制御工学 I 演習② 解答
2025/06/11
Yudai

1. 以下の式に関するラプラス逆変換を求めよ．

(1) $G_1(s) = \dfrac{4}{s+5}$ (2) $G_2(s) = \dfrac{s+7}{s^2+2s+5}$

(3) $G_3(s) = \dfrac{1}{s^3+11s^2+40s+48}$ (4) $G_4(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$ [Tは定数]

(5) $G_5(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$ (6) $G_6(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

1. (1) $G_1(s) = \dfrac{4}{s+5}$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+5}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = 4e^{-5t}$$

1. (2) $G_2(s) = \dfrac{s+7}{s^2+2s+5}$

$$G_2(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$$
$$\Leftrightarrow G_2(s) = \frac{(s+1)+6}{(s+1)^2+2^2}$$
$$\Leftrightarrow G_2(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{6}{(s+1)^2+2^2}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_2(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+1)^2+2^2}\right]$$
$$\Leftrightarrow g_2(t) = e^{-t}cos(2t) + 3e^{-t}sin(2t)$$

1. (3) $G_3(s) = \dfrac{1}{s^3 + 11s^2 + 40s + 48}$

$$
\begin{aligned}
& G_3(s) = \frac{1}{s^3 + 11s^2 + 40s + 48} \\
\Leftrightarrow\ & G_3(s) = \frac{1}{(s+3)(s+4)^2} \\
\Leftrightarrow\ & G_3(s) = \frac{1}{s+3} + \frac{-1}{s+4} + \frac{-1}{(s+4)^2} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\left[G_3(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+4)^2}\right] \\
\Leftrightarrow\ & g_3(t) = e^{-3t} - e^{-4t} - te^{-4t}
\end{aligned}
$$

1. (4) $G_4(s) = \dfrac{1}{Ts + 1}$

$$
\begin{aligned}
& G_4(s) = \frac{1}{Ts+1} \\
\Leftrightarrow\ & G_4(s) = \frac{(\frac{1}{T})}{s + (\frac{1}{T})}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\left[G_4(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\frac{1}{T})}{s + (\frac{1}{T})}\right] \\
\Leftrightarrow\ & g_4(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}
\end{aligned}
$$

1. (5) $G_5(s) = \dfrac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$

$$
\begin{aligned}
& G_5(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2} \\
\Leftrightarrow\ & G_5(s) = \frac{\frac{1}{18}}{s} + \frac{(-\frac{1}{2})}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{s+3}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}^{-1}\left[G_5(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{18}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-\frac{1}{2})}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{4}{9}}{s+3}\right] \\
\Leftrightarrow\ & g_5(t) = \frac{1}{18} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{4}{9}e^{-3t} \\
\Leftrightarrow\ & g_5(t) = \frac{1}{18}\left(1 - 9e^{-2t} + 8e^{-3t} + 6te^{-3t}\right)
\end{aligned}
$$

1. (6) $G_6(s) = \dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

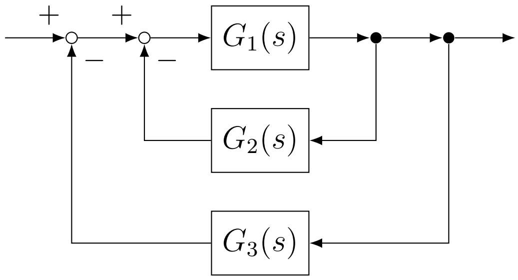
$$G_6(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$
$$\Leftrightarrow G_6(s) = \frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

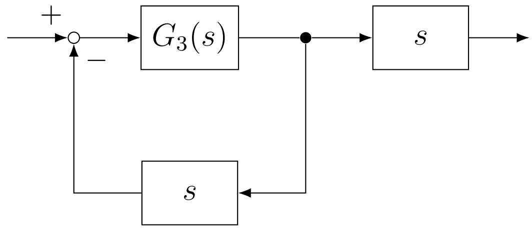
$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_6(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}\right]$$
$$\Leftrightarrow g_6(t) = \frac{1}{3}sint - \frac{1}{6}sin2t$$

2. 下図に示すシステムにおいて、システム全体の伝達関数を求めよ。なお、各伝達関数 $G_i(s)$ については問 1. の伝達関数を代入しないこと。

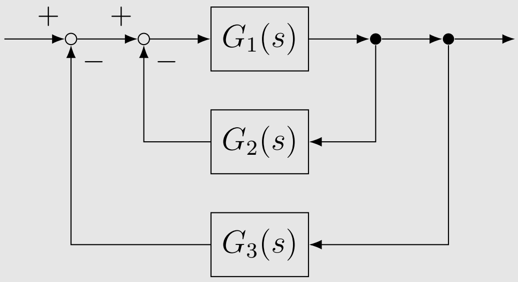
(1)

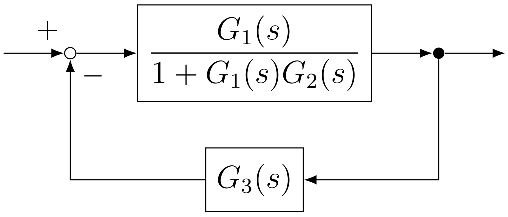


(2)

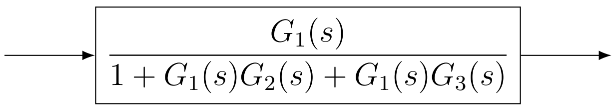


2. (1)





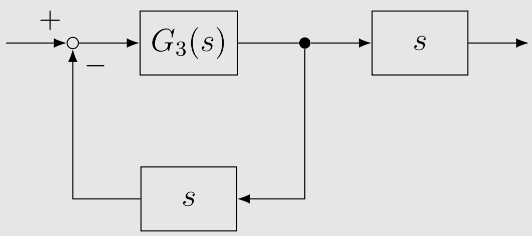
$$\Downarrow$$

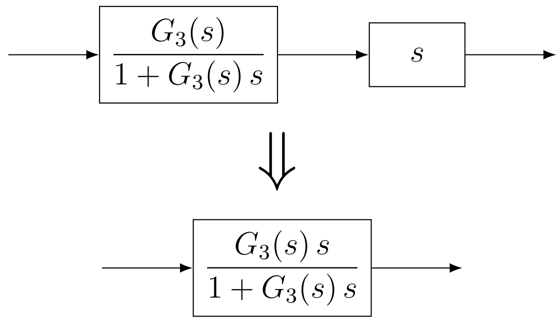


よってシステム全体の伝達関数は

$$G_{all}(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)+G_1(s)G_3(s)}$$

2. (2)





よってシステム全体の伝達関数は

$$G_{all}(s) = \frac{G_3(s)\,s}{1+G_3(s)\,s}$$

3. 問 2. の (2) のシステムについて、$G_3(s) = \dfrac{1}{s+3}$ のとき、単位ステップ入力を印加した際の応答を求めよ。また、定常状態における値が存在すれば、その値を求めよ。

問 2. の (2) より

$$\begin{aligned} G_{all}(s) &= \frac{\frac{1}{s+3}\,s}{1+\frac{1}{s+3}\,s} \\ &= \frac{s}{2s+3} \end{aligned}$$

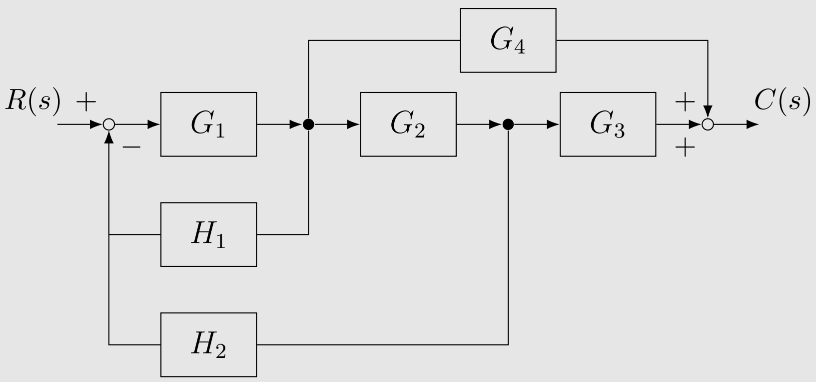
単位ステップ入力 $U(s) = \dfrac{1}{s}$ と $Y(s) = G(S)U(S)$ より、

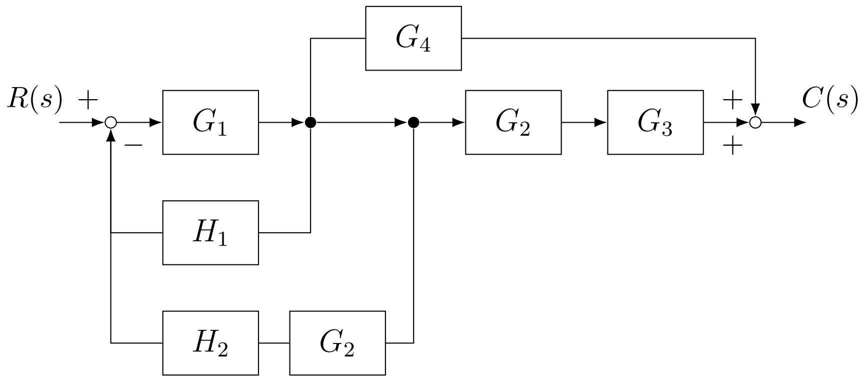
$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{2s+3} \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2s+3}\right] \\ \Leftrightarrow y(t) &= \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t} \end{aligned}$$

また定常値は

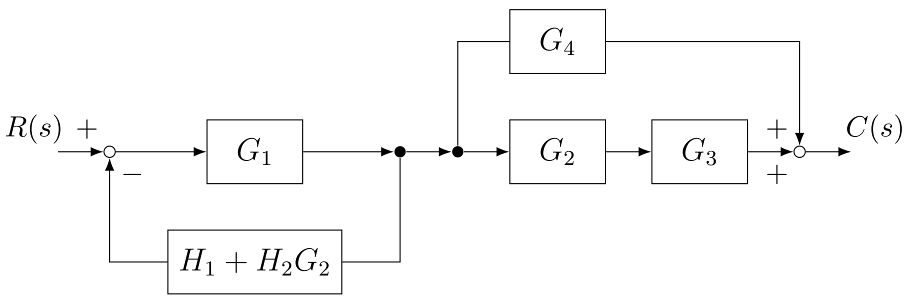
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t} = 0$$

4.(1) ブロック線図を簡単にせよ.

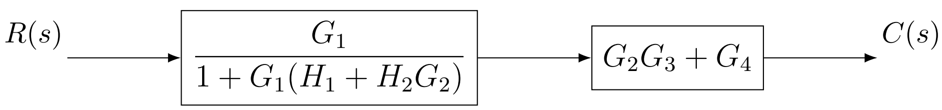




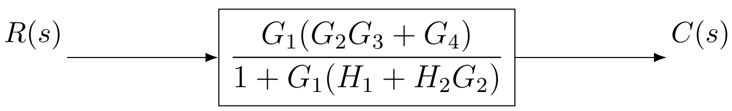
$$\Downarrow$$



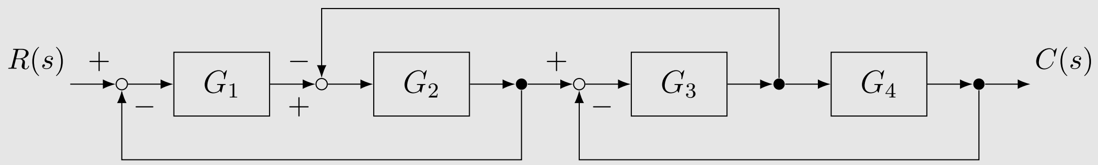
$$\Downarrow$$

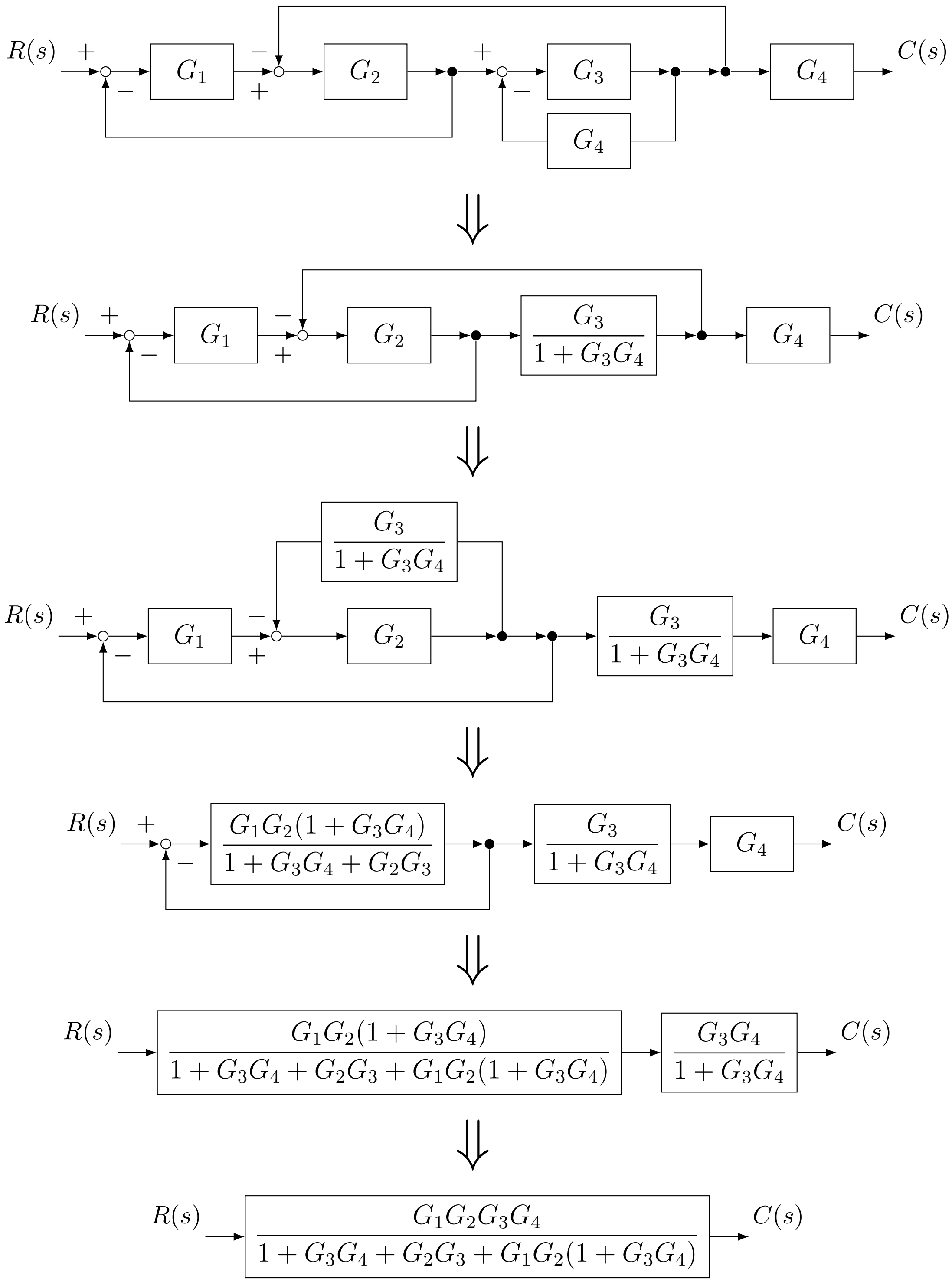


$$\Downarrow$$

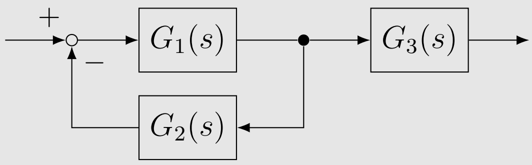


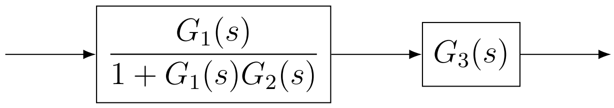
4.(2) ブロック線図を簡単にせよ.



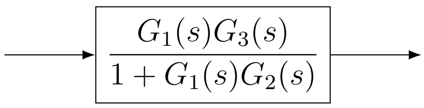


5. 下図に示すフィードバックシステムにおいて、$G_1(s) = \dfrac{1}{s+2}, G_2(s) = s, G_3(s) = K_1$ となるとき、ステップ応答における定常値が 1 になるよう、K_1 を定めよ。





$$\Downarrow$$



よってシステム全体の伝達関数は

$$\begin{aligned} G_{all}(s) &= \frac{G_1(s)G_3(s)}{1+G_1(s)G_2(s)} \\ &= \frac{\frac{1}{s+2}K_1}{1+\frac{1}{s+2}\cdot s} \\ &= \frac{K_1}{2(s+1)} \end{aligned}$$

単位ステップ入力 $U(s) = \frac{1}{s}$ とすると、単位ステップ応答 $X(s)$ は

$$X(s) = G_{all}(s)U(s) = \frac{K_1}{2s(s+1)}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{K_1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K_1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{K_1}{2}\left(1 - e^{-t}\right)$$

また定常値は

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{K_1}{2}\left(1 - e^{-t}\right) = \frac{K_1}{2}$$

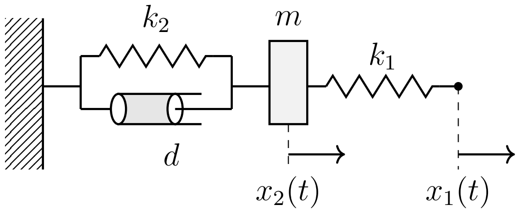
よって定常値が 1 になるような K_1 は

$$K_1 = 2$$

※最終値定理より以下のように解く方が速い

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \frac{K_1}{2} \therefore K_1 = 2$$

6. 右図に示す系について、入力を変位 $x_1(t)$、出力を変位 $x_2(t)$ としたとき、次の問いに答えよ。なお、m は質量 [kg]、d は粘性係数 [Ns/m]、k_1、k_2 はバネ [N/m] とし、初期状態において系は静止しているとする。



(1) この図によって示されるシステムの運動方程式と伝達関数を求めよ。

(2)$m = 1, d = 4, k_1 = 1, k_2 = 2$ とし、インパルス応答、ステップ応答をそれぞれ求めよ。

(3)$m = 1, d = 2, k_1 = 3, k_2 = 2$ とし、ステップ応答を求めよ。

(4)$m = 1, d = 2, k_1 = 1, k_2 = 0$ とし、ステップ応答を求めよ。

(5)$m = 1, d = 0, k_1 = 1, k_2 = 2$ とし、ステップ応答を求めよ。

(6)$m = 1, d = 0, k_1 = 2, k_2 = 1$ とし、入力変位 $x_1(t) = \sin(t)$ を与えたときの応答を求めよ。

(7)$m = 1, d = 2, k_1 = 1, k_2 = 1$ とし、入力変位 $x_1(t) = \sin(2t)$ を与えたときの応答を求めよ。

6. (1) この図によって示されるシステムの運動方程式と伝達関数を求めよ。

$x(t)$ に関する運動方程式は

$$m\ddot{x}_2 = -k_2 x_2 - d\dot{x}_2 - k_1 (x_2 - x_1)$$

また伝達関数は

$$\begin{aligned}
& m\ddot{x}_2 + d\dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2 = k_1 x_1 \\
\therefore\quad & \mathcal{L}[m\ddot{x}_2 + d\dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_2] = \mathcal{L}[k_1 x_1] \\
\therefore\quad & \left\{ms^2 + ds + (k_1 + k_2)\right\} X_2(s) = k_1 X_1(s) \quad [\because \dot{x}(0) = x(0) = 0] \\
\therefore\quad & G(s) \ = \ \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \ = \ \frac{k_1}{ms^2 + ds + (k_1 + k_2)}
\end{aligned}$$

6. (2)$m=1, d=4, k_1=1, k_2=2$ とし、インパルス応答、ステップ応答をそれぞれ求めよ。

(I) インパルス応答
パラメータを代入し、インパルス入力のラプラス変換は $F(s)=1$ なので

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{s^2+4s+3} \\
\therefore\quad X(s) &= G(s)F(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \\
\therefore\quad X(s) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}+\frac{-1}{s+3}\right) \\
\therefore\quad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \frac{1}{2}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+3}\right]\right\} \\
\therefore\quad x(t) &= \frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-3t}\right)
\end{aligned}
$$

(II) ステップ応答
パラメータを代入し、ステップ入力のラプラス変換は $F(s)=\dfrac{1}{s}$ なので

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{s^2+4s+3} \\
\therefore\quad X(s) &= G(s)F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+3)} \\
\therefore\quad X(s) &= \frac{\frac{1}{3}}{s}+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+1}+\frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{s+3} \\
\therefore\quad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{s+3}\right] \\
\therefore\quad x(t) &= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-3t}
\end{aligned}
$$

6. (3)$m=1, d=2, k_1=3, k_2=2$ とし、ステップ応答を求めよ。

パラメータを代入し、ステップ入力のラプラス変換は $F(s)=\dfrac{1}{s}$ なので

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{3}{s^2+2s+5} \\
\therefore\quad X(s) &= G(s)F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} \\
\therefore\quad X(s) &= \frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{s}+\frac{-\frac{3}{5}s-\frac{6}{5}}{s^2+2s+5} \\
\therefore\quad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{3}{5}\right)}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{3}{5}\left\{(s+1)+\frac{1}{2}\cdot 2\right\}}{(s+1)^2+2^2}\right] \\
\therefore\quad x(t) &= \frac{3}{5}-\frac{3}{5}e^{-t}\left\{\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t\right\}
\end{aligned}
$$

6. (4)$m=1, d=2, k_1=1, k_2=0$ とし、ステップ応答を求めよ。

パラメータを代入し、ステップ入力のラプラス変換は $F(s)=\frac{1}{s}$ なので

$$
\begin{aligned}
& G(s)=\frac{1}{s^2+2s+1} \\
\therefore\quad & X(s)=G(s)F(s)=\frac{1}{s(s+1)^2} \\
\therefore\quad & X(s)=\frac{1}{s}+\frac{-1}{(s+1)^2}+\frac{-1}{s+1} \\
\therefore\quad & \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1}\right] \\
\therefore\quad & x(t)=1-e^{-t}(t+1)
\end{aligned}
$$

6. (5)$m=1, d=0, k_1=1, k_2=2$ とし、ステップ応答を求めよ。

パラメータを代入し、ステップ入力のラプラス変換は $F(s)=\frac{1}{s}$ なので

$$
\begin{aligned}
& G(s)=\frac{1}{s^2+3} \\
\therefore\quad & X(s)=G(s)F(s)=\frac{1}{s(s^2+3)} \\
\therefore\quad & X(s)=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s}+\frac{\left(-\frac{1}{3}s\right)}{s^2+3} \\
\therefore\quad & \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{1}{3}s\right)}{s^2+3}\right] \\
\therefore\quad & x(t)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cos\left(\sqrt{3}t\right)
\end{aligned}
$$

6. (6)$m=1, d=0, k_1=2, k_2=1$ とし、入力変位 $x_1(t)=\sin(t)$ を与えたときの応答を求めよ。

パラメータを代入し、$x_1(t)=\sin(t)$ のラプラス変換は $X_i(s)=\frac{1}{s^2+1}$ なので

$$
\begin{aligned}
& G(s)=\frac{2}{s^2+3} \\
\therefore\quad & X(s)=G(s)F(s)=\frac{2}{(s^2+1)(s^2+3)} \\
\therefore\quad & X(s)=\frac{1}{s^2+1}+\frac{(-1)}{s^2+3} \\
\therefore\quad & \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right] \\
\therefore\quad & x(t)=\sin t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\sqrt{3}t)
\end{aligned}
$$

6. (7)$m=1, d=2, k_1=1, k_2=1$ とし、入力変位 $x_1(t)=\sin(2t)$ を与えたときの応答を求めよ。

パラメータを代入し、$x_1(t)=\sin(2t)$ のラプラス変換は $X_i(s)=\dfrac{2}{s^2+2^2}$ なので

$$G(s)=\frac{1}{s^2+2s+1}$$

$$\therefore\quad X(s)=G(s)F(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s^2+2^2)}$$

$$\therefore\quad X(s)=\frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{(s+1)^2}+\frac{\left(\frac{2}{25}\right)}{s+1}+\frac{\left(-\frac{2}{25}s-\frac{3}{25}\right)}{s^2+2^2}$$

$$\therefore\quad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{5}{25}\right)}{(s+1)^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{2}{25}\right)}{s+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{2}{25}s-\frac{3}{25}\right)}{s^2+2^2}\right]$$

$$\therefore\quad x(t)=\frac{1}{25}e^{-t}(5t+2)-\frac{1}{25}\left(2\cos 2t+\frac{3}{2}\sin 2t\right)$$

7. 初期値を $\dot{x}(0)=0, x(0)=1$ とするとき、微分方程式 $\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)=0$ を解け。

両辺にラプラス変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x(t)\right]=\mathcal{L}\left[0\right]\\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)\right\}+\left\{sX(s)-x(0)\right\}+X(s)=0\\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2+s+1\right\}X(s)-s-1=0\\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2+s+1\right\}X(s)=s+1\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{s+1}{s^2+s+1}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{(s+\frac{1}{2})+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right]\\
\Leftrightarrow\ &x(t)=e^{-\frac{t}{2}}\left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}
\end{aligned}
$$

8. $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+2x(t)=1$ を解け。ただし、$x(0)=0, \dot{x}(0)=1$ とする。

両辺にラプラス変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\right]=\mathcal{L}\{1\}\\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2X(s)-sx(0)-x^{(1)}(0)\right\}+2\left\{sX(s)-x(0)\right\}+2X(s)=\frac{1}{s}\\
\Leftrightarrow\ &s^2X(s)-1+2sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s}\\
\Leftrightarrow\ &s^2X(s)+2sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s}+1\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}+\frac{1}{s^2+2s+2}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}+\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right\}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2}\left\{1-e^{-t}(\cos t-\sin t)\right\}
$$