7 極限定理，漸近理論

$n \to \infty$ で μ に平均二乗収束．

(a) $\{X_n\}$ $\begin{cases} E[X_n] = \mu \\ V[X_n] = \sigma^2 \end{cases}$ $\quad \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 大数の弱法則．

$$E[(\bar{X}_n - \mu)^2] = V[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n} \to 0$$

(b) 分布収束

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = G(x)$$

$$X_n \sim N\left(0, \frac{1}{n^2}\right) \qquad x>0 \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1$$

$$F_n(x) = \Phi(\sqrt{n}x) \qquad x<0 \quad \lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0$$

例1

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\{X_n\} \to Y$$

$$\{h(X_n)\} \to h(Y)$$

例 少数法則　二項分布　$n \to \infty$　X_n はポアソン分布に分布収束する.

例 中心極限定理

$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$ は $N(0, \sigma^2)$ に分布収束する. $\Rightarrow$ 中心極限定理

例 極限分布

例3

$$P(M_n \le x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le n) = (1-e^{-x})^n$$

ガンベル分布…

フレシェ分布

ワイブル分布

□ 分布収束の性質

① 連続写像定理

$X_n \to X$

$h(X_n) \to h(X)$

② $X_n \to X$, $Y_n \to C$ $\qquad X_n + Y_n \to X + C$, $X_n Y_n \to CX$ $\qquad$ スルツキーの補題

③ $M_n(t) \to M(t)$ $\quad X_n \to X$

□ デルタ法

$f(\bar{X}_n) - f(\mu) \simeq f'(\mu)(\bar{X} - \mu)$

$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \to N(0, \sigma^2)$

$\sqrt{n}\left(f(\bar{X}) - f(\mu)\right) \to N(0, f'(\mu)^2\sigma^2)$

例4 $\quad f(x) = x^2$ $\qquad N(0, (2\mu)^2\sigma^2)$

$f'(x) = 2x$

□ 多次元の分布収束

$\lim_{n\to\infty} F_n(x, y) = G(x, y)$

例題

$X_n^2 + Y_n^2$

は 自由度2の
カイ二乗分布に従う.

例題 $E[X] = \frac{1}{6}$ $V[X] = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5}{6}\left(0-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$

問7.1

$$P(X \geqq 9.5) = P\left(Z \geqq \frac{9.5 - 30 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{30 \times \frac{5}{36}}}\right) = 0.014$$

問7.2

[1] $\dfrac{(\bar{X}-\mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0.1)$

[3] 自由二乗分布.

[2] $f(x) = x^3$ $\sim N(0.\ 9\mu^4\sigma^2)$

$f'(x) = 3x^2$