制御工学 I 演習① 解答

1. 以下の式に関するラプラス逆変換を求めよ．

(1) $G_1(s) = \dfrac{4}{s+5}$

(2) $G_2(s) = \dfrac{s+7}{s^2+2s+5}$

(3) $G_3(s) = \dfrac{1}{s^3+11s^2+40s+48}$

(4) $G_4(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$ [Tは定数]

(5) $G_5(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$

(6) $G_6(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

1. (1) $G_1(s) = \frac{4}{s+5}$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+5}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = 4e^{-5t}$$

1. (2) $G_2(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$

$$G_2(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$$
$$\Leftrightarrow G_2(s) = \frac{(s+1)+6}{(s+1)^2+2^2}$$
$$\Leftrightarrow G_2(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{6}{(s+1)^2+2^2}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_2(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+1)^2+2^2}\right]$$
$$\Leftrightarrow g_2(t) = e^{-t}cos(2t) + 3e^{-t}sin(2t)$$

1. (3) $G_3(s) = \frac{1}{s^3+11s^2+40s+48}$

$$
\begin{aligned}
G_3(s) &= \frac{1}{s^3+11s^2+40s+48} \\
\Leftrightarrow G_3(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+4)^2} \\
\Leftrightarrow G_3(s) &= \frac{1}{s+3} + \frac{-1}{s+4} + \frac{-1}{(s+4)^2} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[G_3(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+4)^2}\right] \\
\Leftrightarrow g_3(t) &= e^{-3t} - e^{-4t} - te^{-4t}
\end{aligned}
$$

1. (4) $G_4(s) = \frac{1}{Ts+1}$

$$
\begin{aligned}
G_4(s) &= \frac{1}{Ts+1} \\
\Leftrightarrow G_4(s) &= \frac{(\frac{1}{T})}{s+(\frac{1}{T})}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[G_4(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\frac{1}{T})}{s+(\frac{1}{T})}\right] \\
\Leftrightarrow g_4(t) &= \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}
\end{aligned}
$$

1. (5) $G_5(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$

$$
\begin{aligned}
G_5(s) &= \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2} \\
\Leftrightarrow G_5(s) &= \frac{\frac{1}{18}}{s} + \frac{(-\frac{1}{2})}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{s+3}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[G_5(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{18}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-\frac{1}{2})}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{4}{9}}{s+3}\right] \\
\Leftrightarrow g_5(t) &= \frac{1}{18} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{4}{9}e^{-3t} \\
\Leftrightarrow g_5(t) &= \frac{1}{18}\left(1 - 9e^{-2t} + 8e^{-3t} + 6te^{-3t}\right)
\end{aligned}
$$

1. (6) $G_6(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$$G_6(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$
$$\Leftrightarrow G_6(s) = \frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_6(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}\right]$$
$$\Leftrightarrow g_6(t) = \frac{1}{3}sint - \frac{1}{6}sin2t$$

2. $\ddot{y}(t) - (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0$ を解け。ただし、$y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ とする。

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\left[\ddot{y}(t) - (a+b)\dot{y}(t) + aby(t)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right\} - (a+b)\left\{sY(s) - y(0)\right\} + abY(s) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{s^2 - (a+b)s + ab\right\}Y(s) - s + (a+b) = 0$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s-(a+b)}{s^2-(a+b)s+ab}$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s-(a+b)}{(s-a)(s-b)}$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)}\right]$$
$$\Leftrightarrow y(t) = -\frac{b}{a-b}e^{at} + \frac{a}{a-b}e^{bt}$$

3. $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+2x(t)=1$ を解け。ただし、$x(0)=0, \dot{x}(0)=1$ とする。

両辺にラプラス変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\right]=\mathcal{L}\{1\}\\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2X(s)-sx(0)-x^{(1)}(0)\right\}+2\left\{sX(s)-x(0)\right\}+2X(s)=\frac{1}{s}\\
\Leftrightarrow\ &s^2X(s)-1+2sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s}\\
\Leftrightarrow\ &s^2X(s)+2sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s}+1\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}+\frac{1}{s^2+2s+2}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}+\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right\}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2}\left\{1-e^{-t}(\cos t-\sin t)\right\}
$$

4. $\dot{x}(t)+3x(t)=\sin 2t$ を解け。ただし、$x(0)=0$ とする。

両辺にラプラス変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}+3\mathcal{L}x(t)\right]=\mathcal{L}\{\sin 2t\}\\
\Leftrightarrow\ &sX(s)-x(0)+3X(s)=\frac{2}{s^2+4}\\
\Leftrightarrow\ &sX(s)+3X(s)=\frac{2}{s^2+4}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{2}{(s+3)(s^2+4)}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{2}{13}\left(\frac{1}{s+3}+\frac{3}{s^2+4}-\frac{s}{s^2+4}\right)\quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{13}\left(\frac{1}{s+3}+\frac{3}{s^2+4}-\frac{s}{s^2+4}\right)\right]\\
\Leftrightarrow\ &x(t)=\frac{1}{13}\left(2e^{-3t}+3\sin 2t-2\cos 2t\right)
\end{aligned}
$$

5. あるシステムの微分方程式が $A\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Cy(t) = 1$ で表現できるとき、各パラメータを $A = 0.5, B = -0.5, C = -6,$ 初期条件を $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$ として、$y(t)$ を求めよ。

$$
\begin{aligned}
& A\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Cy(t) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2} \cdot \ddot{y}(t) - \frac{1}{2} \cdot \dot{y}(t) - 6y(t) = 1 \\
\Leftrightarrow\ & \ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 12y(t) = 2
\end{aligned}
$$

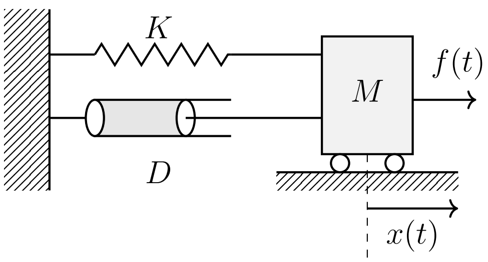
両辺にラプラス変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}\left[\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 12y(t)\right] = \mathcal{L}\left[2\right] \\
\Leftrightarrow\ & \left\{s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right\} - \left\{sY(s) - y(0)\right\} - 12Y(s) = \frac{2}{s} \\
\Leftrightarrow\ & \left\{s^2 - s - 12\right\} Y(s) - s + 1 = \frac{2}{s} \\
\Leftrightarrow\ & Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s^2 - s - 12)} \\
\Leftrightarrow\ & Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s+3)(s-4)} \\
\Leftrightarrow\ & Y(s) = \frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4} \quad \left[\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}\right]
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4}\right] \\
\Leftrightarrow\ & y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{4t}
\end{aligned}
$$

6. 以下の問いに答えよ。なお、システムの入力を外力 $f(t)$、出力を変位 $x(t)$ とする。なお、初期値はすべて 0 とする。



(1) この図によって示されるシステムの運動方程式を求めよ。

(2) 各パラメータを $M = 1, D = 3, K = 2, f(t) = 1$ として、$x(t)$ を求めよ。

(3) (2) で求めた $x(t)$ の概形を描け。なお、グラフの横軸を時間 t、縦軸を変位 $x(t)$ とする。

6.(1) この図によって示されるシステムの運動方程式を求めよ。

運動方程式は

$$M\ddot{x}(t) = -Kx(t) - D\dot{x}(t) + f(t)$$

6.(2) 各パラメータを $M = 1, D = 3, K = 2, f(t) = 1$ として、$x(t)$ を求めよ。

$$\begin{aligned} & M\ddot{x}(t) = -Kx(t) - D\dot{x}(t) + f(t) \\ \Leftrightarrow\ & M\ddot{x}(t) + Kx(t) + D\dot{x}(t) = f(t) \\ \Leftrightarrow\ & \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 1 \end{aligned}$$

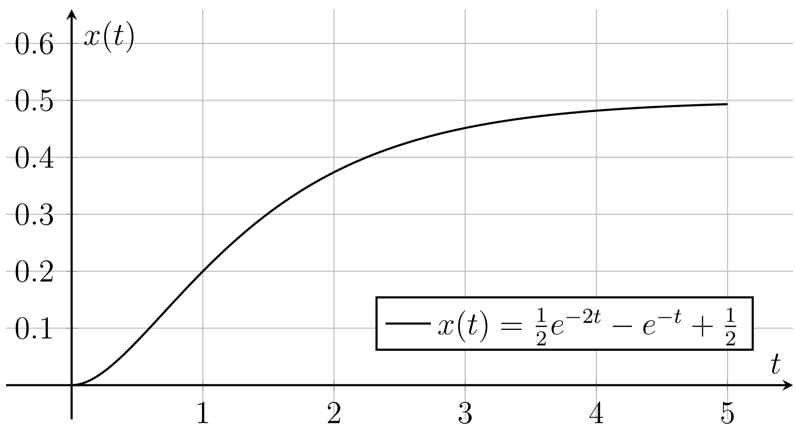
両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}\left[\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t)\right] = \mathcal{L}\left[1\right] \\ \Leftrightarrow\ & \left\{s^2X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0)\right\} + 3\left\{sX(s) - x(0)\right\} + 2X(s) = \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow\ & \left\{s^2 + 3s + 2\right\}X(s) = \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} \\ \Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \\ \Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} \qquad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}] \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}\right] \\ \Leftrightarrow\ & x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6.(3) (2) で求めた $x(t)$ の概形を描け。なお、グラフの横軸を時間 t、縦軸を変位 $x(t)$



7. 初期値を $\dot{x}(0)=0, x(0)=1$ とするとき、微分方程式 $\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)=0$ を解け。

両辺にラプラス変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)\right]=\mathcal{L}\left[0\right]\\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)\right\}+\left\{sX(s)-x(0)\right\}+X(s)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2+s+1\right\}X(s)-s-1=0\\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2+s+1\right\}X(s)=s+1\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]\\
\Leftrightarrow\ &x(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}
\end{aligned}
$$

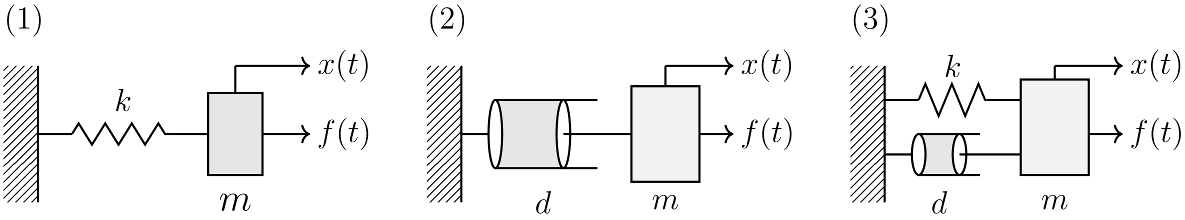
8. $F(s)=\frac{1}{s(s+1)^2}$ をラプラス逆変換せよ。

$$
\begin{aligned}
&X(s)=\frac{1}{s(s+1)^2}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{1}{s}+\frac{-1}{s+1}+\frac{-1}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

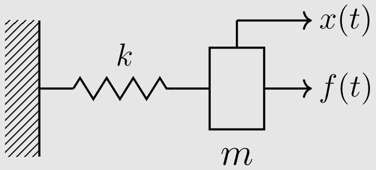
両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)^2}\right]\\
\Leftrightarrow\ &x(t)=1-e^{-t}-te^{-t}
\end{aligned}
$$

9. 下図で表される物理モデルに対する微分方程式を求め、ラプラス変換を行え。



9.(1)



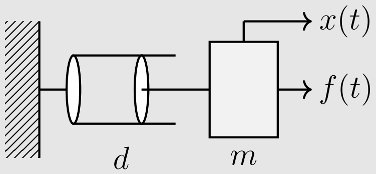
運動方程式は

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}(t) = -kx(t) + f(t) \\
\Leftrightarrow\ &m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t)
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス変換を施すと

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[m\ddot{x}(t) + kx(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\Leftrightarrow\ &m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + kX(s) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ &(ms^2 + k)X(s) - mx(0)s - m\dot{x}(0) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ &(ms^2 + k)X(s) = F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) \\
\Leftrightarrow\ &X(s) = \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k}
\end{aligned}
$$

9.(2)



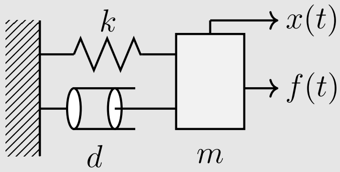
運動方程式は

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}(t) = -d\dot{x}(t) + f(t) \\
\Leftrightarrow\ &m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) = f(t)
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス変換を施すと

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\Leftrightarrow\ &m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + d\left\{sX(s) - x(0)\right\} = F(s) \\
\Leftrightarrow\ &(ms^2 + ds)X(s) - mx(0)s - m\dot{x}(0) - dx(0) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ &(ms^2 + ds)X(s) = F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0) \\
\Leftrightarrow\ &X(s) = \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0)}{ms^2 + ds}
\end{aligned}
$$

9.(3)



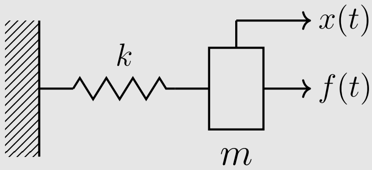
運動方程式は

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x}(t) = -kx(t) - d\dot{x}(t) + f(t) \\
\Leftrightarrow\ & m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス変換を施すと

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}\left[m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\Leftrightarrow\ & m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + d\left\{sX(s) - x(0)\right\} + kX(s) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ & (ms^2 + ds + k)X(s) - mx(0)s - m\dot{x}(0) - dx(0) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ & (ms^2 + ds + k)X(s) = F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0) \\
\Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0)}{ms^2 + ds + k}
\end{aligned}
$$

10. 下図の物理モデルにおいて、$f(t)$ に単位ステップ入力を印加するとき、$x(t)$ を求めよ。なお、$m = 9, k = 1$ とし、初期値をすべて 0 とする。



9(1) と同様にして運動方程式は

$$
m\ddot{x}(t) = -kx(t) + f(t)
$$

両辺にラプラス変換を施すと

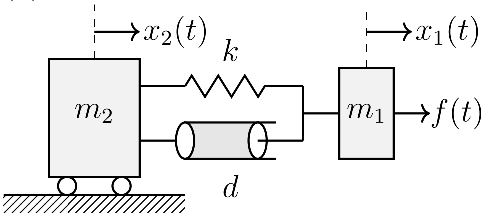
$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}\left[m\ddot{x}(t) + kx(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\Leftrightarrow\ & m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + kX(s) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k} \\
\Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{1}{s(9s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{9s}{9s^2 + 1}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと

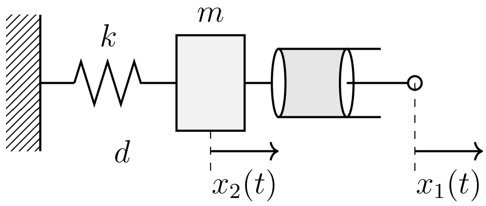
$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{1}{9}}\right] \\
\Leftrightarrow\ & x(t) = 1 - \cos\left(\frac{t}{3}\right)
\end{aligned}
$$

11. 下図で表される物理モデルに対する微分方程式を求めよ。

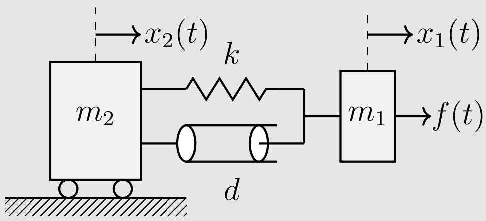
(1)



(2)



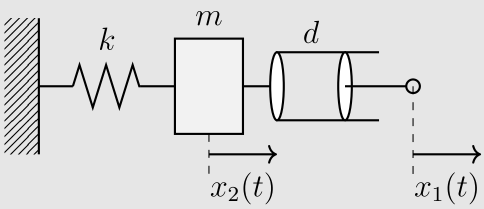
11.(1)



運動方程式は

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) = -k\left\{x_1(t) - x_2(t)\right\} - d\left\{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right\} + f(t) \\ m_2\ddot{x}_2(t) = k\left\{x_1(t) - x_2(t)\right\} + d\left\{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right\} \end{cases}$$

11.(2)



運動方程式は

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1(t) = -d\left\{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right\} \\ m\ddot{x}_2(t) = -kx_2(t) + d\left\{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right\} \end{cases}$$