$\boxed{15}$ 確率過程の基礎

$W_t \sim N(0, t)$

⑴ 独立定常増分過程

$\{ X_{t_1} - X_{t_0}$

X_{t_0}

○ 独立増分性

○ 定常増分性

⑵ ブラウン運動

$B_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$

$\boxed{\text{例1}}$

W_t ← 標準ブラウン運動

$B_t = \mu t + \sigma W_t$ ← ブラウン運動

$$B_{t+h} - B_t = \mu h + \sigma \underbrace{(W_{t+h} - W_t)}_{N(0,h)}$$

$$t_k = \frac{k}{n} \qquad B_{t_k} = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i \qquad \varepsilon_i = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$$

$\boxed{\text{///}}$ ポアソン過程

強度 λ のポアソン過程

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$\boxed{\text{///}}$ 計数過程としての表現

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} I(T_k \leq t)$$

計数過程.

$I(A)$ Aが起きたら、1.

起こらないと、0.

[4] ポアソン過程のパラメータ推定

(I) $W_k = T_k - T_{k-1}$

$$l_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \log f_\lambda(W_k) = n \log \lambda - \lambda \sum_{k=1}^{n} W_k$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{T_n}$$

(II) $M_k = N_{k\Delta} - N_{(k-1)\Delta}$ $\qquad \hat{\lambda} = \dfrac{N_{n\Delta}}{n\Delta}$

どちらも

$$\hat{\lambda} = \frac{(イベントの総回数)}{(観測時間)}$$

(4) 複合ポアソン過程

第k回目のイベント発生に対応する
何らかの量U_kの累積和を表すモデル。

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} U_k$$

$\boxed{\text{例2}}$ $E[N_t] = \lambda t$ $E[U_k] = \mu$ $V[U_k] = \sigma^2$ $\phi(s) = E[e^{sU_k}]$

(1) $E[X_t] = E\left[\sum_{k=1}^{N_t} U_k\right] = \lambda \mu t.$

$E[X_t^2] = E[(\sigma^2+\mu^2)N_t + \mu^2 N_t(N_t-1)]$

$V[X_t] = \lambda t(\mu^2+\sigma^2)$

(2) $E[e^{sX_t}] = \exp(\lambda t(\phi(s)-1))$