

制御工学 I 演習① 解答

1. 以下の式に関するラプラス逆変換を求めよ.

$$(1) \quad G_1(s) = \frac{4}{s+5}$$

$$(2) \quad G_2(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$$

$$(3) \quad G_3(s) = \frac{1}{s^3+11s^2+40s+48}$$

$$(4) \quad G_4(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad [T \text{は定数}]$$

$$(5) \quad G_5(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$$

$$(6) \quad G_6(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

1. (1)  $G_1(s) = \frac{4}{s+5}$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[G_1(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+5}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= 4e^{-5t} \end{aligned}$$

1. (2)  $G_2(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$

$$\begin{aligned} G_2(s) &= \frac{s+7}{s^2+2s+5} \\ \Leftrightarrow G_2(s) &= \frac{(s+1)+6}{(s+1)^2+2^2} \\ \Leftrightarrow G_2(s) &= \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{6}{(s+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[G_2(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+1)^2+2^2}\right] \\ \Leftrightarrow g_2(t) &= e^{-t}\cos(2t) + 3e^{-t}\sin(2t) \end{aligned}$$

$$1. (3) G_3(s) = \frac{1}{s^3 + 11s^2 + 40s + 48}$$

$$\begin{aligned} G_3(s) &= \frac{1}{s^3 + 11s^2 + 40s + 48} \\ \Leftrightarrow G_3(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+4)^2} \\ \Leftrightarrow G_3(s) &= \frac{1}{s+3} + \frac{-1}{s+4} + \frac{-1}{(s+4)^2} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}] \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[G_3(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+4)^2}\right] \\ \Leftrightarrow g_3(t) &= e^{-3t} - e^{-4t} - te^{-4t} \end{aligned}$$

$$1. (4) G_4(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

$$\begin{aligned} G_4(s) &= \frac{1}{Ts+1} \\ \Leftrightarrow G_4(s) &= \frac{(\frac{1}{T})}{s + (\frac{1}{T})} \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[G_4(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\frac{1}{T})}{s + (\frac{1}{T})}\right] \\ \Leftrightarrow g_4(t) &= \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}} \end{aligned}$$

$$1. (5) G_5(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$$

$$\begin{aligned} G_5(s) &= \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2} \\ \Leftrightarrow G_5(s) &= \frac{\frac{1}{18}}{s} + \frac{(-\frac{1}{2})}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{s+3} \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[G_5(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{18}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-\frac{1}{2})}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{4}{9}}{s+3}\right] \\ \Leftrightarrow g_5(t) &= \frac{1}{18} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{4}{9}e^{-3t} \\ \Leftrightarrow g_5(t) &= \frac{1}{18}(1 - 9e^{-2t} + 8e^{-3t} + 6te^{-3t}) \end{aligned}$$

1. (6)  $G_6(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$$G_6(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$\Leftrightarrow G_6(s) = \frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}[G_6(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}\right]$$

$$\Leftrightarrow g_6(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$$

2.  $\ddot{y}(t) - (a+b)\dot{y}(t) + aby(t) = 0$  を解け。ただし、 $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$  とする。

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\mathcal{L}[\ddot{y}(t) - (a+b)\dot{y}(t) + aby(t)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \{s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\} - (a+b)\{sY(s) - y(0)\} + abY(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \{s^2 - (a+b)s + ab\}Y(s) - s + (a+b) = 0$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s - (a+b)}{s^2 - (a+b)s + ab}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s - (a+b)}{(s-a)(s-b)}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)}\right]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = -\frac{b}{a-b}e^{at} + \frac{a}{a-b}e^{bt}$$

3.  $\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 1$  を解け。ただし、 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$  とする。

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right] &= \mathcal{L}\{1\} \\ \Leftrightarrow \{s^2X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0)\} + 2\{sX(s) - x(0)\} + 2X(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow s^2X(s) - 1 + 2sX(s) + 2X(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow s^2X(s) + 2sX(s) + 2X(s) &= \frac{1}{s} + 1 \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} + \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} + \frac{1}{(s+1)^2 + 1^2} \right\}\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2} \{1 - e^{-t}(\cos t - \sin t)\}$$

4.  $\dot{x}(t) + 3x(t) = \sin 2t$  を解け。ただし、 $x(0) = 0$  とする。

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt} + 3\mathcal{L}x(t)\right] &= \mathcal{L}\{\sin 2t\} \\ \Leftrightarrow sX(s) - x(0) + 3X(s) &= \frac{2}{s^2 + 4} \\ \Leftrightarrow sX(s) + 3X(s) &= \frac{2}{s^2 + 4} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{2}{(s+3)(s^2+4)} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{2}{13} \left( \frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4} \right) \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{13} \left( \frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4} \right)\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{13} (2e^{-3t} + 3\sin 2t - 2\cos 2t)\end{aligned}$$

5. あるシステムの微分方程式が  $A\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Cy(t) = 1$  で表現できるとき、各パラメータを  $A = 0.5, B = -0.5, C = -6$ , 初期条件を  $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$  として、 $y(t)$  を求めよ。

$$\begin{aligned} A\ddot{y}(t) + B\dot{y}(t) + Cy(t) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \ddot{y}(t) - \frac{1}{2} \cdot \dot{y}(t) - 6y(t) &= 1 \\ \Leftrightarrow \ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 12y(t) &= 2 \end{aligned}$$

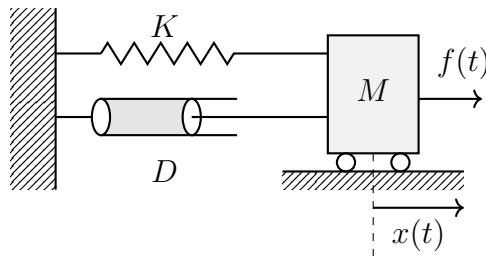
両辺にラプラス変換を施すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 12y(t)] &= \mathcal{L}[2] \\ \Leftrightarrow \{s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\} - \{sY(s) - y(0)\} - 12Y(s) &= \frac{2}{s} \\ \Leftrightarrow \{s^2 - s - 12\} Y(s) - s + 1 &= \frac{2}{s} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{s^2 - s + 2}{s(s^2 - s - 12)} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{s^2 - s + 2}{s(s+3)(s-4)} \\ \Leftrightarrow Y(s) &= \frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}] \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4}\right] \\ \Leftrightarrow y(t) &= -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{4t} \end{aligned}$$

6. 以下の問いに答えよ。なお、システムの入力を外力  $f(t)$ 、出力を変位  $x(t)$  とする。なお、初期値はすべて 0 とする。



- (1) この図によって示されるシステムの運動方程式を求めよ。
- (2) 各パラメータを  $M = 1, D = 3, K = 2, f(t) = 1$  として、 $x(t)$  を求めよ。
- (3) (2) で求めた  $x(t)$  の概形を描け。なお、グラフの横軸を時間  $t$ 、縦軸を変位  $x(t)$  とする。

6.(1) この図によって示されるシステムの運動方程式を求めよ。

運動方程式は

$$M\ddot{x}(t) = -Kx(t) - D\dot{x}(t) + f(t)$$

6.(2) 各パラメータを  $M = 1, D = 3, K = 2, f(t) = 1$  として、 $x(t)$  を求めよ。

$$\begin{aligned} M\ddot{x}(t) &= -Kx(t) - D\dot{x}(t) + f(t) \\ \Leftrightarrow M\ddot{x}(t) + Kx(t) + D\dot{x}(t) &= f(t) \\ \Leftrightarrow \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) &= 1 \end{aligned}$$

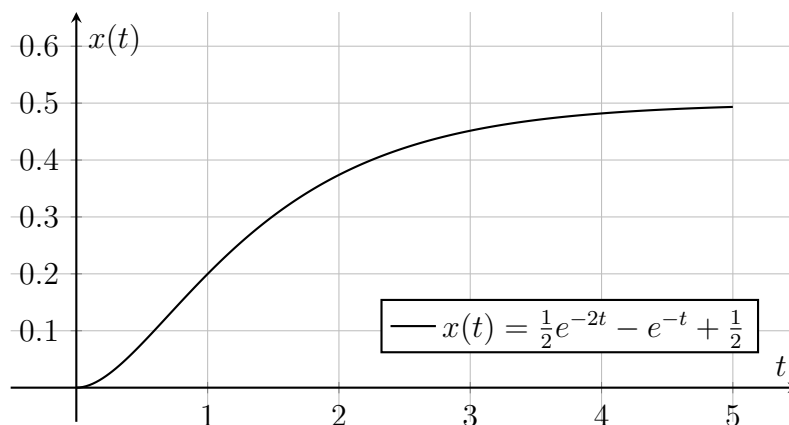
両辺にラプラス変換を施すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t)] &= \mathcal{L}[1] \\ \Leftrightarrow \{s^2 X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0)\} + 3\{sX(s) - x(0)\} + 2X(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow \{s^2 + 3s + 2\} X(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 3s + 2)} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s(s+1)(s+2)} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}] \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6.(3) (2) で求めた  $x(t)$  の概形を描け。なお、グラフの横軸を時間  $t$ 、縦軸を変位  $x(t)$



7. 初期値を  $\dot{x}(0) = 0, x(0) = 1$  とするとき、微分方程式  $\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t) = 0$  を解け。

両辺にラプラス変換を施すと、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t)] &= \mathcal{L}[0] \\ \Leftrightarrow \{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + \{sX(s) - x(0)\} + X(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{s^2 + s + 1\} X(s) - s - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \{s^2 + s + 1\} X(s) &= s + 1 \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{s + 1}{s^2 + s + 1} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{(s + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= e^{-\frac{t}{2}} \left\{ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right\}\end{aligned}$$

8.  $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$  をラプラス逆変換せよ。

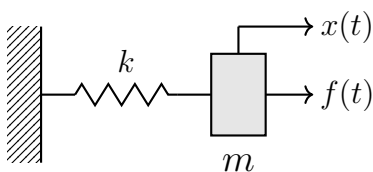
$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s(s+1)^2} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{-1}{(s+1)^2}\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと、

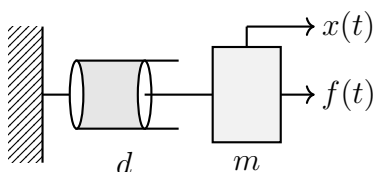
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+1)^2}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= 1 - e^{-t} - te^{-t}\end{aligned}$$

9. 下図で表される物理モデルに対する微分方程式を求め、ラプラス変換を行え。

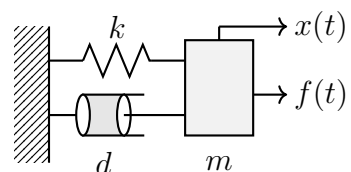
(1)



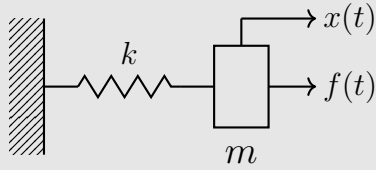
(2)



(3)



9.(1)



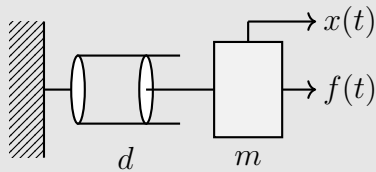
運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -kx(t) + f(t) \\ \Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + kx(t) &= f(t) \end{aligned}$$

両辺にラプラス変換を施すと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[m\ddot{x}(t) + kx(t)] &= \mathcal{L}[f(t)] \\ \Leftrightarrow m\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + kX(s) &= F(s) \\ \Leftrightarrow (ms^2 + k)X(s) - mx(0)s - m\dot{x}(0) &= F(s) \\ \Leftrightarrow (ms^2 + k)X(s) &= F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k} \end{aligned}$$

9.(2)



運動方程式は

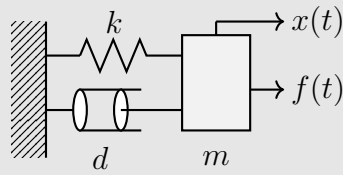
$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -d\dot{x}(t) + f(t) \\ \Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) &= f(t) \end{aligned}$$

両辺にラプラス変換を施すと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t)] &= \mathcal{L}[f(t)] \\ \Leftrightarrow m\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + d\{sX(s) - x(0)\} &= F(s) \\ \Leftrightarrow (ms^2 + ds)X(s) - mx(0)s - m\dot{x}(0) - dx(0) &= F(s) \\ \Leftrightarrow (ms^2 + ds)X(s) &= F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0)}{ms^2 + ds} \end{aligned}$$



9.(3)



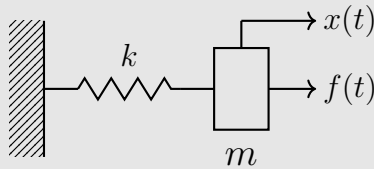
運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -kx(t) - d\dot{x}(t) + f(t) \\ \Leftrightarrow m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) &= f(t) \end{aligned}$$

両辺にラプラス変換を施すと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t)] &= \mathcal{L}[f(t)] \\ \Leftrightarrow m\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + d\{sX(s) - x(0)\} + kX(s) &= F(s) \\ \Leftrightarrow (ms^2 + ds + k)X(s) - mx(0)s - m\dot{x}(0) - dx(0) &= F(s) \\ \Leftrightarrow (ms^2 + ds + k)X(s) &= F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0)}{ms^2 + ds + k} \end{aligned}$$

10. 下図の物理モデルにおいて、 $f(t)$  に単位ステップ入力を印加するとき、 $x(t)$  を求めよ。なお、 $m = 9, k = 1$  とし、初期値をすべて 0 とする。



9(1) と同様にして運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + f(t)$$

両辺にラプラス変換を施すと

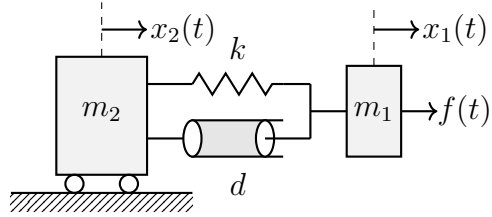
$$\begin{aligned} \mathcal{L}[m\ddot{x}(t) + kx(t)] &= \mathcal{L}[f(t)] \\ \Leftrightarrow m\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + kX(s) &= F(s) \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s(9s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{9s}{9s^2 + 1} \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと

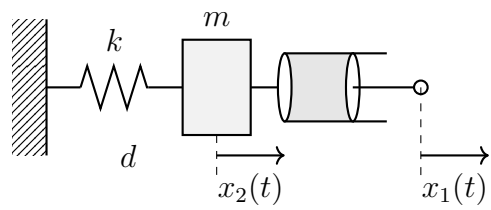
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{1}{9}}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= 1 - \cos\left(\frac{t}{3}\right) \end{aligned}$$

11. 下図で表される物理モデルに対する微分方程式を求めよ。

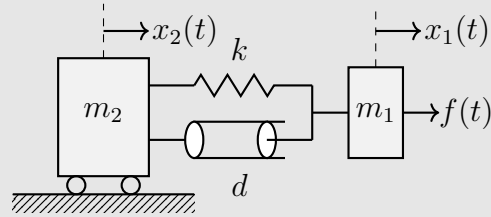
(1)



(2)



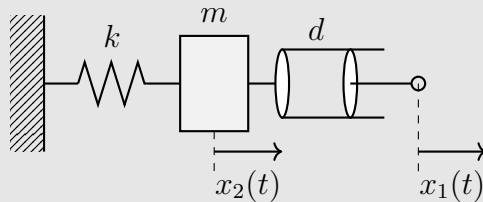
11.(1)



運動方程式は

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1(t) = -k \{x_1(t) - x_2(t)\} - d \{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\} + f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) = k \{x_1(t) - x_2(t)\} + d \{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\} \end{cases}$$

11.(2)



運動方程式は

$$\begin{cases} M \ddot{x}_1(t) = -d \{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\} \\ m \ddot{x}_2(t) = -k x_2(t) + d \{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\} \end{cases}$$