基礎数理学統計レポート

1114230018

原田雄大

１，２．実験（シミュレーション）

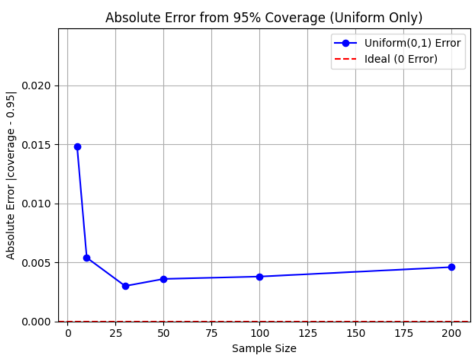
本シミュレーションは Python（NumPy, SciPy, pandas, matplotlib）を用いて実施した。サンプルサイズは$n = 5,10,30,50,100,200$とし，試行回数はK＝5000とし，乱数シードは$np.random.seed(42)$より乱数生成の再現性を確保した．一様分布、指数分布のそれぞれの場合に対して標本平均と標準偏差推定量について不偏推定量 s を用いて求めた。その後、両側信頼区間 95%となるように自由度 n−1 の t 分布上側 97.5%点を用いて上限 U と下限 L を求めた．そして，それぞれの母平均 μ に対して $L \leq \mu \leq U$ が成り立つかどうかをカウントして繰り返したのちに試行回数 K で割ることで被覆率（Coverage Rate）を求めた．以下ではグラフと表のレイアウトの問題で 1 と 2 を並べている。

まずサンプルサイズ（Size）ごとの被覆率（Coverage Rate）の関係を表にした。

表 1 .左：一様分布（Uniform）右：指数分布：(Exponential)

Coverage Rate (Uniform)	Size	Coverage Rate (Exponential)
0.9352	5	0.8856
0.9446	10	0.9004
0.9470	30	0.9330
0.9464	50	0.9372
0.9462	100	0.9422
0.9546	200	0.9450

表 1 によると，一様分布では n= 5 から 93%を超えているが，n=10〜100 では単調に増加するわけでもなかった。指数分布では初め 88%となっており比較的低い被覆率を示しているが徐々にその値を増やし最終的に n=200 で 94.5%となっている。n=200 ではどちらも 95%に近い値をとっている。またこれら被覆率の 95%からの誤差の絶対値をグラフにした。



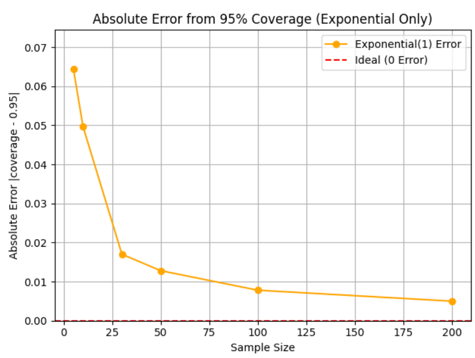


図 1 .左：一様分布（Uniform）右：指数分布：(Exponential)

図１によると，一様分布では n=30 の時から$95 \pm 0.5\%$となっている．一方で指数分布では n=200 の時を除いて$95 \pm 0.5\%$の中に収まっていない．

３．考察

まず今回の t 分布による信頼区間の求め方は、母集団が正規分布であり、分布が対称であることに留意する。一様分布に関して、分布が対称かつ有界であるため n が小さい段階からでも被覆率が 95%に収束しやすかったのである。指数分布に関して，分布が非対称であるため n が小さいときは被覆率が 95%を大きく下回った。これは n が小さい場合は特に t 分布の前提である正規性が崩れているためである。一方で，被覆率の 95%からの誤差のグラフ（図 2）を見ると，サンプルサイズ n の増加に伴い誤差は約$\pm 0.5\%$の範囲に収束する傾向がある。これは中心極限定理より両分布とも標本平均が正規に近づくためである。この「$\pm 0.5\%$」という水準は，本シミュレーションがモンテカルロ法の一種であることに由来する。すなわち，母分布からランダムに標本を作製して信頼区間の被覆可否を 5000 回繰り返し計算するため，まず被覆率そのものに約$\pm 0.31\%$($\pm\sqrt{0.95 \times 0.05/5000}$)の誤差が生じる。この推定値に対して 95%信頼区間を構成するときには$1.96 \times 0.31\% = 0.61\%$の範囲でばらつくため、実際に誤差が約$\pm 0.5\%$前後に収束するのは妥当な結果と言える。

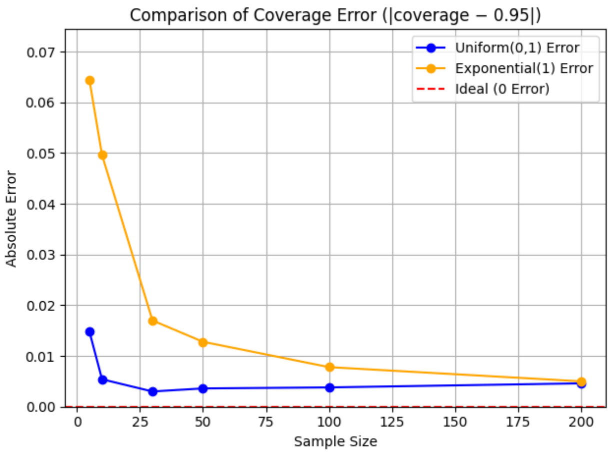


図２.一様分布（青）と指数分布（黄）の誤差

本シミュレーションで用いたコードについては

GitHub（https://github.com/yu531deve/FundamentalMathematicalStatistics）

で公開している。