制御工学 I　演習① 解答
2025/05/21
Yudai

1. 次の伝達関数で表されるシステムのラプラス逆変換を行え。

$$(1)\quad G_1(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} \qquad (2)\quad G_2(s) = \frac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$$

1. (1) $G_1(s) = \dfrac{1}{s^2+2s+2}$

$$G_1(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}$$
$$\Leftrightarrow G_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$
$$\Leftrightarrow G_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1^2}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[G_1(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right]$$
$$\Leftrightarrow g_1(t) = e^{-t} sin(t)$$

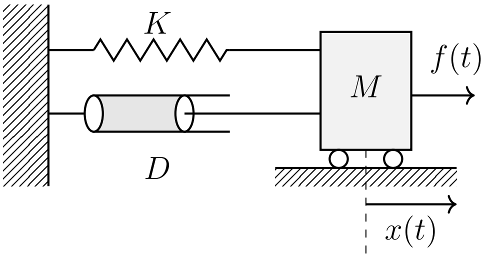
1. (2) $G_2(s) = \dfrac{6}{s^3+6s^2+11s+6}$

$$X(s) = \frac{1}{s^3+6s^2+11s+6}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{(\frac{1}{2})}{s+1} + \frac{-1}{s+2} + \frac{(\frac{1}{2})}{s+3}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\frac{1}{2})}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\frac{1}{2})}{s+3}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = (\frac{1}{2})e^{-t} - e^{-2t} + (\frac{1}{2})e^{-3t}$$

2. 以下の問に答えよ。なお、システムの入力を外力 $f(t)$、出力を変位 $x(t)$ とし、初期状態において系は静止しているとする。



(1) 上図によって示されるシステムの運動方程式ならびに伝達関数を求めよ。

(2) 各パラメータを $M=1, D=5, K=6$ として、インパルス応答を求めよ。

(3) 問 (2) のパラメータを用いて、単位ステップ応答 $x(t)$ を求めよ。

(4) 単位ステップ応答の概形を描け。なおグラフの横軸を時間 t, 縦軸を変位 $x(t)$ とする。

(5)$M=1, D=0, K=0$, 入力を $f(t)=\sin\omega t$ として、応答 $x(t)$ を求めよ。

(6)$M=1, D=0, K=2$ として、ステップ入力を与えたときの応答 $x(t)$ を求めよ。

(7)$M=1, D=2, K=1$, 入力を $f(t)=\sin\omega t$ として、応答 $x(t)$ を求めよ。

(8)$M=1, D=4, K=5$ として、ステップ入力を与えたときの応答 $x(t)$ を求めよ。

2. (1) 上図によって示されるシステムの運動方程式ならびに伝達関数を求めよ。

$x(t)$ に関する運動方程式は

$$M\ddot{x} = f(t) - Kx - D\dot{x}$$

また伝達関数は

$$\begin{aligned}
& M\ddot{x} + Kx + D\dot{x} = f(t) \\
\therefore\quad & \mathcal{L}\left[M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\therefore\quad & \left(Ms^2 + Ds + K\right)X(s) = F(s) \quad \left[\because \dot{x}(0) = x(0) = 0\right] \\
\therefore\quad & G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}
\end{aligned}$$

2. (2) 各パラメータを $M=1, D=5, K=6$ として、インパルス応答を求めよ。

パラメータを代入し、インパルス入力のラプラス変換は $F(s)=1$ なので

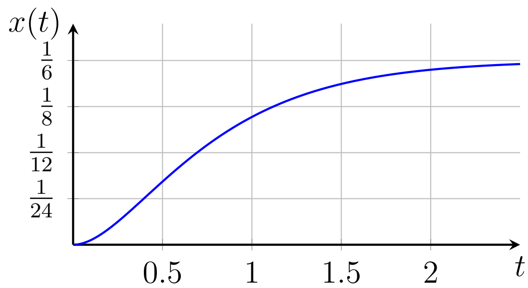
$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{s^2+5s+6} \\
\therefore \quad X(s) &= G(s)F(s) = \frac{1}{s^2+5s+6} \\
\therefore \quad X(s) &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\
\therefore \quad X(s) &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\
\therefore \quad \mathcal{L}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{s+2}\right] - \left[\frac{1}{s+3}\right] \\
\therefore \quad x(t) &= e^{-2t} - e^{-3t}
\end{aligned}
$$

2. (3) 問 (2) のパラメータを用いて、単位ステップ応答 $x(t)$ を求めよ。

パラメータを代入し、ステップ入力のラプラス変換は $F(s)=\dfrac{1}{s}$ なので

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{1}{s^2+5s+6} \\
\therefore \quad X(s) &= G(s)F(s) = \frac{1}{s(s^2+5s+6)} \\
\therefore \quad X(s) &= \frac{1}{s(s+2)(s+3)} \\
\therefore \quad X(s) &= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{s} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+2} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+3} \\
\therefore \quad \mathcal{L}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{s}\right] + \left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+2}\right] + \left[\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{s+3}\right] \\
\therefore \quad x(t) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}
\end{aligned}
$$

2. (4) 単位ステップ応答の概形を描け。なおグラフの横軸を時間 t, 縦軸を変位 $x(t)$ とする。



2. (5) $M=1, D=0, K=0,$ 入力を $f(t)=\sin\omega t$ として、応答 $x(t)$ を求めよ。

パラメータを代入し、$F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ なので

$$
\begin{aligned}
& G(s)=\frac{1}{s^2} \\
\therefore\quad & X(s)=G(s)F(s)=\frac{\omega}{s^2(s^2+\omega^2)} \\
\therefore\quad & X(s)=\frac{(\frac{1}{\omega})}{s^2}+\frac{-(\frac{1}{\omega})}{s^2+\omega^2} \\
\therefore\quad & \mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\frac{1}{\omega})}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-(\frac{1}{\omega})}{s^2+\omega^2}\right] \\
\therefore\quad & x(t)=\frac{1}{\omega}\left(t-\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)
\end{aligned}
$$

2. (6) $M=1, D=0, K=2$ としてステップ入力を与えたときの応答 $x(t)$ を求めよ。

パラメータを代入し、ステップ入力のラプラス変換は $F(s)=\dfrac{1}{s}$ なので

$$
\begin{aligned}
& G(s)=\frac{1}{s^2+2} \\
\therefore\quad & X(s)=G(s)F(s)=\frac{1}{s(s^2+2)} \\
\therefore\quad & X(s)=\frac{(\frac{1}{2})}{s}+\frac{-(\frac{1}{2}s)}{s^2+2} \\
\therefore\quad & \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(\frac{1}{2})}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-(\frac{1}{2}s)}{s^2+2}\right] \\
\therefore\quad & x(t)=\frac{1}{2}\left\{1-\cos(\sqrt{2}t)\right\}=\sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}
$$

2. (7) $M=1, D=2, K=1,$ 入力を $f(t)=\sin\omega t$ として、応答 $x(t)$ を求めよ。

パラメータを代入し、$F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$ なので

$$
\begin{aligned}
&G(s)=\frac{1}{s^2+2s+1}\\
\therefore\quad &X(s)=G(s)F(s)=\frac{\omega}{(s+1)^2(s^2+\omega^2)}\\
\therefore\quad &X(s)=\frac{\left(\dfrac{\omega}{\omega^2+1}\right)}{(s+1)^2}+\frac{\left(\dfrac{2}{(\omega^2+1)^2}\right)}{s+1}+\frac{\left(\dfrac{-2\omega s-\omega^3+\omega}{(1+\omega^2)^2}\right)}{s^2+\omega^2}\\
\therefore\quad &\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]\\
&=\frac{1}{(\omega^2+1)^2}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega(\omega^2+1)}{(s+1)^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2\omega s-\omega^3+\omega}{s^2+\omega^2}\right]\right\}\\
\therefore\quad &x(t)=\frac{1}{(\omega^2+1)^2}\left\{\omega(\omega^2+1)te^{-t}+2e^{-t}-2\omega\cos(\omega t)+(1-\omega^2)\sin(\omega t)\right\}
\end{aligned}
$$

2. (8) $M=1, D=4, K=5$ としてステップ入力を与えたときの応答 $x(t)$ を求めよ。

パラメータを代入し、$F(s)=\dfrac{1}{s}$ なので

$$
\begin{aligned}
&G(s)=\frac{1}{s^2+4s+5}\\
\therefore\quad &X(s)=\frac{1}{s(s^2+4s+5)}\\
\therefore\quad &X(s)=\frac{\left(\frac{1}{5}\right)}{s}+\frac{\left(-\frac{s}{5}-\frac{4}{5}\right)}{s^2+4s+5}\\
\therefore\quad &X(s)=\frac{1}{5s}-\frac{1}{5}\cdot\frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+1}\\
\therefore\quad &\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]\\
&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{5s}\right]-\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right]-\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{(s+2)^2+1}\right]\\
\therefore\quad &x(t)=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-2t}\cos t-\frac{2}{5}e^{-2t}\sin t
\end{aligned}
$$

3. 次の微分方程式について、初期値をすべて 0 として、$x(t)$ を求めよ。

(1) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x} + 2x(t) = \sin 2t$

(2) $\dot{x}(t) + x(t) = 1(t) - 1(t-2)$

3.(1) $\ddot{x}(t) + 2\dot{x} + 2x(t) = \sin 2t$

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\left[\ddot{x}(t) + 2\dot{x} + 2x(t)\right] = \mathcal{L}\left[\sin 2t\right]$$
$$\Leftrightarrow \left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + 2\left\{sX(s) - x(0)\right\} + 2X(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$$
$$\Leftrightarrow s^2X(s) + 2sX(s) + 2X(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{(s^2+2^2)(s^2+2s+2)}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{-\frac{1}{5}s - \frac{1}{5}}{(s^2+2^2)} + \frac{\frac{1}{5}s + \frac{3}{5}}{(s^2+2s+2)}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = -\frac{1}{5}\frac{s + \frac{1}{2}\cdot 2}{(s^2+2^2)} + \frac{1}{5}\frac{(s+1)+2}{((s+1)^2+1)}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{5}\frac{s + \frac{1}{2}\cdot 2}{(s^2+2^2)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{5}\frac{(s+1)+2}{((s+1)^2+1)}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = -\frac{1}{5}\left\{\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right\} + \frac{1}{5}e^{-t}\left\{\cos t + \sin 2t\right\}$$

3.(2) $\dot{x}(t) + x(t) = 1(t) - 1(t-2)$

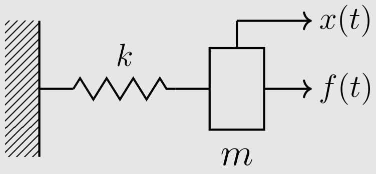
両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\left[\dot{x}(t) + x(t)\right] = \mathcal{L}\left[1(t) - 1(t-2)\right]$$
$$\Leftrightarrow \left\{sX(s) - x(0)\right\} + X(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} \qquad \left[\because \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)\right]$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s(s+1)} - \frac{e^{-2s}}{s(s+1)}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \left\{\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s+1}\right\}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\left\{\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s+1}\right\}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = 1 - e^{-t} - \left\{1 - e^{-(t-2)}\right\}1(t-2)$$

4. 下図の物理モデルにおいて、$f(t)$ に単位ステップ入力を印加するとき、$x(t)$ を求めよ。なお、$m = 9, k = 1$ とし、初期値をすべて 0 とする。



9(1) と同様にして運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) = -kx(t) + f(t)$$

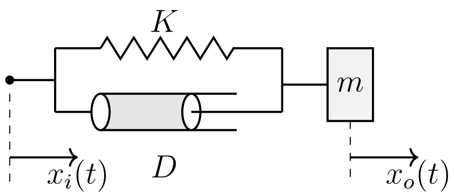
両辺にラプラス変換を施すと

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[m\ddot{x}(t) + kx(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\Leftrightarrow\ & m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + kX(s) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0)}{ms^2 + k} \\
\Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{1}{s(9s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{9s}{9s^2+1}
\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \frac{1}{9}}\right] \\
\Leftrightarrow\ & x(t) = 1 - \cos\left(\frac{t}{3}\right)
\end{aligned}$$

5. 下図に示すシステムについて、入力を変位 $x_i(t)$, 出力を変位 $x_o(t)$ としたとき、次の問に答えよ。なお、m は質量 [kg]、d は粘性係数 [Ns/m]、k はバネ定数 [N/m] とし、初期状態において系は静止しているとする。



(1) システムの運動方程式を求めよ。

(2) システムの伝達関数を求めよ。

(3) インパルス入力を印加した際の定常値を求めよ。

(4) ステップ入力を印加した際の定常値を求めよ。

(5) $m = 1, d = 3, k = 2$ とし、インパルス応答、ステップ応答をそれぞれ求めよ。

(6) $m = 1, d = 0, k = 1$ とし、ステップ応答を求めよ。

(7) $m = 1, d = 2, k = 3$ とし、ステップ応答を求めよ。

(8) $m = 1, d = 2, k = 1$ とし、入力 $x_1(t) = \sin(t)$ を印加したときの応答を求めよ。

(9) $m = 1, d = 1, k = 0$ とし、入力 $x_1(t) = \cos(t)$ を印加したときの応答を求めよ。

5.(1) システムの運動方程式を求めよ。

$x(t)$ に関する運動方程式は

$$m\ddot{x}_0 = -k(x_o - x_i) - d(\dot{x}_o - \dot{x}_i)$$

5.(2) システムの伝達関数を求めよ。

伝達関数は

$$\begin{aligned}
&m\ddot{x}_0 = -k(x_o - x_i) - D(\dot{x}_o - \dot{x}_i) \\
&m\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + kx_o = D\dot{x}_i + kx_i \\
\therefore\quad &\mathcal{L}\left[M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + kx_o\right] = \mathcal{L}\left[D\dot{x}_i + kx_i\right] \\
\therefore\quad &\left(ms^2 + Ds + k\right) X_o(s) = (Ds + k)X_i(s) \quad [\because \text{初期値はすべてゼロ}] \\
\therefore\quad &G(s) \;=\; \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \;=\; \frac{Ds + k}{ms^2 + Ds + k}
\end{aligned}$$

5.(3) インパルス入力を印加した際の定常値を求めよ。

インパルス入力のラプラス変換は $X_i(s) = 1$ なので

$$
\begin{aligned}
G(s) &= \frac{ds+k}{ms^2+ds+k} \\
\therefore \quad X_o(s) &= G(s)X_i(s) = \frac{ds+k}{ms^2+ds+k}
\end{aligned}
$$

最終値定理より

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x_o(t) &= \lim_{s\to 0} sX_o(s) \\
&= \lim_{s\to 0} \frac{ds^2+ks}{ms^2+ds+k} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

※ x_o を強引に求めてから定常値を求める方法 (非推奨)

$$
\begin{aligned}
X_o(s) &= \frac{ds+k}{ms^2+ds+k} \\
\therefore \quad X_o(s) &= \frac{\frac{d}{m}s+\frac{k}{m}}{s^2+\frac{d}{m}s+\frac{k}{m}} \quad [\because m \neq 0] \\
\therefore \quad X_o(s) &= \frac{2As+B^2}{s^2+2As+B^2} \quad \left[A = \frac{d}{2m}, B = \sqrt{\frac{k}{m}}\right] \\
\therefore \quad X_o(s) &= \frac{2As+B^2}{(s+A)^2+B^2-A^2} \\
\therefore \quad X_o(s) &= \frac{2A(s+A)}{(s+A)^2+B^2-A^2} + \frac{B^2-2A^2}{(s+A)^2+B^2-A^2}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[X_o(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2A(s+A)}{(s+A)^2+B^2-A^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{B^2-2A^2}{(s+A)^2+B^2-A^2}\right] \\
&\Leftrightarrow x_o(t) = 2Ae^{-At}\cos(\sqrt{B^2-A^2}t) + \frac{B^2-2A^2}{\sqrt{B^2-A^2}}e^{-At}\sin(\sqrt{B^2-A^2}t)
\end{aligned}
$$

以上より定常値は

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x_o(t) &= \lim_{t\to\infty}\left\{2Ae^{-At}\cos(\sqrt{B^2-A^2}t)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{B^2-2A^2}{\sqrt{B^2-A^2}}e^{-At}\sin(\sqrt{B^2-A^2}t)\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

5.(4) ステップ入力を印加した際の定常値を求めよ。

ステップ入力のラプラス変換は $X_i(s) = \frac{1}{s}$ なので

$$G(s) = \frac{ds + k}{ms^2 + ds + k}$$

$$\therefore \quad X_o(s) = G(s)X_i(s) = \frac{ds + K}{s(ms^2 + ds + k)}$$

最終値定理より

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} x_o(t) &= \lim_{s\to 0} sX_o(s) \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{ds + k}{ms^2 + ds + k} \\ &= 1\end{aligned}$$

※ $x_0(t)$ を強引に求める方法は、7.(3) の面倒さにさらに部分分数分解の面倒さも加わるので、再現性はない。

5.(5)　$m = 1, d = 3, k = 2$ とし、インパルス応答、ステップ応答をそれぞれ求めよ。

(I) インパルス応答
パラメータを代入し、インパルス入力のラプラス変換は $F(s) = 1$ なので

$$G(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\therefore \quad X(s) = G(s)F(s) = \frac{3s + 2}{(s + 1)(s + 2)}$$

$$\therefore \quad X(s) = \frac{-1}{s + 1} + \frac{4}{s + 2}$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s + 1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s + 2}\right]$$

$$\therefore \quad x(t) = -e^{-t} + 4e^{-2t}$$

(II) ステップ応答
パラメータを代入し、ステップ入力のラプラス変換は $F(s) = \dfrac{1}{s}$ なので

$$G(s) = \frac{3s + 2}{s^2 + 3s + 2}$$

$$\therefore \quad X(s) = G(s)F(s) = \frac{3s + 2}{s(s + 1)(s + 2)}$$

$$\therefore \quad X(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s + 1} + \frac{-2}{s + 2}$$

$$\therefore \quad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-2}{s + 2}\right]$$

$$\therefore \quad x(t) = 1 + e^{-t} - 2e^{-2t}$$

5.(6)　$m = 1, d = 0, k = 1$ とし、ステップ応答を求めよ。

パラメータを代入し、ステップ入力のラプラス変換は $F(s) = \dfrac{1}{s}$ なので

$$G(s) = \frac{1}{s^2+1}$$
$$\therefore \quad X(s) = G(s)F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$$
$$\therefore \quad X(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s}{s^2+1}$$
$$\therefore \quad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-s}{s^2+1}\right]$$
$$\therefore \quad x(t) = 1 - \cos t$$

5.(7)　$m = 1, d = 2, k = 3$ とし、ステップ応答を求めよ。

パラメータを代入し、ステップ入力のラプラス変換は $F(s) = \dfrac{1}{s}$ なので

$$G(s) = \frac{2s+3}{s^2+2s+3}$$
$$\therefore \quad X(s) = G(s)F(s) = \frac{2s+3}{s\left\{(s+1)^2+2\right\}}$$
$$\therefore \quad X(s) = \frac{1}{s} + \frac{-s}{(s+1)^2+2}$$
$$\therefore \quad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-(s+1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}}{(s+1)^2+2}\right]$$
$$\therefore \quad x(t) = 1 - e^{-t}\left\{\cos\sqrt{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right\}$$

5.(8)　$m = 1, d = 2, k = 1$ とし、入力 $x_i(t) = \sin(t)$ を印加したときの応答を求めよ。

パラメータを代入し、$x_i(t) = \sin(t)$ のラプラス変換は $X_i(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ なので

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1}$$
$$\therefore \quad X(s) = G(s)F(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2(s^2+1)}$$
$$\therefore \quad X(s) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(s+1)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{s+1} + \frac{\left(-\frac{1}{2}s+1\right)}{s^2+1}$$
$$\therefore \quad \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{(s+1)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}s+1\right)}{s^2+1}\right]$$
$$\therefore \quad x(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}(t-1) - \frac{1}{2}\cos t + \sin t$$

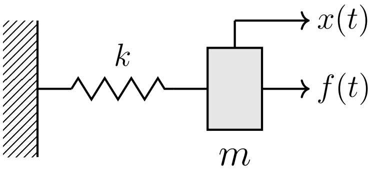
5.(9)　$m=1, d=1, k=0$ とし、入力 $x_1(t)=\cos(t)$ を印加したときの応答を求めよ。

パラメータを代入し、$x_i(t)=\cos(t)$ のラプラス変換は $X_i(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$ なので

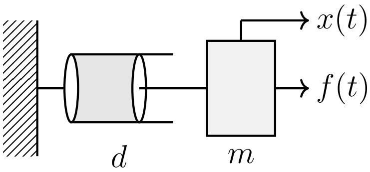
$$
\begin{aligned}
& G(s)=\frac{s}{s^2+s} \\
\therefore\quad & X(s)=G(s)F(s)=\frac{s}{(s+1)(s^2+1)} \\
\therefore\quad & X(s)=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s^2+1} \\
\therefore\quad & \mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}(s+1)}{s^2+1}\right] \\
\therefore\quad & x(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)
\end{aligned}
$$

6. 下図で表される物理モデルに対する微分方程式を求め、ラプラス変換を行え。

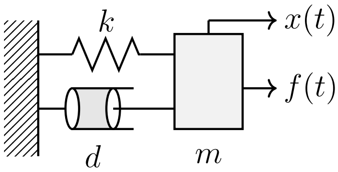
(1)



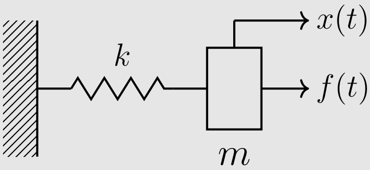
(2)



(3)



6.(1)



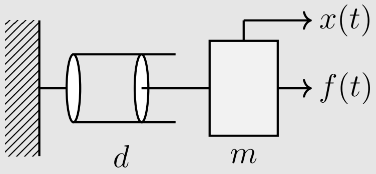
運動方程式は

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x}(t)=-kx(t)+f(t) \\
\Leftrightarrow\ & m\ddot{x}(t)+kx(t)=f(t)
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス変換を施すと

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}\left[m\ddot{x}(t)+kx(t)\right]=\mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\Leftrightarrow\ & m\left\{s^2X(s)-sx(0)-\dot{x}(0)\right\}+kX(s)=F(s) \\
\Leftrightarrow\ & (ms^2+k)X(s)-mx(0)s-m\dot{x}(0)=F(s) \\
\Leftrightarrow\ & (ms^2+k)X(s)=F(s)+mx(0)s+m\dot{x}(0) \\
\Leftrightarrow\ & X(s)=\frac{F(s)+mx(0)s+m\dot{x}(0)}{ms^2+k}
\end{aligned}
$$

6.(2)



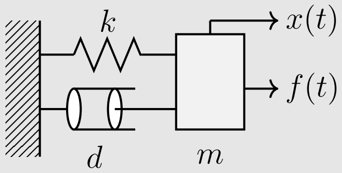
運動方程式は

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x}(t) = -d\dot{x}(t) + f(t) \\
\Leftrightarrow\ & m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) = f(t)
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス変換を施すと

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}\left[m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\Leftrightarrow\ & m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + d\left\{sX(s) - x(0)\right\} = F(s) \\
\Leftrightarrow\ & (ms^2 + ds)X(s) - mx(0)s - m\dot{x}(0) - dx(0) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ & (ms^2 + ds)X(s) = F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0) \\
\Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0)}{ms^2 + ds}
\end{aligned}
$$

6.(3)



運動方程式は

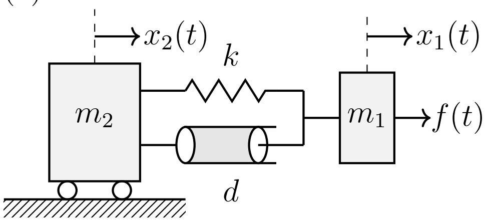
$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x}(t) = -kx(t) - d\dot{x}(t) + f(t) \\
\Leftrightarrow\ & m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス変換を施すと

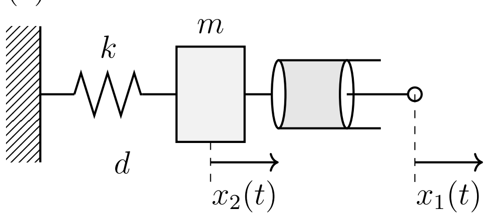
$$
\begin{aligned}
& \mathcal{L}\left[m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\Leftrightarrow\ & m\left\{s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\right\} + d\left\{sX(s) - x(0)\right\} + kX(s) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ & (ms^2 + ds + k)X(s) - mx(0)s - m\dot{x}(0) - dx(0) = F(s) \\
\Leftrightarrow\ & (ms^2 + ds + k)X(s) = F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0) \\
\Leftrightarrow\ & X(s) = \frac{F(s) + mx(0)s + m\dot{x}(0) + dx(0)}{ms^2 + ds + k}
\end{aligned}
$$

7. 下図で表される物理モデルに対する微分方程式を求めよ。

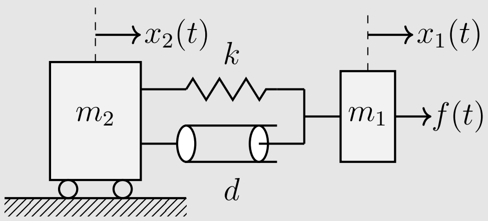
(1)



(2)



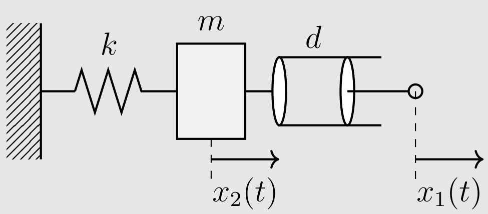
7.(1)



運動方程式は

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1(t) = -k\left\{x_1(t) - x_2(t)\right\} - d\left\{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right\} + f(t) \\ m_2\ddot{x}_2(t) = k\left\{x_1(t) - x_2(t)\right\} + d\left\{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right\} \end{cases}$$

7.(2)



運動方程式は

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1(t) = -d\left\{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right\} \\ m\ddot{x}_2(t) = -kx_2(t) + d\left\{\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)\right\} \end{cases}$$

8. 次の伝達関数で表されるシステムの単位ステップ応答を求めよ。

(1) $G(s) = \dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)}$ (2) $G(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2}$ (3) $G(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+5}$

8.(1) $G(s) = \dfrac{s+4}{(s+1)(s+2)}$

$Y(s) = G(s)U(s)$ であり，$U(s) = \dfrac{1}{s}$ であるから．

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+4}{(s+1)(s+2)}U(s) \\ &= \frac{s+4}{s(s+1)(s+2)} \quad [\because U(s) = \frac{1}{s}] \\ &= \frac{2}{s} + \frac{-3}{s+1} + \frac{1}{s+2} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 2 - 3e^{-t} + e^{-2t} \end{aligned}$$

8.(2) $G(s) = \dfrac{2}{(s+1)^2}$

$Y(s) = G(s)U(s)$ であり，$U(s) = \dfrac{1}{s}$ であるから．

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{(s+1)^2}U(s) \\ &= \frac{2}{s(s+1)^2} \quad [\because U(s) = \frac{1}{s}] \\ &= \frac{2}{s} + \frac{-2}{(s+1)^2} + \frac{-2}{s+1} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 2 - 2e^{-t}(t+1) \end{aligned}$$

8.(3) $G(s) = \dfrac{5}{s^2+2s+5}$

$Y(s) = G(s)U(s)$ であり，$U(s) = \dfrac{1}{s}$ であるから．

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{5}{s^2+2s+5}U(s) \\ &= \frac{5}{s(s^2+2s+5)} \quad [\because U(s) = \frac{1}{s}] \\ &= \frac{1}{s} + \frac{-s-2}{s^2+2s+5} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+2^2} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 1 - e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t) \end{aligned}$$