función es conocida como función característica o indicadora, y se denota por χ_E .

Es natural pensar en la integral de una función simple sobre una medida, dicha integral es conocida como la integral de Lebesgue.

Definición 2.1.11 Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función simple que asume los valores $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_N\} \subseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ (distintos), se define la integral de Lebesgue de f como

$$\int_{\Omega} f dm := \sum_{i=1}^N c_i m_n(f^{-1}(\{c_i\})).$$

Si no se tiene que la función a integrar es simple no significa que no podamos realizar la integral de Lebesgue, basta con que la función sea medible, tal como se ve a continuación.

Definición 2.1.12 (Integral de Lebesgue) La integral de Lebesgue de una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ medible se define como

$$\int_{\Omega} f dm := \sup \left\{ \int_{\Omega} g dm : g \text{ es simple y } 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Consideremos Ω un conjunto abierto, para $p \in [1, \infty)$ se define el espacio vectorial

$$L_p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f|^p dm < \infty \right\}.$$

Una norma natural para definir en estos espacios es:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ si } p < \infty.$$

Ya conociendo los espacios L_p podemos exhibir los espacios de Sóbolev.

Definición 2.1.13 (Espacio de Sóbolev) *Un espacio de Sóbolev es un espacio vectorial normado de funciones, que puede verse como un subespacio de un espacio L_p . dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ el espacio de Sóbolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define como*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L_p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L_p(\Omega), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N} : |\alpha| \leq m\},$$

donde $D^\alpha f$ denota las derivadas parciales de f .

Es claro que $W^{m,p}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.

Definición 2.1.14 (Norma del espacio de Sóbolev) *La norma del espacio de Sóbolev se define a partir de la norma $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ del espacio L_p , de la siguiente forma*

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < \infty.$$

Los espacios de Sóbolev con $p = 2$ tienen la misma estructura de un espacio de Hilbert, observe que $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, donde el producto interno se define a partir del producto interno de L_2 tal como se sigue

$$L_2 : (f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L_2(\Omega)}.$$

Se define el espacio $H_0^m(\Omega)$ de la siguiente manera: $H_0^m(\Omega) = \overline{H^m(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)}$, ver [5].

2.2. Método de elementos finitos en 2D

En esta sección presentaremos como funciona el método de elementos finitos en 2D, el material presentado aquí fue tomado de [5, 17].

El método de elementos finitos da una solución aproximada de $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$u(x) \simeq \beta_0 \phi_0(x) + \beta_1 \phi_1(x) + \dots + \beta_n \phi_n(x).$$

Daremos una breve idea de como funciona FEM para resolver el siguiente problema de difusión

$$(S) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que :} \\ -\text{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), \text{ para todo } x \in D, \\ u(x) = g(x), \text{ para todo } x \in \partial D. \end{cases}$$

Al multiplicar por una función de prueba $v(x) \in C_0^\infty(D)$, se tiene lo siguiente

$$-\text{div}(k(x)\nabla u(x))v(x) = f(x)v(x).$$

Integrando sobre el dominio D se sigue que

$$\int_D -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x))v(x) = \int_D f(x)v(x).$$

Integrando por partes

$$\int_D k(x)\nabla u(x)\nabla v(x) - \int_{\partial D} \nabla u(x)\vec{n}(x)v(x) = \int_D f(x)v(x).$$

Asumiendo que la función de prueba toma el valor 0 en la frontera se tiene que

$$\int_D k(x)\nabla u(x)\cdot\nabla v(x) = \int_D f(x)v(x).$$

Así la formulación débil del problema es:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que :} \\ \int_D k(x)\nabla u(x)\nabla v(x) = \int_D f(x)v(x), \text{ para todo } v(x) \in C_0^\infty(D), \\ u(x) = g(x), \text{ para todo } x \in \partial D. \end{array} \right.$$

Ahora, si suponemos que D es un dominio poligonal y sea T^h una triangulación de dicho dominio, de esta manera D queda dividido en elementos triangulares, digamos K_1, K_2, \dots, K_m , donde cada K_i es un triángulo, esto quiere decir que $D = \bigcup_{i=1}^m \overline{K_i}$, y además $K_i \cap K_j = \emptyset$, es decir, los triángulos no se solapan, y $\overline{K_i} \cap \overline{K_j}$ es o bien K_i si $i = j$, una arista (la que tienen en común K_i y K_j), un vértice (el común K_i y K_j) o vacío.

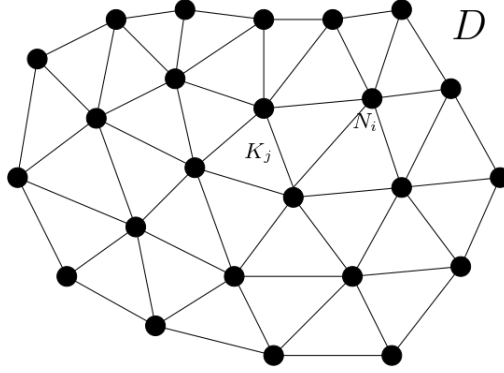


Figura 1: Una triangulación de elementos finitos en D .

Se define ahora el siguiente conjunto de funciones

$$P^r(T^h) = \{v : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ es globalmente continua, } v|_{K_i} \text{ es un polinomio de grado } r \text{ en cada variable}\}.$$

$$P_0^1(T^h) = \left\{ v \in P^1(T^h) \mid v(x) = 0 \text{ para todo } x \in \partial D \right\}.$$

Conociendo esto, se tiene que la formulación de Galerkin del problema es la siguiente

$$(G) = \begin{cases} \text{Encontrar } u(x) \in P_1(T^h) \text{ tal que} \\ \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) = \int_D f(x) v(x), \quad v(x) \in P_0^1(T^h). \end{cases}$$

Ahora, las funciones base para $P^1(T^h)$ son

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i, \\ 0, & x \neq x_i. \end{cases}$$

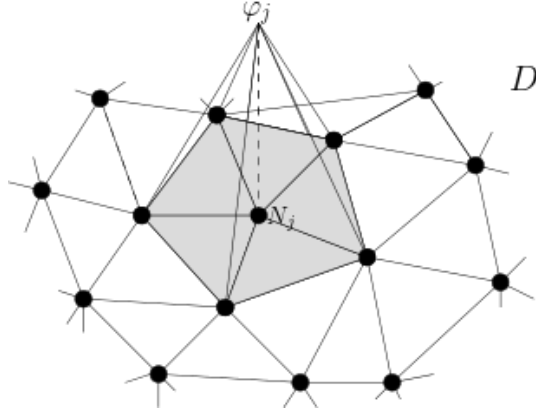


Figura 2: Función base ϕ_j en D .

Esta función es de grado 1 en cada elemento.

Sea $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i \in D\}$ el conjunto de índices interiores, y $\Gamma = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i \in \partial D\}$ el conjunto de índices de la frontera, como $u(x) \in P^1(T^h)$ y se quiere que en la frontera del dominio $u(x) = g(x)$ entonces se busca una solución de la forma

$$u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i(x) + \sum_{\ell \in \Gamma} g(x_\ell) \phi_\ell(x),$$

y como asumimos que la función de prueba es 0 en la frontera, entonces $u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i(x)$.

Con ayuda de las funciones base tenemos que la formulación matricial del problema es la siguiente

$$(M) \left\{ A \vec{\alpha} = \vec{b}, \right.$$

donde $\vec{\alpha} = [\alpha_i]_{i \in I}$, $a_{ij} = \int_D k(x) \nabla \phi_{x_i}(x) \nabla \phi_{x_j}(x)$, $i, j \in I$, $b_i = \int_D f(x) \phi_i(x)$.

2.3. Teoría del error

En esta sección se van a presentar algunos teoremas para la estimación de errores en problemas elípticos donde la solución hallada es usando funciones lineales por partes en 2D, para más detalle de esto consultar [5].

Primero vamos a considerar $V = H^1(D)$ y $V_h = \{v \in V : v|_K \in P_1(K), \text{ para todo } K \in T^h\}$, donde $T^h = \{K\}$ es una triangulación de $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Para $K \in T^h$ se define

$$\begin{aligned} h_K &:= \text{diámetro de } K, \\ \rho_K &:= \text{diámetro del círculo inscrito en } K, \\ h &= \max_{K \in T_h} h_K. \end{aligned}$$

Se va a analizar una familia de triangulaciones $\{T^h\}$, se supone que existe una constante positiva β independiente de la triangulación T^h tal que

$$\frac{\rho_K}{h_K} \geq \beta, \quad \text{para todo } K \in T^h.$$

Sea N_i , $i = 1, 2, \dots, M$ los vértices de T^h , dado $u \in C^0(\overline{D})$ se define la interpolación $\pi_h u \in V_h$ por $\pi_h u(N_i) = u(N_i)$, con $i = 1, 2, \dots, M$.

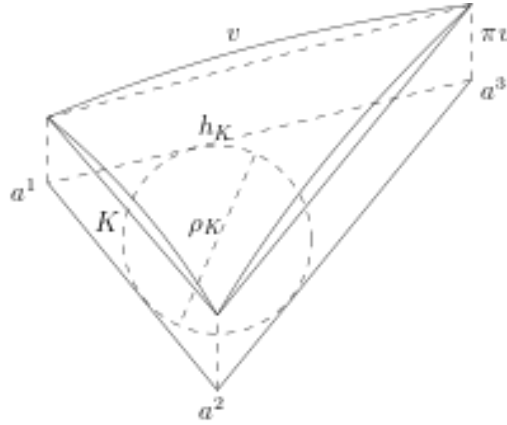


Figura 3: Elementos en T^h .

Teorema 2.3.1 Sea $K \in T^h$ con vértices a^i , con $i = 1, 2, 3$. Dada $v \in C^0(\overline{K})$ sea πv la interpolación lineal de v , definida por

$$\pi v(a^i) = v(a^i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Entonces

$$\|v - \pi v\|_{L^\infty(K)} \leq 2h_K^2 \max_{x \in K, \ell, m \in \{1, 2\}} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_\ell \partial x_m} \right\|_{L^\infty(K)},$$

$$\max \|\partial_\ell(v - \pi v)\|_{L^\infty(K)} \leq 6 \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{x \in K, \ell, m \in \{1,2\}} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_\ell \partial x_m} \right\|_{L^\infty(K)},$$

donde

$$\|v\|_{L^\infty(K)} = \max_{x \in K} |v(x)|.$$

La demostración se puede ver en [5].

Teorema 2.3.2 Sea $K \in T^h$ con vértices a^i , con $i = 1, 2, 3$. Dada $v \in C^0(\overline{K})$ sea πv la interpolación lineal de v , definida por

$$\pi v(a^i) = v(a^i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Entonces existe una constante C tal que

$$\|v - \pi v\|_{L^2(K)} \leq C h_K^2 |v|_{H^2(K)},$$

$$\|v - \pi v\|_{H^1(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}.$$

La demostración se puede ver en [5].

Para interpolación con polinomios de mayor grado se tiene que

$$\|u - \pi_h\|_{L^2(D)} \leq C h^{r+1} |u|_{H^{r+1}(D)},$$

$$\|u - \pi_h\|_{H^1(D)} \leq C h^r |u|_{H^{r+1}(D)}.$$

donde r es el grado del polinomio, así $r \geq 1$.

3. Difusión con interfase suave

En este capítulo se presenta como se soluciona el problema que modela el flujo sobre un dominio con dos fases, para más detalles de esto ver [20].

Se considera un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, abierto, sin incluir la frontera y acotado, y además con frontera suave dividida en dos partes por una interfase Γ , dicha interfase es una curva suave que completa el dominio $D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$ (ver Figura 4). En el dominio ya mencionado se desea resolver el siguiente problema,

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ -\Delta u = f \text{ en } D_1 \cup D_2, \\ u = 0 \text{ en } \partial D, \end{cases}$$

donde

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{en } D_1, \\ u_2, & \text{en } D_2, \end{cases}$$

y también

$$\begin{cases} u_1 = u_2, & \text{en } \Gamma, \\ \partial_n u_1 - \partial_n u_2 = -\Delta_t u \text{ en } \Gamma, \end{cases}$$

donde $\Delta_t u$ el laplaciano tangencial de u en Γ .

Combinando toda la información del problema se tiene

$$(S) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ -\Delta u = f \text{ en } D_1 \cup D_2, \\ u_1 - u_2 = 0, & \text{en } \Gamma, \\ \partial_n u_1 - \partial_n u_2 = -\Delta_t u \text{ en } \Gamma, \\ u = 0 \text{ en } \partial D. \end{cases}$$

Así el dominio descrito en el problema es presentado en la Figura 4.

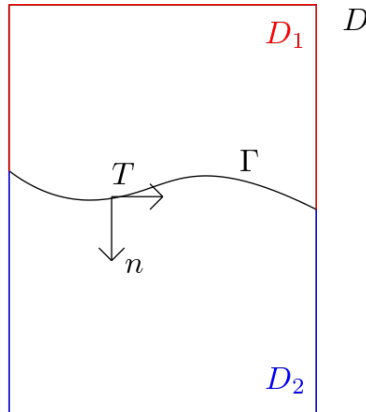


Figura 4: Dominio con interfase suave.

Es útil considerar la formulación débil de dicho problema, consideremos el espacio $H_0^1(D)$, ver [20]. Multiplicamos por una función de prueba v para hallar la forma débil del problema, se tiene

$$-\Delta uv = fv.$$

Integrando sobre el dominio D

$$-\int_D \Delta uv = \int_D fv.$$

Integrando por partes se tiene

$$\int_D \nabla u \nabla v - \int_\Gamma \Delta_\Gamma uv = \int_D fv,$$

además (integrando por partes)

$$-\int_\Gamma \Delta_\Gamma uv = \int_\Gamma \nabla_t u \nabla_t v = \int_\Gamma (\nabla u \cdot T)(\nabla v \cdot T).$$

Luego

$$\int_D \nabla u \nabla v + \int_\Gamma (\nabla u \cdot T)(\nabla v \cdot T) = \int_D fv,$$

y de esta forma, se tiene que la formulación débil del problema es la siguiente:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in H_0^1(D) \text{ tal que:} \\ \int_D \nabla u \nabla v + \int_\Gamma \nabla_t u \nabla_t v = \int_D fv. \text{ para todo } v \in H_0^1(D), \\ v(a) = v(b) = 0. \end{array} \right.$$

3.1. Ejemplo de difusión con interfase recta

Ya vimos como se modela un problema de difusión con dos fases. Resolvamos ahora el siguiente problema; consideremos $D = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, dicho dominio se quiebra en $\Gamma : \{(t, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1\}$ dividiendo a D en dos fases, D_1 y D_2 , así $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$, ver Figura 5, y se tiene que el modelo de difusión es el siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ -\Delta u = 1 \text{ en } D_1 \cup D_2, \\ u = 0 \text{ en } \partial D, \end{array} \right.$$

donde

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{en } D_1, \\ u_2, & \text{en } D_2, \end{cases}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = u_2, \text{ en } \Gamma, \\ \partial_n u_1 - \partial_n u_2 = -\Delta_\Gamma u. \end{array} \right.$$

El dominio de dicho problema es ilustrado en la Figura 5.

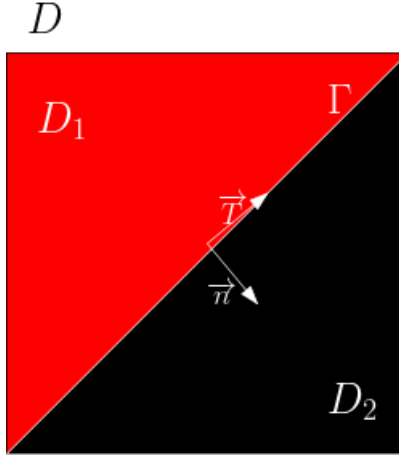


Figura 5: Dominio $D = [0, 1] \times [0, 1]$ con una interfase recta.

Previamente ya vimos que la formulación débil del problema es la siguiente

$$(W) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \int_D \nabla u \nabla v + \int_{\Gamma} (\nabla u \cdot T)(\nabla v \cdot T) = \int_D f v, \\ v(a) = v(b) = 0. \end{cases}$$

Con ayuda de FreeFem++ se va a resolver lo planteado, ver[17]. Para esto comencemos realizando la triangulación del dominio con $n = 5$ ilustrada en la Figura 6.

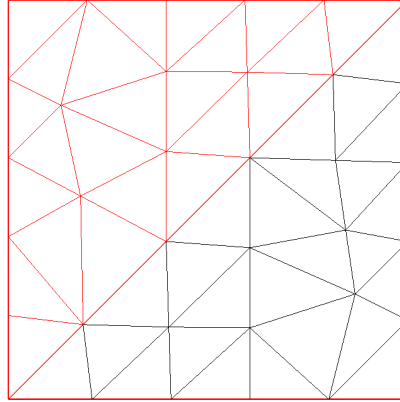


Figura 6: Triangulación en $D = [0, 1] \times [0, 1]$, con $n = 5$.

En la Figura 7 se muestra la solución del problema usando polinomios lineales (izquierda) y usando polinomios cuadráticos (derecha), en el costado derecho de cada solución se observa los isovalores de dicha solución.

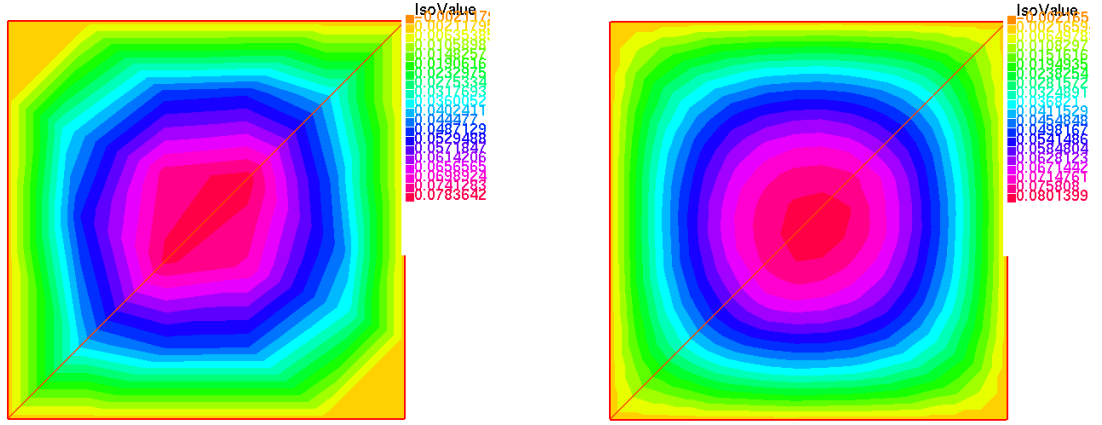


Figura 7: Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).

La visualización en 3D de esta solución es la que se muestra en la Figura 8.

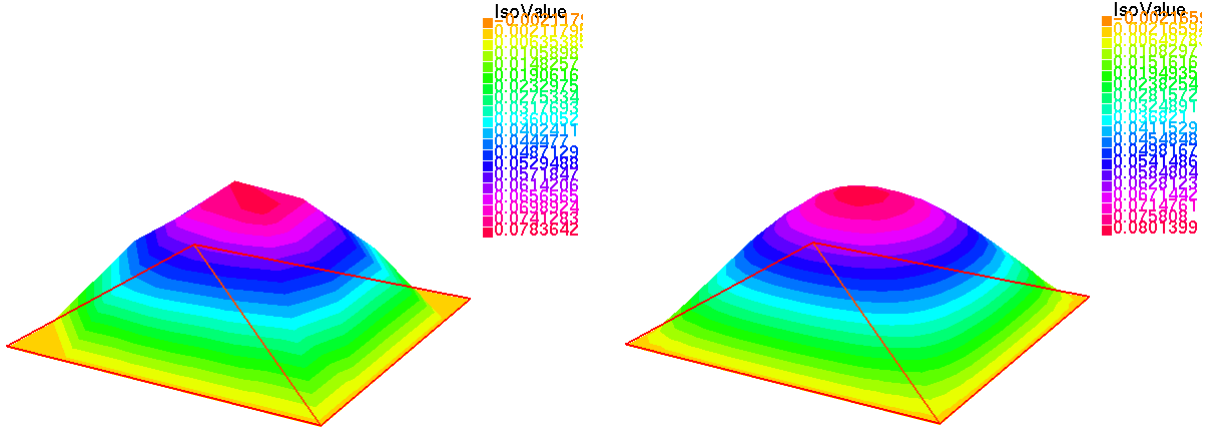


Figura 8: Soluciones en 3D con P_1 (izquierda) y con P_2 (derecha).

Se observa que la solución usando polinomios de grado 2 es más suave y uniforme. Ahora, refinando la malla, la triangulación con $n = 50$ se muestra en la Figura 9.

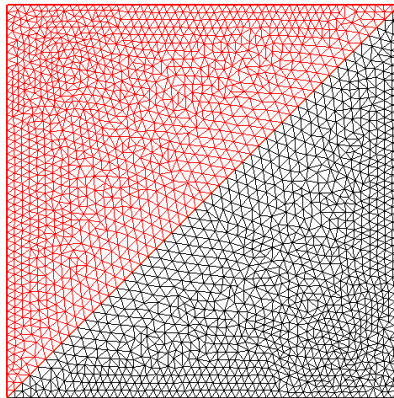


Figura 9: Triangulación en $D = [0, 1] \times [0, 1]$, con $n = 50$.

Seguidamente se muestra la solución del problema usando polinomios lineales (izquierda) y usando polinomios cuadráticos (derecha) en la Figura 10.

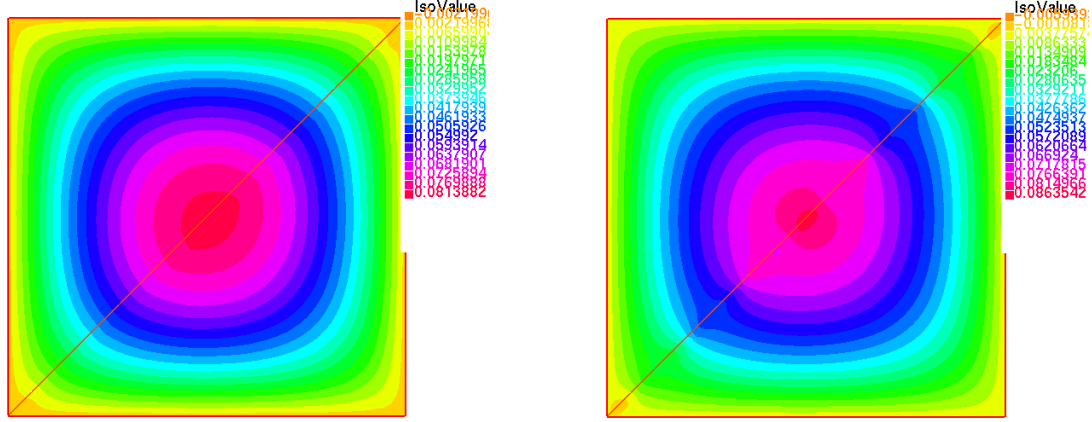


Figura 10: Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).

Observe que las soluciones vistas en 3D se siguen a continuación en la Figura 11.

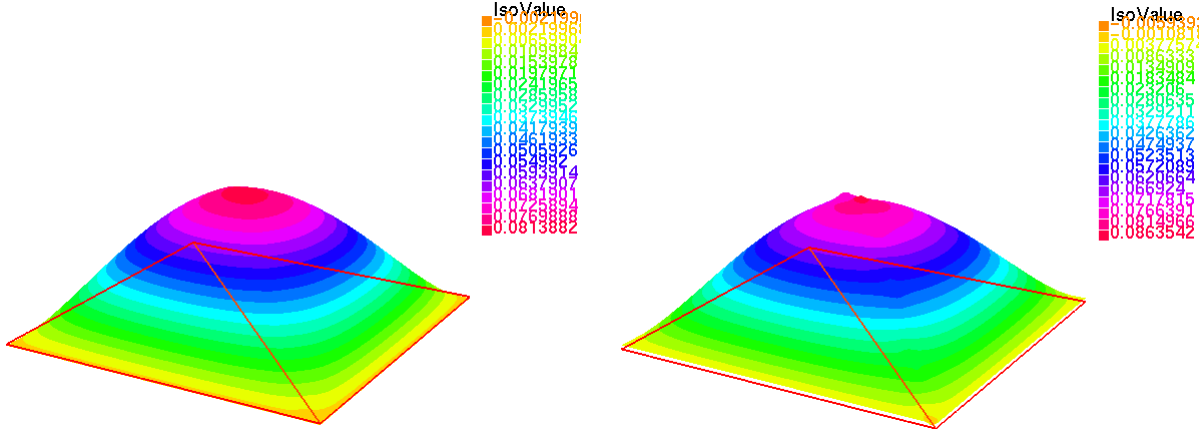


Figura 11: Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).

Sin lugar a dudas con este refinamiento de la malla la solución obtenida usando polinomios lineales es más suave que con la anterior triangulación.

3.2. Ejemplo de difusión con interfase curva

Igual que en el problema anterior consideremos $D = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, dicho dominio se quiebra en $\Gamma : \{(\sin(t) + 1, \cos(t)) \in \mathbb{R}^2 : \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi\}$, dividiendo a D en dos fases, D_1 y D_2 , así $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma$, el modelo de difusión en este dominio dado en su forma fuerte es el siguiente

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ -\Delta u = 1 \text{ en } D_1 \cup D_2, \\ u = 0 \text{ en } \partial D, \end{cases}$$

donde

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{en } D_1, \\ u_2, & \text{en } D_2, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} u_1 = u_2, & \text{en } \Gamma, \\ \partial_n u_1 - \partial_n u_2 = -\Delta_\Gamma u, \end{cases}$$

el dominio descrito se presenta en la Figura 12.

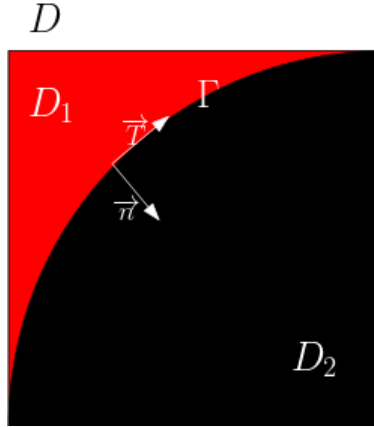


Figura 12: Dominio $D = [0, 1] \times [0, 1]$ con una interfase curva.

Para resolver el problema comencemos triangulando el dominio con $n = 5$, ilustrada en la Figura 13.

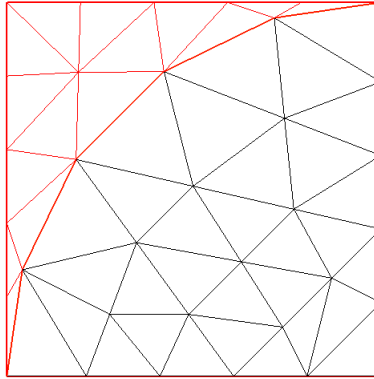


Figura 13: Triangulación en D con $n = 5$.

Así, la solución del problema usando polinomios de grado 1 (izquierda) y grado 2 (derecha) es la que se muestra en la Figura 14.

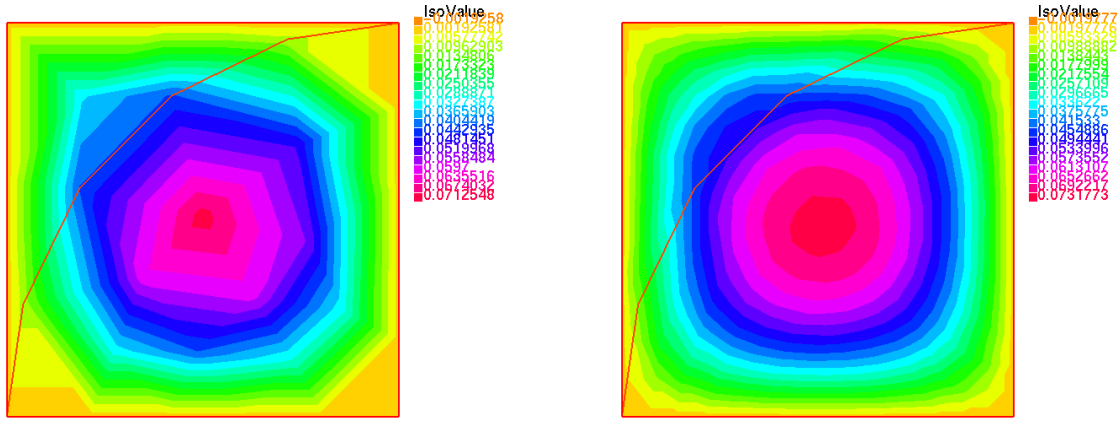


Figura 14: Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).

Dichas soluciones vistas desde 3D se presentan en la Figura 15.

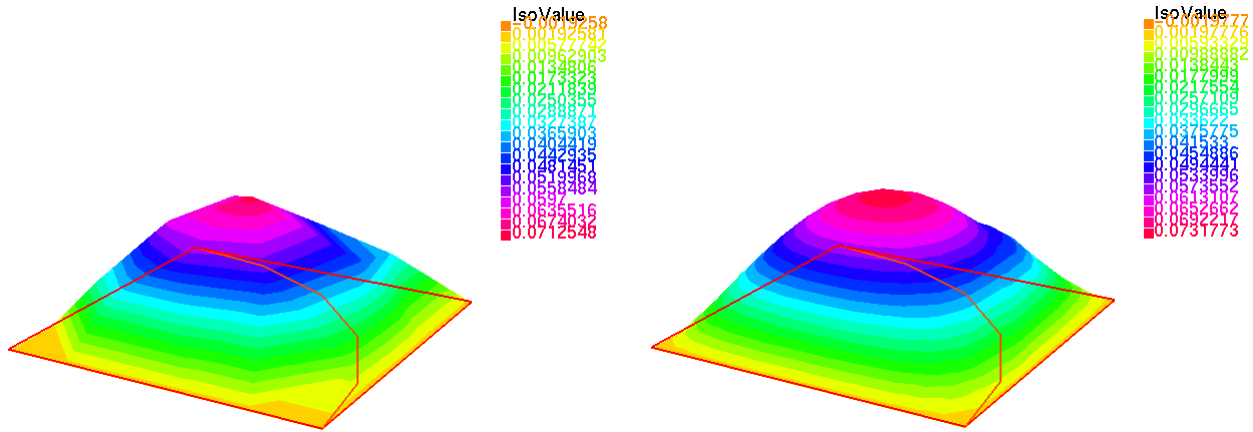


Figura 15: Soluciones en 3D con P_1 (izquierda) y con P_2 (derecha).

Ahora, refinando la malla, triangulando el dominio con $n = 50$ se observa la Figura 16.

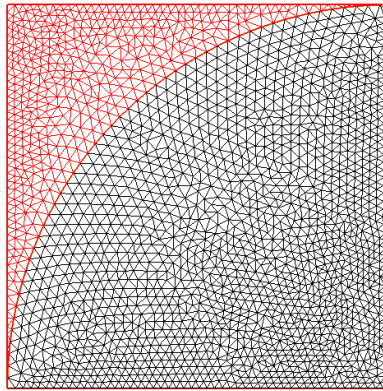


Figura 16: Triangulación en $D = [0, 1] \times [0, 1]$, con $n = 50$.

De esta forma, la solución del problema usando polinomios de grado 1 (izquierda) y grado 2 (derecha)

se presenta en la Figura 17.

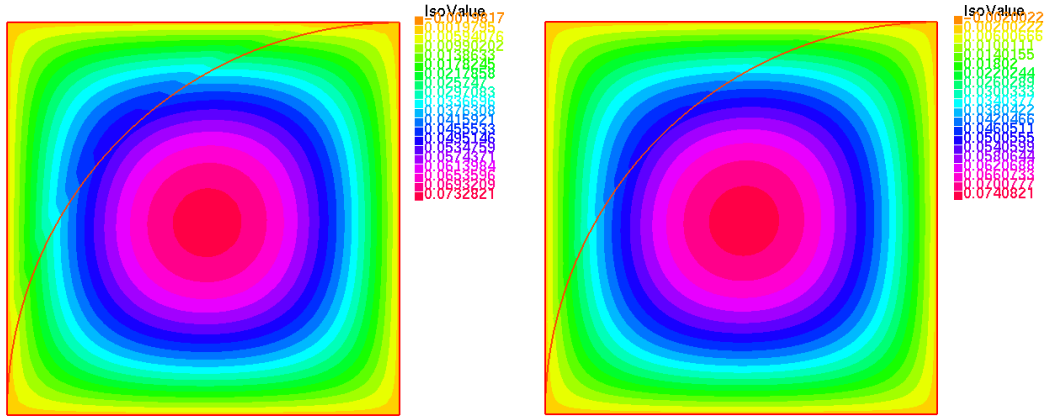


Figura 17: Solución con P_1 (izquierda) y solución con P_2 (derecha).

Dichas soluciones vistas desde 3D son presentadas en la Figura 18.

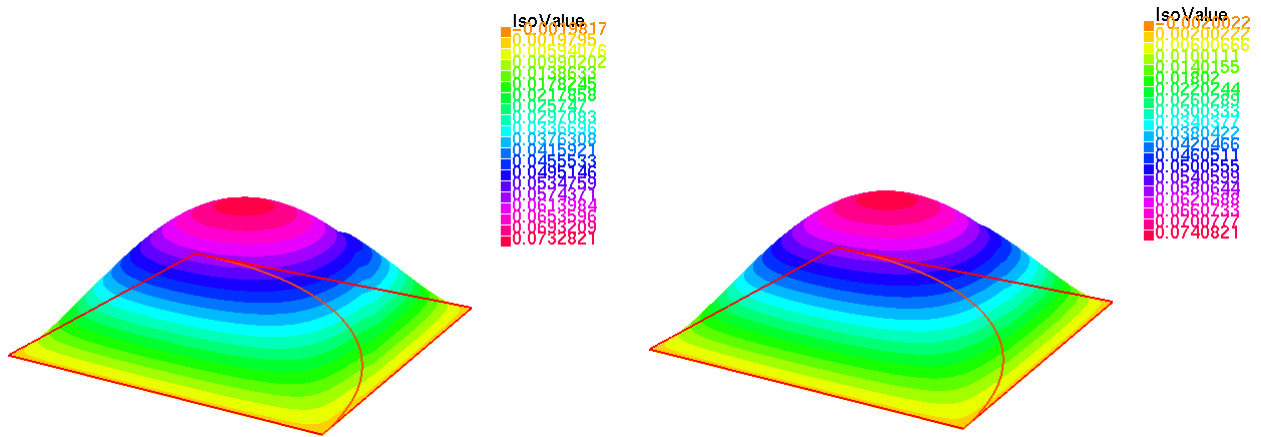


Figura 18: Soluciones en 3D con P_1 (izquierda) y con P_2 (derecha).

Con el refinamiento de la malla se observa una aproximación de la solución más suave y uniforme.

4. Conjuntos autosimilares

Para la construcción de conjuntos autosimilares es necesario el teorema de contracción de Banach, el cual nos garantiza la existencia de un único punto fijo en la métrica de Hausdorff, se mostrarán ejemplos de conjuntos autosimilares y como se construyen y otras nociones. El material es tomado de [1, 6, 7].

4.1. Teorema de contracción de Banach

Para entender como funciona el teorema de contracción se definen algunos conceptos que nos ayudarán. Ver [7].

Definición 4.1.1 (Punto fijo) Sea T una aplicación de un conjunto X en X , si para algún $x \in X$ se tiene que $T(x) = x$, entonces x es un punto fijo para T .

Definición 4.1.2 (Contracción) Sea (X, d) un espacio métrico y M un subconjunto de X . Una función $T : M \rightarrow X$ se dice contractiva si existe $0 < \alpha < 1$ tal que $d(T(x), T(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$.

Un hecho interesante y útil que nos garantiza la continuidad de una función es el que se sigue.

Proposición 4.1.1 Toda función contractiva $T : M \rightarrow X$ es continua en M .

Demostración:

Se tiene que T es una aplicación contractiva, luego para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$ se tiene que $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$ tomemos $\varepsilon = \delta$. Entonces, si $x, y \in M$ tal que $d(x, y) < \delta$ entonces $d(T(x), T(y)) \leq d(x, y) < \delta = \varepsilon$. Por lo tanto T es continua sobre su dominio.

Teorema 4.1.1 (Teorema de contracción de Banach) Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación contractiva entonces f tiene un punto fijo y es único.

Demostración:

Sea $x_0 \in X$, consideremos la sucesión $f(x_n) = x_{n+1}$. Por inducción matemática veamos que $d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0)$:

- Caso base: Para $n = 1$ se tiene que $d(x_2, x_1) = d(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha d(x_1, x_0)$.
- Hipótesis de inducción: Supongamos que se tiene para $k \in \mathbb{N}$, es decir, $d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^k d(x_1, x_0)$.
- Paso inductivo: Veamos que se tiene para $k + 1$

$$\begin{aligned} d(x_{k+2}, x_{k+1}) &= d(f(x_{k+1}), f(x_k)) \\ &\leq \alpha d(x_{k+1}, x_k) \\ &\leq \alpha(\alpha^k d(x_1, x_0)) \\ &= \alpha^{k+1} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Por tanto se tiene para $k + 1$.

Quedando así demostrado que

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0). \quad (1)$$

Consideremos x_m y x_n , con $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m > n$, observe así lo siguiente

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \quad (\text{Por desigualdad triangular}) \\ &\leq \alpha^{m-1} \cdot d(x_1, x_0) + \alpha^{m-2} \cdot d(x_1, x_0) + \dots + \alpha^n \cdot d(x_1, x_0) \quad (\text{Por (1)}) \\ &= d(x_1, x_0) \cdot (\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + \alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + 1) - d(x_1, x_0) \cdot (\alpha^{n-1} + \dots + 1) \\ &= d(x_1, x_0) \cdot \frac{\alpha^m - 1}{\alpha - 1} - d(x_1, x_0) \cdot \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1} \\ &= d(x_1, x_0) \cdot \frac{\alpha^m - \alpha^n}{\alpha - 1} \\ &= \frac{d(x_1, x_0)}{1 - \alpha} \cdot (\alpha^n - \alpha^m) \\ &< d(x_1, x_0) \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Sabemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n = 0$ ya que $0 < \alpha < 1$, entonces $d(x_1, x_0) \cdot \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$, y como X es un espacio completo, la sucesión converge, digamos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Como f es contractiva, por la Proposición 4.1.1 se sigue que f es continua, luego

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = x,$$

por lo tanto $f(x) = x$, luego la función f tiene un punto fijo.

Veamos que el punto fijo es único, supongamos que $f(L_1) = L_1$ y $f(L_2) = L_2$ con $L_1 \neq L_2$, se tiene que

$$d(L_1, L_2) = d(f(L_1), f(L_2)) \leq \alpha d(L_1, L_2)$$

y como $0 < \alpha < 1$, entonces $d(L_1, L_2) = 0$, se sigue que $L_1 = L_2$, llegando así a una contradicción, por lo tanto el punto fijo es único en X . Quedando así demostrado el teorema.

Veamos ahora un ejemplo de como funciona dicho teorema.

Ejemplo 4.1.1 Sea $f : ([0, 1], d_{\text{usual}}) \longrightarrow ([0, 1], d_{\text{usual}})$ tal que $f(x) = \cos(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} d_u(f(x), f(y)) &= |\cos(x) - \cos(y)| \\ &\leq |f'(c)| \cdot |x - y| \quad (\text{usando el teorema del valor medio}) \\ &= |\sin(c)| \cdot |x - y| \quad (\text{para algún } c \in [0, 1]) \\ &\leq |\sin(1)| \cdot d_u(x, y) \end{aligned}$$

de aquí que $\alpha = \sin(1)$, luego $f(x)$ es una contracción, por tanto tiene un único punto fijo en su dominio de definición.

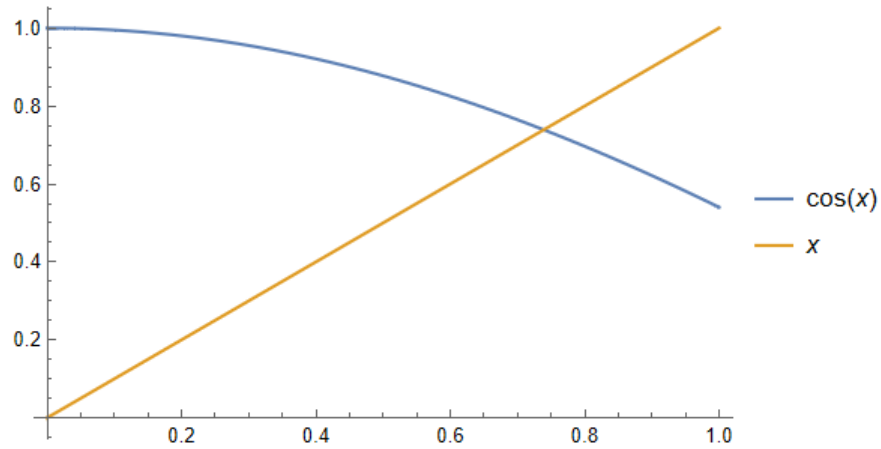


Figura 19: Punto fijo de la función $f(x) = \cos(x)$ en $([0, 1], d_{\text{usual}})$.

4.2. Métrica de Hausdorff

Dimitrie Ponpeiu introdujo la noción de distancia entre subconjuntos compactos del espacio Euclidiano, posterior a esto Hausdorff retoma esta noción para definir una métrica en una familia de subconjuntos compactos no-vacíos de un espacio métrico X , lo cual nos permite construir los espacios métricos de Hausdorff. El material presentado aquí se basa en las referencias [6, 19].

Para comenzar este proceso, consideremos la siguiente definición.

Definición 4.2.1 Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y A un subconjunto no vacío de X , la distancia de x a A esta dada por

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Proposición 4.2.1 Sea (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y A un subconjunto no vacío de X , entonces:

- (i) $d(x, A) \geq 0$.
- (ii) $d(x, A) = 0$ si y solo si $x \in \overline{A}$.

Demostración:

- (i) Dado que (X, d) es un espacio métrico, $d(x, a) \geq 0$ para todo $a \in A$, luego por propiedades del ínfimo $\inf\{d(x, a) : a \in A\} \geq 0$, esto es $d(x, A) \geq 0$.
- (ii) (\rightarrow) Sea $d(x, A) = 0$, razonemos por el absurdo, supongamos que $x \notin \overline{A}$, luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset$, esto implica que $d(x, A) > \varepsilon$, pero esto es una contradicción, luego $x \in \overline{A}$.
 (\leftarrow) Sea $x \in \overline{A}$, por definición para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$, en particular para todo $n \in \mathbb{N}$ se sigue que $B_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset$, esto implica que $d(x, A) < \frac{1}{n}$, y como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ entonces $d(x, A) = 0$.

Quedando así demostrada la proposición.

Para uso posterior consideremos la siguiente definición.

Definición 4.2.2 Dado un espacio métrico compacto M , se define la colección $C(M)$ de subconjuntos no vacíos compactos de M como:

$$C(M) = \{A \subseteq M : A \text{ es no vacío, } A \text{ es compacto}\}.$$

La siguiente definición muestra la separación de Hausdorff.

Definición 4.2.3 (Separación de Hausdorff) Consideremos $X = C(M)$. Sea (X, d) un espacio métrico, y sean $A, B \in X$, la separación de Hausdorff de B a A se define de la siguiente forma:

$$d_H^*(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\}.$$

En la siguiente proposición se muestra que la separación de Hausdorff define una distancia en $C(M)$.

Proposición 4.2.2 Sean A, B, C subconjuntos de M , entonces:

- (i) $d_H^*(B, A) \geq 0$.
- (ii) $d_H^*(B, A) = 0$ si y solo si $B \subseteq \overline{A}$.
- (iii) $d_H^*(B, A) \leq d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)$.

Demostración:

(i) Dado que $d(b, A) \geq 0$ para todo $b \in B$, por propiedades del supremo se sigue que

$$\sup\{d(b, A) : b \in B\} \geq 0,$$

por ende $d_H^*(B, A) \geq 0$.

(ii) (\rightarrow) Supongamos que $d_H^*(B, A) = 0$, esto es $\sup\{d(b, A) : b \in B\} = 0$, luego $d(b, A) = 0$ para todo $b \in B$; por la proposición 4.2.1 se tiene que $b \in \overline{A}$, luego $B \subseteq \overline{A}$.

(\leftarrow) Ahora, si $B \subseteq \overline{A}$ por la proposición 4.2.1 se tiene que $d(b, A) = 0$ para todo $b \in B$, luego $\sup\{d(b, A) : b \in B\} = 0$, esto es $d_H^*(B, A) = 0$.

(iii) Sea $a \in A$ y $c \in C$, sabemos que $d(B, a) \leq d(B, c) + d(c, a)$, luego $d(B, a)$ es una cota inferior de $\{d(B, c) + d(c, a) : c \in C\}$. Así

$$\begin{aligned} d(B, a) &\leq \inf\{d(B, c) + d(c, a) : c \in C\} \\ &\leq \inf\{d(B, c) : c \in C\} + \inf\{d(c, a) : c \in C\} \\ &\leq \sup\{d(B, c) : c \in C\} + d(C, a) \\ &\leq d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A). \end{aligned}$$

Dado que consideramos $a \in A$ arbitrario, entonces $d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)$ es una cota superior de $\{d(B, a) : a \in A\}$. Por ende $d_H^*(B, A) \leq d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)$.

A continuación se muestra como con la separación de Hausdorff se construye la distancia de Hausdorff.

Definición 4.2.4 (Distancia de Hausdorff) Sean A, B subconjuntos no vacíos y acotados de M , la distancia de Hausdorff entre A y B es

$$d_H(A, B) = \max\{d_H^*(A, B), d_H^*(B, A)\}.$$

En la siguiente proposición mostraremos que $(C(M), d_H)$ es un espacio métrico.

Proposición 4.2.3 $(C(M), d_H)$ es un espacio métrico.

Demostración:

Sean $A, B, C \subseteq C(M)$.

- (i) Dado que $d_H^*(A, B) \geq 0$ y $d_H^*(B, A) \geq 0$, entonces $\max\{d_H^*(A, B), d_H^*(B, A)\} \geq 0$, esto es $d_H(A, B) \geq 0$.
- (ii) (\rightarrow) Supongamos que $d_H(A, B) = \max\{d_H^*(A, B), d_H^*(B, A)\} = 0$, por propiedades del máximo $d_H^*(A, B) = 0$ y $d_H^*(B, A) = 0$, esto implica que $A \subseteq \overline{B}$ y $B \subseteq \overline{A}$, como A y B son cerrados entonces $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$, de esto se sigue que $A = B$.
- (\leftarrow) Si $A = B$, entonces $d_H(A, B) = d_H(A, A) = d_H^*(A, A) = 0$.
- (iii) Se tiene que

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\{d_H^*(A, B), d_H^*(B, A)\} \\ &= \max\{d_H^*(B, A), d_H^*(A, B)\} \\ &= d_H(B, A). \end{aligned}$$

- (iv) Sabemos que $d_H^*(A, B) \leq d_H^*(A, C) + d_H^*(C, B)$ y $d_H^*(B, A) \leq d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)$, luego

$$\begin{aligned} d_H(A, B) &= \max\{d_H^*(A, B), d_H^*(B, A)\} \\ &\leq \max\{d_H^*(A, C) + d_H^*(C, B), d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)\} \\ &\leq \max\{d_H^*(A, C) + d_H^*(C, B)\} + \max\{d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)\} \\ &= d_H(A, C) + d_H(C, B). \end{aligned}$$

El espacio métrico de Hausdorff $(C(X), d_H)$ es completo si el espacio métrico inicial lo es, tal como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.4 Si (X, d) es completo entonces el espacio métrico $(C(X), d_H)$ es completo.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [6].

4.3. Construcción de conjuntos autosimilares

En esta sección vamos a aplicar el teorema de contracción de Banach (**Teorema 4.1.1**) al estudio de conjuntos autosimilares, esto mediante el operador de Hutchinson. Ver [19]. Para esto iniciemos considerando la siguiente definición.

Definición 4.3.1 Una función $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ se llama una **similaridad** con radio $r > 0$, si

$$d_Y(f(x), f(y)) = r d_X(x, y).$$

Además, si X es un espacio métrico, decimos que $K \subset C(X)$ es **autosimilar** si existen similaridades f_1, f_2, \dots, f_m , con $m \in \mathbb{N}$, tales que $f_i : X \rightarrow X$, con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, de tal forma que

$$K = f_1(K) \cup \dots \cup f_m(K).$$

A continuación se muestra un ejemplo de un conjunto autosimilar, donde se observa que K es unión de sus imágenes bajo funciones contractivas.

Ejemplo 4.3.1 Sea C el conjunto de Cantor dado por la intersección $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$, donde C_n se define de la siguiente forma

$$C_n = \left[0, \frac{1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^{n-1}}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{3^n - 1}{3^n}, 1\right],$$

C_n es el resultado de quitar el tercio central de cada uno de los subintervalos C_{n-1} . Se tiene que C es autosimilar con respecto a las siguientes funciones

$$f_1(x) = \frac{x}{3}, \quad f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3},$$

dado que $f_1(C) = C \cap \left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $f_2(C) = C \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Además para cada n se observa que

$$f_1(C_n) \cup f_2(C_n) = C_{n+1}.$$

La proposición que se muestra a continuación garantiza la existencia de conjuntos autosimilares.

Proposición 4.3.1 (Operador de Hutchinson) Sea $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ un conjunto finito de contracciones, con constante de contracción $0 < \alpha_i < 1$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Entonces la aplicación $f : C(X) \rightarrow C(X)$, conocida como operador de Hutchinson y definida por $f(A) = \bigcup_{i=1}^m f_i(A)$, es una contracción en el espacio $(C(X), d_H)$.

Demostración:

Sean A, B subconjuntos de $C(X)$ con $d_H(A, B) = r$, consideremos además un conjunto finito de contracciones $\{f_1, \dots, f_m\}$ con constante de contracción $0 < \alpha_i < 1$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Además como d_H

es una métrica se tiene que dado $\epsilon > 0$ se tiene que $d_H(A, B) \leq \epsilon$ si y solo si $A \subseteq B_\epsilon(B)$ y $B \subseteq B_\epsilon(A)$, ver en [19]. Luego sabemos que $B \subseteq B_r(A)$, es decir, para todo $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que $d(a, b) < r$, dado que las f_i son contracciones se tiene que

$$d(f_i(a), f_i(b)) \leq \alpha_i d(a, b) < \alpha_i r.$$

Así, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ se satisface que

$$f_i(B) \subseteq B_{\alpha_i r}(f_i(A)) \subseteq B_{r\alpha} \left(\bigcup_{i=1}^m f_i(A) \right),$$

donde $\alpha = \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_i$.

De aquí que

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(B) \subseteq B_{r\alpha} \left(\bigcup_{i=1}^m f_i(A) \right).$$

De manera análoga se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(A) \subseteq B_{r\alpha} \left(\bigcup_{i=1}^m f_i(B) \right).$$

Por lo tanto

$$d_H(f(A), f(B)) \leq d_H(A, B) \max_{1 \leq i \leq m} \alpha_i.$$

Se concluye así que f es una contracción en la métrica de Hausdorff y como $(C(X), d_H)$ es completo entonces f es una contracción en $(C(X), d_H)$, quedando así demostrado. Para más detalles de la demostración ver [19].

El siguiente resultado nos muestra que si tenemos un conjunto compacto y aplicamos funciones contractivas a cada punto del conjunto, la unión de todas las imágenes resultantes seguirá siendo un conjunto compacto.

Teorema 4.3.1 *Sea (X, d) un espacio métrico completo y f_1, f_2, \dots, f_m contracciones, con $m \in \mathbb{N}$, tales que $f_i : X \rightarrow X$, con $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. Entonces existe un único conjunto compacto $K \subset X$ no vacío tal que*

$$K = f_1(K) \cup \dots \cup f_m(K).$$

Este resultado es consecuencia del Operador de Hutchinson (**Proposición 4.3.1**), ya que por el Teorema del punto fijo de Banach (**Teorema 4.1.1**), existe un único K tal que $K = f(K)$, entonces existe un único conjunto compacto no vacío K que es invariante bajo las imágenes de las f_i con $1 \leq i \leq m$, es decir, $K = \bigcup_{i=1}^m f_i(K)$.

4.4. Fractales

Ya vimos como se construyen conjuntos autosimilares, un fractal es un conjunto autosimilar, en este capítulo mostraremos algunos ejemplos conocidos de conjuntos fractales. El material aquí presente fue extraído de [2, 3, 19].

4.4.1. La curva de Koch

La curva de Koch es una de las primeras curvas fractales descubiertas y es importante debido a que ilustra la presencia de formas fractales en la naturaleza. Por ejemplo, se puede observar esta curva en los copos de nieve y en las ramificaciones de los rayos de tormentas eléctricas, ver [14].

Para obtener este conjunto autosimilar consideremos el espacio métrico (X, d) , donde X es el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ y d es la métrica usual. Las funciones contractivas con las que se construye el conjunto autosimilar son las siguientes

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x, \\ f_2(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f_3(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}, \\ f_4(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Los vértices iniciales del segmento con el que se construye la curva de Koch son $a_1 = (0, 0)$ y $a_2 = (1, 0)$.

Así $\Sigma_0 = [a_1, a_2]$, siendo este el segmento de recta cerrado que une a_1 con a_2 .

Sea $\{\Sigma_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}^2$, recursivamente se tiene que

$$\Sigma_{n+1} = f_1(\Sigma_n) \cup f_2(\Sigma_n) \cup f_3(\Sigma_n) \cup f_4(\Sigma_n).$$

Usando el operador de Hutchinson se define $\Sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n$, dicho límite se toma en la métrica de Hausdorff. De esta forma Σ es la curva de Koch.

A continuación vea la Figura 20 donde se muestran las primeras iteraciones de la curva de Koch Σ_0 hasta Σ_5 .

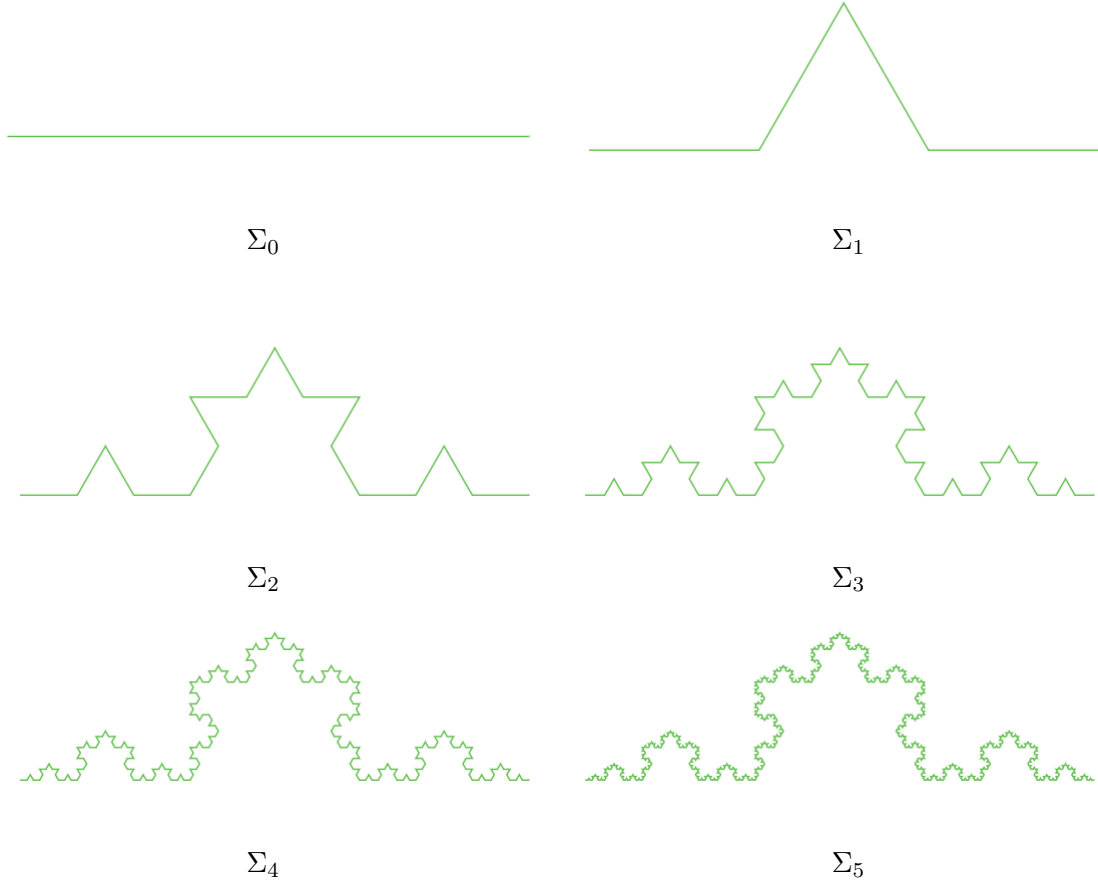


Figura 20: Primeras seis iteraciones de la curva de Koch.

También es posible construir este fractal comenzando desde $V_0 = \{a_0, a_1\}$ y considerando

$$V_{n+1} = f_1(V_n) \cup f_2(V_n) \cup f_3(V_n) \cup f_4(V_n).$$

Además $V_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$.

4.4.2. El copo de nieve de Koch

El copo de nieve consta de tres copias de la curva de Koch colocadas alrededor de los tres lados de un triángulo equilátero y mirando hacia afuera.

Para obtener este conjunto autosimilar vamos a considerar el espacio métrico (X, d) , donde X es el conjunto $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ y d es la métrica usual. La funciones contractivas con las que se

construye el conjunto autosimilar son las siguientes

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x, \\
f_2(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\
f_3(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \\
f_4(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\
f_5(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\
f_6(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \\
f_7(x) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

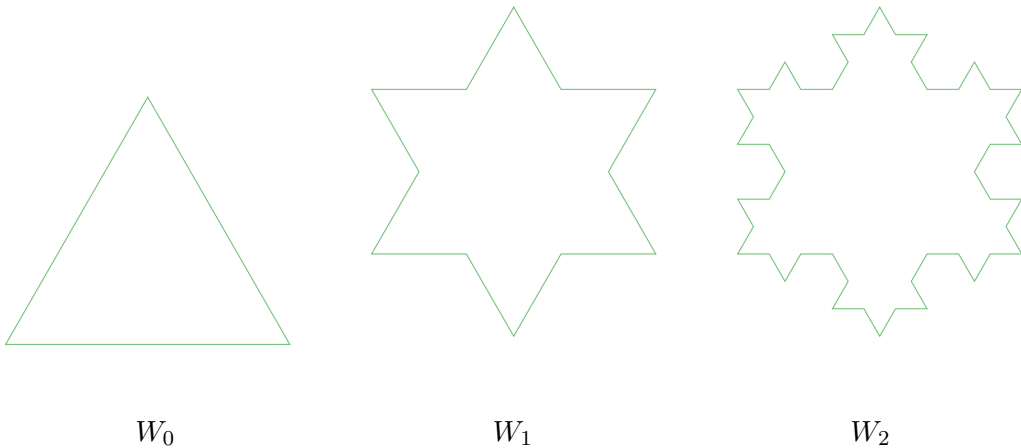
Los vértices iniciales del triángulo equilátero con el que se construye el copo de nieve de la curva de Koch son $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $a_3 = (1, 0)$. Así $W_0 = [a_1, a_2] \cup [a_2, a_3] \cup [a_3, a_1]$, siendo este el triángulo que une a a_1 , a_2 y a_3 .

Sea $\{W_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}^2$, recursivamente se tiene que

$$W_{n+1} = f_1(W_n) \cup f_2(W_n) \cup f_3(W_n) \cup f_4(W_n) \cup f_5(W_n) \cup f_6(W_n) \cup f_7(W_n).$$

Usando el operador de Hutchinson se define $K = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n$, este limite se toma en la métrica de Hausdorff. Así K define el copo de nieve de Koch.

En la Figura 21 se presentan las primeras seis iteraciones del copo de nieve de Koch, W_0 hasta W_5 .



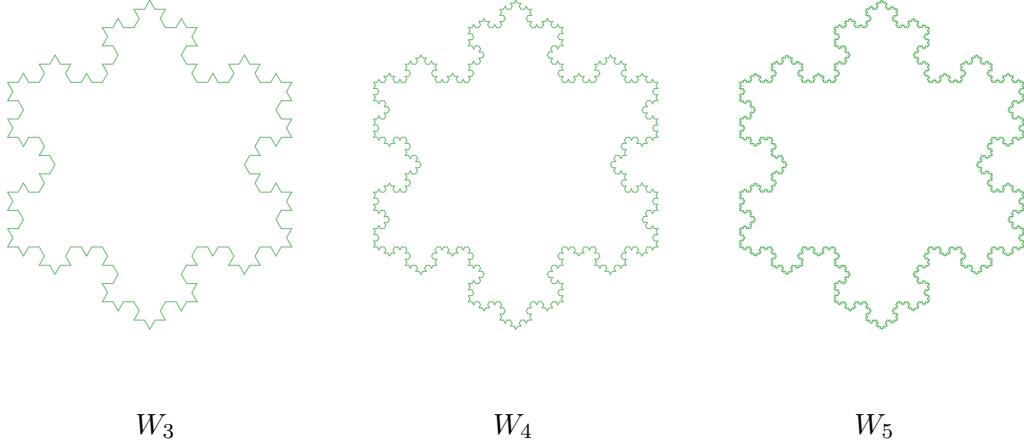


Figura 21: Primeras seis iteraciones del copo de nieve de Koch.

4.4.3. El Triángulo de Sierpinski

Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ el triángulo equilátero, donde sus vértices son $p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $p_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Consideremos las contracciones $f_1, f_2, f_3 : (X, d_{\text{usual}}) \longrightarrow (X, d_{\text{usual}})$ dadas por

$$f_i(x) = \frac{x}{2} + \frac{p_i}{2},$$

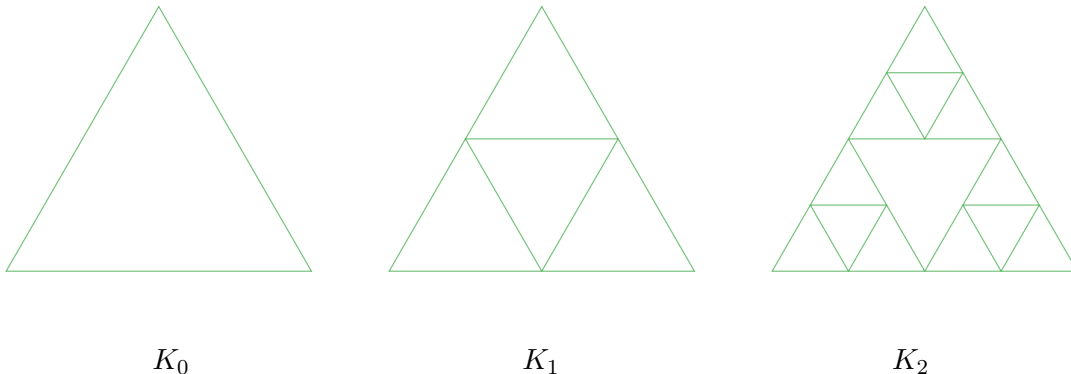
con $i = 1, 2, 3$. Así $K_0 = [p_1, p_2] \cup [p_2, p_3] \cup [p_3, p_1]$, donde $[p_j, p_k]$ es el segmento de recta cerrado que une p_j con p_k , con $j, k = 1, 2, 3$ y $j \neq k$.

Sea $\{K_n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}^2$, recursivamente se tiene que

$$K_{n+1} = f_1(K_n) \cup f_2(K_n) \cup f_3(K_n).$$

Usando el operador de Hutchinson se define $K = \lim_{x \rightarrow \infty} K_n$, dicho limite se toma en la métrica de Hausdorff. El conjunto K autosimilar respecto a las contracciones f_1, f_2, f_3 es conocido como el triángulo de Sierpinski.

Vea la Figura 22 donde se ilustran las primeras iteraciones del triángulo de Sierpinski, K_0 hasta K_5 .



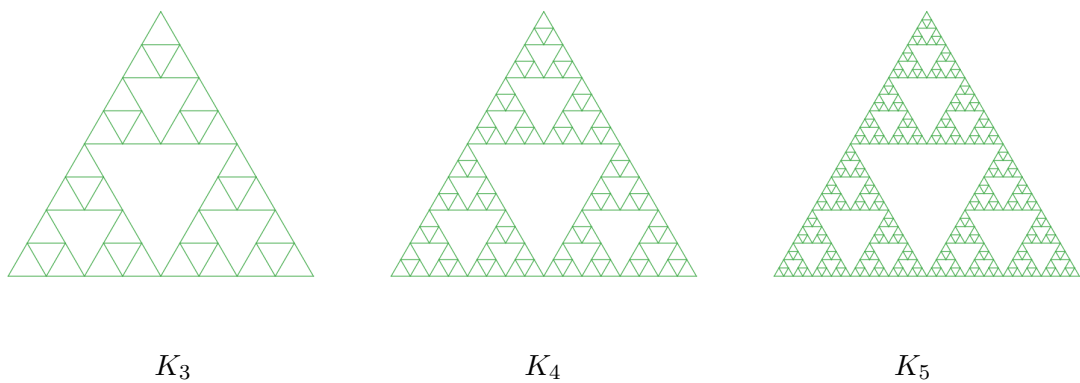


Figura 22: Primeras seis iteraciones del triángulo de Sierpinski.

5. Laplaciano de un grafo

En este capítulo se mostrará el Laplaciano de un grafo y algunas de sus propiedades, en específico se mostrará el Laplaciano asociado a la curva de Koch. También daremos la definición de la energía de un grafo y estudiaremos el límite de estas energías asociadas a una familia de grafos que se aproximan a un fractal. Además, se mostrará la constante de renormalización. El material aquí presente fue obtenido de [1, 2, 3, 4, 20, 21].

5.1. Laplaciano de un grafo

Aquí veremos algunos conceptos asociados a grafos y definiremos el Laplaciano de un grafo.

Sea $G(V, E)$ un grafo donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es el conjunto de vértices y E el conjunto de aristas que unen dos elementos de V . Si $v, w \in V$ y hay una arista que conecta v y w se dice que $v \sim w \in E$.

A continuación se define la matriz de adyacencia.

Definición 5.1.1 (Matriz de adyacencia) Sea $G(V, E)$ un grafo con n vértices. Se define la matriz de adyacencia A_G asociada al grafo G como la matriz $n \times n$ $A_G = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } v_i \sim v_j \in E, \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Ahora, se define la matriz de pesos.

Definición 5.1.2 (Matriz de pesos) Sea $G(V, E)$ un grafo con n vértices. Se define la matriz de pesos P_G como la matriz $n \times n$, $P_G = [p_{ij}]_{i,j=1}^n$, donde

$$p_{ij} = \begin{cases} |B|, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

donde $B = \{w : v \sim w \in E\}$.

A continuación se presenta un ejemplo de la matriz de adyacencia y la matriz de pesos asociada a un grafo.

Ejemplo 5.1.1 Consideremos el grafo presentado en la Figura 23.

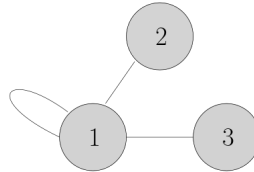


Figura 23: Grafo etiquetado con 3 vértices y 4 aristas.

Se tiene que la matriz de adyacencia y la matriz de pesos asociadas a este grafo son las siguientes

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición 5.1.3 (Laplaciano de un grafo) Sea $G(V, E)$ un grafo. La matriz del operador Laplaciano asociado a $G(V, E)$ está dado por

$$\Delta_G = P_G - A_G.$$

En el caso del conjunto autosimilar de la curva de Koch Σ , se mostró una aproximación de $\{V_n\}_{n=0}^\infty$ donde V_n contiene un conjunto de vértices, y recordemos que Σ_n representa un grafo con vértices en V_n , denotaremos por $G_n(V_n, E_n)$ al grafo correspondiente a la aproximación Σ_n . En cada grafo de estos es posible construir la matriz del Laplaciano del grafo ($\tilde{\Delta}_n = \Delta_{G_n}$). Así el operador de Laplace renormalizado de la curva de Koch es

$$\Delta_n = 4^n \tilde{\Delta}_n.$$

Donde 4 es un factor de renormalización. Para más detalles de esto ver [2].

Lo dicho anteriormente es equivalente a considerar lo siguiente, sea $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ el operador $\mathcal{L}f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ conocido como el Laplaciano de un grafo G se define de la siguiente forma

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)) \text{ para todo } x \in V_n.$$

Luego el Laplaciano discreto en la curva de Koch se da de la siguiente forma:

Para $f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ se define el Laplaciano discreto $\Delta_n f : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\Delta_n f(x) = 4^n \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x)).$$

5.2. Energía asociada al Laplaciano de un grafo

En esta sección mostraremos como es la forma de la energía en el grafo asociado a la curva de Koch, antes de esto veamos que papel juega la energía en el problema de Dirichlet.

5.2.1. El principio de Dirichlet en \mathbb{R}^n

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio regular, sea $D = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$, así ∂D es la frontera de D . Sea $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$, se desea solucionar el problema de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta f = 0 \text{ en } D, \\ f = g \text{ en } \partial D. \end{cases}$$

Buscamos encontrar f , pero dicha función satisface el siguiente problema variacional: para toda función suave $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f = h$ en ∂D se tiene que

$$\int_D |\nabla f|^2 dx \leq \int_D |\nabla h|^2 dx.$$

De aquí se tiene que solucionar el problema de Laplace es equivalente a minimizar la forma de la energía

$$\int_D |\nabla h|^2 dx.$$

Para más detaller de esto ver [3].

5.2.2. Medida autosimilar

En esta subsección mostraremos la medida sobre el conjunto autosimilar de la curva de Koch.

Una medida de probabilidad μ sobre Σ debe ser positiva, aditiva, continua y $\mu(\Sigma) = 1$. Ver [4].

Existe una única medida de probabilidad μ que es autosimilar con respecto a la familia de contracciones de la curva de Koch, es decir

$$\mu(A) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mu(f_i^{-1}(A)).$$

Ver [1, 20, 21]. Además, para cualquier $n \geq 1$ definimos una medida discreta μ^n en V_n por

$$\mu^n(dx) = \frac{1}{4^n} \sum_{x \in V_n} \delta_x(dx),$$

donde δ_x es la delta de Dirac en el punto $x \in \Sigma$, se tiene así que $\mu^n(V_n) = 1 + \frac{1}{4^n}$.

5.2.3. Forma de la energía en un grafo

A continuación veremos como es la forma de la energía en el grafo asociado a la curva de Koch.

Sea $u : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, se define

$$\mathcal{E}_0(u, u) := (u(a_1) - u(a_2))^2,$$

recordemos que $a_1 = (0, 0)$ y $a_2 = (1, 0)$, y para $n > 0$, sea

$$\mathcal{E}_n(u, u) := \frac{4^n}{2} \sum_{y \in V_n} \sum_{x \sim_n y} (u(x) - u(y))^2 = \left(\frac{16}{9}\right)^n \sum_{x \sim_n y} (u(x) - v(y))^2,$$

donde el coeficiente 4 es un factor de renormalización y $\frac{16}{9}$ se conoce como la constante de renormalización, ver [2].

Realizando un cambio de variable se sigue la siguiente proposición.

Proposición 5.2.1 (Fórmula de Integración por partes) *Para toda función $u : V_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{E}_n(u, u) = - \int u(x) \Delta_n u(x) \mu^n(dx).$$

La energía en el grafo asociado a la curva de Koch satisface la siguiente proposición.

Proposición 5.2.2 *Para cualquier función $u : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se sigue que*

$$\mathcal{E}_{n+1}(u, u) \geq \mathcal{E}_n(u, u).$$

Se tiene para cualquier función $u : V_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(u, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(u, u)$, ver [1, 3].

Consideremos los siguientes espacios $H^1 = \{u : V_\infty \rightarrow \mathbb{R} \mid \mathcal{E}(u, u) < \infty\}$ y

$$H_0^1 = \{v \in H^1 \mid v(x) = 0, x \in V_0\}.$$

Para $u, v \in H_0^1$ se tiene que

$$\mathcal{E}_n(u, v) = \left(\frac{16}{9}\right)^n \sum_{x \sim_n y} (u(x) - u(y))(v(x) - v(y)).$$

Para $u, v : V_n \rightarrow \mathbb{R}$ la energía \mathcal{E}_n en V_n se aproxima de la siguiente forma, usando la fórmula de integración por partes:

$$\mathcal{E}_n(u, v) = - \int u(x) \Delta_n v(x) \mu^n(dx).$$

donde μ es la medida estándar para la curva de Koch, ver [1].

Así el operador de Laplace en el fractal Σ con condiciones de Dirichlet esta dado por

$$\mathcal{E}(u, v) = - \int u(x) \Delta v(x) \mu(dx).$$

De igual forma solucionar el problema de Laplace en este dominio fractal es equivalente a trabajar con la energía $\mathcal{E}(u, v)$. Ver subsección 5.2.1., para más detalles puede consultar [3].

6. Difusión en el fractal de la curva de Koch

Para solucionar el problema de difusión sobre el fractal de la curva de Koch se debe solucionar el siguiente problema de Dirichlet:

Dada $f : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$, encontrar $u : V_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$(S) \begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{si } x \in V_\infty \setminus V_0, \\ u(x) = f(x) & \text{si } x \in V_0, \end{cases}$$

sea $v \in H_0^1$ una función de prueba, multiplicando a ambos lados e integrando se tiene

$$-\int \Delta u \cdot v d\mu = \int f \cdot v d\mu,$$

esto es

$$\mathcal{E}(u, v) = \int f \cdot v d\mu,$$

así se sigue la formulación débil del problema: se desea encontrar $u \in H^1$ tal que

$$(W) \begin{cases} \mathcal{E}(u, v) = \int f \cdot v d\mu & \text{para todo } v \in H_0^1, \\ u(x) = f(x) & \text{si } x \in V_0. \end{cases}$$

Sea $P^n = \{u|u : V_n \rightarrow \mathbb{R}\}$, la formulación de Galerkin esta dada por

$$(G) \begin{cases} \text{Encontrar } u \in P^n \text{ tal que} \\ \mathcal{E}(u, v) = \int f \cdot v d\mu & \text{para todo } v \in P^n \cap H_0^1, \\ u(x) = f(x) & \text{si } x \in V_0. \end{cases}$$

6.1. Difusión sobre el prefractal de la curva de Koch

De lo anterior se observa que tanto u como v están definidas sobre V_n , por tanto lo anterior es equivalente a modelar el proceso de difusión sobre el prefractal, así la formulación nos queda de la siguiente forma

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u \in P^n \text{ tal que} \\ \mathcal{E}_n(u, v) = \int f \cdot v d\mu & \text{para todo } v \in P^n \cap H_0^1, \\ u(x) = f(x) & \text{si } x \in V_0. \end{cases}$$

Un método para asociar el Laplaciano con la energía sobre contornos es considerando la siguiente forma bilineal

$$\mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \sum_{x \sim_n y} \int_x^y u' v' dv_n^1,$$

donde por u' denota la derivada a lo largo del segmento $[x, y]$ de la interpolación lineal de los valores $u(x)$

y $u(y)$ en los extremos del intervalo. La medida v_n^1 es la medida de longitud a lo largo de las aristas de Σ_n .

Se tiene el siguiente problema discreto

$$\begin{cases} \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int f \cdot v dv_n^1 & \text{para todo } v \in P^n \cap H_0^1, \\ u(x) = f(x) & \text{si } x \in V_0. \end{cases}$$

Esto ya se puede resolver con elementos finitos. Reescalando lo anterior con la constante de renormalización se obtiene

$$\begin{cases} (r^{(1)})^n \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int f \cdot v dv_n^{(1)} & \text{para todo } v \in P^n \cap H_0^1, \\ u(x) = f(x) & \text{si } x \in V_0. \end{cases}$$

Al asociar el Laplaciano con la energía sobre contornos de la curva de Koch, se tiene que el problema original de difusión es equivalente a

$$\begin{cases} \left(\frac{16}{9}\right)^n \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int f \cdot v dv_n^{(1)} & \text{para todo } v \in P^n \cap H_0^1, \\ u(x) = f(x) & \text{si } x \in V_0. \end{cases}$$

6.2. Soluciones en el prefractal

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, resolvamos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = 1, \\ u(a_0) = 1, \quad u(a_1) = 0. \end{cases}$$

Este problema es equivalente a resolver el problema de difusión en el prefractal de la curva de Koch cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} -\Delta_{\Sigma_n} u(x, y) = 1, \\ u(a_0) = 1, \quad u(a_1) = 0. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el Laplaciano asociado a la curva de Koch y la energía, se tiene lo siguiente

$$\begin{cases} (r^{(1)})^n \mathcal{E}_n^{(1)}(u, v) = \int v d\mu_n & \text{para todo } v \in P^n \cap H_0^1, \\ u(x) = f(x), & x \in V_0, \end{cases}$$

donde μ_n es la medida autosimilar para la curva de Koch, y anteriormente vimos que la constante de renormalización es $r^{(1)} = \frac{16}{9}$. En las Figuras 24-27 se muestra la solución numérica implementada en Matlab, ver [26].

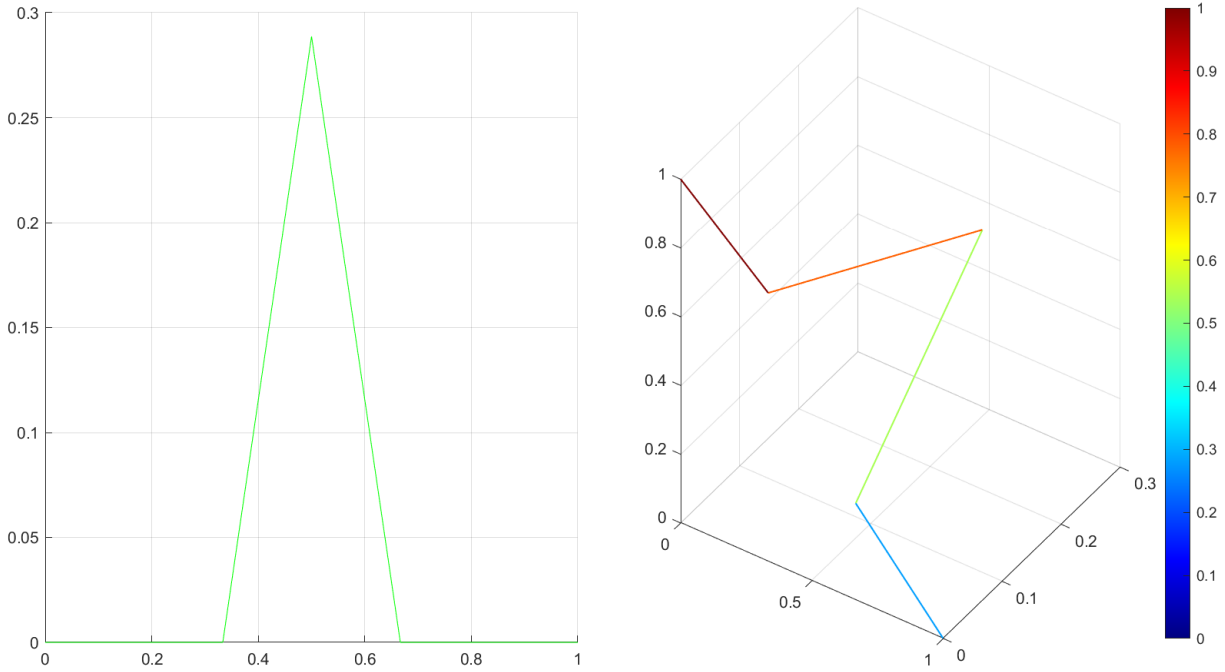


Figura 24: Σ_1 (Izquierda) y Aproximación de $u(x, y)$ en el espacio de la curva de Koch (Derecha).

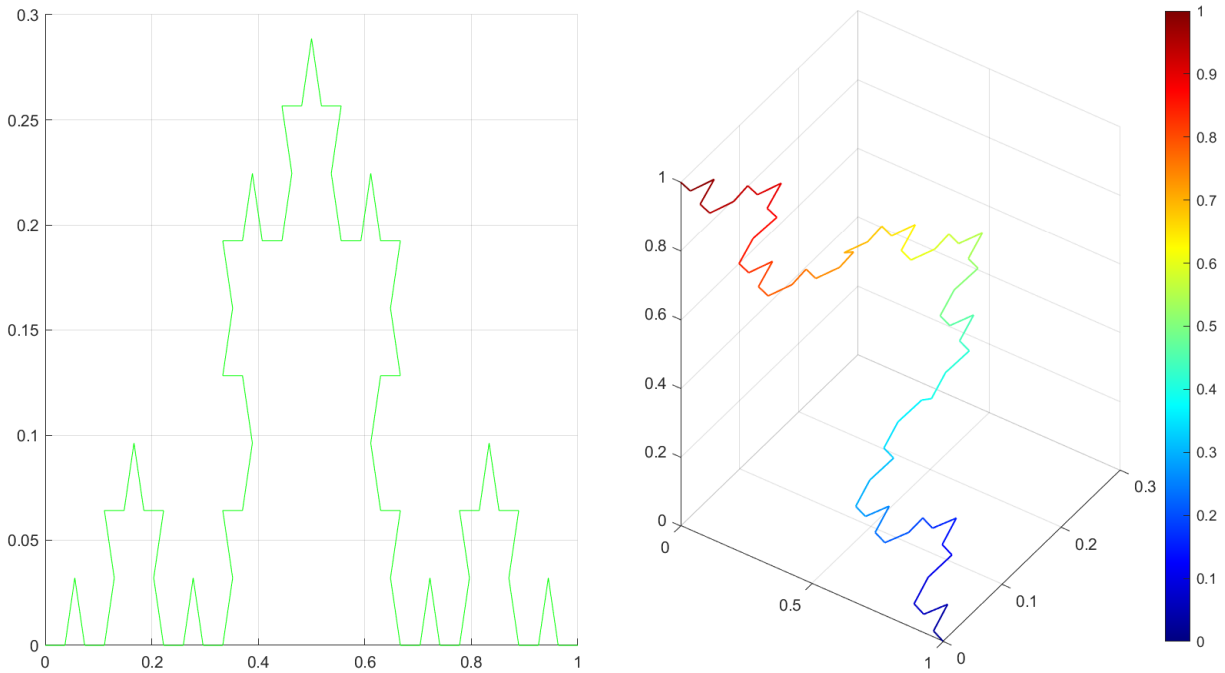


Figura 25: Σ_3 (Izquierda) y Aproximación de $u(x, y)$ en el espacio de la curva de Koch (Derecha).

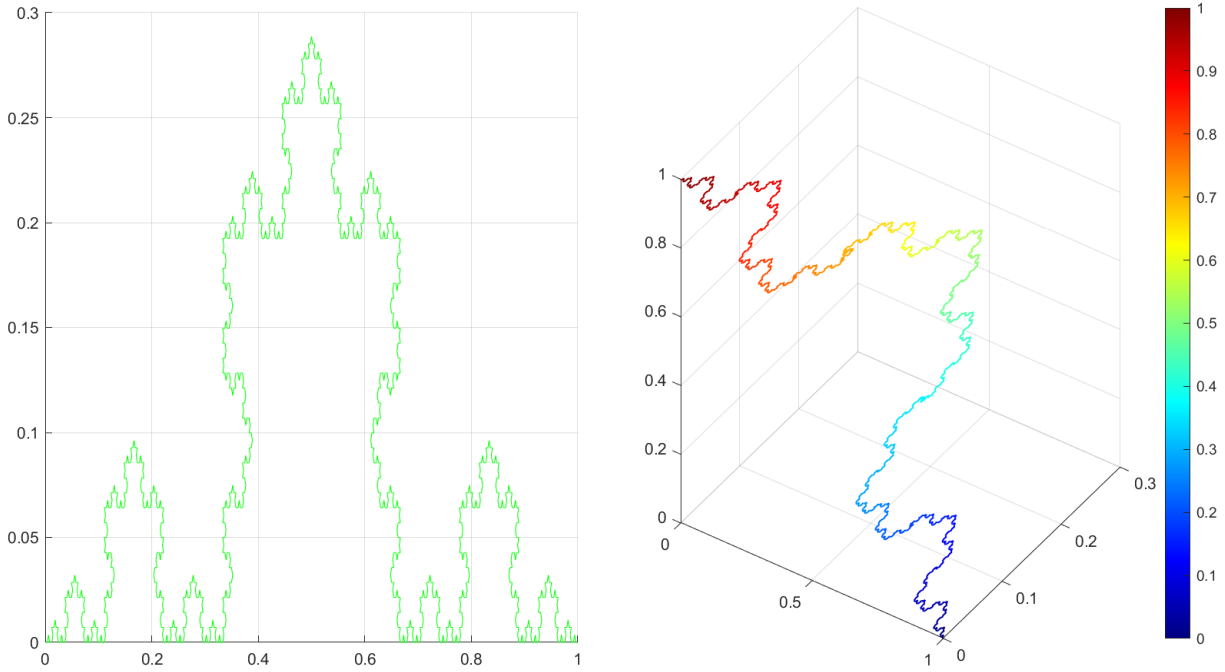


Figura 26: Σ_5 (Izquierda) y Aproximación de $u(x, y)$ en el espacio de la curva de Koch (Derecha).

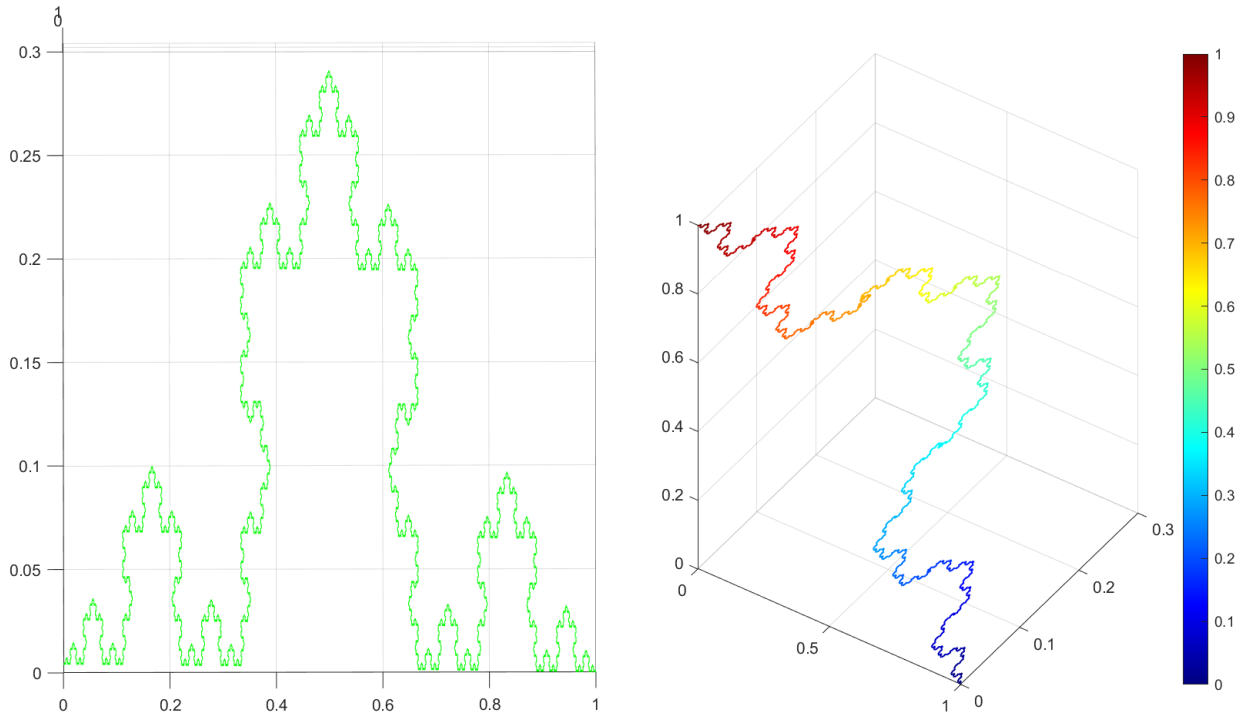


Figura 27: Σ_7 (Izquierda) y Aproximación de $u(x, y)$ en el espacio de la curva de Koch (Derecha).

7. Difusión con interfase fractal ce la curva de Koch

El problema de difusión con interfase la curva de Koch se ve de la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ -\Delta u = f \text{ en } D_1 \cup D_2, \\ u_1 - u_2 = 0, \text{ en } \Sigma, \\ \partial_n u_1 - \partial_n u_2 = -\Delta_\Sigma u \text{ en } \Sigma, \\ u = 0 \text{ en } \partial D, \end{array} \right.$$

donde

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{en } D_1, \\ u_2, & \text{en } D_2, \end{cases}$$

y $\Delta_\Sigma u$ es el laplaciano a lo largo de la curva fractal, ya vimos como se define dicho laplaciano, ya que es sobre una curva no diferenciable. En la Figura 28 se presenta el dominio D mencionado.

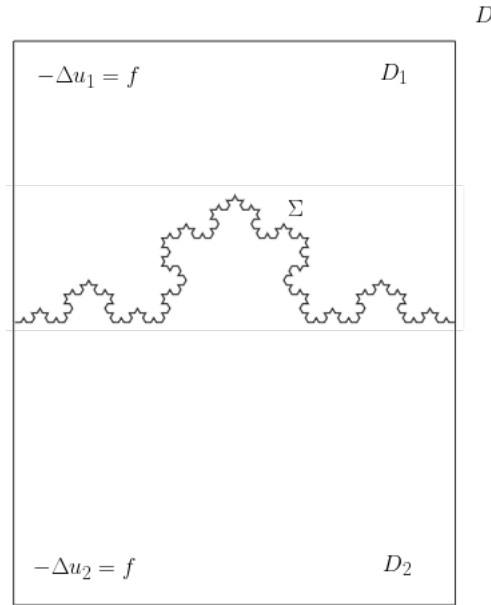


Figura 28: Dominio con interfase la curva de Koch.

Consideremos

$$V(D, \Sigma) := \{u \in H_0^1(D) \mid u|_\Sigma \in H_0^1(\Sigma)\},$$

ver [21]. Multiplicando por una función de prueba $v : V(D, \Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$-\Delta uv = fv.$$

Integrando sobre D se sigue que

$$-\int_D \Delta u v = \int_D f v.$$

Realizando integración por partes se tiene que

$$\int_D \nabla u \nabla v - \int_\Sigma \Delta_\Sigma u v = \int_D f v.$$

donde $\Delta_\Sigma u$ es el Laplaciano a lo largo de la curva fractal, integrando por partes se tiene que

$$-\int_\Sigma \Delta_\Sigma u v = \int_\Sigma \nabla_t u \nabla_t v = \int_\Sigma (\nabla u \cdot T)(\nabla v \cdot T).$$

Luego

$$\int_D \nabla u \nabla v + \int_\Sigma (\nabla u \cdot T)(\nabla v \cdot T) = \int_D f v,$$

y de esta manera la formulación débil del problema es:

$$(W) \begin{cases} \text{Encontrar } u : V(D, \Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \int_D \nabla u \nabla v + \int_\Sigma \nabla_t u \nabla_t v = \int_D f v, \end{cases}$$

Por otro lado, consideremos el siguiente lema.

Lema 7.1 $V(D, \Sigma)$ es un espacio de Hilbert con producto escalar $(u, v)_{V(D, \Sigma)} = \int_D \nabla u \nabla v + \mathcal{E}(u|_\Sigma, v|_\Sigma)$.

Usando el lema anterior se tiene que la forma bilineal definida por

$$(u, v) \in V(D, \Sigma) \times V(D, \Sigma) \longmapsto \int_D \nabla u \nabla v + \mathcal{E}(u|_\Sigma, v|_\Sigma)$$

es continua y simétrica, además es elíptica, luego usando el Teorema de Lax-Milgram se sigue existe una única $u \in V(D, \Sigma)$ tal que para todo $v \in V(D, \Sigma)$

$$\int_D \nabla u \nabla v + \mathcal{E}(u|_\Sigma, v|_\Sigma) = \int_D f v.$$

Para más detalles de esto ver [23].

De lo anterior se sigue que la formulación débil del problema de difusión con interfase fractal de la curva de Koch es equivalente a la siguiente

$$(W) \begin{cases} \text{Encontrar } u : V(D, \Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \int_D \nabla u \nabla v + \mathcal{E}(u|_\Sigma, v|_\Sigma) = \int_D f v. \end{cases}$$

7.1. Difusión con interfase prefractal

Igual que en el problema de difusión sobre la curva de Koch este problema es equivalente a solucionar el problema de difusión con interfase prefractal cuando $n \rightarrow \infty$. Sean $n \in \mathbb{N}$, el problema se ve de la siguiente forma

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ -\Delta u = f \text{ en } D_1 \cup D_2, \\ u_1 - u_2 = 0, \text{ en } \Sigma_n, \\ \partial_n u_1 - \partial_n u_2 = -\Delta_{\Sigma_n} u \text{ en } \Sigma_n, \\ u = 0 \text{ en } \partial D, \end{array} \right.$$

esto es

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : V(D, \Sigma_n) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \int_D \nabla u \nabla v + \int_{\Sigma_n} \nabla_t u \nabla_t v = \int_D f v. \end{array} \right.$$

7.2. Soluciones con interfase prefractal

Teniendo en cuenta lo anterior, resolvamos el siguiente problema de difusión

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ -\Delta u = 1 \text{ en } D_1 \cup D_2, \\ u_1 - u_2 = 0, \text{ en } \Sigma_n, \\ \partial_n u_1 - \partial_n u_2 = -\Delta_{\Sigma_n} u \text{ en } \Sigma_n, \\ u = 0 \text{ en } \partial D, \end{array} \right.$$

donde $D = [0, 1] \times [-1, 1]$ y

$$u = \begin{cases} u_1, & \text{en } D_1, \\ u_2, & \text{en } D_2. \end{cases}$$

La formulación débil del problema es

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : V(D, \Sigma) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ \int_D \nabla u \nabla v + \int_{\Sigma_n} \nabla_t u \nabla_t v = \int_D f v. \end{array} \right.$$

Esto será solucionado con FreeFem++, ver[17].

Veamos este problema cuando $n = 0$, es decir para Σ_0 , la triangulación del dominio $D_0 = [0, 1] \times [-1, 1]$ con $n' = 5$ es presentada en la Figura 29.

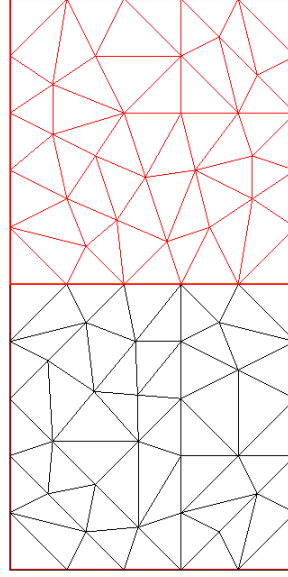


Figura 29: Triangulación en D_0 con $n' = 5$ (114 triángulos).

La solución en D_0 usando polinomios lineales es presentada en la Figura 30.

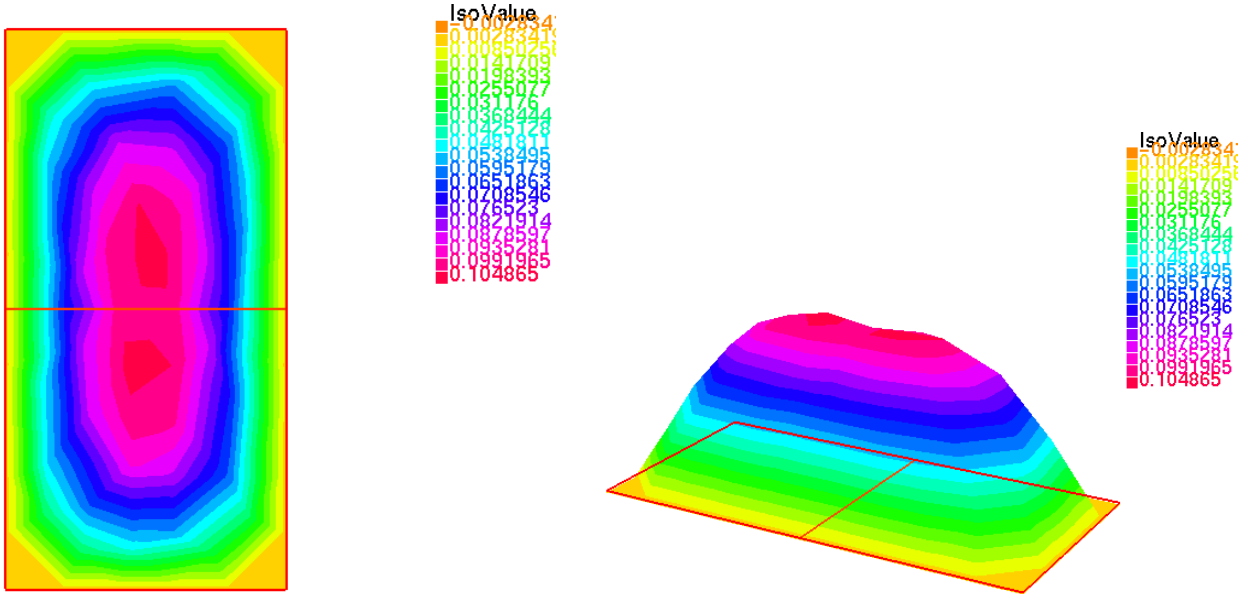


Figura 30: Solución en D_0 usando P_1 (izquierda) y visualización en 3D de la solución (derecha).

Queremos saber cuán precisa es esta solución, por lo que se irá refinando la malla de manera uniforme y se hallará el error en la norma L_2 y en la norma H_1 , usando un indicador de convergencia. Esto es posible visualizarlo en la Tabla 1.

Número de triángulos	Error L_2	Error H_1	h
114	0.0692351	0.257814	0.304138
456	0.0184683	0.132658	0.152069
1824	0.00473148	0.0670321	0.0760345
7296	0.00119281	0.0336334	0.0380173

Tabla 1: Error de solución utilizando la norma H_1 y L_2 . También se muestra el número de triángulos en cada iteración y el tamaño del triángulo más grande en la malla.

La solución en D_0 presentada en la Figura 30 es suave y sin picos, además de los datos presentados en la Tabla 1 se observa que al refinar la malla la solución converge rápido, esto se debe a que la interfase del dominio es suave.

Resolvamos el mismo problema cuando $n = 1$, es decir en la primer iteración de la curva de Koch, la triangulación con $n' = 5$ del dominio $D_1 = [0, 1] \times [-1, 1]$ se visualiza en la Figura 31.

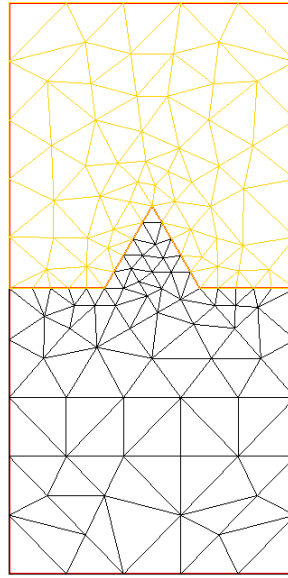


Figura 31: Triangulación en D_1 con $n' = 5$ (236 triángulos).

En la Figura 32 vemos la solución en D_1 usando polinomios lineales.

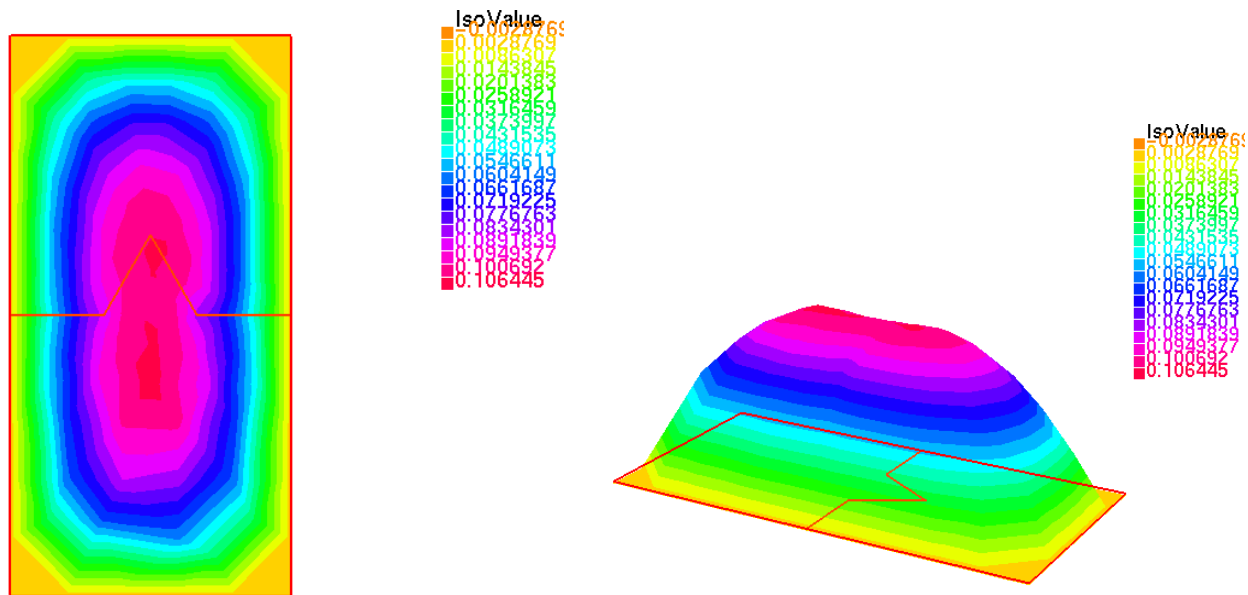


Figura 32: Solución en D_1 usando P_1 (izquierda) y visualización en 3D de la solución (derecha).

Nos interesa evaluar la precisión de esta solución, por lo tanto, llevaremos a cabo un proceso de refinamiento uniforme en la malla y determinaremos el error tanto en la norma L_2 como en la norma H_1 , usando un indicador de convergencia. Estos resultados pueden ser observados en la Tabla 2.

Número de triángulos	Error L_2	Error H_1	h
236	0.0830963	0.376548	0.286912
944	0.0567154	0.336489	0.143456
3776	0.058566	0.360879	0.0717279
15104	0.0460834	0.324163	0.035864

Tabla 2: Error de solución utilizando la norma H_1 y L_2 . También se muestra el número de triángulos en cada iteración y el tamaño del triángulo más grande en la malla.

La solución numérica en el dominio D_1 presente en la Figura 32 es una función suave, y a medida que h tiende a cero tanto el error en la norma L_2 como en la norma H_1 , esto por lo presentado en la Tabla 2.

Resolviendo el mismo problema cuando $n = 2$, es decir donde la interfase es Σ_2 (la segunda iteración de la curva de Koch), la triangulación del dominio $D_2 = [0, 1] \times [-1, 1]$ con $n' = 5$ se presenta en la Figura 33.

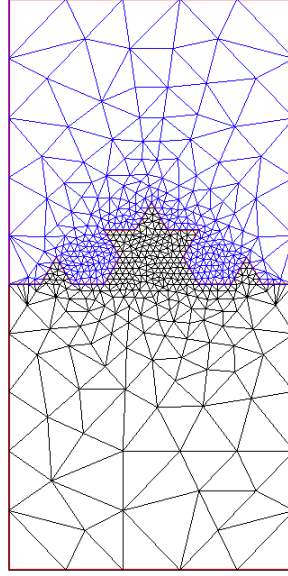


Figura 33: Triangulación en D_2 con $n' = 5$ (1112 triángulos).

En la Figura 34 se presenta la solución en D_2 usando polinomios lineales.

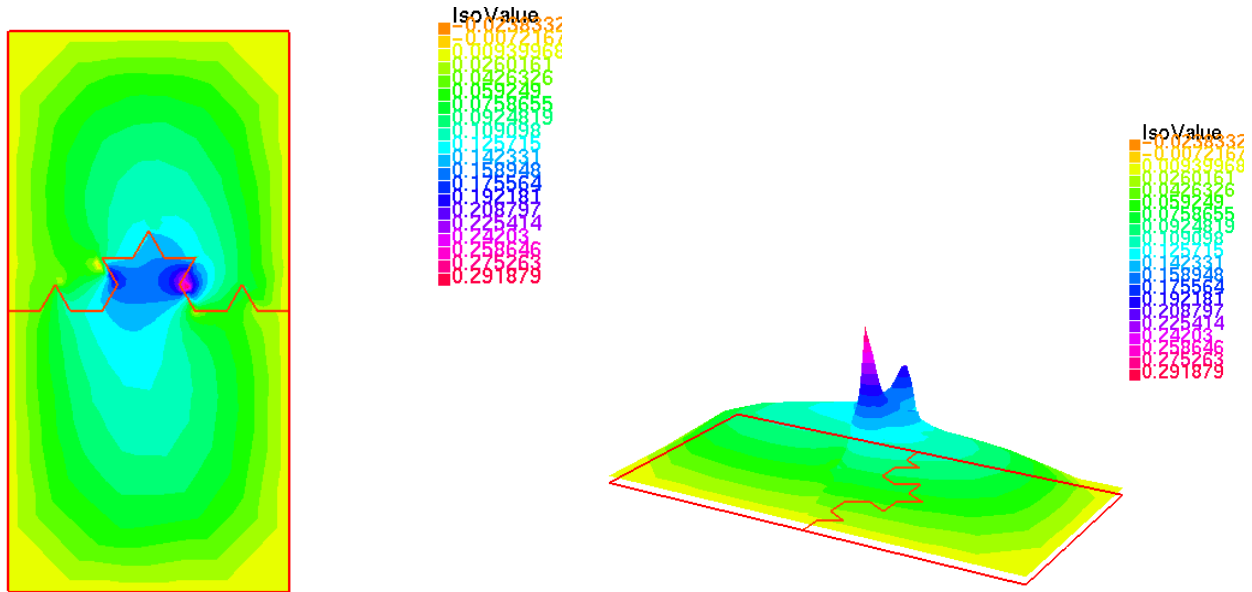


Figura 34: Solución en D_2 usando $P1$ (izquierda) y visualización en $3D$ de la solución (derecha).

Estamos enfocados en determinar la exactitud de esta solución, por lo tanto, implementaremos un refinamiento en la malla y calcularemos el error en las normas L_2 y H_1 , usando un indicador de convergencia. Estos datos se presentan en la Tabla 3 para su visualización.

Número de triángulos	Error L_2	Error H_1	h
1112	0.268578	1.53871	0.288859
4448	2.22732	12.197	0.144429
17792	0.647327	3.47124	0.0722147
71168	0.038094	0.30098	0.0361073

Tabla 3: Error de solución utilizando la norma H_1 y L_2 . También se muestra el número de triángulos en cada iteración y el tamaño del triángulo más grande en la malla.

A pesar de que la triangulación del problema para la segunda iteración de la curva de Koch, es decir el dominio D_2 , cuenta con 1112 triángulos, la solución numérica utilizando polinomios lineales presenta un error considerable en ambas normas. En la Figura 34, se pueden observar picos justo en las zonas donde el dominio se quiebra. Sin embargo, a medida que se realiza un refinamiento en la malla, esta situación mejora significativamente.

A continuación se resuelve problema cuando $n = 3$, es decir para Σ_3 , la triangulación del dominio $D_3 = [0, 1] \times [-1, 1]$ con $n' = 5$ se visualiza en la Figura 35.

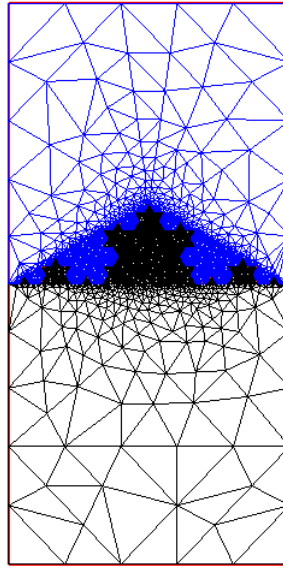


Figura 35: Triangulación en D_3 con $n' = 5$ (7120 triángulos).

Los resultados al problema usando polinomios lineales pueden ser vistos en la Figura 36.

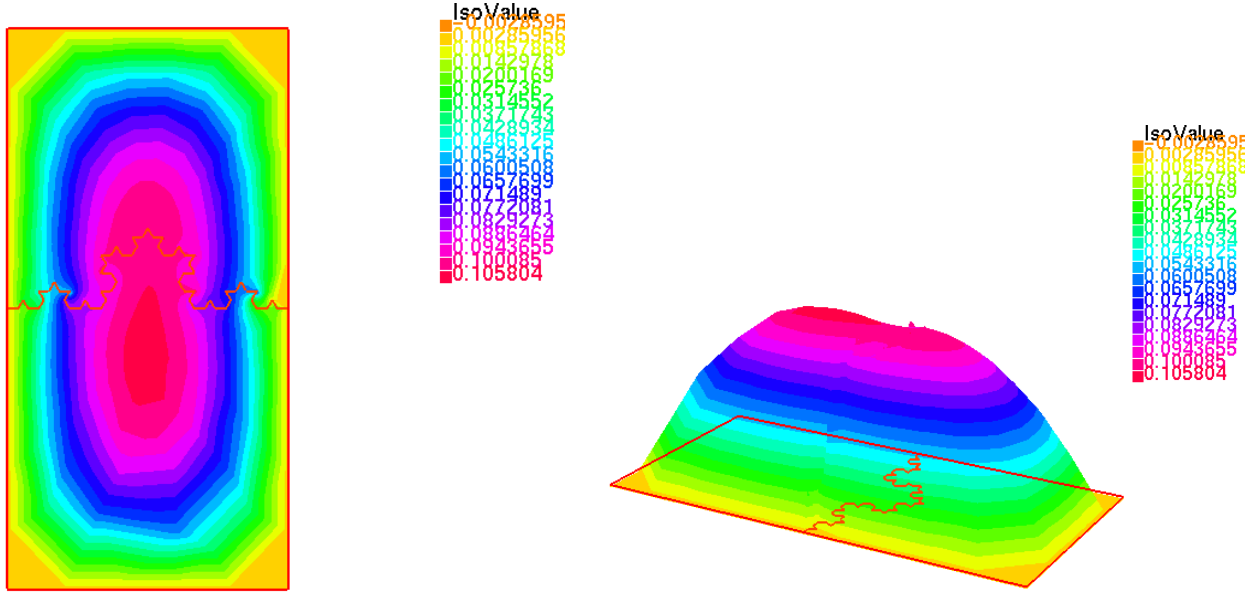


Figura 36: Solución en D_3 usando P_1 (izquierda) y visualización en $3D$ de la solución (derecha).

Nuestro enfoque principal radica en la evaluación precisa de esta solución, por ende, llevaremos a cabo un refinamiento progresivo de la malla y realizaremos cálculos de error en las normas L_2 y H_1 , usando un indicador de convergencia. Los resultados de estas mediciones son expuestos en la Tabla 4 con el propósito de visualizarlos claramente.

Número de triángulos	Error L_2	Error H_1	h
7120	0.106235	0.453149	0.289605
28480	0.0546528	0.354523	0.144803
113920	0.0323806	0.239219	0.0724013
455680	0.0187319	0.200651	0.0362007

Tabla 4: Error de solución utilizando la norma H_1 y L_2 . También se muestra el número de triángulos en cada iteración y el tamaño del triángulo más grande en la malla.

La solución en el dominio D_3 con una triangulación compuesta por 7120 triángulos presentada en la Figura 36 revela una solución suave y la Tabla 4 nos muestra que a medida que h se hace más pequeño el error en ambas normas disminuye rápidamente.

Por último, implementando el problema para $n = 4$, es decir, Σ_4 , la triangulación del dominio $D_4 = [0, 1] \times [-1, 1]$ con $n' = 2$ es presentada en la Figura 37.

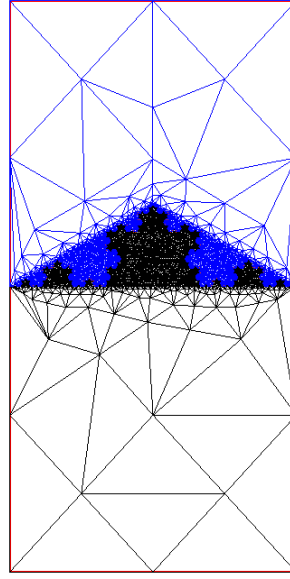


Figura 37: Triangulación en D_4 con $n' = 2$ (9834 triángulos).

La solución a este problema se presenta en la Figura 38 usando polinomios lineales.

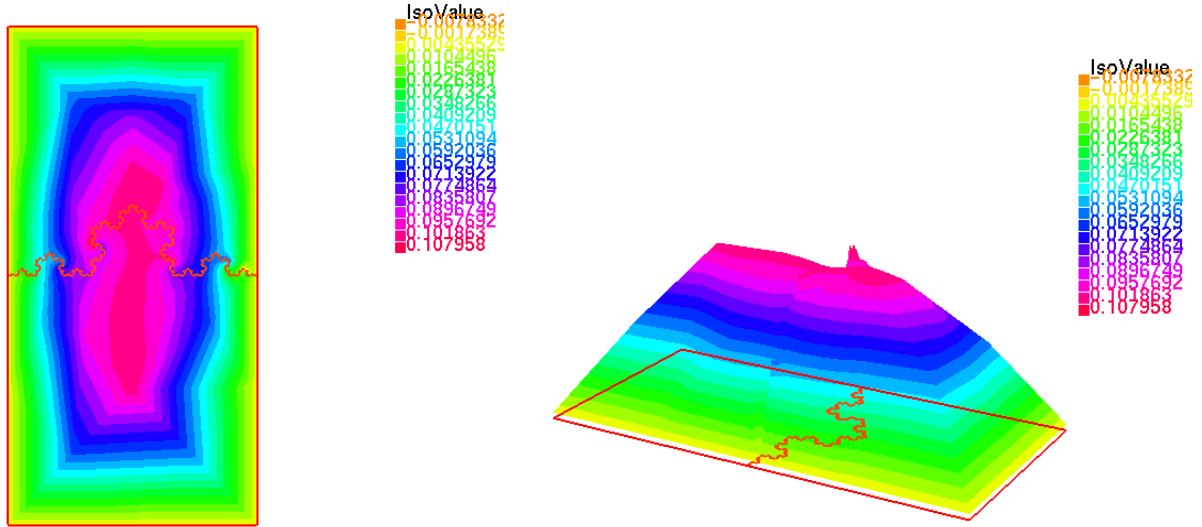


Figura 38: Solución en D_4 usando P_1 (izquierda) y visualización en 3D de la solución (derecha).

Nos interesa determinar la precisión de esta solución y, para lograrlo, procederemos a refinar la malla y calcular el error utilizando tanto la norma L_2 como la norma H_1 , usando un indicador de convergencia. Los resultados de estas evaluaciones se presentan de manera visual en la Tabla 5.

Número de triángulos	Error L_2	Error H_1	h
9384	0.131425	0.421732	0.549261
37536	0.0589745	0.429598	0.274631
150144	0.0336762	0.364378	0.137315

Tabla 5: Error de solución utilizando la norma H_1 y L_2 . También se muestra el número de triángulos en cada iteración y el tamaño del triángulo más grande en la malla.

De igual forma que el experimento anterior, al considerar el dominio D_4 y una triangulación de este compuesta por 9384 triángulos, la Figura 38 revela una solución continua y pero con una irregularidad en la parte donde fue quebrado el dominio. Al observar la Tabla 4, notamos que a medida que se refina la malla, el error en ambas normas experimenta una rápida convergencia.

8. Conclusiones

En conclusión, este informe ha abarcado diversos aspectos relacionados con los conjuntos autosimilares, centrándose especialmente en la curva de Koch y su aplicación en problemas de difusión. Se ha explorado la definición y construcción de conjuntos autosimilares, presentando distintos ejemplos como el copo de nieve de Koch y el triángulo de Sierpinski.

En el contexto de la curva de Koch, se ha estudiado la energía asociada como herramienta para abordar el problema de Dirichlet, donde el propio fractal sirve como dominio. A través de una aproximación numérica utilizando Matlab [26], se han visualizado las soluciones del problema de difusión en el fractal Σ_1 , Σ_3 , Σ_5 y Σ_7 . Además, se planteó el problema de difusión con una interfase de la curva de Koch y se resolvió numéricamente utilizando FreeFem++ [18].

Se han utilizado indicadores de convergencia para evaluar el error en las normas L_2 y H_1 . Los resultados obtenidos en las secciones correspondientes revelan que, a medida que se refina la malla, las soluciones convergen rápidamente y se observa una mejora significativa en el error. Se ha mostrado que, a pesar de la presencia de irregularidades en el dominio y picos en las zonas de quiebre, un refinamiento adecuado puede superar estas dificultades y lograr soluciones suaves, esto se verifica teóricamente con teoremas para la estimación de errores en problemas elípticos.

En los experimentos posteriores, se ha analizado la evolución de la solución y el error en dominios de mayor complejidad, como D_3 y D_4 , con triangulaciones más pequeñas, es decir donde $h \rightarrow 0$. Los resultados muestran una progresiva mejora en las normas de error a medida que se reduce el tamaño de los elementos de la malla.

Si bien los errores obtenidos en los experimentos son en su mayoría pequeños, se reconoce la posibilidad de mejorar la tolerancia mediante el uso de estimadores más precisos en futuras investigaciones. A partir de este trabajo se busca seguir explorando y mejorando los métodos de aproximación y solución en el contexto de medios fractales como la curva de Koch.

9. Bibliografía

- [1] Contreras Luis. 2016. *Sobre operadores diferenciales en dominios fractales*, Universidad Nacional de Colombia.
- [2] Kigami Jun. 2001. *Analysis on fractal*, Volumen 143. Cambridge University.
- [3] Jara Milton. 2013. *Análise em fractais*, coloquio Brasileño de matemáticas, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).
- [4] Tao T. 2006. *Analysis II*, Hindustan Book Agency.
- [5] Claes Johnson. 1987. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University.
- [6] Romero Jesús. 2016. *Compleitud de la métrica de Hausdorff en espacios métricos compactos*, Universidad Distrital.
- [7] Apostol T. 1974. *Mathematical Analysis Second Edition*, Addison-Wesley.
- [8] Strauss W. 2007. *Partial Differential Equations: An Introduction*, Wiley Global Education.
- [9] Farlow S. 1993. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover Publications.
- [10] Suren Basov. 2007. *Partial Differential Equations in Economics and Finance*, Nova Science Pub Inc.
- [11] Murray J. 1993. *Mathematical Biology*, Springer.
- [12] Wallace J Hobbs P. 1977. *Atmospheric Science: An Introductory Survey*, Academic Press.
- [13] Falconer K. 2013. *Fractals: A Very Short Introduction*, OUP Oxford.
- [14] Barnsley M. 1993. *Fractals Everywhere*, Morgan Kaufmann Pub.
- [15] Benoit B. Mandelbro. 1982. *The Fractal Geometry of Nature*, Times Books.
- [16] Mosco U. 2002. *Highly conductive fractal layers*, Accademia Nazionale del Lincei.
- [17] Braess D. 2007. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*, Cambridge University.
- [18] FreeFem++. (s.f.). FreeFem++ Documentation. Recuperado de <https://doc.freefem.org/>
- [19] Villegas M. 2014. *Conjuntos autosimilares y dimensión fractal*, Universidad de Almería.
- [20] Chen, Z., Zou, J. (1998). *Finite element methods and their convergence for elliptic and parabolic interface problems*, Numerische Mathematik, 79(2), 175-202.
- [21] Lancia, M. R. (2002). *A Transmission Problem with a Fractal Interface*, Z. Analysis und ihre Anwen-

dungen, Volume 21, 113-133.

- [22] Hutchinson, J. E. (1981). *Fractals and selfsimilarity*, Indiana Univ. Math. J. Volume 30, 713 – 747.
- [23] Wasyk R. (2007). *Numerical Solution of a Transmission Problem with Prefractal Interface*, Worcester Polytechnic Institute.
- [24] Müller J. Kuttler C. (2015). *Methods and Models in Mathematical Biology*, Springer.
- [25] Cheney W. Kincaid D. (2002). *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*, American Mathematical Society.
- [26] MathWorks. (s.f.). Ayuda de MATLAB. Recuperado de <https://la.mathworks.com/help/index.html>