

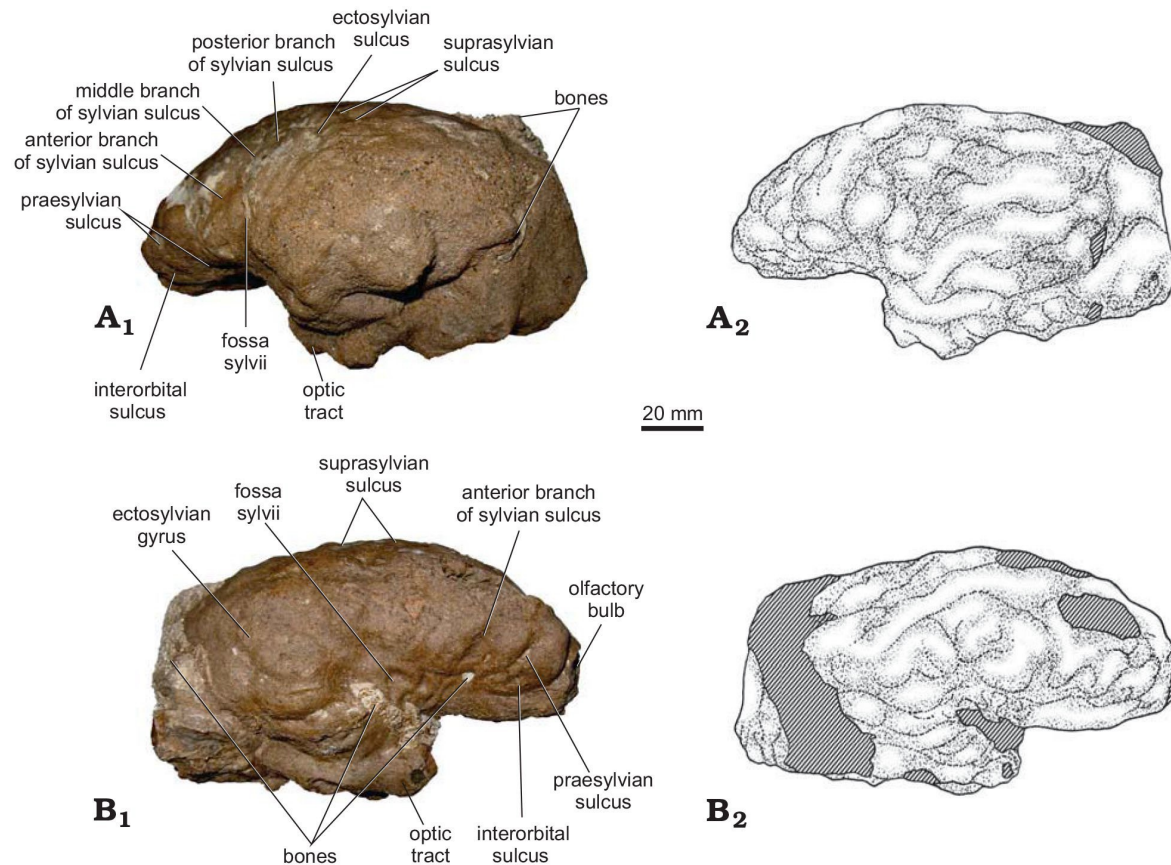
# 수의 흔적

자연과학융합세미나

김민형

# 뇌의 진화

- 두개골 내부 주형 (endocast)



Y. Hu et al., *Pleistocene Equid Brain Endocast from Shanxi Province, China*, Acta Palaeontologica Polonica, 59(2):253-258 (2014).

# 뇌의 진화

- 현생 인류는 30만년 전 탄생했으나 뇌의 형태는 확립되지 않음
- 인류의 뇌는 대략 10만년 전에서 3만5000년 전 사이에 현재와 같은 형태를 갖추
- 그 결과 약 5만년 전 후기 구석기 시대가 도래
  - 행동학적 현대성 (장식, 장신구, 안료, 석기 기술, 예술)
  - 기호와 상징의 사용

# 인류의 진화

- 3만년 전 즈음 유럽에서 네안데르탈인 거의 멸종
- 1만2000년 전 신석기 혁명
  - 농경과 정착, 최초의 도시 발생
- 기원전 4000년 경
  - 메소포타미아 문명 – 수 표기 체계를 갖추
- 기원전 3000년 청동기 도래

# 언어와 수 상징

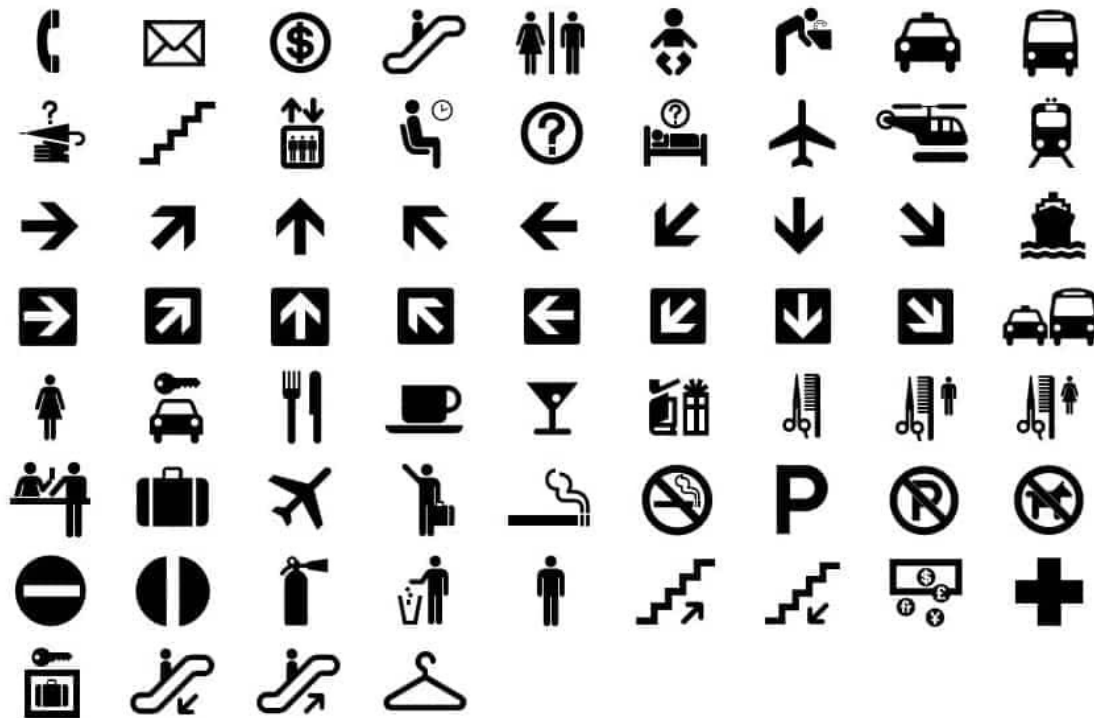
- Lambros Malafouris – “Material Engagement Theory” (물질적 관여 이론)
- 언어가 아닌 물질적 인공품만이 '표상 안정성'을 가짐
  - 수량 개념은 일단 물질적 형식으로 외현화(外現化)되고 난 이후에 유형화됨
  - 유형화를 통해 더 명시적이고 조작 가능해지며, 개인·세대간에 더 자유롭게 공유될 수 있음

# 수 기호의 종류

- Charles Sanders Peirce – 기호의 3단계 구분
- 도상(icon)
- 지표(index)
- 상징(symbol)

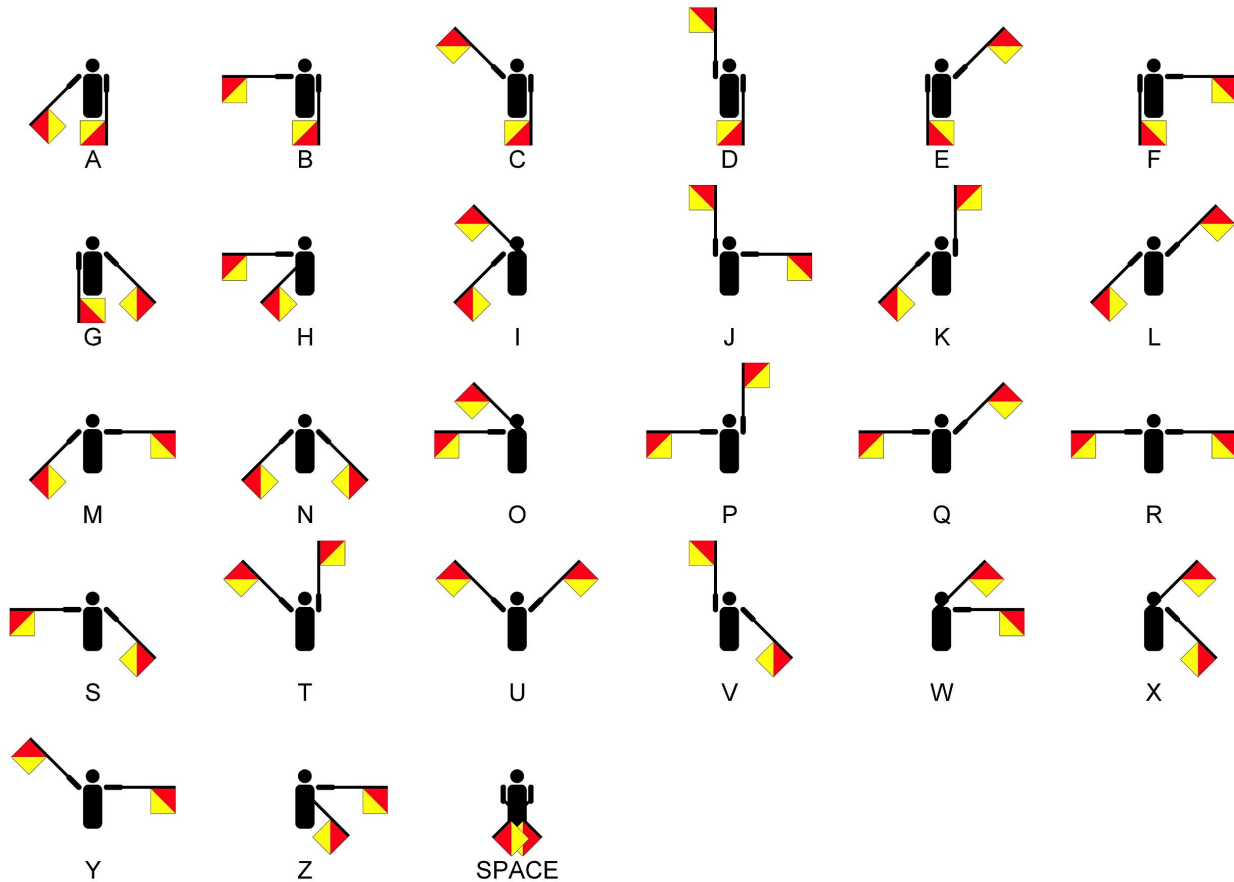
# 도상 (icon)

- 기호와 대상 간의 유사성에 근거한 참조



# 지표 (index)

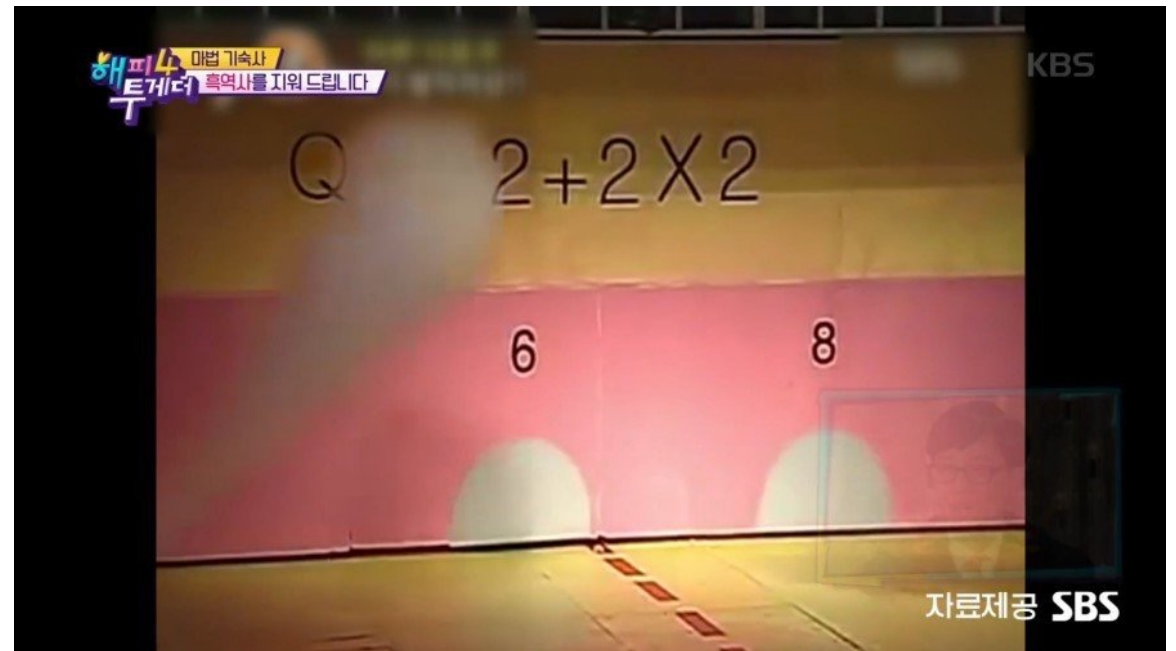
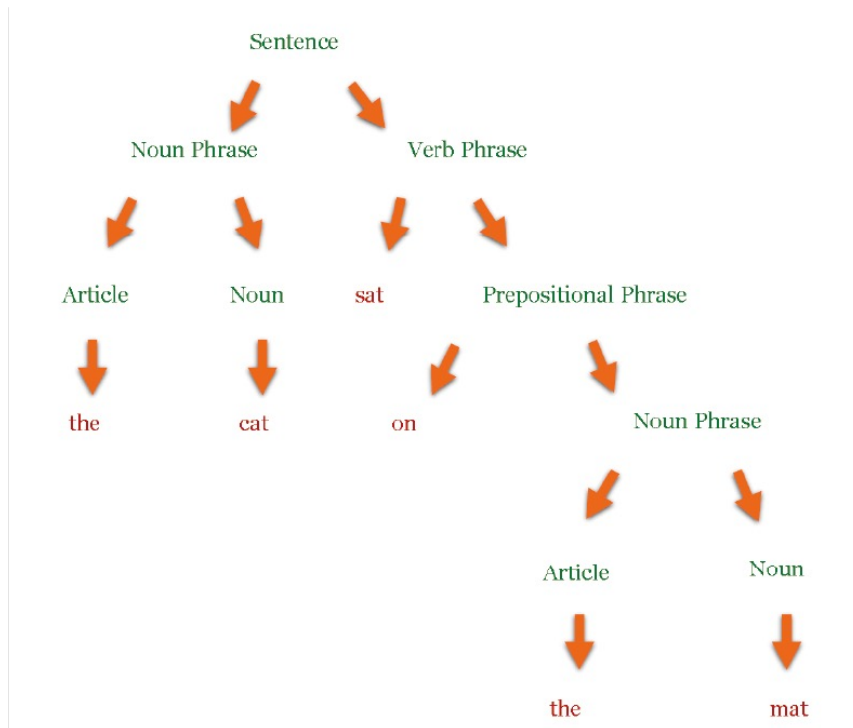
- 기호와 대상 간의 유사성 부재, 기호 체계를 이루지 않음





# 상징 (symbol)

- 상징적 참조는 개별 기호-대상 사이의 관계가 아니라 기호-기호 관계들 사이의 연결
- 상징은 기호 체계를 이루고, 구문론(syntax)을 가짐 → 인간 특이적

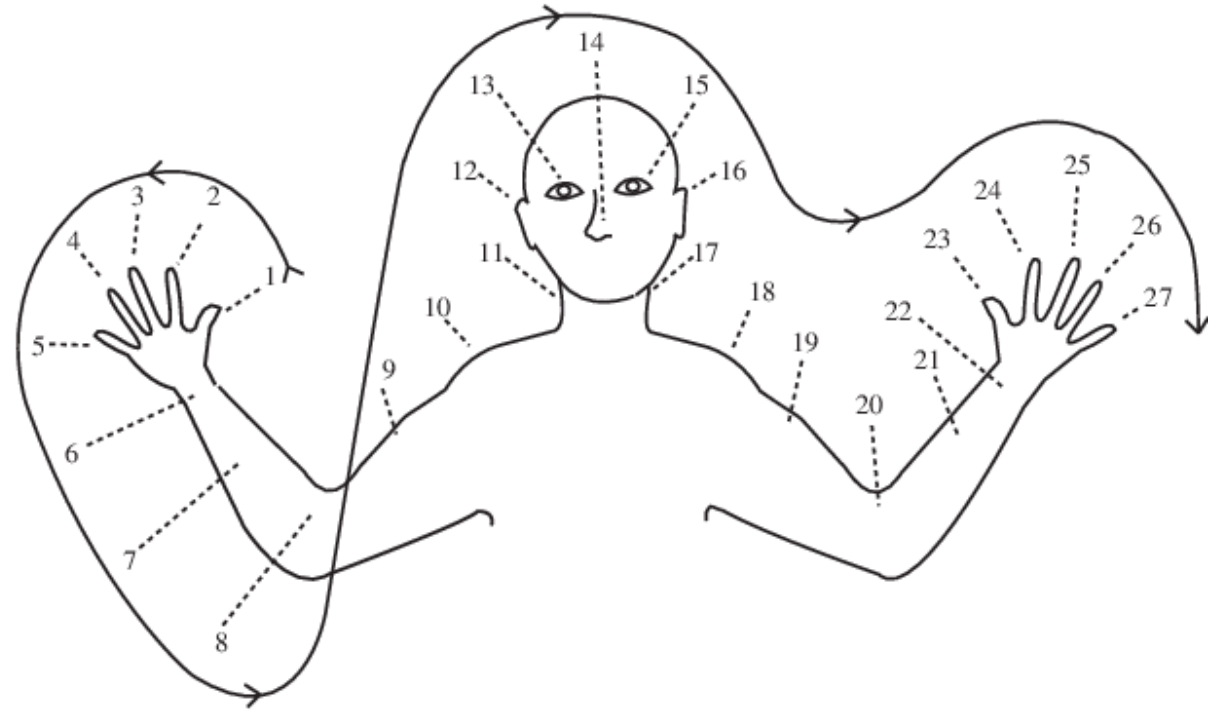


# 수 상징의 발명

- 최초의 도상: 손가락
  - 손가락을 이용한 도상은 영구적인 흔적이 남지 않음 (즉, 기록 불가)
- 엄대(tally stick)를 이용한 도상
  - 새겨진 자국이 집합의 원소 하나에 대응
  - Lebombo bone (4만4000년 전), Wolf bone (3만년 전), Ishango bone (2만년 전)

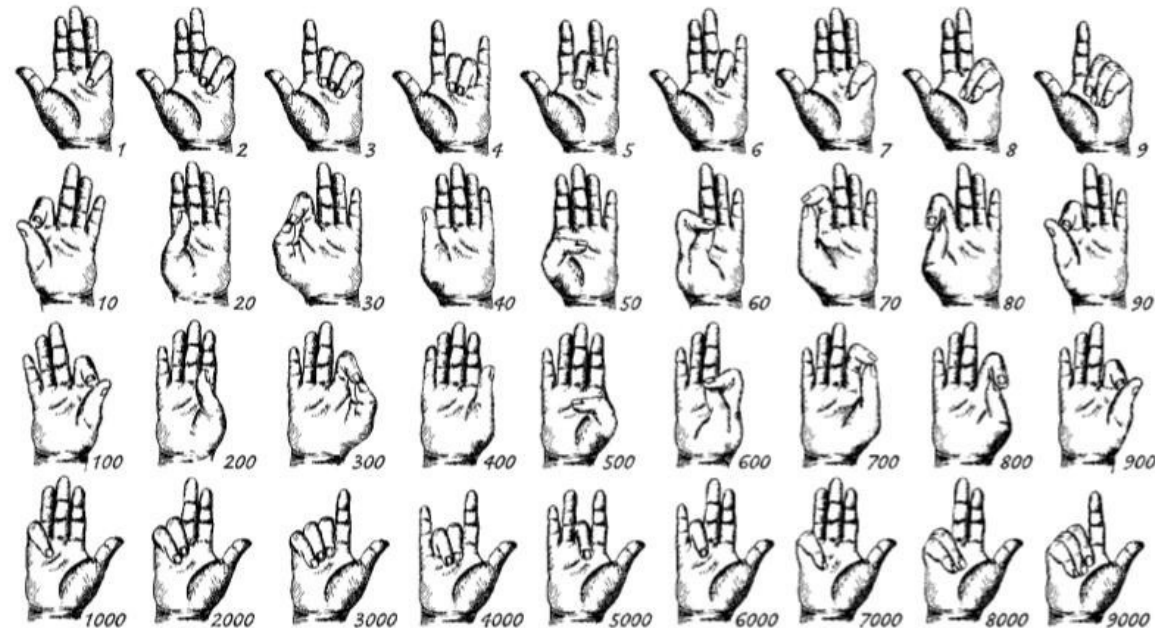
# 수 상징의 발명

- 최초의 도상: 손가락
- 10을 넘는 수에 대한 표상: 신체 부위 사용
  - 이는 도상적 기호에서 지표적 기호로의 전환임



# 지표적 수 기호

- 매듭의 사용 (잉카 문명의 quipu)
- Venerable Bede의 손가락 기호 (도상 → 지표로의 전환)



# 지표적 수 기호

- 언어의 지표적 성질
- Chaap Wurrong족이 사용하는 수호 단어
  - 4 = 2와 2
  - 5 = 한 손
  - 6 = 손가락 하나와 한손
  - 10 = 두 손
- 러시아어
  - 40 cóпок = sekr(양모), 양모가 40개 단위로 거래되었기 때문

# 시각적 수 상징

- 엄대에 새긴 표식(도상)으로부터 발전
- 비위치 수 (non-positional number)
  - 고대 이집트, 그리스, 로마 등
  - 기호는 단순히 수를 표상하기 위해 추가됨
  - 산술 계산에 부적합

# 시각적 수 상징

- 위치 표기 체계 (positional notation system) / 자릿값 체계 (place value system)
- 효과적인 자릿값 체계는 양수의 부재를 나타내는 부호 필요
  - 0의 발명

# 어린이들의 수 표상 - 도상적 단계

- 손가락 셈하기
  - 능숙한 손가락 사용이 수학 성취도의 예측 변수인 것으로 밝혀짐
  - 손가락 표상과 심적 연산은 뇌에서 공통된 두정엽 기질을 공유함
  - 게르스트만 증후군
    - 필기불능증, 좌우지남력장애, 계산불능증, 손가락 인식 불능증



# 어린이들의 수 표상 - 도상적 단계

- 언어적 도상
- 집합의 각 원소마다 단어를 하나씩 할당
  - 각 단어가 의미하는 바는 중요하지 않음
  - 이 순서의 마지막 단어가 전체 집합의 원소 수를 나타냄을 이해하지 못함
- 비인간 영장류도 임의적 (시각적) 목록을 학습할 수 있음

# 어린이들의 수 표상 – 지표적 단계

- 기수와 특정 시각적 형태의 결합
- 각각의 시각적 형태는 독자적으로 특정 기수를 나타냄
- 기호들은 한 체계에 속하는 상징으로 이해되지 않음

# 어린이들의 수 표상 – 상징적 단계

- 수효 단어(기호)와 기수 값을 연관시키는 과정을 숫자 4까지 반복
- 숫자 4보다 큰 수에 대해서는 뚜렷한 상한 없이 셈하기 절차를 일반화하여 적용
- 숫자 순열에서 연속된 숫자는 그 값이 차례로 1씩 증가한다는 사실을 이해 (계승 관계)
  - 기호가 상징체계의 일부로 간주됨

# 어린이들의 수 표상 – 상징적 단계

- 산술, 계산 절차를 통해 수 지식의 확장 가능 (분수, 영, 음수...)
- 수 상징은
  - 일단 습득되고 난 이후에는 기수의 순서열을 상징하는 수학적 대상으로 간주될 수 있다
  - 상징의 외형과 소리는 임의적이며 문화에 의해 정의됨 → 비상징적 표상과는 다른 범주에 속한다?
  - 하지만 수 상징은 비상징적 수량 표상을 토대로 형성되며, 근본적인 유사성을 공유한다

# 동물과 수 기호

- 도상적 기호의 사용은 드물지 않음
  - 야생 버빗원숭이의 경고음 (독수리 신호, 표범 신호, 뱀 신호)
- 지표적 기호의 사용은 매우 드뭄
  - '디' 음의 횟수를 통해 천적의 위험성을 알리는 쇠박새

# 동물과 수 기호

- 회색앵무 '알렉스'
  - 물체의 이름과 수량을 모두 음성으로 대답
  - 불균질한 집합체의 하위 집합에 포함된 사물의 개수를 대답
  - 물체들에 그 이름표를 정확하게 옮김
- 그러나 학습된 이름표나 표현된 문장을 재배열한 적은 없음
  - 또다른 지평이긴 하나 **도상적 기호**의 수준이며, 상징적 수 이해는 아님

# 동물과 수 기호

- 시행착오를 통해 수량을 임의적인 시각적 형태와 연결
- 오류를 범한 시도에서 수치 거리 효과가 나타남 → 기호를 근사 수치 표상과 연관
- 그러나 근사적인 방식으로만 수량과 형태를 연관지음 (베버의 법칙)
  - 수 기호는 수량 판별 능력을 개선시키지 않음 (근사적인 수량값에 대한 자리 표시자에 불과)
  - 성과는 목표 숫자가 점차 커짐에 따라 체계적으로 감소
  - 성과함수는 수량값이 늘어남에 따라 그 범위가 점차 확대

# 동물과 상징적 수리 능력

- 침팬지 아이(Ai)
- 터치스크린에 표시된 점을 아라비아 숫자와 대응
- 수량 간의 서수 관계 이해 (오름차순으로 수량을 차례대로 터치할 수 있음)
- 그러나 학습 과정에서 인간 어린이와 근본적인 차이 있음



# 동물과 상징적 수리 능력

- 침팬지 아이는 학습할 때에  $n$ 과  $n+1$ 을 오직 확률적 수준으로 구분
- 즉,  $n$ 을 학습할 때  $n$  이상의 모든 값과 연관
- 집합에 추가된 숫자 기호가 특정 수량과 정확히 연관된다는 것을 이해하지 못함
- 인간 어린이들은 4 이후로는 새로 추가되는 기호가 정확히  $n+1$ 이라는 개념을 이해

# 재귀

- 아이는 자신이 순서가 있는 수량의 목록을 다루고 있다는 사실을 이해하지 못함
  - 계승 관계에 대한 이해 불가 → 상징이 아니라 지표에 불과
- 아이가 재귀(recursion) 개념을 결여하고 있을 가능성
- 재귀를 이해하는 능력은 오래전부터 인간과 동물을 구별하는 특징 중 하나로 간주됨
- 즉, 수 인지에서 상징적 능력은 인간 특유의 기능으로 보임.



정의

## 자연수의 정의

Def-001

- (1) 제로(zero)는 자연수이다.
- (2) 모든 자연수는 “다음 숫자”라고 불리는 단 하나의 자연수를 갖는다.
- (3) (1)과 (2)에서 정의된 것만이 자연수이다.