

Estudio del método multiescala generalizado (GMsFEM) y aplicaciones a flujos bifásicos en medios porosos

Yessica Vanessa Trujillo Ladino

Trabajo dirigido por Juan Galvis (UNAL)

En colaboración con Jean François (UECE)

ytrujillol@unal.edu.co

18 de febrero 2025

Modelo

El problema que abordaremos consiste en un sistema de ecuaciones diferenciales que modela el flujo bifásico inmiscible e incompresible de agua y aceite en medios porosos heterogéneos dentro de un reservorio rectangular, $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$.

La ecuación de conservación de la masa está dada por

$$\nabla \cdot v = 0, \quad v = -\Lambda(S)K(x)\nabla p. \quad (1)$$

Este sistema está acoplado con la ecuación de transporte para la saturación de agua,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (vf(S)) = 0, \quad (2)$$

donde S representa la saturación de agua y la función de flujo fraccional $f(S)$ está dada por

$$f(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w \Lambda(S)}. \quad (3)$$

El coeficiente de movilidad total $\Lambda(S)$ se define en términos de las permeabilidades relativas $k_{r\alpha}(S)$ y las viscosidades de fase μ_α ($\alpha = w, o$) como

$$\Lambda(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o}. \quad (4)$$

El modelo hiperbólico de transporte escalar se maneja mediante el esquema Lagrangiano-Euleriano semi-discreto y puede escribirse en su forma abierta como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x H(S)) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y H(S)) = 0, \quad (5)$$

con la condición inicial

$$S(x, y, 0) = S_0(x, y) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & \text{de lo contrario.} \end{cases} \quad (6)$$

$v_x = v_x(x, y, t)$ y $v_y = v_y(x, y, t)$ denotan las componentes x e y del campo de velocidad v . Para nuestras aproximaciones numéricas, consideramos curvas de permeabilidad relativa cuadráticas,

$$k_{rw}(S) = S^2, \quad k_{ro}(S) = (1 - S)^2, \quad (7)$$

con valores de viscosidad $\mu_w = 1$ y $\mu_o = 2$.

Método de elementos finitos (FEM)

Daremos una breve idea de como funciona FEM para resolver el siguiente problema de difusión

$$(S) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que :} \\ -\text{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), \text{ para todo } x \in D, \\ u(x) = g(x), \text{ para todo } x \in \partial D. \end{cases}$$

Al multiplicar por una función de prueba $v(x) \in C_0^\infty(D)$ e integrar sobre el dominio, se tiene lo siguiente

$$\int_D -\text{div}(k(x)\nabla u(x))v(x) = \int_D f(x)v(x).$$

Integrando por partes y asumiendo que la función de prueba toma el valor 0 en la frontera se tiene que

$$\int_D k(x)\nabla u(x) \cdot \nabla v(x) = \int_D f(x)v(x).$$

Así la formulación débil del problema es:

$$(W) \begin{cases} \text{Encontrar } u : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que :} \\ \int_D k(x) \nabla u(x) \nabla v(x) = \int_D f(x) v(x), \quad \text{para todo } v(x) \in C_0^\infty(D), \\ u(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in \partial D. \end{cases}$$

Ahora, si suponemos que D es un dominio poligonal y T^h su triangulación. Se define ahora el siguiente conjunto de funciones

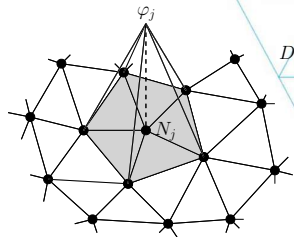
$$P^r(T^h) = \{v : D \longrightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ es globalmente continua, } v|_{K_i} \text{ es de grado } r \text{ en cada variable}\}.$$

Supongamos que $u(x) \in P^1(T^h)$ y se quiere que en la frontera del dominio $u(x) = g(x)$ entonces se busca una solución de la forma

$$u(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i(x) + \sum_{\ell \in \Gamma} g(x_\ell) \phi_\ell(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i(x).$$

Formulación matricial: $(M) \left\{ A \vec{\alpha} = \vec{b}, \text{ donde } \vec{\alpha} = [\alpha_i]_{i \in I}, \right.$

$$a_{ij} = \int_D k(x) \nabla \phi_{x_i}(x) \nabla \phi_{x_j}(x), \quad i, j \in I, \quad b_i = \int_D f(x) \phi_i(x).$$



Método de elementos finitos multiescala (MsFEM)

Consideremos la ecuación diferencial elíptica sobre un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, en donde $k(x)$ y $f(x)$ son funciones ya conocidas pero con heterogeneidades.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), & x \in D, \\ u(x) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (8)$$

El método MsFEM produce una solución aproximada $u : D \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Se realiza una partición \mathcal{T}^H del dominio D , cuyos bloques se llamarán K_i , es decir, $\mathcal{T}^H = \{K_i\}$.

Se elige un nodo x_i en la partición \mathcal{T}^H tal que $x_i \notin \partial D$ y se toma la función base de FEM φ_i^0 asociada a este nodo. La función base multiescala φ_i^{ms} asociada a x_i tiene el mismo soporte que φ_i^0 y cumple la siguiente condición:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla \varphi_i^{ms}) = 0, & \text{en } K, \\ \varphi_i^{ms} = \varphi_i^0, & \text{en } \partial K. \end{cases}$$

Este sistema se resuelve usando el método de elementos finitos (FEM).

El refinamiento de malla gruesa permite capturar heterogeneidades específicas y, al utilizar funciones base multiescala, reduce la dimensión del cálculo.

La aproximación de la función $u(x)$ se escribe como combinación lineal de funciones base multiescala:

$$u^{ms}(x) = \sum_i \alpha_i \varphi_i^{ms}$$

Para encontrar los coeficientes α_i , se multiplica la ecuación diferencial por funciones de prueba $v(x)$ y se resuelve el sistema en escala gruesa usando la siguiente formulación:

- **Petrov-Galerkin:** Funciones de prueba en W_h

$$-\text{div}(k(x)\nabla u^{ms}(x))v(x) = f(x)v(x), \quad v(x) \in W_h$$

Integrando sobre el subdominio K , obtenemos:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}^H} \left(\int_K k(x) \nabla u^{ms}(x) \nabla v(x) dx \right) = \int_D f(x) v(x) dx$$

Reemplazando $u^{ms}(x)$, obtenemos el sistema matricial $A\alpha = b$, con:

$$a_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}^H} \int_K k(x) \nabla \varphi_i^{ms} \nabla \varphi_j^{ms} dx$$

$$b_i = \int_D f(x) \varphi_i^{ms} dx$$

La matriz A es dispersa, por lo que se utilizan métodos eficientes para su resolución.

Resultados numéricos (Problema de difusión isotrópica)

Consideremos el siguiente problema, en la malla se pueden observar distintos canales de contraste que componen un medio de permeabilidad heterogéneo.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla u(x_1, x_2) = 1, & x \in [0, 1] \times [0, 1], \\ u(x_1, x_2) = 0, & x \in \partial D. \end{cases} \quad (9)$$

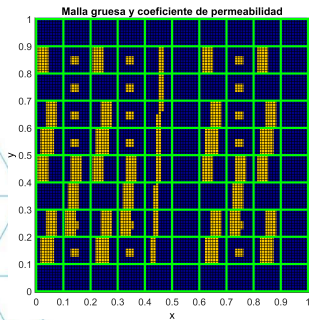


Figure 1: Malla gruesa y coeficiente de permeabilidad.

Se tiene un coeficiente de contraste de 1 en el fondo y de 10^6 en los canales e inclusiones.

Resultados numéricos

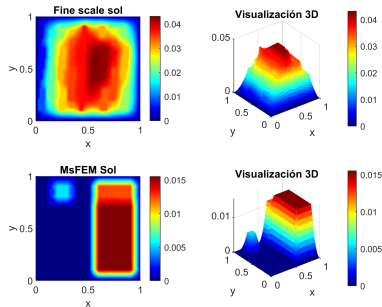


Figure 2: Solución implementada en MATLAB.

Esta solución presenta un error numérico de 0.87702, medido en la norma $L_2(D)$, entonces, se confirma que, en un medio con un coeficiente de contraste heterogéneo y que tiene cambios bruscos, el comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala es realmente deficiente.

Método multiescala generalizado

El GMsFEM mejora significativamente la aproximación a la solución, particularmente en problemas multiescala con alto contraste o en situaciones donde $k(x)$ presenta valores grandes y variables.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) = f(x), & x \in D, \\ u(x) = 0, & x \in \partial D. \end{cases}$$

El objetivo del GMsFEM es encontrar una solución aproximada $u(x)$ que pertenezca al espacio $H_0^1(D)$ y que cumpla con la siguiente ecuación débil para cualquier función de prueba $v(x)$ en el mismo espacio:

$$\int_D k(x)\nabla u(x)\nabla v(x) \, dx = \int_D f(x)v(x) \, dx.$$

Para aproximar la solución $u(x)$, se utiliza una partición gruesa \mathcal{T}^H del dominio D , a la que se le agrega una malla más fina \mathcal{T}^h . Dentro de esta formulación, el espacio de funciones base se define sobre los nodos de la malla \mathcal{T}^H , pero para hacer las funciones más robustas, se incorpora información relevante de la vecindad de cada nodo.

La vecindad de un nodo x_i está dada por $\omega_i = \bigcup \{K_j \in \mathcal{T}^H : x_i \in \overline{K_j}\}$.

Dentro de cada vecindad ω_i , se resuelve un problema de autovalores de alto contraste:

$$-\operatorname{div}(k(x)\nabla\psi) = \lambda k(x)\psi, \quad \psi \in \omega_i.$$

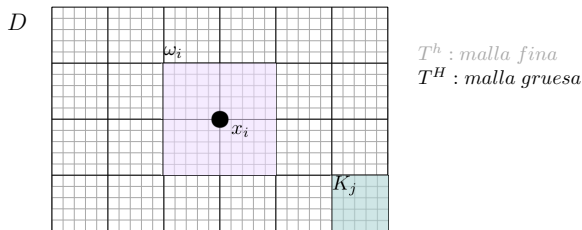


Figure 3: Figura 1. Vecindad del nodo x_i en el dominio D .

Al resolver el problema de autovalores en cada vecindad ω_i , se obtiene un conjunto de vectores propios $\{\psi_i^{\omega_i}\}$, los cuales son seleccionados de acuerdo con sus valores propios dominantes. Así, se construyen las funciones base como $\phi_i = \chi_i \psi_i^{\omega_i}$, donde χ_i es una función de partición de unidad en la malla gruesa.

El espacio base final es $V_H = \text{span}\{\phi_i\}$.

Sea $V_h(D)$ el espacio de solución en la malla fina, y V_H el espacio en la malla gruesa. La matriz de proyección R está definida por $R = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N]$.

En otras palabras, R mapea un vector en la base fina al espacio base grueso, es decir $v_H = Rv_h$.

El problema original en la malla fina es $Au = b$. Al aplicar la proyección con R , obtenemos el problema reducido en la malla gruesa: $A_0 u_0 = b_0$, donde la matriz de rigidez gruesa es $A_0 = R^T A R$ y $b_0 = R^T b$.

Finalmente, la solución en la malla gruesa se mapea de vuelta a la malla fina usando $u = Ru_0$.

Resultados numéricos

Al asignar un coeficiente de contraste de 1 al fondo, de 10^6 a los canales e inclusiones y al emplear 205 funciones base en la malla gruesa.

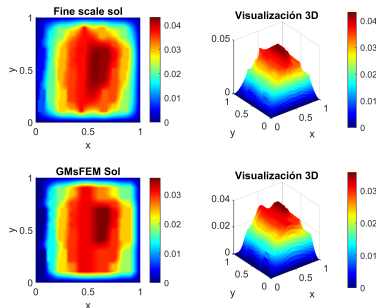


Figure 4: Solución numérica usando GMsFEM.

En donde, esta solución presenta un error numérico de 0.4245, medido en la norma $L_2(D)$ y se visualiza un buen comportamiento del método respecto a la solución con una fina escala. Esto, contrastando con el error de 0.87 que el método MsFEM obtuvo al emplearse en la configuración anteriormente mencionada.

Método semi-discreto Lagrangiano-Euleriano

Consideremos el problema de Cauchy asociado a la siguiente ley de conservación

$$u_t + H(u)_x + G(u)_y = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x, y),$$

donde $H, G \in C^1$ y la condición inicial $u_0(x, y)$ pertenece a $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^2)$. La formulación en dos dimensiones del esquema semi-discreto Lagrangiano-Euleriano se expresa de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt}u_{j,k}(t) = -\frac{\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2},k} - \mathcal{F}_{j-\frac{1}{2},k}}{\Delta x} - \frac{\mathcal{G}_{j,k+\frac{1}{2}} - \mathcal{G}_{j,k-\frac{1}{2}}}{\Delta y}.$$

Donde los flujos numéricos bidimensionales en las direcciones x e y de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2},k} &= \frac{1}{4} \left[b_{j+\frac{1}{2},k}^x \left(u_{j+\frac{1}{2},k}^- - u_{j+\frac{1}{2},k}^+ \right) \right] + (f_{j,k} + f_{j+1,k}) \left(u_{j+\frac{1}{2},k}^- + u_{j+\frac{1}{2},k}^+ \right), \\ \mathcal{G}_{j,k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4} \left[b_{j,k+\frac{1}{2}}^y \left(u_{j,k+\frac{1}{2}}^- + u_{j,k+\frac{1}{2}}^+ \right) \right] + (g_{j,k} + g_{j,k+1}) \left(u_{j,k+\frac{1}{2}}^- + u_{j,k+\frac{1}{2}}^+ \right).\end{aligned}$$

Resultados numéricos (La ecuación de Buckley–Leverett con gravedad en un medio homogéneo)

Consideremos el sistema de flujo de dos fases (agua y aceite) con gravedad, este modelo se usa para el problema de inyección de agua en reservorios de recuperación de aceite. Este sistema está dado por

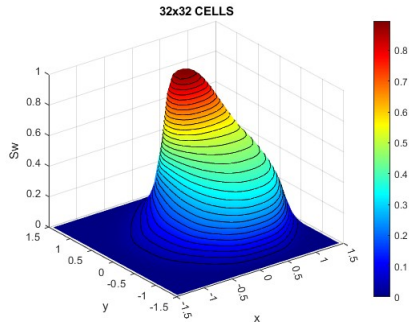
$$\frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial(f(S_w))}{\partial x} + \frac{\partial(g(S_w))}{\partial y} = 0, \quad (x, y, t) \in [-1.5, 1.5]^2 \times [0, 0.5].$$

El flujo en la dirección x es $f(S_w) = \frac{S_w^2}{S_w^2 + \frac{\mu_w}{\mu_o}(1-S_w)^2}$. Y, el flujo en la dirección y es

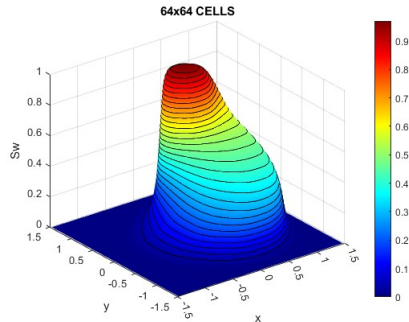
$g(S_w) = f(S_w)(1 - C_g(1 - S_w)^2)$, donde $C_g = 5$ es un parámetro gravitacional y se considera que la relación de viscosidades es $\frac{\mu_w}{\mu_o} = 1$.

La condición inicial se define como:

$$S_w(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & x^2 + y^2 < 0.5, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$



(a) Visualización 3D de la solución numérica.



(b) Visualización 2D de la solución numérica.

Figure 5: Soluciones numéricas obtenidas mediante el esquema semidiscreto propuesto. Usando una malla de 32×32 y 64×64 .

Acomplamiento (GMsFEM + SDLE)

Modelamos el flujo bifásico inmiscible e incompresible de agua y aceite en medios porosos heterogéneos dentro de un reservorio rectangular $\Omega = [0, X] \times [0, Y]$, con $X/Y = 4$.

El modelo de flujo de dos fases junto con la ley de conservación hiperbólica para el transporte de saturación de agua viene dado por

$$\nabla \cdot v = 0, \quad v = -\Lambda(S)K(x)\nabla p,$$

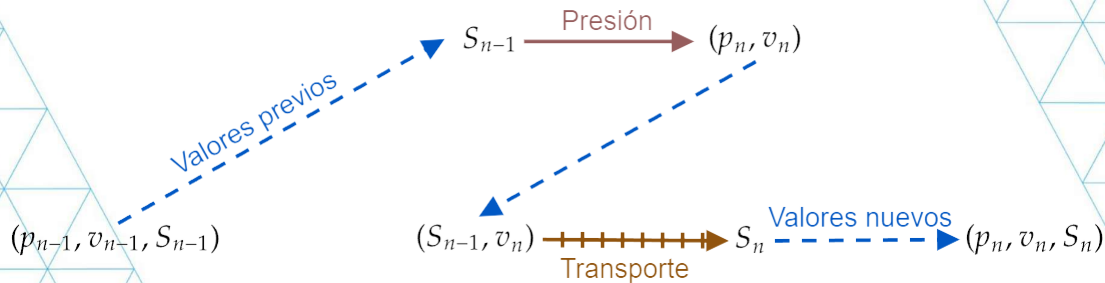
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (vf(S)) = 0.$$

Mediante el esquema semi-discreto Lagrangiano-Euleriano se puede escribir en la siguiente forma abierta:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v_x f(S)) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y f(S)) = 0,$$

$$\text{con } f(S) = \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w \lambda(S)}.$$

Descomposición de operadores



Resultados numéricos

Se considera $\Omega = [0, 128] \times [0, 32]$.

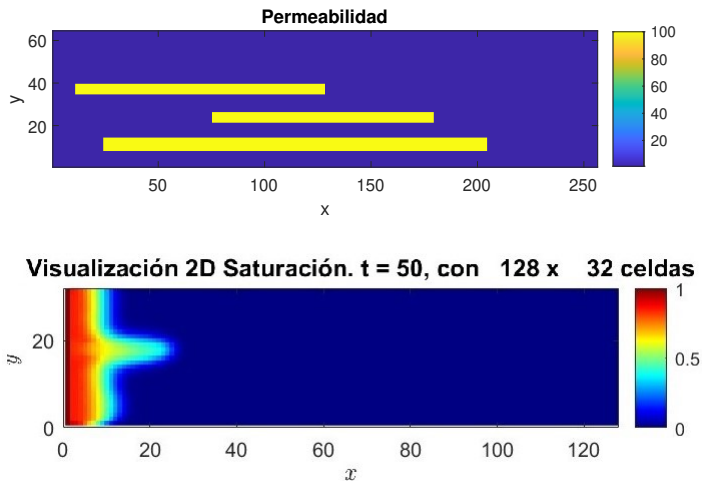





Figure 6: Coeficiente de permeabilidad y solución numérica.

- Los resultados numéricos confirmaron que el GMsFEM mejora la precisión en dominios con alto contraste de permeabilidad, reduciendo la complejidad computacional respecto a una malla fina estándar.
- La combinación de ambos métodos permitió capturar de manera eficiente la dinámica del flujo bifásico, mostrando un buen acuerdo con soluciones de referencia en problemas de prueba.

Referencias y agradecimientos

-  J. Galvis, E. Abreu, J. François y P. Ferraz, “Integrating Semi-Discrete Lagrangian-Eulerian Schemes with Generalized Multiscale Finite Elements for Enhanced Two- and Three-Phase Flow Simulations,” 2025.
-  Y. Efendiev, J. Galvis y T. Hou, Generalized Multiscale Finite Element Methods (GMsFEM). Cornell University, 2013.
-  E. Abreu, J. François, W. Lambert y J. Pérez, “A class of positive semi-discrete Lagrangian-Eulerian schemes for multidimensional systems of hyperbolic conservation laws,” Journal of Scientific Computing, 2022.

Agradezco a los profesores Juan Galvis (UNAL), Eduardo Abreu (UNICAMP) y Jean François (UECE) por su orientación en este proyecto. Asimismo, expreso mi gratitud a mi compañera Angie Forero (UNAL), cuya colaboración fue fundamental para el desarrollo de este trabajo.