

# 制御工学演習

## 解答編

作成者 : Yudai  
2025 年 5 月 9 日作成

[1] 指数関数  $x(t) = e^{at}$  をラプラス変換せよ.

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[ -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \right]_0^{\infty}$$

この式の右辺第2項が収束するには:

$$\operatorname{Re}[s-a] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[a]$$

ゆえに, ラプラス変換の定義が成り立つ条件下で, 最終的に次のようにまとめられる.

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a} \quad (\operatorname{Re}[s] > \operatorname{Re}[a])$$

[2] 単位ステップ関数  $x(t) = 1$  をラプラス変換せよ.

単位ステップ関数の時間的変化を表しており,  $t < 0$  において  $x(t) = 0$  である. 単位ステップ関数を  $u(t)$  と表すことがある.

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \left[ \frac{-1}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s} - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-st}}{s}$$

$\operatorname{Re}[s] > 0$  の定義域において収束.

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

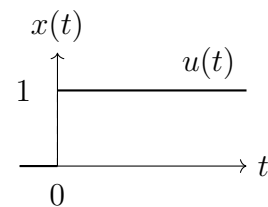


図: 単位ステップ関数

[3] 単位インパルス関数  $x(t) = \delta(t)$  をラプラス変換せよ.

単位ステップ関数はディラックのデルタ関数ともよばれ,  $\delta(t)$  で記述される.  
 $h$  をゼロに近づけることで定義され, その面積では1である.

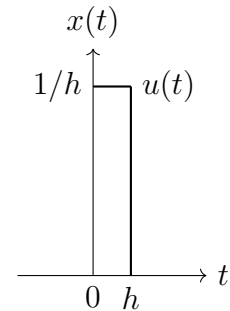
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

単位インパルス関数には次のような性質がある

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$$

$\text{Re}[s] > 0$  の定義域において

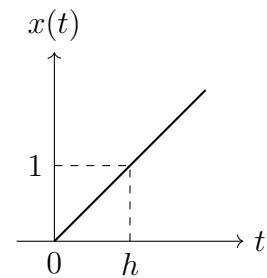
$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \delta(t - 0) dt = e^0 = 1$$



図：単位インパルス関数

[4] ランプ関数  $x(t) = t$  をラプラス変換せよ.

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_0^{\infty} t e^{-st} dt \\ &= \left[ t \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \right) \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \right) dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} \mathcal{L}[1] \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$



図：ランプ関数

[5] 正弦波関数  $x(t) = \sin(\omega t)$  をラプラス変換せよ.

オイラーの等式より

$$\begin{cases} e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right] \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{2j\omega}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

[6] 余弦波関数  $x(t) = \cos(\omega t)$  をラプラス変換せよ.

[5] と同様にして

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(\omega t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - j\omega} + \frac{1}{s + j\omega}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

[7] ラプラス変換は線形の性質があることを示せ.

線形の性質

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x_1(t) + x_2(t)] = \mathcal{L}[x_1(t)] + \mathcal{L}[x_2(t)] \\ \mathcal{L}[ax_1(t)] = a\mathcal{L}[x_1(t)] \end{cases}$$

を示す.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[ax_1(t) + bx_2(t)] &= \int_0^\infty \{ax_1(t) + bx_2(t)\} e^{-st} dt \\ &= a \int_0^\infty x_1(t) e^{-st} dt + b \int_0^\infty x_2(t) e^{-st} dt \\ &= a\mathcal{L}[x_1(t)] + b\mathcal{L}[x_2(t)] \end{aligned}$$

[8] 時間関数  $x(t)$  を右に  $\tau$ だけ推移させた関数  $x(t - \tau)$  に対するラプラス変換は,  $x(t)$  のラプラス変換  $X(s)$  を用いて

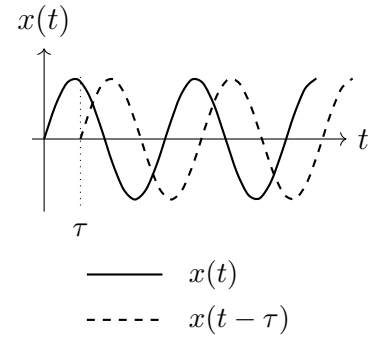
$$\mathcal{L}[x(t - \tau)] = e^{-s\tau} X(s)$$

と表されることを示せ. (時間領域における推移定理)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(t - \tau)] &= \int_0^{\infty} x(t - \tau) e^{-st} dt \\ &= \int_{\tau}^{\infty} x(t - \tau) e^{-st} dt \\ &[\because t < \tau \text{の時 } x(t - \tau) = 0]\end{aligned}$$

ここで変数変換  $\tau' = t - \tau$ を行う.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x(t - \tau)] &= \int_0^{\infty - \tau} x(\tau') e^{-s(\tau + \tau')} d\tau' \\ &= e^{-\tau s} \int_0^{\infty} x(\tau') e^{-s\tau'} d\tau' \\ &= e^{-\tau s} \mathcal{L}[x(t)] \\ &= e^{-\tau s} X(s)\end{aligned}$$



図：時間領域における推移

[9]  $x(t)$  のラプラス変換  $X(s)$  において複素変数  $s$  を  $b$ だけ推移させて  $s + b$  とすれば, どうなるのか?

$$\begin{aligned}X(s + b) &= \int_0^{\infty} x(t) e^{-(s+b)t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \{e^{-bt} x(t)\} e^{-st} dt \\ &= \mathcal{L}[e^{-bt} x(t)]\end{aligned}$$

[10]  $e^{\lambda t} \sin(\omega t)$  をラプラス変換せよ.

ラプラス変換の第一移動定理 (問題 [8])

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$$

と, 正弦波のラプラス変換 (問題 [5])

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (= X(s))$$

を考えれば,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\lambda t} \sin(\omega t)] &= X(s-\lambda) \\ &= \frac{\omega}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}\end{aligned}$$

[11] 時間関数  $x(t)$  の微分をラプラス変換せよ.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] &= \int_0^\infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= [x(t)e^{-st}]_0^\infty + s \int_0^\infty x(t)e^{-st} dt\end{aligned}$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)e^{-\sigma t} = 0$  となる  $\sigma < \operatorname{Re}[s]$  において

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$$

[12] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$9\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = 1$$

ただし, 初期値は,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$  とする.

まず, 時間関数  $x(t)$  の二階微分のラプラス変換は  $\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = sX(s) - x(0)$  より,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] &= s\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] - x'(0) \\ &= s\{sX(s) - x(0)\} - x'(0) \\ &= s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\end{aligned}$$

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{aligned}9\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] + \mathcal{L}[x(t)] &= \mathcal{L}[1] \\ \Leftrightarrow 9\{s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\} + X(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow 9s^2X(s) + X(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow (9s^2 + 1)X(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s(9s^2 + 1)} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{s\left(s^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right)} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)} \quad \left[\because \omega = \frac{1}{3} \text{とおいた}\right] \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{\omega^2}{s(s + j\omega)(s - j\omega)} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s + j\omega} - \frac{\frac{1}{2}}{s - j\omega} \quad \left[\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}\right]\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + j\omega}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - j\omega}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= 1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega t} - \frac{1}{2}e^{j\omega t} \\ \Leftrightarrow x(t) &= 1 - \frac{1}{2}(e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}) \\ \Leftrightarrow x(t) &= 1 - \cos\omega t \quad \left[\because \text{オイラーの等式}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= 1 - \cos\left(\frac{t}{3}\right)\end{aligned}$$

[13] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 4$$

ただし, 初期条件は,  $x(0) = 1$ ,  $x^{(1)}(0) = 0$  とする.

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right] = \mathcal{L}[4]$$

$$\Leftrightarrow \{s^2X(s) - sx(0)\} - x^{(1)}(0) + 3\{sX(s) - x(0)\} + 2X(s) = \frac{4}{s}$$

$$\Leftrightarrow s^2X(s) + 3sX(s) + 2X(s) = \frac{4}{s} + s + 3$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\frac{4}{s} + s + 3}{s^2 + 3s + 2} = \frac{4 + s(s + 3)}{s(s + 1)(s + 2)} = \frac{s^2 + 3s + 4}{s(s + 1)(s + 2)}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s + 1} + \frac{1}{s + 2} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s + 1} + \frac{1}{s + 2}\right]$$

$$\Leftrightarrow x(t) = 2 - 2e^{-t} + e^{-2t}$$



[14] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) = \sin 2t$$

ただし, 初期条件は,  $x(0) = 0$  とする.

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt} + 3\mathcal{L}x(t)\right] = \mathcal{L}\{\sin 2t\}$$

$$\Leftrightarrow sX(s) - x(0) + 3X(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow sX(s) + 3X(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{(s+3)(s^2+4)}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{2}{13} \left( \frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4} \right) \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{13} \left( \frac{1}{s+3} + \frac{3}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+4} \right)\right]$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{13} (2e^{-3t} + 3\sin 2t - 2\cos 2t)$$

[15] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = 1$$

ただし, 初期条件は,  $x(0) = 0, x'(0) = 1$  とする.

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)\right] &= \mathcal{L}\{1\} \\ \Leftrightarrow \{s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\} + 2\{sX(s) - x(0)\} + 2X(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow s^2X(s) - 1 + 2sX(s) + 2X(s) &= \frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow s^2X(s) + 2sX(s) + 2X(s) &= \frac{1}{s} + 1 \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} + \frac{1}{s^2 + 2s + 2} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} + \frac{1}{(s+1)^2 + 1^2}\right\}\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2}\{1 - e^{-t}(\cos t - \sin t)\}$$

[16] (1)-(10) のラプラス変換  $X(s)$  にラプラス逆変換を施し、時間関数  $x(t)$  を求めよ.

$$[16] (1) X(s) = \frac{4}{s+5}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4}{s+5}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= 4e^{-5t}\end{aligned}$$

$$[16] (2) X(s) = \frac{s+7}{s^2+2s+5}$$

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{s+7}{s^2+2s+5} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{(s+1)+6}{(s+1)^2+2^2} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{6}{(s+1)^2+2^2}\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{6}{(s+1)^2+2^2}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= e^{-t}\cos(2t) + 3e^{-t}\sin(2t)\end{aligned}$$

$$[16] (3) X(s) = \frac{2}{s^2+s}$$

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{2}{s^2+s} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{2}{s(s+1)} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{2}{s} + \frac{-2}{s+1} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= 2 - 2e^{-t}\end{aligned}$$

$$[16] \quad (4) \quad X(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+1}{s(s^2+4s+8)} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{\frac{1}{8}}{s} + \frac{-\frac{1}{8}(s-4)}{s^2+4s+8} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}] \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{8s} - \frac{(s+2)-6}{8\{(s+2)^2+4\}} \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{8s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+2)-6}{8\{(s+2)^2+4\}}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}e^{-2t}(\cos(2t) - 3\sin(2t)) \end{aligned}$$

$$[16] \quad (5) \quad X(s) = \frac{1}{s^3+11s^2+40s+48}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s^3+11s^2+40s+48} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{(s+3)(s+4)^2} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s+3} + \frac{-1}{s+4} + \frac{-1}{(s+4)^2} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}] \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{(s+4)^2}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= e^{-3t} - e^{-4t} - te^{-4t} \end{aligned}$$

$$[16] \quad (6) \quad X(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2}{(s+1)(s+3)} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{1}{s+1} + \frac{-1}{s+3} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}] \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s+3}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= e^{-t} - e^{-3t} \end{aligned}$$

$$[16] \quad (7) \quad X(s) = \frac{3}{s(s+2)^2}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3}{s(s+2)^2} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{s} + \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{s+1} + \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{(s+1)^2} \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{3}{4}\right)}{s+1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{(s+1)^2}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}e^{-2t} - \frac{3}{2}te^{-2t} \end{aligned}$$

$$[16] \quad (8) \quad X(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s(s+2)(s+3)^2} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{\frac{1}{18}}{s} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+2} + \frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{s+3} \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{18}}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)}{s+2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s+3)^2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{4}{9}}{s+3}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{18} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{4}{9}e^{-3t} \\ \Leftrightarrow x(t) &= \frac{1}{18} (1 - 9e^{-2t} + 8e^{-3t} + 6te^{-3t}) \end{aligned}$$

$$[16] \quad (9) \quad X(s) = \frac{s+2}{s^3(s-1)^2}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s+2}{(s-1)^2 s^3} \\ \Leftrightarrow X(s) &= \frac{2}{s^3} + \frac{5}{s^2} + \frac{8}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{-8}{s-1} \end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^3} + \frac{5}{s^2} + \frac{8}{s} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{-8}{s-1}\right] \\ \Leftrightarrow x(t) &= (2t^2 + 5t + 8) + (3t - 8)e^t \end{aligned}$$

$$[16] \quad (10) \quad X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)} + \frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{3}}{(s^2+1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\frac{1}{3}}{(s^2+4)}\right]$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t$$

[17] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0$$

ただし, 初期条件は,  $y(0) = A, y^{(1)}(0) = B$  とする.

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \{s^2Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\} + Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow s^2Y(s) - As - B + Y(s) = 0$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{As + B}{s^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{As}{s^2 + 1} + \frac{B}{s^2 + 1}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{As}{s^2 + 1} + \frac{B}{s^2 + 1}\right]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = A\cos t + B\sin t$$

[18] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - (a+b) \frac{dy(t)}{dt} + aby(t) = 0$$

ただし, 初期条件は,  $y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0$  とする.

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \left[ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - (a+b) \frac{dy(t)}{dt} + aby(t) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \{s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\} - (a+b) \{sY(s) - y(0)\} + abY(s) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{s^2 - (a+b)s + ab\} Y(s) - s + (a+b) &= 0 \\ \Leftrightarrow Y(s) = \frac{s - (a+b)}{s^2 - (a+b)s + ab} \\ \Leftrightarrow Y(s) = \frac{s - (a+b)}{(s-a)(s-b)} \\ \Leftrightarrow Y(s) = \frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)}\end{aligned}$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} [Y(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-\frac{b}{a-b}}{(s-a)} + \frac{\frac{a}{a-b}}{(s-b)} \right] \\ \Leftrightarrow y(t) &= -\frac{b}{a-b} e^{at} + \frac{a}{a-b} e^{bt}\end{aligned}$$

[19] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 12y(t) = 2$$

ただし, 初期条件は,  $y(0) = 1, y^{(1)}(0) = 0$  とする.

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - 12y(t) \right] = \mathcal{L} [2]$$

$$\Leftrightarrow \{s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\} - \{sY(s) - y(0)\} - 12Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$\Leftrightarrow \{s^2 - s - 12\} Y(s) - s + 1 = \frac{2}{s}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s^2 - s - 12)}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s+3)(s-4)}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4} \quad [\because \text{ヘヴィサイドの展開定理}]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1} [Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{-\frac{1}{6}}{s} + \frac{\frac{2}{3}}{s+3} + \frac{\frac{1}{2}}{s-4} \right]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{4t}$$



[20] つぎの微分方程式をラプラス変換を用いて解け.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4y(t) = \sin(t)$$

ただし, 初期条件は,  $y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 0$  とする.

両辺にラプラス変換を施すと,

$$\mathcal{L} \left[ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4y(t) \right] = \mathcal{L} [\sin(t)]$$

$$\Leftrightarrow \{s^2 Y(s) - sy(0) - y^{(1)}(0)\} + 4Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow \{s^2 + 4\} Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 1} - \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 4} \quad [\cdot \text{ヘヴィサイドの展開定理}]$$

両辺にラプラス逆変換を施すと,

$$\mathcal{L}^{-1} [Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 1} - \frac{\frac{1}{3}}{s^2 + 4} \right]$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{1}{3} \sin(t) - \frac{1}{6} \sin(2t)$$

[21] 単位インパルス応答が  $y(t) = 7e^{-2t} + 2e^{-3t}$  であるとき,  
このシステムの伝達関数を求めよ.

伝達関数は単位インパルス応答  $y(t)$  をラプラス変換して得ることができる.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [y(t)] &= 7\mathcal{L} [e^{-2t}] + 2\mathcal{L} [e^{-3t}] \\ &= \frac{7}{s+2} + \frac{2}{s+3} \\ &= \frac{7s+21+2s+4}{(s+2)(s+3)} \\ &= \frac{9s+25}{(s+2)(s+3)} \\ \Leftrightarrow G(s) &= \frac{9s+25}{(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

[22] 単位インパルス応答が  $y(t) = e^{-2t} + 3e^{-9t} - 4e^{-11t}$  であるとき、このシステムの伝達関数を求めよ。

$$\begin{aligned} G(s) &= \mathcal{L}[y(t)] \\ &= \mathcal{L}[e^{-2t}] + 3\mathcal{L}[e^{-9t}] - 4\mathcal{L}[e^{-11t}] \\ &= \frac{1}{s+2} + \frac{3}{s+9} - \frac{4}{s+11} \\ &= \frac{15s+93}{(s+2)(s+9)(s+11)} \end{aligned}$$

[23] 単位ステップ応答が  $y(t) = 5e^{-t} - 5e^{-7t}$  であるとき、このシステムの伝達関数を求めよ。

入力信号  $u(t)$  は、大きさ 1 のステップ関数  $U(s) = \frac{1}{s}$  であるから、

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}[y(t)] \\ &= 5\mathcal{L}[e^{-t}] - 5\mathcal{L}[e^{-7t}] \\ &= \frac{5}{s+1} - \frac{5}{s+7} \\ &= \frac{30}{(s+1)(s+7)} \\ \Leftrightarrow G(s) &= \frac{30s}{(s+1)(s+7)} \quad [\because G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}] \end{aligned}$$

[24] 単位ステップ応答が  $y(t) = 12 + 6t$  であるとき、このシステムの伝達関数を求めよ。

$$\begin{aligned} Y(s) &= \mathcal{L}[y(t)] \\ &= 12\mathcal{L}[1] + 6\mathcal{L}[t] \\ &= \frac{12}{s} + \frac{6}{s^2} \\ \Leftrightarrow G(s) &= \frac{12s+6}{s} \quad [\because G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, U(s) = \frac{1}{s}] \end{aligned}$$

[25] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

であるときのインパルス応答を求めよ.

$Y(s) = G(s)U(s)$  であり,  $U(s) = 1$  であるから.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2 + 3s + 2} U(s) \\ &= \frac{2}{(s+1)(s+2)} U(s) \\ &= \frac{2}{(s+1)(s+2)} \quad [\because U(s) = 1] \\ &= \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 2e^{-t} - 2e^{-2t} \end{aligned}$$

[26] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{2}{s^2 + 3s + 2}$$

であるときのステップ応答を求めよ.

$Y(s) = G(s)U(s)$  であり,  $U(s) = \frac{1}{s}$  であるから.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s^2 + 3s + 2} U(s) \\ &= \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \quad [\because U(s) = \frac{1}{s}] \\ &= \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{aligned}$$

[27] 伝達関数が

$$G(s) = \frac{12s + 30}{s^2 + 8s + 15}$$

であるときのステップ応答を求めよ.

$Y(s) = G(s)U(s)$  であり,  $U(s) = \frac{1}{s}$  であるから.

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{12s + 30}{s^2 + 8s + 15} U(s) \\ &= \frac{12s + 30}{s(s + 3)(s + 5)} \quad [\because U(s) = \frac{1}{s}] \\ &= \frac{2}{s} + \frac{1}{s + 3} - \frac{3}{s + 5} \\ \Leftrightarrow y(t) &= 2 + e^{-3t} - 3e^{-5t} \end{aligned}$$

[28]  $x(t)[m^3/s]$  は, 操作バルブ直後の流量を表し, 長い配管を通過して  $L[s]$  後に給水場所に到達したとする.  
このとき,  $x(t)$  から給水量  $y(t)$  までの伝達関数を求めよ.

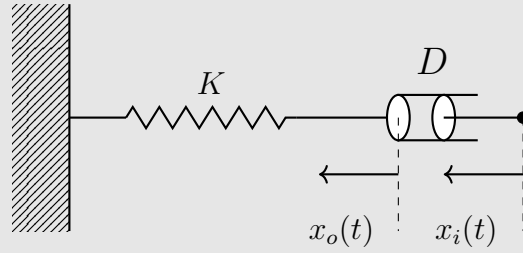
$y(t) = x(t - L)$  であるから,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}[x(t - L)] \\ &= \int_0^\infty x(t - L)e^{-st} dt \\ \Leftrightarrow Y(s) &= e^{-Ls} X(s) \end{aligned}$$

ここで  $Y(s) = G(s)X(s)$  であるから,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = e^{-Ls}$$

[29] 変位  $x_i(t)[m]$  を入力信号,  
 ダッシュポットのシリンダの平衡点からの変位  $x_o(t)[m]$  を出力信号  
 とみなしたときの伝達関数を求めよ。ただし,  $x_i(0) = 0, x_o(0) = 0$  とする。



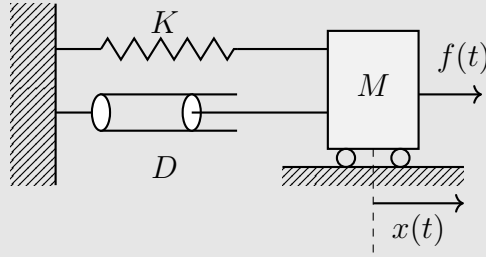
$x_o(t), x_i(t)$  について運動方程式を立てると,

$$\begin{cases} m_o \ddot{x}_o = -K x_o - D(\dot{x}_o - \dot{x}_i), \\ m_i \ddot{x}_i = D(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + f(t) \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力  $f(t)$  はわからないので, もう一方の式に着目すると,

$$\begin{aligned} m_o \ddot{x}_o &= -K x_o - D(\dot{x}_o - \dot{x}_i) \\ \therefore m_o \ddot{x}_o + K x_o + D \dot{x}_o &= D \dot{x}_i \\ \therefore \mathcal{L}[m_o \ddot{x}_o + D \dot{x}_o + K x_o] &= \mathcal{L}[D \dot{x}_i] \\ \therefore (m_o s^2 + D s + K) X_o(s) &= D s X_i(s). \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\ \therefore G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} &= \frac{D s}{m_o s^2 + D s + K} \\ \therefore G(s) = \frac{D s}{D s + K} & \quad [m_o = 0 \text{とした}] \end{aligned}$$

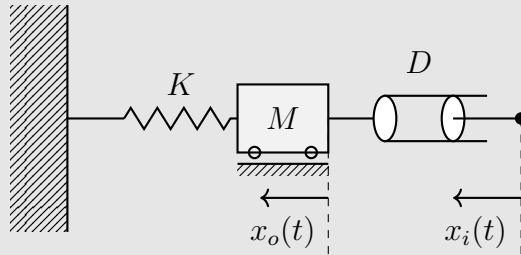
[30] 外力  $f(t)[N]$  を図の方向に考え，平衡点からの変位  $x(t)[m]$  を出力信号とみなしたときの伝達関数を求めよ．



$x(t)$  に関する運動方程式より

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x} &= f(t) - Kx - D\dot{x} \\
 \therefore M\ddot{x} + Kx + D\dot{x} &= f(t) \\
 \therefore \mathcal{L}[M\ddot{x} + D\dot{x} + Kx] &= \mathcal{L}[f(t)] \\
 \therefore (Ms^2 + Ds + K)X(s) &= F(s) \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\
 \therefore G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{1}{Ms^2 + Ds + K}
 \end{aligned}$$

[31] 平衡点からの変位として，図中の  $x_i(t)[m]$  と  $x_o(t)[m]$  を考える．  
 $x_i(t)$  を入力信号， $x_o(t)[m]$  を出力信号とみなしたときの伝達関数を求めよ．



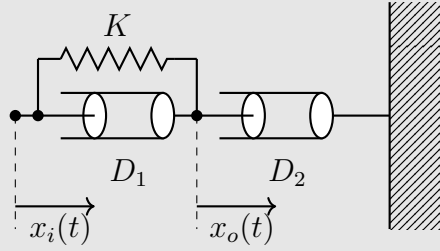
$x_o(t), x_i(t)$  について運動方程式を立てると，

$$\begin{cases} M\ddot{x}_o = -Kx_o - D(\dot{x}_o - \dot{x}_i), \\ m\ddot{x}_i = D(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + f(t) \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力  $f(t)$  はわからないので，もう一方の式に着目すると，

$$\begin{aligned}
 M\ddot{x}_o &= -Kx_o - D(\dot{x}_o - \dot{x}_i) \\
 \therefore M\ddot{x}_o + Kx_o + D\dot{x}_o &= D\dot{x}_i \\
 \therefore \mathcal{L}[M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + Kx_o] &= \mathcal{L}[D\dot{x}_i] \\
 \therefore (Ms^2 + Ds + K)X_o(s) &= DsX_i(s). \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\
 \therefore G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} &= \frac{Ds}{Ms^2 + Ds + K}
 \end{aligned}$$

[32] 粘性減衰係数  $D_1[N \cdot s/m]$  のダッシュポットのピストンの平衡点からの変位  $x_i(t)[m]$  を入力信号, 粘性減衰係数  $D_1[N \cdot s/m]$  のダッシュポットのピストンの平衡点からの 変位  $x_o(t)[m]$  を出力信号としたときの伝達関数を求めよ.



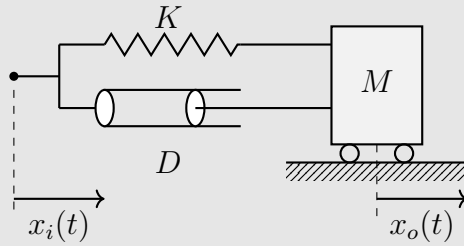
$x_o(t), x_i(t)$  について運動方程式を立てると,

$$\begin{cases} M\ddot{x}_i = K(x_o - x_i) + D_1(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + f(t), \\ m\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D_1(\dot{x}_o - \dot{x}_i) - D_2\dot{x}_o \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力  $f(t)$  はわからないので, もう一方の式に着目すると,

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_o &= -K(x_o - x_i) - D_1(\dot{x}_o - \dot{x}_i) - D_2\dot{x}_o \\ \therefore m\ddot{x}_o + (D_1 + D_2)\dot{x}_o + Kx_o &= D_1\dot{x}_i + Kx_i \\ \therefore \mathcal{L}[m\ddot{x}_o + (D_1 + D_2)\dot{x}_o + Kx_o] &= \mathcal{L}[D_1\dot{x}_i + Kx_i] \\ \therefore \{ms^2 + (D_1 + D_2)s + K\} X_o(s) &= (D_1s + K)X_i(s) \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\ \therefore G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} &= \frac{D_1s + K}{ms^2 + (D_1 + D_2)s + K} \\ \therefore G(s) &= \frac{D_1s + K}{(D_1 + D_2)s + K} \quad [\because m = 0 \text{とした}] \end{aligned}$$

- [33] 平衡点からの変位として、図中の  $x_i(t)[m]$  と  $x_o(t)[m]$  を考える。  
 $x_i(t)[m]$  を入力信号、 $x_o(t)[m]$  を出力信号とみなしたときの伝達巻子を求めよ。  
 台車は摩擦なく床を動くものとする。すべての変数の初期値はゼロである。



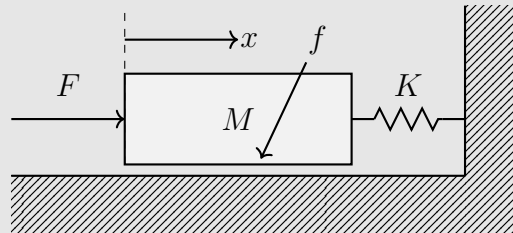
$x_o(t), x_i(t)$  について運動方程式を立てると、

$$\begin{cases} m\ddot{x}_i = K(x_o - x_i) + D(\dot{x}_o - \dot{x}_i) + f(t), \\ M\ddot{x}_o = -K(x_o - x_i) - D(\dot{x}_o - \dot{x}_i) \end{cases}$$

ここで入力側にかかる力  $f(t)$  はわからないので、もう一方の式に着目すると、

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_o &= -K(x_o - x_i) - D(\dot{x}_o - \dot{x}_i) \\ \therefore M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + Kx_o &= D\dot{x}_i + Kx_i \\ \therefore \mathcal{L}[M\ddot{x}_o + D\dot{x}_o + Kx_o] &= \mathcal{L}[D\dot{x}_i + Kx_i] \\ \therefore \{Ms^2 + Ds + K\} X_o(s) &= (Ds + K)X_i(s) \quad [\because x_i(0) = 0, x_o(0) = 0] \\ \therefore G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} &= \frac{Ds + K}{Ms^2 + Ds + K} \end{aligned}$$

- [34] この系の伝達関数を求めよ。ただし、 $f$  は粘性抵抗係数であり、  
 初期条件  $t = 0$  において  $F = 0$

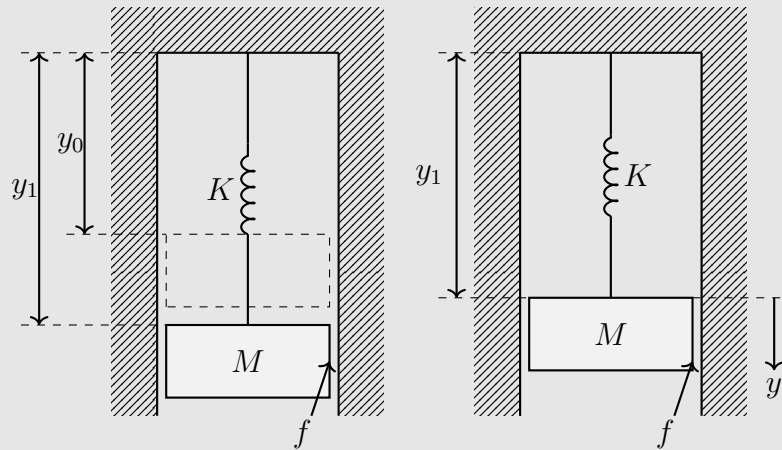


$x(t)$  について運動方程式を立てると、

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -Kx - f\dot{x} + F(t) \\ \therefore M\ddot{x} + f\dot{x} + Kx &= F(t) \\ \therefore \mathcal{L}[M\ddot{x} + f\dot{x} + Kx] &= \mathcal{L}[F(t)] \\ \therefore \{Ms^2 + fs + K\} X(s) &= F(s) \quad [\because x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0] \\ \therefore G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{1}{Ms^2 + fs + K} \end{aligned}$$



- [35] 長さ  $y_0$  のばねの上端を固定し、下端に質量  $M$  の物体をつり下げたとき、ばねの長さが  $y_1$  になって平衡した。  
つぎに、物体に下向きの力  $F(t)$  を加えたとき、物体の平衡状態からの変位を  $y$  として運動方程式を作れ。  
ただし物体と側壁との間には、粘性摩擦定数を  $f$  とする。



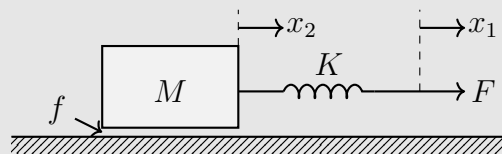
質量－ばね－まさつ系(平衡状態)

力を加えた場合

$y(t)$  について運動方程式を立てると、

$$M\ddot{y} = F(t) - f\dot{y} - Ky$$

- [36] 質量  $M$  の物体の一端にばねをつけ、ばねを力  $F$  で引っ張ったときの運動方程式を作れ。  
物体と床面との間の粘性摩擦定数を  $f$  とする。



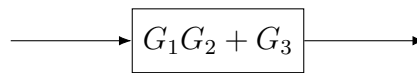
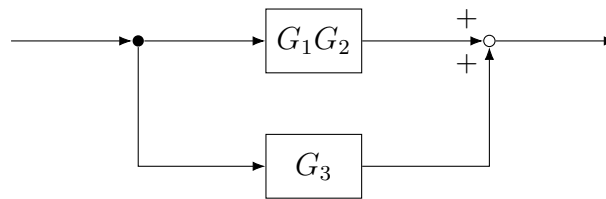
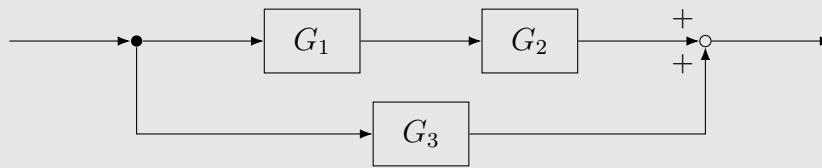
$x_1(t), x_2(t)$  について運動方程式を立てると、

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -K(x_1 - x_2) + F(t), \\ M\ddot{x}_2 = K(x_1 - x_2) - f\dot{x}_2 \end{cases}$$

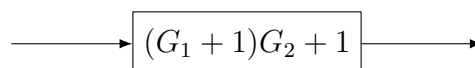
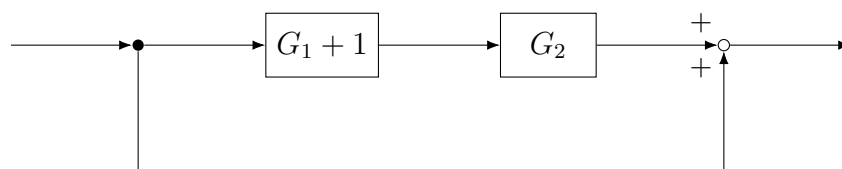
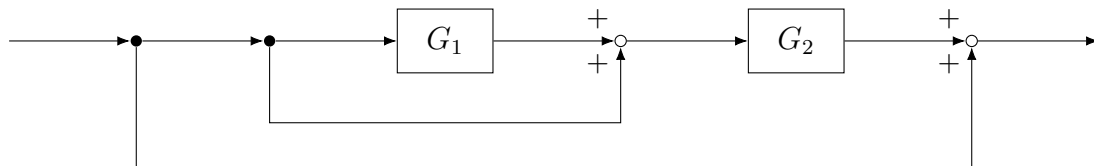
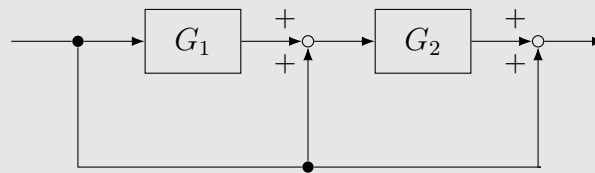
ここで  $m = 0$  として二式を合わせると

$$M\ddot{x}_2 = F(t) - f\dot{x}_2$$

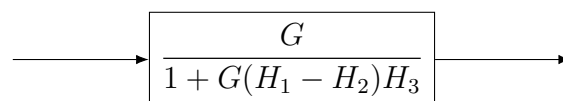
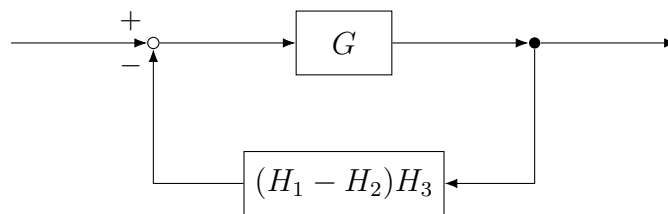
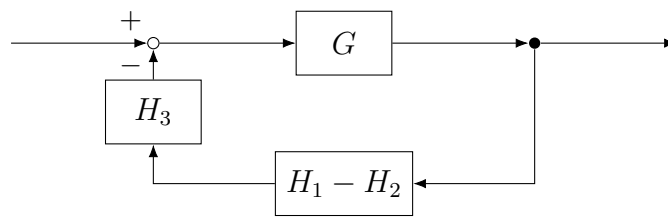
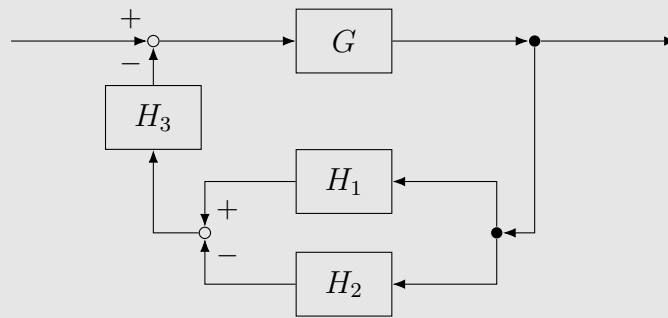
[37] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ.



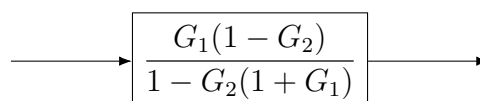
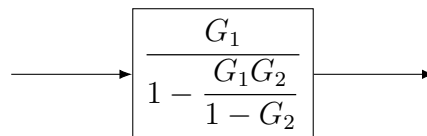
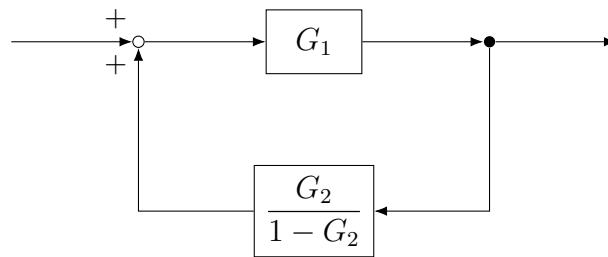
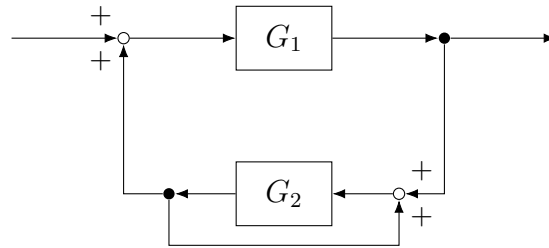
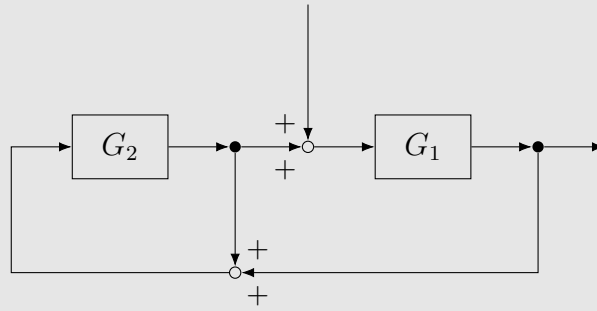
[38] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ.



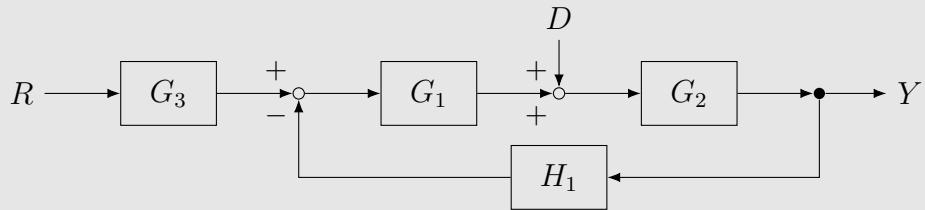
[39] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ.



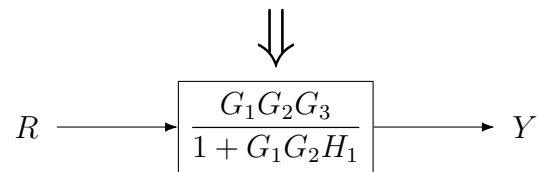
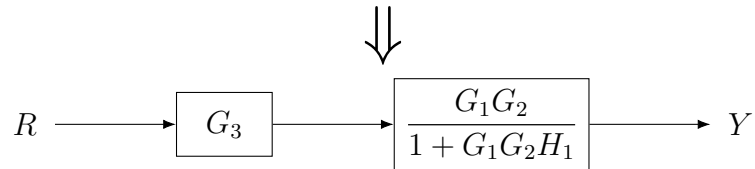
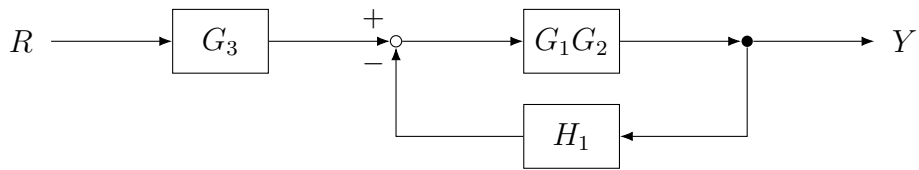
[40] 等価変換によってひとつのブロックに簡単化せよ.



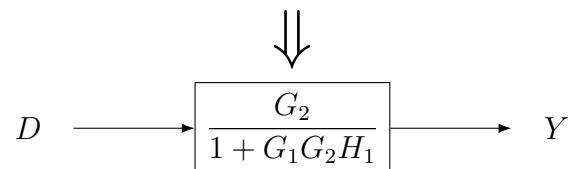
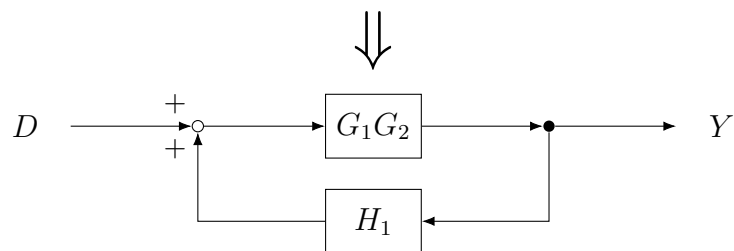
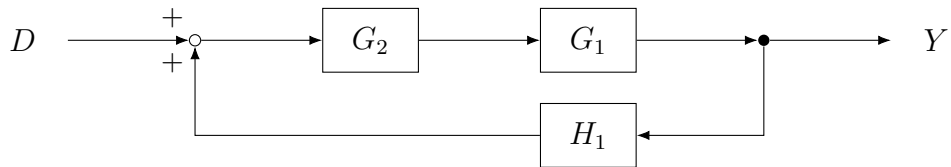
[41] 出力信号である制御量  $Y$  までの伝達特性を等価変換によって簡単化せよ。  
ただし、 $R$  は目標値信号、 $D$  は外乱信号である。



$R$  から  $Y$  について



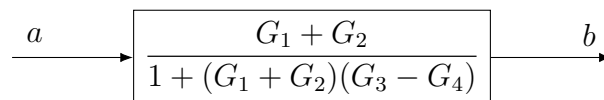
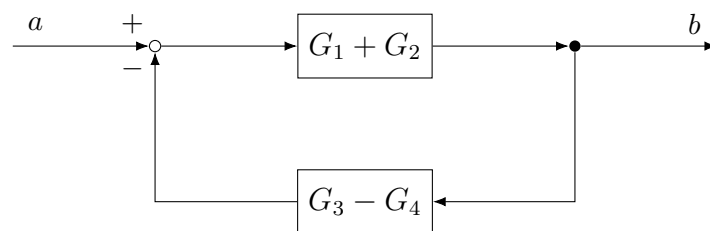
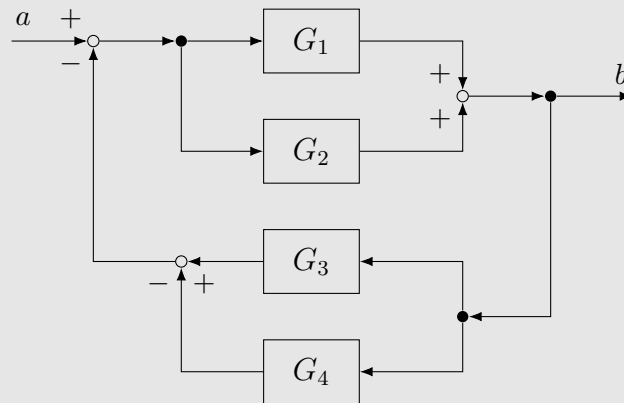
$D$  から  $Y$  について



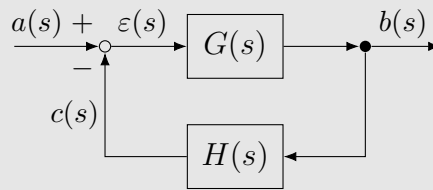
これらを合わせて

$$Y = \frac{G_1 G_2 G_3 R + G_2 D}{1 + G_1 G_2 H_1}$$

[42]  $a$  を入力,  $b$  を出力としたとき, ブロック線図を簡単化し, 伝達関数を求めよ.



[43] 伝達関数  $\frac{b(s)}{a(s)}$  を求めよ.



ブロック線図より次が成り立つ

$$\begin{cases} \varepsilon(s) = a(s) - c(s) & \cdots (1) \\ b(s) = \varepsilon(s)G(s) & \cdots (2) \\ c(s) = b(s)H(s) & \cdots (3) \end{cases}$$

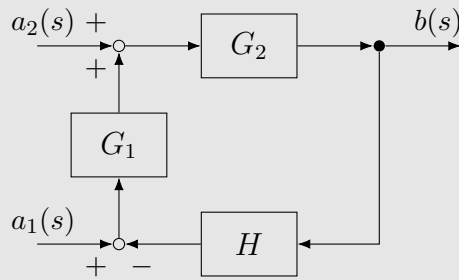
であるから、最終的に  $\varepsilon(s), c(s)$  を含まない形にするために  $\varepsilon(s)$  について解くと (1), (3) より

$$\varepsilon(s) = a(s) - b(s)H(s) \quad \cdots (4)$$

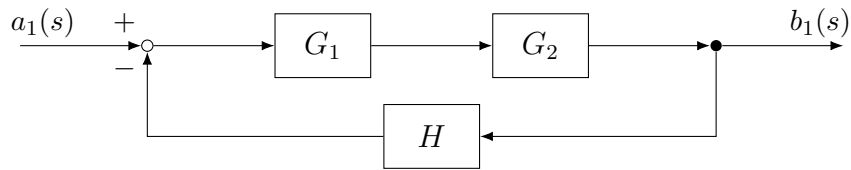
よって (2), (4) より

$$\begin{aligned} \frac{b(s)}{G(s)} &= \varepsilon(s) \\ \Leftrightarrow \frac{b(s)}{G(s)} &= a(s) - b(s)H(s) \\ \Leftrightarrow b(s) &= a(s)G(s) - b(s)H(s)G(s) \\ \Leftrightarrow b(s) \{1 + G(s)H(s)\} &= a(s)G(s) \\ \Leftrightarrow \frac{b(s)}{a(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned}$$

[44] 二つの入力信号  $a_1(s), a_2(s)$  をもつ, 制御系の応答  $b(s)$  を求めよ.

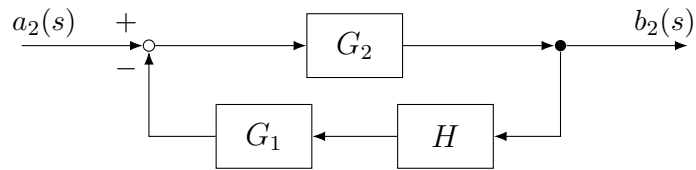


$a_2(s) = 0$  とおくと



$$b_1(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} \cdot a_1(s) \quad \dots (1)$$

$a_1(s) = 0$  とおくと



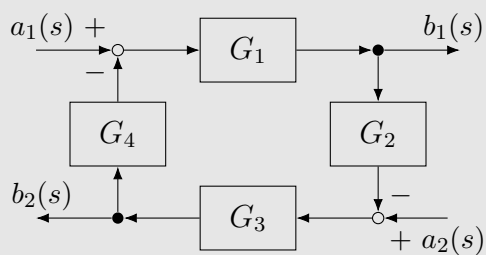
$$b_2(s) = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} \cdot a_2(s) \quad \dots (2)$$

以上 (1), (2) より

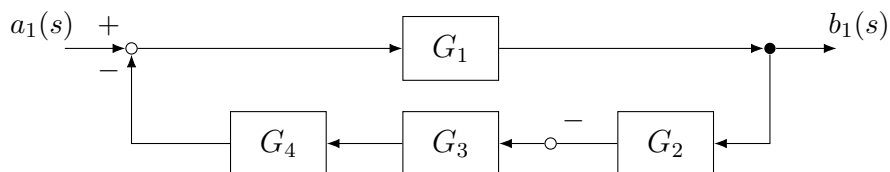
$$\begin{aligned} b(s) &= b_1(s) + b_2(s) \\ &= \frac{G_1 G_2 a_1(s) + G_2 a_2(s)}{1 + G_1 G_2 H} \end{aligned}$$



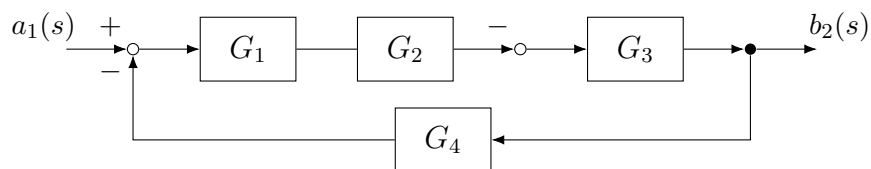
[45]  $\frac{b_1(s)}{a_1(s)}, \frac{b_1(s)}{a_2(s)}, \frac{b_2(s)}{a_1(s)}, \frac{b_2(s)}{a_2(s)}$  を求めよ.



$a_2(s) = 0$  として

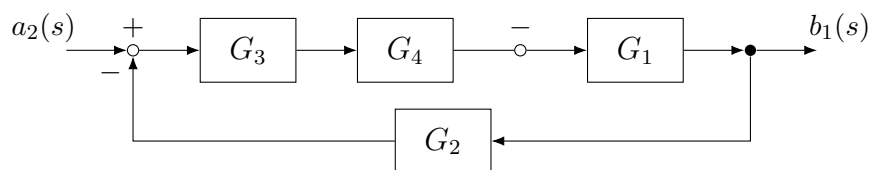


$$\frac{b_1(s)}{a_1(s)} = \frac{1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

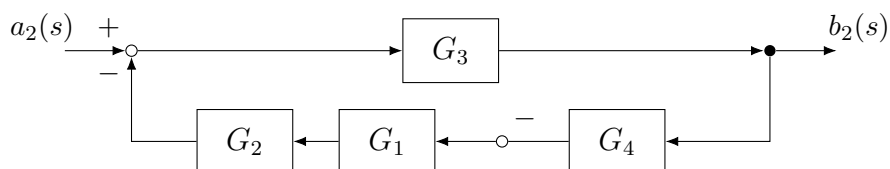


$$\frac{b_2(s)}{a_1(s)} = \frac{1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

$a_1(s) = 0$  として

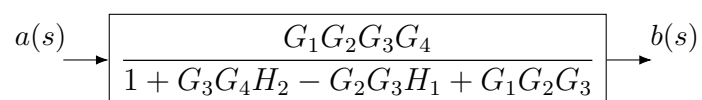
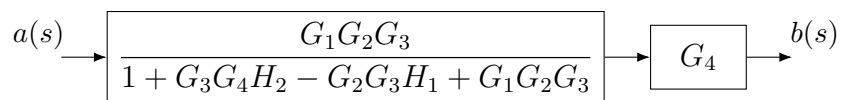
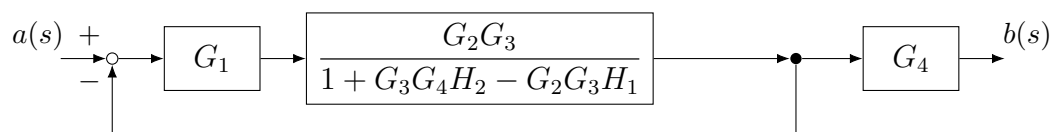
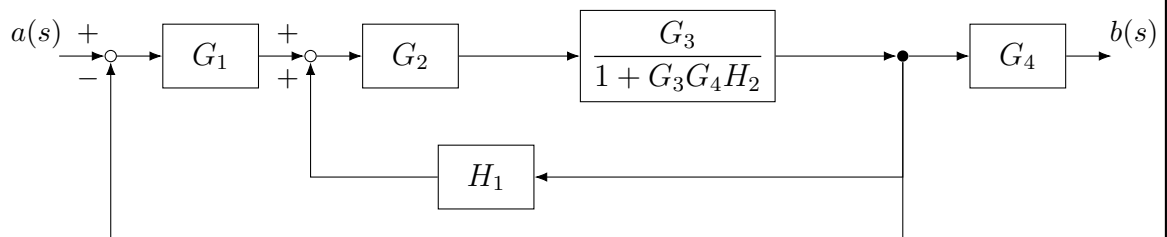
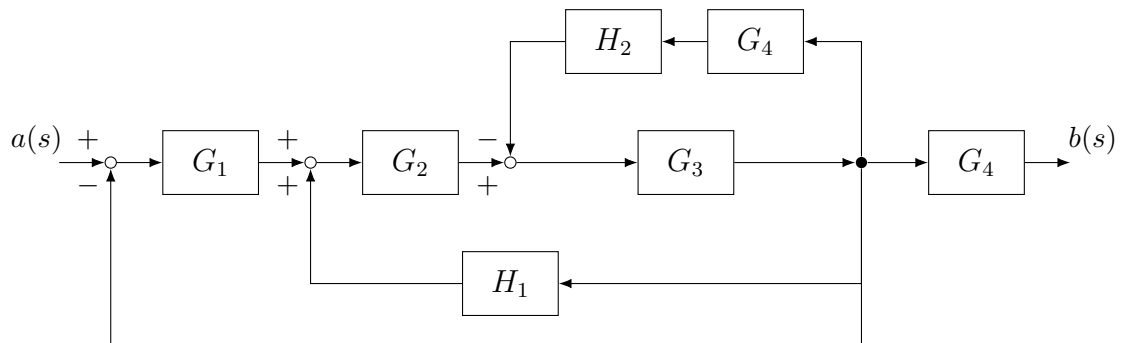
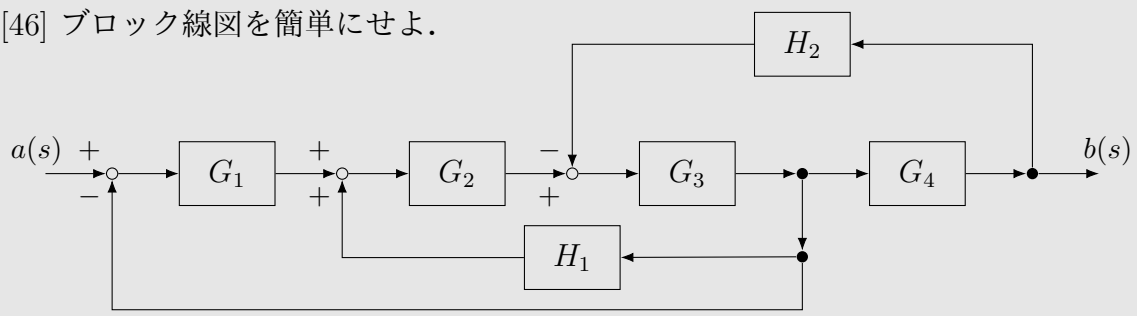


$$\frac{b_1(s)}{a_2(s)} = \frac{1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

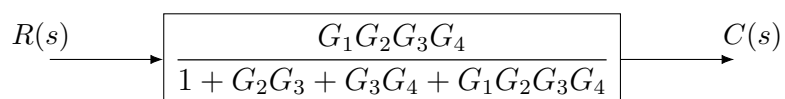
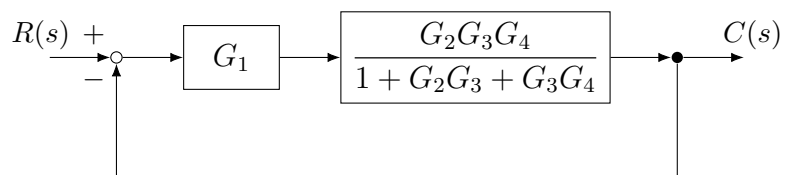
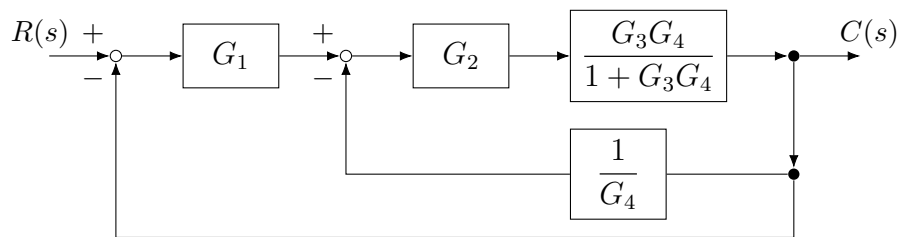
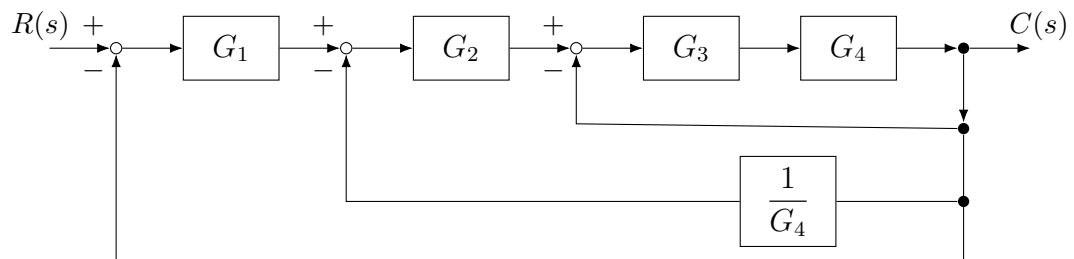
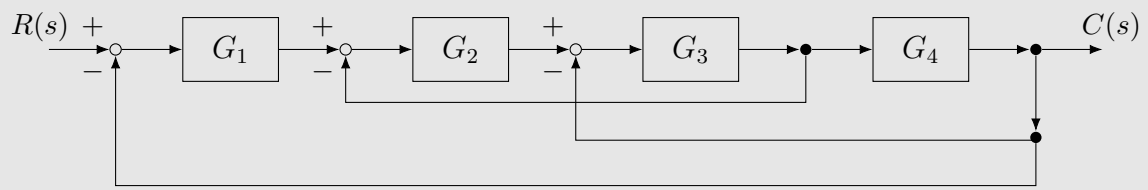


$$\frac{b_2(s)}{a_2(s)} = \frac{1}{1 - G_1 G_2 G_3 G_4}$$

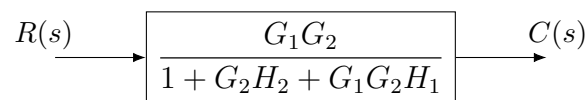
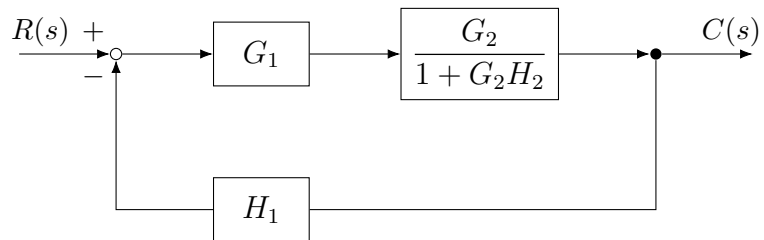
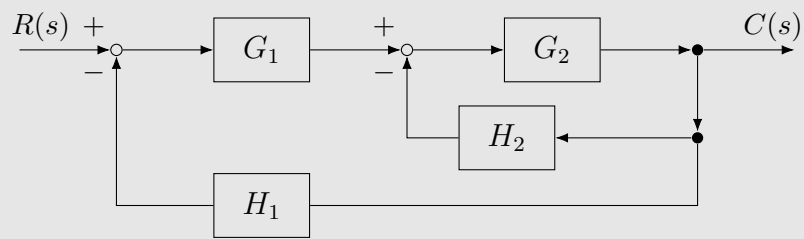
[46] ブロック線図を簡単にせよ.



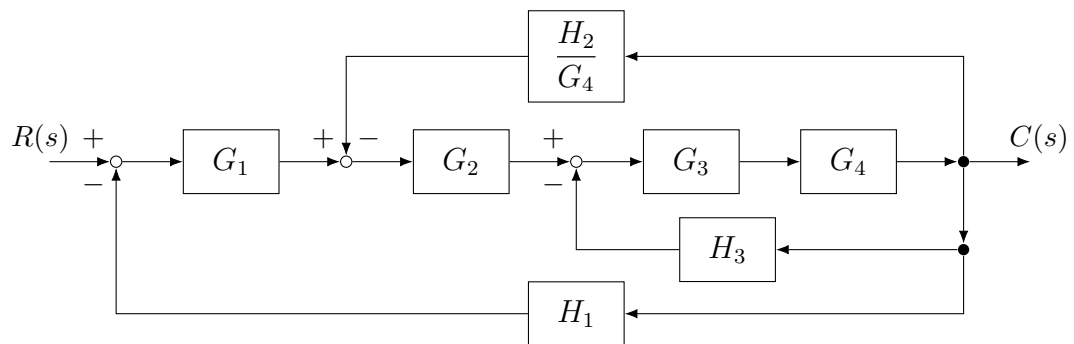
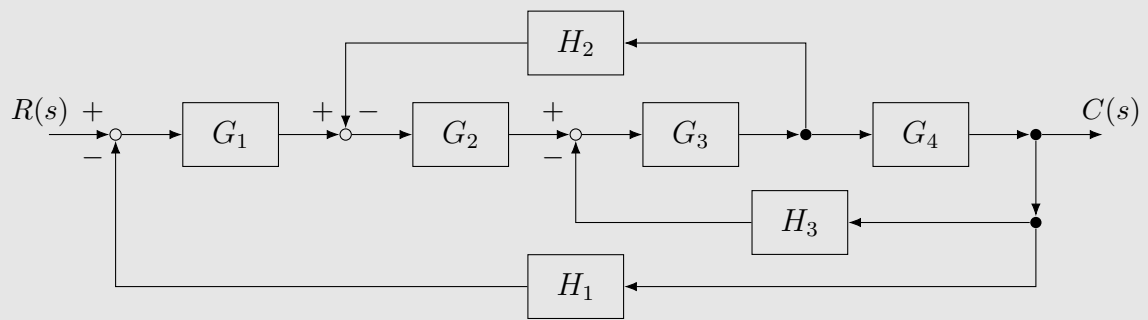
[47] ブロック線図を簡単にせよ.



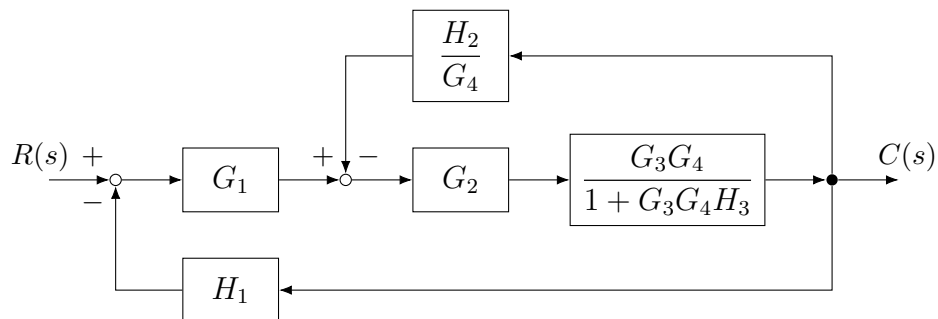
[48] ブロック線図を簡単にせよ.



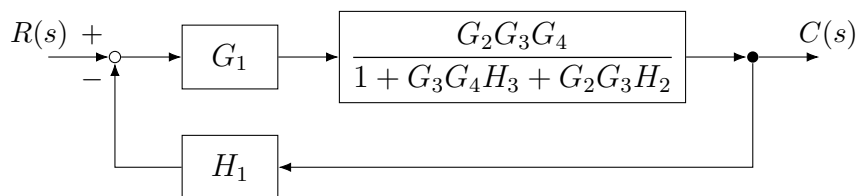
[49] ブロック線図を簡単にせよ.



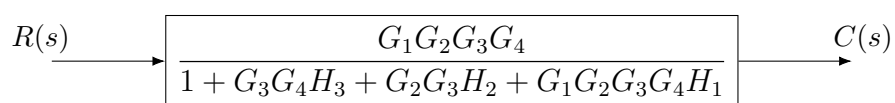
$\Downarrow$



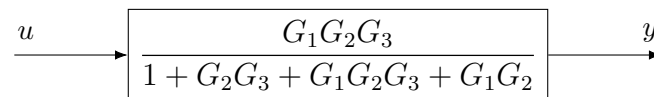
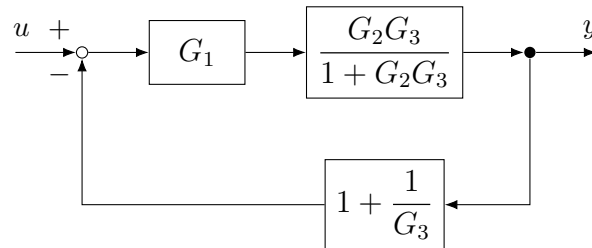
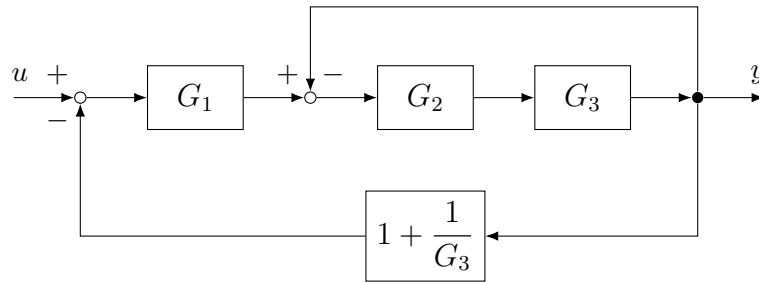
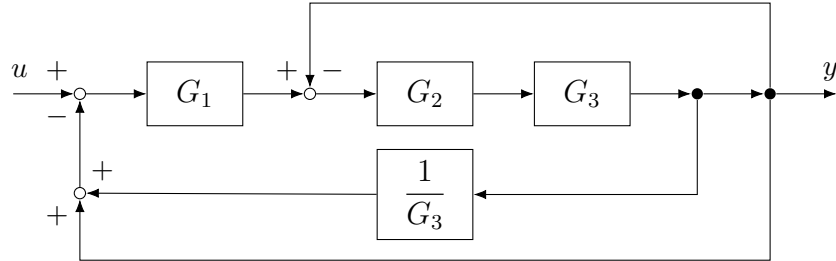
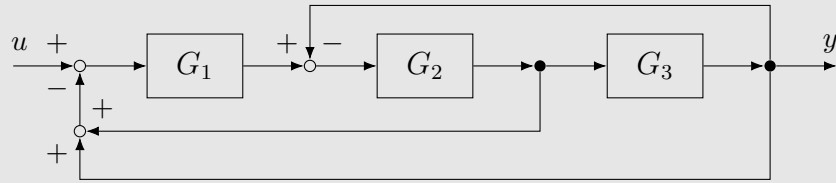
$\Downarrow$



$\Downarrow$



[50] ブロック線図を簡単にせよ.



最後の変形について

$$\begin{aligned} \frac{G_1 \cdot \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3}}{1 + G_1 \cdot \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3} \cdot \left(1 + \frac{1}{G_3}\right)} &= \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 + G_1 G_2 G_3 \left(1 + \frac{1}{G_3}\right)} \\ &= \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 + G_1 G_2 + G_1 G_2 G_3} \end{aligned}$$