第五章　　数 值 积 分

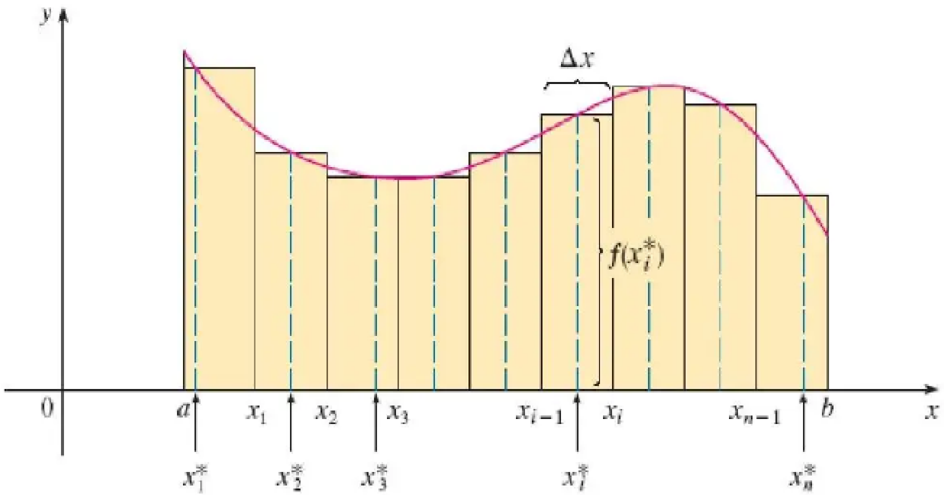
六、例

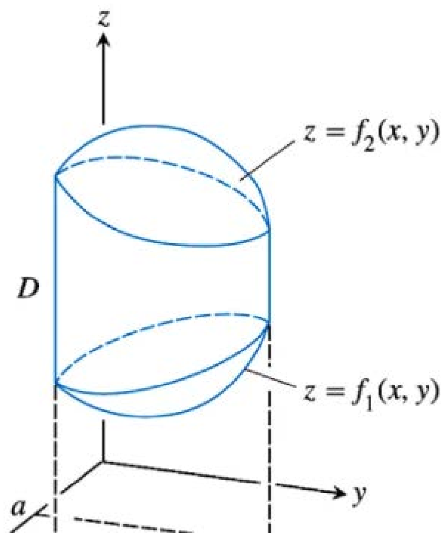
用蒙特卡洛法计算三重积分

$$S=\int_1^2\int_1^2\int_1^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

主程序及计算被积函数值的子程序(文件名：

- 定积分 $\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$





计算多重积分的蒙特卡洛法

一、功能

用蒙特卡洛(Monte Carlo)法计算多重积分

$$S=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\cdots\int_{a_n}^{b_n}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

二、方法说明

取 0 到 1 之间均匀分布的随机数点列

$$(t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \cdots, t_n^{(i)}), i=1, 2, \cdots, m$$

并令

$$x_j^{(i)}=a_j+(b_j-a_j)t_j^{(i)}, j=1, 2, \cdots, n$$

只要 m 足够大,则有

$$S\approx\frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{m}f(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)})\right]\cdot\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$$

在本子程序中,取 $m=10000$。

三、子程序语句

SUBROUTINE FMTML (N,A,B,F,X,S)

四、形参说明

N——整型变量,输入参数。积分的重数。

A——双精度实型一维数组,长度为N,输入参数。积分的下限值 $a_1,a_2,\cdots,a_n$。

B——双精度实型一维数组,长度为N,输入参数。积分的上限值 $b_1,b_2,\cdots,b_n$。

F——双精度实型函数子程序名,输入参数。用于计算被积函数值 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。在主程序中必须用外部语句及类型说明语句对相应的实参进行说明。该子程序由用户自编,其语句形式为

DOUBLE PRECISION FUNCTION F (N,X)

其中:N 为整型变量,被积函数中自变量个数,也是积分的重数;X 为双精度实型一维数组,长度为N,存放自变量值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$;函数名 F 返回双精度实型函数值 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。

X——双精度实型一维数组,长度为N。本子程序的工作数组,用于存放N个自变量值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$。

S——双精度实型变量,输出参数。返回积分值。

```
      PROGRAM EXAMPLES06
      EXTERNAL F
      DIMENSION X(3),A(3),B(3)
      DOUBLE PRECISION X,F,S,A,B
      DATA A,B/3*1.0D0,3*2.0D0/
      N=3
      CALL FMTML(A,B,N,F,X,S)
      WRITE(*,*)
      WRITE(*,10) S
10    FORMAT(1X,'S=',D13.6)
      WRITE(*,*)
      END

      FUNCTION F(N,X)
      DIMENSION X(N)
      DOUBLE PRECISION X,F
      F=0.0D0
      DO 10 I=1,N
10    F=F+X(I)*X(I)
      END
```

运行结果为

S=.697043D+01

七、附注

本子程序需要调用产生0到1之间均匀分布的一个随机数子程序NRND1，

```
SUBROUTINE FMTML(A,B,N,F,X,S)
DOUBLE PRECISION A(N),B(N),F,S,R,X(N),K
REAL M,NRND1
R=1.0D0
```

```
      M=10000.0
      K=10000.0D0
      S=0.0D0
10    IF (M+1.0.NE.1.0) THEN
        M=M-1.0
        DO 20 I=1,N
          X(I)=A(I)+(B(I)-A(I))*NRND1(R)
20      CONTINUE
        S=S+F(N,X)/K
        GOTO 10
      END IF
      DO 30 I=1,N
30    S=S*(B(I)-A(I))
      END
```

```
REAL FUNCTION NRND1(R)
    DOUBLE PRECISION S,U,V,R
    S=65536.0
    U=2053.0
    V=13849.0
    M=R/S
    R=R-M*S
    R=U*R+V
    M=R/S
    R=R-M*S
    NRND1=R/S
    RETURN
    END
```

第七章 二阶微分方程边值问题的数值解法

设二阶微分方程边值问题为

$$\begin{cases} -y'' + \dfrac{2}{x^2}y = \dfrac{1}{x} \\ y(2) = 0,\ y(3) = 0 \end{cases}$$

求解区间为[2,3]，等分数为 $n = 11$（即步长 $h = 0.1$）。其中 $u(x) = -1$, $v(x) = 0$, $w(x) = \dfrac{2}{x^2}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$。

一、功能

用有限差分法求二阶线性微分方程边值问题的数值解。

二、方法说明

设二阶线性微分方程的边值问题为

$$\begin{cases} u(x)y'' + v(x)y' + w(x)y = f(x) \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

现要求未知函数 $y(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的 n 个等距离散点上的近似解。其中 n 个等距离散点为

$$x_i = a + (i-1)h, i = 1,2,\cdots,n$$

$$h = (b-a)/(n-1)$$

显然，$y(x_1) = y(a) = \alpha, y(x_n) = y(b) = \beta$ 。

用中心差分近似代替 $y''(x)$ 与 $y'(x)$，即

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

其中 $y_i = y(x_i)$。将它们代入原微分方程得

$$\frac{u(x_i)}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + \frac{v(x_i)}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + w(x_i)y_i = f(x_i)$$

$$i = 2,3,\cdots,n-1$$

经整理后可得到如下关于 $y_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的方程组：

$$\begin{cases} y_1 = \alpha \\ A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = D_i, i = 2,3,\cdots,n-1 \\ y_n = \beta \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} A_i = u(x_i) - \dfrac{h}{2}v(x_i) \\ B_i = h^2 w(x_i) - 2u(x_i) \\ C_i = u(x_i) + \dfrac{h}{2}v(x_i) \\ D_i = h^2 f(x_i) \end{cases}$$

用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} B_1 & C_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{n-1} & B_{n-1} & C_{n-1} \\ & & & A_n & B_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{n-1} \\ D_n \end{bmatrix}$$

其中 $B_1 = 1, C_1 = 0, D_1 = \alpha; A_n = 0, B_n = 1, D_n = \beta$。

此为三对角线方程组，可用追赶法求解。

在实际计算时，为了提高精度，采用如下方法：

用步长 $h = (b-a)/(n-1)$ 计算得到 $n-2$ 个等距离散点上的一组近似解

$$y_i^{(h)} = y_i(a + (i-1)h), i = 2, 3, \cdots, n-1$$

再用步长 $\frac{h}{2} = (b-a)/(2(n-1))$ 计算得到 $n-2$ 个等距 离散点上的另一组近似

解

$$y_i^{(h/2)} = y_i(a + (i-1)h), i = 2, 3, \cdots, n-1$$

最后令

$$y_i = \frac{4y_i^{(h/2)} - y_i^{(h)}}{3}, i = 2, 3, \cdots, n-1$$

程序代码：

SUBROUTINE GDFTE(A,B,Y0,YN,N,Y,FS,N2,N6,G,D)

四、形参说明

A,B——均为双精度实型变量，输入参数。求解区间的左端点与右端点值。

Y0,YN——均为双精度实型变量，输入参数。未知函数在求解区间左、右端点处的函数值 $y(A)$ 与 $y(B)$。

N——整型变量，输入参数。求解区间[A,B]上的等分点数，即各等分点为

$$h=(B-A)/(N-1)$$

$$x_i=A+(i-1)h, i=1,2,\cdots,N$$

Y——双精度实型一维数组，长度为N，输出参数。存放N个等分点上的未知函数值，即

$$y_i=y(x_i), i=1,2,\cdots,N$$

FS——子程序名，输入参数。用于计算微分方程

$$u(x)y''+v(x)y'+w(x)y=f(x)$$

中的函数 $u(x)$，$v(x)$，$w(x)$，$f(x)$ 的值。在主程序中必须用外部语句对相应的实参进行说明。该子程序由用户自编，其语句形式为

SUBROUTINE FS(X,U,V,W,F)

其中：X,U,V,W,F 均为双精度实型变量，X 为自变量值，U,V,W,F 分别返回 $u(x)$，$v(x)$，$w(x)$，$f(x)$ 的值。

N2——整型变量，输入参数。要求 N2=2 * N。

N6——整型变量，输入参数。要求 N6=6 * N。

G——双精度实型一维数组，长度为N6。本子程序的工作数组。

D——双精度实型一维数组，长度为N2。本子程序的工作数组。

PROGRAM GDFTE0

```
EXTERNAL FS
 DIMENSION Y(11),G(66),D(22)
 DOUBLE PRECISION Y,A,B,Y0,YN,G,D
 A=2.0
 B=3.0
 N=11
 N2=22
 N6=66
 Y0=0.0
 YN=0.0
 CALL GDFTE(A,B,Y0,YN,N,Y,FS,N2,N6,G,D)
 WRITE(*,*)
 WRITE(*,10) (I,Y(I),I=1,N)
10 FORMAT(1X,'Y(',I2,' )=',D15.6)
```

```
WRITE(*,*)

END PROGRAM


SUBROUTINE FS(X,U,V,W,F)

DOUBLE PRECISION X,U,V,W,F

U=-1.0

V=0.0

W=2.0/(X*X)

F=1.0/X

RETURN

END SUBROUTINE
```

运行结果为：

y(0) = 0.00000e + 00
y(1) = 1.86090e - 02
y(2) = 3.25359e - 02
y(3) = 4.20480e - 02
y(4) = 4.73684e - 02
y(5) = 4.86842e - 02
y(6) = 4.61538e - 02
y(7) = 3.99123e - 02
y(8) = 3.00752e - 02
y(9) = 1.67423e - 02
y(10) = 0.00000e + 00

本问题的解析解为

$$y(x) = \left(19x - 5x^2 - \frac{36}{x}\right)/38$$

```
SUBROUTINE GDFTE(A,B,Y0,YN,N,Y,FS,N2,N6,G,D)
    DIMENSION Y(N),G(N6),D(N2)
    DOUBLE PRECISION Y,G,D,A,B,Y0,YN,H,X,U,V,W,F
    H=(B-A)/(N-1.0)
    NN=2*N-1
    G(1)=1.0
    G(2)=0.0
    Y(1)=Y0
    Y(N)=YN
    G(3*N-2)=1.0
    G(3*N-3)=0.0
    DO 10 I=2,N-1
       X=A+(I-1)*H
       CALL FS(X,U,V,W,F)
       K=3*(I-1)-1
```

```
      G(K+1)=U-H*V/2.0
      G(K+2)=H*H*W-2.0*U
      G(K+3)=U+H*V/2.0
      Y(I)=H*H*F
10    CONTINUE
      M1=3*N-2
      CALL ATRDE(G,N,M1,Y,L)
      H=H/2.0
      G(1)=1.0
      G(2)=0.0
      D(1)=Y0
      D(NN)=YN
      G(3*NN-2)=1.0
      G(3*NN-3)=0.0
      DO 20 I=2,NN-1
```

```
      X=A+(I-1)*H
      CALL FS(X,U,V,W,F)
      K=3*(I-1)-1
      G(K+1)=U-H*V/2.0
      G(K+2)=H*H*W-2.0*U
      G(K+3)=U+H*V/2.0
      D(I)=H*H*F
20  CONTINUE
    M1=3*NN-2
    CALL ATRDE(G,NN,M1,D,L)
    DO 30 I=2,N-1
      K=2*I-1
      Y(I)=(4.0*D(K)-Y(I))/3.0
30  CONTINUE
    RETURN
```

END

三对角线方程组的追赶法求解AX=D

追赶法本质上是没有选主元的高斯消去法，只是在计算过程中考虑到了三对角矩阵的特点，对于绝大部分的零元素不再作处理。

三、子程序语句

SUBROUTINE ATRDE(B,N,M,D,L)

四、形参说明

B——双精度实型一维数组，长度为 M=3*N−2，输入参数。以行为主存放三对角矩阵 A 中三条对角线上的元素，即在 B 中依次存放元素：

$$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},a_{23},a_{32},a_{33},a_{34},\cdots,a_{n,n-1},a_{nn}$$

返回时该数组将被破坏。

N——整型变量，输入参数。方程组阶数。

M——整型变量，输入参数。M=3*N−2 为三对角矩阵三条对角线上的元素个数。

D——双精度实型一维数组，长度为 N，输入兼输出参数。调用时存放方程组右端的常数向量；返回方程组的解向量。

L——整型变量，输出参数。若返回 L<0，说明 M 的值不正确(应为 M=3*N−2)；若 L=0，说明程序工作失败；若 L>0，表示正常返回。

```
SUBROUTINE ATRDE(B,N,M,D,L)
      DIMENSION B(M),D(N)
      DOUBLE PRECISION B,D
      L=1
      IF (M.NE.(3*N-2)) THEN
        L=-1
        WRITE(*,10)
        RETURN
      END IF
10    FORMAT(1X,'    ERR    ')
      DO 20 K=1,N-1
        J=3*K-2
        IF (ABS(B(J))+1.0.EQ.1.0) THEN
          L=0
          WRITE(*,10)
```

```
        RETURN
      END IF
      B(J+1)=B(J+1)/B(J)
      D(K)=D(K)/B(J)
      B(J+3)=B(J+3)-B(J+2)*B(J+1)
      D(K+1)=D(K+1)-B(J+2)*D(K)
20  CONTINUE
    IF (ABS(B(3*N-2))+1.0.EQ.1.0) THEN
      L=0
      WRITE(*,10)
      RETURN
    END IF
    D(N)=D(N)/B(3*N-2)
    DO 30 K=N-1,1,-1
      D(K)=D(K)-B(3*K-1)*D(K+1)
```

```
30 CONTINUE
   RETURN
   END
```