

微分几何笔记

袁成超

1 曲线坐标

1.1 曲线坐标系

在 \mathbb{R}^n , 选定正交基向量 e_i , 给出了笛卡尔坐标 x^1, \dots, x^n . 我们研究欧氏空间 \mathbb{R}^n 中的任意区域 C : 它的每一点 P 与以 P 为中心的半径足够小的球一起包含在这个集合中; 区域 C 的每一点 P 都与一个 n 实数组对应, 得到 n 个函数 $x^1(P), \dots, x^n(P)$. 我们考察具有笛卡尔坐标 y^1, \dots, y^n 的 \mathbb{R}^n 和具有笛卡尔坐标的 x^1, \dots, x^n 的 \mathbb{R}_1^n ; 设 C 是 \mathbb{R}^n 中的区域。

定义: 若函数组 $x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)$ 给出了 \mathbb{R}^n 中区域 C 到欧氏空间 \mathbb{R}_1^n 中某区域 A 的双方单值连续函数, 则称此函数组为区域 C 上的连续坐标系。换句话说, 函数组给出的映射是从 C 到 A 的一个同胚。函数 $x^1(P), \dots, x^n(P)$ 称为点 P 关于坐标映射 $f: C \rightarrow A$ 的坐标。

定义: 坐标 $x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n)$ 的偏数组成的函数矩阵

$$df = \frac{\partial x}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial y^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

称为映射 f 的 Jacobi 矩阵, 其行列式用 $J(f)$ 表示, 称为映射 f 的 Jacobi 行列式。

定义: 对于一个连续坐标系, 若映射的 Jacobi 行列式 $J(f)(P)$ 在区域 C 的所有点都不为 0, 则称此光滑函数组为 C 中的正则坐标系。区域 C 上的正则坐标系也称为区域 C 上的曲线坐标系。

现在在 C 上考察两个任意的曲线坐标系: $\{x^i(P)\}$ 和 $\{z^i(P)\}$. 也就是说给定了两个正则映射 f, g

$$f: C \rightarrow A \subset \mathbb{R}_1^n(x^1, \dots, x^n); \quad g: C \rightarrow B \subset \mathbb{R}_2^n(z^1, \dots, z^n) \quad (2)$$

因此 C 中的每一点都与两个曲线坐标系 $\{x^i(P)\}$ 和 $\{z^i(P)\}$ 相对应, 从而确定了映射 $\psi_{x,z}: A \rightarrow B$, 称为区域 C 上的坐标变换。

引理映射 $\psi_{x,z}$ 是从区域 A 到 B 的双方单值、双方光滑、Jacobi 行列式不为零的映射。

证明实际上 $\psi_{x,z}$ 由两个光滑单值映射合成: $\psi_{x,z} = g \circ f^{-1}$, 因此 $\psi_{x,z}$ 双方单值双方光滑。其 Jacobi 矩阵可以分解为两个矩阵的乘积, 也就是 $d\psi_{x,z} = dg \cdot df^{-1}$. 考虑到

$d(f \circ f^{-1}) = df \circ df^{-1} = I$ 为恒等映射, 那么 $J(\psi_{x,z}) = J(g)/J(f) \neq 0$. 引理得证。

引理 假设光滑函数组 $\{x^i(P)\}$ 具有性质: 这函数组的 Jacobi 行列式在区域 C 中不为 0, 那么在区域 C 中的每一点 P 存在这样的开邻域, 则此邻域中函数组 $\{x^i(P)\}$ 给出了正则坐标系。

证明 这里没有要求函数组确定的映射是双方单值的。但根据隐函数 Theorem, 从 Jacobi 行列式不等于零可以得出逆映射的存在性, 至少是局部存在, 引理得证。

1.2 黎曼度量和不定度量

在欧氏空间中给出欧氏数量积 $\langle \xi, \eta \rangle = \sum \xi^i \eta^i$, 可以按照公式 $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ 计算它的模或者长。现在给出光滑曲线长的定义。以参数形式定义的曲线有一组 n 个光滑函数 $\{x^i(t)\}$ 给出, 其中 t 跑过一个闭区间或者整个实数轴。那么数 $l(\gamma)|_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle} dt$ 称为曲线 $\gamma(t)$ 从 a 到 b 的长, 其中 $\dot{\gamma}(t)$ 是具有坐标 $\left(\frac{dx^1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx^n(t)}{dt}\right)$ 的向量, 称为在 t 处的速度向量或者切向量。曲线长还可以写成:

$$l(\gamma)|_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} dt. \quad (3)$$

引理 在光滑曲线 $\gamma(t)$ 上给定两点 $\gamma(a), \gamma(b)$ 。若 $t = t(\tau)$ 为参数 t 换为参数 τ 的任何光滑变换, $\frac{dt}{d\tau} > 0$, 那么曲线长 $l(\gamma(t))|_a^b$ 不变, 即 $l(\gamma(t))|_a^b = l(\gamma(\tau))|_\alpha^\beta$, 这里 $a = t(\alpha), b = t(\beta)$. 直接计算可以证明。

定义 两条相交的光滑曲线 $\gamma_1(t), \gamma_2(t)$, 在它们的交点处 $P = \gamma_1(a) = \gamma_2(b)$, 若两个速度向量 $\dot{\gamma}_1(a), \dot{\gamma}_2(b)$ 均不为零, 由等式

$$\cos \phi = \frac{\langle \dot{\gamma}_1(a), \dot{\gamma}_2(b) \rangle}{|\dot{\gamma}_1(a)| |\dot{\gamma}_2(b)|} \quad (4)$$

确定的角 ϕ 为两条相交直线在 P 处的夹角。

现考虑在欧氏空间的区域 C 中的曲线坐标, 假设 $\gamma(t)$ 是这个区域中的任意光滑曲线, 用 z^1, \dots, z^n 表示曲线坐标, 即 $x^i = x^i(z)$, 那么可以用复合函数求导法则来计算曲

线的长

$$\begin{aligned}
 l(\gamma)|_a^b &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2} dt \\
 &= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{m,p} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \frac{dz^m}{dt} \frac{dz^p}{dt}} dt \\
 &= \int_a^b \sqrt{\sum_{m,p} g_{mp} \frac{dz^m}{dt} \frac{dz^p}{dt}} dt
 \end{aligned} \tag{5}$$

其中函数 $g_{mp}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p}$, 显然这些函数关于指标 m, p 对称, 即 $g_{mp} = g_{pm}$; 于是函数组组成对称矩阵 $G = [g_{mp}]$. 这里的的矩阵 G 的系数是以 Jacobi 矩阵的元素乘积和表示的, 因为 $d\psi_{z,x} = \frac{\partial x}{\partial z}$, 所以矩阵 G 可以表示为 $G = AA^T$, $A = d\psi_{z,x}$. 考察形式为 $z^i = z^i(y^1, \dots, y^n)$ 的正则坐标变换, 同时把 $\{y^i\}$ 看作区域中新的曲线坐标。这时 G 的变化规律为

$$\begin{aligned}
 g_{lk}(y) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^l} \frac{\partial x^i(y)}{\partial y^k} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{m,p} \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial z^m}{\partial y^l} \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \frac{\partial z^p}{\partial y^k} \\
 &= \sum_{mp} \frac{\partial z^m}{\partial y^l} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial z^m} \frac{\partial x^i}{\partial z^p} \right) \frac{\partial z^p}{\partial y^k} \\
 &= \sum_{mp} \frac{\partial z^m}{\partial y^l} g_{mp} \frac{\partial z^p}{\partial y^k}
 \end{aligned} \tag{6}$$

即, $G(y) = d\psi_{y,z} G(z) (d\psi_{y,z})^T$.

黎曼度量如果在欧氏空间的区域 C 的每个正则坐标系 z^1, \dots, z^n 中定义了一组光滑函数 $g_{mp}(z^1, \dots, z^n)$ 满足: (1) $g_{mp} = g_{pm}$; (2) 矩阵 $G = [g_{mn}]$ 是正定和非退化的; (3) 在坐标正则变换 $z \rightarrow y$ 时, 矩阵 G 按照规则 $G(y) = d\psi G(z) (d\psi)^T$ 变换, 这里的 $d\psi$ 表示坐标变换的 Jacobi 矩阵 $d\psi_{y,z}$, 那么我们说在欧氏空间区域 C 中给出了黎曼度量。

黎曼度量能够在经过区域中的每一点的所有光滑曲线的切向量的集合上定义二次型 $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$. 若 $\gamma_1(0) = P = \gamma_2(0)$, $P \in C$, 对向量 $\xi = \dot{\gamma}_1(0)$, $\eta = \dot{\gamma}_2(0)$, 这里 $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^n)$, 可以令 $\langle \xi, \eta \rangle_g = g_{ij} \xi^i \eta^j$ (这里利用爱因斯坦求和法则)。

Theorem 映射 $\xi, \eta \rightarrow \langle \xi, \eta \rangle_g$ 给出了光滑地依赖于点的非退化正定二次型。

做正则变换 $\{z^i\} \rightarrow \{z^{i'}\}$, 这时 $\gamma_1(t) = \{z_1^i(t)\}, \gamma_2(t) = \{z^{i'}(t)\}$

$$\begin{aligned}\xi^{i'} &= \frac{dz^{i'}}{dt} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i} \frac{\partial i'}{\partial t} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i} \xi^i \\ \eta^{i'} &= \frac{dz^{i'}}{dt} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^i} \eta^i \\ g_{i'j'} &= \frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}} g_{ij}\end{aligned}\tag{7}$$

由此得到,

$$\begin{aligned}\langle \xi', \eta' \rangle_{g'} &= g_{i'j'} \xi^{i'} \eta^{j'} \\ &= \left(\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k} \right) \left(\frac{\partial z^j}{\partial z^{j'}} \frac{\partial z^{j'}}{\partial z^p} \right) g_{ij} \xi^k \eta^p \\ &= g_{ij} \xi^i \eta^j = \langle \xi, \eta \rangle_g\end{aligned}\tag{8}$$

在证明中用到了 $\frac{\partial z^i}{\partial z^{i'}} \frac{\partial z^{i'}}{\partial z^k} = \delta_k^i$.

欧氏度量在区域 C 中给出了黎曼度量 G , 若在该区域中存在这样的曲线坐标系 y , 在此坐标系下 $G(y)$ 变为单位矩阵, 则称此黎曼度量 G 是欧氏的。

不定度量假设在欧氏空间区域 C 中的每一个正则坐标系 z^1, \dots, z^n 中定义了一个光滑函数 $g_{mp}(z^1, \dots, z^n)$, 它们满足除了正定条件以外加在黎曼度量的所有条件, 也就是说对应的二次型不是正定的, 那么就在区域 C 中给出了不定度量。

考察伪欧空间 \mathbb{R}_s^n 中所谓指标 s 的伪欧度量作为一个最简单的例子。在笛卡尔坐标 x^1, \dots, x^n 下的欧氏空间, 并且在每一点 P 给出下面形式的双线性型 (具有常系数, 系数与点无关):

$$\langle \xi, \eta \rangle_s = - \sum_{i=1}^s \xi^i \eta^i + \sum_{j=s+1}^n \xi^j \eta^j\tag{9}$$

于是光滑曲线的长度按照公式

$$l(\gamma)|_a^b = \int_a^b \sqrt{- \sum_{i=1}^s \left(\frac{dx^i}{dt}\right)^2 + \sum_{j=s+1}^n \left(\frac{dx^j}{dt}\right)^2} dt\tag{10}$$

给出。

在 $(n=4, s=1)$ 时的伪欧空间又被称为 Minkowski 空间 (在狭义相对论中)。指标为 0 的伪欧空间就是欧式空间。在 \mathbb{R}_s^n 中, 向量的长度可以是零和虚数, 这是由度量是非正定的所决定, 所有向量的集合可以分为三类:

$$\begin{aligned}\langle \xi, \xi \rangle_s &< 0 \text{ Timelike} \\ \langle \xi, \xi \rangle_s &= 0 \text{ Lightlike} \\ \langle \xi, \xi \rangle_s &> 0 \text{ Spacelike}\end{aligned}\tag{11}$$

1.3 球面和伪球面上的几何

在 n 维欧氏空间中引入球坐标系, 变换公式为:

$$f_n: C(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \rightarrow A(x^1, x^2, \dots, x^n); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cos \theta_1 \\ x^2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x^3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ &\dots\dots\dots \\ x^{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x^n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1} \end{aligned} \quad (13)$$

在三维空间中, 球面坐标通常利用 (r, θ, ϕ) 表示; 此时变换公式为

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi; x^2 = r \sin \theta \sin \phi; x^3 = r \cos \theta; 0 < \theta < \pi, 0 \leq \phi < 2\pi, r \geq 0. \quad (14)$$

Jacobi 矩阵具有形式:

$$d\psi = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \sin \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

在笛卡尔坐标系 (x^1, x^2, x^3) 下, 矩阵 G 为单位矩阵, 因此在三维球坐标下, 黎曼度量为

$$G(r, \theta, \phi) = d\psi I (d\psi)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (16)$$

曲线长度的微分为

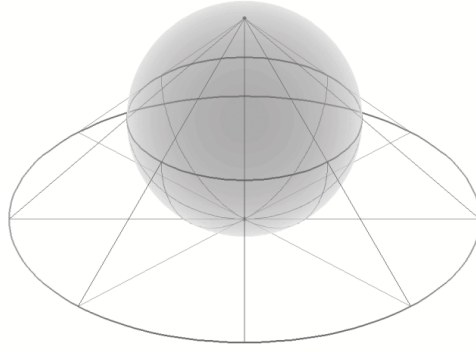
$$(dl)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2. \quad (17)$$

现在我们考虑二维球面到三位欧氏空间的**标准嵌入**. 半径为 R 的球面由 $r = R$ 给出, 在整个球面 S^2 上, 两条曲线为 $\gamma_1(t) = (R, \theta_1(t), \phi_1(t)), \gamma_2(t) = (R, \theta_2(t), \phi_2(t))$, 于是

$$\langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle = R^2(\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2) \quad (18)$$

与之对应的度量为 $(dl)^2 = R^2(d\theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta (d\phi)^2$. 它是欧式空间中 (17) 用新的函数 $r = R, \theta = \theta, \phi = \phi$ 代替得到, (18) 表示的度量称为三维空间欧氏度量在球面上的**诱导度量**.

考虑 S^2 到二维平面 \mathbb{R}^2 的球极投影 (如下图)



$$\begin{aligned}\phi_0 : S^2(\theta, \phi) &\rightarrow \mathbb{R}^2(r, \phi) \\ (\theta, \phi) &\mapsto (r = R \cot \frac{\theta}{2}, \phi)\end{aligned}\quad (19)$$

其 Jacobi 行列式为 $J = -\frac{R}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$, 除了北极外, 变换是正则的。在新的坐标系下, 黎曼度量可以写为

$$ds^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\phi^2) \quad (20)$$

相当于度量 $(dr^2 + r^2 d\phi^2)$ 乘上一个可变因子, 这样的两个度量是共形的。

共形度量在欧氏空间区域 C 中给出曲线坐标 z_1, \dots, z_n 下给出黎曼度量 $g_{ij}(z)$ 它具有形式 $g_{ij}(z) = \lambda(z)g'_{ij}(z)$, 这里的 $\lambda(z)$ 是 C 中的光滑函数, 而 $g'_{ij}(z)$ 是在坐标 z^1, \dots, z^n 下的欧氏度量分量, 则称 $g_{ij}(z)$ 为共形度量, 换句话说存在坐标系 x , 使得

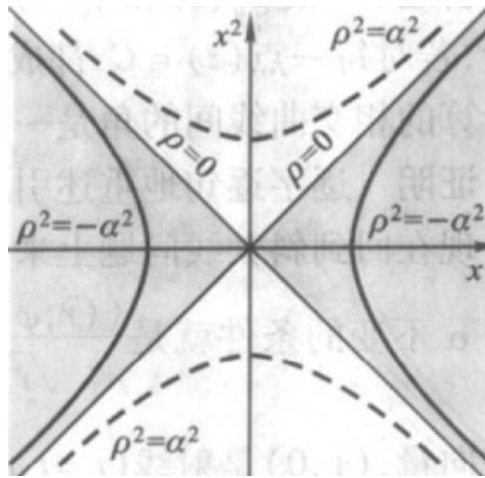
$$g_{ij}(x) = \lambda(x) \sum_{k=1}^n (dx^k)^2. \quad (21)$$

我们来说明这两个度量并不等价。在欧氏度量下计算圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 的周长为 $l_e = 2\pi a$. 在球面度量下, “半径” ρ 为 $\rho = 2 \int_0^a \frac{R^2}{R^2 + r^2} dr = 2R \arctan(a/R)$. 周长为 $l_e = 2 \int_0^{2\pi} \frac{R^2 a d\phi}{R^2 + r^2} = \frac{4\pi a R^2}{R^2 + a^2} = 2\pi R \sin(\rho/R)$. 在 $\rho \rightarrow 0$ 时, 得到 $l_e = 2\pi \rho$, 转变为平面圆周长度的表达式。但是在一般情况下二者是不同的, 特别地, 一个是现线性的一个是周期的, 因此两个度量不等价或者说不等长。事实上, 凸球面不可能保持其曲线长不变而变换到欧氏平面的某个区域。

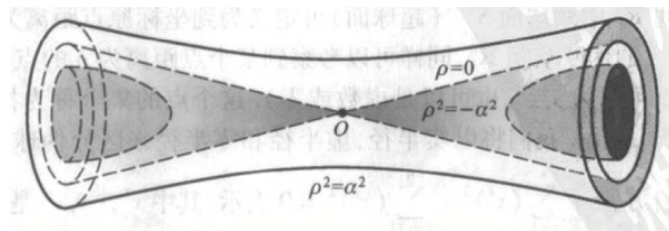
引理相交曲线 γ_1, γ_2 在球面度量下的夹角 $\alpha \langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle$, 与相对应的球极投影下的曲线 q_1, q_2 的夹角 $\beta \langle \dot{q}_1, \dot{q}_2 \rangle$ 相等, 即 $\alpha \langle \dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2 \rangle = \beta \langle \dot{q}_1, \dot{q}_2 \rangle$. 更一般地, 共形度量下相交曲线的夹角是一样的。(利用共形度量的定义直接计算可以证明)

在指标为 s 的伪欧空间 \mathbb{R}_s^n 中, 可以考察与原点距离为 ρ 的点的集合 (现在 ρ 既可以是实数也可以是零或者虚数), 这样的点的集合称为指标为 s 的伪球面, 并且用 S_s^n 表示。这里将以实半径, 虚半径和零半径来区分伪球面, 零半径的伪球面用二阶方程 $-\sum_{i=1}^s (x^i)^2 + \sum_{j=s+1}^n (x^j)^2 = 0$ 表示, 其中 x^i 为笛卡尔坐标。很明显零半径的伪球面与零锥面一致。

下面考察几个例子。设 $n = 2, s = 1$, 在二维平面上零锥面由两条直线 $x^1 = \pm x^2$ 组成。这个锥面将 \mathbb{R}^2 分成两个区域: 其中一个部分 $\langle \xi, \xi \rangle > 0 (|x^2| > x^1)$, 另一部分 $\langle \xi, \xi \rangle < 0 (|x^2| < x^1)$ 。实半径的伪球面为双曲线 $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = \alpha^2, \alpha \in \mathbb{R}$, 虚半径的伪球面为双曲线 $-(x^1)^2 + (x^2)^2 = -\alpha^2$, 见下图。

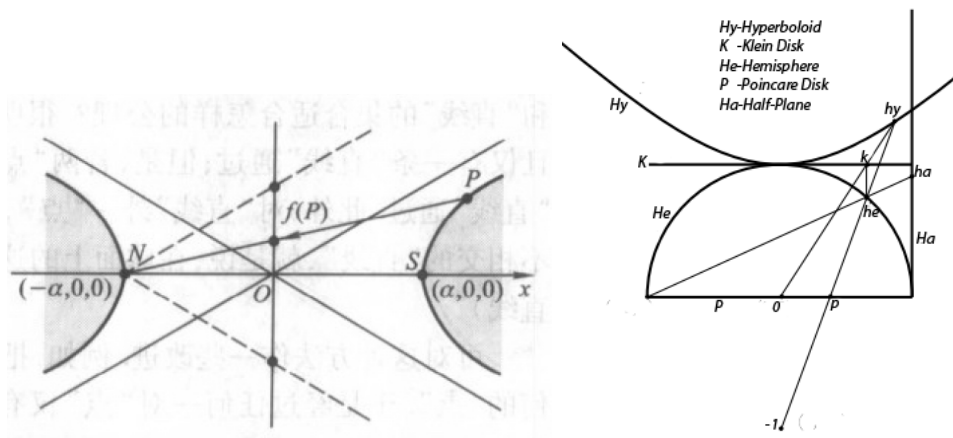


现在设 $n = 3, s = 1$. 零锥面即为通常的二阶锥面, 方程为 $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$. 它将空间分为两个部分: 内部和外部。实半径伪球面是单叶双曲面: $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = \alpha^2$. 虚半径伪球面为双叶双曲面 $-(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -\alpha^2$. 在 \mathbb{R}^3 上制作 \mathbb{R}_1^2 的模型, 如下图



考察虚半径伪球面 $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, 因为它嵌入到 \mathbb{R}_1^3 中, 即 \mathbb{R}_1^3 的几何度量诱导出 \mathbb{R}_1^2 的某种几何度量。简便起见, 仅研究其一叶, 例如 $x > 0$ 的一叶, 我们称双曲面上的通常点为伪球面的几何点, 而称双曲面与过原点的形如 $ax + by + cz = 0$ 的平面相交的线为“直线”。然后做类似于球极投影的变换, 把 O 点作为中心, $(-\alpha, 0, 0)$ 作为北极 N , $(\alpha, 0, 0)$ 作为南极 S . 考虑双曲面右面部分上的变点 P , 连接 P, N 交 YOZ 平面于一点 $f(P)$, 称为球极投影 $f: S_1^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 下 P 的像。右边双曲面仅覆盖区域

$y^2 + z^2 < \alpha^2$, 左边的双曲面覆盖区域 $y^2 + z^2 > \alpha^2$. 与 S^2 不同, 伪球面 S_1^2 仅覆盖平面除去圆周 $y^2 + z^2 = \alpha^2$ 的部分。见下图 现在计算球极投影的计算公式。



引理 设 $P = (x, y, z)$, $f(P) = (u^1, u^2)$ 那么

$$x = \alpha \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}; y = \frac{2\alpha^2 u^1}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}; z = \frac{2\alpha^2 u^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2} \quad (22)$$

其中 $|\mathbf{u}|^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2$; $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$.

证明 由上图得 $y/u^1 = (x + \alpha)/\alpha = z/u^2 =$, 由于 $-\alpha^2 = -x^2 + y^2 + z^2$, 所以

$$-\alpha^2 = -x^2 + ((u^1)^2 + (u^2)^2) \frac{(x + \alpha)^2}{\alpha^2} \quad (23)$$

从而得 $x = \alpha \frac{|\mathbf{u}|^2 + \alpha^2}{\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2}$.

引理 坐标 (u^1, u^2) (在开圆盘 $(u^1)^2 + (u^2)^2 < \alpha^2$ 内变化) 给出了双曲面右边部分的正则坐标系, 即球极投影给出了正则坐标: $f(x, y, z) \rightarrow (u^1, u^2)$.

证明 可以认为伪球面右边部分由方程 $x = \sqrt{\alpha^2 + y^2 + z^2}$ 给出。因而球极投影变换可以理解为 $f(y, z) \rightarrow (u^1, u^2)$, 其 Jacobi 行列式为

$$J(f) = 4\alpha^2 \cdot \frac{\alpha^2 + |\mathbf{u}|^2}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} = \frac{4\alpha^3 x}{(\alpha^2 - |\mathbf{u}|^2)^2} > 0 \quad (24)$$

于是坐标系是正则的。

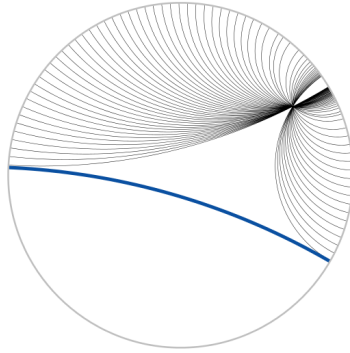
引理 记 $+S_1^2$ 为双曲面右边部分, $+S_1^2$ 与形如 $ax + by + cz = 0$ 的平面的每一条交线在映射 f 下变为与圆周 $y^2 + z^2 = \alpha^2$ 交于直角的圆弧。

证明 将 (22) 代入 $ax + by + cz = 0$ 整理得

$$\left(u^1 + \frac{b\alpha}{a}\right)^2 + \left(u^2 + \frac{c\alpha}{a}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}(b^2 + c^2 - a^2) \quad (25)$$

它确定了中心在 $O' = (-\frac{b\alpha}{a}, -\frac{b\alpha}{a})$, 半径为 $r = \frac{\alpha}{a}\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}$ 的圆, 由于 $|OO'|^2 = r^2 + \alpha^2$, 因此在交点 A, B 处投影得到的圆弧与 $y^2 + z^2 = \alpha^2$ 垂直。

若取这个圆内的通常点位这个几何的“点”, 取与边界垂直的圆弧作为直线, 这种几何为双曲几何 (或者 Lobachevskii 几何), 这种几何在欧氏平面上半径为 α 的模型称为 Poincare 模型。特别地, 圆内所有的直径都是“直线”, 因为他们可以看成直径无限大的圆弧。在这种模型下, 欧几里得第五公设并不成立, 过直线外一点可以引无数条直线与之平行, 如下图



我们在 Poincare 模型上的坐标 u^1, u^2 下, 计算伪球面上的黎曼度量, 将球极投影的公式 (22) 代入 $ds^2 = -dx^2 + dy^2 + dz^2$ 得

$$ds^2 = \frac{4\alpha^4}{[\alpha^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2]^2} [(du^1)^2 + (du^2)^2] \quad (26)$$

在极坐标系啊并假设 $\alpha = 1$, 这个度量写成 $ds^2 = 4 \frac{dr^2 + r^2 d\phi^2}{(1-r^2)^2}$, 等于在欧氏度量下乘上一个可变因子 $\lambda(r) = 4(1-r^2)^{-1}$. 按照变换 $r = \cosh \frac{\chi}{2} / \sinh \frac{\chi}{2}, \phi = \phi$ 可以得到

$$ds^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\phi^2. \quad (27)$$

为了讨论 χ 的几何意义, 在伪球面上引入类似的球面坐标

$$x = \alpha \cosh \theta'; y = \alpha \sinh \theta' \cos \phi; z = \alpha \sinh \theta' \sin \phi \quad (28)$$

考察平面 XOZ , 其上的伪欧度量为 $ds^2 = -dx^2 + dz^2$, $x = \cosh \theta', z = \sinh \theta'$, 求从 S 点到 P 点的线段长: $l = \int_0^{\theta'} \sqrt{-\sinh^2 \theta + \cosh^2 \theta} d\theta = \theta'$, 于是经线长为 θ' . 在 ZOY 平面内的“直线”, 经球极投影之后得到 $z = 2r/(1-r^2)$, 因为 $z = \sinh \theta'$, 那么可以解得 $r = c \coth(\theta'/2)$, 根据坐标变换 (28), 可知 $\chi = \theta'$.

2 一般拓扑

2.1 度量空间和拓扑空间

度量空间我们考察任意抽象的集合 X ，一对元素 $x, y \in X$ 的非负数值函数 $\rho(x, y)$ ，满足下列条件时就称为 X 的度量：

- (1) 当且仅当 $x = y$ 时， $\rho(x, y) = 0$ (恒等公理)；
- (2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (对称公理)；
- (3) 对任何元素 $x, y, z \in X$ 总成立三角不等式

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y). \quad (29)$$

空间 X 和定义在 X 上的度量 ρ 一起成为度量空间，集合 X 的元素被称为点， $\rho(x, y)$ 则被称为点之间的距离。

如果 X 是具有度量 ρ 的空间，那么借助于度量 ρ 在子几何 Y 上的限制使集合 Y 也称为度量空间。度量空间 Y 被称为 X 的**子空间**。

对 $x \in X$ 满足 $\rho(x, y) < \epsilon$ 的所有点 $y \in X$ 的集合 $O_\epsilon(x)$ 称为中心点在 x 半径为 ϵ 的球邻域。当 x 跑遍集合 Y_2 时 $\inf_{x \in Y_1, y \in Y_2} \rho(x, y)$ 被称为两个集合 $Y_1, Y_2 \subset X$ 的距离。若 Y_1, Y_2 有公共点，那么 $\rho(Y_1, Y_2) = 0$ 。对集合 $Y \subset X$ ，满足 $\rho(x, Y) < \epsilon$ 的所有点 $x \in X$ 的集合 $O_\epsilon(x)$ 称为半径为 ϵ 集合 Y 的球邻域。

使 $\rho(x, Y) = 0$ 的每一个点 $x \in X$ 都称为 Y 的接触点。集合 Y 的所有接触点构成的集合称为 Y 的**闭包**，用 \bar{Y} 表示。度量空间的子集 $Y \subset X$ 若满足 $Y = \bar{Y}$ 则称 Y 为**闭集**。若 Y 的补集 X/Y 是闭集则称 Y 为**开集**。

任何一组开集的并是开集，有限多开集的交是开集；任何一组闭集的交和有限闭集的并使闭集。几个结论：

- (1) 球邻域 $O_\epsilon(x)$ 是开集；
- (2) 任何集 Y 的内部 $\text{Int}Y$ 是开集；
- (3) 任何集 Y 的闭包是闭集。

在集合 X 中，若引入一组称为开集的子集，而且满足：

- (1) 集合 X 与空集都是开集；
- (2) 任何一族开集的并与有限开集的交都是开集。

我们说在 X 上给出了**拓扑**。集合 X 和以上的拓扑称为拓扑空间。度量空间 X 的一族开集给出 X 上某个拓扑，即把 X 变成拓扑空间。

在拓扑空间中，任何含有点 x 的开集称为拓扑空间中 x 的邻域。包含 Y 的所有开集称为 Y 的邻域，若 x 的每一个邻域与 Y 都有非空的交，则称 x 是 Y 的接触点。集

合 Y 的所有接触点构成的集合称为 Y 的闭包, 记作 \bar{Y} . 若 x 的某个邻域都在 X 内, 则称 x 为内点. Y 的所有内点称为 Y 的内部, 记作 $\text{Int}Y$. 集合 $Y \subset X$ 是闭集的充要条件是 $Y = \bar{Y}$. 拓扑空间 X 的任何集的 Y 的闭包是 \bar{Y} 闭集, 即 $\overline{\bar{Y}} = \bar{Y}$.

设 X 是拓扑空间, $Y \subset X$ 是它的子集, 那么在 Y 上也可以诱导出拓扑结构, 方法是取所有的集合 $Y \cap U$ 为开集, 其中 U 是 X 中的开集. 此时拓扑空间 Y 是拓扑空间 X 的子空间, 而 Y 中的拓扑称为诱导拓扑.

设 Y 是拓扑空间 X 的子集, 若 $\bar{Y} = X$, 则称 Y 为稠密集 (处处稠密).

Theorem 若 Y_1, Y_2 是空间 X 的稠密开集, 那么他们的交 $Y = Y_1 \cap Y_2$ 是开集并且处处稠密.

证明 设 x 是任意点, U 是它的邻域. 因为集合 Y_1 稠密的, 所以 $U \cap Y_1 \neq \emptyset$, 即存在 $y \in U \cap Y_1$, 因为 $U \cap Y_1$ 是开集, 而 Y_2 稠密, 那么 $U \cap Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, 即 $U \cap Y \neq \emptyset$, 也就是说 Y 是 X 的稠密集.

连续映射 (Cauchy) $f: X \rightarrow Y$ 为拓扑空间的映射, 若对点 $f(x_0) \in Y$ 的任何邻域 $V(f(x_0))$, 若存在点 $x_0 \in X$ 的这样的邻域 $U(x_0)$ 使得 $f(U(x_0)) \subset V(f(x_0))$, 则称 f 在 x_0 处连续. 若映射 f 在空间 X 的每一点都连续则称 f 为连续映射.

Theorem 映射 $f: X \rightarrow Y$ 连续的充要条件是满足下面两个等价条件之一:

- (1) 任何开集的原像都是开集.
- (2) 任何闭集的原像都是闭集.

利用定义即可, 不想写证明过程了.

考察从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射, 若 f 是双方单值的同时逆映射 f^{-1} 也是双方单值的那么映射 f 称为同胚, 同时 X, Y 称为同胚的拓扑空间. 在同胚下, 不仅建立了拓扑空间 X 和 Y 的双方单值对应, 同时建立了拓扑结构本身之间的一一对应关系.

例子 设 $f: X \rightarrow Y$ 是度量空间的连续映射, ρ_1, ρ_2 是 X, Y 上的度量. 那么映射的连续性条件可用以下方式叙述: 对任何的 $x_0 \in X$ 和 $\epsilon > 0$, 存在这样的 $\delta > 0$, 从不等式 $\rho_1(x, x_0) < \delta$ 可以推出 $\rho_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.

把数列的收敛性推广到度量空间也是有效的. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_0, x_n) = 0$, 则说点列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x_0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

定义 (Heine) 若由等式 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 可以推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, 则称映射 f 在 x_0 点连续.

考察两个拓扑空间 X 和 Y , 构造新的拓扑空间 $X \times Y$. 集合 $X \times Y$ 是所有形为 (x, y) 配对的集合, 其中 $x \in X, y \in Y$, 称 $X \times Y$ 为 X 和 Y 的笛卡尔乘积. 现在定义

$X \times Y$ 中的拓扑。若 $U \subset X \times Y$ 表示为并 $U = \bigcup_{\alpha} (V_{\alpha} \times W_{\alpha})$, 其中 $V_{\alpha} \subset X, W_{\alpha} \subset Y$ 是开集, 则称 U 为开集。集合 $X \times Y$ 和其上定义的拓扑结构一起称为拓扑空间 X 和 Y 的**笛卡尔乘积**。

设 Z, X_1, X_2 是三个拓扑空间。对任何两个映射 $f_1 : Z \rightarrow X_1, f_2 : Z \rightarrow X_2$, 映射 $F : Z \rightarrow X_1 \times X_2, F(z) = (f_1(z), f_2(z))$ 是连续的充要条件是 f_1, f_2 都连续。

商拓扑 设 X 为拓扑空间, Y 为某个集合, $f : X \rightarrow Y$ 为从 X 到 Y 的映射。若 f 满足: 对 Y 的子集 U , 当且仅当 $f^{-1}(U)$ 作为 X 的子空间是开集时, U 为 Y 的开集。则 f 给出了集合 Y 上的商拓扑。

关于商拓扑可以这样理解, 对于集合 X , 定义等价关系 \sim , 商集合 X/\sim (这个集合由所有 \sim 的等价类组成) 上定义的一个拓扑: X/\sim 中一个等价集合是开集当且仅当他们的并集在 X 中是开集。映射 $f : X \rightarrow X/\sim$ 将 X 映到等价类。

例子 设 X 是 \mathbb{R}^2 上的正方形 $ABCD$. 那么 X 是具有由 \mathbb{R}^2 诱导的拓扑的拓扑空间, 我们引入以下等价关系: R_1 ——线段 AB 和 DC 上与平行于 AD 的直线的交点视为一同点。那么 X/R_1 是环。

2.2 连通性、分离公理和紧致空间

考察拓扑空间 X 中两点 x, y 和单位区间的连续映射 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$, 其中 $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$, 那么称 γ 为连接 x, y 的曲线。如果 X 中的任何两点都可以用曲线连接那么说 X 是道路联通的。此时 X 不可以分割为两个即开又闭不相交的集合的并。一般的, 拓扑空间 X , 如果不能分割为两个即开又闭不相交的子集时, 则称 X 是连通的。

Theorem 设 $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$, 每一个 X_{α} 是连通的, 并且交集 $\bigcap_{\alpha} X_{\alpha}$ 不空, 则空间 X 是连通的。

Theorem 在连续映射下, 连通空间的像是连通的。

证明 设 $f : X \rightarrow Y$ 是连续映射。所以, 若 Y 不是连通空间, 则 $Y = A \cup B$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, 于是 $X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, 集合 $f^{-1}(A), f^{-1}(B)$ 是非空开集, 而且不相交, 与 X 的连通性矛盾。

连通不等价于道路连通, 存在连通的拓扑空间但不是道路连通的例子。

X 为拓扑空间, 若对任何两点 $x, y \in X, x \neq y$, 存在不相交的邻域 $U(x), U(y), U(x) \cap U(y) = \emptyset$, 则称 X 为 **Hausdroff 空间**。在 Hausdroff 空间中每一个点 $x \in X$ 是闭集。实际上, 若 $y \neq x$, 则存在 y 的邻域 $U(y)$, 它不包含 x . 于是集合 $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} U(y)$ 是开集, 它的补集由一点组成, 而且是闭集。

离散拓扑空间是 Hausdroff 空间。设 X, Y 都是 Hausdroff 空间, 那么它们的笛卡尔乘积, 连通和不连通都是 Hausdroff 空间。所有的度量空间都是 Hausdroff 空间, 这

是由三角不等式保证的。

设有拓扑空间 X 的开集族, $\{U_\alpha\}$, 若 $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, 则称 $\{U_\alpha\}$ 为开覆盖。若在每一个 U_α 上给出连续函数 f_α , 而在每一个交 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上, 函数 f_α, f_β 相同, 那么在空间 X 上存在一个连续函数 f , 它在每一个开集 U_α 与 f_α 相同。设 $\{U_\alpha\}$ 和 $\{V_\beta\}$ 是拓扑空间 X 上的两个开覆盖, 若每一个开集 V_β 都在开集 $U_\alpha, \alpha = \alpha(\beta)$ 之中, 则称开覆盖 $\{V_\beta\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的**加细**。或者说 $\{V_\beta\}$ 更细于 $\{U_\alpha\}$ 。

Theorem 设 X 是度量拓扑空间, $\{U_\alpha\}^N$ 是有限开覆盖, 则存在更细的覆盖 $\{V_\alpha\}^N$, 而且 $\bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$

证明 这里断定不单是存在更细的覆盖, 而且该覆盖中的元素仍以指标 α 标号。我们考察在 U_1 中不相交的闭集 $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^N U_\alpha$ 和 $X \setminus U_1$. 于是存在邻域 V_1 使 $X \setminus \bigcup_{\alpha=2}^N U_\alpha \subset V_1 \subset \bar{V}_1 \subset U_1$, 那么集合 V_1, U_2, \dots, U_N 覆盖空间 X . 依次用 $V_k \subset \bar{V}_k \subset U_k$ 代替 U_k , 在 N 次后, 得到所求的覆盖 $\{V_\beta\}^N$.

紧致空间 设 X 是 Hausdroff 空间, 若每一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 都具有覆盖 X 的有限部分 $\{U_{\alpha_k}\}$, 则称 X 是紧致的。

例子 实数轴上的有限区域 $[a, b]$ 是紧致空间。

证明 实际上若 $\{U_\alpha\}$ 是区间 $[a, b]$ 上的开覆盖, 那么不失一般性, 可以认为覆盖的每一个元素就是区间 (c_α, d_α) (除去两个半开区间 $[a, a']$ 和 $(b', b]$)。设 $x \in [a, b]$ 使得区间 $[a, x]$ 能被有限个 U_α 所覆盖。我们考虑这样的数 x 的集合 P , 那么若 $x \in P, y < x$, 则 $y \in P$. 因为 $a \in [a, a'], a' > a$, 那么 $a \in P$. 设 x_0 是集合 P 的上确界, $x_0 > a$. 若 $x_0 < b$, 则 x_0 在某个区间 $(c_{\alpha_0}, d_{\alpha_0})$ 中, 即 $c_{\alpha_0} < x_0 < d_{\alpha_0}$. 设 y, z 是满足 $c_{\alpha_0} < y < x_0 < z < d_{\alpha_0}$ 的数, 则 $y \in P$, 也就是说有限个集合 U_β 覆盖了区间 $[a, y]$, 所以 $[a, z]$ 也被有限个 U_β 覆盖, 于是 x_0 不是 P 的上确界。这样便有 $x_0 = b$, 这时 $b' < x_0 = b$, 若 $b' < y < b$ 则 $y \in P$, 而且区间 $[a, y]$ 仍被有限个集合 U_β 所覆盖, 而与 $(b', b]$ 一起整个区间被有限个集合 U_β 所覆盖。

Theorem 设 $F \subset X$ 是 Hausdroff 拓扑空间 X 的紧致子空间, 则 F 在 X 中是闭集。

证明 设 x 是空间 X 的不属于 F 的任意点。由于 X 是 Hausdroff 空间, 对点 $y \in F$ 存在不相交的邻域 $y \in U_y$ 和 $x \in V_y$, 则族 $\{U_y\}$ 覆盖集合 F , 而且由于它的紧致性, 存在有限集族 $\{U_{y_k}\}_{k=1}^N$ 覆盖 F , 那么并 $\bigcup_{k=1}^N U_{y_k}$ 包含集合 F , 并且与交 $\bigcap_{k=1}^N V_{y_k}$ 不相交, 于是点 x 有与 F 不相交的邻域, 即 F 是闭集。

Theorem 设 $f: X \rightarrow Y$ 是从紧致空间 X 到空间 Y 的连续映射, 那么 Y 是紧致

的。

证明可以作开覆盖的像，然后利用连续映射的性质证明。

Theorem 设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ 是紧致空间 X 上的连续函数，则函数 f 是有界的，并且取到最大值和最小值。

证明由以上两个定义可得 $f(X)$ 是紧致空间 \mathbb{R}^1 的紧致子空间，因此 $f(X)$ 是闭集。若 $f(X)$ 不是有界的，那么不可能从它的覆盖中分出有限个子覆盖，因此 $f(X)$ 有界。

紧致度量空间 设 X 是度量空间，空间 X 是紧致的充要条件是满足以下两个等价性质之一：

- (1) 任何序列 $\{x_n\}$ 由收敛子序列。
- (2) 任何非空的闭子集套序列 $\{F_n\}$, $F_{n-1} \subset F_n$ 由非空的交。

Theorem 紧致度量空间的笛卡尔乘积是紧致空间。

2.3 函数的分离性

在拓扑空间 X 上的连续函数类可以求极限。设函数序列 f_n ，若对于 $\forall \epsilon > 0$ ，存在指标 N 使得当 $n > N$ 时，对任何点 $x \in X$ 满足 $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ 则称 f_n 均匀收敛于 f

若 F_1, F_2 是拓扑空间 X 中两个不相交的闭集，那么为了作出 F_1 和 F_2 不相交的邻域，在 X 上只需要这样的函数 f ：设 $a \geq b$,

$$f(x) \begin{cases} \geq a, x \in F_1 \\ \leq b, x \in F_2 \end{cases} \quad (30)$$

这时可以选取区间 (c, ∞) 和 $(-\infty, c)$ ($b < c < a$) 的原像 $f^{-1}((c, \infty))$, $f^{-1}((-\infty, c))$ 分别作为 F_1, F_2 的邻域。

Theorem (Urysohn 引理) 设 X 是正规拓扑空间， F_0, F_1 是两个不相交的闭集。则存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使 $f|_{F_0} = 0, f|_{F_1} = 1$. (不证)

Theorem 设 X 是正规拓扑空间， $F \subset X$ 是闭集， $f: F \rightarrow \mathbb{R}^1$ 是 F 上的连续函数。那么，函数 f 可以延拓到整个空间 X 上连续函数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}^1$. 若函数 f 是有界的， $|f| \leq A$ 则 g 也有界，并可取相同的数为界 $|g(x)| \leq A$. (不证)

f 为拓扑空间 X 上的连续函数, 称由使 $f(x) \neq 0$ 的所有 $x \in X$ 构成的点集的闭包为 f 的支集, 记为 $\text{supp } f$. 于是在支集外, f 恒为 0. 在拓扑学中, 经常用到的方法就是把函数分解为这样的和, 使其每一个被加项都有足够小的支集。

Theorem 设 X 是度量空间, $\{U_\alpha\}$ 是有限开覆盖, 则存在函数 $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}^1, 0 \leq \phi_\alpha(x) \leq 1$, 使

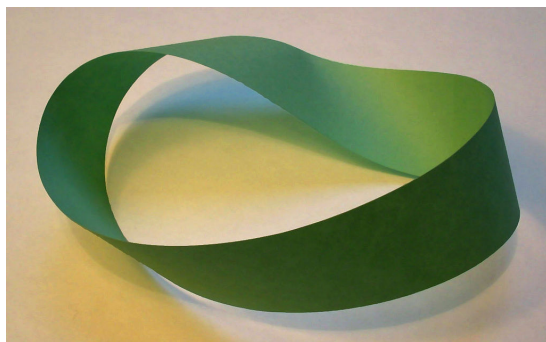
$$\begin{aligned} 1^\circ \text{supp } \phi_\alpha &\subset U_\alpha \\ 2^\circ \sum_{\alpha} \phi_\alpha(x) &= 1. \end{aligned} \quad (31)$$

函数系 $\{\phi_\alpha\}$ 称为附属于覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的 **1 的分解**.

证明 考察有限覆盖 $\{U_\alpha\}$, 那么可以找到更细的覆盖 $\{V_\alpha\}, \bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$. 同时存在 X 上的连续函数 $\psi_\alpha(x)$ 满足: $\psi|_{\bar{V}_\alpha} = 1, \psi|_{(X \setminus U_\alpha)} = 0, 0 \leq \psi_\alpha \leq 1$. 这就是说 $\text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$. 且当 $x \in \bar{V}$ 时, $\psi_\alpha(x) > 0$. 设 $\psi = \sum \psi_\alpha$. 函数 ψ 是连续的. 实际上, 对于任意点 $x \in X$, 存在 α_0 使得 $x \in V_{\alpha_0}$, 即 $\psi_{\alpha_0}(x) > 0$, 于是 $\psi(x) = \sum \psi_\alpha(x) \geq \psi_{\alpha_0}(x) > 0$ 最后令 $\phi_\alpha(x) = \psi_\alpha(x)/\psi(x)$, 则

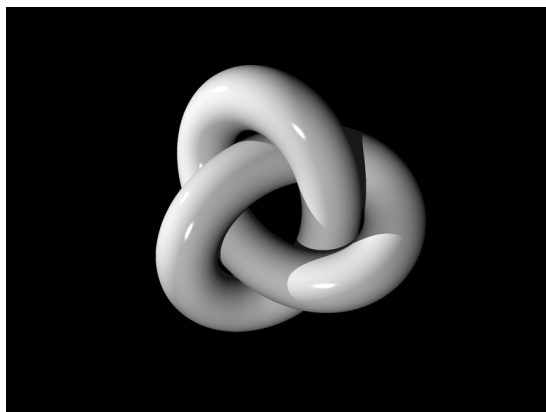
$$\text{supp } \phi_\alpha = \text{supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha, 0 \leq \phi_\alpha(x) \leq 1 \quad (32)$$

并且 $\sum_{\alpha} \phi_\alpha(x) = 1$, 证明完毕。



Möbius strips

Trefoil knot



3 光滑流形 (Smooth Manifold)

3.1 流形的概念和由方程给出的流形

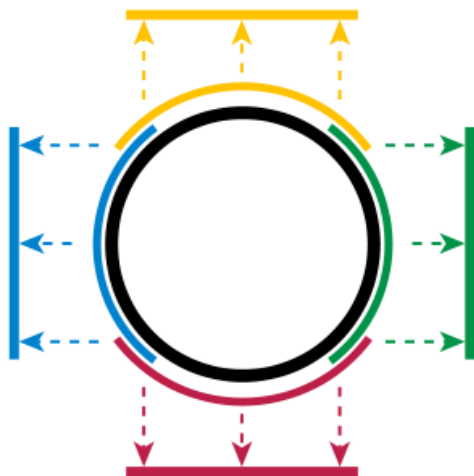
若度量空间 M 的每一点 P 都包含在同胚于欧式空间 \mathbb{R}^n 某一区域 V 的邻域 $U \subset M$ 中, 则称 M 为 n 维**流形** (manifold). 或者说 n 维流形 M 局部地与欧氏空间 \mathbb{R}^n 的区域同胚. 并且说 M 的维度 $\dim M = n$. 于是, 若 M 是 n 维流形, 那么在空间 M 中可以指出开集系 $\{U_i\}$, 它以某种指标 i 的某个集合编号, 和集合 U_i 到区域 V_i 的同胚 $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^n$. 并且开集系 $\{U_i\}$ 应该覆盖空间 $M : M = \bigcup_i U_i$. 一般地说, 区域 V_i 之间可以相交. 集合 U_α 和 ϕ_α 一起称为**图** (chart).

假设在欧氏空间 \mathbb{R}^n 中建立了某个笛卡尔坐标系 (x^1, x^2, \dots, x^n) , 如 \mathbb{R}^n 上的线性函数组. 于是复合函数 $x^k = x^k(P) = x^k(\phi_\alpha(P))$, $P \in U_\alpha$ 给出了 U_α 上的局部坐标系, 图的全体 $\{U_\alpha\}$ 覆盖了整个流形 M , $\{U_\alpha\}$ 称为**图册** (atlas). 点 $P \in M$ 的局部坐标系编上补充的指标, $U_\alpha : x_\alpha^k = x_\alpha^k(P)$, 这样是方便的, 因为 P 有可能属于多个图

例子考察由方程 $x^2 + y^2 = 1$ 给出的圆周 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, 用下面四个图组成图册覆盖 S^1 :

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x, y) \in S^1 : y > 0\}; \\ U_2 &= \{(x, y) \in S^1 : y < 0\}; \\ U_3 &= \{(x, y) \in S^1 : x > 0\}; \\ U_4 &= \{(x, y) \in S^1 : x < 0\}. \end{aligned} \tag{33}$$

它们对应的区域在实直线 \mathbb{R}^1 上是一致的, 并且等于开区间 $(-1, 1)$. 见下图*



我们构造同胚 ϕ_1 和 ϕ_2 作为圆周横轴上的投影: $\phi_1(x, y) = \phi_2(x, y) = x$ 而同胚 ϕ_3, ϕ_4 是纵轴上的投影 $\phi_3(x, y) = \phi_4(x, y) = y$. 为证明映射 ϕ_k 是同胚, 只要把逆映射些为显

*<https://en.wikipedia.org/wiki/Manifold>

式即可

$$\phi_k^{-1} = \begin{cases} (x, \sqrt{1-x^2}) \\ (x, -\sqrt{1-x^2}) \\ (\sqrt{1-y^2}, y) \\ (-\sqrt{1-y^2}, y) \end{cases} \quad (34)$$

逆映射是连续的。那么在圆上给出了四个局部坐标系。在极坐标系下，圆周的坐标具有这样的形式 $r = 1$ ，为了描述其上的点，我们引入参数 ϕ ，并且把它的值限制在一个区间 $(0, 2\pi]$ 上。那么对应的函数将在点 $(1, 0)$ 处发生间断。因此我们引入两个图： $U_1 = \{(x, y) \in S^1 : x \neq -1\}$, $U_2 = \{(x, y) \in S^1 : x \neq 1\}$ ，给出同胚

$$\begin{aligned} \phi_1(P) = \phi_1(x, y) &\Rightarrow \phi \in (-\pi, \pi) \\ \phi_2(P) = \phi_2(x, y) &\Rightarrow \phi \in (0, 2\pi) \end{aligned} \quad (35)$$

对于上半圆周的点 ϕ_1, ϕ_2 是一致的，但是下半部分局部坐标并不一致，即 $y < 0$ 时 $\phi_1(x, y) = \phi_2(x, y) - 2\pi$ 。

例子在 \mathbb{R}^{n+1} 中满足 $\sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1$ 的点集，它是单位半径的 n 为球面 S^n ，取开集

$$\begin{aligned} U_i^+ &= \{(x^1, \dots, x^i) \in S^n : x^i > 0\} \\ U_i^- &= \{(x^1, \dots, x^i) \in S^n : x^i < 0\} \end{aligned} \quad (36)$$

作为图册。坐标同胚 ϕ_i^+, ϕ_i^- 为 \mathbb{R}^{n+1} 到 \mathbb{R}^n 沿坐标 x^i 的射影。

例子考察射影平面 RP^2 ： \mathbb{R}^3 中过原点的直线被称为点，定义两点之间的距离为它们较小的夹角。于是 RP^2 是度量空间，下面证明 RP^2 是二维流形。这里用一个齐次坐标 $(x : y : z)$ 来表示这里的点，显然 $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ 。用三个图来表示 RP^2 ：

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x : y : z) | x \neq 0\}; \\ U_2 &= \{(x : y : z) | y \neq 0\}; \\ U_3 &= \{(x : y : z) | z \neq 0\}; \end{aligned} \quad (37)$$

设 $V_1 = V_2 = V_3 = \mathbb{R}^2$ ，取下面的映射做坐标同胚 $\phi_k : U_k \rightarrow V_k = \mathbb{R}^2$ ：

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y, z) &= (y/x, z/x); \\ \phi_2(x, y, z) &= (x/y, z/y); \\ \phi_3(x, y, z) &= (x/z, y/z); \end{aligned} \quad (38)$$

于是作出三个局部坐标系。

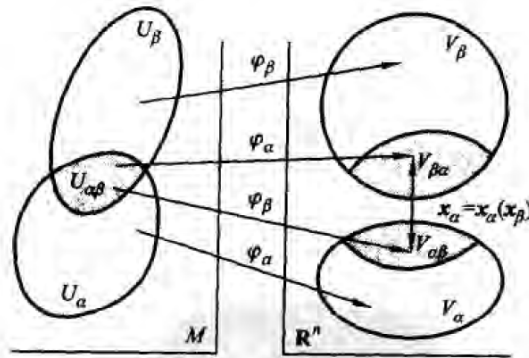
设 $\{U_i\}, \{U'_i\}$ 是流形 M 上的两个图册, 则存在第三个图册它比 $\{U_i\}, \{U'_i\}$ 都细。

坐标变换 设 M 是 n 维流形, $\{U_\alpha\}$ 是它的图册, ϕ_α 是坐标同胚, x_α^k 是一组局部坐标系. 这两个图的每一个交 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ 中定义了两个局部坐标系 $\{x_\alpha^k\}$ 和 $\{x_\beta^k\}$, 而且一个图的坐标函数 $x_\alpha^i(P)$ 可以通过另一个图中的坐标 $x_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(x_\beta^1(P), \dots, x_\beta^n(P))$ $P \in U_{\alpha\beta}$. 函数 $x_\alpha^k(P) = x_\alpha^k(x_\beta^1(P), \dots, x_\beta^n(P))$ 称为把坐标 $\{x_\alpha^k\}$ 变为坐标 $\{x_\beta^k\}$ 的坐标变换函数.

坐标变换函数实现了 \mathbb{R}^n 中区域 $V_{\beta\alpha}$ 到 $V_{\alpha\beta}$ 的连续映射

$$x_\alpha = \phi_\alpha \phi_\beta^{-1}(x_\beta) = \phi_{\alpha\beta}(x_\beta) \quad (39)$$

图示如下 **光滑流形** n 维流形 M , 其图册 $\{U_\alpha\}$ 的局部坐标系 $\{x_\alpha^k\}$ 满足条件: 对任何



一对图册 U_α, U_β , 坐标变换函数 $x_\alpha^k = x_\alpha^k(x_\beta)$ 在它们的整个定义域中是连续可微的, 则称流形 M 是 n 维光滑流形.

定义在光滑流形 M 上的函数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}^1$, 若在任何局部坐标系 $\{x_\alpha^i\}$ ($P_0 \in U_\alpha$) 中, 函数 f 在点 $(x_\alpha^1(P), \dots, x_\alpha^n(P))$ 的邻域中可以表示为 n 个独立变量的连续可微函数 $h(x_\alpha)$, 则称函数 f 在点 $P_0 \in M$ 是连续可微的。

例子 设 $M = \mathbb{R}^1$ 是实直线, 图册由两个同样的图 $U_1 = U_2 = \mathbb{R}$ 组成, 但具有不同的坐标系. 在 U_1 上给出坐标 $x_1 = x, x \in \mathbb{R}$, 而在 U_2 上给出 $x_2 = x^3$. 那么坐标变换函数为 $x_2 = (x_1)^3, x_1 = (x_2)^{1/3}$, 后者具有不连续的导数, 因此具有图册 $\{U_1, U_2\}$ 的流形 M 不是光滑流形

推论 若流形 M 上的图册由一个图构成, 即 M 同胚于欧氏空间的区域, 那么 M 是光滑流形。

在流形 M 上给出两个图册 $\{U_\alpha\}, \{U'_\beta\}$, 并且关于每一个图册 M 都是光滑流形. 若由图册 $\{U_i\}$ 中每一个局部坐标系到图册 $\{U'_j\}$ 中的任何一个局部坐标系的转换函数都是连续可微的, 则称两个图册等价。

若在点 \mathbf{x}_0 的邻域中实值函数 $h(\mathbf{x}_0)$ 的直到 r 阶的所有偏导数存在且连续, 那么函数 h 在这点的邻域中是 C^r , ($r = 1, 2, \dots, \infty$) 类光滑函数. 对建立了图册 $\{U_i\}$ 的流形 M , 若所有的坐标变换函数在其定义域中的所有点都是 C^r 类光滑函数, 则称 M 是 C^r 类光滑流形. 若无特别说明, 这里研究的都是 C^∞ 类光滑流形.

例子 在上一个例子中, 若在 U_2 中取坐标 $x_2 = x + x \cdot |x|$, 那么流形是 C^1 类光滑流形.

设 M_1, M_2 是两个光滑流形, $f: M_1 \rightarrow M_2$ 是连续映射. 若对任意点 $P_0 \in M_1$ 的邻域中的任何局部坐标系 (x^1, x^2, \dots, x^n) 和点 $Q_0 = f(P_0) \in M_2$ 的邻域中的局部坐标系 (y^1, \dots, y^m) , 函数 f 的向量表达式 $\mathbf{y} = (h^k(\mathbf{x})) = h(\mathbf{x})$ 是 C^r 类光滑向量函数, 则称映射 f 是 C^r 类光滑映射. 若 $f^{-1}: M_2 \rightarrow M_1$ 也是 C^r 类光滑映射, 则 f 为 C^r 类微分同胚.

Theorem 设 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 是 C^r 类微分同胚, 则 $\dim M_1 = \dim M_2$.

之前给出的流形是由某个非线性方程的解所构成的, 一般地, 若函数 $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 是连续可微的函数, 则方程 $f(x^1, x^2, \dots, x^n) - c = 0$ 的解的集合成为 f 的 c 等高线集合. 这种说法是正确的, 但是并不是所有的等高线都构成流形. 例如 $f = x^2 - y^2$, 在 $c = 0$ 时, 等高线由两个函数 $y = \pm x$ 构成并不是一个流形.

Theorem 设 $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ 是定义在 \mathbb{R}^n 上的 C^∞ 类函数, $M_c = \{(x^1, \dots, x^n) : f(x^1, \dots, x^n) = c\}$. 若 f 的梯度在 M_c 上不为零, 则 M_c 是 C^∞ 类的 $n-1$ 维光滑流形. 同时在每一点 $P \in M_c$ 的邻域中, 可以取其外围欧氏空间 \mathbb{R}^n 的某 $n-1$ 个笛卡尔坐标作为局部坐标. (证明需要用到隐函数 Theorem)

例子 由方程 $f = \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1$ 给出的 n 维球面 S^n 是 C^∞ 类光滑流形.

例子 考察 n^2 维欧氏空间 \mathbb{R}^{n^2} . 其中的点表示为具有坐标 $A = (a_{ij})$ 的 n 阶方阵. 考察行列式 $\det A = 1$ 的所有方阵 $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ 构成的集合 $SL(n, \mathbb{R})$. 集合 $SL(n, \mathbb{R})$ 关于矩阵乘积的运算构成的群称为特殊线性群. 我们证明 $SL(n, \mathbb{R})$ 是 C^∞ 类光滑流形, 其维数为 $n^2 - 1$.

证明 考虑函数 $f(a_{ij}) = \det(a_{ij})$, 由于函数 f 是多项式, 所以 f 是 C^∞ 类光滑函数. 为证明命题, 应该计算 f 在群 $A \in SL(n, \mathbb{R})$ 所有点处的梯度. 将 $\det A$ 按第一行展开

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{n+1} \det A_{1n} \quad (40)$$

考虑单位矩阵 $E \in SL(n, \mathbb{R})$, 于是 $\frac{\partial f}{\partial a_{11}} = 1$, 因此其梯度不为 0. 考虑任意点 $A_0 \in SL(n, \mathbb{R})$, 引进新的变量 $(b_{ij}) = B = A_0^{-1}A = A_0^{-1}(a_{ij})$, 那么 $f(A) = f(A_0B) =$

$\det A_0 \det B = f(B)$, 微分上式得到

$$\frac{\partial f}{\partial b_{11}}(E) = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial a_{11}}(A_0) \frac{\partial a_{11}}{\partial b_{11}} = 1 \quad (41)$$

因此, $\frac{\partial f}{\partial a_{11}}(A_0)$ 至少有一个不为 0, 也有函数 f 的梯度不为 0. 命题得证。

设给出方程组

$$\begin{aligned} f^1(x^1, \dots, x^n) &= c^1, \\ f^2(x^1, \dots, x^n) &= c^2, \\ &\dots\dots\dots \\ f^k(x^1, \dots, x^n) &= c^k, \end{aligned} \quad (42)$$

其解的集合 M_c 称为函数组 (f^1, \dots, f^k) 的等高线流形。

Theorem 设 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ 是 C^∞ 类光滑映射, M_c 是方程组 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ 的解集。若映射的 Jacobi 矩阵的秩在每一点 $P_0 \in M_c$ 都取最大秩 ($\text{rank} df(P_0) = k$), 则 M_c 是 C^∞ 类光滑流形。

例子 在具有坐标 x^1, x^2, x^3, x^4 的欧氏空间 \mathbb{R}^4 中, 考察两个方程的方程组:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \quad (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1 \quad (43)$$

相应的函数为

$$f^1(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^1)^2 + (x^2)^2, \quad f^2(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x^3)^2 + (x^4)^2 \quad (44)$$

简单计算可得 $f = (f_1, f_2)$ 的 Jacobi 矩阵满足定理的要求。实际上 (33) 所表示的流形是两个圆周的乘积, 成为二维环面, 见下图。

3.2 切向量 切空间

三维空间中的光滑曲线其参数方程为 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, 在点 $P_0 = \mathbf{x}(t_0)$ 处 $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t_0)$ 称为该点的切向量。考察三维空间中的光滑曲面具有参数形式 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ 。偏导数 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u, v)$ 若线性无关, 则称曲面为正则曲面。切平面 Π 上任何以 $P_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ 为起点的切向量可以写成 $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0)$ 的线性组合

$$\boldsymbol{\xi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(u_0, v_0) \Delta u + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}(u_0, v_0) \Delta v \quad (45)$$

这里 $(\Delta u, \Delta v)$ 称为切向量 ξ 在局部坐标系 (u, v) 下的坐标。

一般地, 设 M 是 n 维光滑流形, $P_0 \in M$ 是任意点。使每一个局部坐标系 (x^1, x^2, \dots, x^n) 对应一组数 $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$, 若对每一对局部坐标系满足下面的关系式

$$\xi_\alpha^k = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^l}(P_0) \xi_\beta^l, \quad (46)$$

称此为对应流形 M 上一点 P_0 的切向量。 $(\xi_\alpha^1, \dots, \xi_\alpha^n)$ 称为切向量 ξ 在局部坐标系 (x^1, \dots, x^n) 中的坐标。上式称为局部坐标变换下切向量的坐标变换的张量规则。

(46) 的定义是 (45) 的一般化。设 M 是光滑流形, $\gamma: (-1, 1) \rightarrow M$ 是区间 $(-1, 1)$ 到流形 M 的光滑映射, 则使点 $P_0 = \gamma(0)$ 的临域中的每一个局部坐标系 (x^1, \dots, x^n) 对应一组数的这种对应是定义 (46) 下的切向量。

证明 设 $\xi_\beta^k = \frac{dx_\beta^k}{dt}(\gamma(t))|_{t=0}$, 这里 $(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)$ 是流形 M 上点 P_0 的临域中的局部坐标系。那么对应两个局部坐标系得到,

$$\xi_\alpha^k = \frac{d}{dt} x_\beta^k(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} x_\alpha^k(x_\beta^1, \dots, x_\beta^n) = \sum_{l=1}^n \frac{x_\alpha^l}{x_\beta^l} \frac{d}{dt} x_\beta^l(\gamma(t)) \quad (47)$$

形式与 (46) 相同。

流形 M 在固定点 P_0 处的所有切向量的集合称为 M 在点 P_0 的切空间, 用 $T_{P_0}(M)$ 表示。

方向导数 设 $P_0 \in M, \xi \in T_{P_0}(M)$, $\gamma(t)$ 是过 P_0 的光滑曲线, 并且在 P_0 的切向量等于 ξ , 设 f 是流形上的光滑函数, 称

$$\xi(f) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))|_{t=0} \quad (48)$$

是函数 f 沿着 ξ 的导数。求导数的运算称为函数 f 沿着向量 ξ 的微分。

定理 设 (x^1, \dots, x^n) 是流形 M 上的点 $P_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ 的临域中的局部坐标系, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)$ 是 P_0 点的切向量, $f = f(x^1, \dots, x^n)$ 是由局部坐标系表示的函数, 于是

$$\xi(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n) \xi^i \quad (49)$$

因此导数不依赖于曲线的选择。(用定义直接证明即可)

光滑函数沿切向量的微分具有一下性质:

$$\begin{aligned}\xi(\lambda f + \mu g) &= \lambda \xi(f) + \mu \xi(g) \\ \xi(fg) &= \xi(f)g + f\xi(g)\end{aligned}\tag{50}$$

切丛 流形 M 所有切向量的总和表示为 $\bigcup_{P_0 \in M} T_{P_0}(M)$, 这个空间记为 $T(M)$ 并称为流形 M 的切丛。

3.3 子流形

光滑映射的微分 设 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 是光滑流形的光滑映射。 $Q_0 = f(P_0)$, 在 Q_0, P_0 的临域的局部坐标系中, 由映射 f 的 Jacobi 矩阵定义的切空间 $T_{P_0}(M_1)$ 到 $T_{Q_0}(M_2)$ 的线性映射称为光滑映射 f 在点 $P_0 \in M_1$ 的微分 df 。这个定义不依赖于局部坐标系的选择。设 ξ 是流形 M_1 在 P_0 点的切向量, $\eta = df_{P_0}(\xi)$ 是流形 M_2 在 Q_0 点的切向量, 则对流形 M_2 上的任何光滑函数 g , 有 $\eta(g) = \xi(g \circ f)$ 。同时, 如果 $\gamma = \gamma(t)$ 是流形 M_1 上通过 P_0 的曲线, ξ 是曲线 γ 在 P_0 点的切向量, 在映射 $f: M_1 \rightarrow M_2$ 下, $\eta = df_{P_0}(\xi)$ 是曲线 γ 的像 $f(\gamma(t))$ 的切向量。

考察光滑函数 $f = f(x^1, \dots, x^n)$, 并设 $P_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ 是函数 f 的极值点, 于是有 $\nabla f_{P_0} = 0$ 。推广到一般流形, 若在点 $P_0 \in M$ 达到光滑函数 f 的极值点, 则 $df_{P_0} = 0$ 。

流形上的黎曼度量 在光滑流形 M 的每一个切空间 $T_P(M)$ 中, 给定的正定数量积族叫做黎曼度量。若在固定点 P 的临域 U 的坐标系 (x^1, \dots, x^n) 中切空间给出坐标 (ξ^1, \dots, ξ^n) 。那么在坐标系 (ξ^1, \dots, ξ^n) 中, 数量积由非退化的度量矩阵 $G = (g_{ij})$ 所确定, 并且它依赖于点。在变为新的坐标系 (y^1, \dots, y^n) 时, 矩阵按照规则

$$g'_{[ij]}(P) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{\alpha\beta}(P) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}(P) \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}(P)\tag{51}$$

进行变化。这里 $G' = (g'_{ij})$ 是新坐标系下的数量积矩阵。

定义 光滑流形 M 每一点 P 的切空间 $T_P(M)$ 中一非退化的正定数量积族, 并且对应的数量积矩阵是局部坐标的光滑函数, 则称此数量积是光滑流形 M 的黎曼度量。

例子 在图 U_α 的坐标系 (x^1, \dots, x^n) 中给出黎曼度量 $G(P) = (g_{ij}(P))$ 。若 ξ, η 是两个切向量, 那么它们的数量积表示为 $(\xi, \eta) = g_{ij}\xi^i\eta^j$ 。

正则点 设 $f : M_1 \rightarrow M_2$ 是光滑映射。若映射的微分 $df : T_{P_0}(M_1) \rightarrow T_{Q_0}(M_2)$, $Q_0 = f(P_0)$ 是满同态, 即映射到整个空间 $T_{P_0}(M_2)$ 上, 则称点 $P_0 \in M_1$ 是映射 f 的正则点。若原像 $f^{-1}(Q_0)$ 中的所有点 P_0 都是正则点时, 则称 Q_0 为映射 f 的正则点。

定理 设 $f : M_1 \rightarrow M_2$ 是光滑流形的光滑映射, $Q_0 \in M_2$ 是 f 的正则点, 则原像 $M_3 = f^{-1}(Q_0)$ 是光滑流形, 且 $\dim M_3 = \dim M_1 - \dim M_2$. 此外可以取 M_1 的一些局部坐标作为 M_3 的局部坐标。

子流形 设 $f : M_1 \rightarrow M_2$ 是光滑映射。若在每一点 $P \in M_1$, 微分 $df_P : T_P(M_1) \rightarrow T_{f(P)}(M_2)$ 是态同胚, 即是到自己像双方单值映射, 此时 f 位浸入。此外, 如果 f 双方单值地映射 M_1 到它自己的像 $f(M_1)$ 上, 且 $f(M_1)$ 是闭集, 则映射 f 是嵌入。这时, 像 $f(M_1)$ 称为流形 M_2 的子流形。

3.4 曲线论

设 s 表示从某个固定点到变点的曲线弧长, 这个参数称为自然参数。写成自然参数的向量函数形式的曲线称为曲线的自然参数, 此时速向量的模恒等于 1. 并且与加速度向量垂直。由于加速度向量模不一定恒等于 1, 定义向量

$$\mathbf{n}(s) = \frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} / \left| \frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} \right| \quad (52)$$

为规范加速度。因此得曲线的光滑坐标架簇: $(\mathbf{v}(s), \mathbf{n}(s))$, 称为 Frenet 标架或 Frenet 基。向量 $\mathbf{n}(s)$ 称为曲线在点 s 的法向量。沿曲线的坐标架确定了 $\gamma(s)$ 到正交矩阵群的某个光滑映射, 即到平面旋转群的光滑映射。

定义 设光滑曲线取自然参数, 量 $k(s) = \left| \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \right|$ 称为在点 s 的曲率, 按照定义, 立即可有

$$\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = k(s)\mathbf{n}(s) \quad (53)$$

数 $R(s) = 1/k(s)$ 被称为曲率半径。

定理 (Frenet 公式) 若光滑曲线用自然参数表示, 则下列等式成立

$$\frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} = k(s)\mathbf{n}(s), \quad \frac{d\mathbf{n}(s)}{ds} = -k(s)\mathbf{v}(s) \quad (54)$$

证明 由于 $\langle \mathbf{n}(s), \frac{d}{ds}\mathbf{n}(s) \rangle = 0$, 可得 $\frac{d}{ds}\mathbf{n}(s) = \lambda(s)\mathbf{v}(s)$. 将等式 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle = 0$ 对 s 求微分得

$$k \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle + \lambda \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle = 0 \quad (55)$$

即 $k = -\lambda$, 证明完成。

考虑一般空间中的曲线。对于建立了坐标 (x^1, \dots, x^n) 的欧氏空间 \mathbb{R}^n 中的光滑曲线 $\mathbf{r}(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, 也可以建立 Frenet 标架。这里先考虑矩阵函数的相性质。在矩阵线性空间中, 考察光滑曲线, 即单参数矩阵簇 $A(t)$, 这里 t 在区间 $(-a, a)$ 中变化, $A(t)$ 是 $n \times n$ 矩阵, 同时也是参数 t 的光滑函数。假定所有的矩阵都是行列式为 1 的正交矩阵同时 $A(0) = E$ 为单位矩阵。

引理 用 $X = \dot{A}(t=0)$ 表示单参正交矩阵簇在 $t=0$ 处的导数, 即 $X = [\frac{da_{ij}(t)}{dt}]$ 所组成的矩阵, 那么 X 是反对称矩阵。

证明 对任意向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, 有恒等式 $\langle A(t)\mathbf{x}, A(t)\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, 对 t 求导得 $\langle X\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, X\mathbf{y} \rangle = 0$. 因此 X 是反对称矩阵。

命题 设 $\mathbf{r}(s)$ 是 \mathbb{R}^n 中的向量函数, 并且在区间 (a, b) 中的每一点, k 阶导数 $\frac{d^k \mathbf{r}}{ds^k}$ 与导数 $\frac{d}{ds}, \dots, \frac{d^{k-1} \mathbf{r}}{ds^{k-1}}$ 是线性相关的, 并且后者线性无关. 那么曲线全部包含在由 $\frac{d}{ds}, \dots, \frac{d^{k-1} \mathbf{r}}{ds^{k-1}}$ 张成的 $k-1$ 维平面上, 并且在 t 由 a 变到 b 的过程中, 这个平面不改变它在 \mathbb{R}^n 中的位置。

证明 由已知条件, $\frac{d}{ds}, \dots, \frac{d^{k-1} \mathbf{r}}{ds^{k-1}}$ 可以作为由它们张成平面的基, 为了证明这个平面不改变位置, 只需证明, 这个基的导数能够按照这个基展开, 由已知条件这是显然的。

接下来我们用 $\frac{d}{ds}, \dots, \frac{d^{k-1} \mathbf{r}}{ds^{k-1}}$ 构造一组正交基。用 τ_1, \dots, τ_n 表示。这里 $\tau_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds} / |\frac{d\mathbf{r}}{ds}|$, 在 $\tau_1, \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2}$ 构成的平面中作出与 τ_1 垂直的 τ_2 不断向下重复可以得到 (τ_1, \dots, τ_n) 。可以证明, 它们也满足 Frenet 公式。

定理 设 $\mathbf{r}(s)$ 是 \mathbb{R}^n 中的光滑曲线, s 是自然参量, 若 $\frac{d}{ds}, \dots, \frac{d^n \mathbf{r}}{ds^n}$ 是线性无关的, 则存在光滑函数 $k_2(s), \dots, k_n(s)$ 使以下等式成立 (不证)

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_1}{ds} &= k_2 \tau_2 \\ \frac{d\tau_2}{ds} &= k_3 \tau_3 - k_2 \tau_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{d\tau_{n-1}}{ds} &= k_n \tau_n - k_{n-1} \tau_{n-2} \\ \frac{d\tau_n}{ds} &= -k_n \tau_{n-1} \end{aligned} \tag{56}$$

3.5 曲面 第一和第二基本形式

考虑欧氏空间 \mathbb{R}^n , V^{n-1} 是 $n-1$ 维子流形, 在第一章中我们知道可以看作 $n-1$ 维圆盘在 \mathbb{R}^n 中的嵌入。选择参数表示, 认为 V^{n-1} 由光滑向径 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, \dots, u^{n-1})$ 给出, 其中参数在 \mathbb{R}^{n-1} 的某个圆盘上进行变化, 可以认为 $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^{n-1}}$ 在定义域中的每

一点都是线性无关的。 V^{n-1} 在 \mathbb{R}^n 中光滑嵌入, 在 V^{n-1} 上产生诱导的黎曼度量。

设 (x^1, \dots, x^n) 是 \mathbb{R}^n 的笛卡尔坐标, 这时向径由一组光滑函数 $x^i(u^1, \dots, u^n)$ 给出, 那么欧氏度量可以写为

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_i dx^i \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial u^k} \frac{\partial x^i}{\partial u^p} du^k du^p \\ &= g_{kp} du^k du^p, \quad g_{kp} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} \right\rangle \end{aligned} \quad (57)$$

这里 \langle, \rangle 是 \mathbb{R}^n 中的数量积。

定义 形式 $ds^2|_{V^{n-1}} = g_{kp} du^k du^p$ 称为 \mathbb{R}^n 中超曲面 V^{n-1} 的第一基本形式, 其中 $g_{kp} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^k}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^p} \right\rangle$.

第一基本形式定义在曲面的切向量上, 更确切地, 如果 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in T_P(V^{n-1})$ 是两个切向量, 那么它们的数量积为 $g_{kp} a^k b^p$.

现在设超曲面借助于隐函数 $F(x^1, \dots, x^n) = 0, \frac{\partial F}{\partial x^i} \neq 0$ 给出。这时, 根据隐函数定理, 存在形如 $x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1})$ 的局部解, 且 $\frac{\partial f}{\partial x^i} = -\frac{\partial F}{\partial x^i} / \frac{\partial F}{\partial x^n}$, 这里计算可得

$$\begin{aligned} ds^2|_{V^{n-1}} &= \sum_{i=1}^{n-1} (dx^i)^2 + (dx^n)^2 \\ &= \sum_{k,p \neq n}^{n-1} \left(\delta_{kp} + \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^p} \right) dx^k dx^p \end{aligned} \quad (58)$$

此时,

$$g_{kp} = \left[\frac{\partial F}{\partial x^k} \frac{\partial F}{\partial x^p} / \left(\frac{\partial F}{\partial x^n} \right)^2 \right] + \delta_{kp} \quad (59)$$

考虑二维平面在三位欧氏空间中的嵌入。设 V^2 是由参数形式 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 给出。这时第一基本形式可以写为

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (60)$$

如果 $E = G, F = 0$ 则称度量是欧氏共形的。