Estudio del método multiescala generalizado (GMsFEM) y aplicaciones a flujos bifásicos en medios porosos

Estudiante: Yessica Vanessa Trujillo*
Director: Juan Galvis**
Emails: *ytrujillol@unal.edu.co, **jcgalvisa@unal.edu.co

Palabras clave: Métodos numéricos, Método de Elementos Finitos (FEM), Método Multiescala (MsFEM), Método Multiescala Generalizado (GMsFEM), Método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano, Flujos bifásicos, Medios porosos heterogéneos.

Resumen

El problema que abordaremos consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales que modela el flujo bifásico inmiscible e incompresible de agua y petróleo en medios porosos heterogéneos dentro de un reservorio rectangular, $\Omega = [0,128] \times [0,32]$, discretizado en una malla uniforme de 128×32 celdas.

La ecuación de conservación de la masa está dada por

$$\nabla \cdot v = 0, \tag{1}$$

donde la velocidad total de filtración de Darcy se expresa como

$$v = -\Lambda(S)K(x)\nabla p. \tag{2}$$

Este sistema está acoplado con la ecuación de transporte para la saturación de agua,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (vf(S)) = 0, \tag{3}$$

donde S representa la saturación de agua y la función de flujo fraccional $f(S)$ está dada por

$$f(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w \Lambda(S)}. \tag{4}$$

El coeficiente de movilidad total $\Lambda(S)$ se define en términos de las permeabilidades relativas $k_{r\alpha}(S)$ y las viscosidades de fase μ_α ($\alpha = w, o$) como

$$\Lambda(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o}. \tag{5}$$

El modelo hiperbólico de transporte escalar se maneja mediante el esquema Lagrangiano-Euleriano semi-discreto y puede escribirse en su forma abierta como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x H(S)) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y H(S)) = 0, \tag{6}$$

con la condición inicial

$$S(x, y, 0) = S_0(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases} \tag{7}$$

Aquí, $v_x = v_x(x, y, t)$ y $v_y = v_y(x, y, t)$ denotan las componentes x e y del campo de velocidad v.

Para nuestras aproximaciones numéricas, consideramos curvas de permeabilidad relativa cuadráticas $k_{rw}(S) = S^2, \quad k_{ro}(S) = (1 - S)^2$, con valores de viscosidad $\mu_w = 1$ y $\mu_o = 2$.

Para la solución numérica del problema, se emplea una descomposición de operadores que permite separar el sistema en dos subproblemas principales. La primera etapa, correspondiente a la resolución de la ecuación de presión, se encarga de determinar la velocidad y presión del fluido en el paso de tiempo actual. Para esta fase, se utiliza el método de elementos finitos multiescala generalizado (GMsFEM), [2, 4]. Aquí, a partir de los valores previos $(p_{n-1}, u_{n-1}, S_{n-1})$, se obtiene la solución (p_n, u_n) mediante la ecuación de conservación de la masa.

Posteriormente, en la segunda etapa, se resuelve la ecuación de transporte de la saturación de agua utilizando la velocidad obtenida en la primera etapa, esto se realiza con el método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano (SDLE), [1, 2].

El proceso numérico se esquematiza en la Figura 1. Inicialmente, se parte de los valores previos $(p_{n-1}, u_{n-1}, S_{n-1})$, los cuales son utilizados en la ecuación de presión para obtener (p_n, u_n). Luego, la ecuación de transporte actualiza la saturación S_n, completando así el ciclo de avance temporal.

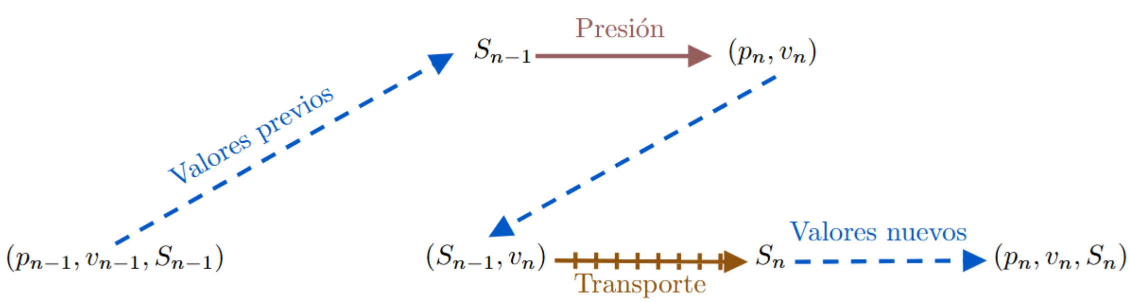


Figura 1: Descomposición de operadores utilizada para resolver el problema del modelo bifásico. Elaboración propia. Inspirada en [4].

Este esquema permite una solución más eficiente del sistema, evitando la necesidad de resolver simultáneamente las ecuaciones de presión y transporte, lo que reduce el costo computacional.

Para evaluar el desempeño del método, se implementa la simulación del flujo bifásico en un medio poroso heterogéneo bajo las condiciones previamente establecidas. La heterogeneidad se introduce a través de un coeficiente de permeabilidad estructurado en canales de alto contraste, como se muestra en la Figura 2. La permeabilidad se modela mediante una distribución log-normal. Para ello, se establece una permeabilidad media de 3, con una desviación estándar logarítmica de 1.2, lo que permite introducir variabilidad en los valores generados. Se imponen límites entre 0.1 y 5, donde el valor inferior representa materiales de baja permeabilidad, mientras que el valor superior simula fracturas o zonas de superpermeabilidad. Adicionalmente, se incorporan diez canales de alta permeabilidad en ubicaciones aleatorias, con longitudes que varían entre 10 y 30 celdas en la dirección horizontal y anchos entre 3 y 10 celdas en la dirección vertical. Estas estructuras geológicas representan zonas preferenciales de flujo, permitiendo una mejor caracterización del medio poroso.

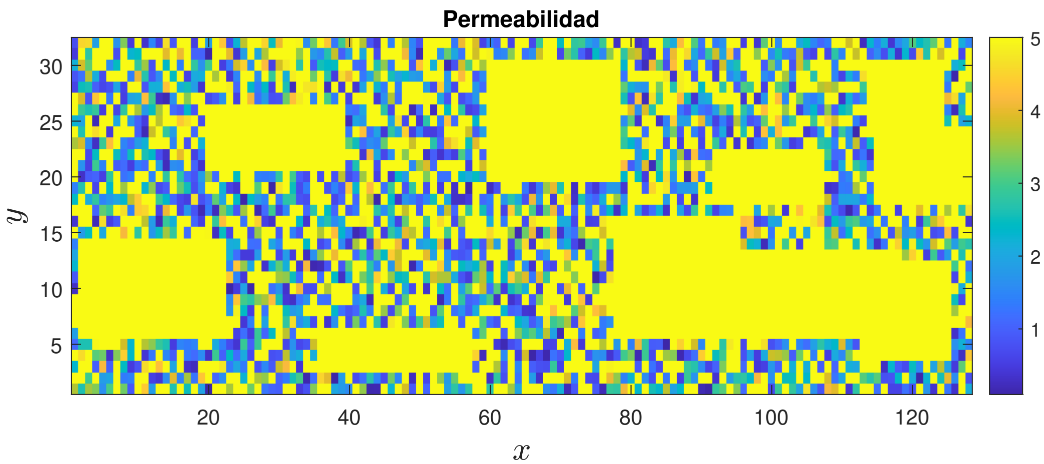


Figura 2: Coeficiente de permeabilidad. Implementación realizada en [3].

Las Figuras 3, 4a, 4b presentan las soluciones numéricas de la saturación, velocidad y presión, respectivamente, en el tiempo $t = 400$.

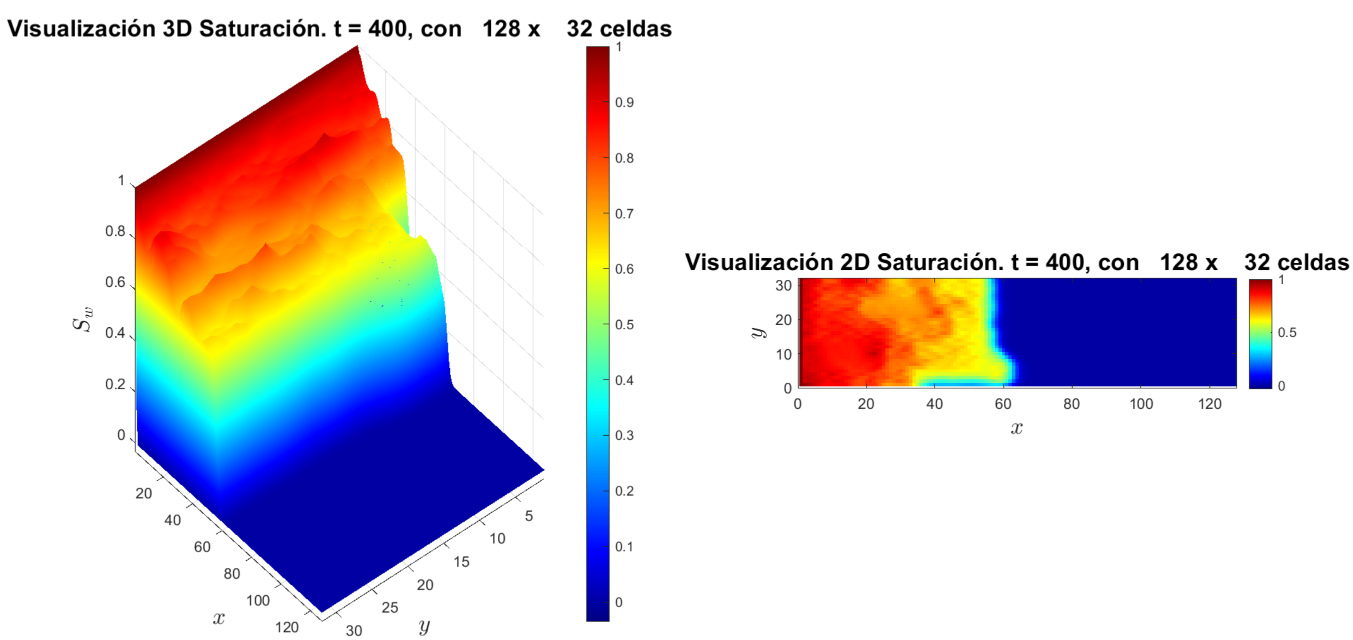
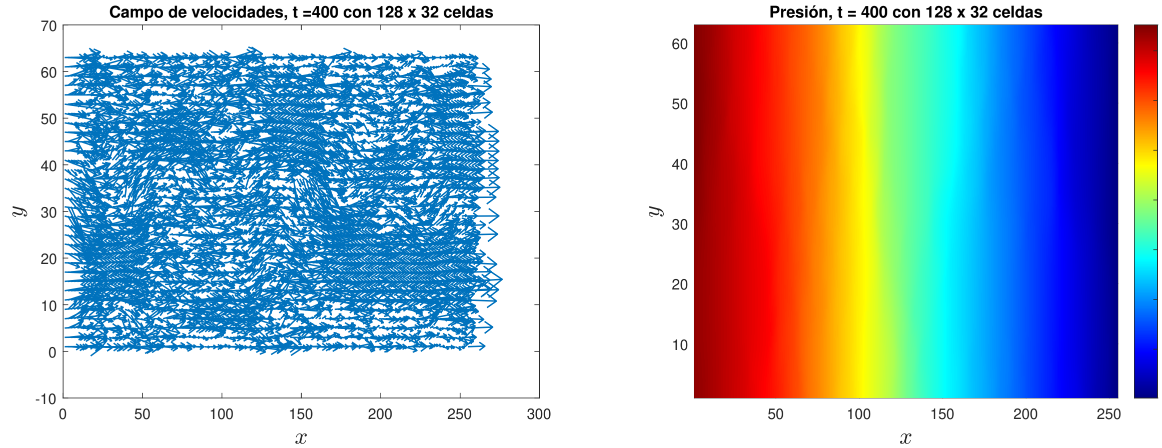


Figura 3: Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 400$. Usando una malla de 128×32. Implementación realizada en [3].



(a) Campo de velocidades en $t = 400$. Usando una malla de 128×32.

(b) Solución numérica de la Presión en $t = 400$. Usando una malla de 128×32.

Figura 4: Campo de velocidades y Presión en $t = 400$. Implementación realizada en [3].

El método propuesto logra capturar la influencia de la heterogeneidad en la propagación de las fases, validando la efectividad del acoplamiento GMsFEM - SDLE en la simulación de flujos bifásicos.

Referencias

[1] Eduardo Abreu et al. "A semi-discrete Lagrangian–Eulerian scheme for hyperbolic-transport models". En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2022).

[2] Juan Galvis et al. "Integrating Semi-Discrete Lagrangian-Eulerian Schemes with Generalized Multiscale Finite Elements for Enhanced Two- and Three-Phase Flow Simulations". En: (2025).

[3] MathWorks. *MATLAB*. Recuperado de `https://la.mathworks.com/help/index.htm`. s.f.

[4] M. Presho y J. Galvis. "A mass conservative generalized multiscale finite element method applied to two-phase flow in heterogeneous porous media". En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2018).