

# 7 極限定理, 漸近理論

$n \rightarrow \infty$  で  $\mu$  に 平均二乗収束

$$\{X_n\} \begin{cases} E[X_n] = \mu \\ V[X_n] = \sigma^2 \end{cases} \quad \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{大数の弱法則.}$$

$$E[(\bar{X}_n - \mu)^2] = V[\bar{X}_n] = \frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0$$

## 1.1 分布収束

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = G(x)$$

$$X_n \sim N(0, \frac{1}{n}) \quad x > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 1$$

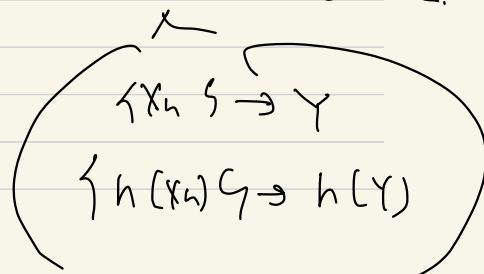
$$F_n(x) = \Phi(\sqrt{n}x) \quad x < 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = 0$$

例1

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{1}{2}$$

↓

$$\sqrt{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



④ 冪数法則      二項分布       $n \rightarrow \infty$        $X_n$  は  $PY$ -分布 に 分布収束する.

④ 中心極限定理

$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$  は  $N(0, \sigma^2)$  に 分布収束する.  $\Rightarrow$  中心極限定理

④ 極限分布

例3

$$P(M_n \leq x) = \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) = (1 - e^{-x})^n$$

ギバレル分布...

7LΞE分布

71ギル分布

# ④ 分布収束の性質

① 連続写像定理

$$X_n \rightarrow X$$

$$h(X_n) \rightarrow h(X)$$

②

$$X_n \rightarrow X$$

$$Y_n \rightarrow C$$

$$X_n + Y_n \rightarrow X + C$$

$$X_n Y_n \rightarrow CX$$

214 (1-1) 補題

③

$$\mu_n(t) \rightarrow \mu(t)$$

$$X_n \rightarrow X$$

## ④ 中心法

$$f(\bar{X}_n) - f(\mu) \approx f'(\mu) (\bar{X}_n - \mu)$$

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

$$\sqrt{n} (f(\bar{X}_n) - f(\mu)) \rightarrow N(0, f'(\mu)^2 \sigma^2)$$

## ④ 多次元分布収束

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x, y) = G(x, y)$$

## 例題

$$X_n^2 + Y_n^2$$

は 自由度 2 の  
カイ二乗分布に近づく。

## 例4

$$f(x) = x^2$$

$$N(0, (2\mu)^2 \sigma^2)$$

$$f'(x) = 2x$$

$$\boxed{\text{問 7.1}} \quad E[X] = \frac{1}{6} \quad V[X] = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{5}{36}$$

$$\boxed{\text{問 7.1}} \quad P(X \geq 9.5) = P\left(Z \geq \frac{9.5 - 30 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{30 \times \frac{5}{36}}}\right) = 0.014$$

問 7.2

$$[1] \quad \frac{(\bar{x} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

[3]  $\sigma^2 = \text{乗倍}$

$$[2] \quad f(x) = x^3 \quad \sim N(0, 9\mu^4\sigma^2)$$

$$f'(x) = 3x^2$$