1 第一题

取管轴线处的流线列伯努利方程:

$$\frac{V_A^2}{2}+\frac{p_A}{\rho}+z_A=\frac{V_B^2}{2}+\frac{p_B}{\rho}+z_B \tag{1}$$

其中$z_A=z_B, p_A=p_a, p_B=p_a-h, V_A=0$,代入得到

$$V_B=\sqrt{\frac{2h}{\rho}}=38.9\mathrm{m/s} \tag{2}$$

于是流量

$$Q=AV_B=\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2V_B=4.89\mathrm{m^3/s} \tag{3}$$

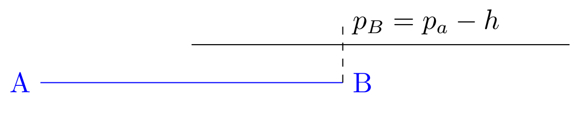

图 1: 第一题图

2 第二题

由质量守恒:

$$Q=\pi\left(\frac{d(z)}{2}\right)^2V(z)=0.9\mathrm{m^3/s} \tag{4}$$

令$z=0$得到

$$V(0)=\frac{4*Q}{\pi d^2(0)}=4.58\mathrm{m/s} \tag{5}$$

对轴线应用伯努利方程:

$$\frac{V^2(0)}{2g}+\frac{p(0)}{\rho g}+0=\frac{V^2(z)}{2g}+\frac{p(z)}{\rho g}+z \tag{6}$$

用(4)消掉上式中的$V(z)$,再将$p(z)=p(0)$代入上式,得到:

$$d(z)=\sqrt{\frac{4Q}{\pi\sqrt{V^2(0)-2gz}}}=1.07(21-19.6z)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{m/s} \tag{7}$$

3 第三题

以两个水箱整体为控制体,由质量守恒,显然补充的流量等于4-4截面的流量.同时以右侧水箱为控制体,同样可以得到2-2截面的流量等于4-4截面的流量:

$$Q = A_1 V_2 = A_2 V_4 \tag{8}$$

我们取从1-1截面流经2-2截面流出4-4截面的流线列伯努利方程:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 = \frac{V_4^2}{2g} + \frac{p_4}{\rho g} + z_4 \tag{9}$$

其中 $V_1 = 0, p_1 = p_4 = 0, z_1 = h_1 + h_2, z_2 = h_2 - z, z_4 = 0$,另外在右侧水箱中我们近似认为过流截面是垂直的,那么根据垂直于流线方向压强和流线关系,$p_2 = \rho g z$.

得到:

$$\frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1, Q = A_1\sqrt{2gh_1} \tag{10}$$

4 第四题

4.1 第一问

质量守恒:

$$Q = \pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 V_1 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 V_2 \tag{11}$$

对轴线处流线使用伯努利方程:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + 0 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_a}{\rho g} + 0 \tag{12}$$

由以上两式得到

$$p - p_a = \frac{\rho}{2}[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2]V_2^2 \tag{13}$$

另一方面,由测压管:

$$p - p_a = \rho g h \tag{14}$$

于是:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2}} = 4.45\text{m/s} \tag{15}$$

此时

$$Q = 0.035\text{m}^3/\text{s} \tag{16}$$

4.2 第二问

动量定理

$$-F = \dot{m}(V_2 - V_1) = \rho Q V_2 \left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = 138\text{N} \tag{17}$$

5 第五题

对上水箱伯努利:

$$\frac{p_a}{\rho g} + 0 + h = \frac{p_a}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + 0 \tag{18}$$

得到:

$$V_1 = \sqrt{2gh} \tag{19}$$

流量:

$$Q = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 V_1 \tag{20}$$

下落过程中,由自由落体的运动规律:

$$V_2^2 - V_1^2 = 2gH \Rightarrow V_2 = \sqrt{V_1^2 + 2gH} \tag{21}$$

对下水箱使用动量定理:(上下水箱流出速度相等)

$$F_{称台} - G_{自重} - G_{水} = -\rho Q V_2 + \rho Q V_1 \tag{22}$$

得到$F_{称台} = 2319\text{N}$

6 第六题

6.1 第一问

以小车为参考系,此时水以V = 15m/s速度射来,运用水平方向动量定理:

$$-F = \dot{m}(0 - V) \tag{23}$$

得到$F = 450$ N

6.2 第二问

设小车速度为u,再次以小车为参考系,此时水以$20 - u$的速度射来:

$$-F = \dot{m}(0 - 20 + u) \tag{24}$$

同时功率

$$P = Fu \tag{25}$$

得到

$$P = 30u^2 - 600u \tag{26}$$

由基本不等式,当$u = 10$m/s时,有最大功率$P = 3000$W