[21] 単位インパルス応答が $y(t) = 7e^{-2t} + 2e^{-3t}$ であるとき，
このシステムの伝達関数を求めよ．

伝達関数は単位インパルス応答 $y(t)$ をラプラス変換して得ることができる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y(t)] &= 7\mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] + 2\mathcal{L}\left[e^{-3t}\right] \\
&= \frac{7}{s+2} + \frac{2}{s+3} \\
&= \frac{7s+21+2s+4}{(s+2)(s+3)} \\
&= \frac{9s+25}{(s+2)(s+3)} \\
\Leftrightarrow G(s) &= \frac{9s+25}{(s+2)(s+3)}
\end{aligned}$$

[22] 単位インパルス応答が $y(t) = e^{-2t} + 3e^{-9t} - 4e^{-11t}$ であるとき，
このシステムの伝達関数を求めよ．

$$\begin{aligned}
G(s) &= \mathcal{L}[y(t)] \\
&= \mathcal{L}\left[e^{-2t}\right] + 3\mathcal{L}\left[e^{-9t}\right] - 4\mathcal{L}\left[e^{-11t}\right] \\
&= \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+9} - \frac{4}{s+11} \\
&= \frac{15s+93}{(s+2)(s+9)(s+11)}
\end{aligned}$$

[23] 単位ステップ応答が $y(t) = 5e^{-t} - 5e^{-7t}$ であるとき，
このシステムの伝達関数を求めよ．

入力信号 $u(t)$ は，大きさ 1 のステップ関数 $U(s) = \frac{1}{s}$ であるから，

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \mathcal{L}[y(t)] \\
&= 5\mathcal{L}\left[e^{-t}\right] - 5\mathcal{L}\left[e^{-7t}\right] \\
&= \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+7} \\
&= \frac{30}{(s+1)(s+7)} \\
\Leftrightarrow G(s) &= \frac{30s}{(s+1)(s+7)} \quad \left[\because G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}\right]
\end{aligned}$$

[24] 単位ステップ応答が $y(t) = 12 + 6t$ であるとき，
このシステムの伝達関数を求めよ．

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \mathcal{L}\left[y(t)\right] \\
&= 12\mathcal{L}\left[1\right] + 6\mathcal{L}\left[t\right] \\
&= \frac{12}{s} + \frac{6}{s^2} \\
\Leftrightarrow G(s) &= \frac{12s+6}{s} \qquad [\because G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, U(s) = \frac{1}{s}]
\end{aligned}$$

[25] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

であるときのインパルス応答を求めよ．

$Y(s) = G(s)U(s)$ であり，$U(s) = 1$ であるから．

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2}{s^2+3s+2}U(s) \\
&= \frac{2}{(s+1)(s+2)}U(s) \\
&= \frac{2}{(s+1)(s+2)} \qquad [\because U(s) = 1] \\
&= \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \\
\Leftrightarrow y(t) &= 2e^{-t} - 2e^{-2t}
\end{aligned}$$

[26] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{2}{s^2+3s+2}$$

であるときのステップ応答を求めよ．

$Y(s) = G(s)U(s)$ であり，$U(s) = \frac{1}{s}$ であるから．

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2}{s^2+3s+2}U(s) \\
&= \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \qquad [\because U(s) = \frac{1}{s}] \\
&= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \\
\Leftrightarrow y(t) &= 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}
\end{aligned}$$

[27] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{12s+30}{s^2+8s+15}$$

であるときのステップ応答を求めよ．

$Y(s) = G(s)U(s)$ であり，$U(s) = \frac{1}{s}$ であるから．

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{12s+30}{s^2+8s+15}U(s) \\ &= \frac{12s+30}{s(s+3)(s+5)} \quad [\because U(s) = \frac{1}{s}] \\ &= \frac{2}{s} + \frac{1}{s+3} - \frac{3}{s+5} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 2 + e^{-3t} - 3e^{-5t} \end{aligned}$$

[28] $x(t)[m^3/s]$ は，操作バルブ直後の流量を表し，長い配管を通って $L[s]$ 後に給水場所に到達したとする．
このとき，$x(t)$ から給水量 $y(t)$ までの伝達関数を求めよ．

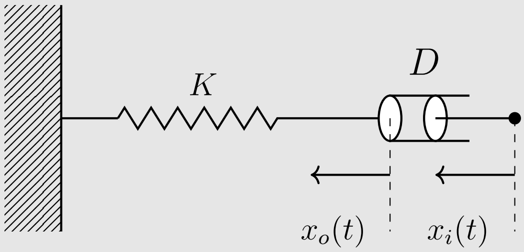
$y(t) = x(t-L)$ であるから，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[y(t)\right] &= \mathcal{L}\left[x(t-L)\right] \\ &= \int_0^\infty x(t-L)e^{-st}dt \\ \Leftrightarrow Y(s) &= e^{-Ls}X(s) \end{aligned}$$

ここで $Y(s) = G(s)X(s)$ であるから，

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-Ls}$$

[29] 変位 $x_i(t)[m]$ を入力信号，
ダッシュポットのシリンダの平衡点からの変位 $x_o(t)[m]$ を出力信号
とみなしたときの伝達関数を求めよ．ただし，$x_i(0)=0, x_o(0)=0$ とする．



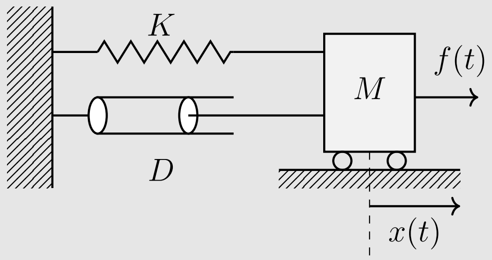
$x_o(t), x_i(t)$ について運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} m_o\ddot{x}_o = -K\,x_o - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big), \\ m_i\ddot{x}_i = D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) + f(t) \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力 $f(t)$ はわからないので，もう一方の式に着目すると，

$$\begin{aligned} & m_o\ddot{x}_o = -K\,x_o - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) \\ \therefore\quad & m_o\ddot{x}_o + K\,x_o + D\dot{x}_o = D\dot{x}_i \\ \therefore\quad & \mathcal{L}\left[m_o\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + K\,x_o\right] = \mathcal{L}\left[D\dot{x}_i\right] \\ \therefore\quad & (m_o s^2 + Ds + K)\,X_o(s) = D\,s\,X_i(s). \quad [\because x_i(0)=0, x_o(0)=0] \\ \therefore\quad & G(s) \;=\; \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \;=\; \frac{D\,s}{m_o s^2 + Ds + K} \\ \therefore\quad & G(s) = \frac{D\,s}{Ds + K} \quad [m_o = 0 \text{とした}] \end{aligned}$$

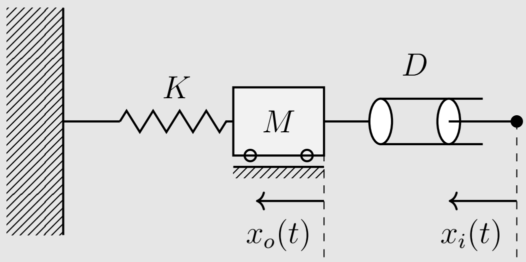
[30] 外力 $f(t)[N]$ を図の方向に考え，平衡点からの変位 $x(t)[m]$ を出力信号とみなしたときの伝達関数を求めよ．



$x(t)$ に関する運動方程式より

$$
\begin{aligned}
& M\ddot{x} = f(t) - Kx - D\dot{x} \\
\therefore\quad & M\ddot{x} + Kx + D\dot{x} = f(t) \\
\therefore\quad & \mathcal{L}\left[M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \\
\therefore\quad & (Ms^2 + Ds + K)\,X(s) = F(s) \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\
\therefore\quad & G(s) \;=\; \frac{X(s)}{F(s)} \;=\; \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}
\end{aligned}
$$

[31] 平衡点からの変位として，図中の $x_i(t)[m]$ と $x_o(t)[m]$ を考える．$x_i(t)$ を入力信号，$x_o(t)[m]$ を出力信号とみなしたときの伝達関数を求めよ．



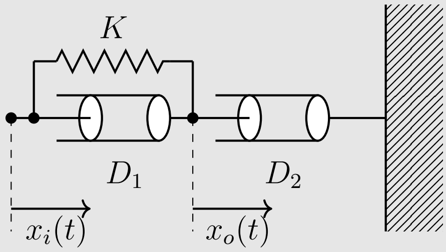
$x_o(t), x_i(t)$ について運動方程式を立てると，

$$
\begin{cases}
M\ddot{x}_o = -K\,x_o - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big), \\
m\ddot{x}_i = D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) + f(t)
\end{cases}
$$

ここで入力側にかかる力 $f(t)$ はわからないので，もう一方の式に着目すると，

$$
\begin{aligned}
& M\ddot{x}_o = -K\,x_o - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) \\
\therefore\quad & M\ddot{x}_o + K\,x_o + D\dot{x}_o = D\dot{x}_i \\
\therefore\quad & \mathcal{L}\left[M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + K\,x_o\right] = \mathcal{L}\left[D\dot{x}_i\right] \\
\therefore\quad & (Ms^2 + Ds + K)\,X_o(s) = D\,s\,X_i(s). \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\
\therefore\quad & G(s) \;=\; \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \;=\; \frac{D\,s}{Ms^2 + Ds + K}
\end{aligned}
$$

[32] 粘性減衰係数 $D_1[N \cdot s/m]$ のダッシュポットのピストンの平衡点からの変位 $x_i(t)[m]$ を入力信号，粘性減衰係数 $D_1[N \cdot s/m]$ のダッシュポットのピストンの平衡点からの 変位 $x_o(t)[m]$ を出力信号としたときの伝達関数を求めよ．



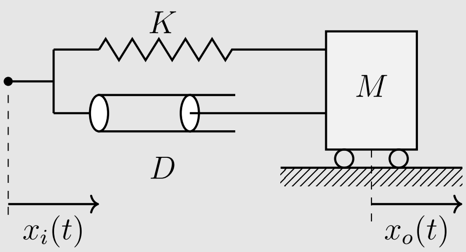
$x_o(t), x_i(t)$ について運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} M\ddot{x}_i = K(x_o - x_i) + D_1\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) + f(t), \\ m\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D_1\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) - D_2\dot{x}_o \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力 $f(t)$ はわからないので，もう一方の式に着目すると，

$$\begin{aligned} & m\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D_1\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) - D_2\dot{x}_o \\ \therefore\quad & m\ddot{x}_o + (D_1 + D_2)\dot{x}_o + K\,x_o = D_1\dot{x}_i + Kx_i \\ \therefore\quad & \mathcal{L}\left[m\ddot{x}_o + (D_1 + D_2)\dot{x}_o + K\,x_o\right] = \mathcal{L}\left[D_1\dot{x}_i + Kx_i\right] \\ \therefore\quad & \left\{ms^2 + (D_1 + D_2)s + K\right\} X_o(s) = (D_1 s + K)X_i(s) \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\ \therefore\quad & G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{D_1 s + K}{ms^2 + (D_1 + D_2)s + K} \\ \therefore\quad & G(s) = \frac{D_1 s + K}{(D_1 + D_2)s + K} \quad [\because m = 0 \text{とした}] \end{aligned}$$

[33] 平衡点からの変位として，図中の $x_i(t)[m]$ と $x_o(t)[m]$ を考える．
$x_i(t)[m]$ を入力信号，$x_o(t)[m]$ を出力信号とみなしたときの伝達巻子を求めよ．
台車は摩擦なく床を動くものとする．すべての変数の初期値はゼロである．



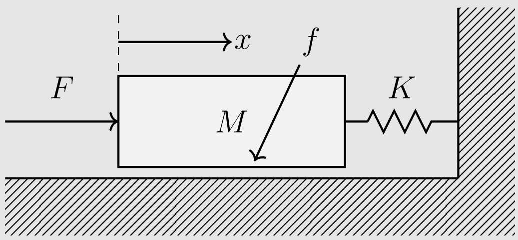
$x_o(t), x_i(t)$ について運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = K(x_o - x_i) + D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) + f(t), \\ M\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力 $f(t)$ はわからないので，もう一方の式に着目すると，

$$\begin{aligned} & M\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D\big(\dot{x}_o - \dot{x}_i\big) \\ \therefore\quad & M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + K\,x_o = D_1\dot{x}_i + Kx_i \\ \therefore\quad & \mathcal{L}\left[M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + K\,x_o\right] = \mathcal{L}\left[D\dot{x}_i + Kx_i\right] \\ \therefore\quad & \left\{Ms^2 + Ds + K\right\}\,X_o(s) = (Ds + K)X_i(s) \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\ \therefore\quad & G(s) \;=\; \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \;=\; \frac{Ds + K}{Ms^2 + Ds + K} \end{aligned}$$

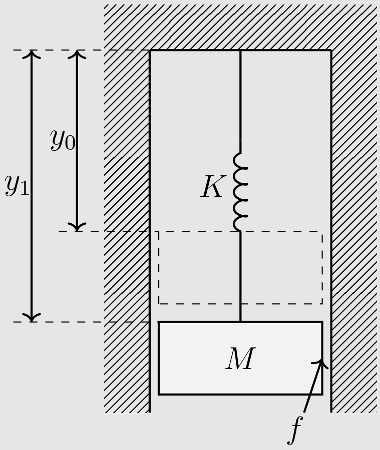
[34] この系の伝達関数を求めよ．ただし， f は粘性抵抗係数であり，
初期条件 $t = 0$ において $F = 0$



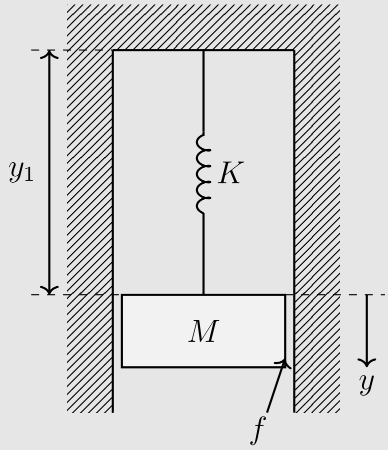
$x(t)$ について運動方程式を立てると，

$$\begin{aligned} & M\ddot{x} = -Kx + -f\dot{x} + F(t) \\ \therefore\quad & M\ddot{x} + f\dot{x} + Kx = F(t) \\ \therefore\quad & \mathcal{L}\left[M\ddot{x} + f\dot{x} + Kx\right] = \mathcal{L}\left[F(t)\right] \\ \therefore\quad & \left\{Ms^2 + fs + K\right\}\,X(s) = F(s) \quad [\because x(0) = 0, x(0) = 0] \\ \therefore\quad & G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + fs + K} \end{aligned}$$

[35] 長さ y_0 のばねの上端を固定し，下端に質量 M の物体をつり下げたとき，
ばねの長さが y_1 になって平衡した．
つぎに，物体に下向きの力 $F(t)$ を加えたとき，物体の平衡状態からの変位を y として運動方程式を作れ．
ただし物体と側壁との間には，粘性摩擦定数を f とする．



質量 – ばね – まさつ系（平衡状態）

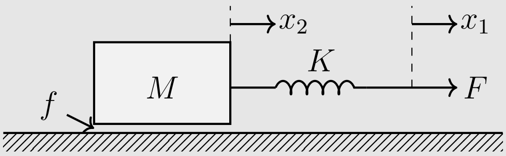


力を加えた場合

$y(t)$ について運動方程式を立てると，

$$M\ddot{y} = F(t) - f\dot{y} - Ky$$

[36] 質量 M の物体の一端にばねをつけ，
ばねを力 F で引っ張ったときの運動方程式を作れ．
物体と床面との間の粘性摩擦定数を f とする．



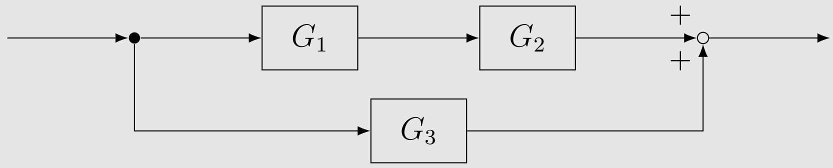
$x_1(t), x_2(t)$ について運動方程式を立てると，

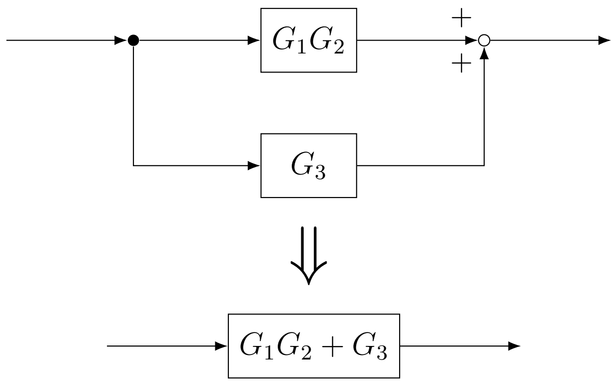
$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -K(x_1 - x_2) + F(t), \\ M\ddot{x}_2 = K(x_1 - x_2) - f\dot{x}_2 \end{cases}$$

ここで $m = 0$ として二式を合わせると

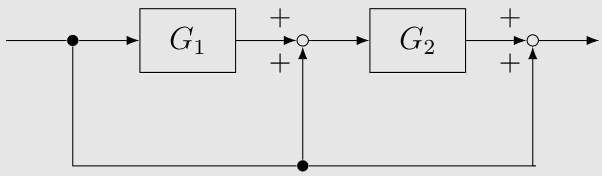
$$M\ddot{x}_2 = F(t) - f\dot{x}_2$$

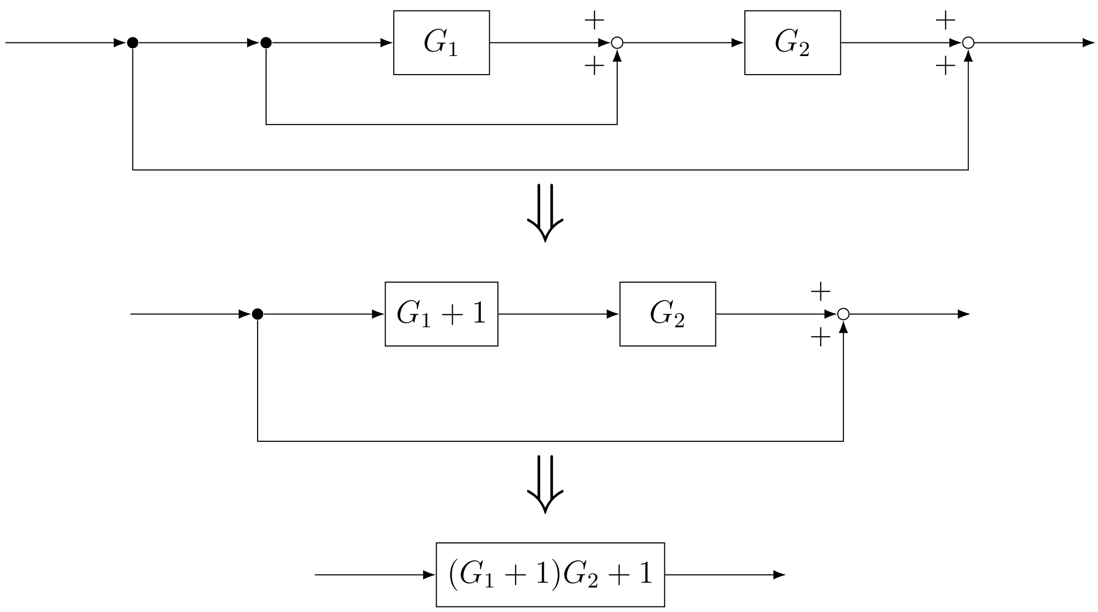
[37] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ．



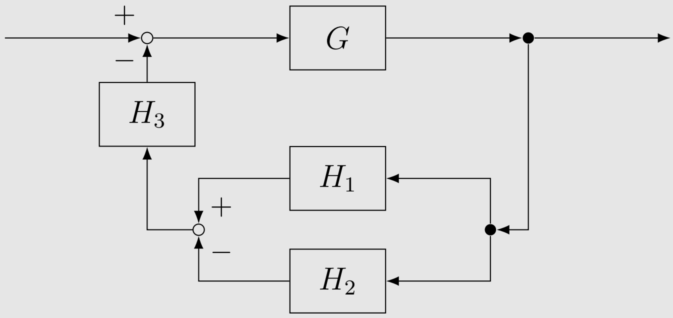


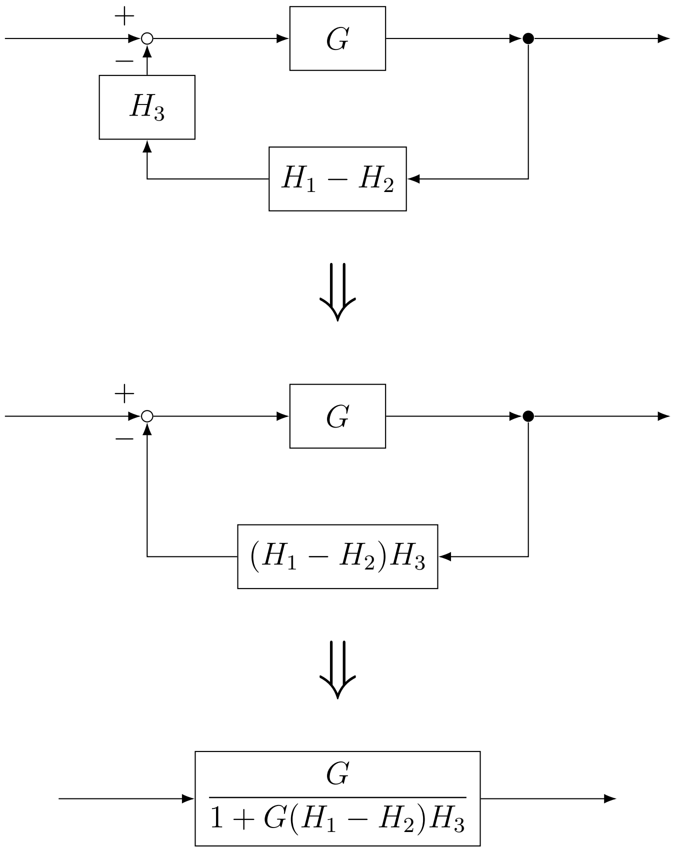
[38] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ．



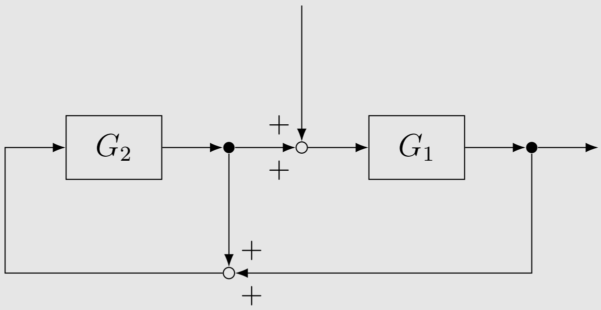


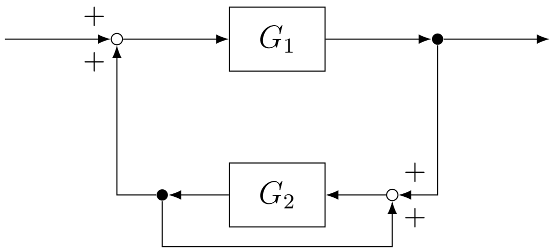
[39] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ．



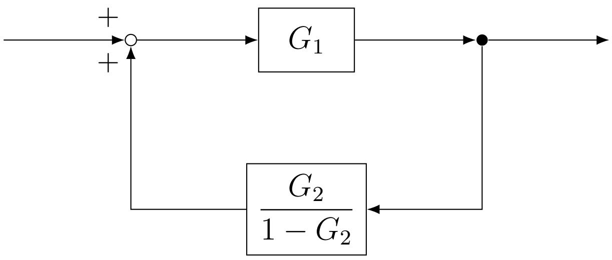


[40] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ.

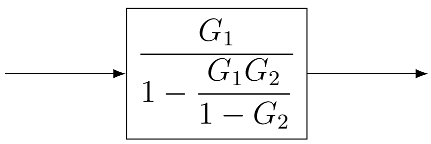




$$\Downarrow$$



$$\Downarrow$$



$$\Downarrow$$