



Estudio del método multiescala generalizado (GMsFEM) y aplicaciones a flujos bifásicos en medios porosos

Yessica Vanessa Trujillo Ladino

Universidad Nacional de Colombia
Facultad Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia

2025

Estudio del método multiescala generalizado (GMsFEM) y aplicaciones a flujos bifásicos en medios porosos

Yessica Vanessa Trujillo Ladino

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Matemática

Director:
Juan Galvis

Universidad Nacional de Colombia
Facultad Ciencias, Departamento de Matemáticas
Bogotá, Colombia
2025

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por su apoyo incondicional a lo largo de este proceso. También expreso mi gratitud a la Universidad Nacional de Colombia y a los profesores que han contribuido a mi formación académica durante estos años de estudio.

En especial, agradezco al profesor Juan Galvis por su valioso apoyo, orientación y acompañamiento, tanto en este proyecto como en mi desarrollo académico. De igual manera, extiendo mi reconocimiento a los profesores Eduardo Abreu, del IMEC de la Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP-IMECC), y Jean François, de la Universidade Estadual do Ceará, Campus do Itaperi, por su guía y apoyo durante el estudio de este tema.

Finalmente, agradezco a mi compañera Angie Forero, con quien compartí el estudio de este tema. Su trabajo en equipo y colaboración fueron fundamentales para el desarrollo de este proyecto.

Resumen

Se estudia el acoplamiento del método multiescala generalizado (GMsFEM) y el método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano (SDLE) para la simulación de flujos bifásicos en medios porosos heterogéneos. Para ello, se analizan los fundamentos teóricos y aplicaciones prácticas del método de elementos finitos (FEM), el método multiescala (MsFEM), GMsFEM y SDLE. Su desempeño se evalúa a través de la solución numérica de distintos problemas, como el de la cuerda elástica, la ecuación de Poisson y la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos. Asimismo, se abordan leyes de conservación en el contexto de flujos bifásicos, con énfasis en la ecuación de Buckley–Leverett con gravedad.

Palabras clave: Métodos numéricos, Método de Elementos Finitos (FEM), Método Multiescala (MsFEM), Método Multiescala Generalizado (GMsFEM), Método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano, Flujos bifásicos, Medios porosos heterogéneos.

Abstract

The coupling of the Generalized Multiscale Finite Element Method (GMsFEM) and the Semi-Discrete Lagrangian-Eulerian (SDLE) method for the simulation of two-phase flows in heterogeneous porous media is studied. To this end, the theoretical foundations and practical applications of the Finite Element Method (FEM), the Multiscale Finite Element Method (MsFEM), GMsFEM, and SDLE are analyzed. Their performance is evaluated through the numerical solution of various problems, such as the elastic string problem, the Poisson equation, and the pressure equation in heterogeneous porous media. Additionally, conservation laws are addressed in the context of two-phase flows, with a particular focus on the Buckley–Leverett equation with gravity.

Keywords: Numerical methods, Finite Element Method (FEM), Multiscale Method (MsFEM), Generalized Multiscale Finite Element Method (GMsFEM), Semi-Discrete Lagrangian-Eulerian Method, Two-phase flows, Heterogeneous porous media.

Índice

1. Introducción	14
2. Conceptos previos	17
2.1. Herramientas del análisis funcional	17
2.1.1. Espacios	17
2.1.2. Formas bilineales	19
2.2. Herramientas de ecuaciones diferenciales parciales	20
2.2.1. Tipos de ecuaciones diferenciales parciales	21
2.2.2. Tipos de difusión	22
2.2.3. Criterio de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL)	23
2.2.4. Homogeneización de ecuaciones lineales	24
3. Método de elementos finitos (FEM)	27
3.1. Introducción 1D y 2D	27
3.2. Resultados numéricos	34
3.2.1. FEM para solución de la ecuación de Poisson	34
3.2.2. FEM para la solución de un problema de difusión heterogénea	37
4. Método de elementos finitos multiescala (MsFEM)	39
4.1. Resultados numéricos	42
4.1.1. MsFEM para la ecuación de la cuerda elástica	42
4.1.2. MsFEM para un problema de difusión isotrópica	45
5. Método generalizado de elementos finitos multiescala (GMsFEM)	49
5.1. Resultados numéricos	53
5.1.1. GMsFEM para la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos	53
6. Método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano	59
6.1. Introducción 1D y 2D	59
6.2. Resultados numéricos	67
7. Acomplamiento (Método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano + GMsFEM)	73
7.1. Descomposición de operadores	74
7.2. Resultados numéricos	75

7.2.1. Flujos bifásicos en medios porosos heterogéneos	75
8. Conclusiones	86
A. Teoría del error para coeficientes suaves	88
B. Métodos para resolver el problema de valores propios generalizado	91
B.1. Usando el método de Cholesky	92
B.2. Algoritmo QZ	93
B.3. Vectores propios generalizados	97

Índice de figuras

1.	Problema de la cuerda elástica. Elaboración propia en [7].	27
2.	Función base, lineal por partes. Elaboración propia en [7].	29
3.	Solución aproximada de $-u''(x) = 1$ en $[0, 1]$ usando FEM. Implementación realizada en [20].	31
4.	Una triangulación de elementos finitos en D . Elaboración propia en [7], inspirada en [5].	32
5.	Función base φ_j en D . Elaboración propia en [7], inspirada en [5]. . .	33
6.	Solución del problema usando FEM, con $n = 5$. Elaboración en [13] y visualización realizada en [20].	36
7.	Solución del problema usando FEM, con $n = 50$. Elaboración en [13] y visualización realizada en [20].	36
8.	Solución exacta. Elaboración en [20]	37
9.	Solución del problema usando FEM, con $n = 50$. Elaboración en [13] y visualización realizada en [20].	38
10.	Solución exacta. Elaboración en [20]	38
11.	Solución aproximada de $-u''(x) = 1$ en $[0, 1]$ usando MsFEM. Implementación realizada en [20].	45
12.	Malla gruesa y coeficiente de permeabilidad. Implementación realizada en [20].	46
13.	Solución implementada en [20].	47
14.	Solución implementada en [20].	48
15.	Vecindades del dominio D . Elaboración propia.	51
16.	Solución implementada en [20].	55
17.	Solución implementada en [20].	56
18.	Solución implementada en [20].	57
19.	Solución implementada en [20].	58
20.	Posibles representaciones geométricas del volumen de control espacio-tiempo. Elaboración propia. Inspirado en [2].	60
21.	Solución aproximada usando SDLE en $t = 0,75$. Implementación realizada en [20].	67
22.	Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0$. Usando una malla de 32×32 . Implementación realizada en [20].	69

23.	Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0.25$. Usando una malla de 32×32 . Implementación realizada en [20].	70
24.	Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0.5$. Usando una malla de 32×32 . Implementación realizada en [20].	70
25.	Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0$. Usando una malla de 128×128 . Implementación realizada en [20].	71
26.	Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0.25$. Usando una malla de 128×128 . Implementación realizada en [20].	71
27.	Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0.5$. Usando una malla de 128×128 . Implementación realizada en [20].	72
28.	Descomposición de operadores utilizada para resolver el problema del modelo bifásico. Elaboración propia. Inspirada en [21].	75
29.	Coeficiente de permeabilidad. Implementación realizada en [20].	76
30.	Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 50$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].	76
31.	Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 100$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].	77
32.	Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 200$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].	77
33.	Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 400$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].	78
34.	Comparación de los campos de velocidades en $t = 50$ y $t = 100$	78
35.	Comparación de los campos de velocidades en $t = 200$ y $t = 400$	79
36.	Comparación de la presión en $t = 50$ y $t = 100$	79
37.	Comparación de la presión en $t = 200$ y $t = 400$	80
38.	Coeficiente de permeabilidad. Implementación realizada en [20].	81
39.	Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 50$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].	81
40.	Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 100$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].	82
41.	Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 200$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].	82
42.	Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 400$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].	83
43.	Comparación de los campos de velocidades en $t = 50$ y $t = 100$	83

44.	Comparación de los campos de velocidades en $t = 200$ y $t = 400$	84
45.	Comparación de la presión en $t = 50$ y $t = 100$	84
46.	Comparación de la presión en $t = 200$ y $t = 400$	85
47.	Elementos en T^h . Elaboración propia, inspirada en [5].	89

1. Introducción

El método de elementos finitos (FEM) es un método numérico utilizado para dar aproximaciones numéricas de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), ver [5, 17]. Este método discretiza el dominio continuo en subdominios más pequeños llamados elementos finitos. Estos elementos finitos son formas geométricas básicas, como triángulos o cuadriláteros para problemas bidimensionales, tetraedros o hexaedros en el caso de problemas tridimensionales. Al dividir el dominio en elementos finitos, el problema original se transforma en un conjunto de ecuaciones algebraicas, que se ensamblan para formar un sistema de ecuaciones, dicho sistema se resuelve numéricamente utilizando técnicas de álgebra lineal, como la eliminación de Gauss, la descomposición LU o métodos iterativos, ver [6]. Una vez resuelto el sistema, se obtiene la solución aproximada para la variable desconocida en cada punto del dominio discretizado. Conociendo esto se evalúa la solución obtenida y se realiza un análisis de error y precisión. Si la solución no es lo suficientemente precisa, se puede realizar un refinamiento de la malla, es decir, se puede subdividir nuevamente el dominio en elementos más pequeños y aplicar nuevamente el método, ver [5, 17].

Un problema multiescala se caracteriza por la presencia de variaciones significativas en múltiples escalas temporales o espaciales, ver [11]. Estas escalas pueden abarcar desde lo muy pequeño hasta lo muy grande, y las interacciones entre ellas pueden generar problemas de solución, [11].

Si se trabaja un problema multiescala para obtener una buena solución con el método FEM es necesario realizar un refinamiento de la malla que puede llegar a ser costoso y poco eficiente de manera computacional, por esta razón se introduce el método multiescala de elementos finitos (MsFEM), [11]. El MsFEM es un método equivalente a la homogeneización numérica siempre que ambos sean válidos, la diferencia principal con el método FEM es que en este se calculan las funciones base de tal manera que capturen el comportamiento o estructura multiescala de la solución del problema, [11], es decir, teniendo una malla fina se introduce una malla gruesa y se calculan las funciones base en los nodos de la malla gruesa junto con vecindades de estos utilizando la malla fina, finalmente estas funciones bases son agregadas en una formulación global que dará como resultado la solución, tomar las funciones bases de esta manera es esencial, pues capturan características y heterogeneidades importantes a distintas escalas y por tanto asegura que la aproximación resultante sea más robusta y eficiente, ver [11, 23, 24].

Sin embargo, cuando las escalas de un problema no se pueden separar o se tienen problemas de alto contraste es necesario introducir el método generalizado multiescala de elementos finitos (GMsFEM) pues el MsFEM no es adecuado en estos casos, [8], este método se basa en la construcción de un espacio de dimensión local pequeña que pueda usarse para generar una solución aproximada en donde los grados de libertad son muchos, es decir, cuando el espacio de entrada tiene demasiados parámetros fuertes y que por tanto hacen que su dimensión sea grande, es así que el GMsFEM nos brinda una forma de reducir los grados de libertad en la malla gruesa, ver [10]. Este método se puede ver como una variante del MsFEM cuya principal diferencia es la utilización de varias funciones base multiescala para los nodos de la malla gruesa, estas funciones base se calculan en base a un problema con valores propios local, es decir, con los autovectores calculados en la malla fina.

Al momento de querer resolver un problema que abarca diferentes escalas, generalmente los métodos usuales y clásicos nos ponen restricciones computacionales, bien sea de tamaño o de tiempo, ya que al ser problemas tan grandes, la memoria de los equipos no es suficiente, ya que cualquier implementación debe resolver un problema muy grande y mal condicionado, ver [10, 21], una situación que es común en diversos ámbitos científicos.

Los métodos anteriormente mencionados son adecuados para hallar la solución de ecuaciones elípticas. Para problemas hiperbólicos, el método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano es una herramienta eficaz para resolver problemas iniciales en modelos escalares y sistemas de leyes de conservación. Está fundamentado en la noción de curvas de no flujo, lo que lo hace especialmente eficaz para garantizar la positividad de las soluciones. Para respaldar su validez y eficacia, se ha llevado a cabo un análisis numérico, ver [1]. Además, se presentan ejemplos numéricos que abarcan la unión de problemas de flujo de fluidos, ver [2].

Por otro lado, en un problema de flujo bifásico en medios porosos heterogéneos, existen dos fases diferentes presentes en el sistema, cada una con sus propias propiedades distintivas. Esto da mayor complejidad en el análisis, ya que las interacciones entre las fases pueden dar lugar a comportamientos diversos y complejos de modelar. La herramienta de modelización principal en estos problemas de fluidos es la difusión de sustancias en un medio poroso heterogéneo con propiedades de permeabilidad de

múltiples escalas de alto contraste, así en este trabajo se mostrará cómo se modela y resuelve el problema de flujo bifásico, destacando el método multiescala generalizado y el método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano, ver [14].

2. Conceptos previos

En esta sección se introducen los conceptos de análisis funcional y de ecuaciones diferenciales parciales que son esenciales para el desarrollo y entendimiento de los métodos numéricos expuestos. En específico, se presentan los espacios y formas bilineales, fundamentales para la formulación y solución de problemas en el contexto del Método de Elementos Finitos Multiescala, así como los distintos tipos de difusión, los cuales son cruciales para la elaboración de ejemplos a lo largo del artículo. El material aquí presentado fue tomado de [3, 5, 16, 17, 22].

2.1. Herramientas del análisis funcional

El método de elementos finitos (FEM) se basa en la formulación variacional de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), lo cual requiere un marco teórico-matemático adecuado para garantizar la existencia y unicidad de soluciones, así como su estabilidad y precisión numérica, ver [5, 17]. Este enfoque se centra en reformular los problemas diferenciales como problemas de optimización o de minimización de funcionales, lo que permite aplicar herramientas del análisis funcional.

Para abordar estos problemas, es fundamental definir el espacio de funciones en el que se buscarán las soluciones. Dichos espacios deben ser lo suficientemente amplios para incluir funciones con derivadas débiles, pero también lo suficientemente estructurados para permitir el uso de técnicas de aproximación numérica. En este contexto, los espacios de Sobolev resultan ser los más apropiados, ya que permiten trabajar con funciones que pueden no ser diferenciables en el sentido clásico, pero cuyas derivadas en un sentido débil están bien definidas. Ver [18].

A continuación, se presentan definiciones y propiedades básicas de estos espacios, que constituyen la base teórica para el análisis del método de elementos finitos.

2.1.1. Espacios

Los espacios de Sóbolev son los más convenientes para trabajar, ver [5, 17], ya que el enfoque matemático en diversas aplicaciones del método de elementos finitos se fundamenta en la formulación variacional de ecuaciones en derivadas parciales de tipo elíptico. Esta perspectiva implica que para obtener soluciones a muchas ecuaciones diferenciales de importancia, se busca un valor mínimo a través de una función adecuada. En otras palabras, se trata de encontrar la configuración que minimiza cierta cantidad que refleja la física del problema. Estos problemas variacionales, que

están relacionados con la búsqueda de mínimos, se resuelven en espacios de funciones específicos, como los espacios de Sobolev, donde las funciones deben cumplir ciertas condiciones de regularidad y comportamiento, ver [5, 17].

Definición 2.1.1 (Espacio de Sóbolev.) *Un espacio de Sóbolev es un espacio vectorial normado de funciones, que puede verse como un subespacio de un espacio L_p . Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ el espacio de Sóbolev $W^{m,p}(\Omega)$ se define como*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L_p(\Omega) \mid D^\alpha f \in L_p(\Omega), \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N} : |\alpha| \leq m\}, \quad (1)$$

donde $D^\alpha f$ denota las derivadas parciales débiles de f , es decir,

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Es claro que $W^{m,p}(\Omega) \subset L_p(\Omega)$.

Definición 2.1.2 (Norma del espacio de Sóbolev.) *La norma del espacio de Sóbolev se define a partir de la norma $\|\cdot\|_{L_p(\Omega)}$ del espacio L_p , esto es,*

$$\|f\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < \infty. \quad (2)$$

Los espacios de Sóbolev con $p = 2$ tienen la misma estructura de un espacio de Hilbert, denotamos $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, el producto interno se define a partir del producto interno de L_2 ,

$$L_2 : (f, g)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L_2(\Omega)}. \quad (3)$$

Se define el espacio $H_0^m(\Omega)$ como $H_0^m(\Omega) := \overline{H^m(\Omega) \cap C_0^\infty(\Omega)}$, ver [17].

Las norma y seminorma de los espacios de Sobolev $H^k(\Omega)$ son

$$\|u\|_{k,\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}, \quad |u|_{k,\Omega} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u|^2 \right)^{1/2}, \quad (4)$$

respectivamente.

2.1.2. Formas bilineales

Para continuar, es importante conocer y comprender las formas bilineales, para así comprender las formulaciones necesarias en los métodos numéricos a trabajar, el material presentado aquí fue tomado de [4, 16].

Definición 2.1.3 (Forma bilineal.) *Sea K un cuerpo y V un K -espacio vectorial, una forma bilineal es una aplicación $f : V \times V \rightarrow K$ que satisface las siguientes propiedades:*

- $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v)$.
- $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2)$.
- $f(au, v) = af(u, v)$.
- $f(u, av) = af(u, v)$.

para todo $a \in K$, $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$.

A continuación se presenta un ejemplo de una forma bilineal.

Ejemplo 2.1.1 *El producto escalar de un espacio euclídeo define una forma bilineal.*

Por ejemplo en \mathbb{R}^2 , si consideramos dos vectores $u = (a, b)$ y $v = (c, d)$, su producto escalar esta dado por $\langle u, v \rangle = ac + bd$, aquí define $\langle u, v \rangle$ una forma bilineal.

Definición 2.1.4 (Forma bilineal simétrica.) *Una forma bilineal simétrica es aquella que es comutativa, es decir, $f(u, v) = f(v, u)$.*

Posteriormente se muestra la forma de la matriz asociada a una forma bilineal.

Definición 2.1.5 (Matriz asociada.) *Toda forma bilineal se puede expresar de manera matricial.*

Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial, consideremos $f : V \times V \rightarrow K$ una forma bilineal y $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base del espacio vectorial V de dimensión finita, la matriz asociada a la forma f respecto de la base B es

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Proposición 2.1.1 *Sea $f : V \times V \rightarrow K$ una forma bilineal y $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base del espacio vectorial V , la imagen de f de los vectores $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ es la siguiente*

$$f(u, v) = u^t \cdot A \cdot v$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(e_1, e_1) & f(e_1, e_2) & \cdots & f(e_1, e_n) \\ f(e_2, e_1) & f(e_2, e_2) & \cdots & f(e_2, e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(e_n, e_1) & f(e_n, e_2) & \cdots & f(e_n, e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Algunas consecuencias de la proposición anterior son las siguientes:

- Una forma bilineal es simétrica si y sólo si su matriz en una base cualquiera es simétrica.
- Si se fija la base B y la forma bilineal f , entonces la matriz A que hace $f(u, v) = u^t A v$ para todo u, v es única.

Teorema 2.1.1 (Teorema Espectral Real) *Supongamos que V es un espacio de producto interno real de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces, V tiene una base ortonormal compuesta por autovectores de T si y solo si T es autoadjunto.*

La demostración de este teorema se puede encontrar en [4, 16].

2.2. Herramientas de ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) son fundamentales para modelar una amplia variedad de fenómenos, tales como la difusión de calor, la propagación de ondas, el flujo de fluidos, etc. Su estudio permite describir cómo cambian ciertas magnitudes en función de múltiples variables independientes, como el tiempo y el espacio. Ver [12].

Comprender la naturaleza de estas ecuaciones es importante para aplicar métodos numéricos de manera efectiva. Esto se debe a que el comportamiento de las soluciones varía significativamente dependiendo del tipo de EDP, lo que influye en la elección del método adecuado. Ver [12, 17].

A continuación, se presenta una clasificación de las EDPs en función de sus características estructurales y del comportamiento de sus soluciones, enfocándonos en las ecuaciones elípticas e hiperbólicas, que son de nuestro interés.

2.2.1. Tipos de ecuaciones diferenciales parciales

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) se pueden clasificar en tres tipos principales según su estructura y el comportamiento de sus soluciones: elípticas, parábolicas e hiperbólicas. En lo que sigue, nos enfocaremos en el estudio de las ecuaciones elípticas e hiperbólicas.

- **Ecuaciones Elípticas**

Las ecuaciones elípticas se caracterizan por la ausencia de dependencia temporal y por su forma general:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y, u, \nabla u) = 0, \quad (6)$$

donde el discriminante se calcula como $\Delta = B^2 - 4AC$, y cumple que $\Delta < 0$ en el dominio de interés.

Ejemplo 2.2.1 (Ecuación de Laplace) *La ecuación de Laplace es una ecuación elíptica de la siguiente forma*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (7)$$

Ejemplo 2.2.2 (Ecuación de Poisson) *La ecuación de Poisson es otra una ecuación elíptica, tiene de la siguiente forma*

$$\nabla^2 u = f(x, y), \quad (8)$$

donde $f(x, y)$ es una función dada.

Las soluciones de este tipo de ecuaciones son suaves y analíticas bajo condiciones apropiadas. No presentan ondas ni dependencias temporales. Las soluciones dependen de los valores en las fronteras.

- **Ecuaciones Hiperbólicas**

Las ecuaciones hiperbólicas describen fenómenos donde predomina la propagación de ondas. Su forma general es

$$A(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D(x, t, u, \nabla u) = 0, \quad (9)$$

donde el discriminante se calcula como $\Delta = B^2 - 4AC$, y cumple que $\Delta > 0$ en el dominio de interés.

Ejemplo 2.2.3 (Ecuación de onda) *La ecuación de onda es una ecuación hiperbólica de la siguiente forma*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (10)$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda.

Las soluciones representadas por ondas que se propagan en el tiempo y el espacio. Suelen presentar discontinuidades, como frentes de onda. Dependen tanto de las condiciones iniciales como de las condiciones de contorno.

2.2.2. Tipos de difusión

La ecuación

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x) \text{ con } x \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (11)$$

es una ecuación diferencial parcial que describe cómo una cantidad $u(x)$ se distribuye en el dominio D bajo la influencia de una función de difusión $k(x)$ y un forzante $f(x)$. Note que este modelo representa diferentes tipos de difusión dependiendo de la función $k(x)$, tal como se muestra a continuación:

- Si $k(x) = \begin{pmatrix} k_{11}(x) & k_{12}(x) \\ k_{12}(x) & k_{22}(x) \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica 2×2 definida positiva, entonces se tiene **difusión anisotrópica**.

Este tipo de difusión se observa en el flujo de agua a través de suelos con capas geológicas inclinadas, donde la permeabilidad varía según la orientación de las capas.

- Si $k(x) = \begin{pmatrix} k_{11}(x) & 0 \\ 0 & k_{22}(x) \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica 2×2 , con $k_{11}(x) \neq k_{22}(x)$, entonces se tiene **difusión ortotrópica**.

Este tipo de difusión se presenta en materiales donde las propiedades son diferentes en cada dirección principal, pero sin interacción entre estas direcciones. Un caso práctico es la transferencia de calor en un material compuesto reforzado con fibras orientadas en una sola dirección. En este caso, la conductividad térmica es mayor a lo largo de las fibras y menor en las direcciones perpendiculares, generando un flujo térmico condicionado por la disposición del material.

- Si $k(x) = \begin{pmatrix} k_{11}(x) & 0 \\ 0 & k_{11}(x) \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica 2×2 , entonces se tiene **difusión isotrópica**.

Este tipo de difusión ocurre en materiales homogéneos donde las propiedades de transferencia, como la conductividad térmica o la permeabilidad, son iguales en todas las direcciones. Un ejemplo típico es la propagación uniforme del calor en un metal sin anisotropías estructurales.

- Si $k(x) = C$, donde C es una constante, entonces se tiene **difusión homogénea**.

Este tipo de difusión se observa en situaciones ideales, como la propagación de una sustancia química en un tanque completamente homogéneo, donde la transferencia es uniforme en todo el dominio, sin influencias de variaciones locales en el medio.

- Si $k(x) \neq C$, donde C es una constante, entonces se tiene **difusión heterogénea**.

La difusión heterogénea se encuentra en materiales donde las propiedades de transferencia, como la conductividad o la permeabilidad, varían espacialmente. Por ejemplo, en un suelo compuesto por capas de arena y arcilla, la velocidad de transporte de agua cambia significativamente dependiendo del material presente en cada punto.

2.2.3. Criterio de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL)

El criterio de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) es una condición para garantizar la estabilidad numérica en la solución de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP), especialmente en métodos de diferencias finitas, volúmenes finitos y elementos finitos. Ver [19].

Criterio CFL: *Un método numérico puede ser convergente solo si su dominio numérico de dependencia contiene el verdadero dominio de dependencia de la EDP, al menos en el límite cuando Δt y Δ tienden a cero.*

La condición CFL es una condición necesaria para la estabilidad (y, por ende, para la convergencia). Sin embargo, no es suficiente para garantizar la estabilidad.

2.2.4. Homogeneización de ecuaciones lineales

El método de homogeneización de ecuaciones lineales se utiliza para dar solución a ecuaciones diferenciales parciales lineales, de manera general, este método consiste en describir y simplificar el comportamiento efectivo de materiales con heterogeneidades a través de un conjunto de ecuaciones a mayor escala. Ver [8]. La solución que este método nos otorga es de especial importancia en el análisis del método MsFEM que se explicará posteriormente.

Para dar una visión de su funcionamiento se ilustrará la teoría relacionada a este tomando la ecuación elíptica con coeficientes heterogéneos en un dominio D

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left(k \left(\frac{x}{\epsilon} \right) \nabla u_\epsilon(x) \right) = f(x), & x \in D, \\ u_\epsilon(x) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (12)$$

Donde la función $k \left(\frac{x}{\epsilon} \right)$ es 1–periódica en $\frac{x}{\epsilon}$, siendo ϵ un parámetro pequeño que representa la relación entre escalas que tiene el problema. La teoría de homogeneización estudia el comportamiento en el límite de la solución $u_\epsilon(x)$, es decir, de $u_\epsilon(x) \rightarrow u(x)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, el análisis asintótico de la ecuación (12) resulta en la formulación de una serie de potencias que representa a la función u_ϵ , es decir

$$u_\epsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i u_i. \quad (13)$$

En este sentido, u_0 es la solución resultante de suavizar las soluciones locales en el medio heterogéneo.

Entonces, para dos escalas según lo visto previamente, se puede representar la solución $u_\epsilon(x)$ como una serie infinita en función del parámetro ϵ , esto es

$$u_\epsilon(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) \epsilon^i. \quad (14)$$

En donde las funciones $u_i(x, x/\epsilon)$ también son 1–periódicas, como se dijo con anterioridad, esta representación permite incluir información de distintas escalas, es decir, $u_0(x, x/\epsilon)$ representa la información más importante para incluir en la solución y que por lo general corresponde a la de la escala más gruesa, $\epsilon u_1(x, x/\epsilon)$ representa el peso o corrección que se le da a la información de una escala más pequeña y así

sucesivamente. Ver [8].

Ahora, se debe reemplazar la expresión (14) en (12) para obtener la expresión homogeneizada, para ello, note que la derivada de la ecuación (14) es

$$\nabla u_\epsilon(x) = \epsilon^{-1} \nabla_y u_0 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) + \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i (\nabla_y u_{i+1} + \nabla_x u_i) \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) - A_3. \quad (15)$$

Así, la ecuación (12) queda expresada de la forma:

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-2} A_1 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) + \epsilon^{-1} A_2 \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) \\ & + \left(A_3 - \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \epsilon^i (\operatorname{div}_x K(\nabla_x u_i + \nabla_y u_{i+1}) + \operatorname{div}_y K(\nabla_x u_{i+1} + \nabla_y u_{i+2}))}_{k_0} \right) \left(x, \frac{x}{\epsilon} \right) = f(x). \end{aligned} \quad (16)$$

Donde los A_i están dados por

$$A_1 = -\operatorname{div}_y K(y)(\nabla_y u_0) \quad (17)$$

$$A_2 = -(\operatorname{div}_y K(y)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) + \operatorname{div}_x K(y)(\nabla_y u_0)), \quad (18)$$

$$A_3 = -(\operatorname{div}_x K(y)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) + \operatorname{div}_y K(y)(\nabla_y u_2 + \nabla_x u_1)). \quad (19)$$

Al agrupar términos con base en las potencias de ϵ ($-2, -1$ y 0), se tiene que

$$\begin{cases} A_1 = 0, \\ A_2 = 0, \\ A_3 = f. \end{cases} \quad (20)$$

Entonces, observando la primera igualdad de la ecuación (20) y la definición de A_1 , que sea igual a 0 implica que u_0 es independiente de y y, por tanto, ayuda a simplificar la segunda igualdad de la ecuación (20) como

$$-\operatorname{div} K(y)(\nabla_y u_1) = \operatorname{div}_x K(y)(\nabla_x u_0). \quad (21)$$

De aquí, se puede resolver u_1 en donde se ve que esta queda determinada como función lineal de la derivada parcial con respecto a x de u_0 , por tanto, solo queda resolver

la tercera igualdad de la ecuación (20) para obtener a u_2 , lo cual es equivalente a solucionar

$$-\operatorname{div}_y K(y)(\nabla_y u_2) = \operatorname{div}_x K(y)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) + \operatorname{div}_y K(y)(\nabla_x u_1) + f(x). \quad (22)$$

Luego, teniendo en cuenta la periodicidad supuesta desde el inicio para las distintas funciones (1-periodicidad), se sigue que integrando sobre el dominio periódico P a la ecuación u_2 , se tiene que,

$$\int_P -\operatorname{div}_y K(y)(\nabla_y u_2) = \int_{\partial P} -K(y)(\nabla_y u_2) \cdot \eta = 0. \quad (23)$$

Así, al tomar la media se obtiene

$$-\int_P (\operatorname{div}_x K(y)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0) + \operatorname{div}_y K(y)(\nabla_x u_1)) dy = f(x). \quad (24)$$

Lo cual, teniendo en cuenta que u_1 se escribe linealmente en función de $\nabla_x u_0$ y que u_0 es independiente de y , se sigue que,

$$-\operatorname{div}_x \int_P (K(y)(\nabla_y u_1 + \nabla_x u_0)) dy = f(x). \quad (25)$$

Por tanto, se consigue una ecuación de segundo orden para u_0 lo cual no es muy difícil de solucionar, aunque, como se ha dicho este método es una técnica poderosa para la solución de ecuaciones diferenciales parciales tiene ciertos problemas cuando las ecuaciones no son lineales o cuando se tienen demasiados detalles a escala fina, por tanto, si se tiene una ecuación de dichas características es necesario introducir otros métodos que aunque pueden ser menos eficientes a nivel computacional pueden asegurar un acercamiento más efectivo a la solución. Ver [8].

3. Método de elementos finitos (FEM)

El método de elementos finitos (FEM) es una técnica numérica utilizada para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales (EDP), especialmente en problemas donde las soluciones exactas son difíciles de obtener de forma analítica. Ver [5, 17].

A continuación, se presenta el desarrollo del FEM en 1D y 2D, incluyendo la formulación fuerte y débil del problema, la aproximación mediante el método de Galerkin y su posterior representación matricial. Estos conceptos se ilustrarán con ejemplos concretos que permiten visualizar la metodología y sus aplicaciones en la resolución de EDP. Ver [17].

3.1. Introducción 1D y 2D

El método de elementos finitos en una dimensión (1D) es una estrategia numérica empleada en la solución de ecuaciones diferenciales en una dimensión. Su procedimiento implica la partición del dominio en pequeños elementos, la aproximación de la solución mediante funciones polinómicas dentro de cada elemento, y la resolución de un sistema algebraico global que representa integralmente el problema en cuestión, es decir, discretizar el dominio y resolver dicho sistema de ecuaciones. Este enfoque goza de una amplia aplicación en el análisis de fenómenos como la conducción de calor, la flexión de vigas y la propagación de ondas en contextos unidimensionales.

Con esto en mente, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.1 Buscamos $u(x)$, la función que representa la deformación en $x \in [a, b]$, también sabemos que $k(x)$ representa que tan elástica es la cuerda y $f(x)$ es un forzante sobre el problema. En la Figura 1 se visualiza el problema.

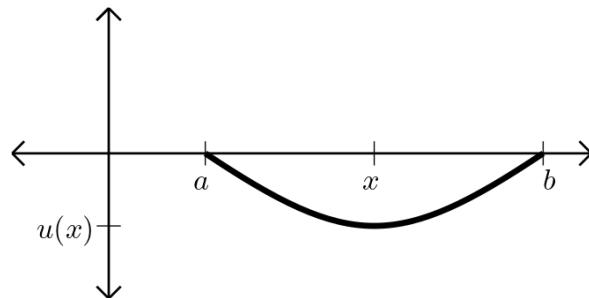


Figura 1: Problema de la cuerda elástica. Elaboración propia en [7].

La **formulación fuerte** del problema esta dada por

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, u(x), \text{ tal que} \\ -(k(x) \cdot u'(x))' = f(x), x \in (a, b) \\ u(a) = 0, u(b) = 0 \text{ condición de frontera de Dirichlet.} \end{array} \right.$$

Para hallar ahora la formulación débil del problema:

1. Se debe multiplicar por una función de prueba v suficientemente suave.
2. Integrar en el dominio y luego integrar por partes.

Observe así que, como

$$-(k(x) \cdot u'(x))' = f(x),$$

entonces

$$-(k(x) \cdot u'(x))' \cdot v(x) = f(x) \cdot v(x),$$

así

$$-\int_a^b (k(x) \cdot u'(x))' \cdot v(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot v(x) dx.$$

Ahora integrando por partes se sigue que

$$-[k(b)u'(b)v(b) - k(a)u'(a)v(a)] + \int_a^b (k(x)u'(x))v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx,$$

le vamos a pedir a la función de prueba que $v(a) = v(b) = 0$, así

$$\int_a^b (k(x)u'(x))v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx.$$

Luego, la **formulación débil** del problema es la siguiente:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in H_0^1 \text{ tal que} \\ \int_a^b (k(x)u'(x))v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \text{ para todo } v \in C_0^\infty(a, b), v(a) = v(b) = 0. \\ u(a) = 0, u(b) = 0. \end{array} \right.$$

Lo siguiente es hallar la formulación de Galerkin.

La idea aquí es buscar u en un espacio de dimensión finita, y v también se usa en un espacio de dimensión finita.

Escogemos una base de N funciones linealmente independientes $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}$, con dicha base se genera el espacio $V = \text{spam}\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}$, note que $V = \{\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_N\varphi_N\}$.

Dichas funciones base se construyen de la siguiente manera (elementos finitos lineales por partes)

1. Triangulamos el intervalo $[a, b]$.

2. para cada vértice interior x_i , se define la función base $\varphi_i(x)$ de la siguiente manera:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x_i) = 1, & x = x_i, \\ \varphi_i(x_j) = 0, & x = x_j. \end{cases}$$

En la Figura 2 se presenta la función base $\varphi_i(x)$.

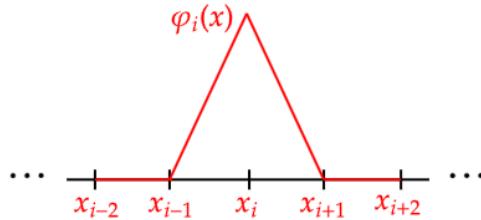


Figura 2: Función base, lineal por partes. Elaboración propia en [7].

Así la **formulación de Galerkin** nos queda de la siguiente forma:

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que} \\ \int_a^b (k(x)u'(x))v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx \text{ para todo } v \in V, v(a) = v(b) = 0. \\ u(a) = 0, u(b) = 0. \end{array} \right.$$

Por último, veamos como se formula matricialmente el problema.

Dado que $u \in V$ se puede expresar como una combinación lineal de las funciones base,

$u = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_N\varphi_N$, podemos tomar $v = \varphi_i$, con $i = 1, 2, \dots, N$ como función de prueba.

Ahora bien, como

$$\int_a^b k(x)u'(x)v'(x)dx = \int_a^b f(x)v(x)dx,$$

$$\int_a^b k(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \cdots + \alpha_N\varphi_N)' \varphi_i' = \int_a^b f\varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Esto es

$$\underbrace{\alpha_1 \int_a^b k\varphi_1' \varphi_i}_{a_{i1}} + \underbrace{\alpha_2 \int_a^b k\varphi_2' \varphi_i}_{a_{i2}} + \cdots + \underbrace{\alpha_N \int_a^b k\varphi_N' \varphi_i}_{a_{iN}} = \underbrace{\int_a^b f\varphi_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Luego

$$\alpha_1 \cdot a_{i1} + \alpha_2 \cdot a_{i2} + \cdots + \alpha_N \cdot a_{iN} = b_i, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N.$$

Esto es

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \alpha_j = b_i, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, N.$$

Entonces si $A = [a_{ij}]$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$, y $x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}$, se tiene que $Ax = b$.

Así, la **formulación matricial** del problema queda de la siguiente forma

$$(M) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \text{ tales que } Ax = b \\ a_{ij} = \int_a^b k\varphi_i' \varphi_j', \quad b_i = \int_a^b f\varphi_i dx, \\ u = \sum \alpha_i \varphi_i, \quad u(a) = 0, u(b) = 0. \end{array} \right.$$

Si consideramos $[a, b] = [0, 1]$, $k(x) = 1$, $f(x) = 1$ es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u(x), \text{ tal que} \\ -u''(x) = 1, x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \text{ condición de frontera de Dirichlet.} \end{array} \right.$$

Se sigue que la solución numérica del problema es presentada en la Figura 3.

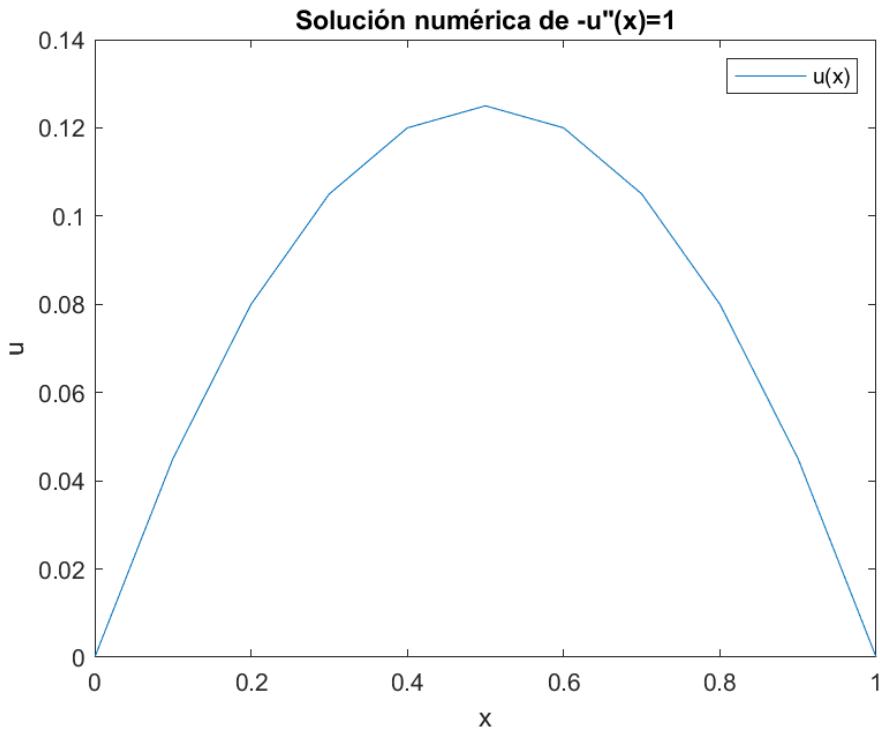


Figura 3: Solución aproximada de $-u''(x) = 1$ en $[0, 1]$ usando FEM. Implementación realizada en [20].

Teniendo presente lo anterior, a continuación mostraremos de manera formal como funciona el método de elementos finitos en 2D, el material presentado aquí fue tomado de [5, 17].

El método de elementos finitos da una solución aproximada de $u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x) \simeq \beta_0 \varphi_0(x) + \beta_1 \varphi_1(x) + \dots + \beta_n \varphi_n(x). \quad (26)$$

Daremos una breve descripción de cómo funciona el Método de Elementos Finitos (FEM) para resolver el siguiente problema de difusión

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), \quad \text{para todo } x \in D, \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{array} \right. \quad (27)$$

Al multiplicar por una función de prueba $v(x)$ suficientemente suave, se tiene

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x))v(x) = f(x)v(x). \quad (28)$$

Integrando sobre el dominio D se sigue que

$$\int_D -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x))v(x) = \int_D f(x)v(x). \quad (29)$$

Al integrar por partes se obtiene

$$\int_D k(x)\nabla u(x)\nabla v(x) - \int_{\partial D} \nabla u(x)\vec{n}(x)v(x) = \int_D f(x)v(x). \quad (30)$$

Asumiendo que la función de prueba toma el valor 0 en la frontera se sigue que.

$$\int_D k(x)\nabla u(x).\nabla v(x) = \int_D f(x)v(x). \quad (31)$$

Así la formulación débil del problema es

$$(W) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ \int_D k(x)\nabla u(x)\nabla v(x) = \int_D f(x)v(x), \quad \text{para todo } v(x) \in C_0^\infty(D), \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{cases} \quad (32)$$

Ahora, si suponemos que D es un dominio poligonal y sea T^h una triangulación de dicho dominio, de esta manera D queda dividido en elementos triangulares, digamos K_1, K_2, \dots, K_m , donde cada K_i es un triángulo, esto quiere decir que $D = \bigcup_{i=1}^m \overline{K_i}$, y además $K_i \cap K_j = \emptyset$, y $\overline{K_i} \cap \overline{K_j}$ es o bien K_i si $i = j$, una arista (la que tienen en común K_i y K_j), un vértice (el común K_i y K_j) o vacío. Ver Figura 4.

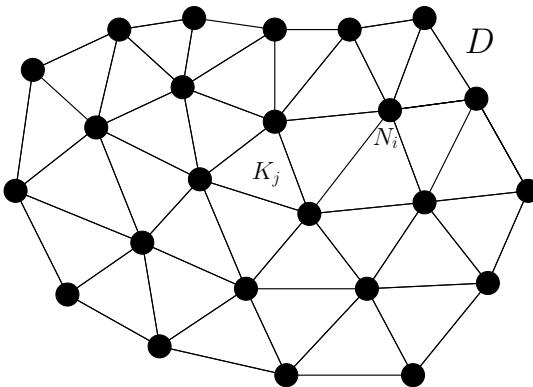


Figura 4: Una triangulación de elementos finitos en D . Elaboración propia en [7], inspirada en [5].

Se define ahora el siguiente conjunto de funciones

$P^r(T^h) = \{v : D \rightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ es globalmente continua, } v|_{K_i} \text{ es un polinomio de grado } r \text{ en cada variable}\}.$

$$P_0^1(T^h) = \{v \in P^1(T^h) \mid v(x) = 0 \text{ para todo } x \in \partial D\}.$$

Conociendo esto, la formulación de Galerkin del problema es la siguiente

$$(G) \begin{cases} \text{Encontrar } u(x) \in P_1(T^h) \text{ tal que} \\ \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) = \int_D f(x)v(x), \quad v(x) \in P_0^1(T^h). \end{cases} \quad (33)$$

Ahora, las funciones base para $P^1(T^h)$ son las siguientes

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x = x_i, \\ 0, & x \neq x_i. \end{cases} \quad (34)$$

En la Figura 5 se presenta la visualización de dicha función base.

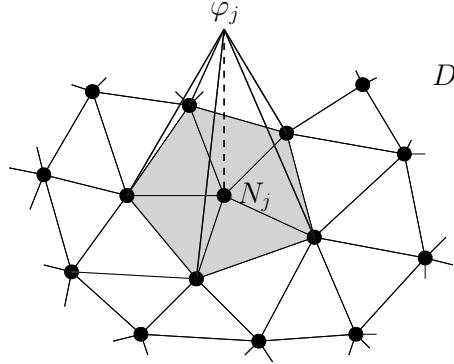


Figura 5: Función base φ_j en D . Elaboración propia en [7], inspirada en [5].

Esta función es de grado 1 en cada elemento.

Sea $I = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i \in D\}$ el conjunto de índices interiores, y $\Gamma = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid x_i \in \partial D\}$ el conjunto de índices de la frontera, como $u(x) \in P^1(T^h)$ y se quiere que en la frontera del dominio $u(x) = g(x)$ entonces se busca una solución de la forma

$$u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i(x) + \sum_{\ell \in \Gamma} g(x_\ell) \varphi_\ell(x), \quad (35)$$

dado que asumimos que la función de prueba es 0 en la frontera, entonces

$$u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i(x). \quad (36)$$

Con ayuda de las funciones base, ecuación (34), tenemos que la formulación matricial del problema es la siguiente

$$(M) \left\{ A \vec{\alpha} = \vec{b}, \right. \quad (37)$$

donde $\vec{\alpha} = [\alpha_i]_{i \in I}$, $a_{ij} = \int_D k(x) \nabla \varphi_{x_i}(x) \nabla \varphi_{x_j}(x)$, $i, j \in I$, y $b_i = \int_D f(x) \varphi_i(x)$.

Para una estimación del error en problemas con coeficientes suaves, ver Apéndice A.

3.2. Resultados numéricos

En esta subsección, presentaremos casos específicos que ilustran cómo se implementa el método en el contexto de la ecuación de Poisson, destacando la formulación débil, el esquema de Galerkin y la representación matricial de los sistemas resultantes.

Estos ejemplos permitirán no solo comprender la estructura de la solución numérica, sino también evaluar su precisión mediante la comparación con soluciones exactas y el análisis del error asociado.

3.2.1. FEM para solución de la ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson se utiliza para describir la distribución de un campo escalar, como la temperatura, la densidad de carga eléctrica o el potencial gravitatorio, en un dominio espacial determinado, es decir, se utiliza para abordar problemas de difusión, dispersión, potencial eléctrico, potencial gravitatorio, transferencia de calor y muchas otras situaciones en las que se necesita modelar la propagación o distribución de una cantidad física en un espacio, ver [17].

Consideremos así el siguiente problema de Poisson,

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ -\Delta u = f(x), \quad \text{para todo } x \in D, \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{array} \right. \quad (38)$$

Observe que $-\Delta u = f(x)$ es equivalente a $-\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = f$, luego, multiplicando

por una función de prueba $v(x, y) \in V = H_0^1(D)$ e integrando sobre el dominio se obtiene,

$$\int_D (-\partial_x^2 u - \partial_y^2 u)v = \int_D fv. \quad (39)$$

Esto es

$$-\int_D \partial_x^2 u v - \int_D \partial_y^2 u v = \int_D fv. \quad (40)$$

Integrando por partes la ecuación 40 y considerando $v = 0$ en ∂D , se obtiene lo siguiente

$$\int_D \partial_x u \partial_x v + \int_D \partial_y u \partial_y v = \int_D fv. \quad (41)$$

La formulación débil del problema es,

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ \int_D \nabla u \nabla v = \int_D fv, \quad \text{para todo } v \in H_0^1, \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D, \\ v(x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{array} \right. \quad (42)$$

Luego la formulación de Galerkin es de la siguiente forma

$$(G) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u(x) \in P_1(T^h) \text{ tal que} \\ \int_D \nabla u \nabla v = \int_D fv, \quad v(x) \in P_0^1(T^h), \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{array} \right. \quad (43)$$

La representación de la solución a este problema es de la forma $u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \varphi_i(x)$,

donde α_i son las constantes a determinar.

Teniendo en cuenta lo anterior, a continuación se presenta un ejemplo del problema de Poisson, junto con su solución numérica.

Ejemplo 3.2.1 *Con base en lo anterior, consideremos el siguiente problema*

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : D = [-1, 1] \times [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ - \operatorname{div}(\nabla u) = \frac{\pi^2}{2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right), \\ u(x, y) = 0, \quad \text{para todo } (x, y) \in \partial D. \end{array} \right. \quad (44)$$

Dado que $k(x) = 1$ se tiene que este es un problema de difusión homogénea. Sabemos que la solución exacta del problema presentado en la expresión 44 es

$$u(x, y) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right).$$

En la Figura 6 y Figura 7 se presenta la solución numérica con diferentes valores de n .

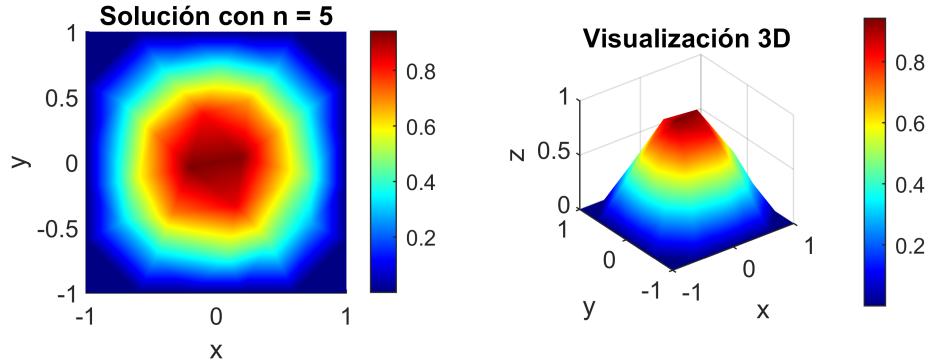


Figura 6: Solución del problema usando FEM, con $n = 5$. Elaboración en [13] y visualización realizada en [20].

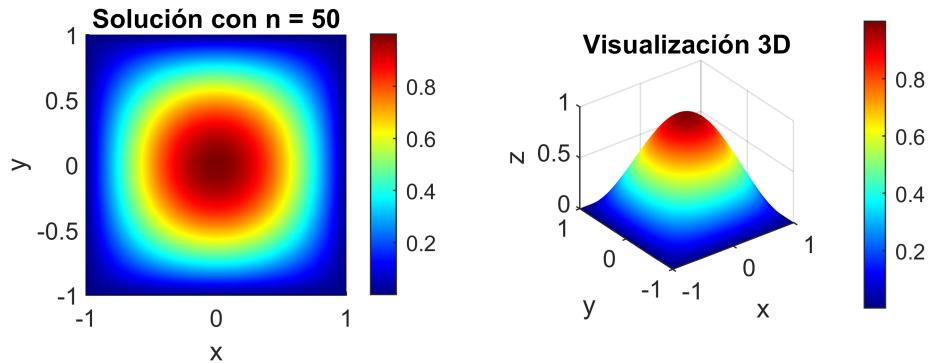


Figura 7: Solución del problema usando FEM, con $n = 50$. Elaboración en [13] y visualización realizada en [20].

En la Figura 8 se muestra la visualización de la solución exacta del problema.

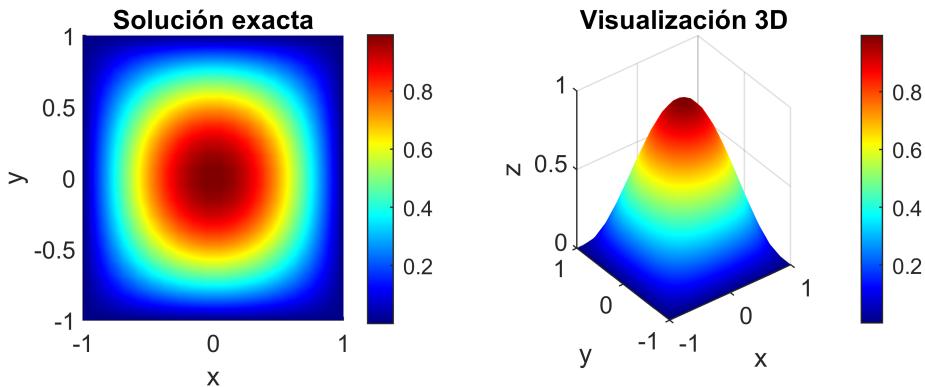


Figura 8: Solución exacta. Elaboración en [20]

Así, los errores de las soluciones numéricas para diferentes triangulaciones del dominio en las normas $L_2(D)$ y $H^1(D)$ son las presentadas en la Tabla 1.

Numero de triángulos	$h(u.a.)$	L_2 Error	H^1 Error
58	0.583095	0.0844398	0.247098
232	0.298077	0.0218416	0.124484
928	0.149039	0.00552836	0.0624526
3712	0.0745193	0.00138766	0.0312641
14848	0.0372596	0.000347343	0.0156381

Cuadro 1: Errores de las soluciones numérica.

3.2.2. FEM para la solución de un problema de difusión heterogénea

Ahora consideremos el siguiente problema de difusión heterogénea

$$(S) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que:} \\ -\operatorname{div}((1 + x + y)\nabla u(x, y)) = 2 + 6x + 6y, \quad \text{para todo } (x, y) \in D \\ u(x, y) = 0, \quad \text{para todo } (x, y) \in \partial D. \end{cases} \quad (45)$$

Sabemos que la solución exacta del problema presentado en la expresión 44 es

$$u(x, y) = x(1 - x)y(1 - y).$$

En la Figura 9 se presenta la solución numérica utilizando [13], para $n = 50$.

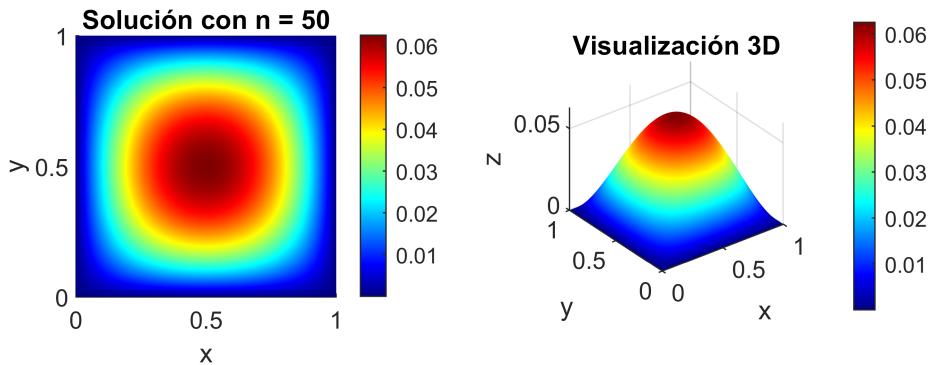


Figura 9: Solución del problema usando FEM, con $n = 50$. Elaboración en [13] y visualización realizada en [20].

La Figura 10 muestra la visualización de la solución exacta del problema.

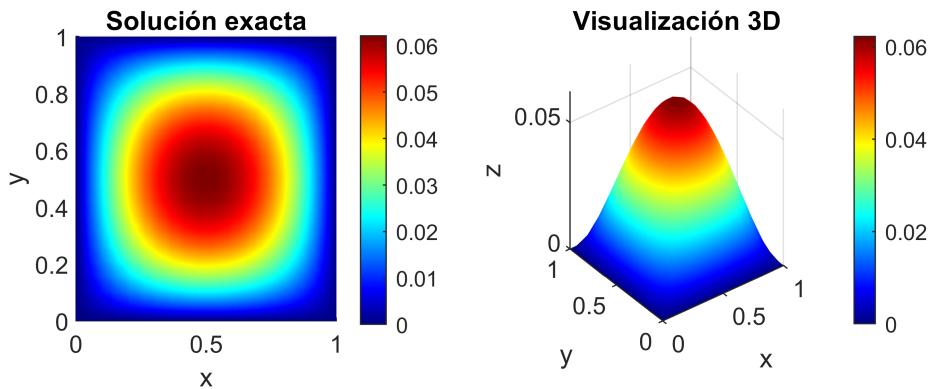


Figura 10: Solución exacta. Elaboración en [20]

Ahora bien, teniendo en cuenta las normas de los espacios L_2 y H^1 se mide el error de la solución numérica mostradas, ver Tabla 2.

Numero de triángulos	$h(u.a.)$	L_2 Error	H^1 Error
5884	0.0351284	1.01776	1.04691

Cuadro 2: Errores de las soluciones numérica.

4. Método de elementos finitos multiescala (MsFEM)

En esta sección se presentará la formulación del método de elementos finitos multiescala (MsFEM), el cual es una mejora del método de elementos finitos (FEM) presentado en el capítulo 3. Esta mejora es necesaria, ya que, como se describió anteriormente, el método FEM puede llegar a ser ineficiente y costoso a nivel computacional. La razón de esto es la necesidad de una malla muy fina para obtener buenas aproximaciones a la solución de la ecuación diferencial parcial que se este trabajando. Así, el MsFEM brinda mejoras significativas en este aspecto, ya que no requiere calcular el sistema lineal utilizando las funciones base descritas previamente con nodos en la malla fina para conseguir resultados precisos, como se verá a continuación la elección de las funciones base permite reducir la cantidad de elementos necesarios en comparación con FEM, esto dado que, este método MsFEM puede capturar detalles de subconjuntos del dominio e incorporarlos en la solución, ver [11].

Para ilustrar el funcionamiento del método, consideremos la ecuación diferencial elíptica sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, en donde $k(x)$ y $f(x)$ son funciones ya conocidas pero con heterogeneidades. Consideremos,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), & x \in D, \\ u(x) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (46)$$

El método MsFEM produce una solución aproximada $u : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ para la ecuación diferencial planteada mediante la combinación de funciones base multiescala en una formulación global. Dado que, este método constituye una generalización de FEM, se lleva a cabo un procedimiento inicial parecido al de FEM, así, es necesario realizar una partición \mathcal{T}^H del dominio D , que generalmente se escoge menos densa que la planteada en FEM y cuyos bloques se llamarán K_i , es decir, $\mathcal{T}^H = \{K_i\}$.

La partición \mathcal{T}^H se interpreta en este contexto como la partición ‘gruesa’ del dominio D , así, para capturar algunas particularidades de este a escala fina se realizará un refinamiento de esta partición al cual se nota por \mathcal{T}^h , de aquí y como se ha mencionado anteriormente, se construyen las funciones base para este método, conocidas como funciones base multiescala. Estas funciones se seleccionan de tal manera que en la malla gruesa sean idénticas a las del método de los elementos finitos, mientras

que dentro de cada bloque de la malla gruesa son oscilatorias.

Para ilustrar mejor esto, se elige un nodo x_i en la partición \mathcal{T}^H tal que $x_i \notin \partial D$ y se toma la función base de FEM φ_i^0 asociada a este nodo. La función base multiescala asociada al nodo x_i , denotada por φ_i^{ms} , es una función que tiene el mismo soporte que φ_i^0 y además cumple la condición

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla\varphi_i^{ms}) = 0, & \text{en } K, \\ \varphi_i^{ms} = \varphi_i^0, & \text{en } \partial K. \end{cases} \quad (47)$$

El sistema mencionado anteriormente se resuelve mediante el método de elementos finitos (FEM).

Uno de los beneficios del refinamiento de la malla gruesa es capturar de manera específica las heterogeneidades presentes en las distintas componentes de la malla y adicionalmente, al utilizar funciones base multiescala reducir la dimensión del cálculo.

Ahora, los elementos finitos están definidos por estas funciones base, es decir, el espacio de los elementos finitos está dado por $P_h = \operatorname{gen}\{\varphi_i^{ms}\}$. Por tanto, se puede pasar a reemplazar en una formulación global, esto es, la aproximación de la función $u(x)$ obtenida por medio del método MsFEM se encuentra en el espacio generado P_h , en conclusión $u^{ms}(x)$ se puede escribir como combinación lineal de las funciones base, tal como se muestra a continuación,

$$u^{ms}(x) = \sum_i \alpha_i \varphi_i^{ms}. \quad (48)$$

Entonces, como en el método de los elementos finitos es necesario hallar los α_i para los cuales $u^{ms}(x)$ es la respectiva solución de la ecuación diferencial en escala gruesa, para lograr esto, se procede a multiplicar la ecuación inicial por funciones de prueba o test $v(x)$ las cuales por facilidad del método se toman continuamente diferenciables, luego se puede reemplazar la solución $u^{ms}(x)$ en la ecuación diferencial a escala fina y se proyecta en la escala gruesa para encontrar aproximadamente a los α_i , para ello, en este caso se tienen dos opciones:

Tomar las funciones de prueba $v(x)$ como funciones que se encuentran en el espacio

$P_h = \text{gen}\{\varphi_i^{ms}\}$ obteniendo así la formulación de Galerkin,

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla u^{ms}(x))v(x) = f(x)v(x) \quad \text{con } v(x) \in P_h. \quad (49)$$

Al integrar sobre el subdominio K , se obtiene

$$\int_K -\operatorname{div}(k(x)\nabla u^{ms}(x))v(x) = \int_K f(x)v(x). \quad (50)$$

O tomar las funciones de prueba $v(x)$ como funciones que se encuentran en el espacio $W_h = \text{gen}\{\varphi_i^0\}$, obteniendo así la formulación de Petrov-Galerkin, en donde de nuevo se sigue el procedimiento inicial realizado en el capítulo 3 con $v \in W_h$, se plantea la integración del subdominio K como en la ecuación 50 para solucionar el siguiente problema.

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla u^{ms}(x))v(x) = f(x)v(x) \quad \text{con } v \in W_h. \quad (51)$$

En ambas formulaciones, la solución del sistema a escala fina es multiplicada por funciones de prueba a escala gruesa, por tanto la solución estará dada en escala gruesa, en este artículo, se seguirá con la formulación de Petrov-Galerkin escrita anteriormente en 51 para así ilustrar el método MsFEM en su totalidad.

Así, para realizar la integración sobre el dominio D teniendo a las funciones de prueba en W_h , se integra sobre cada uno de los bloques de \mathcal{T}^H , se aplica integración por partes y se tiene en cuenta las condiciones de $v(x)$ en la frontera, son 0. Obteniéndose así,

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\int_K k(x)\nabla u^{ms}(x)\nabla v(x) dx \right) = \int_D f(x)v(x) dx. \quad (52)$$

Reemplazando la expresión dada para $u^{ms}(x)$ en la ecuación (52), se sigue que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \left(\int_K k(x)\nabla \left(\sum \alpha_i \varphi_i^{ms} \right) \nabla v(x) dx \right) = \int_D f(x)v(x) dx. \quad (53)$$

Finalmente, se puede observar que esta última expresión se puede escribir matricialmente como un sistema dado por $A\alpha = b$. Tal que $\alpha = (\alpha_i)$, $A = (a_{ij})$ y $b = (b_i)$, en donde los elementos A y b están dados por

$$a_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}^h} \int_K k(x)\nabla \varphi_i^{ms} \nabla \varphi_j^{ms} dx, \quad (54)$$

y

$$b_i = \int_D f(x) \varphi_j^{ms} dx, \quad (55)$$

respectivamente.

En general, la matriz A es una matriz dispersa, es decir, contiene una gran cantidad de elementos iguales a 0, por lo tanto, para resolver este sistema lineal, es conveniente usar un método que sea altamente eficiente para este tipo de matrices. Para facilitar la implementación del algoritmo se pueden reformular las funciones base escribiéndolas en función de las funciones base a escala fina de FEM. Ver [8].

4.1. Resultados numéricos

En esta subsección, se mostrará resultados computacionales del MsFEM para la ecuación de la cuerda elástica y para un problema de difusión isotrópica en medios heterogéneos. A través de estos ejemplos, se ilustrará cómo la metodología multiescala mejora la representación de fenómenos con variaciones espaciales significativas.

4.1.1. MsFEM para la ecuación de la cuerda elástica

Recordemos el problema de la cuerda elástica mostrado en la sección 3.1

$$\begin{cases} \text{Encontrar } u : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, u(x), \text{ tal que} \\ \quad -(k(x) \cdot u'(x))' = f(x), x \in (0, 1) \\ \quad u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

Resolvamos dicho problema usando MsFEM. Supongamos que el intervalo $[0, 1]$ se divide en N segmentos, de la siguiente forma

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} \cdots < x_N = 1.$$

La función base ϕ_i para el nodo i está dada por la solución de $(k(x)\phi'_i)' = 0$, con soporte en el intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. En el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, las condiciones de frontera para la función base ϕ_i se definen como $\phi_i(x_{i-1}) = 0$ y $\phi_i(x_i) = 1$, y en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, las condiciones de frontera para la función base ϕ_i se definen como $\phi_i(x_i) = 1$ y $\phi_i(x_{i+1}) = 0$.

Para hallar los elementos de la matriz de rigidez, no necesitamos una expresión explícita de ϕ_i , solo es necesario calcular $k(x)\phi'_i$. Anteriormente, se dijo que

$(k(x)\phi'_i)' = 0$, esto implica que $k(x)\phi'_i = c$, donde c es una constante, donde las constantes son diferentes en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y $[x_i, x_{i+1}]$. Para hallar dicha constante observe que

$$\phi'_i = \frac{c}{k(x)},$$

integrando en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se sigue que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_i dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{c}{k(x)} dx,$$

esto es

$$\phi_i \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = c \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)},$$

y como $\phi(x_1) - \phi(x_{i-1}) = 1 - 0 = 1$ se tiene que

$$1 = c \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)},$$

luego,

$$k(x)\phi'_i = c = \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}}.$$

De manera análoga, integrando en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ se sigue que

$$k(x)\phi'_i = -\frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}}.$$

Luego, escribiendo el problema de manera matricial como $A\alpha = b$, donde los elementos de A están dados por

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} k(x)\phi'_i(\phi_j^0)' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} k(x)\phi'_i(\phi_j^0)' dx \\ &= \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\phi_j^0)' dx - \frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (\phi_j^0)' dx \\ &= \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}} [\phi_j^0(x_i) - \phi_j^0(x_{i-1})] - \frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}} [\phi_j^0(x_{i+1}) - \phi_j^0(x_i)] \end{aligned}$$

Como $\phi_j^0(x_i) = 1$, si $i = j$, y $\phi_j^0(x_i) = 0$, si $i \neq j$, se sigue que

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= -\frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}}, \\ a_{i,i} &= \frac{1}{\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}} + \frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}}, \\ a_{i,i+1} &= -\frac{1}{\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)}}. \end{aligned}$$

De esto se observa que la matriz A es una matriz tri-diagonal, además $b_i = \int_0^1 f \phi_i^0 dx$. Así la solución numérica esta dada por la solución del problema matricial $Ax = b$. Si consideramos el intervalo $[a, b] = [0, 1]$, con $k(x) = 1$ y $f(x) = 1$, el problema se plantea como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, u(x), \text{ tal que} \\ \quad -u''(x) = 1, x \in (0, 1), \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \text{ condición de frontera de Dirichlet.} \end{array} \right.$$

Se sigue que la solución numérica del problema es presentada en la Figura 11.

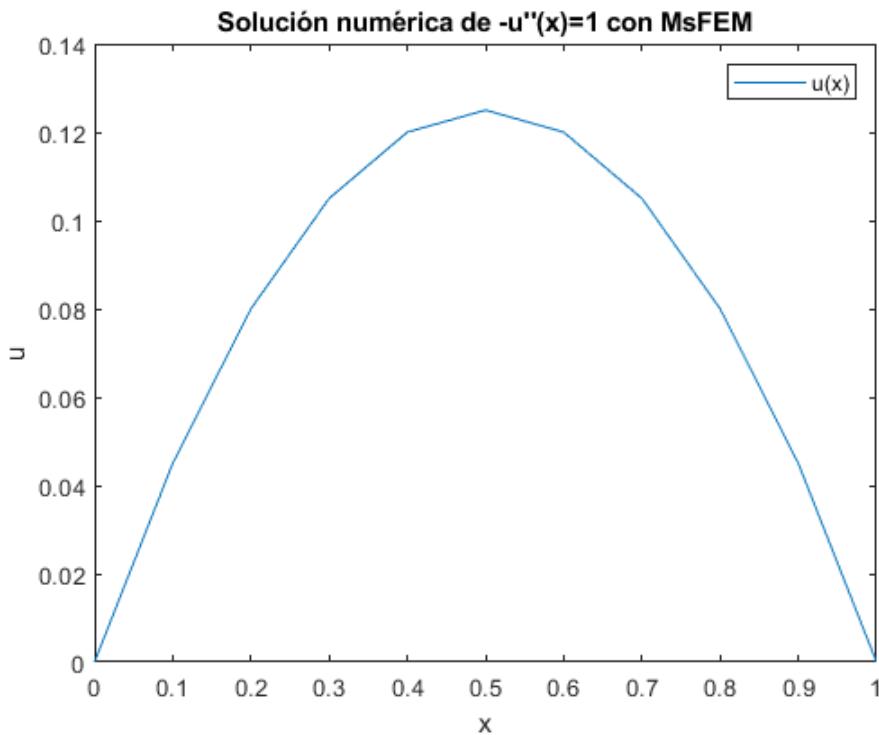


Figura 11: Solución aproximada de $-u''(x) = 1$ en $[0, 1]$ usando MsFEM. Implementación realizada en [20].

4.1.2. MsFEM para un problema de difusión isotrópica

A continuación, se presenta un ejemplo que ilustra la resolución numérica de un problema de difusión isotrópica, considerando un coeficiente de permeabilidad con una estructura heterogénea y altamente contrastante.

Ejemplo 4.1.1 Consideremos el siguiente problema de difusión isotrópica y la malla de tamaño 100×100 mostrada en la Figura 12, en donde se pueden observar distintos canales de contraste que componen un medio de permeabilidad heterogéneo.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla u(x_1, x_2) = 1, & x \in [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x_1, x_2) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (56)$$

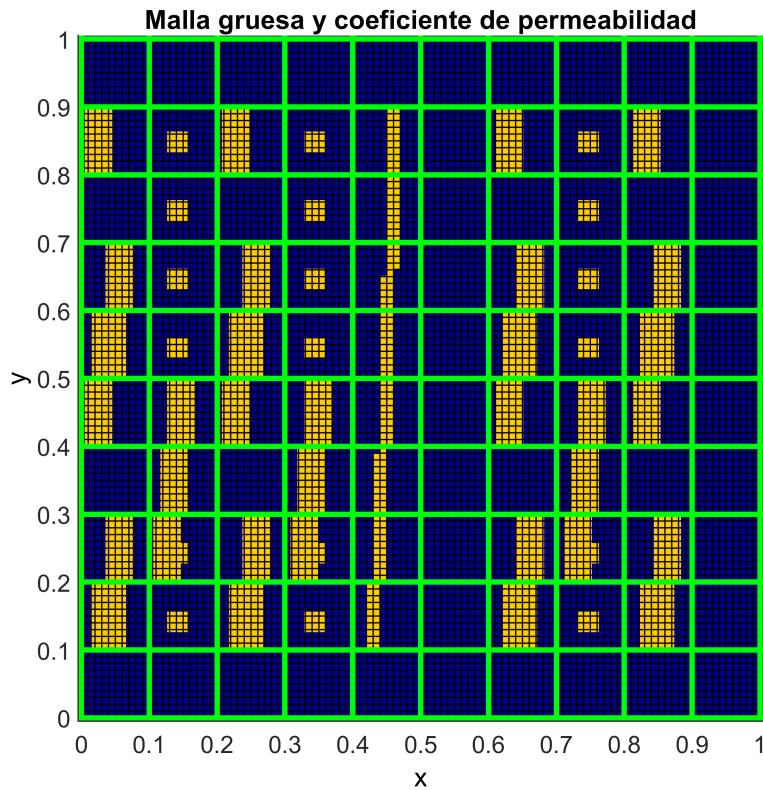


Figura 12: Malla gruesa y coeficiente de permeabilidad. Implementación realizada en [20].

En la Figura 13 se presenta una solución numérica utilizando el software Matlab [20] en donde, más específicamente, se toma la malla gruesa de tamaño 10×10 , donde se usan 121 funciones base, y en la cual se realiza un refinamiento de 10×10 en cada bloque. Así, se puede comparar la efectividad del método MsFEM tomando primeramente como coeficiente de contraste (permeabilidad) tanto en el fondo de la malla, como en los canales e inclusiones el mismo valor, en este caso 1.

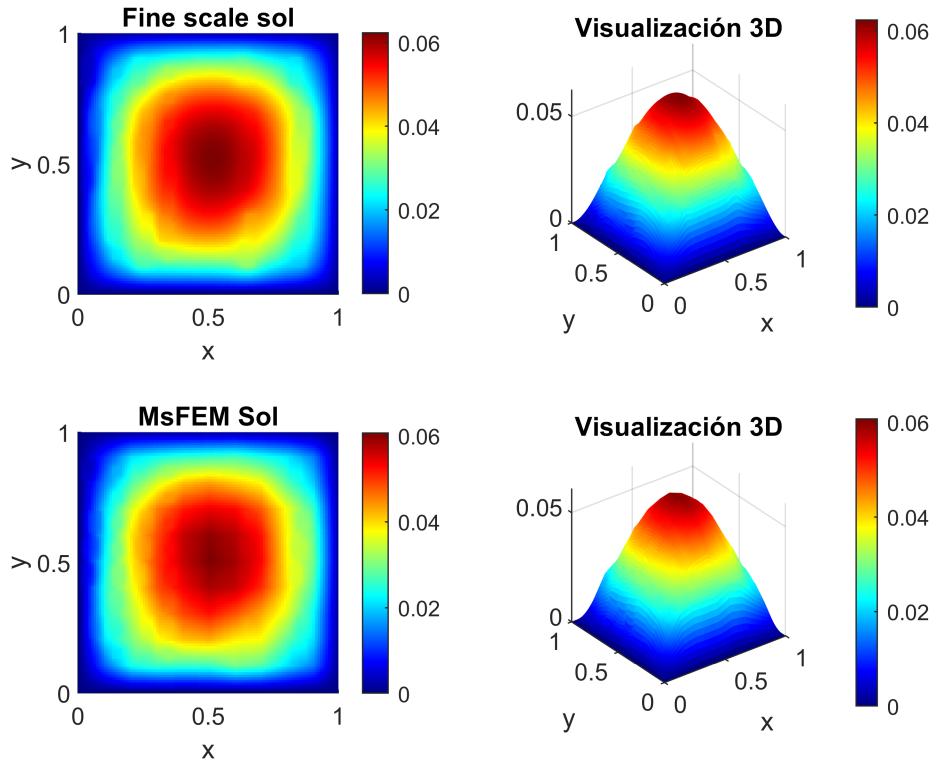


Figura 13: Solución implementada en [20].

Esta solución presenta un error numérico de 0.21001, medido en la norma $L_2(D)$. Se visualiza un buen comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala. Sin embargo, colocando un coeficiente de contraste de 1 en el fondo y de 10^6 en los canales e inclusiones, ocurre lo que se visualiza en la Figura 14

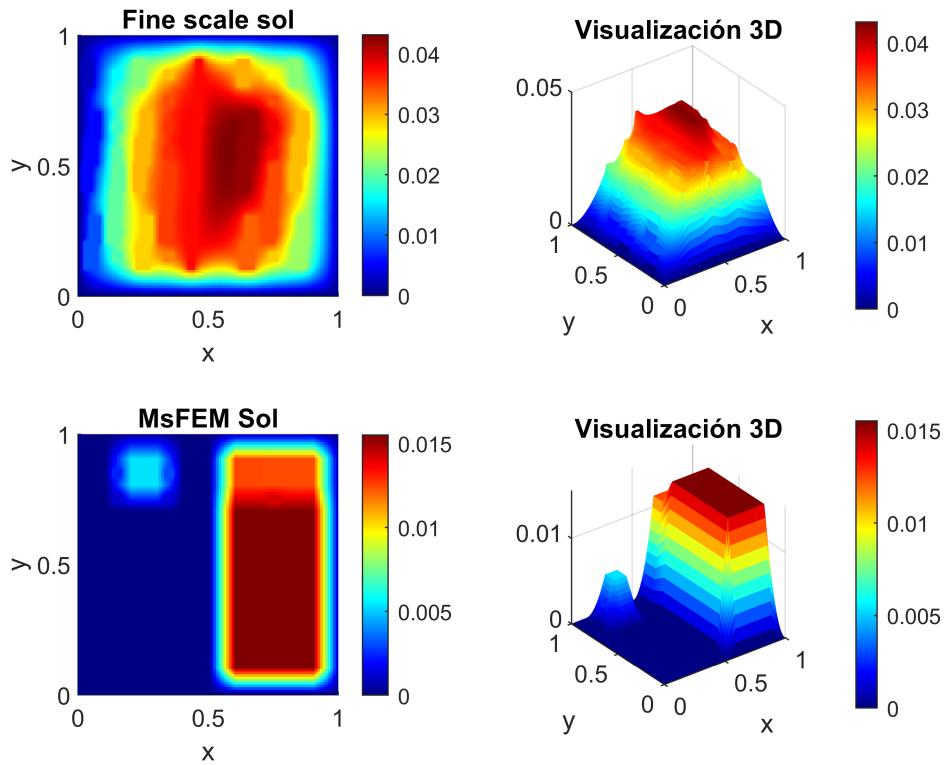


Figura 14: Solución implementada en [20].

Esta solución presenta un error numérico de 0.87702, medido en la norma $L_2(D)$, entonces, se confirma que, en un medio con un coeficiente de contraste heterogéneo y que tiene cambios bruscos, el comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala es realmente deficiente.

5. Método generalizado de elementos finitos multiescala (GMsFEM)

En esta sección se ilustrará el funcionamiento del Método Generalizado de Elementos Finitos Multiescala (GMsFEM), el cual es una generalización del método presentado en el capítulo 4. Este método mejora significativamente el nivel de aproximación a la solución, especialmente en problemas multiescala con alto contraste o donde $k(x)$ tiene valores grandes y variables, GMsFEM permite introducir propiedades físicas relativas al problema multiescala e imponer condiciones en la geometría del dominio. Ver [8, 9, 14].

Para visualizar la teoría que sustenta y se relaciona con este método (GMsFEM), se considera la misma ecuación diferencial parcial elíptica estudiada en capítulos anteriores.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), & x \in D, \\ u(x) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (57)$$

El objetivo de este método es hallar una solución aproximada $u(x)$ tal que $u \in H_0^1(D)$ y que cumpla la siguiente igualdad para cualquier función de prueba $v(x)$ que se encuentre en el espacio $H_0^1(D)$

$$\int_D k(x)\nabla u(x)\nabla v(x) dx = \int_D f(x)v(x) dx. \quad (58)$$

Al igual que en los métodos FEM y MsFEM, para aproximar la función $u(x)$ se considera una partición gruesa \mathcal{T}^H del dominio D y así, para dar una solución $u(x)$ más adaptada a la solución real se introduce una malla que refina la partición y que se nota como \mathcal{T}^h .

La formulación de Galerkin pide encontrar en específico a $u(x)$ en el espacio $V_0^h(D)$ y que siga cumpliendo la ecuación 58 con las funciones de test o prueba $v(x)$ en el mismo espacio. Es importante aclarar que, el espacio $V^h(D)$ es aquel conformado por la discretización del dominio D por elementos finitos de funciones continuas lineales por partes, relativas a la triangularización formada en la malla fina \mathcal{T}^h y por tanto, tómese $V_0^h(D)$ como todas aquellas funciones que pertenecen a $V^h(D)$ y que son 0 en la frontera.

Entonces, como las integrales de la ecuación 58 se pueden representar como dos formas bilineales (o más bien tienen dos formas bilineales asociadas), las cuales en este artículo se llamarán a y F respectivamente, es decir;

$$a(u, v) = \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx, \quad (59)$$

y

$$F(v) = \int_D f(x) v(x) dx. \quad (60)$$

Así, la formulación de Galerkin de la ecuación anterior consiste en encontrar $u \in V_0^h(D)$ tal que

$$a(u, v) = F(v), \text{ para todo } v \in V_0^h(D),$$

o de manera matricial, de la siguiente forma

$$Au = b.$$

Y teniendo en cuenta que toda forma bilineal se puede escribir por medio de matrices, se sigue que para todo $u, v \in V^h(D)$ se tiene que

$$u^T A v = a(u, v) = \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) dx, \quad (61)$$

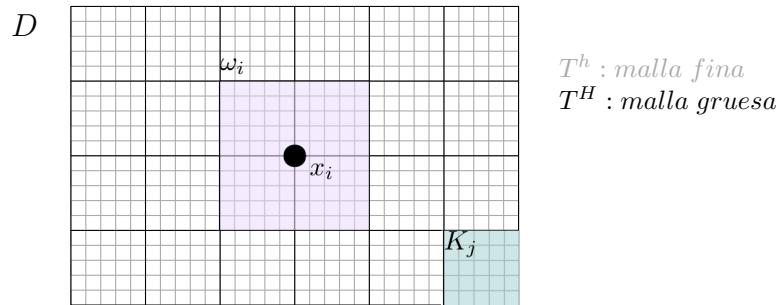
y

$$v^T b = F(v) = \int_D f(x) v(x) dx. \quad (62)$$

Entonces, sean $\{x_i\}$ los nodos de la malla \mathcal{T}^H . Se formarán las funciones base en cada uno de estos nodos. Sin embargo, para hacer estas funciones más robustas en su soporte, se toma la información más importante relativa a la vecindad que lo rodea, para ello se define la vecindad de dicho punto de la siguiente forma.

$$\omega_i = \bigcup \{K_j \in T^H : x_i \in \overline{K_j}\}. \quad (63)$$

En la Figura 15 se muestra la vecindad del nodo x_i en el dominio D .

Figura 15: Vecindades del dominio D . Elaboración propia.

Así, para hallar las funciones base que ayudarán a aproximar la solución real, se considera el siguiente problema de autovalores de alto contraste, tomando como dominio a cada una de las vecindades ω_i .

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla\psi) = \lambda k(x)\psi. \quad (64)$$

La razón del querer hallar las funciones base como combinación lineal de vectores propios es que, al determinar estos vectores en dicha región, se puede extraer la información más importante escogiendo aquellos vectores propios dominantes, es decir, aquellos que se encuentran asociados a valores propios pequeños.

Observe que nuevamente en la anterior ecuación se tiene un problema parecido al inicial, pero en un dominio más pequeño, entonces se sigue que la formulación débil del problema pide encontrar vectores propios ψ y un número real λ tal que para cualquier función de test $z \in H_0^1(\omega_i)$ se tenga que

$$\int_{\omega_i} k(x)\nabla\psi(x)\nabla z(x) dx = \int_{\omega_i} \lambda k(x)z(x) dx. \quad (65)$$

Esto se puede representar análogamente utilizando la forma bilineal a definida previamente en 59 y la forma bilineal m , que se define;

$$m(z_1, z_2) = \int_D k(x)z_1(x)z_2(x) dx. \quad (66)$$

Entonces, la ecuación 65 se puede expresar en términos de formas bilineales como un problema de valores y vectores propios generalizados. Tal como se muestra a continuación

$$a_{\omega_i}(\psi, z) = \lambda m_{\omega_i}(\psi, z) \quad \text{con} \quad z \in H_0^1(\omega_i). \quad (67)$$

Sin embargo, se está trabajando con la formulación de Galerkin, entonces realmente se está buscando una función de prueba z en $V_0^{\omega_i}(D)$, es decir, en un subespacio de $V_0^h(D)$ que solo tiene las funciones base de FEM definidas sobre los nodos de la malla fina que se encuentren en la vecindad ω_i .

Para mayor claridad, los valores y vectores propios resultantes de la solución de dicho problema se notarán como $\{\lambda_j^{\omega_i}\}$ y $\{\psi_j^{\omega_i}\}$ respectivamente. Como se mencionó, solo se escogerán los dominantes. Así, al finalizar este procedimiento con todas las vecindades, se conforma el espacio generado por todos los vectores propios escogidos y se procede a ordenar estos vectores propios según su valor propio asociado (de menor a mayor). A este espacio formado se le notará como V_{gms} el cual será el espacio de las funciones base multiescala generalizadas.

Para la construcción del espacio grueso, se seleccionan los espacios correspondientes a autovalores pequeños. Esta base se define como:

$$\Phi_{i,\ell} = \chi_i \psi_\ell^{\omega_i}, \quad 1 \leq i \leq N_v, \quad 1 \leq \ell \leq L_i,$$

donde L_i es el número de autovalores seleccionados para el nodo i , y χ_i es una partición de la unidad.

Finalmente, el espacio multiescala espectral local se define como

$$V_{gms} = \text{span}\{\Phi_{i,\ell}\} \text{ con } 1 \leq i \leq N_v \text{ y } 1 \leq \ell \leq L_i.$$

Entonces, la solución en la malla gruesa

$$u_0(x) = \sum_i c_i \Phi_i$$

del problema se encontrará tomando las funciones de prueba $v(x)$ en el espacio V_{gms} y solucionando la ecuación $a(u, v) = F(v)$.

La matriz del sistema en malla gruesa se obtiene mediante la transformación:

$$A_0 = R_0 A R_0^T,$$

donde

$$R_0^T = [\Phi_1, \dots, \Phi_{N_c}].$$

En este contexto, las funciones Φ_i corresponden a bases discretas definidas sobre la malla fina. Para simplificar la notación, se emplea el mismo símbolo para las bases multiescala continuas.

La solución multiescala de elementos finitos se obtiene proyectando la solución fina sobre el espacio V_{gms} , lo cual se expresa mediante la ecuación:

$$A_0 u_0 = b_0,$$

donde

$$b_0 = R_0 b.$$

Finalmente, la solución en la malla gruesa se mapea de vuelta a la malla fina mediante $u = R u_0$.

5.1. Resultados numéricos

En esta subsección, se implementará el GMsFEM para resolver la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos. A través de ejemplos comparativos con el MsFEM, se analizará la eficiencia del método en términos de precisión numérica y capacidad para capturar la dinámica multiescala, destacando el impacto del número de funciones base en la mejora de los resultados.

5.1.1. GMsFEM para la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos

Tal como se ha estado trabajando la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos, expresada como una ecuación de flujo en términos de la ecuación de Darcy, es la siguiente ecuación parcial diferencial elíptica:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (k(x)\nabla u(x)) = f(x), & x \in D, \\ u(x) = g(x), & x \in \partial D. \end{cases} \quad (68)$$

donde $u(x)$ se refiere a la variable de presión, $k(x)$ indica la permeabilidad variable en el medio, ∇ representa el operador nabla que denota el gradiente, y $f(x)$ es una función que caracteriza posibles fuentes o sumideros en el medio. Esta formulación es esencial en la simulación de flujos de fluidos en medios porosos, especialmente cuando

la permeabilidad varía espacialmente, como ocurre en aplicaciones hidro-geológicas y en la ingeniería de yacimientos petrolíferos.

Con base en lo anterior, consideramos el mismo ejemplo realizado en el método MsFEM para así poder comparar la eficiencia o no eficiencia de este con respecto al método GMsFEM.

Ejemplo 5.1.1 *Considere el siguiente problema de difusión isotrópica y la malla de tamaño 100×100 observada previamente en la figura 12*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla u(x_1, x_2) = 1, & x \in [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x_1, x_2) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (69)$$

En la Figura 16 se muestra la solución numérica obtenida con Matlab [20]. Para ello, se utilizó una malla inicial de tamaño 10×10 , la cual fue refinada en cada bloque con una subdivisión adicional de 10×10 , aplicando el método GMsFEM. En esta simulación, se estableció el coeficiente de contraste en 1 tanto para el fondo como para los canales e inclusiones, empleando un total de 121 funciones base en la malla inicial.

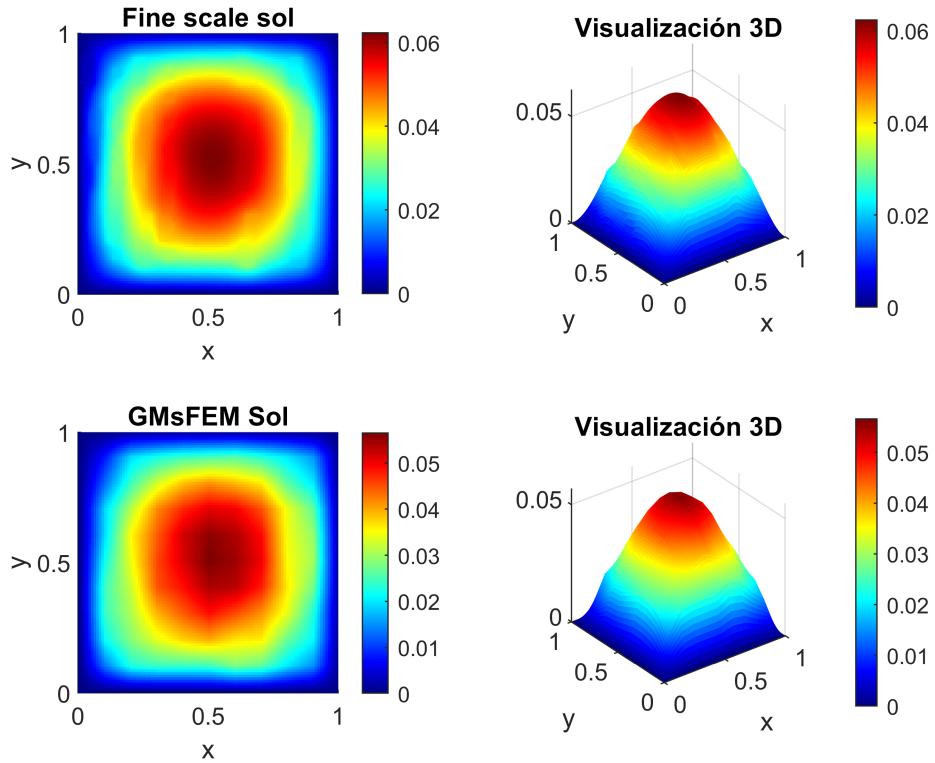


Figura 16: Solución implementada en [20].

Esta solución presenta un error numérico de 0.31817, medido en la norma $L_2(D)$. Se visualiza un buen comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala. Sin embargo, en comparación con MsFEM no se observa una mejora en términos del error y de la solución, lo cual destaca la necesidad del método GMsFEM de tener un espacio de funciones base de gran dimensión para obtener resultados aproximados.

Por otro lado, al asignar un coeficiente de contraste de 1 al fondo, de 10^6 a los canales e inclusiones y al emplear 205 funciones base en la malla gruesa, se obtienen los resultados que se muestran en la Figura 17.

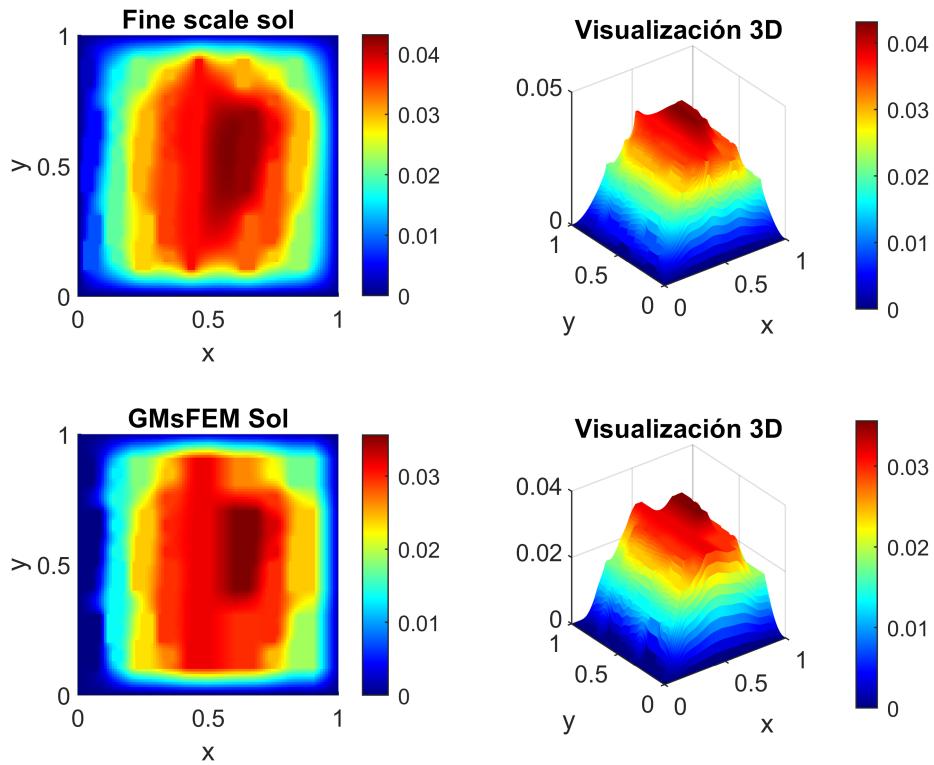


Figura 17: Solución implementada en [20].

En donde, esta solución presenta un error numérico de 0.4245, medido en la norma $L_2(D)$ y se visualiza un buen comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala. Esto, contrastando con el error de 0.8770 que el método MsFEM obtuvo al emplearse en la configuración anteriormente mencionada. Sin embargo, se hace evidente que para conseguir mejores aproximaciones con un error menos significativo es necesario incluir más funciones base.

Ahora resolvamos el mismo problema pero incluyendo 4 funciones base adicionales para el método multiescala generalizado. En la Figura 18 se presenta la solución numérica utilizando Matlab [20] en donde la malla gruesa tomada es de tamaño 10×10 y en la cual se realiza un refinamiento de 10×10 en cada bloque utilizando el método GMsFEM y tomando como coeficiente de contraste tanto en el fondo como en los canales e inclusiones a 1, usando 605 funciones base en la malla gruesa.

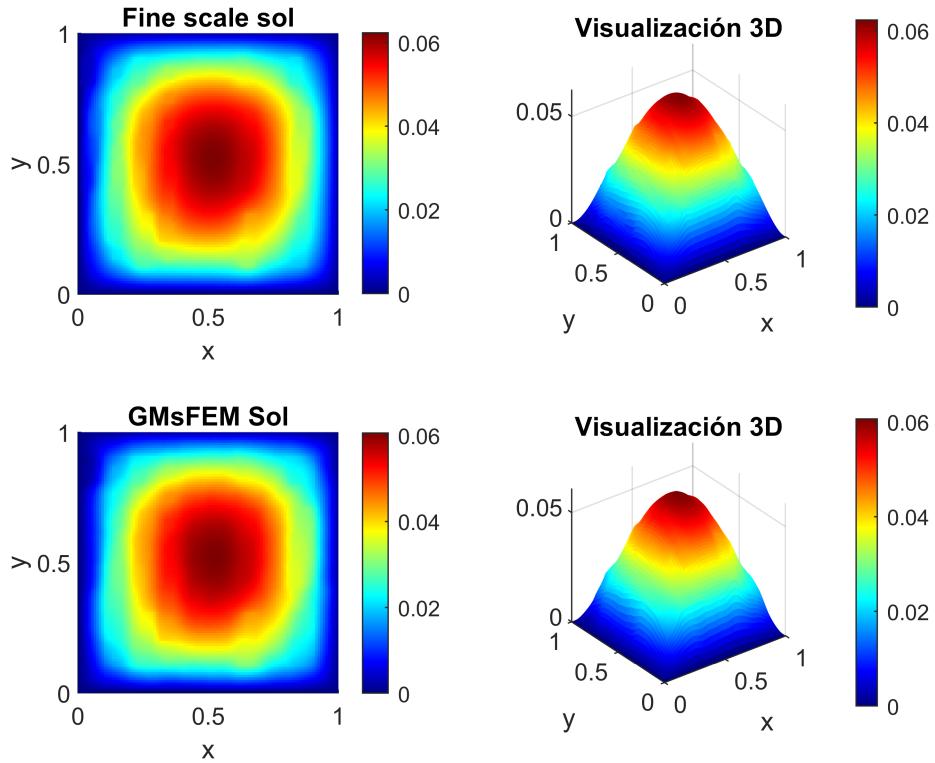


Figura 18: Solución implementada en [20].

Esta solución presenta un error numérico de 0.20059, medido en la norma $L_2(D)$. Se visualiza un buen comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala. Sin embargo, en comparación con MsFEM no se observa demasiadas mejoras en términos del error y de la solución.

Por otro lado, colocando un coeficiente de contraste de 1 en fondo y de 10^6 en los canales e inclusiones, en este caso se usaron 689 funciones base en la malla gruesa, ocurre lo que se visualiza en la Figura 19

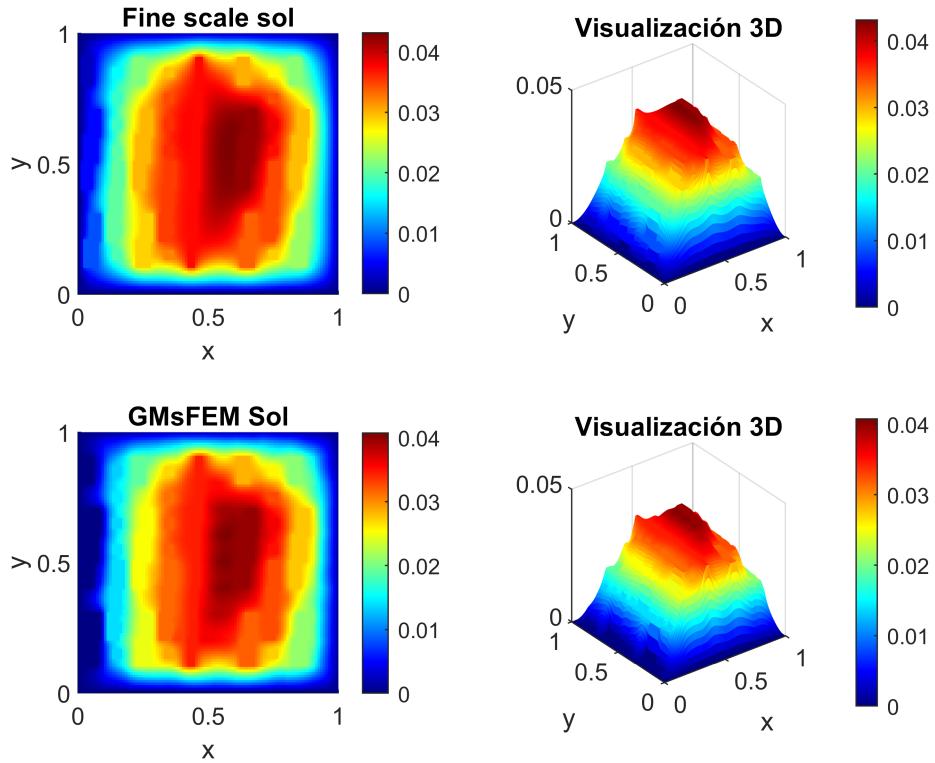


Figura 19: Solución implementada en [20].

Esta solución presenta un error numérico de 0.33107, medido en la norma $L_2(D)$, entonces, se confirma que como se ha mencionado previamente, en un medio con un coeficiente de contraste heterogéneo y cambios bruscos, el comportamiento del método respecto a la solución a fina escala es mucho más eficiente que la del método MsFEM.

6. Método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano

El método semi-discreto Lagrangiano-Euleriano es un método numérico eficiente para resolver ecuaciones de conservación hiperbólicas. Este enfoque combina las ventajas del sistema Lagrangiano, que sigue el movimiento de las partículas del fluido, y del sistema Euleriano, que trabaja en un dominio fijo. La técnica es semi-discreta porque discretiza el dominio espacial mientras deja el tiempo como una variable continua, permitiendo una mayor flexibilidad y precisión en la resolución. El material presentado a continuación fue tomado de [2, 14].

6.1. Introducción 1D y 2D

La construcción del esquema semi-discreto Lagrangiano-Euleriano comienza considerando el siguiente problema

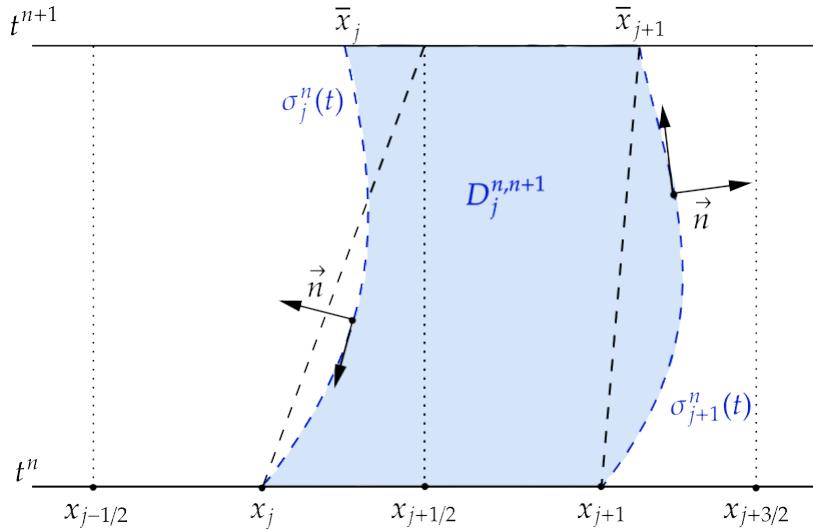
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial H(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad (70)$$

donde $H \in C^2(\Omega)$, $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $u = u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}$.

Aquí $u(x, t)$ es una variable conservada, $H(u)$ es el flujo relacionado con u .

Consideremos esta ecuación en una malla Lagrangiano-Euleriana centrada en las celdas:

$$D_j^{n,n+1}(x, t) = \{(x, t) : \sigma_j^n(t) \leq x \leq \sigma_{j+1}^n(t), t_n \leq t \leq t_{n+1}\}. \quad (71)$$



(a) Representación 1.

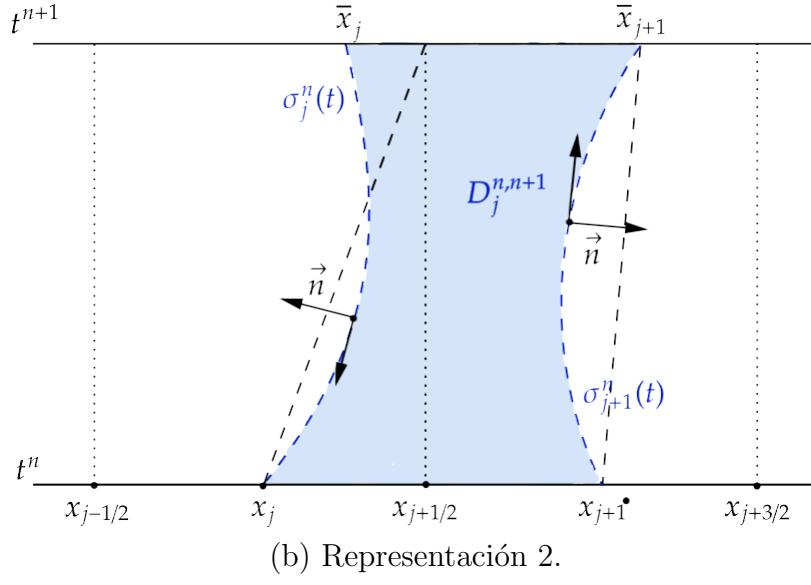


Figura 20: Posibles representaciones geométricas del volumen de control espacio-tiempo. Elaboración propia. Inspirado en [2].

Aplicando el teorema de la divergencia a la ecuación (70) sobre $D_j^{n,n+1}$, obtenemos lo siguiente

$$\iint_{D_j^{n,n+1}} \nabla \cdot \begin{bmatrix} H(u) \\ u \end{bmatrix} dD_j^{n,n+1} = \oint_{\partial D_j^{n,n+1}} \begin{bmatrix} H(u) \\ u \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n} d\partial D_j^{n,n+1} \quad (72)$$

y

$$\oint_{\partial D_j^{n,n+1}} \begin{bmatrix} H(u) \\ u \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n} d\partial D_j^{n,n+1} = 0. \quad (73)$$

Supongamos que no hay flujo a través de las curvas $\sigma_j^n(t)$ y $\sigma_{j+1}^n(t)$ sobre los volúmenes de control $D_j^{n,n+1}$. Esto implica que los volúmenes de control espacio-temporales, $D_j^{n,n+1}$, se conservan en diferentes mallas dadas por:

$$\int_{x_j^{n+1}}^{x_{j+1}^{n+1}} u(x, t^{n+1}) dx = \int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} u(x, t^n) dx. \quad (74)$$

Ahora, definamos la familia de curvas de no flujo $\sigma_p^n(t)$ en $D_j^{n,n+1}$, con $p = j, j + 1$. Sea $\tau_p(t) = [\sigma_p(t), t]^T$ una curva parametrizada respecto a la Figura 20 y su vector tangente $\tau'_p(t) = [\sigma'_p(t), 1]^T$.

Para la ley de conservación subyacente, con el objetivo de describir el seguimiento dinámico hacia adelante de (70), se plantea la siguiente ecuación diferencial para las

curvas de no flujo:

$$\frac{d\sigma_p^n(t)}{dt} = \frac{H(u(\sigma_p^n(t), t))}{u(\sigma_p^n(t), t)}, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad p = j, j+1. \quad (75)$$

Sujeto a las condiciones iniciales $\sigma_p^n(t_n) = x_p^n$, $u(\sigma_p^0(t_0), t_0) = u_0(x)$.

Ahora introduciremos el método SDLE explícito. Suponiendo que ya se ha obtenido una aproximación a la solución en el instante de tiempo $t = t^n$ y en cada nivel temporal (donde, para $t = 0$, se cuenta con el dato inicial), la reconstrucción de una aproximación lineal por partes es

$$L_j(x, t) = u_j(t) + (u_x)_j(t)(x - x_j), \quad x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}. \quad (76)$$

Donde $(u_x)_j(t)$ representa una aproximación a la derivada exacta $u_x(x_j, t)$, mientras que u_j^n es el valor promedio de la solución en la malla uniforme. Se usará

$$(u_x)_j^n = \text{MM1} \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right), \quad (77)$$

donde

$$\text{MM1}(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{1}{2} [\text{sign}(\Phi_1) + \text{sign}(\Phi_2)] \min(|\Phi_1|, |\Phi_2|). \quad (78)$$

Para las simulaciones numéricas presentadas en esta sección se utilizará el siguiente limitador de pendiente para aproximar las derivadas numéricas, ver [2],

$$(u_x)_j^n = \text{MM2} \left(\alpha \theta \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \alpha \theta \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right), \quad 1 \leq \theta \leq 2. \quad (79)$$

Donde α es un parámetro ajustable. Con este parámetro, el limitador minmod extendido, $\text{MM2}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$, se define como

$$\text{MM2}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \text{MM1}(\text{MM1}(\Phi_1, \Phi_2), \Phi_3). \quad (80)$$

Teniendo en cuenta la relación de conservación local y la aproximación lineal por partes, podemos calcular el promedio de celda en la malla no uniforme mediante la siguiente expresión

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{\bar{\Delta}x_j} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_{j+1}} u(\xi, t^{n+1}) d\xi. \quad (81)$$

Al sustituir la aproximación lineal por partes, obtenemos

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{\bar{\Delta}x_j} \left[\int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}} L_j(\xi, t^n) d\xi + \int_{x_{j+\frac{1}{2}}}^{x_{j+1}} L_{j+1}(\xi, t^n) d\xi \right]. \quad (82)$$

De este modo, a partir de un cálculo directo, obtenemos la siguiente expresión para el valor medio en la celda

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{\bar{\Delta}x_j} \left[\frac{\Delta x}{2} (u_j^n + u_{j+1}^n) + \frac{\Delta x^2}{8} ((u_x)_j^n - (u_x)_{j+1}^n) \right]. \quad (83)$$

Aquí, el término $\bar{\Delta}x_j = \bar{x}_{j+1}^{n+1} - \bar{x}_j^{n+1}$ representa la nueva anchura de malla en la variable x en el siguiente nivel de tiempo $t = t^{n+1}$. Esta cantidad define el intervalo espacial $[\bar{x}_j^{n+1}, \bar{x}_{j+1}^{n+1}]$ y se expresa como

$$\bar{\Delta}x_j = (x_{j+1}^n + f_{j+1}^n \Delta t) - (x_j^n + f_j^n \Delta t) = \Delta x + (f_{j+1}^n - f_j^n) \Delta t. \quad (84)$$

Asimismo, la actualización de la posición de los nodos en la malla se realiza mediante

$$\bar{x}_j^{n+1} = x_j^n + f_j^n \Delta t. \quad (85)$$

Aquí, f_j^n representa una aproximación local de las curvas de no flujo dentro del sistema presentado en la ecuación (75), lo que permite ajustar dinámicamente la malla en función de la evolución del sistema. Este término se define como

$$f_j^n = \frac{H(u_j^n)}{u_j^n} \approx \frac{H(u)}{u}, \quad \text{para cada } j \in \mathbb{Z}. \quad (86)$$

Dado que esta aproximación lineal proporciona una manera sencilla y efectiva de modelar el comportamiento de la malla adaptativa, nos enfocaremos en su uso. De manera análoga, la misma metodología se aplica en la región de no flujo, la cual está definida como

$$D_{j-1}^{n,n+1} = \{(x, t) \mid \sigma_{j-1}^n(t) \leq x \leq \sigma_j^n(t), \quad t^n \leq t \leq t^{n+1}\}. \quad (87)$$

A partir de esta definición, obtenemos el promedio de celda en la malla no uniforme sobre el intervalo $[\bar{x}_{j-1}^{n+1}, \bar{x}_j^{n+1}]$, expresado como

$$u_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{1}{\bar{\Delta}x_{j-1}} \left[\frac{\Delta x}{2} (u_{j-1}^n + u_j^n) + \frac{\Delta x^2}{8} ((u_x)_{j-1}^n - (u_x)_j^n) \right]. \quad (88)$$

Donde la longitud de celda ajustada en la nueva malla se define por

$$\bar{\Delta}x_{j-1} = \Delta x + (f_j^n - f_{j-1}^n)\Delta t. \quad (89)$$

Finalmente, mediante una proyección sobre la malla uniforme original, la solución de aproximación local u_j^{n+1} , para todo $j \in \mathbb{Z}$, se obtiene a partir de la siguiente expresión

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left[m_{1,j} u_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + m_{2,j} u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right]. \quad (90)$$

Es importante destacar que los volúmenes de control $D_j^{n,n+1}$ poseen una propiedad de auto-adaptación natural, lo que implica un costo de implementación nulo dentro del diseño del esquema, permitiendo así una aproximación local más precisa.

Los coeficientes de proyección están definidos como

$$m_{1,j} = \frac{\Delta x}{2} + \Delta t f_j^n, \quad m_{2,j} = \frac{\Delta x}{2} - \Delta t f_j^n. \quad (91)$$

Estos coeficientes pueden reescribirse en la malla no uniforme de la siguiente manera

$$m_{1,j} = \bar{\Delta}x_{j-1} - m_{2,j-1}, \quad m_{2,j} = \bar{\Delta}x_j - m_{1,j+1}, \quad (92)$$

lo que nos lleva a la forma explícita

$$m_{1,j} = \frac{1}{2} (\bar{\Delta}x_{j-1} + \Delta t f_j^n + \Delta t f_{j-1}^n), \quad m_{2,j} = \frac{1}{2} (\bar{\Delta}x_j - \Delta t f_j^n - \Delta t f_{j+1}^n). \quad (93)$$

Sustituyendo (93) en (90), se obtiene el esquema completamente discreto Lagrangiano-Euleriano en su forma conservativa

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(u_j^n, u_{j+1}^n) - F(u_{j-1}^n, u_j^n)]. \quad (94)$$

donde el flujo numérico asociado está definido por

$$F(u_j^n, u_{j+1}^n) = \frac{1}{4} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} (u_j^n - u_{j+1}^n) + \frac{\Delta x}{\bar{\Delta}x_j} (f_j^n + f_{j+1}^n) (u_j^n + u_{j+1}^n) \right]$$

$$+ \frac{\Delta x^2}{4\Delta x_j} (f_j^n + f_{j+1}^n) ((u_x)_j^n - (u_x)_{j+1}^n) + \frac{\Delta x^2}{4\Delta t} ((u_x)_j^n + (u_x)_{j+1}^n) \Big]. \quad (95)$$

Las ecuaciones (94) y (95) no admiten una forma semi-discreta debido a que la función de flujo numérico diverge cuando $\Delta t \rightarrow 0$.

Ahora, veamos cómo las curvas de no flujo descritas en (75) pueden proporcionar una solución efectiva para evitar la singularidad en esquemas de la forma (94)-(95), lo que nos lleva a una nueva clase de esquemas SDLE explícitos.

Un análisis adimensional del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que modela las curvas de no flujo muestra que

$$\frac{d\sigma_p^n(t)}{dt} \sim \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right], \quad (96)$$

lo que nos lleva a la siguiente relación

$$\frac{d\sigma_p^n(t)}{dt} \propto O\left(\frac{H(u)}{u}\right). \quad (97)$$

Donde u y $H(u)$ están definidos en la ecuación (70). A partir de (97), podemos eliminar la singularidad en el flujo numérico de (95) reemplazando $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ por una condición de estabilidad dependiente de $O(H(u)/u)$. Ver [2].

Para construir el esquema explícito SDLE, definimos la $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ como una función de aproximación de las velocidades locales dentro de los volúmenes de control $D_j^{n,n+1}$, es decir

$$b_{j+\frac{1}{2}} = b_{j+\frac{1}{2}}(f_j, f_{j+1}). \quad (98)$$

En el esquema dado por (94)-(95), la función f_j se define como

$$f_j \equiv \frac{H(u_j)}{u_j} \approx \frac{H(u)}{u}, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (99)$$

Dado que esta cantidad se puede evaluar en cada intervalo de tiempo $[t^n, t^{n+1}]$, sustituimos $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ por

$$b_{j+\frac{1}{2}} = b_{j+\frac{1}{2}} \left(\frac{H(u_j^n)}{u_j^n}, \frac{H(u_{j+1}^n)}{u_{j+1}^n} \right), \quad (100)$$

utilizando el truco de no flujo proporcionado por (97). De esta manera, la aproximación semi-discreta explícita de (70) puede escribirse como

$$\frac{d}{dt}u_j(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}, \quad (101)$$

lo que conduce a la siguiente forma del esquema semi-discreto

$$\frac{d}{dt}u_j(t) = -\frac{1}{\Delta x} [\mathcal{F}(u_j, u_{j+1}) - \mathcal{F}(u_{j-1}, u_j)]. \quad (102)$$

donde la función de flujo numérico Lagrangiano se define como

$$\mathcal{F}(u_j, u_{j+1}) = \frac{1}{4} \left[b_{j+\frac{1}{2}} (u_{j+\frac{1}{2}}^- - u_{j+\frac{1}{2}}^+) + (f_j + f_{j+1})(u_{j+\frac{1}{2}}^- + u_{j+\frac{1}{2}}^+) \right]. \quad (103)$$

Los valores $u_{j+\frac{1}{2}}^-$ y $u_{j+\frac{1}{2}}^+$ se calculan como

$$u_{j+\frac{1}{2}}^- = u_j + \frac{\Delta x}{4} (u_x)_j, \quad u_{j+\frac{1}{2}}^+ = u_{j+1} - \frac{\Delta x}{4} (u_x)_{j+1}. \quad (104)$$

Ahora veamos el esquema en 2D, para esto se va a abordar un problema de Cauchy asociado a la siguiente ecuación de conservación

$$u_t + H(u)_x + G(u)_y = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x, y), \quad (105)$$

donde $H, G \in C^1$ y la condición inicial $u_0(x, y)$ pertenece a $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Antes de calcular la solución aproximada $u(x_j, y_k, t^n)$ en el instante t^n y avanzar hacia t^{n+1} , primero reconstruimos una aproximación a trozos lineales en todas las celdas de la malla computacional, siguiendo el mismo procedimiento que en el caso unidimensional

$$L_{j,k}(x, y, t^n) = u_{j,k}^n + (u_x)_{j,k}^n(x - x_j) + (u_y)_{j,k}^n(y - y_k), \quad (106)$$

para $x \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ y $y \in [y_{k-\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}}]$.

Aquí, $(u_x)_{j,k}^n$ y $(u_y)_{j,k}^n$ representan aproximaciones de al menos primer orden para las derivadas en x e y de u en los centros de celda (x_j, y_k) . Específicamente, se cumple que $u(x_j, y_k, t^n) := L_{j,k}(x_j, y_k, t^n)$ en los nodos de la malla, lo que implica que $(u_x)_{j,k}^n = 0$ y $(u_y)_{j,k}^n = 0$.

La formulación en dos dimensiones del esquema semi-discreto Lagrangiano-Euleriano se expresa de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt}u_{j,k}(t) = -\frac{\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2},k} - \mathcal{F}_{j-\frac{1}{2},k}}{\Delta x} - \frac{\mathcal{G}_{j,k+\frac{1}{2}} - \mathcal{G}_{j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta y}. \quad (107)$$

De manera análoga al caso unidimensional, se definen los flujos numéricos multidi-

mensionales en las direcciones x e y de la siguiente manera

$$\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{4} \left[b_{j+\frac{1}{2},k}^x \left(u_{j+\frac{1}{2},k}^- - u_{j+\frac{1}{2},k}^+ \right) \right] + (f_{j,k} + f_{j+1,k}) \left(u_{j+\frac{1}{2},k}^- + u_{j+\frac{1}{2},k}^+ \right), \quad (108)$$

$$\mathcal{G}_{j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \left[b_{j,k+\frac{1}{2}}^y \left(u_{j,k+\frac{1}{2}}^- + u_{j,k+\frac{1}{2}}^+ \right) \right] + (g_{j,k} + g_{j,k+1}) \left(u_{j,k+\frac{1}{2}}^- + u_{j,k+\frac{1}{2}}^+ \right), \quad (109)$$

junto con las curvas de no flujo discretizadas presentadas en la ecuación,

$$f_{j,k} = \frac{H(u_{j,k})}{u_{j,k}} \quad \text{y} \quad g_{j,k} = \frac{G(u_{j,k})}{u_{j,k}}, \quad (110)$$

y los valores intermedios,

$$u_{j+\frac{1}{2},k}^+ := u_{j+1,k}(t) - \frac{\Delta x}{4} (u_x)_{j+1,k}(t), \quad u_{j+\frac{1}{2},k}^- := u_{j,k} + \frac{\Delta x}{4} (u_x)_{j,k}(t),$$

y,

$$u_{j,k+\frac{1}{2}}^+ := u_{j,k+1}(t) - \frac{\Delta y}{4} (u_y)_{j,k+1}(t), \quad u_{j,k+\frac{1}{2}}^- := u_{j,k} + \frac{\Delta y}{4} (u_y)_{j,k}(t).$$

Aquí, las derivadas $(u_x)_{j,k}$ y $(u_y)_{j,k}$ se calculan de la siguiente forma

$$(u_x)_{j,k} = \text{minmod} \left(\alpha \theta \frac{u_{j,k} - u_{j-1,k}}{\Delta x}, \alpha \frac{u_{j+1,k} - u_{j-1,k}}{2\Delta x}, \alpha \theta \frac{u_{j+1,k} - u_{j,k}}{\Delta x} \right),$$

$$(u_y)_{j,k} = \text{minmod} \left(\alpha \theta \frac{u_{j,k} - u_{j,k-1}}{\Delta y}, \alpha \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k-1}}{2\Delta y}, \alpha \theta \frac{u_{j,k+1} - u_{j,k}}{\Delta y} \right),$$

donde $\alpha = 1, 2$ y $1 \leq \theta \leq 2$.

Note que $b_{j+\frac{1}{2},k}^x$ y $b_{j,k+\frac{1}{2}}^y$ que aparecen en los flujos numéricos $\mathcal{F}_{j+1/2,k}$ y $\mathcal{G}_{j,k+1/2}$ en la ecuación (109) se escriben en términos de las correspondientes curvas 2D de no flujo presentadas en la ecuación (110) usando las siguientes fórmulas

$$b_{j+\frac{1}{2},k}^x = \xi \max_{j,k} (|f_{j,k} + f_{j+1,k}|), \quad 1 \leq \xi \leq 5.$$

$$b_{j,k+\frac{1}{2}}^y = \zeta \max_{j,k} (|g_{j,k} + g_{j,k+1}|), \quad 1 \leq \zeta \leq 5.$$

Los parámetros de no flujo ($b_{j+\frac{1}{2},k}^x$ y $b_{j,k+\frac{1}{2}}^y$) pueden considerarse de la misma manera que los limitadores de pendiente. De este modo, obtenemos una nueva clase de esquemas, dada en forma general por las ecuaciones (109) y (110), sujeta a la siguiente

condición CFL

$$\max_{j,k} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{j,k} |f_{j,k}|, \frac{\Delta t}{\Delta y} \max_{j,k} |g_{j,k}| \right) \leq \frac{1}{2}.$$

6.2. Resultados numéricos

A continuación, se presentan los resultados obtenidos mediante la implementación del método semi-discreto Lagrangiano-Euleriano en 1D y 2D.

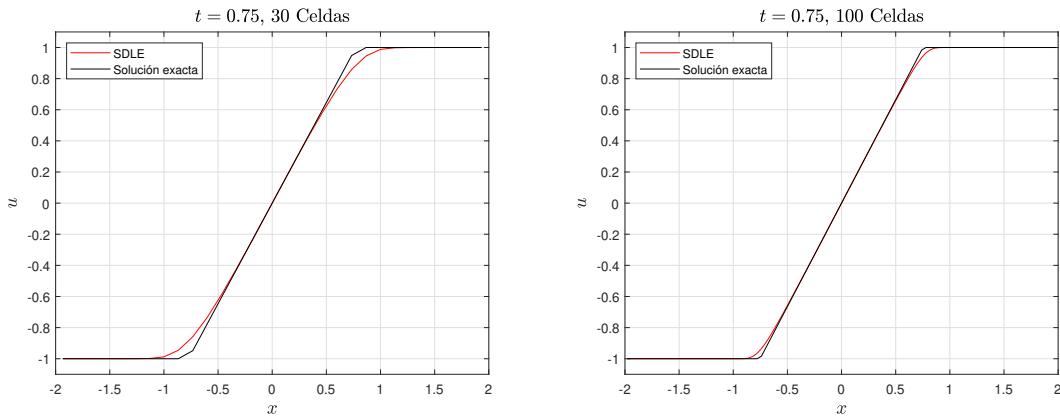
Ejemplo 6.2.1 (Ecuación de Burgers Inviscida) Consideremos la ecuación de Burgers es una ley de conservación hiperbólica que se utiliza para modelar flujos no lineales, se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial H(u)}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x),$$

donde $u(x, t)$ representa la variable conservada, el flujo está dado por $H(u) = \frac{u^2}{2}$, y los datos iniciales discontinuos se definen como

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

lo que crea una discontinuidad inicial en el dominio espacial $x \in \mathbb{R}$. Este tipo de problema genera un abanico de rarefacción sónica, una solución continua en el tiempo que conecta las dos regiones iniciales mediante una transición suave.



(a) Solución aproximada usando una malla de 30 celdas. (b) Solución aproximada usando una malla de 100 celdas.

Figura 21: Solución aproximada usando SDLE en $t = 0,75$. Implementación realizada en [20].

Ejemplo 6.2.2 (La ecuación de Buckley–Leverett con gravedad) Consideremos el sistema de flujo de dos fases (agua y petróleo) con gravedad, este modelo es usado para el problema de inyección de agua en reservorios de recuperación de petróleo. Este sistema está dado por

$$-\nabla \cdot [k\lambda_{tot}(S_w)\nabla p] = q_{tot},$$

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial(u_{tot}f(S_w))}{\partial x} + \frac{\partial(v_{tot}g(S_w))}{\partial y} = q_w,$$

donde K representa el tensor de permeabilidad absoluta, λ_{tot} es la movilidad total, p corresponde a la presión termodinámica, ϕ es la porosidad del medio, $S_w \in [0, 1]$ denota la saturación de agua, y $\mathbf{u}_{tot} = (u_{tot}, v_{tot})^T$ es la velocidad total del fluido, obtenida como la suma de las velocidades de las fases de agua y petróleo.

En ausencia de compresibilidad, la primera ecuación del sistema tiene un comportamiento elíptico. Como la movilidad total depende de la saturación de agua, la presión varía en el tiempo a medida que se desplaza el frente de saturación. Esta ecuación combina la ley de Darcy con la conservación de masa. Una vez determinada la presión con la primera ecuación, la velocidad total del fluido se obtiene mediante la ley de Darcy

$$\mathbf{u}_{tot} = K\lambda_{tot}(S_w)\nabla p.$$

La segunda ecuación se conoce como ecuación de saturación. Cuando no se consideran los efectos gravitacionales ni la capilaridad, las funciones de flujo $f(S_w)$ y $g(S_w)$ en las direcciones x e y son idénticas y corresponden a la función de flujo fraccionario de Buckley–Leverett

$$g(S_w) = f(S_w) = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o}(1 - S_w)^2},$$

donde μ_w y μ_o representan las viscosidades de las fases de agua y petróleo, respectivamente. Para simplificar, en las simulaciones realizadas, se establecen los siguientes valores: K como la matriz identidad 2×2 , $\lambda_{tot}(S_w) = 1$, $\phi = 1$, y $q_{tot} = q_w = 0$.

Cuando se incluyen efectos gravitacionales en la ecuación de saturación, el problema se complica debido a que las funciones de flujo en las direcciones x e y ya no son idénticas y presentan características no convexas. En este caso, el flujo en la dirección x sigue el modelo de Buckley–Leverett, pero en la dirección y la ecuación toma la

forma

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial(f(S_w))}{\partial x} + \frac{\partial(g(S_w))}{\partial y} = 0, \quad (x, y, t) \in [-1.5, 1.5]^2 \times [0, 0.5].$$

La función de flujo en la dirección y se modifica para incluir los efectos gravitacionales

$$g(S_w) = f(S_w)(1 - C_g(1 - S_w)^2); \quad \frac{\mu_w}{\mu_o} = 1; \quad C_g = 5;$$

con la siguiente condición inicial

$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < 0.5, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A continuación, la Figura 22, la Figura 23 y la Figura 24 presentan aproximaciones numéricas del frente de saturación de agua para el problema bidimensional hiperbólico, resuelto mediante el esquema semi-discreto propuesto usando una malla de 32×32 .

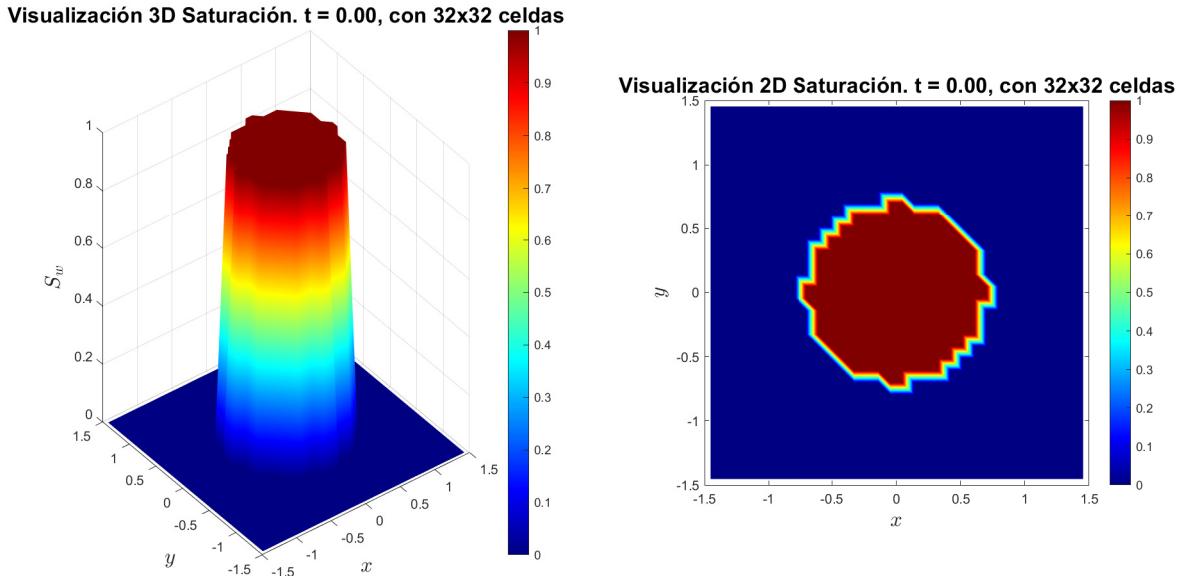


Figura 22: Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0$. Usando una malla de 32×32 . Implementación realizada en [20].

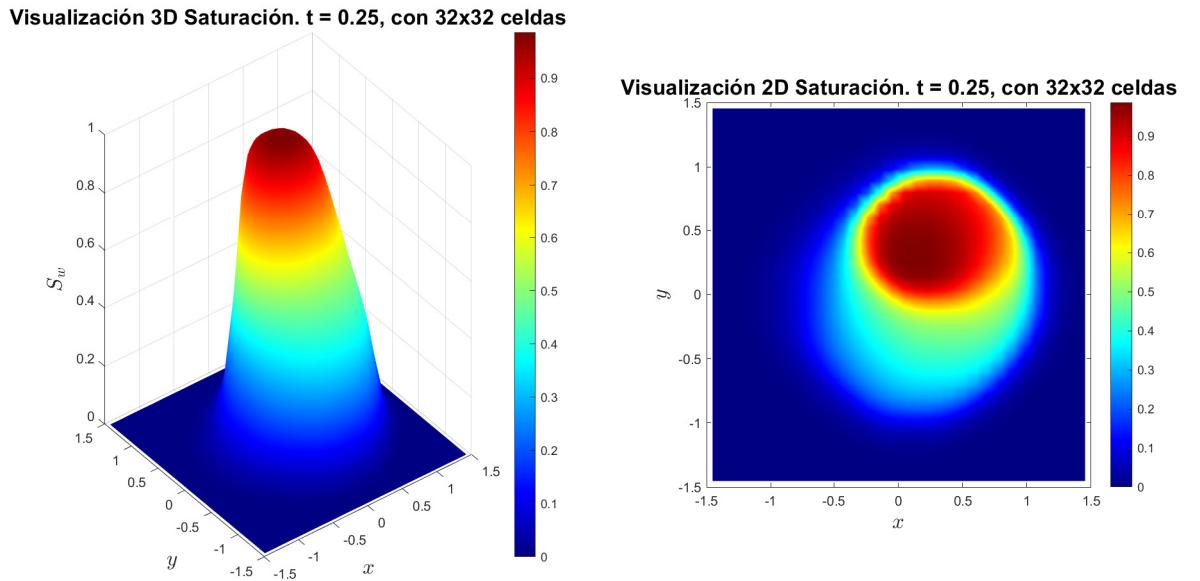


Figura 23: Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0.25$. Usando una malla de 32×32 . Implementación realizada en [20].

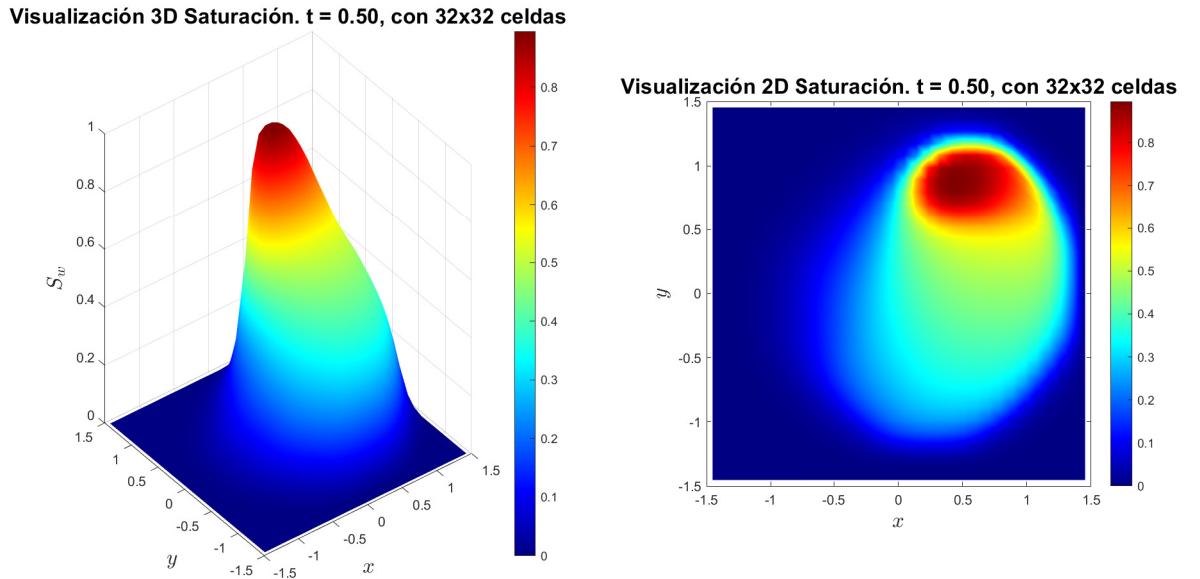


Figura 24: Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0.5$. Usando una malla de 32×32 . Implementación realizada en [20].

Las Figuras 25, 26 y 27 muestran aproximaciones numéricas del frente de saturación de agua en el problema bidimensional hiperbólico, obtenidas con el esquema semi-

discreto propuesto y una malla de 128×128 .

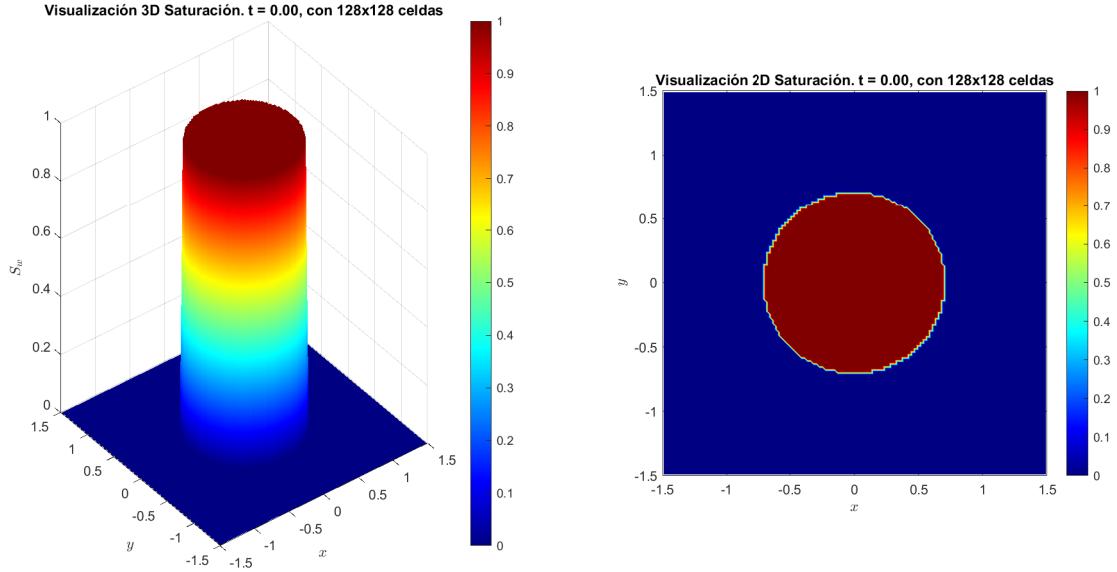


Figura 25: Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0$. Usando una malla de 128×128 . Implementación realizada en [20].

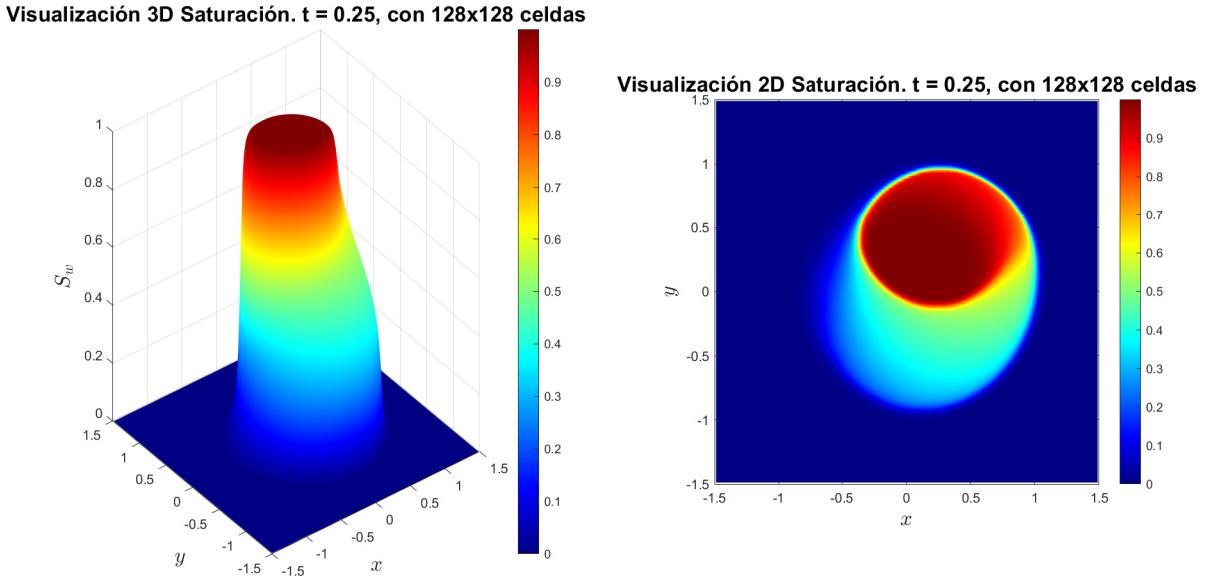


Figura 26: Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0.25$. Usando una malla de 128×128 . Implementación realizada en [20].

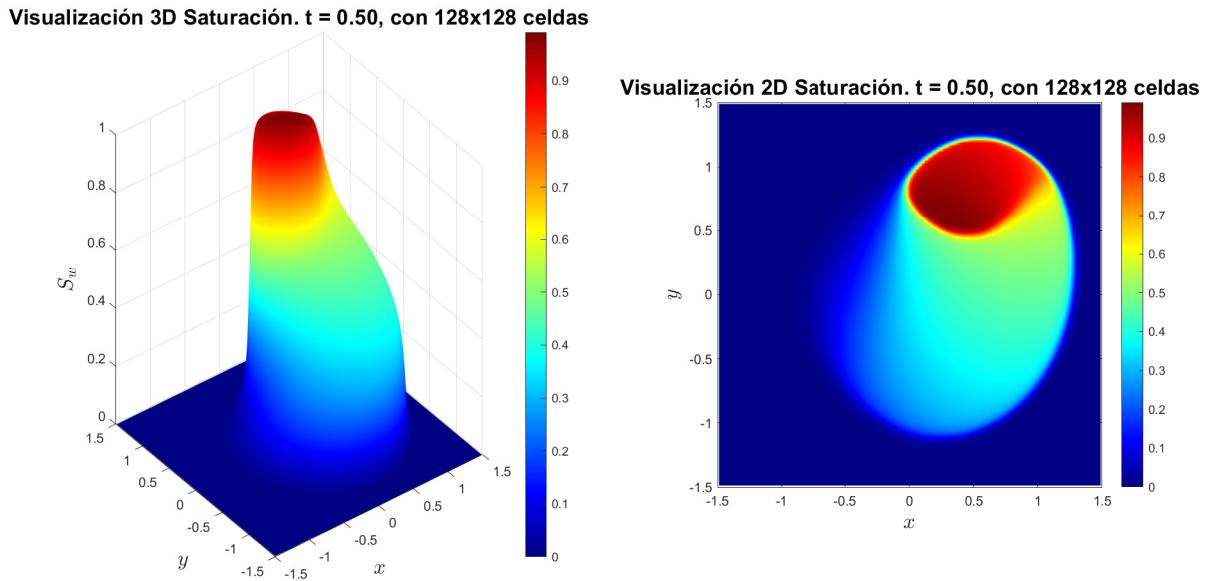


Figura 27: Soluciones numéricas usando SDLE en $t = 0.5$. Usando una malla de 128×128 . Implementación realizada en [20].

7. Acomplamiento (Método Semi-Discreto Lagrangiano-Euleriano + GMsFEM)

El material presentado a continuación fue tomado de [14, 21].

El problema que abordaremos consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales que modela el flujo bifásico inmiscible e incompresible de agua y petróleo en medios porosos heterogéneos dentro de un reservorio rectangular, $\Omega = [0, 128] \times [0, 32]$, discretizado en una malla uniforme de 128×32 celdas.

La ecuación de conservación de la masa está dada por

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (111)$$

donde la velocidad total de filtración de Darcy se expresa como

$$v = -\Lambda(S)K(x)\nabla p. \quad (112)$$

Este sistema está acoplado con la ecuación de transporte para la saturación de agua,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (vf(S)) = 0, \quad (113)$$

donde S representa la saturación de agua y la función de flujo fraccional $f(S)$ está dada por

$$f(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w \Lambda(S)}. \quad (114)$$

El coeficiente de movilidad total $\Lambda(S)$ se define en términos de las permeabilidades relativas $k_{r\alpha}(S)$ y las viscosidades de fase μ_α ($\alpha = w, o$) como

$$\Lambda(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o}. \quad (115)$$

El modelo hiperbólico de transporte escalar se maneja mediante nuestro esquema Lagrangiano-Euleriano semi-discreto y puede escribirse en su forma abierta como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x H(S)) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y H(S)) = 0, \quad (116)$$

con la condición inicial

$$S(x, y, 0) = S_0(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases} \quad (117)$$

Aquí, $v_x = v_x(x, y, t)$ y $v_y = v_y(x, y, t)$ denotan las componentes x e y del campo de velocidad v .

Para nuestras aproximaciones numéricas, consideramos curvas de permeabilidad relativa cuadráticas,

$$k_{rw}(S) = S^2, \quad k_{ro}(S) = (1 - S)^2, \quad (118)$$

con valores de viscosidad $\mu_w = 1$ y $\mu_o = 2$.

7.1. Descomposición de operadores

Para solucionar el problema anterior, se emplea la descomposición de operadores, esta permite desacoplar las ecuaciones del sistema en dos subproblemas: una etapa de presión y una etapa de transporte.

La primera etapa, correspondiente a la resolución de la ecuación de presión, se encarga de determinar la velocidad y presión del fluido en el paso de tiempo actual. En esta fase, a partir de los valores previos $(p_{n-1}, u_{n-1}, S_{n-1})$, se obtiene la solución (p_n, u_n) mediante la ecuación de conservación de la masa:

$$\nabla \cdot v = 0. \quad (119)$$

Posteriormente, en la segunda etapa, se resuelve la ecuación de transporte de la saturación de agua utilizando la velocidad obtenida en la primera etapa:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (v f(S)) = 0. \quad (120)$$

El proceso numérico se esquematiza en la Figura 28. Inicialmente, se parte de los valores previos $(p_{n-1}, u_{n-1}, S_{n-1})$, los cuales son utilizados en la ecuación de presión para obtener (p_n, u_n) . Luego, la ecuación de transporte actualiza la saturación S_n , completando así el ciclo de avance temporal.

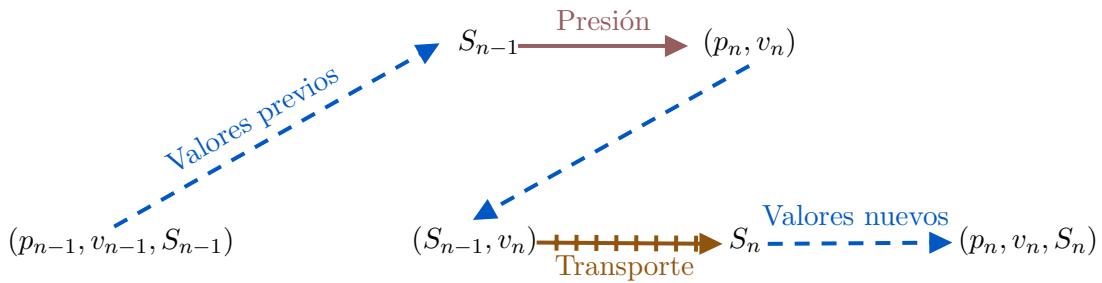


Figura 28: Descomposición de operadores utilizada para resolver el problema del modelo bifásico. Elaboración propia. Inspirada en [21].

Este esquema permite una solución más eficiente del sistema, evitando la necesidad de resolver simultáneamente las ecuaciones de presión y transporte, lo que reduce el costo computacional de la solución.

7.2. Resultados numéricos

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos para la simulación de flujos bifásicos en medios porosos heterogéneos. Se analizan la saturación, la velocidad y la presión del fluido en distintos tiempos de simulación.

7.2.1. Flujos bifásicos en medios porosos heterogéneos

Ejemplo 7.2.1 *Se aborda la solución del problema de flujo bifásico en medios porosos heterogéneos, considerando las condiciones previamente establecidas y el coeficiente de permeabilidad representado en la Figura 29. En esta figura se observa un medio de permeabilidad heterogénea, donde los valores de permeabilidad varían entre 1 y 5. El límite inferior, 1, representa materiales de menor conductividad hidráulica, mientras que el límite superior, 5, corresponde a fracturas o zonas de alta permeabilidad.*

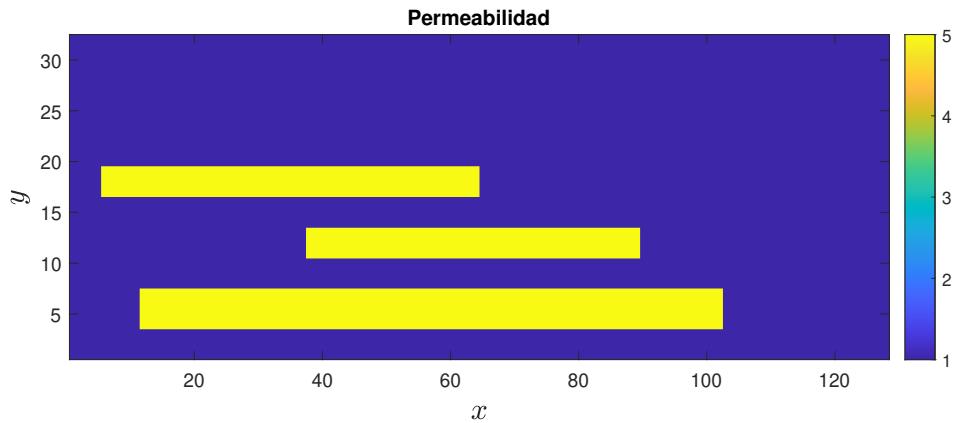


Figura 29: Coeficiente de permeabilidad. Implementación realizada en [20].

A continuación, las Figuras 30, 31, 32 y 33 muestran las aproximaciones numéricas del frente de saturación de agua en el problema de flujo bifásico, resuelto mediante el acoplamiento del SDLE y GMsFEM. Los resultados se obtienen en una malla de 128×32 celdas, evaluando la evolución del frente de saturación en los instantes de tiempo $t = 50$, $t = 100$, $t = 200$ y $t = 400$, respectivamente.

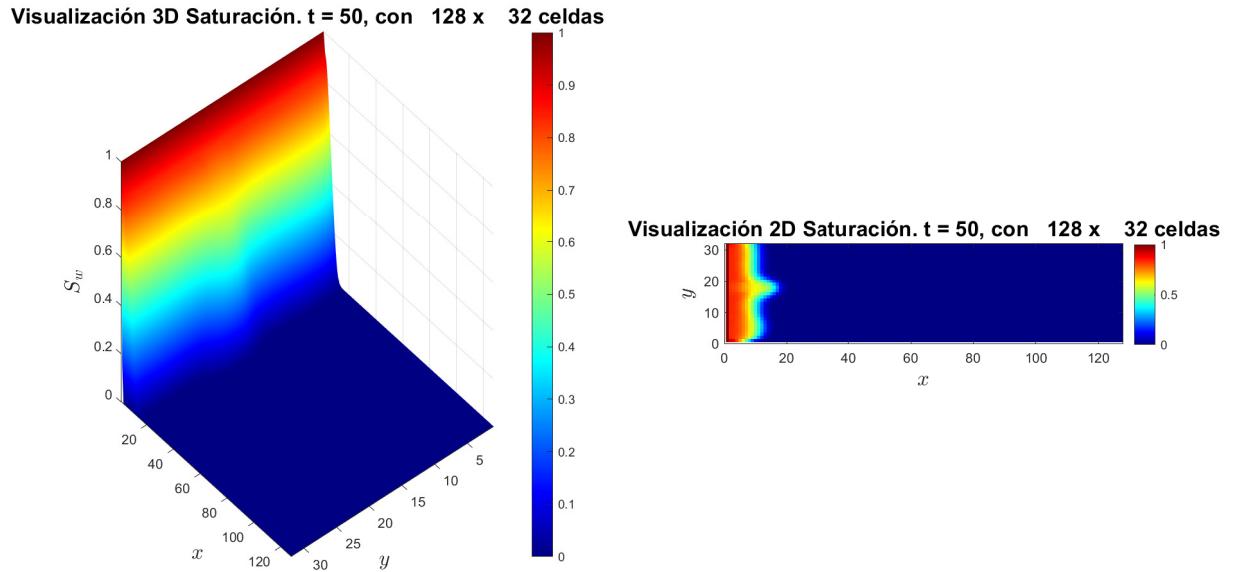


Figura 30: Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 50$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

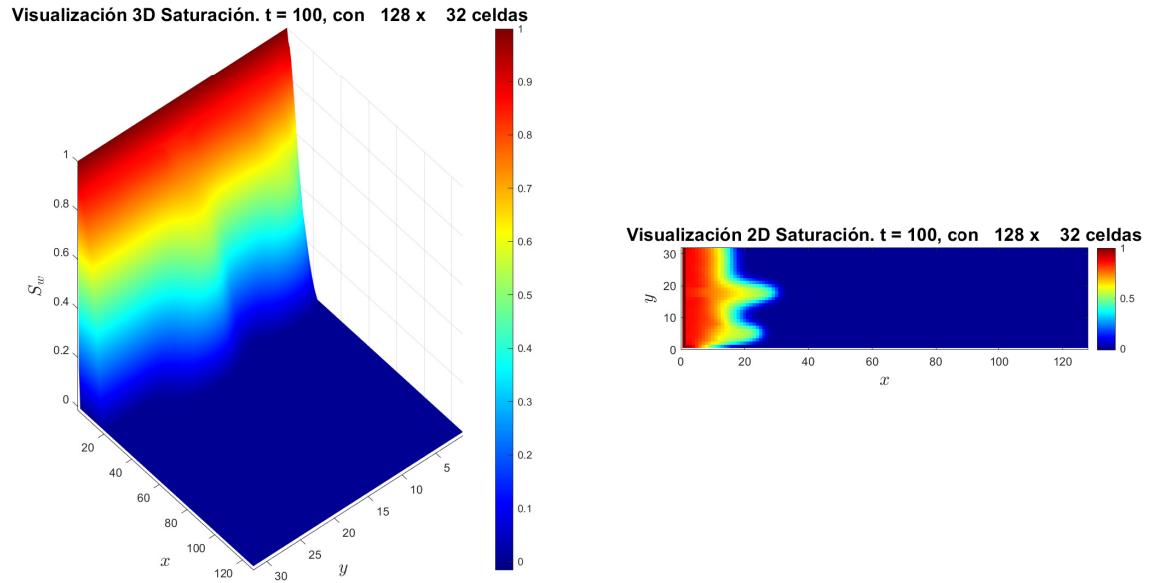


Figura 31: Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 100$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

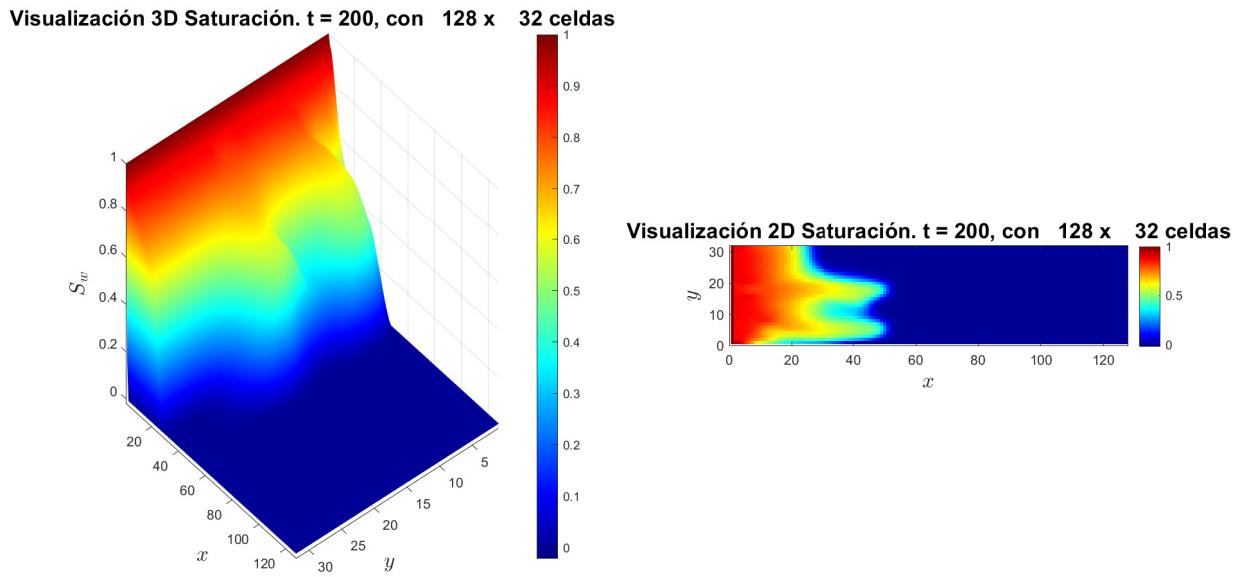


Figura 32: Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 200$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

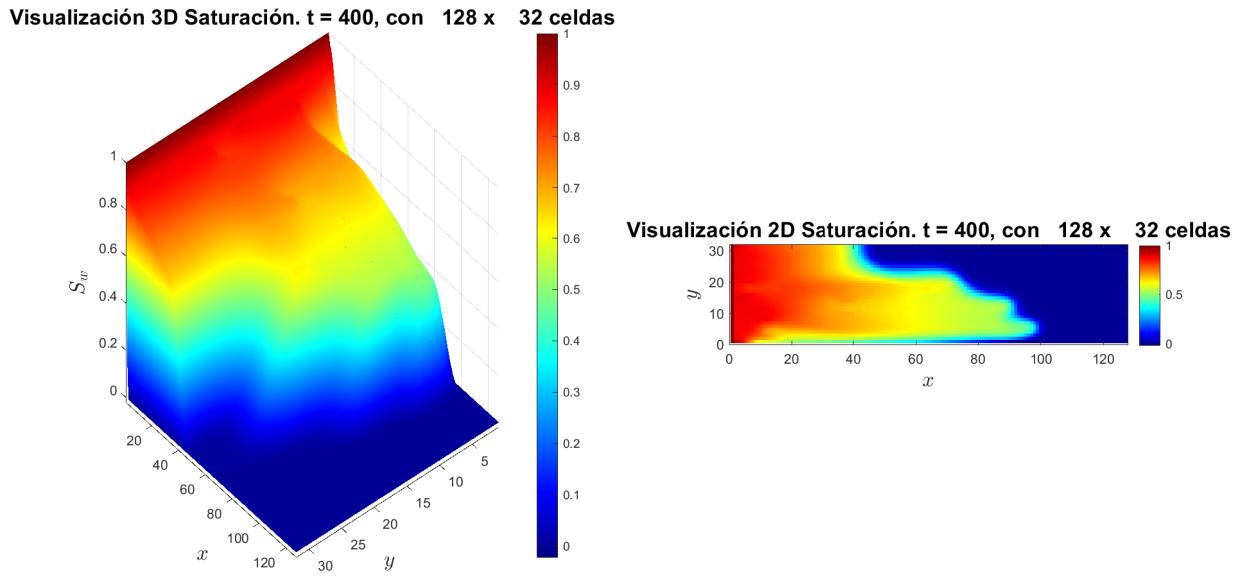
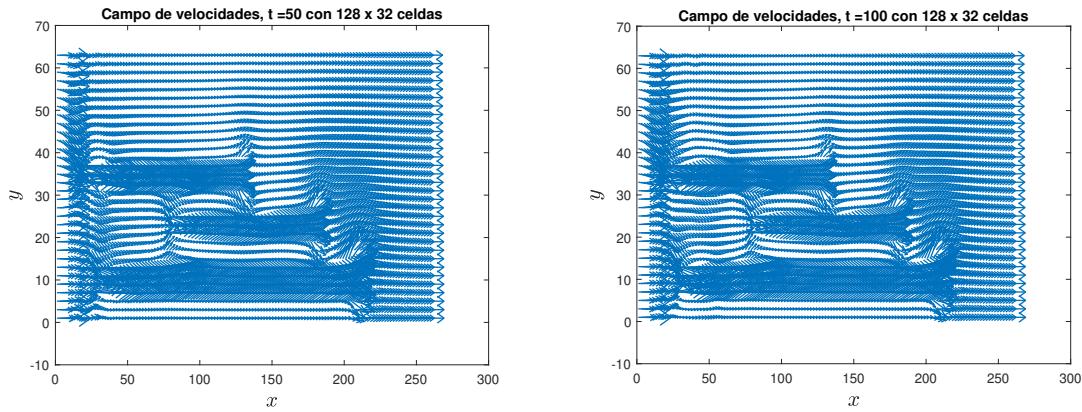


Figura 33: Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 400$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

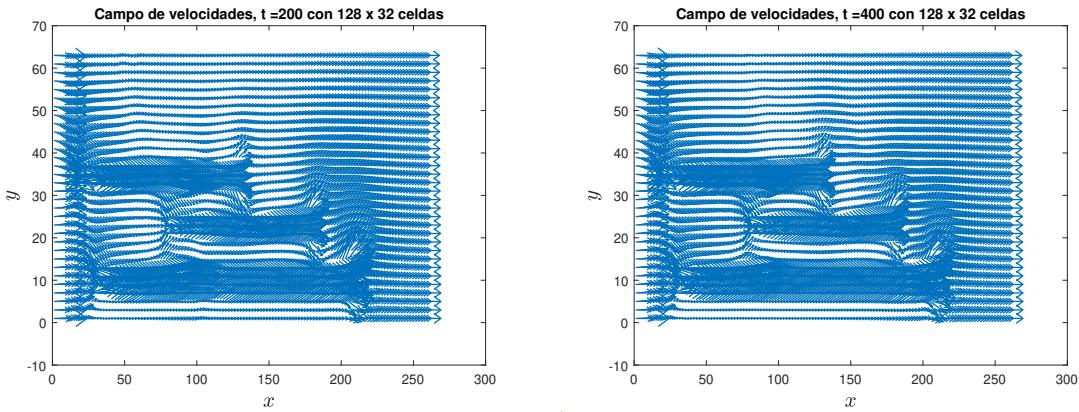
Las Figuras 34a, 34b, 35a y 35b presentan las soluciones numéricas del campo de velocidades del problema, obtenido mediante el acoplamiento del SDLE y GMsFEM. Los cálculos se realizaron en una malla de 128×32 celdas, analizando la evolución en los tiempos $t = 50$, $t = 100$, $t = 200$ y $t = 400$, respectivamente.



(a) Campo de velocidades en $t = 50$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

(b) Campo de velocidades en $t = 100$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

Figura 34: Comparación de los campos de velocidades en $t = 50$ y $t = 100$.

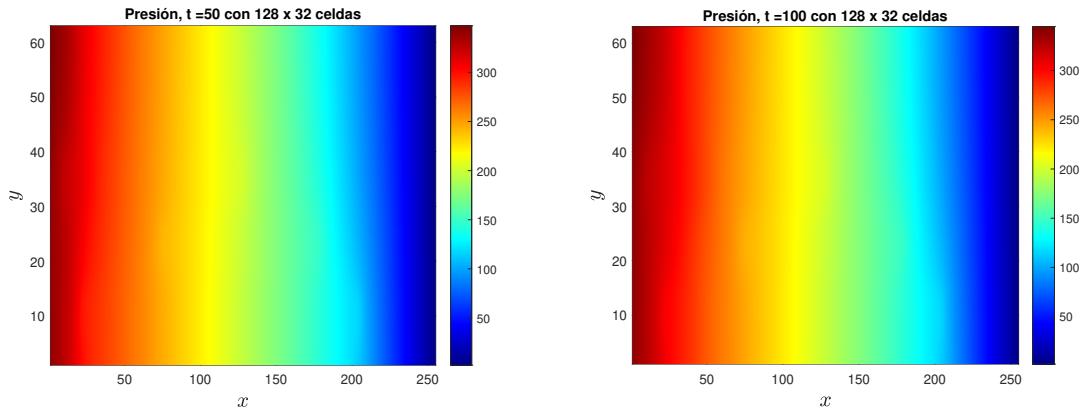


(a) Campo de velocidades en $t = 200$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

(b) Campo de velocidades en $t = 400$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

Figura 35: Comparación de los campos de velocidades en $t = 200$ y $t = 400$.

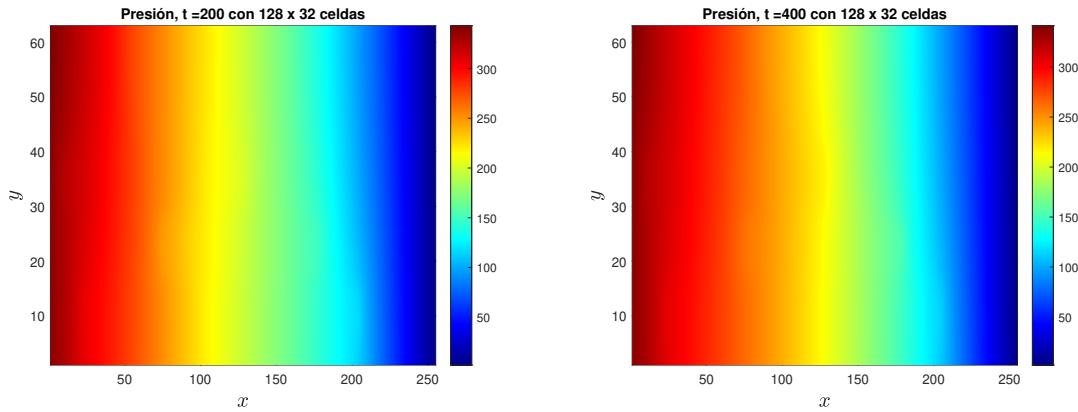
Finalmente, las Figuras 36a, 36b, 37a y 37b muestran las soluciones numéricas de la presión del problema, obtenidas a través del acoplamiento del SDLE y GMsFEM. Los cálculos se realizaron en una malla de 128×32 celdas, evaluando la evolución en los instantes de tiempo $t = 50$, $t = 100$, $t = 200$ y $t = 400$, respectivamente.



(a) Soluciones numéricas de la Presión en $t = 50$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

(b) Soluciones numéricas de la Presión en $t = 100$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

Figura 36: Comparación de la presión en $t = 50$ y $t = 100$.



(a) Soluciones numéricas de la Presión en $t = 200$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

(b) Soluciones numéricas de la Presión en $t = 400$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

Figura 37: Comparación de la presión en $t = 200$ y $t = 400$.

Ejemplo 7.2.2 A continuación, se considera el problema incorporando el coeficiente de permeabilidad representado en la Figura 38. La permeabilidad se modela mediante una distribución log-normal, dado que en medios geológicos reales esta propiedad suele presentar una alta heterogeneidad. Para ello, se establece una permeabilidad media de 3, con una dispersión controlada por una desviación estándar logarítmica de 1.2, lo que permite introducir variabilidad en los valores generados. Se imponen límites entre 0.1 y 5, donde el valor inferior representa materiales de baja permeabilidad, mientras que el valor superior simula fracturas o zonas de superpermeabilidad. Adicionalmente, se incorporan diez canales de alta permeabilidad en ubicaciones aleatorias, con longitudes que varían entre 10 y 30 celdas en la dirección horizontal y anchos entre 3 y 10 celdas en la dirección vertical. Estas estructuras geológicas representan zonas preferenciales de flujo, permitiendo una mejor caracterización del medio poroso.

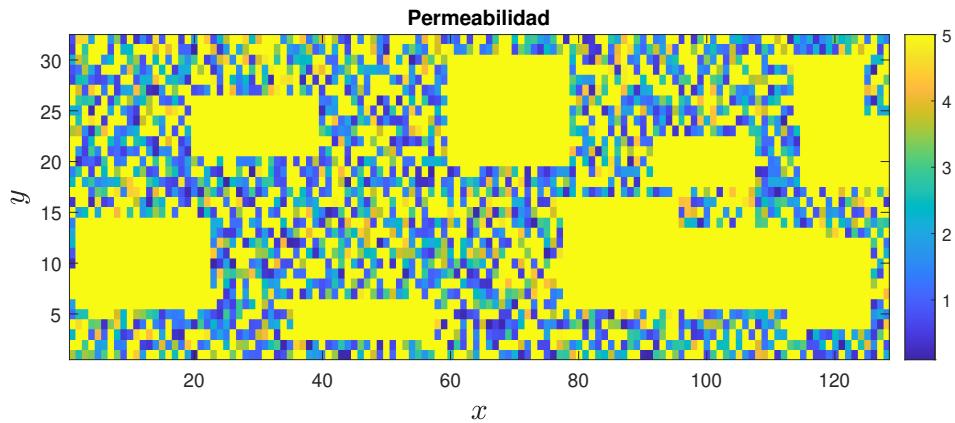


Figura 38: Coeficiente de permeabilidad. Implementación realizada en [20].

Las Figuras 39, 40, 41 y 42 presentan las soluciones numéricas del frente de saturación de agua en el problema, resuelto mediante el acoplamiento del SDLE y GMs-FEM. Los resultados fueron obtenidos en una malla de 128×32 celdas, analizando la evolución del frente de saturación en los tiempos $t = 50$, $t = 100$, $t = 200$ y $t = 400$, respectivamente.

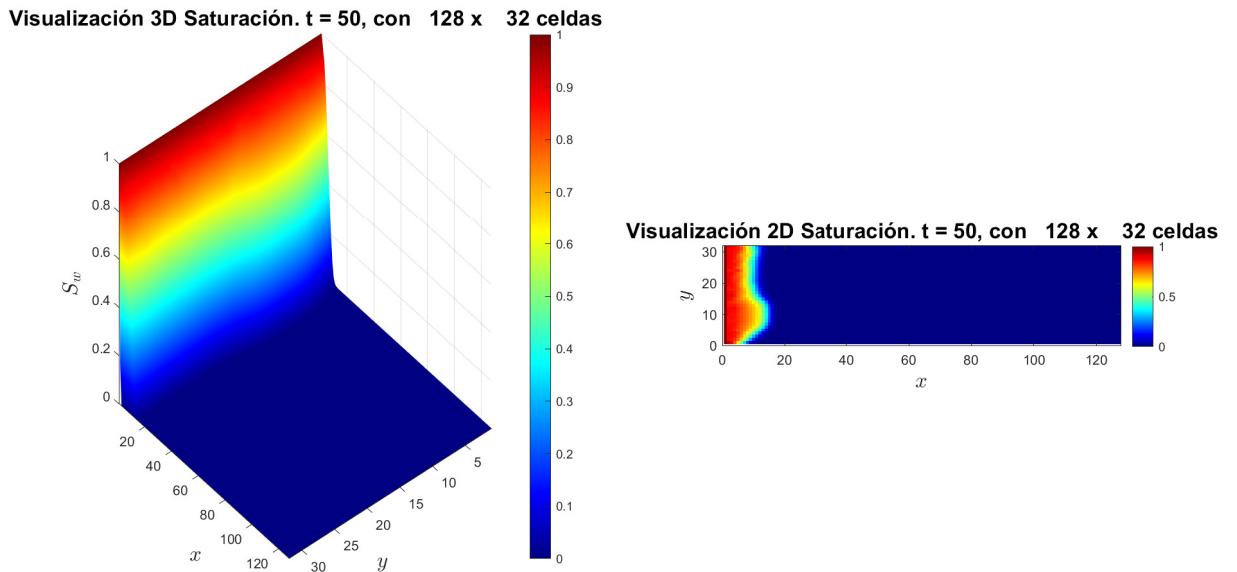


Figura 39: Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 50$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

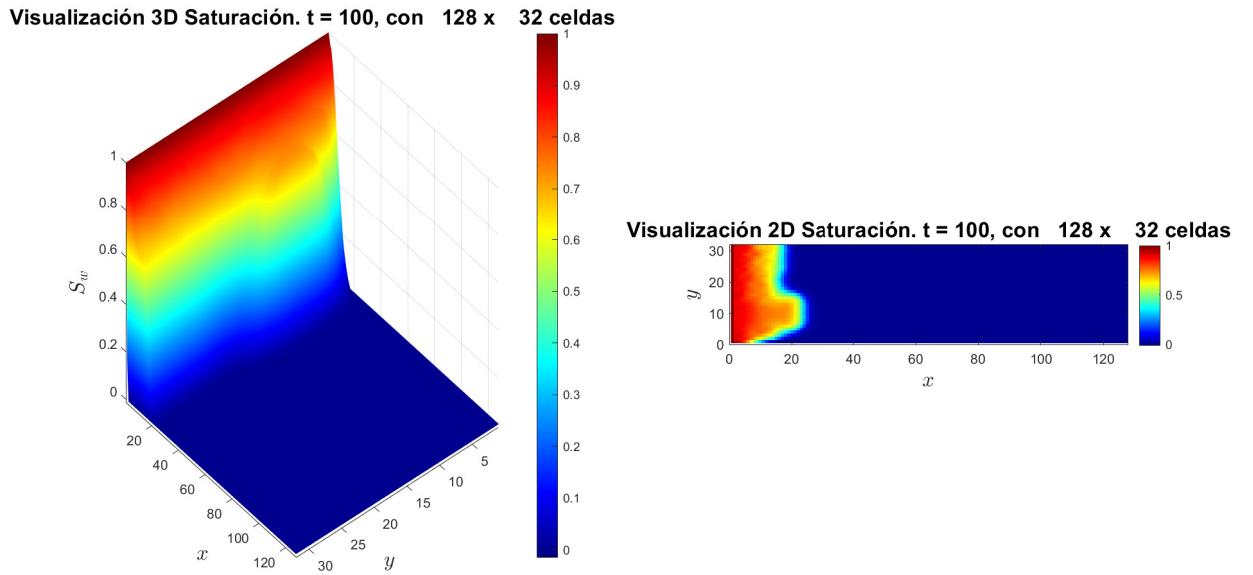


Figura 40: Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 100$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

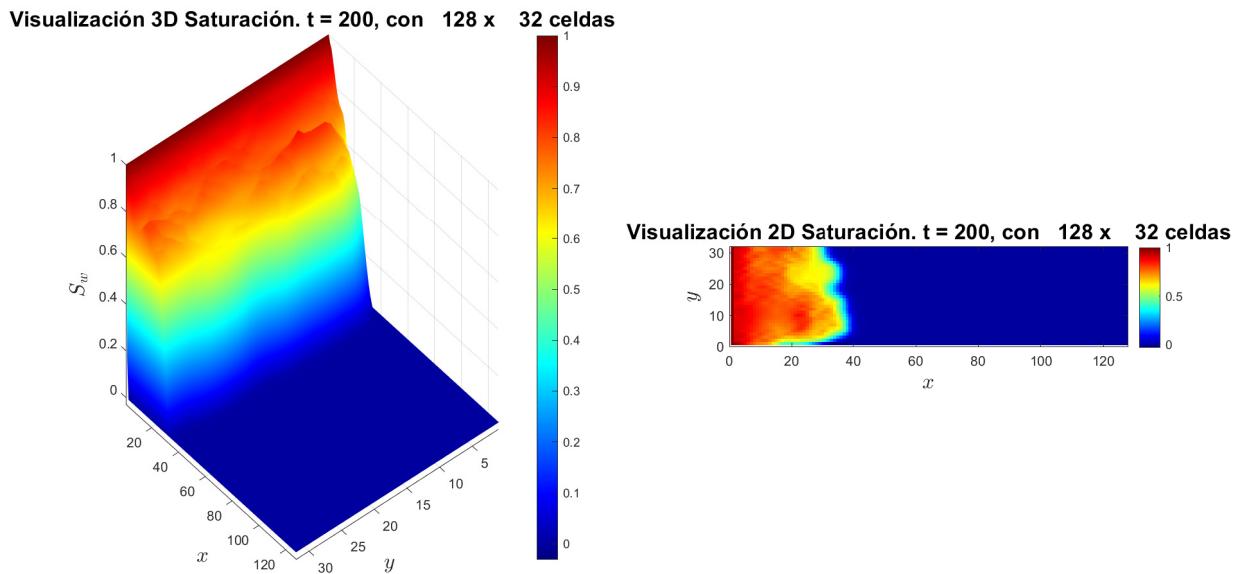


Figura 41: Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 200$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

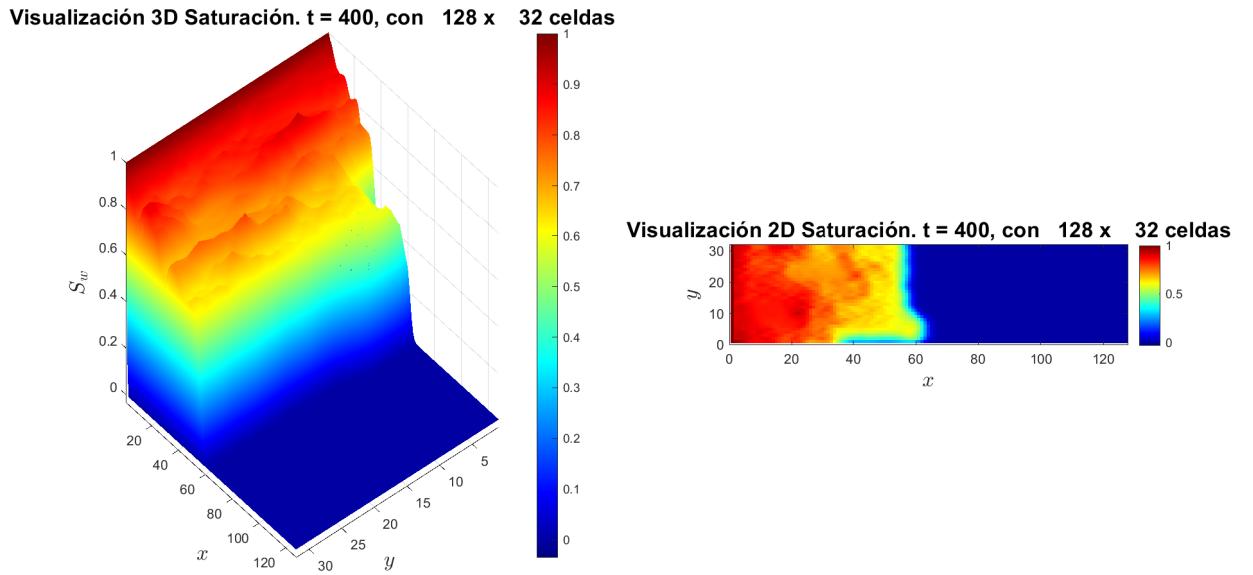
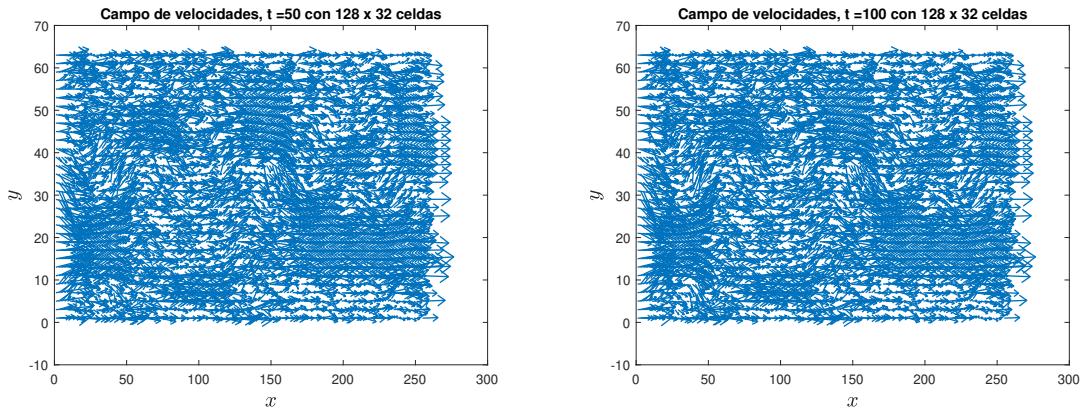


Figura 42: Soluciones numéricas de la Saturación en $t = 400$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

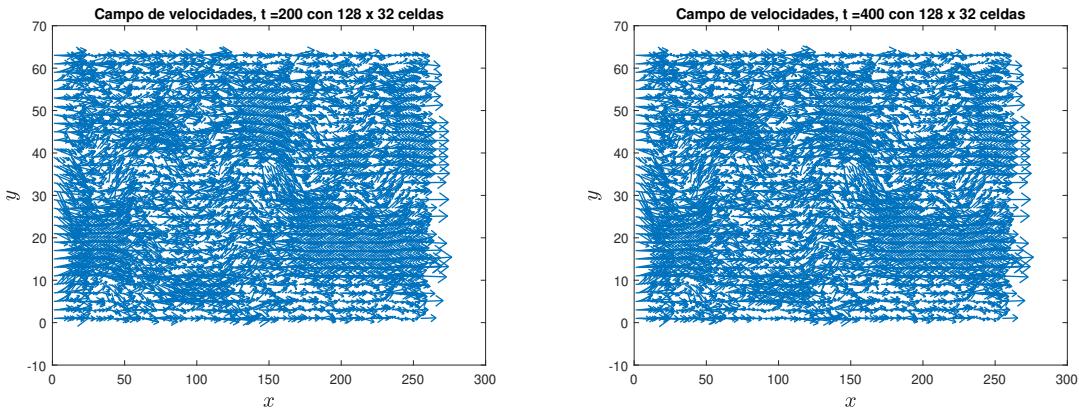
Las Figuras 43a, 43b, 44a y 44b muestran las aproximaciones numéricas del campo de velocidades en el problema, resuelto mediante el acoplamiento del SDLE y GMsFEM. Los cálculos fueron realizados en una malla de 128×32 celdas, evaluando la evolución en los instantes de tiempo $t = 50$, $t = 100$, $t = 200$ y $t = 400$, respectivamente.



(a) Campo de velocidades en $t = 50$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

(b) Campo de velocidades en $t = 100$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

Figura 43: Comparación de los campos de velocidades en $t = 50$ y $t = 100$.

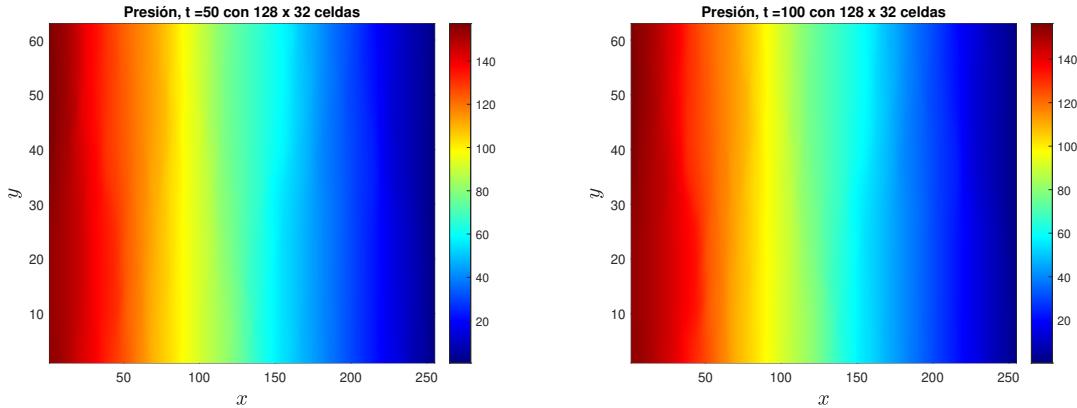


(a) Campo de velocidades en $t = 200$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

(b) Campo de velocidades en $t = 400$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

Figura 44: Comparación de los campos de velocidades en $t = 200$ y $t = 400$.

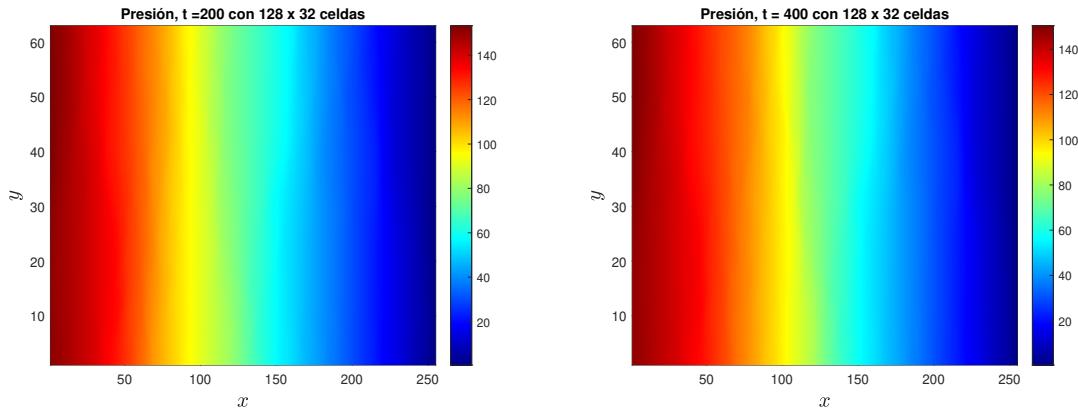
En las Figuras 45a, 45b, 46a y 46b se ilustran los resultados numéricos obtenidos la de presión en el contexto del problema analizado. La resolución se llevó a cabo mediante la combinación del SDLE y GMsFEM, utilizando una malla de 128×32 celdas. La evolución de la presión se evalúa en los instantes de tiempo $t = 50$, $t = 100$, $t = 200$ y $t = 400$.



(a) Soluciones numéricas de la Presión en $t = 50$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

(b) Soluciones numéricas de la Presión en $t = 100$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

Figura 45: Comparación de la presión en $t = 50$ y $t = 100$.



(a) Soluciones numéricas de la Presión en $t = 200$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

(b) Soluciones numéricas de la Presión en $t = 400$. Usando una malla de 128×32 . Implementación realizada en [20].

Figura 46: Comparación de la presión en $t = 200$ y $t = 400$.

8. Conclusiones

Este trabajo ha abordado diversos aspectos relacionados con tres métodos para la solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs), los cuales se fundamentan en la discretización del dominio y la formulación matricial del problema. Estos métodos son el Método de Elementos Finitos (FEM), el Método de Elementos Finitos Multiescala (MsFEM) y el Método Generalizado de Elementos Finitos Multiescala (GMsFEM). Se ha desarrollado la teoría correspondiente a estos métodos, y se han presentado ejemplos prácticos implementados tanto en [13] como en [20].

De esto se observó que el GMsFEM es especialmente útil en situaciones multiescala o cuando se enfrentan problemas de alto contraste. Su capacidad para disminuir los grados de libertad en la malla gruesa, mediante funciones base multiescala calculadas a partir de problemas con valores propios generalizados de manera local, resulta valiosa en contextos que involucran parámetros complejos y dimensiones elevadas. Se muestra esto a través de un ejemplo aplicado a la ecuación de presión en medios porosos heterogéneos.

Se presentó un enfoque semidiscreto Lagrangiano-Euleriano para resolver problemas dados por ecuaciones hiperbólicas que fue estudiado en [2], se consideró el ejemplo de la ecuación de Buckley-Leverett con gravedad. Dicho modelo es empleado para modelar problemas de inyección de agua en reservorios de recuperación de petróleo.

La contribución principal de este estudio radica en el acoplamiento del GMsFEM con el SDLE, una estrategia que ha demostrado ser eficiente para simular flujos bifásicos en medios porosos heterogéneos. Esta integración mejora la precisión al combinar la robustez del GMsFEM en problemas elípticos con la eficacia del SDLE en problemas hiperbólicos, al tiempo que reduce significativamente el costo computacional. Los resultados obtenidos, ver [14], subrayan su viabilidad para entornos complejos, optimizando recursos.

En conclusión, este trabajo evidencia que el acoplamiento de Método de Elementos Finitos Multiescala Generalizado y el Método Semi-Discreto Lagrangiano Euleriano no solo supera las limitaciones de los métodos individuales, sino que establece un marco prometedor para abordar problemas multiescala en medios heterogéneos, sugiriendo un camino hacia simulaciones más ambiciosas; como trabajo a futuro, se

plantea el estudio e implementación de este acoplamiento para fluidos trifásicos en medios porosos heterogéneos, así como un análisis riguroso de la existencia de la solución y estimación del error, buscando ampliar su aplicabilidad y fortalecer su fundamentación teórica.

A. Teoría del error para coeficientes suaves

A continuación se presentan algunos teoremas para la estimación de errores en problemas elípticos con coeficientes suaves, donde la solución hallada es usando funciones lineales por partes en 2D, para más detalle de esto consultar [17].

Además, es importante destacar que para coeficientes heterogéneos también se obtienen resultados similares. Sin embargo, es necesario manejar con mayor cuidado la regularidad que se asume de la solución. Esto se refiere específicamente a cómo se establece la regularidad al considerar la norma de las segundas derivadas. La variabilidad en los coeficientes puede implicar que la regularidad de la solución varíe en diferentes partes del dominio, lo cual requiere un análisis detallado y riguroso para asegurar la validez de los resultados obtenidos bajo estas condiciones.

Así, sea V un espacio lineal, considérese $L : V \rightarrow \mathbb{R}$, se tiene que L es lineal si satisface la ecuación 121.

$$L(\beta v + \theta w) = b \cdot L(v) + \theta \cdot L(w), \quad \text{para todo } v, w \in V, \beta, \theta \in \mathbb{R}. \quad (121)$$

Además, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal si es lineal en cada variable separadamente, tal como se muestra en la ecuación 123.

$$a(u, \beta v + \theta w) = \beta a(u, v) + \theta a(u, w), \quad (122)$$

$$a(\beta u + \theta v, w) = \beta a(u, w) + \theta a(v, w). \quad (123)$$

Una forma bilineal, es dicha simétrica si $a(u, v) = a(v, u)$ para todo $u, v \in V$. Si además de simetría tenemos $a(u, u) > 0$ para todo $u \in V$, decimos que a es un producto interno o que es una forma bilineal simétrica y positiva.

Además se tiene la desigualdad de Cauchy $|a(u, v)| \leq \|u\|_a \|v\|_a$, en general vale para cualquier producto interno y norma correspondiente que $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ y $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Sea V un espacio de Hilbert con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$, supongamos que $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal y que cumple las siguientes propiedades:

- Simétrica: $a(u, v) = a(v, u)$ para todo $u, v \in V$.
- Continua: $a(u, v) \leq \gamma \|u\|_V \|v\|_V$ para algún $\gamma > 0$.

- Elíptica: $a(u, v) \geq \alpha \|u\|_V^2$.

De esto se sigue el siguiente lema.

Lema A.1 (Lema de Cea) *Sea u la solución de $a(u, v) = L(v), v \in V$.*

Sea u_h la solución de $a(u_h, v_h) = L(v_h), v_h \in V_h$. Entonces, se tiene que

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v_h\|_V. \quad (124)$$

Y por tanto;

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \inf_{v_h \in V} \|u - v_h\|_V. \quad (125)$$

Presentemos así un teorema para la estimación del error. Primero vamos a considerar $V = H^1(D)$ y $V_h = \{v \in V : v|_K \in P_1(K), \text{ para todo } K \in T^h\}$, donde $T^h = \{K\}$ es una triangulación de $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Para $K \in T^h$ se define

$$h_K := \text{diámetro de } K,$$

$$\rho_K := \text{diámetro del círculo inscrito en } K,$$

$$h = \max_{K \in T^h} h_K.$$

Se va a analizar una familia de triangulaciones $\{T^h\}$, se supone que existe una constante positiva β independiente de la triangulación T^h tal que

$$\frac{\rho_K}{h_K} \geq \beta, \quad \text{para todo } K \in T^h. \quad (126)$$

Sea $N_i, i = 1, 2, \dots, M$ los vértices de T^h , dado $u \in C^0(\overline{D})$ se define la interpolación $\pi_h u \in V_h$ por $\pi_h u(N_i) = u(N_i)$, con $i = 1, 2, \dots, M$.

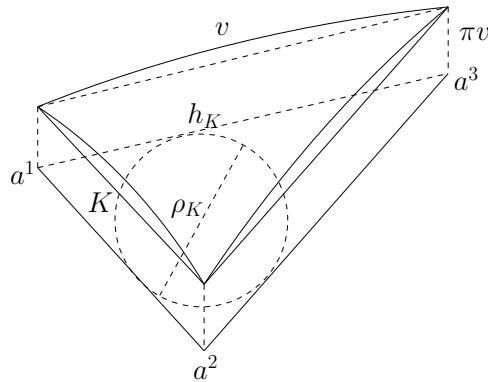


Figura 47: Elementos en T^h . Elaboración propia, inspirada en [5].

Teorema A.0.1 Sea $K \in T^h$ con vértices a^i , con $i = 1, 2, 3$. Dada $v \in C^0(\bar{K})$ sea πv la interpolación lineal de v , ver Figura 47, definida por

$$\pi v(a^i) = v(a^i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (127)$$

Entonces

$$\|v - \pi v\|_{L^\infty(K)} \leq 2h_K^2 \max_{x \in K, \ell, m \in \{1, 2\}} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_\ell \partial x_m} \right\|_{L_\infty(K)}, \quad (128)$$

$$\max \|\partial_\ell(v - \pi v)\|_{L^\infty(K)} \leq 6 \frac{h_K^2}{\rho_K} \max_{x \in K, \ell, m \in \{1, 2\}} \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_\ell \partial x_m} \right\|_{L_\infty(K)}, \quad (129)$$

donde

$$\|v\|_{L_\infty(K)} = \max_{x \in K} |v(x)|. \quad (130)$$

La demostración se puede ver en [17].

Teorema A.0.2 Sea $K \in T^h$ con vértices a^i , con $i = 1, 2, 3$, ver Figura 47. Dada $v \in C^0(\bar{K})$ sea πv la interpolación lineal de v , definida por

$$\pi v(a^i) = v(a^i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (131)$$

Entonces existe una constante C tal que

$$\|v - \pi v\|_{L^2(K)} \leq Ch_K^2 |v|_{H^2(K)}, \quad (132)$$

$$\|v - \pi v\|_{H^1(K)} \leq C \frac{h_K^2}{\rho_K} |v|_{H^2(K)}. \quad (133)$$

La demostración se puede ver en [17].

Para interpolación con polinomios de mayor grado se tiene que

$$\|u - \pi_h\|_{L^2(D)} \leq Ch^{r+1} |u|_{H^{r+1}(D)}, \quad (134)$$

$$\|u - \pi_h\|_{H^1(D)} \leq Ch^r |u|_{H^{r+1}(D)}. \quad (135)$$

donde r es el grado del polinomio, así $r \geq 1$.

B. Métodos para resolver el problema de valores propios generalizado

En MATLAB, la función `eig` se utiliza para calcular los valores propios (o eigenvalores) de una matriz. La función `eig` puede aplicarse a matrices cuadradas y devuelve un vector que contiene los valores propios de la matriz. Los valores propios son soluciones de la ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$, donde A es la matriz, λ es el valor propio y I es la matriz identidad.

Ejemplo B.0.1 Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, sus valores propios se hallan de la siguiente forma:

```
A = [1 2; 3 4];
valores_propios = eig(A);
```

así

```
>> -0.3723
      5.3723
```

Además, la función `eig` también puede devolver, opcionalmente, una matriz cuyas columnas son los vectores propios correspondientes a los valores propios calculados. Esto se logra utilizando `[V, D] = eig(A)`, donde D es una matriz diagonal con los valores propios en la diagonal, y V contiene los vectores propios como columnas.

Ejemplo B.0.2 Consideremos nuevamente la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, así

```
[B, D] = eig(A);
disp(D); % Muestra la matriz diagonal con los
           % valores propios.
disp(B); % Muestra la matriz de vectores propios.
```

esto nos devuelve lo siguiente

```
>> B = -0.8246    -0.4160
               0.5658   -0.9094
```

```
>> D = -0.3723    0
               0      5.3723
```

La función $[V, D] = \text{eig}(A, B)$ realiza el cálculo de los valores y vectores propios de una matriz generalizada $Ax = \lambda Bx$. Aquí, A y B son matrices proporcionadas, λ es un escalar (valor propio), y x es un vector propio. Además, A es una cuadrada para la cual se están determinando los valores y vectores propios y B es otra matriz cuadrada que especifica la estructura de la matriz generalizada.

La salida de la función `eig(A, B)` son: V , la cual es una matriz cuyas columnas contienen los vectores propios normalizados correspondientes a los valores propios presentes en la diagonal de la matriz y D que es una matriz diagonal que contiene los valores propios.

La relación $Ax = \lambda Bx$ se expresa en forma matricial como $AV = BVD$.

Algunos de los métodos numéricos comunes utilizados por `eig` son el método de Cholesky y el método de Schur. A continuación se muestran sus algoritmos.

B.1. Usando el método de Cholesky

En esta sección se mostrara como usando el método de Cholesky se puede resolver el problema de valores propios generalizado. El material presentado fue tomado de [6].

La factorización de Cholesky es un método numérico empleado para descomponer una matriz simétrica y definida positiva en el producto de una matriz triangular inferior y su traspuesta. Este enfoque destaca por su eficiencia y aplicabilidad en diversas situaciones, tales como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, la simulación de procesos estocásticos y la resolución de problemas de mínimos cuadrados.

Teorema B.1.1 *Si B es una matriz real, simétrica y definida positiva, entonces tiene una factorización única $B = LL^T$, donde L es una matriz triangular inferior con diagonal positiva.*

La demostración de este hecho se puede encontrar en [20].

El algoritmo de la factorización de Cholesky es un caso especial del algoritmo general para la factorización LU , donde $U = L^T$. El algoritmo para la factorización de Cholesky es el siguiente:

Algorithm 1 Algoritmo para la factorización de Cholesky

Input: $n, (b_{ij})$ **Output:** (ℓ_{ij}) **for** $k = 1, 2, \dots, n$ **do**

$$\ell_{kk} \leftarrow \left(b_{kk} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{ks}^2 \right)^{1/2}$$

for $i = k+1, k+1, \dots, n$ **do**

$$\ell_{ik} \leftarrow \frac{\left(b_{ik} - \sum_{s=1}^{k-1} \ell_{is} \ell_{ks} \right)}{\ell_{kk}}$$

end for**end for**

Ahora como queremos resolver $Ax = \lambda Bx$ y usando la factorización de Cholesky tenemos que $B = LL^T$, así

$$Ax = \lambda LL^T x,$$

como L es invertible entonces se tiene que

$$L^{-1}A((L^T)^{-1}L^T)x = \lambda L^{-1}LL^T x,$$

esto es

$$L^{-1}A(L^T)^{-1}(L^T x) = \lambda(L^T x),$$

definamos $A_t = L^{-1}A(L^T)^{-1}q$, donde $q = L^T x$, así se tiene que $A_t q = \lambda q$. Con esto podemos hallar los valores propios de la matriz transformada A_t . Esto, y luego podemos hallar los vectores propios buscados originalmente, basta multiplicar L^{-T} por q , esto es $L^{-T}q = L^{-T}L^T x = x$.

B.2. Algoritmo QZ

El algoritmo QZ o también llamado descomposición de Schur generalizada, es un método numérico usado para hallar los valores y vectores propios asociados al problema $Ax = \lambda Bx$ en donde $\lambda \in \mathbb{C}$ y A, B son matrices cuadradas, este método es una generalización de la descomposición QR cuya idea es transformar de manera simultánea las matrices A, B utilizando rotaciones de Givens para que así estas lleguen de una manera conjunta a una matriz diagonal superior [15].

Tomando como $\lambda(A, B)$ al multiconjunto formado por los valores propios λ que cumplen dicho problema, se busca encontrar matrices Q, Z bien condicionadas tal que

$$A_1 = Q^{-1}AZ \text{ y } B_1 = Q^{-1}BZ$$

y para las cuales se tiene que $\lambda(A, B) = \lambda(A_1, B_1)$ pues

$$Ax = \lambda Bx \Leftrightarrow A_1y = \lambda B_1y \text{ en donde } y = Zx$$

Es así que se tiene el siguiente teorema en donde se asegura la existencia de las matrices Q, z y además dichas matrices son unitarias.

Teorema B.2.1 *Si A y B son matrices en $\mathbb{C}^{n \times n}$ entonces existen matrices Q y Z unitarias tal que $Q^H AZ = T$ y $Q^H BZ = S$ en donde T y S son triangulares superiores. Y para algún k , se tiene que si s_{kk} y t_{kk} son ambos 0 entonces $\lambda(A, B) = \mathbb{C}$, de lo contrario*

$$\lambda(A, B) = \left\{ \frac{t_{ii}}{s_{ii}} : s_{ii} \neq 0 \right\}.$$

La demostración de este hecho se puede encontrar en [15]. Adicionalmente, este teorema tiene un teorema equivalente para los reales, el cual se llama descomposición real generalizada de Schur, este garantiza que la matriz T sea casi-triangular superior y la matriz S sea triangular superior. El algoritmo de la descomposición generalizada real de Schur o QZ se divide en dos partes, la primera en donde se reduce el problema a una forma Hessenberg y una forma triangular superior y la segunda en donde se ceran los elementos de la subdiagonal que quedan en la matriz de Hessenberg, algo importante que se debe observar, es que todo proceso realizado en la matriz A también debe realizarse en la matriz B pues Q y Z son iguales en ambas expresiones. Ahora, aplicando el anterior algoritmo se obtienen las formas de A y B equivalentes, Hessenberg y triangular, así para llevar la matriz de Hessenberg resultante a la forma casi-triangular superior, se realiza una búsqueda en la diagonal en donde se toma el mayor q y el menor p no negativo tal que

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$$

En donde, los bloques de la primera fila tienen p filas y los de la tercera fila tienen

Algorithm 2 Algoritmo reducción Hessenberg-Triangular

Input: A, B, n **Output:** Q, Z Calcule $B = QR$ con alguno de los algoritmos de factorización QRSobreesciba $A = Q^T A$ y $B = Q^T B$.**for** $j = 1, 2, \dots, n-2$ **do** **for** $i = n : -1 : j+2$ **do**

$$[c, s] = \text{givens}(A(i-1, j), A(i, j))$$

$$A(i-1 : i, j : n) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T A(i-1 : i, j : n)$$

$$B(i-1 : i, i-1 : n) = \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}^T B(i-1 : i, i-1 : n)$$

$$[c, s] = \text{givens}(-B(i, i), B(i, i-1))$$

$$B(1 : i, i-1 : i) = B(1 : i, i-1 : i) \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

$$A(1 : n, i-1 : i) = A(1 : n, i-1 : i) \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$$

end for**end for**

q filas, adicionalmente los bloques de la primera columna tienen p columnas y los de la tercera columna tienen q columnas y que cumplan que A_{33} es casi-triangular superior y A_{22} es Hessenberg no reducida. Teniendo en cuenta esto, se expresa a B triangular por bloques de los mismos tamaños que A de la siguiente forma;

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix}$$

Ahora, si en la búsqueda de q se obtiene que $q < n$ entonces se mira si el bloque B_{22} de la matriz B es singular, si lo es se cera el componente $a_{n-q, n-q-1}$ de la matriz A , de lo contrario se utiliza el algoritmo 3 que describiremos a continuación con las matrices A_{22} y B_{22} , esto pues, lo único que impide que A llegue a una forma casi-triangular superior es la forma de Hessenberg no reducida de A_{22} . A este algoritmo 3 le llamaremos algoritmo paso QZ.

Obteniendo así que para actualizar la matriz A y la matriz B después de realizado el proceso con los bloques A_{22} y B_{22} se realiza la siguiente operación que entrega las formas requeridas:

Algorithm 3 Algoritmo paso QZ

Input: $A_{22}, B_{22}, \text{size}(A_{22})$ **Output:** Q, Z

Lleve a A y B a matrices Hessenberg-triangular respectivamente con el algoritmo 2.

Calcule $M = AB^{-1}$ y dos de sus autovalores a, b para realizar $(M-aI)(M-bI)e_1 = [x, y, z, 0, \dots, 0]$.

for $k = 1, 2, \dots, n-2$ **do**

 Encuentre una matriz de Householder Q_k tal que $Q_k \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \text{diag}(I_{k-1}, Q_k, I_{n-k-2}) \cdot A$$

$$B = \text{diag}(I_{k-1}, Q_k, I_{n-k-2}) \cdot B$$

 Encuentre una matriz de Householder Z_{k_1} tal que $[b_{k+2,k} \ b_{k+2,k+1} \ b_{k+2,k+2}] Z_{k_1} = [0 \ 0 \ *$

$$A = A \cdot \text{diag}(I_{k-1}, Z_{k_1}, I_{n-k-2})$$

$$B = B \cdot \text{diag}(I_{k-1}, Z_{k_1}, I_{n-k-2})$$

 Encuentre una matriz de Householder Z_{k_2} tal que $[b_{k+1,k} \ b_{k+1,k+1}] Z_{k_2} = [0 \ *$

$$A = A \cdot \text{diag}(I_{k-1}, Z_{k_2}, I_{n-k-1})$$

$$B = B \cdot \text{diag}(I_{k-1}, Z_{k_2}, I_{n-k-1})$$

$$x = a_{k+1,k} \text{ y } y = a_{k+2,k}$$

if $k < n-2$ **then**

$$z = a_{k+2,k}$$

end if

end for

 Encuentre una matriz Householder Q_{n-1} tal que $Q_{n-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A = \text{diag}(I_{n-2}, Q_{n-1}) \cdot A$$

$$B = \text{diag}(I_{n-2}, Q_{n-1}) \cdot B$$

 Encuentre una matriz Householder Z_{n-1} tal que $[b_{n,n-1} \ b_{nn}] Z_{n-1} = [0 \ *$

$$A = A \cdot \text{diag}(I_{n-2}, Z_{n-1})$$

$$B = B \cdot \text{diag}(I_{n-2}, Z_{n-1})$$

Para calcular Q y Z se multiplican todas las Q_n y Z_n acumulativamente.

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(I_p, Q, I_q)^T \cdot A \cdot \text{diag}(I_p, Z, I_q) \\ B &= \text{diag}(I_p, Q, I_q)^T \cdot B \cdot \text{diag}(I_p, Z, I_q) \end{aligned}$$

Entonces, de este proceso surgen 2 matrices Q, Z unitarias y dos matrices T, S , la primera casi-triangular superior y la segunda triangular superior. Sin embargo, observe que el problema nos otorga los valores propios generalizados resolviendo únicamente una parte del problema, para hallar los vectores propios es necesario resolver el sistema $(A - \lambda B)x = 0$ con los distintos valores de lambda, observe que para resolver este sistema lineal de ecuaciones homogéneo se pueden usar distintos métodos como lo son Gauss Seidel, Jacobi, entre otros cuya convergencia depende directamente de las características que tenga la matriz $(A - \lambda B)$, en este proyecto se hallarán dichos vectores propios hallando el espacio nulo de la matriz.

B.3. Vectores propios generalizados

Como se dijo anteriormente, se utiliza el algoritmo QZ para hallar así los valores propios generalizados asociados al problema y con la obtención de los valores propios correspondientes se resuelven sistemas de ecuaciones lineales homogéneos para hallar los vectores propios, observe que, al ser el sistema homogéneo lo que se busca es un vector en el espacio nulo de la matriz en cuestión, pues por definición el espacio nulo de una matriz C está dado por el conjunto de vectores en el espacio vectorial tales que al multiplicarse por C dan 0 es decir $\text{Ker}(C) = \{v \in V : Cv = 0\}$, así, para hallar este espacio nulo que nos otorgará el conjunto de vectores propios generalizados se utiliza la función `V=null(C)` de MATLAB, un ejemplo de como funciona este comando es el siguiente:

Ejemplo B.3.1 Consideremos, la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 12 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, así

```
[V] = eig(A);
disp(V); % Muestra los vectores del espacio nulo.
```

esto nos devuelve lo siguiente

```
>> V = -0.8512
               0.5238
              -0.0327
```

Es importante tener en cuenta que para que el espacio nulo de como resultado un vector distinto de 0 la matriz que se ingresa no debe ser de rango completo, pues si es así, como transformación lineal es inyectiva y, por tanto, el único vector perteneciente al espacio nulo es él 0.

El método utilizado tras la función `null` es la descomposición en valores singulares (SVD).

Teorema B.3.1 *Si A es una matriz de tamaño $n \times m$ entonces existen matrices ortogonales $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tales que $U^T A V = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p)$ en donde $p = \min(m, n)$.*

En especial, cuando la matriz no es rango completo se tiene el siguiente teorema:

Teorema B.3.2 *Si A tiene r valores singulares positivos, entonces $\text{Ran}(A) = r$ y*

$$\begin{aligned} \text{Ker}(A) &= \{v_{r+1}, \dots, v_n\} \\ \text{Ran}(A) &= \{u_1, u_2, \dots, u_r\} \end{aligned}$$

La demostración de este hecho es sencilla, pues el rango de una matriz diagonal es el número de valores distintos de 0 que tenga, adicionalmente las afirmaciones sobre el espacio nulo y el rango de la matriz A se obtienen a partir de las igualdades $AV = U\Sigma$ y $A^T U = V\Sigma$.

Es así, como se pueden hallar los vectores pertenecientes al espacio nulo de la matriz a partir de la descomposición en valores singulares y por tanto se puede realizar la obtención de los vectores propios generalizados.

Referencias

- [1] E. Abreu et al. “A class of positive semi-discrete Lagrangian-Eulerian schemes for multidimensional systems of hyperbolic conservation laws”. En: *Journal of Scientific Computing* 90.1 (2022), pág. 40. DOI: 10.1007/s10915-021-01712-8.
- [2] Eduardo Abreu et al. “A semi-discrete Lagrangian–Eulerian scheme for hyperbolic-transport models”. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2022).
- [3] T. Apostol. *Mathematical Analysis Second Edition*. Addison-Wesley, 1974.
- [4] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right, Second Edition*. Springer, 1997.
- [5] D. Braess. *Finite Elements: Theory, Fast Solvers, and Applications in Solid Mechanics*. Cambridge University, 2007.
- [6] W. Cheney y D. Kincaid. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Brooks/Cole, 2002.
- [7] Otfried Cheong. *Ipe - A drawing editor for creating figures in PDF or EPS format*. Version 7.2.24, available at <https://ipe.otfried.org/>. Ipe. 1993.
- [8] Chung, Y. Efendiev y T. Hou. *Multiscale Model Reduction*. Springer, 2023.
- [9] L. Contreras. “On generalized multiscale methods for flow in complex porous media and their applications”. En: *Universidad Nacional de Colombia* (2022).
- [10] Y. Efendiev, J. Galvis y T. Hou. *Generalized Multiscale Finite Element Methods (GMsFEM)*. Cornell University, 2013.
- [11] Y. Efendiev y T. Hou. *Multiscale Finite Element Methods, Theory and Applications*. Springer, 2009.
- [12] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations*. 2nd. Vol. 19. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI: American Mathematical Society, 2010. ISBN: 978-0-8218-4974-3.
- [13] FreeFem++. *FreeFem++ Documentation*. <https://doc.freefem.org/>. s.f.
- [14] Juan Galvis et al. “Integrating Semi-Discrete Lagrangian-Eulerian Schemes with Generalized Multiscale Finite Elements for Enhanced Two- and Three-Phase Flow Simulations”. En: (2025).

- [15] G. Golub y C. Van Loan. *Matrix Computations*. Cuarta. The Johns Hopkins University Press Baltimore, 2013.
- [16] K. Hoffman y R. Kunze. *Linear Álgebra*. Pearson, 1971.
- [17] Claes Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University, 1987.
- [18] Rafael José Iorio Jr. y Valéria de Magalhães Iorio. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Vol. 70. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN: 978-0521801605.
- [19] Randall J. LeVeque. *Finite-Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2002.
- [20] MathWorks. *MATLAB*. Recuperado de <https://la.mathworks.com/help/index.htm>. s.f.
- [21] M. Presho y J. Galvis. “A mass conservative generalized multiscale finite element method applied to two-phase flow in heterogeneous porous media”. En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2018).
- [22] T. Tao. *Analysis II*. Hindustan Book Agency, 2006.
- [23] Y. Thomas y Xiao-hui Wu. “A Multiscale Finite Element Method for Elliptic Problems in Composite Materials and Porous Media”. En: *Journal of Computational Physics* 134 (1996), págs. 169-189.
- [24] Y. Thomas, Xiao-hui Wu y Zhiqiang Cai. “Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients”. En: *American Mathematical Society* 68 (1999), págs. 913-943.