[1] 指数関数 $x(t) = e^{at}$ をラプラス変換せよ．

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = \left[-\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^\infty$$

この式の右辺第 2 項が収束するには:

$$\mathrm{Re}[s-a] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[a]$$

ゆえに，ラプラス変換の定義が成り立つ条件下で，最終的に次のようにまとめられる．

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (\mathrm{Re}[s] > \mathrm{Re}[a])}$$

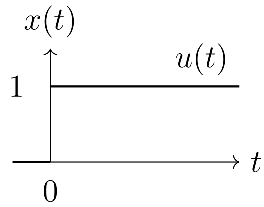
[2] 単位ステップ関数 $x(t) = 1$ をラプラス変換せよ．

単位ステップ関数の時間的変化を表しており，$t < 0$ において $x(t) = 0$ である．単位ステップ関数を $u(t)$ と表すことがある．

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \left[\frac{-1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s} - \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-st}}{s}$$

$\mathrm{Re}[s] > 0$ の定義域において収束．

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$



図：単位ステップ関数

[3] 単位インパルス関数 $x(t) = \delta(t)$ をラプラス変換せよ．

単位ステップ関数はディラックのデルタ関数ともよばれ，$\delta(t)$ で記述される．h をゼロに近づけることで定義され，その面積では 1 である．

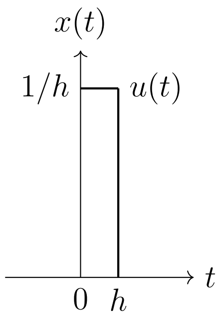
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

単位インパルス関数には次のような性質がある

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) dt = f(a)$$

$\mathrm{Re}[s] > 0$　の定義域において

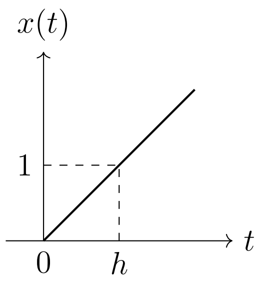
$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$



図：単位インパルス関数

[4] ランプ関数 $x(t) = t$ をラプラス変換せよ．

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\
&= \left[t \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt \\
&= 0 + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \\
&= \frac{1}{s} \mathcal{L}\left[1\right] \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$



図：ランプ関数

[5] 正弦波関数 $x(t) = \sin(\omega t)$ をラプラス変換せよ.

オイラーの等式より

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\sin(\omega t)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

[6] 余弦波関数 $x(t) = \cos(\omega t)$ をラプラス変換せよ.

[5] と同様にして

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2+\omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2+\omega^2} \end{aligned}$$

[7] ラプラス変換は線形の性質があることを示せ.

線形の性質

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[x_1(t) + x_2(t)\right] = \mathcal{L}\left[x_1(t)\right] + \mathcal{L}\left[x_2(t)\right] \\ \mathcal{L}\left[a x_1(t)\right] = a\mathcal{L}\left[x_1(t)\right] \end{cases}$$

を示す.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[a x_1(t) + b x_2(t)\right] &= \int_0^\infty \left\{a x_1(t) + b x_2(t)\right\} e^{-st} dt \\ &= a\int_0^\infty x_1(t) e^{-st} dt + b\int_0^\infty x_2(t) e^{-st} dt \\ &= a\mathcal{L}\left[x_1(t)\right] + b\mathcal{L}\left[x_2(t)\right] \end{aligned}$$

[8] 時間関数 $x(t)$ を右に τだけ推移させた関数 $x(t-\tau)$ に対するラプラス変換は, $x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ を用いて

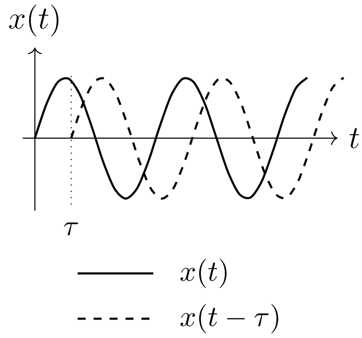
$$\mathcal{L}\left[x(t-\tau)\right] = e^{-s\tau t}X(s)$$

と表されることを示せ.（時間領域における推移定理）

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[x(t-\tau)\right] &= \int_0^\infty x(t-\tau)e^{-st}dt \\ &= \int_\tau^\infty x(t-\tau)e^{-st}dt \\ &\left[\because t < \tau \text{の時} \quad x(t-\tau) = 0\right]\end{aligned}$$

ここで変数変換$\tau' = $ t - τを行う.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[x(t-\tau)\right] &= \int_0^{\infty-\tau} x(\tau')e^{-s(\tau+\tau')}d\tau' \\ &= e^{-\tau s}\int_0^\infty x(\tau')e^{-s\tau'}d\tau' \\ &= e^{-\tau s}\mathcal{L}\left[x(t)\right] \\ &= e^{-\tau s}X(s)\end{aligned}$$



図：時間領域における推移

[9] $x(t)$ のラプラス変換 $X(s)$ において複素変数 s を b だけ推移させて $s+b$ とすれば, どうなるのか？

$$\begin{aligned}X(s+b) &= \int_0^\infty x(t)e^{-(s+b)t}dt \\ &= \int_0^\infty \left\{e^{-bt}x(t)\right\}e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L}\left[e^{-bt}x(t)\right]\end{aligned}$$

[10] $e^{\lambda t}sin(\omega t)$ をラプラス変換せよ．

　ラプラス変換の第一移動定理 (問題 [8])

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a)$$

と，正弦波のラプラス変換 (問題 [5])

$$\mathcal{L}\left[sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad (= X(s))$$

を考えれば，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{\lambda t}sin(\omega t)\right] &= X(s-\lambda)\\ &= \frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}\end{aligned}$$

[11] 時間関数 $x(t)$ の微分をラプラス変換せよ．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt\\ &= \left[x(t)e^{-st}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt\end{aligned}$$

$\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0$ となる $\sigma < Re[s]$ において

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

[12] 次の微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$9\frac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)=1$$

ただし，初期値は，$x(0)=0,\ x'(0)=0$ とする．

まず，時間関数 $x(t)$ の二階微分のラプラス変換は $\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]=sX(s)-x(0)$ より，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right]&=s\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right]-x'(0)\\&=s\left\{sX(s)-x(0)\right\}-x'(0)\\&=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\end{aligned}$$

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\begin{aligned}&9\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right]+\mathcal{L}[x(t)]=\mathcal{L}[1]\\ \Leftrightarrow\quad&9\left\{s^2X(s)-sx(0)-x'(0)\right\}+X(s)=\frac{1}{s}\\ \Leftrightarrow\quad&9s^2X(s)+X(s)=\frac{1}{s}\\ \Leftrightarrow\quad&(9s^2+1)X(s)=\frac{1}{s}\\ \Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{1}{s(9s^2+1)}\\ \Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{(\frac{1}{3})^2}{s(s^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2)}\\ \Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}\qquad\left[\because\omega=\frac{1}{3}\text{とおいた}\right]\\ \Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{\omega^2}{s(s+j\omega)(s-j\omega)}\\ \Leftrightarrow\quad&X(s)=\frac{1}{s}-\frac{\frac{1}{2}}{s+j\omega}-\frac{\frac{1}{2}}{s-j\omega}\qquad\left[\because\text{ヘヴィサイドの展開定理}\right]\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+j\omega}\right]-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-j\omega}\right]\\ \Leftrightarrow\quad&x(t)=1-\frac{1}{2}e^{-j\omega t}-\frac{1}{2}e^{j\omega t}\\ \Leftrightarrow\quad&x(t)=1-\frac{1}{2}\left(e^{-j\omega t}+e^{j\omega t}\right)\\ \Leftrightarrow\quad&x(t)=1-cos\omega t\qquad\left[\because\text{オイラーの等式}\right]\\ \Leftrightarrow\quad&x(t)=1-cos\left(\frac{t}{3}\right)\end{aligned}$$

[13] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=4$$

ただし，初期条件は，$x(0)=1,\ x^{(1)}(0)=0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)\right]=\mathcal{L}\left[4\right]$$

$$\Leftrightarrow \left\{s^2X(s)-sx(0)\right\}-x^{(1)}(0)+3\left\{sX(s)-x(0)\right\}+2X(s)=\frac{4}{s}$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s)+3sX(s)+2X(s)=\frac{4}{s}+s+3$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{\frac{4}{s}+s+3}{s^2+3s+2}=\frac{4+s(s+3)}{s(s+1)(s+2)}=\frac{s^2+3s+4}{s(s+1)(s+2)}$$

$$\Leftrightarrow X(s)=\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}\qquad\left[\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}\right]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}\right]$$

$$\Leftrightarrow x(t)=2-2e^{-t}+e^{-2t}$$

[14] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = sin2t$$

ただし，初期条件は，$x(0) = 0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt} + 3\mathcal{L}x(t)\right] = \mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

$$\Leftrightarrow sX(s) - x(0) + 3X(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\Leftrightarrow sX(s) + 3X(s) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{(s+3)(s^2+4)}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{13}\left(\frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4}\right) \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{13}\left(\frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{13}\left(2e^{-3t} + 3\sin 2t - 2\cos 2t\right)$$

[15] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 1$$

ただし，初期条件は，$x(0) = 0, x^1(0) = 1$ とする.

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right] = \mathcal{L}\{1\} \\
\Leftrightarrow &\left\{s^2X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0)\right\} + 2\left\{sX(s) - x(0)\right\} + 2X(s) = \frac{1}{s} \\
\Leftrightarrow &\, s^2X(s) - 1 + 2sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{s} \\
\Leftrightarrow &\, s^2X(s) + 2sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{s} + 1 \\
\Leftrightarrow &\, X(s) = \frac{1}{s(s^2+2s+2)} + \frac{1}{s^2+2s+2} \\
\Leftrightarrow &\, X(s) = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2} + \frac{1}{(s+1)^2+1^2}\right\}
\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2}\left\{1 - e^{-t}(\cos t - \sin t)\right\}$$

[16] (1)-(10) のラプラス変換 $X(s)$ にラプラス逆変換を施し，時間関数 $x(t)$ を求めよ．

[16] (1) $X(s) = \frac{4}{s+5}$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+5}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = 4e^{-5t}$$

[16] (2) $X(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$

$$X(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{(s+1)+6}{(s+1)^2+2^2}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{6}{(s+1)^2+2^2}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+1)^2+2^2}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = e^{-t}cos(2t) + 3e^{-t}sin(2t)$$

[16] (3) $X(s) = \frac{2}{s^2+s}$

$$X(s) = \frac{2}{s^2+s}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s(s+1)}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s} + \frac{-2}{s+1} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = 2 - 2e^{-t}$$

[16] (4) $X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)}$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)} \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{\frac{1}{8}}{s} + \frac{-\frac{1}{8}(s-4)}{s^2+4s+8} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}] \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{8s} - \frac{(s+2)-6}{8\left\{(s+2)^2+4\right\}}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{8s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+2)-6}{8\left\{(s+2)^2+4\right\}}\right] \\
\Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2t}(cos(2t) - 3sin(2t))
\end{aligned}
$$

[16] (5) $X(s) = \frac{1}{s^3+11s^2+40s+48}$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s^3+11s^2+40s+48} \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+4)^2} \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s+3} + \frac{-1}{s+4} + \frac{-1}{(s+4)^2} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+4)^2}\right] \\
\Leftrightarrow x(t) &= e^{-3t} - e^{-4t} - te^{-4t}
\end{aligned}
$$

[16] (6) $X(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{2}{(s+1)(s+3)} \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+3} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+3}\right] \\
\Leftrightarrow x(t) &= e^{-t} - e^{-3t}
\end{aligned}
$$

[16] (7) $X(s) = \frac{3}{s(s+2)^2}$

$$X(s) = \frac{3}{s(s+2)^2}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{s} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{s+1} + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{(s+1)^2}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{(s+1)^2}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{3}{2}te^{-2t}$$

[16] (8) $X(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$

$$X(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\frac{1}{18}}{s} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{s+3}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{18}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{4}{9}}{s+3}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{18} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{4}{9}e^{-3t}$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{18}\left(1 - 9e^{-2t} + 8e^{-3t} + 6te^{-3t}\right)$$

[16] (9) $X(s) = \frac{s+2}{s^3(s-1)^2}$

$$X(s) = \frac{s+2}{(s-1)^2 s^3}$$
$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{5}{s^2} + \frac{8}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{-8}{s-1}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{5}{s^2} + \frac{8}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{-8}{s-1}\right]$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \left(2t^2 + 5t + 8\right) + (3t - 8)\,e^t$$

[16] (10) $X(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \\
\Leftrightarrow X(s) &= \frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[X(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}\right] \\
\Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{3}sint - \frac{1}{6}sin2t
\end{aligned}
$$

[17] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$
\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0
$$

ただし，初期条件は，$y(0)=A, y^{(1)}(0)=B$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t)\right] &= 0 \\
\Leftrightarrow \left\{s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right\} + Y(s) &= 0 \\
\Leftrightarrow s^2Y(s) - As - B + Y(s) &= 0 \\
\Leftrightarrow Y(s) &= \frac{As+B}{s^2+1} \\
\Leftrightarrow Y(s) &= \frac{As}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+1}\right] \\
\Leftrightarrow y(t) &= Acost + Bsint
\end{aligned}
$$

[18] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - (a+b)\frac{dy(t)}{dt} + aby(t) = 0$$

ただし，初期条件は，$y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} - (a+b)\frac{dy(t)}{dt} + aby(t)\right] = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right\} - (a+b)\left\{sY(s) - y(0)\right\} + abY(s) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &\left\{s^2 - (a+b)s + ab\right\}Y(s) - s + (a+b) = 0 \\
\Leftrightarrow\ &Y(s) = \frac{s-(a+b)}{s^2-(a+b)s+ab} \\
\Leftrightarrow\ &Y(s) = \frac{s-(a+b)}{(s-a)(s-b)} \\
\Leftrightarrow\ &Y(s) = \frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)}
\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)}\right] \\
\Leftrightarrow\ &y(t) = -\frac{b}{a-b}e^{at} + \frac{a}{a-b}e^{bt}
\end{aligned}$$

[19] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 12y(t) = 2$$

ただし，初期条件は，$y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 12y(t)\right] = \mathcal{L}\left[2\right] \\
&\Leftrightarrow \left\{s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right\} - \{sY(s) - y(0)\} - 12Y(s) = \frac{2}{s} \\
&\Leftrightarrow \left\{s^2 - s - 12\right\} Y(s) - s + 1 = \frac{2}{s} \\
&\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s^2 - s - 12)} \\
&\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s+3)(s-4)} \\
&\Leftrightarrow Y(s) = \frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4} \quad \left[\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}\right]
\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4}\right] \\
&\Leftrightarrow y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{4t}
\end{aligned}$$

[20] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け．

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4y(t) = sin(t)$$

ただし，初期条件は，$y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 0$ とする．

両辺にラプラス変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4y(t)\right] = \mathcal{L}\left[sin(t)\right] \\
&\Leftrightarrow \left\{s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\right\} + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \\
&\Leftrightarrow \left\{s^2+4\right\}Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \\
&\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} \\
&\Leftrightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{1}{3}}{s^2+4} \qquad \left[\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}\right]
\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{s^2+1} - \frac{\frac{1}{3}}{s^2+4}\right] \\
&\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{3}sin(t) - \frac{1}{6}sin(2t)
\end{aligned}$$