

06.24. 习题课

1. 重点知识点整理

(1) 一致收敛的判别法 (Weierstrass, Dirichlet, Abel) (讲义 Dec. 2nd)

Dirichlet 声明一致趋于0的理解 (函数级数和含参变量)

例 P.227. 4.(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \pi^n e^{-nx} n^{-x}$ 一致有界

有关于: $\sum_{n=1}^N \pi^n e^{-nx} = \frac{\pi^N e^{-Nx}}{e^x - 1} \leq \pi e^{-Nx}$ 一致趋于0. Dirichlet X

$\frac{1}{n^x}$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 单调递减. $\frac{1}{n^x} > \epsilon$

$\frac{1}{n^x} \rightarrow 0$ as $x \rightarrow 0$ $\forall N \exists x \text{ s.t. } \frac{1}{n^x} > \epsilon$

不一致趋于0

数项级数 Dirichlet \Rightarrow Abel ✓

函数项级数 Dirichlet $\not\Rightarrow$ Abel

Link: 函数项级数 & 含参变量积分

$$\begin{array}{ccc} x & \longleftrightarrow & u \\ n & \longleftrightarrow & x \end{array}$$

(2) 一致收敛与连续, 级数换序, 微分换序

函数项级数: 内闭一致收敛 + 连续 \Rightarrow 连续

($\sum f_n(x)$) 一点收敛 + 导函数连续 + 导函数 内闭一致收敛 \Rightarrow 微分换序
(一致收敛 \Rightarrow 互致一致收敛. 例 $S_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$)

一致收敛 + 闭区间可积 \Rightarrow 积分换序

无穷区间上极限与积分交换条件:

$f(x, n)$ 在 $x \in [a, +\infty)$ 上一致收敛于 g

(a) $\forall A > a$. $\int_a^{+\infty} f_n(x) dx$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛.

(b) $\int_a^{+\infty} f_n(x) dx$ 对 n 一致收敛

则 $\int_a^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{+\infty} f_n(x) dx$

$$\left| \int_a^{+\infty} g(x) dx - \int_a^{+\infty} f_n(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |g(x) - f_n(x)| dx + \left| \int_A^{+\infty} g(x) dx - \int_A^{+\infty} f_n(x) dx \right|$$



扫描全能王 创建

含参数是单义积分： $\int_a^b f(x, u) dx$

f 连续 \Rightarrow 连续

$f, \frac{\partial f}{\partial u}$ 连续 \Rightarrow 微分可换序

f 连续 + $u \in [a, b]$ 有极限函数 \Rightarrow 积分可换序

例： $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$

$$|r| < 1 \quad I'(r) = \int_0^\pi \frac{-2 \cos x + 2r}{1 - 2r \cos x + r^2} dx$$

$$I'(0) = \int_0^\pi -2 \cos x dx = 0$$

$$\begin{aligned} r \neq 0 \quad I'(r) &= \frac{1}{r} \int_0^\pi 1 - \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos x + r^2} dx \\ &= \frac{1}{r} \left(\pi - (rr^2) \cdot \int_0^\pi \frac{dx}{1 - 2r \cos x + r^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = \tan \frac{x}{2} &= \frac{1}{r} \left(\pi - \frac{1+r}{1-r} \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{1 + (\frac{1+r}{1-r}t)^2} \right) \\ \text{利用 } \frac{1+r}{1-r} > 0, |r| < 1 \text{ 时} &= \frac{1}{r} (\pi - 2 \arctan \frac{1+r}{1-r} t \Big|_0^{+\infty}) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore I(r) = 0 \quad (|r| < 1)$$

$$|r| > 1 \quad \rho = \frac{1}{r} \quad (\rho < 1)$$

$$\begin{aligned} I(r) &= I\left(\frac{1}{\rho}\right) = \int_0^\pi \ln(1 - 2\rho \cos x + \rho^2) dx - \int_0^\pi \ln \rho^2 dx \\ &= -2\pi \ln |\rho| = 2\pi \ln r \end{aligned}$$

$$|r|=1 \text{ 时, 可直接计算 } I = \int_0^\pi \ln(1 - 2 \cos x) dx = \int_0^\pi \ln(2 + 2 \cos x) dx$$

$$2I = \int_0^\pi \ln(4 \sin^2 x) dx = 2\pi \ln 2 + 2 \int_0^\pi \ln \sin x dx$$

$$\text{也由连续性直接得到结果} \quad = 2\pi \ln 2 - 2\pi \ln 2 = 0$$

$$I(\pm 1) = 0$$



例：求 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx$ ($0 < p < 1$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^p}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^p}{1+x} dx$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$I_1 \quad I_2$$

$$I_1 = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+p-1} dx \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+p-1} \geq \frac{x^{p+1}(1-x^p)}{1+x} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+p}$$
$$0 \leq \frac{x^p}{1+x} \leq 2x^{p-1}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{t^{-p}}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{t^{1-p-1}}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p-n}$$

$$\therefore \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p-n}$$

fix $x = \cos p\pi$

Fourier 级数

$$\cos p\pi = \frac{2p \sin p\pi}{\pi} \left(\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2p}{p^2 - n^2} \right)$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1)$$

反 \Rightarrow 得后式



扫描全能王 创建

含参变量的常义积分.

设 $f(x, u) \in C([a, b] \times [\alpha, \beta])$

令 $y(u) = \int_a^b f(x, u) dx$.

(1) $u_0 \in [\alpha, \beta]$:

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b \lim_{u \rightarrow u_0} f(x, u) dx$$

· 原因: 一致连续

(2) 若 $\frac{\partial f}{\partial u} \in C([\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta])$,

$$\frac{d}{du} \int_a^b f(x, u) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) dx$$

· 原因:

$$\int_a^b \frac{f(x, u+h) - f(x, u)}{h} dx.$$

$$= \int_a^b \underbrace{\frac{\partial}{\partial u} f(x, u+sh)}_{\theta \rightarrow 0} dx. \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) dx$$

$$\int_a^\beta \int_a^b f(x, u) dx du = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x, u) du dx.$$

· 原因: 由二重积分理论.



扫描全能王 创建

含参变量的反常积分.

设 $f(x, u) \in C([a, +\infty) \times [\alpha, \beta])$.

且 $\forall u \in [\alpha, \beta]$, $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ 收敛

① $u_0 \in [\alpha, \beta]$, 且 $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ -致收敛.

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \int_a^{+\infty} f(x, u) dx = \int_a^{+\infty} f(x, u_0) dx.$$

原因: $|\int_a^{+\infty} f(x, u) - f(x, u_0) dx|$

$$\leq |\int_a^b f(x, u) - f(x, u_0) dx| + |\int_b^{+\infty} f(x, u) dx| + |\int_b^{+\infty} f(x, u_0) dx|$$

$$\stackrel{u \rightarrow u_0}{\lim} \left| \int_a^{+\infty} f(x, u) - f(x, u_0) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

② 若 $\frac{\partial f}{\partial u} \in C([a, +\infty) \times [\alpha, \beta])$ 且.

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) dx \text{ -致收敛.}$$

$$\frac{d}{du} \int_a^{+\infty} f(x, u) dx = \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) dx.$$

$$\text{原因: } \int_a^{+\infty} \frac{f(x, u+h) - f(x, u)}{h} dx.$$

$$= \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u} f(x, u+h) dx$$

$$\stackrel{h \rightarrow 0}{=} \int_a^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u} f(x, u) dx.$$



③ 若 $\int_a^{+\infty} f(x_n) dx$ - 收敛，问

$$\int_{-\infty}^{\beta} \int_a^{+\infty} f(x_n) dx dn = \int_a^{+\infty} \int_{-\infty}^{\beta} f(x_n) dn dx$$

· 原因： $\forall A > a$, $\int_{-\infty}^{\beta} \int_a^A f(x_n) dx dn$

$$= \int_a^A \int_{-\infty}^{\beta} f(x_n) dn dx.$$

> 研究 $A \rightarrow +\infty$ 时，右上极限。

$$\left| \int_{-\infty}^{\beta} \int_a^A f(x_n) dx dn - \int_{-\infty}^{\beta} \int_a^{+\infty} f(x_n) dx dn \right|$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\beta} \int_a^A - \int_a^{+\infty} f(x_n) dx dn \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\beta} \left| \int_a^{+\infty} f(x_n) dx \right| dn.$$

$$\leq \varepsilon \cdot (\beta - a) \rightarrow 0$$

#.



扫描全能王 创建

反常积分一致收敛的判别法.

① 定义: $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^{+\infty} f(x, n) dx = 0$, 对 n 一致

i.e. $\lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \int_a^{+\infty} f(x, n) dx \right| = 0$.

这里, \mathbb{N} 是参数 n 的取值范围.

② Cauchy 判别法. $\lim_{A, A' \rightarrow +\infty} \left| \int_A^{A'} f(x, n) dx \right| = 0$, 对 n 一致.

* 常用于判别 p -一致收敛:

取合适的 n, A, A' . 并且 A, A' "充分大".

let $\left| \int_A^{A'} f(x, n) dx \right| \geq \varepsilon_0 > 0$.

③ Weierstrass 判别法.

若 $|f(x, n)| \leq F(x)$, 且 $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ 收敛.

2) $\int_a^{+\infty} f(x, n) dx$ 绝对且一致收敛.

④ Dirichlet & Abel 判别法.

$$\int_a^{+\infty} f(x, n) g(x, n) dx \xrightarrow{\text{D}} \int_a^{+\infty} f(x, n) dx$$

$\int_a^{+\infty} f(x, n) dx$: 一致有界 (对 n). 一致收敛 (对 n).

$$g(x, n) \begin{cases} \text{对 } x \text{ 有界} \\ \text{对 } n \text{ 一致} \downarrow 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{对 } x \text{ 有界} \\ \text{对 } n \text{ 一致有界} \end{cases}$$

(*) $\int_A^{+\infty} f(x, n) g(x, n) dx$.

$$= g(A, n) \int_A^{\gamma} f(x, n) dx + g(\gamma, n) \int_{\gamma}^{+\infty} f(x, n) dx.$$



扫描全能王 创建

易反常积分一致收敛4个例子

例1 $\int_0^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} dx \quad 0 \leq n \leq +\infty$ 不一致收敛

$$\text{pf: } F(A, n) = \int_A^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} dx = \int_{\sqrt{n}A}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in [0, +\infty)} F(A, n) \geq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt > 0$$

$$\Rightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \sup_{n \in [0, +\infty)} F(A, n) \neq 0$$

从而非一致收敛

$$\text{注意: } \forall n \in (0, +\infty) \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{但 } n=0 \text{ 时} \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx^2} dx = \infty$$

说明即使参数差很多为常值，也不能保证其

一致收敛

$$\text{另记: 令 } f(u) = \int_0^{+\infty} \sqrt{u} e^{-ux^2} dx$$

若 $f_n, f \in L^1(0, +\infty)$ 一致收敛

$$\text{且 } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = f(u) \text{ 弱值!}$$

$$\sqrt{\pi}/2$$

例2 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ux}{a^2 + x^2} dx \quad (a > 0)$ 在 $u \in (0, +\infty)$ 上不一致收敛

$$\text{解1: } \frac{\sin ux}{x} = \frac{x \sin ux}{x^2 + a^2} \frac{a^2 + x^2}{x^2}$$

若反常积分一致收敛，则由 Abel 判别法

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ux}{x} dx$$

在 $u \in (0, +\infty)$ 上一致收敛

$$\text{解2. 考虑 } u = \frac{1}{n} \quad \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin nx}{a^2 + x^2} dx \xrightarrow{u=\frac{1}{n}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin nx}{a^2 + x^2} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{2} \ln 9 \neq 0$$



扫描全能王 创建

$$\text{例 1} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{\alpha(1+x^2)} dx$$

$$① \alpha \in [1, +\infty), \eta > 0$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{x}{1+x^2}$$

Duichlet \Rightarrow -致收敛

$$② \alpha \in (0, \delta) \quad A' = \frac{3\pi}{4} \quad \alpha = \frac{1}{n}$$

$$\int_{A'}^{A'} \dots = \int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x \sin \frac{x}{n}}{\frac{1}{n}(1+x^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} n \int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

\Rightarrow 不一致收敛

$$\text{例 1} \int_1^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{\alpha})^2/\alpha^2} dx, (\alpha \in (0, 1])$$

$$\text{解: } \int_1^{+\infty} e^{-(x-\frac{1}{\alpha})^2/\alpha^2} dx = \alpha \int_{\frac{1}{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

$$\begin{aligned} &\text{易分段 } \alpha \in (0, \varepsilon) \quad b^1 \leq \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &\leq \varepsilon \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \in (\varepsilon, 1] \quad b^2 &\leq 1 \cdot \int_{\frac{1-\frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &\xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

\therefore -致收敛



最后关于反常积分计算讲两个例子 (Gamma 函数 etc.)

例 1 $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ 直接收敛

计算 $\because \frac{x-a}{b-a} \quad \frac{b-x}{b-a}$ 正数部分

\therefore 设 $\frac{x-a}{b-a} = \sin^2 \theta$

$x = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta$

$dx = 2(b-a) \sin \theta \cos \theta$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 d\theta = \pi$

例 2 $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \cdot 5 \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1+r^4}}$ 比值

$$x = t^4 \quad \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \quad I_1 = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{8} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\pi / \sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

$$I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx \quad \therefore I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \left(\frac{1-u}{u}\right)^{-\frac{3}{4}} \left(\frac{1}{u^2}\right) du$$

$$x = \frac{1}{u}$$

$$u = \frac{1}{x^4}$$

$$x = \left(\frac{1}{u}-1\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \int_0^1 u^{-\frac{3}{4}} (1-u)^{-\frac{3}{4}} du \\ &= \frac{1}{8} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{8} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore I_1 / I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

第 8 页题 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x dx$ 跟



扫描全能王 创建