制御工学演習

解答編

作成者：Yudai
2025 年 5 月 9 日作成

[1] 指数関数 $x(t) = e^{at}$ をラプラス変換せよ.

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^\infty$$

この式の右辺第 2 項が収束するには:

$$\mathrm{Re}[s-a] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[a]$$

ゆえに，ラプラス変換の定義が成り立つ条件下で，最終的に次のようにまとめられる.

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (\mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[a])}$$

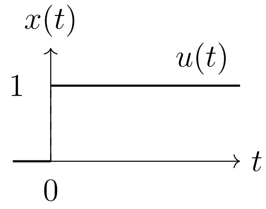
[2] 単位ステップ関数 $x(t) = 1$ をラプラス変換せよ.

単位ステップ関数の時間的変化を表しており，$t < 0$ において $x(t) = 0$ である. 単位ステップ関数を $u(t)$ と表すことがある.

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[\frac{-1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} - \lim_{t \to \infty} \frac{e^{-st}}{s}$$

$\mathrm{Re}[s] > 0$ 　の定義域において収束.

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$



図：単位ステップ関数

[3] 単位インパルス関数 $x(t) = \delta(t)$ をラプラス変換せよ．

単位ステップ関数はディラックのデルタ関数ともよばれ，$\delta(t)$ で記述される．
h をゼロに近づけることで定義され，その面積では 1 である．

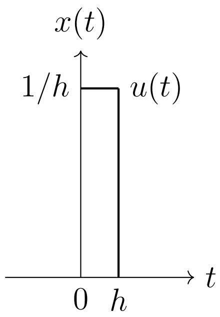
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

単位インパルス関数には次のような性質がある

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$$

$\mathrm{Re}[s] > 0$　の定義域において

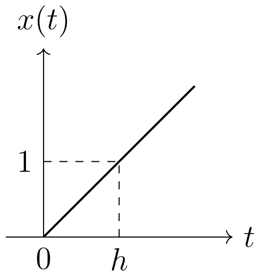
$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t-0)dt = e^0 = 1$$



図：単位インパルス関数

[4] ランプ関数 $x(t) = t$ をラプラス変換せよ．

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_0^{\infty} te^{-st}dt \\
&= \left[t\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)dt \\
&= 0 + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st} \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}\left[1\right] \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$



図：ランプ関数

[5] 正弦波関数 $x(t) = \sin(\omega t)$ をラプラス変換せよ.

オイラーの等式より

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

[6] 余弦波関数 $x(t) = \cos(\omega t)$ をラプラス変換せよ.

[5] と同様にして

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

[7] ラプラス変換は線形の性質があることを示せ.

線形の性質

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[x_1(t) + x_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[x_1(t)\right] + \mathcal{L}\left[x_2(t)\right] \\ \mathcal{L}\left[ax_1(t)\right] = a\mathcal{L}\left[x_1(t)\right] \end{cases}$$

を示す.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[ax_1(t) + bx_2(t)\right] &= \int_0^\infty \left\{ax_1(t) + bx_2(t)\right\} e^{-st} dt \\ &= a\int_0^\infty x_1(t)e^{-st}dt + b\int_0^\infty x_2(t)e^{-st}dt \\ &= a\mathcal{L}\left[x_1(t)\right] + b\mathcal{L}\left[x_2(t)\right] \end{aligned}$$

[8] 時間関数 $x(t)$ を右に τだけ推移させた関数 $x(t-\tau)$ に対するラプラス変換は，$x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ を用いて

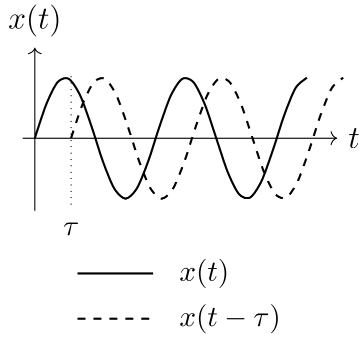
$$\mathcal{L}\left[x(t-\tau)\right] = e^{-s\tau t}X(s)$$

と表されることを示せ．（時間領域における推移定理）

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[x(t-\tau)\right] &= \int_0^\infty x(t-\tau)e^{-st}dt \\ &= \int_\tau^\infty x(t-\tau)e^{-st}dt \\ &\quad [\because t<\tau\text{の時}\quad x(t-\tau)=0]\end{aligned}$$

ここで変数変換τ' = t - τを行う．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[x(t-\tau)\right] &= \int_0^{\infty-\tau} x(\tau')e^{-s(\tau+\tau')}d\tau' \\ &= e^{-\tau s}\int_0^\infty x(\tau')e^{-s\tau'}d\tau' \\ &= e^{-\tau s}\mathcal{L}\left[x(t)\right] \\ &= e^{-\tau s}X(s)\end{aligned}$$



図：時間領域における推移

[9] $x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ において複素変数 s を b だけ推移させて $s+b$ とすれば，どうなるのか？

$$\begin{aligned}X(s+b) &= \int_0^\infty x(t)e^{-(s+b)t}dt \\ &= \int_0^\infty \left\{e^{-bt}x(t)\right\}e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-bt}x(t)\right]\end{aligned}$$

[10] $e^{\lambda t} sin(\omega t)$ をラプラス変換せよ．

ラプラス変換の第一移動定理 (問題 [8])

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a)$$

と，正弦波のラプラス変換 (問題 [5])

$$\mathcal{L}\left[sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (= X(s))$$

を考えれば，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{\lambda t} sin(\omega t)\right] &= X(s-\lambda)\\ &= \frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}\end{aligned}$$

[11] 時間関数 $x(t)$ の微分をラプラス変換せよ．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt\\ &= \left[x(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt\end{aligned}$$

$\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0$ となる $\sigma < Re[s]$ において

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

[12] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$9\frac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)=1$$

ただし，初期値は，$x(0)=0,\ x'(0)=0$ とする.

まず，時間関数 $x(t)$ の二階微分のラプラス変換は $\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]=sX(s)-x(0)$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right]&=s\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]-x'(0)\\&=s\left\{sX(s)-x(0)\right\}-x'(0)\\&=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\end{aligned}$$

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\begin{aligned}&9\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right]+\mathcal{L}[x(t)]=\mathcal{L}[1]\\\Leftrightarrow\quad&9\left\{s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\right\}+X(s)=\frac{1}{s}\\\Leftrightarrow\quad&9s^2X(s)+X(s)=\frac{1}{s}\\\Leftrightarrow\quad&(9s^2+1)X(s)=\frac{1}{s}\\\Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{1}{s(9s^2+1)}\\\Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{(\frac{1}{3})^2}{s(s^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2)}\\\Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}\qquad\left[\because\omega=\frac{1}{3}\text{とおいた}\right]\\\Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{\omega^2}{s(s+j\omega)(s-j\omega)}\\\Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{1}{s}-\frac{\frac{1}{2}}{s+j\omega}-\frac{\frac{1}{2}}{s-j\omega}\qquad\left[\because\text{ヘヴィサイドの展開定理}\right]\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+j\omega}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-j\omega}\right]\\\Leftrightarrow\quad&x(t)=1-\frac{1}{2}e^{-j\omega t}-\frac{1}{2}e^{j\omega t}\\\Leftrightarrow\quad&x(t)=1-\frac{1}{2}\left(e^{-j\omega t}+e^{j\omega t}\right)\\\Leftrightarrow\quad&x(t)=1-cos\omega t\qquad\left[\because\text{オイラーの等式}\right]\\\Leftrightarrow\quad&x(t)=1-cos\left(\frac{t}{3}\right)\end{aligned}$$

[13] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 4$$

ただし，初期条件は，$x(0) = 1$，$x^{(1)}(0) = 0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right] = \mathcal{L}\left[4\right]$$

$$\Leftrightarrow \left\{s^2X(s) - sx(0)\right\} - x^{(1)}(0) + 3\left\{sX(s) - x(0)\right\} + 2X(s) = \frac{4}{s}$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s) + 3sX(s) + 2X(s) = \frac{4}{s} + s + 3$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\frac{4}{s} + s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4 + s(s+3)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{s^2 + 3s + 4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \qquad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right]$$

$$\Leftrightarrow x(t) = 2 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$

[14] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = sin2t$$

ただし，初期条件は，$x(0) = 0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt} + 3\mathcal{L}x(t)\right] = \mathcal{L}\{\sin 2t\} \\
\Leftrightarrow\ & sX(s) - x(0) + 3X(s) = \frac{2}{s^2+4} \\
\Leftrightarrow\ & sX(s) + 3X(s) = \frac{2}{s^2+4} \\
\Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{2}{(s+3)(s^2+4)} \\
\Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{2}{13}\left(\frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4}\right) \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]
\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{13}\left(\frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4}\right)\right] \\
\Leftrightarrow\ & x(t) = \frac{1}{13}\left(2e^{-3t} + 3\sin 2t - 2\cos 2t\right)
\end{aligned}$$

[15] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=1$$

ただし，初期条件は，$x(0)=0, x^1(0)=1$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\right]=\mathcal{L}\{1\}\\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2X(s)-sx(0)-x^{(1)}(0)\right\}+2\left\{sX(s)-x(0)\right\}+2X(s)=\frac{1}{s}\\
\Leftrightarrow\ &s^2X(s)-1+2sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s}\\
\Leftrightarrow\ &s^2X(s)+2sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s}+1\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}+\frac{1}{s^2+2s+2}\\
\Leftrightarrow\ &X(s)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}+\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right\}
\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\frac{1}{2}\left\{1-e^{-t}(\cos t-\sin t)\right\}$$

[16] (1)-(10) のラプラス変換 $X(s)$ にラプラス逆変換を施し，時間関数 $x(t)$ を求めよ．

[16] (1) $X(s) = \frac{4}{s+5}$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+5}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = 4e^{-5t}$$

[16] (2) $X(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{(s+1)+6}{(s+1)^2+2^2}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{6}{(s+1)^2+2^2}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+1)^2+2^2}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = e^{-t}cos(2t) + 3e^{-t}sin(2t)$$

[16] (3) $X(s) = \frac{2}{s^2+s}$

$$X(s) = \frac{2}{s^2+s}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s} + \frac{-2}{s+1} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = 2 - 2e^{-t}$$

[16] (4) $X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)}$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)} \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{\frac{1}{8}}{s} + \frac{-\frac{1}{8}(s-4)}{s^2+4s+8} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}] \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{8s} - \frac{(s+2)-6}{8\left\{(s+2)^2+4\right\}}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{8s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+2)-6}{8\left\{(s+2)^2+4\right\}}\right] \\
\Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2t}(cos(2t) - 3sin(2t))
\end{aligned}
$$

[16] (5) $X(s) = \frac{1}{s^3+11s^2+40s+48}$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s^3+11s^2+40s+48} \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+4)^2} \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s+3} + \frac{-1}{s+4} + \frac{-1}{(s+4)^2} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+4)^2}\right] \\
\Leftrightarrow x(t) &= e^{-3t} - e^{-4t} - te^{-4t}
\end{aligned}
$$

[16] (6) $X(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{2}{(s+1)(s+3)} \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+3} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+3}\right] \\
\Leftrightarrow x(t) &= e^{-t} - e^{-3t}
\end{aligned}
$$

[16] (7) $X(s) = \frac{3}{s(s+2)^2}$

$$X(s) = \frac{3}{s(s+2)^2}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{(\frac{3}{4})}{s} + \frac{(-\frac{3}{4})}{s+1} + \frac{(-\frac{3}{2})}{(s+1)^2}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\frac{3}{4})}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-\frac{3}{4})}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-\frac{3}{2})}{(s+1)^2}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{3}{2}te^{-2t}$$

[16] (8) $X(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$

$$X(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\frac{1}{18}}{s} + \frac{(-\frac{1}{2})}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{s+3}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{18}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-\frac{1}{2})}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{4}{9}}{s+3}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{18} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{4}{9}e^{-3t}$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{18}\left(1 - 9e^{-2t} + 8e^{-3t} + 6te^{-3t}\right)$$

[16] (9) $X(s) = \frac{s+2}{s^3(s-1)^2}$

$$X(s) = \frac{s+2}{(s-1)^2 s^3}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{5}{s^2} + \frac{8}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{-8}{s-1}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{5}{s^2} + \frac{8}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{-8}{s-1}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \left(2t^2 + 5t + 8\right) + (3t - 8)\,e^t$$

[16] (10) $X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{3}sint - \frac{1}{6}sin2t$$

[17] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0$$

ただし，初期条件は，$y(0) = A, y^{(1)}(0) = B$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t)\right] = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right\} + Y(s) = 0$$
$$\Leftrightarrow s^2Y(s) - As - B + Y(s) = 0$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{As+B}{s^2+1}$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{As}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+1}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+1}\right]$$
$$\Leftrightarrow y(t) = Acost + Bsint$$

[18] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - (a+b)\frac{dy(t)}{dt} + aby(t) = 0$$

ただし，初期条件は，$y(0)=1, y^{(1)}(0)=0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} - (a+b)\frac{dy(t)}{dt} + aby(t)\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right\} - (a+b)\left\{sY(s) - y(0)\right\} + abY(s) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2 - (a+b)s + ab\right\}Y(s) - s + (a+b) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &Y(s) = \frac{s-(a+b)}{s^2-(a+b)s+ab} \\
\Leftrightarrow\ &Y(s) = \frac{s-(a+b)}{(s-a)(s-b)} \\
\Leftrightarrow\ &Y(s) = \frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)}
\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)}\right] \\
\Leftrightarrow\ &y(t) = -\frac{b}{a-b}e^{at} + \frac{a}{a-b}e^{bt}
\end{aligned}$$

[19] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 12y(t) = 2$$

ただし，初期条件は，$y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 12y(t)\right] = \mathcal{L}[2]$$

$$\Leftrightarrow \left\{s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right\} - \{sY(s) - y(0)\} - 12Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$\Leftrightarrow \left\{s^2 - s - 12\right\} Y(s) - s + 1 = \frac{2}{s}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s^2 - s - 12)}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s+3)(s-4)}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4}\right]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{4t}$$

[20] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4y(t) = sin(t)$$

ただし，初期条件は，$y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4y(t)\right] = \mathcal{L}\left[sin(t)\right]$$
$$\Leftrightarrow \left\{s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right\} + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$
$$\Leftrightarrow \left\{s^2 + 4\right\} Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$
$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{1}{3}}{s^2+4} \qquad \left[\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}\right]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{1}{3}}{s^2+4}\right]$$
$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{3}sin(t) - \frac{1}{6}sin(2t)$$

[21] 単位インパルス応答が $y(t) = 7e^{-2t} + 2e^{-3t}$ であるとき，
このシステムの伝達関数を求めよ．

伝達関数は単位インパルス応答 $y(t)$ をラプラス変換して得ることができる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[y(t)\right] &= 7\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] + 2\mathcal{L}\left[e^{-3t}\right] \\
&= \frac{7}{s+2} + \frac{2}{s+3} \\
&= \frac{7s + 21 + 2s + 4}{(s+2)(s+3)} \\
&= \frac{9s+25}{(s+2)(s+3)} \\
\Leftrightarrow G(s) &= \frac{9s+25}{(s+2)(s+3)}
\end{aligned}$$

[22] 単位インパルス応答が $y(t) = e^{-2t} + 3e^{-9t} - 4e^{-11t}$ であるとき，
このシステムの伝達関数を求めよ．

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathcal{L}\left[y(t)\right] \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] + 3\mathcal{L}\left[e^{-9t}\right] - 4\mathcal{L}\left[e^{-11t}\right] \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+9} - \frac{4}{s+11} \\ &= \frac{15s+93}{(s+2)(s+9)(s+11)} \end{aligned}$$

[23] 単位ステップ応答が $y(t) = 5e^{-t} - 5e^{-7t}$ であるとき，
このシステムの伝達関数を求めよ．

入力信号 $u(t)$ は，大きさ 1 のステップ関数 $U(s) = \frac{1}{s}$ であるから，

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}\left[y(t)\right] \\ &= 5\mathcal{L}\left[e^{-t}\right] - 5\mathcal{L}\left[e^{-7t}\right] \\ &= \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+7} \\ &= \frac{30}{(s+1)(s+7)} \\ \Leftrightarrow G(s) &= \frac{30s}{(s+1)(s+7)} \quad [\because G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}] \end{aligned}$$

[24] 単位ステップ応答が $y(t) = 12 + 6t$ であるとき，
このシステムの伝達関数を求めよ．

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}\left[y(t)\right] \\ &= 12\mathcal{L}\left[1\right] + 6\mathcal{L}\left[t\right] \\ &= \frac{12}{s} + \frac{6}{s^2} \\ \Leftrightarrow G(s) &= \frac{12s+6}{s} \quad [\because G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, U(s) = \frac{1}{s}] \end{aligned}$$

[25] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

であるときのインパルス応答を求めよ.

$Y(s) = G(s)U(s)$ であり，$U(s) = 1$ であるから.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2+3s+2}U(s) \\ &= \frac{2}{(s+1)(s+2)}U(s) \\ &= \frac{2}{(s+1)(s+2)} \quad [\because U(s)=1] \\ &= \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 2e^{-t} - 2e^{-2t} \end{aligned}$$

[26] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

であるときのステップ応答を求めよ.

$Y(s) = G(s)U(s)$ であり，$U(s) = \frac{1}{s}$ であるから.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2+3s+2}U(s) \\ &= \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \quad [\because U(s)=\frac{1}{s}] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{aligned}$$

[27] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{12s+30}{s^2+8s+15}$$

であるときのステップ応答を求めよ．

$Y(s) = G(s)U(s)$ であり，$U(s) = \frac{1}{s}$ であるから．

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{12s+30}{s^2+8s+15}U(s) \\ &= \frac{12s+30}{s(s+3)(s+5)} \quad [\because U(s) = \frac{1}{s}] \\ &= \frac{2}{s} + \frac{1}{s+3} - \frac{3}{s+5} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 2 + e^{-3t} - 3e^{-5t} \end{aligned}$$

[28] $x(t)[m^3/s]$ は，操作バルブ直後の流量を表し，長い配管を通って $L[s]$ 後に給水場所に到達したとする．
このとき，$x(t)$ から給水量 $y(t)$ までの伝達関数を求めよ．

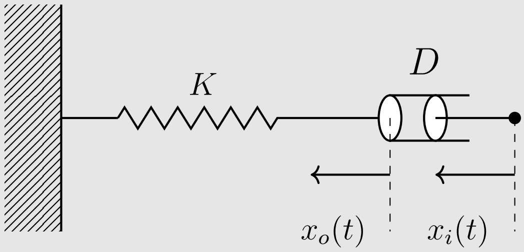
$y(t) = x(t-L)$ であるから，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}[x(t-L)] \\ &= \int_0^\infty x(t-L)e^{-st}dt \\ \Leftrightarrow Y(s) &= e^{-Ls}X(s) \end{aligned}$$

ここで $Y(s) = G(s)X(s)$ であるから，

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-Ls}$$

[29] 変位 $x_i(t)[m]$ を入力信号，
ダッシュポットのシリンダの平衡点からの変位 $x_o(t)[m]$ を出力信号
とみなしたときの伝達関数を求めよ．ただし，$x_i(0)=0, x_o(0)=0$ とする．



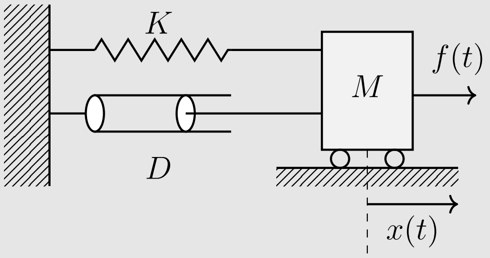
$x_o(t), x_i(t)$ について運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} m_o\ddot{x}_o = -K\,x_o - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big), \\ m_i\ddot{x}_i = D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) + f(t) \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力 $f(t)$ はわからないので，もう一方の式に着目すると，

$$\begin{aligned} & m_o\ddot{x}_o = -K\,x_o - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) \\ \therefore\quad & m_o\ddot{x}_o + K\,x_o + D\dot{x}_o = D\dot{x}_i \\ \therefore\quad & \mathcal{L}\left[m_o\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + K\,x_o\right] = \mathcal{L}\left[D\dot{x}_i\right] \\ \therefore\quad & (m_o s^2 + Ds + K)\,X_o(s) = D\,s\,X_i(s). \quad [\because x_i(0)=0, x_o(0)=0] \\ \therefore\quad & G(s) \;=\; \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \;=\; \frac{D\,s}{m_o s^2 + Ds + K} \\ \therefore\quad & G(s) = \frac{D\,s}{Ds + K} \quad [m_o = 0\text{とした}] \end{aligned}$$

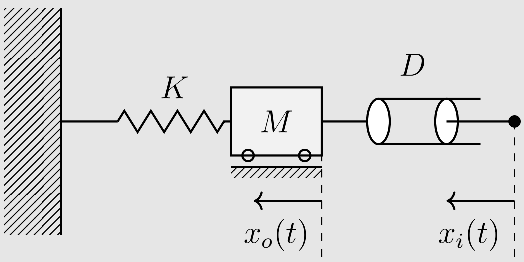
[30] 外力 $f(t)[N]$ を図の方向に考え，平衡点からの変位 $x(t)[m]$ を出力信号とみなしたときの伝達関数を求めよ．



$x(t)$ に関する運動方程式より

$$
\begin{aligned}
& M\ddot{x} = f(t) - Kx - D\dot{x} \\
\therefore\quad & M\ddot{x} + Kx + D\dot{x} = f(t) \\
\therefore\quad & \mathcal{L}\left[M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\therefore\quad & (Ms^2 + Ds + K)\,X(s) = F(s) \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\
\therefore\quad & G(s) \;=\; \frac{X(s)}{F(s)} \;=\; \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}
\end{aligned}
$$

[31] 平衡点からの変位として，図中の $x_i(t)[m]$ と $x_o(t)[m]$ を考える．
$x_i(t)$ を入力信号，$x_o(t)[m]$ を出力信号とみなしたときの伝達関数を求めよ．



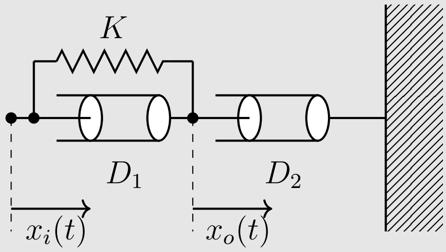
$x_o(t), x_i(t)$ について運動方程式を立てると，

$$
\begin{cases}
M\ddot{x}_o = -K\,x_o - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big), \\
m\ddot{x}_i = D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) + f(t)
\end{cases}
$$

ここで入力側にかかる力 $f(t)$ はわからないので，もう一方の式に着目すると，

$$
\begin{aligned}
& M\ddot{x}_o = -K\,x_o - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) \\
\therefore\quad & M\ddot{x}_o + K\,x_o + D\dot{x}_o = D\dot{x}_i \\
\therefore\quad & \mathcal{L}\left[M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + K\,x_o\right] = \mathcal{L}\left[D\dot{x}_i\right] \\
\therefore\quad & (Ms^2 + Ds + K)\,X_o(s) = D\,s\,X_i(s). \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\
\therefore\quad & G(s) \;=\; \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \;=\; \frac{D\,s}{Ms^2 + Ds + K}
\end{aligned}
$$

[32] 粘性減衰係数 $D_1[N\cdot s/m]$ のダッシュポットのピストンの平衡点からの変位 $x_i(t)[m]$ を入力信号，粘性減衰係数 $D_1[N\cdot s/m]$ のダッシュポットのピストンの平衡点からの 変位 $x_o(t)[m]$ を出力信号としたときの伝達関数を求めよ．



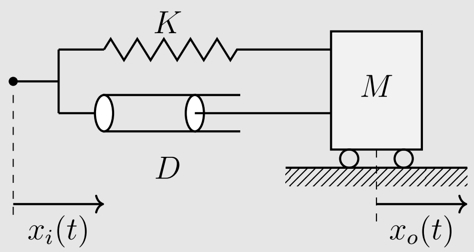
$x_o(t), x_i(t)$ について運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} M\ddot{x}_i = K(x_o - x_i) + D_1\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) + f(t), \\ m\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D_1\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) - D_2\dot{x}_o \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力 $f(t)$ はわからないので，もう一方の式に着目すると，

$$\begin{aligned}
& m\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D_1\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) - D_2\dot{x}_o \\
\therefore\quad & m\ddot{x}_o + (D_1 + D_2)\dot{x}_o + K\,x_o = D_1\dot{x}_i + Kx_i \\
\therefore\quad & \mathcal{L}\left[m\ddot{x}_o + (D_1 + D_2)\dot{x}_o + K\,x_o\right] = \mathcal{L}\left[D_1\dot{x}_i + Kx_i\right] \\
\therefore\quad & \left\{ms^2 + (D_1 + D_2)s + K\right\} X_o(s) = (D_1 s + K)X_i(s) \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\
\therefore\quad & G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{D_1 s + K}{ms^2 + (D_1 + D_2)s + K} \\
\therefore\quad & G(s) = \frac{D_1 s + K}{(D_1 + D_2)s + K} \quad [\because m = 0 \text{とした}]
\end{aligned}$$

[33] 平衡点からの変位として，図中の $x_i(t)[m]$ と $x_o(t)[m]$ を考える．
$x_i(t)[m]$ を入力信号，$x_o(t)[m]$ を出力信号とみなしたときの伝達巻子を求めよ．
台車は摩擦なく床を動くものとする．すべての変数の初期値はゼロである．



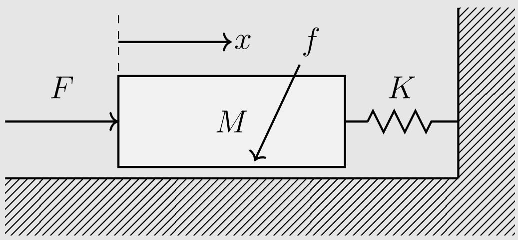
$x_o(t), x_i(t)$ について運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = K(x_o - x_i) + D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) + f(t), \\ M\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力 $f(t)$ はわからないので，もう一方の式に着目すると，

$$\begin{aligned} & M\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) \\ \therefore\quad & M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + K\,x_o = D_1\dot{x}_i + Kx_i \\ \therefore\quad & \mathcal{L}\left[M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + K\,x_o\right] = \mathcal{L}\left[D\dot{x}_i + Kx_i\right] \\ \therefore\quad & \left\{Ms^2 + Ds + K\right\}\,X_o(s) = (Ds + K)X_i(s) \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\ \therefore\quad & G(s) \;=\; \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \;=\; \frac{Ds + K}{Ms^2 + Ds + K} \end{aligned}$$

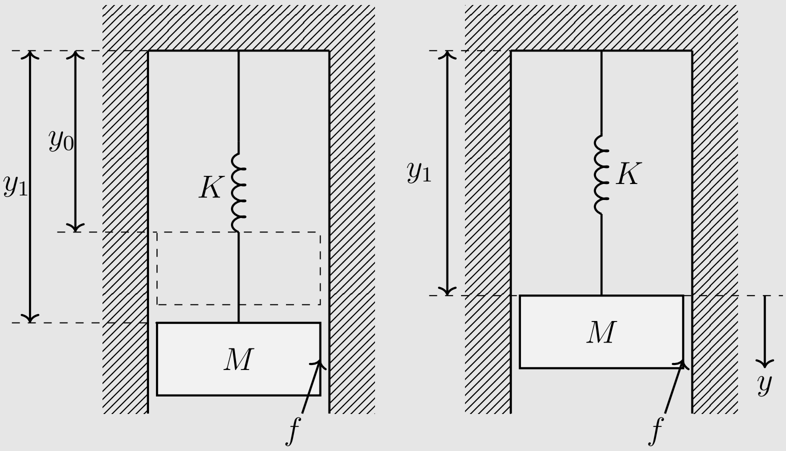
[34] この系の伝達関数を求めよ．ただし， f は粘性抵抗係数であり，
初期条件 $t = 0$ において $F = 0$



$x(t)$ について運動方程式を立てると，

$$\begin{aligned} & M\ddot{x} = -Kx + -f\dot{x} + F(t) \\ \therefore\quad & M\ddot{x} + f\dot{x} + Kx = F(t) \\ \therefore\quad & \mathcal{L}\left[M\ddot{x} + f\dot{x} + Kx\right] = \mathcal{L}\left[F(t)\right] \\ \therefore\quad & \left\{Ms^2 + fs + K\right\}\,X(s) = F(s) \quad [\because x(0) = 0, x(0) = 0] \\ \therefore\quad & G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + fs + K} \end{aligned}$$

[35] 長さ y_0 のばねの上端を固定し，下端に質量 M の物体をつり下げたとき，
ばねの長さが y_1 になって平衡した．
つぎに，物体に下向きの力 $F(t)$ を加えたとき，物体の平衡状態からの変位を y として運動方程式を作れ．
ただし物体と側壁との間には，粘性摩擦定数を f とする．

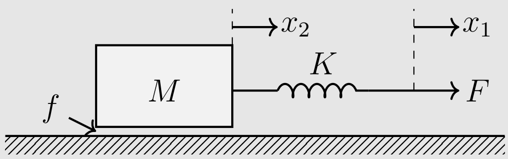


質量 – ばね – まさつ系（平衡状態）　　力を加えた場合

$y(t)$ について運動方程式を立てると，

$$M\ddot{y} = F(t) - f\dot{y} - Ky$$

[36] 質量 M の物体の一端にばねをつけ，
ばねを力 F で引っ張ったときの運動方程式を作れ．
物体と床面との間の粘性摩擦定数を f とする．



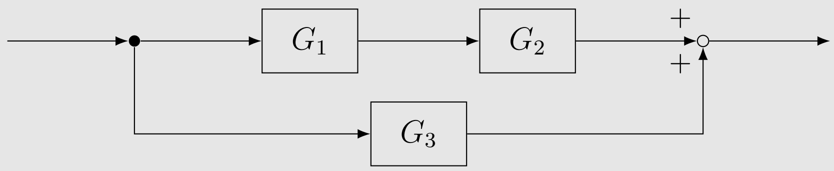
$x_1(t), x_2(t)$ について運動方程式を立てると，

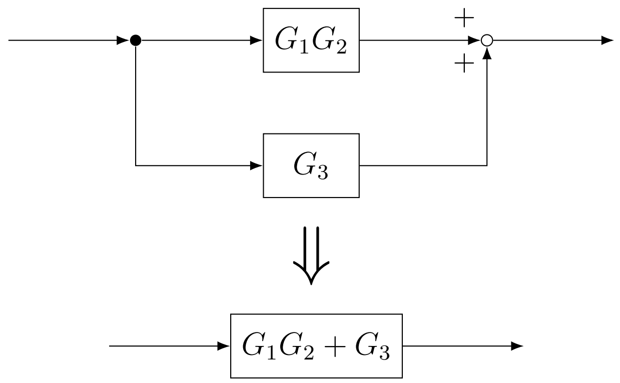
$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -K(x_1 - x_2) + F(t), \\ M\ddot{x}_2 = K(x_1 - x_2) - f\dot{x}_2 \end{cases}$$

ここで $m = 0$ として二式を合わせると

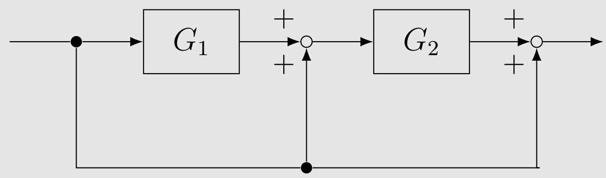
$$M\ddot{x}_2 = F(t) - f\dot{x}_2$$

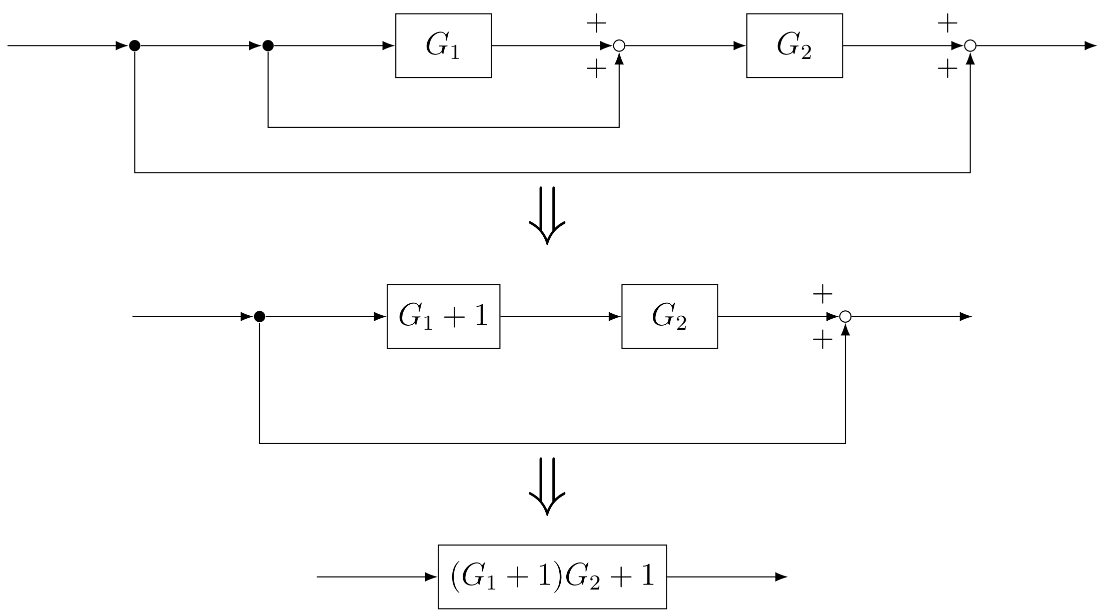
[37] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ．



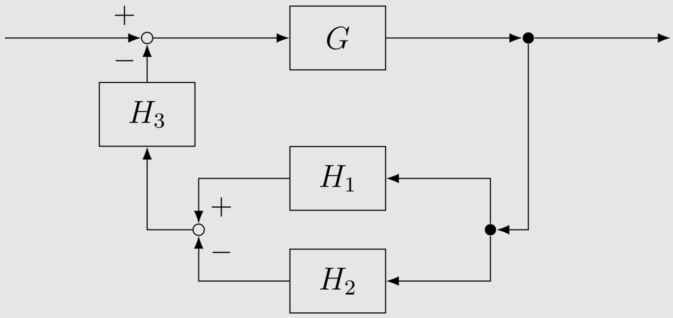


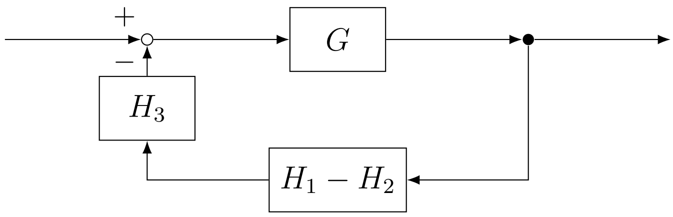
[38] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ．



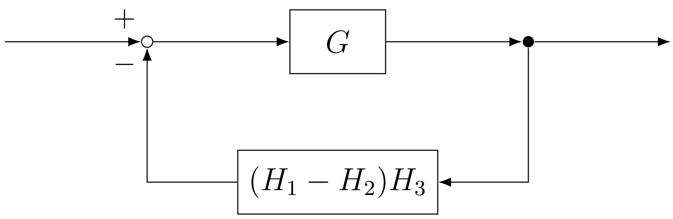


[39] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ.

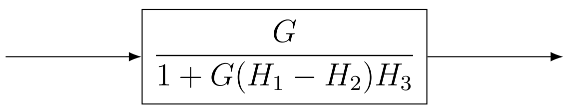




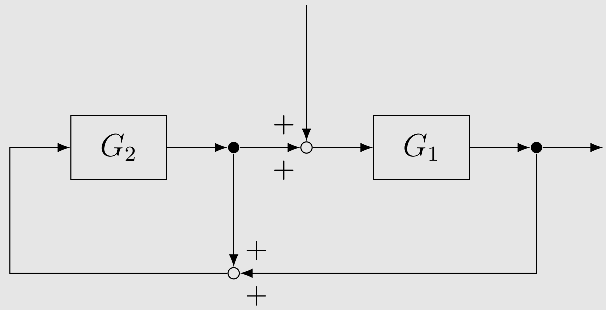
$$\Downarrow$$

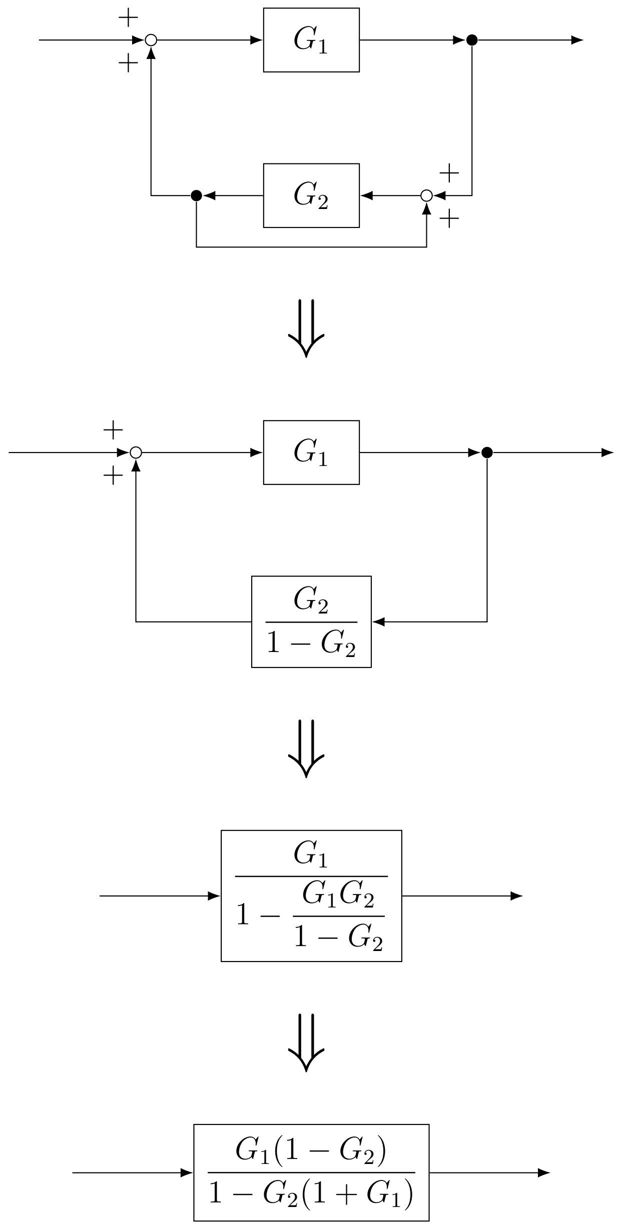


$$\Downarrow$$

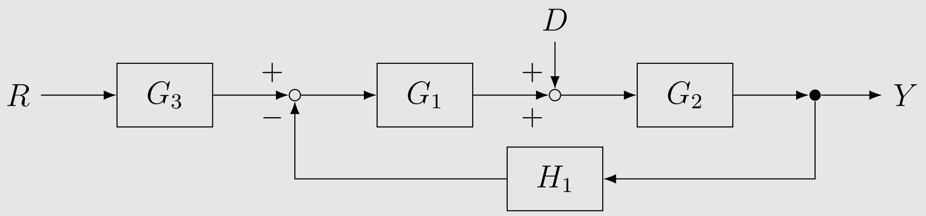


[40] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ.

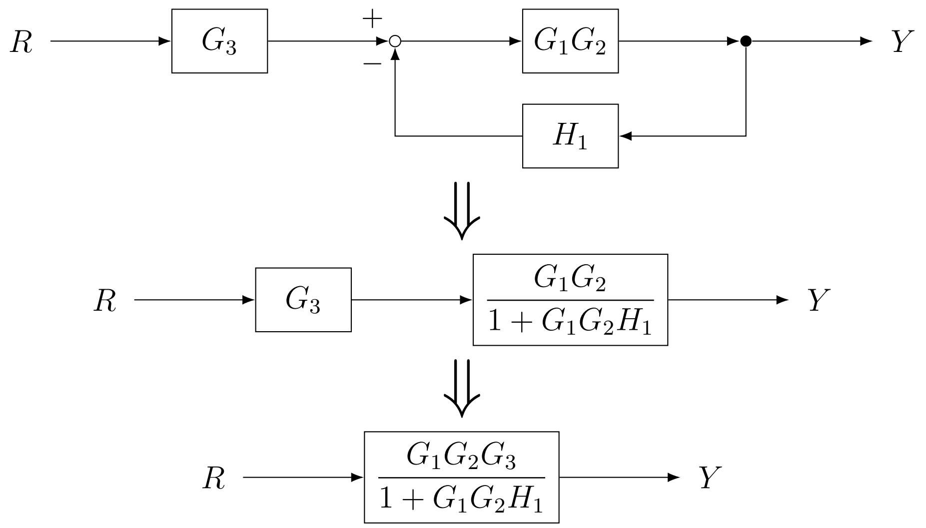




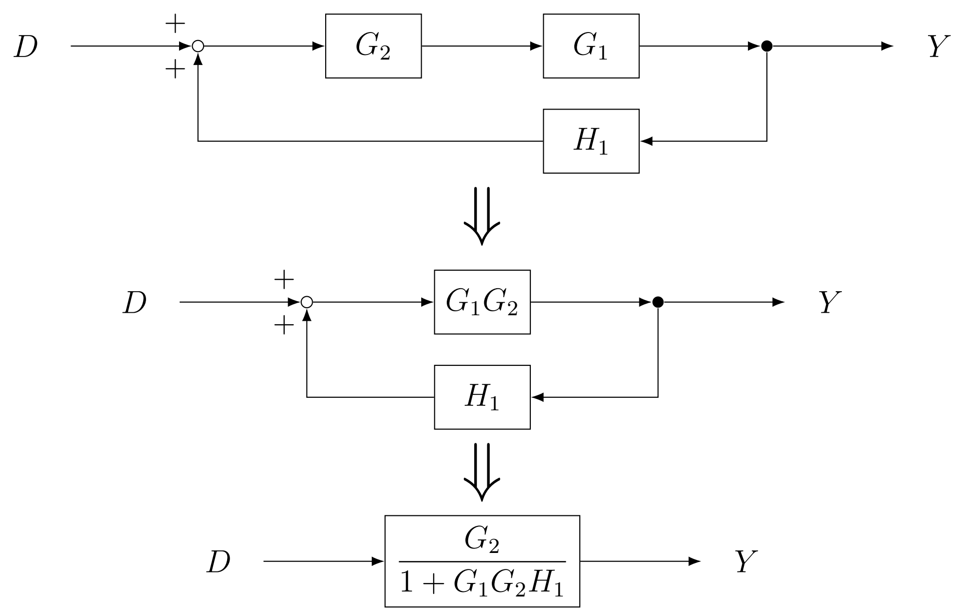
[41] 出力信号である制御量 Y までの伝達特性を等価変換によって簡単化せよ．
ただし、R は目標値信号，D は外乱信号である．



R から Y について



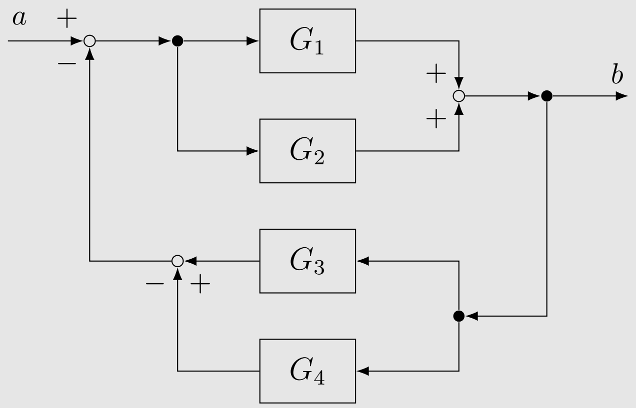
D から Y について

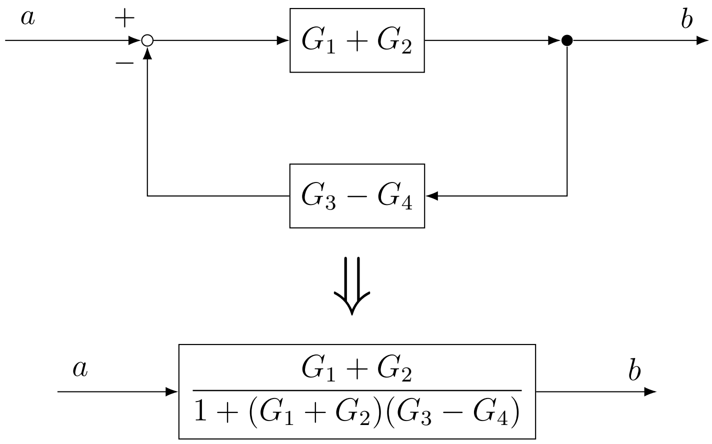


これらを合わせて

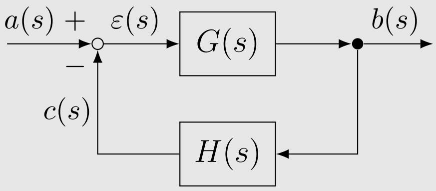
$$Y = \frac{G_1G_2G_3R + G_2D}{1 + G_1G_2H_1}$$

[42] a を入力，b を出力としたとき，ブロック線図を簡単化し，伝達関数を求めよ．





[43] 伝達関数 $\frac{b(s)}{a(s)}$ を求めよ.



ブロック線図より次が成り立つ

$$
\begin{cases}
\varepsilon(s) = a(s) - c(s) & \cdots (1) \\
b(s) = \varepsilon(s) G(s) & \cdots (2) \\
c(s) = b(s) H(s) & \cdots (3)
\end{cases}
$$

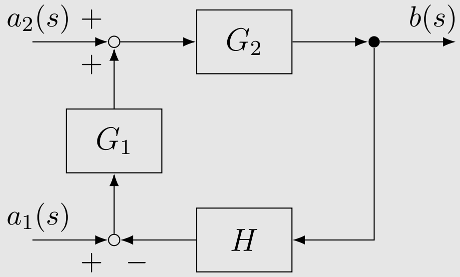
であるから、最終的に $\varepsilon(s), c(s)$ を含まない形にするために $\varepsilon(s)$ について解くと (1), (3) より

$$
\varepsilon(s) = a(s) - b(s)H(s) \qquad \cdots (4)
$$

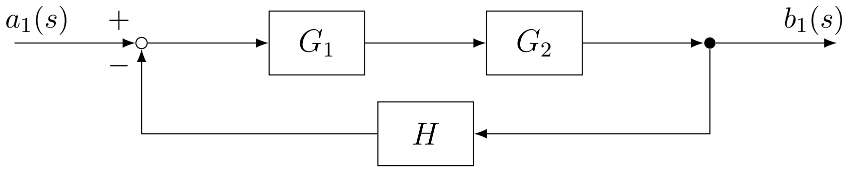
よって (2), (4) より

$$
\begin{aligned}
& \frac{b(s)}{G(s)} = \varepsilon(s) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{b(s)}{G(s)} = a(s) - b(s)H(s) \\
\Leftrightarrow\ & b(s) = a(s)G(s) - b(s)H(s)G(s) \\
\Leftrightarrow\ & b(s)\left\{1 + G(s)H(s)\right\} = a(s)G(s) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}
\end{aligned}
$$

[44] 二つの入力信号 $a_1(s), a_2(s)$ をもつ，制御系の応答 $b(s)$ を求めよ．

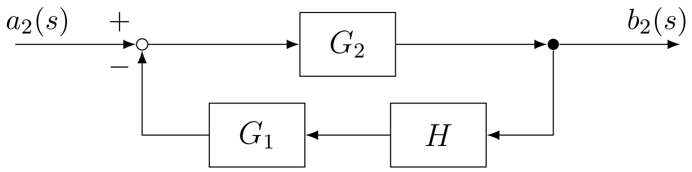


$a_2(s) = 0$ とおくと



$$b_1(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} \cdot a_1(s) \qquad \cdots (1)$$

$a_2(s) = 0$ とおくと

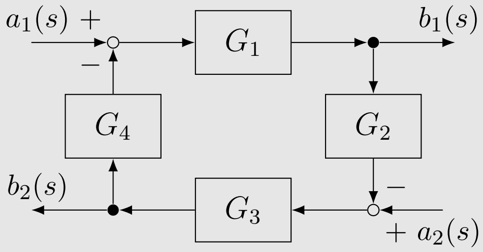


$$b_2(s) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} \cdot a_2(s) \qquad \cdots (2)$$

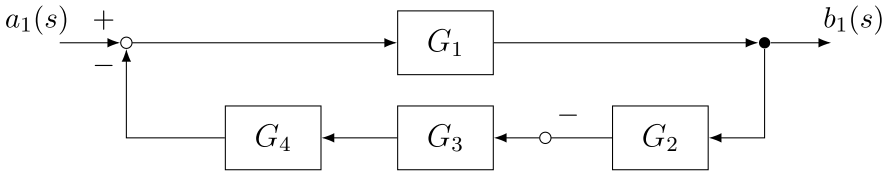
以上 (1), (2) より

$$\begin{aligned} b(s) &= b_1(s) + b_2(s) \\ &= \frac{G_1 G_2 a_1(s) + G_2 a_2(s)}{1 + G_1 G_2 H} \end{aligned}$$

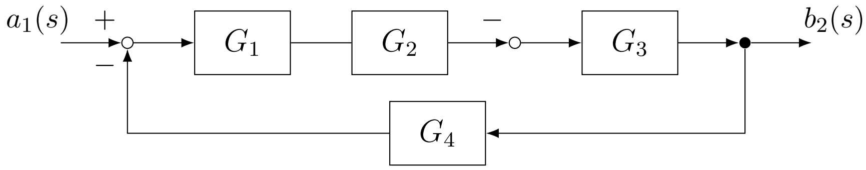
[45] $\frac{b_1(s)}{a_1(s)}, \frac{b_1(s)}{a_2(s)}, \frac{b_2(s)}{a_1(s)}, \frac{b_2(s)}{a_2(s)}$ を求めよ.



$a_2(s) = 0$ として

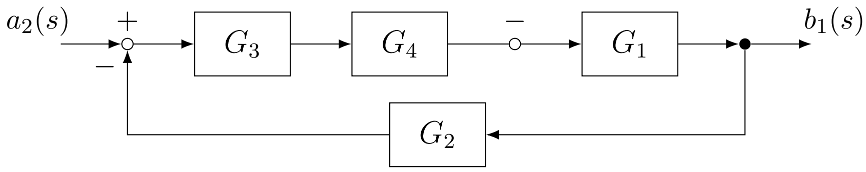


$$\frac{b_1(s)}{a_1(s)} = \frac{1}{1 - G_1G_2G_3G_4}$$

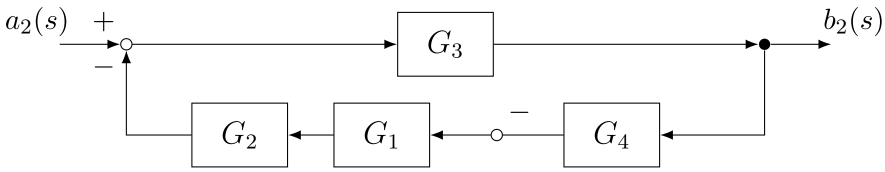


$$\frac{b_1(s)}{a_1(s)} = \frac{1}{1 - G_1G_2G_3G_4}$$

$a_1(s) = 0$ として

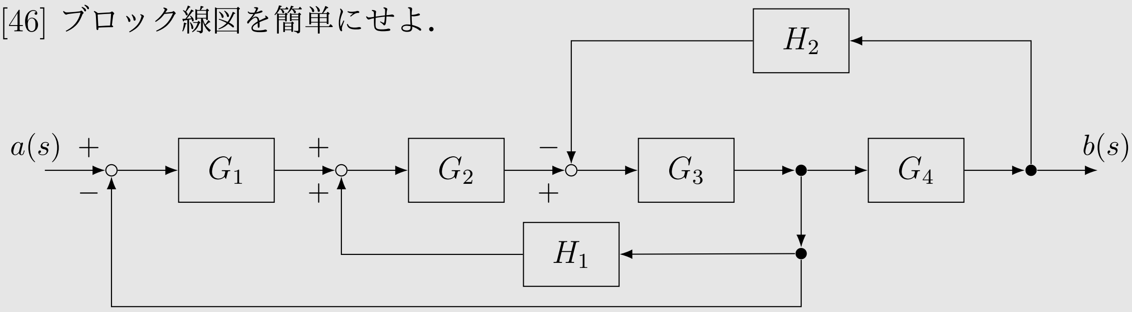


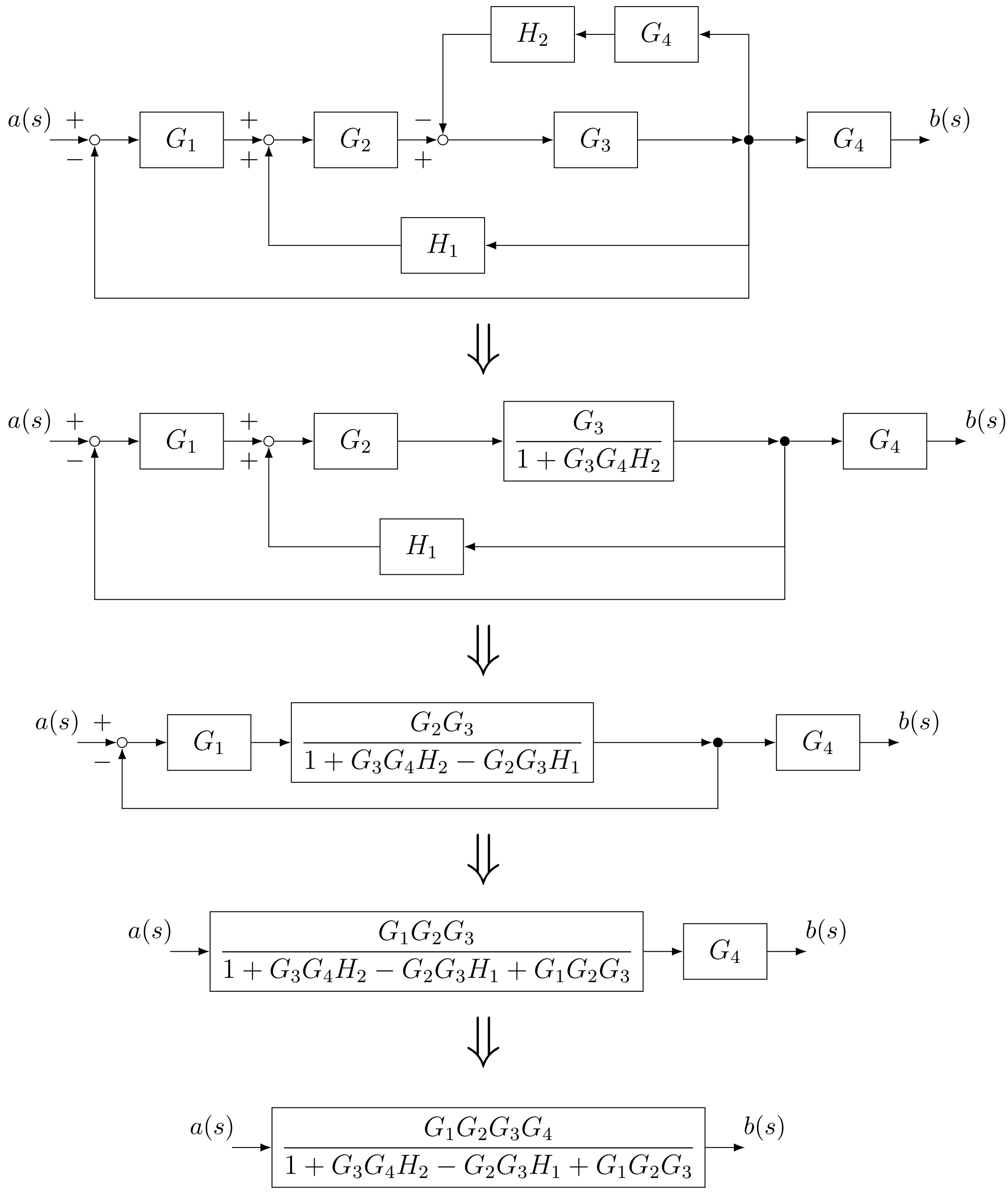
$$\frac{b_1(s)}{a_1(s)} = \frac{1}{1 - G_1G_2G_3G_4}$$



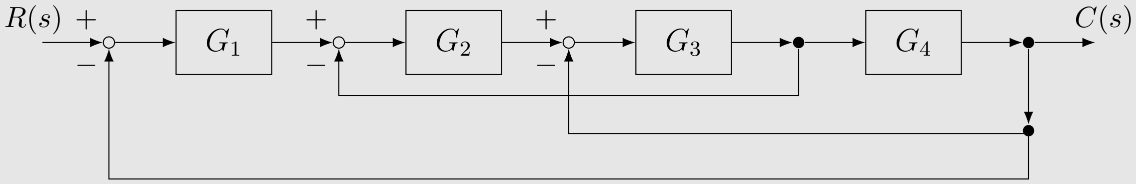
$$\frac{b_1(s)}{a_1(s)} = \frac{1}{1 - G_1G_2G_3G_4}$$

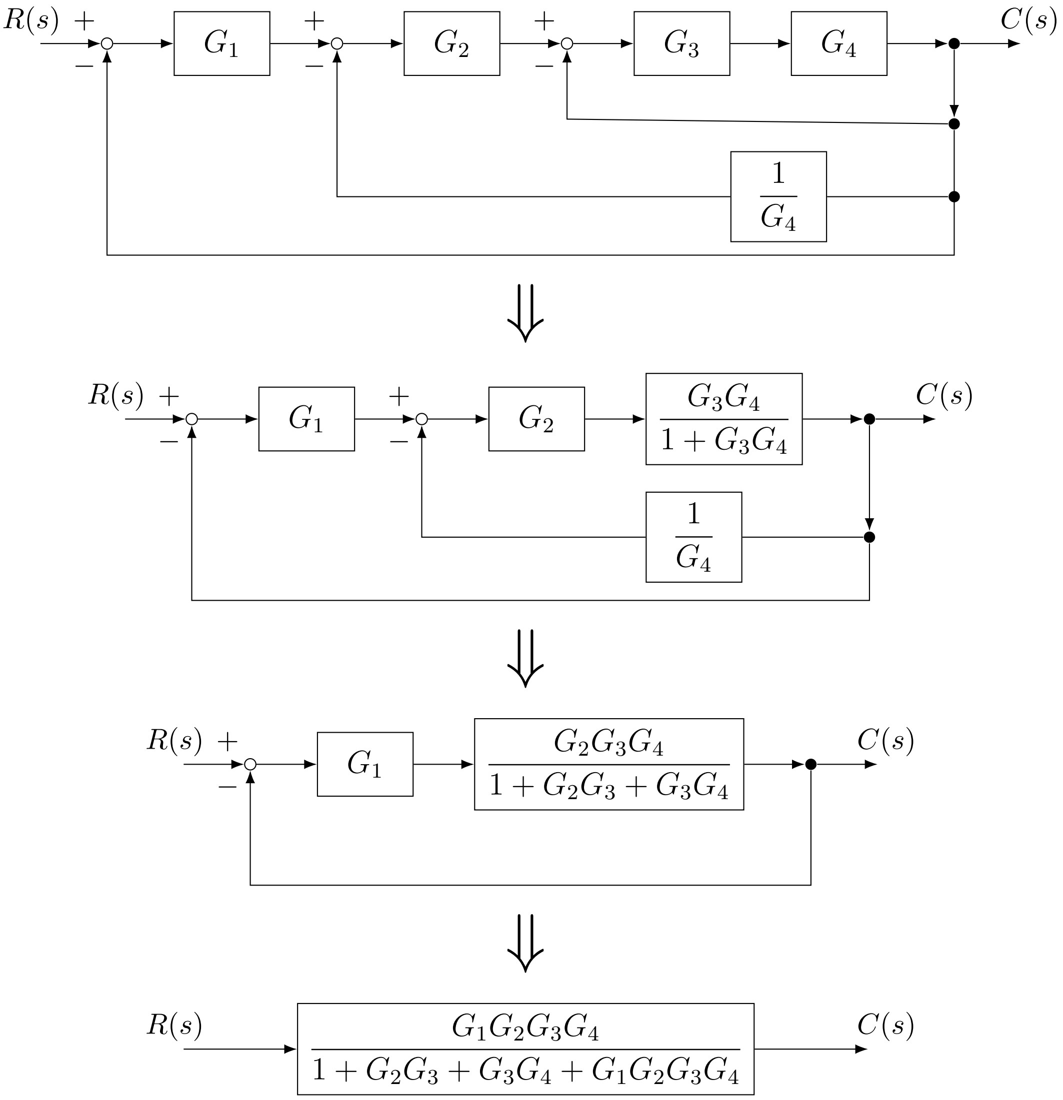
[46] ブロック線図を簡単にせよ．



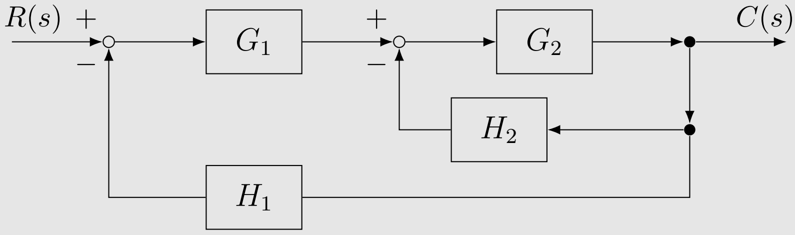


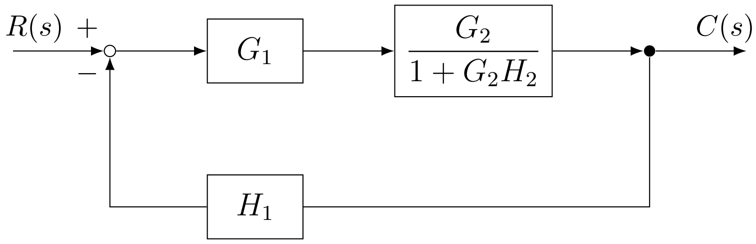
[47] ブロック線図を簡単にせよ.



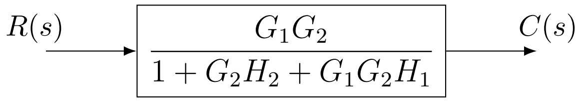


[48] ブロック線図を簡単にせよ．

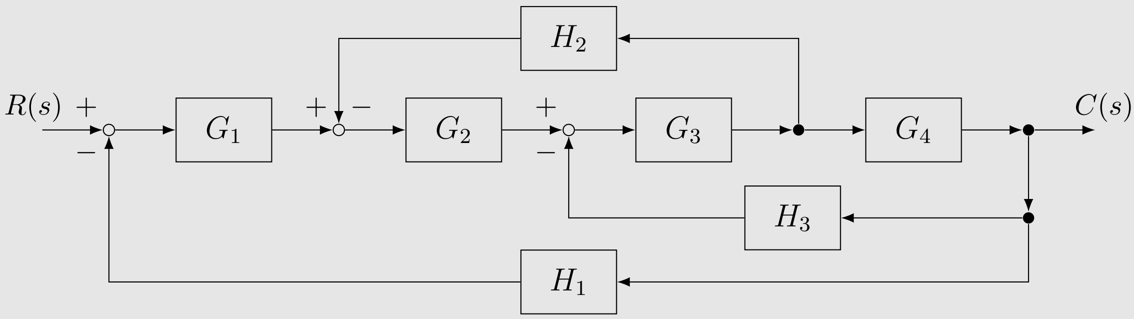


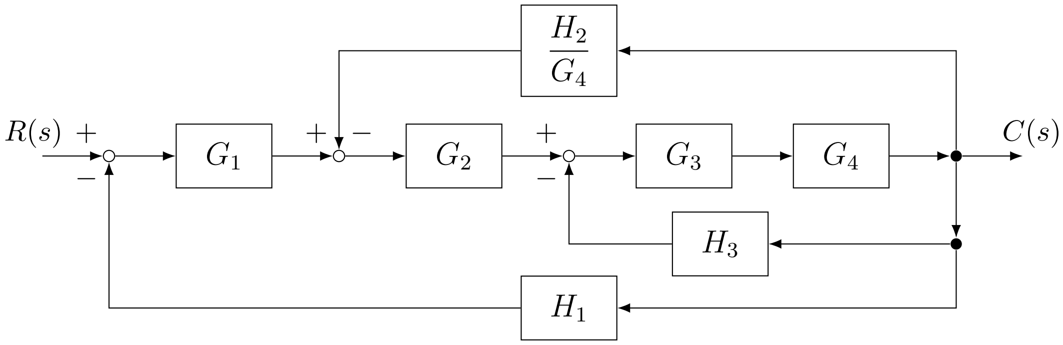


$$\Downarrow$$

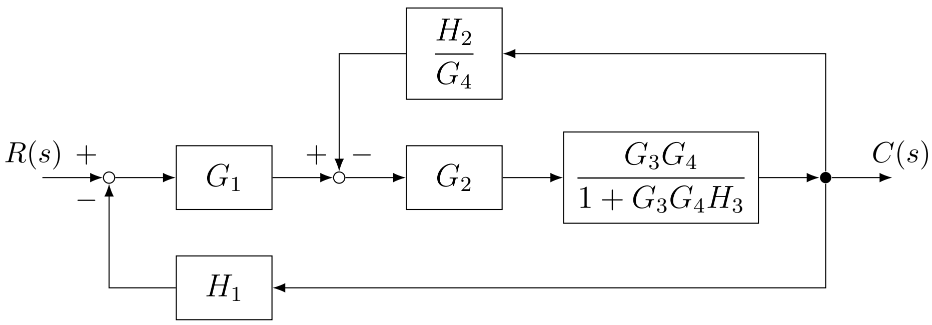


[49] ブロック線図を簡単にせよ．

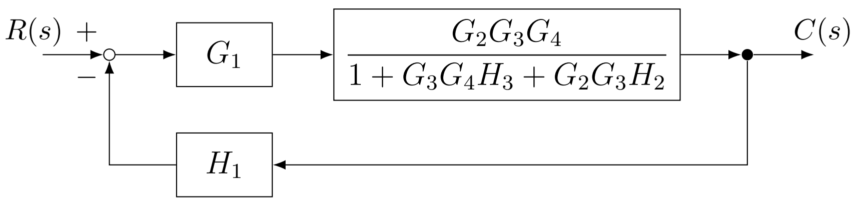




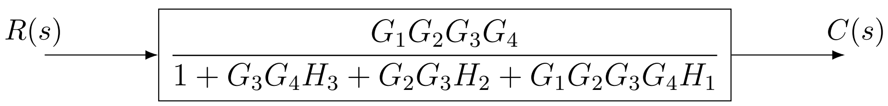
$\Downarrow$



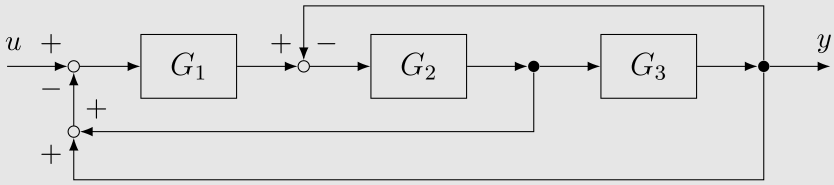
$\Downarrow$

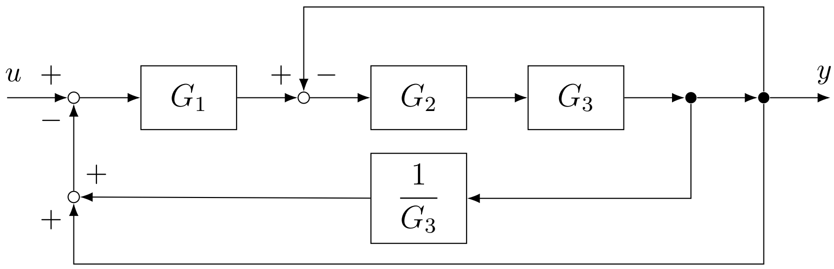


$\Downarrow$

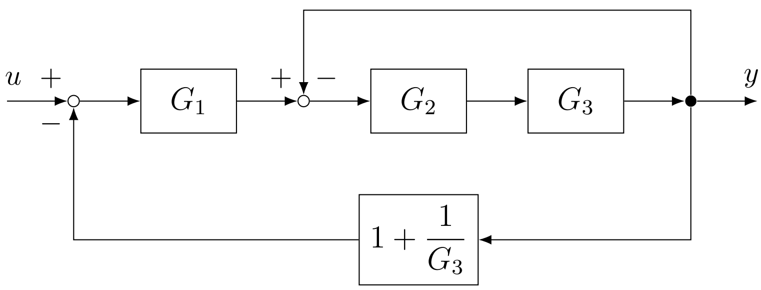


[50] ブロック線図を簡単にせよ．

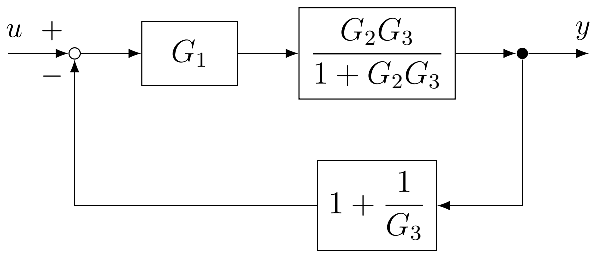




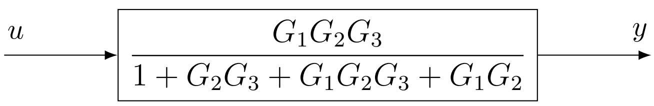
$$\Downarrow$$



$$\Downarrow$$



$$\Downarrow$$



最後の変形について

$$\frac{G_1 \cdot \dfrac{G_2G_3}{1+G_2G_3}}{1 + G_1 \cdot \dfrac{G_2G_3}{1+G_2G_3} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{G_3}\right)} = \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2G_3 + G_1G_2G_3\left(1 + \dfrac{1}{G_3}\right)}$$

$$= \frac{G_1G_2G_3}{1 + G_2G_3 + G_1G_2 + G_1G_2G_3}$$