习题课 No. 5

曲面的定向(R^n中)

空间R^n的一组标架$e_1,\cdots,e_n$到另一组标架$\tilde{e_1},\cdots,\tilde{e_n}$的变换可写成矩阵A. $\tilde{e_j}=\sum_i a_{ij}e_i$

$\det(A)\neq 0$. 选定标准$e_1\cdots e_n$后. 可将R^n的标架$\tilde{e_1},\cdots,\tilde{e_n}$(有序)按照$\det(A)$的正负分为2个等价类

(等价关系易验证:自反、对称、传递)

可以证明这个等价类划分不依赖于初始$e_1\cdots e_n$的选取

R^n的定向就是从R^n的2个定向标架类中指定一个

曲面的边界及其定向

1. 带边曲面

R^k—k维欧氏空间, H^k—$\{t\in R^k \mid t^1\leq 0\}$称为$R^k$的半空间

称超平面$\partial H^k:=\{t\in R^k \mid t^1=0\}$为半空间$H^k$的边界

Def:若$S\subset R^n$的每个点$x\in S$,有一个在S中的邻域U, s.t. U同胚于R^k或H^k. 则称S为一个(k维)带边曲面

例:2维带边曲面…

2. 带边曲面定向与边界定向的和谐性

设欧氏空间R^k内固定一个正交的定向标架$e_1,\cdots,e_k$. 它在R^k内诱导坐标$x^1,\cdots,x^k$. 于是半空间$H^k=\{x\in R^k \mid x^1\leq 0\}$的边界$\partial H^k=R^{k-1}$就用向量$e_2,\cdots,e_k$给出一种定向,称这种定向与给定的半空间$e_1,\cdots,e_k$是和谐的.

注:(1)一维曲面就是曲线. 此时2类标架对应2个相反的切向量. 因而用切向量规定曲线的定向. 通常不说"曲线的定向",而说"沿曲线运动的方向"

(2)k=2. 若在平面R^2上取定的一个定向标架,并给定一条闭曲线,设此曲线界定的区域为D, $\vec{n}$为曲线的外法向量(i.e. $\vec{n}$与$\vec{e}^1$方向相同)

(格林公式运用) 则当$\{\vec{n},\vec{\tau}\}$作为R^2标架与R^2的定向标架同类时,曲线绕D的方向称为正方向

在平面上惯用的(右手)标架下. 对曲线限定的区域而言,"逆时针"运动为正环绕方向. 沿曲面正环绕方向运动时,曲线所

$\oint P\,dx+Q\,dy=\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$

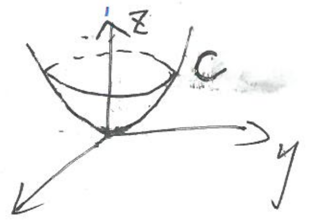
∂D如何定向

限定的区域始终位于"左侧"

∴对平面或平面区域的定向，经常不用R^2中的标架，而用环绕某个闭曲线的运动正方向给出

对R^3空间中的二维曲面的定向，经常只给一个曲面的正侧(法向量)。这实际上是默认R^3中是标准正交标架(右手系)为正。而曲面正侧向量+曲面标架构成的R^3中标架要与R^3中标准正交标架定向在同一个等价类中

eg: $z=x^2+y^2$



若给条件："向上为正方向"

⇓

$(0,0,1)$作为代表正侧向量，或为标架中第一个向量

⇓

∵R^3中$\{\vec{\varepsilon_1},\vec{\varepsilon_2},\vec{\varepsilon_3}\}$与标准正交标架$\{\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\}$在一个等价类中 ⟺ $\vec{\varepsilon_1}\wedge\vec{\varepsilon_2}\cdot\vec{\varepsilon_3}>0$

⇓

∴C的正方向$\vec{\tau}$满足$\vec{n}\wedge\vec{\tau}\cdot(0,0,1)>0$即可

(从上侧看C，运动方向τ满足左侧是曲线内部)

(3) $k=3$

(Gauss公式运用)

$\int_{\partial V} P\,dx\,dy+Q\,dy\,dz+R\,dz\,dx$

$=\int \frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$

∂V定向？

默认R^3中右手系为指定的标架

在∂V上一点处，以曲面外法向量作为局部标架的e_1

显然 $H_3=\{x_1\le 0\mid (x_2,x_3)\in R^2\}$为曲面内部，即$\in V$

∴曲面的定向即为以外法向为正

以上过程均涉及到内部的定义，这实际上比较复杂，但我们只考虑简单闭曲线(面)，还是容易判断的

2类曲线积分的计算

(1) 关键是写出曲线的参数方程

$F(x,y,z)=0 \quad G(x,y,z)=0 \quad (*)$

① 若能从(*)中解出2个变量，如 $y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$

则 在 x $y=\varphi(x)$ $z=\psi(x)$ 为参数方程，x为参数

② 化成极坐标 $F(r,\theta,\varphi)=0$ $G(r,\theta,\varphi)=0$ 后同①

③ 从(*)式中消去1个变量(如z)得

$f(x,y)=0$

则得其参数方程 $x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$

代入(*)中1个方程 $z=w(t)$

∴ t为参数 有参数方程 $(\varphi(t),\psi(t),w(t))$

eg. 求 $I=\int_{\Gamma} y^2dx+z^2dy+x^2dz$

Γ 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^2+y^2=ax \end{cases}$ 上 $z\ge0$ 的部分，这里 $a>0$ 且从x轴正向看Γ是

逆时针方向

Sol: $x^2+y^2=ax \Rightarrow$ 令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ $\quad r^2=ar\cos\theta \Rightarrow \begin{cases} r=a\cos\theta \\ \theta=\theta \end{cases}$ …… 参数方程

代入 $x^2+y^2+z^2=a^2 \Rightarrow z=\sqrt{a^2-r^2}=a\sqrt{1-\cos^2\theta}$ 即 $\begin{cases} x=a\cos\theta\cos\theta \\ y=a\cos\theta\sin\theta \\ z=a|\sin\theta| \end{cases}$

θ的范围：只与 $x^2+y^2=ax$ 有关 $\quad x\ge0 \Rightarrow \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\, a\cdot2\cos\theta(-\sin\theta)d\theta+a^2\sin^2\theta\, a\cos2\theta d\theta+a^2\cos^4\theta\, z'(\theta)d\theta$$

第一项为奇函数 积分为0

$z'(\theta)$ 奇函数 ∴最后一项为0

$$\therefore I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^2\theta\cos2\theta d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^4\theta d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\sin^2\theta(1-2\sin^2\theta)d\theta$$

$$=2a^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-4a^3\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3!!}{4!!}=-\frac{\pi}{4}a^3$$

T_{m+1}

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+1}\theta d\theta$

$=-\sin^m\theta\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\cdot m\sin^{m-1}\theta\cos\theta d\theta$

$=m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}\theta d\theta-m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m+1}\theta d\theta$

$=mT_{m-1}-mT_{m+1}\Rightarrow T_{m+1}=\frac{m}{m+1}T_{m-1}$

$\therefore T_{2k}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot T_0=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$

$T_{2k+1}=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}T_1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\cdot1$

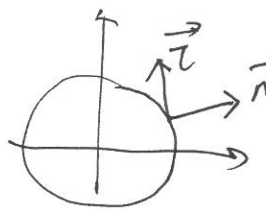
(2) 第一型曲线积分与第二型曲线积分基本关系

$d\vec{r}=\vec{\tau}\,ds \qquad \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma(\vec{F}\cdot\vec{\tau})\,ds$ (*1)

当Γ为平面闭曲线且定向与平面定向协调时

$\vec{n}=\vec{\tau}$ 逆时针旋转 90°（$\vec{\tau}$ 左侧为内部）

$\therefore \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma(\vec{F}\cdot\vec{\tau})\,ds=\int_\Gamma \vec{F}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot\vec{\tau}\,ds$



$=\int_\Gamma (P,Q)e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot\vec{n}\,ds$

$=\int_\Gamma (Q,-P)\cdot\vec{n}\,ds$

(3) Green公式记忆，注意使用条件（挖洞）

(4) 第二型曲线积分 $\int_C P\,dx+Q\,dy$ 的几种方法

(*) Green公式化成二重积分（若C闭曲线可直接用，注意定向，可能要挖洞；若C不是闭曲线，添加辅助线）

(*) 若 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，且曲线C不封闭，可以考虑求出原函数

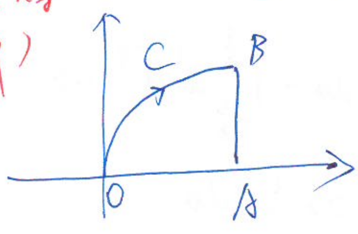
(*) 曲线参数方程化为定积分求解

(*) 作为Green公式的应用，求闭曲线所围区域的面积

例：C为抛物线 $2x=\pi y^2$ 自 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的弧段

(添辅助线)（作法应观察被积函数）

求 $I=\int_C(2xy^3-y^2\cos x)\,dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\,dy$

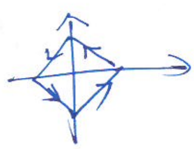


$I=\underbrace{\int_C+\int_{BA}+\int_{AO}}_{=0}+\int_{OA}+\int_{AB}$

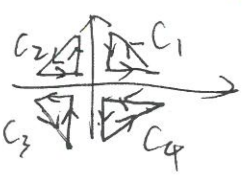
$\int_{OA}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}0\,dx \qquad \int_{AB}=\int_0^1 1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2\,dy$

$=1-1+\frac{1}{4}\pi^2$

例 习题7.5.4 $\int_L\frac{dx+dy}{|x|+|y|}$



区域分割



$I=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}$ 分别Green公式

$I=0$

例: $I=\oint_C \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds$

C:逐段光滑简单闭曲线 $\vec{r}=(x,y)$ $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$ $\vec{n}$ 单位外法向量

$$I=\oint_C \frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^2}ds=\oint_C \frac{\vec{r}}{r^2}\cdot(dy,-dx)$$

$$=\oint_C -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

① (0,0)不在D中 $=\iint_D \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dydx$

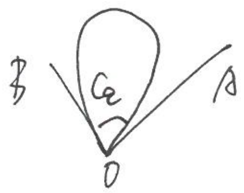
$$=\iint_D 0\,dxdy=0$$

② (0,0)在D内部 (挖洞)

$$I=\oint_{C_\varepsilon^+}\frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}ds=\oint\frac{\vec{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}}{r^2}ds=\frac{1}{\varepsilon}\oint ds=2\pi$$

$C_\varepsilon=\{x^2+y^2=\varepsilon^2\}$ 定向正向

③ (0,0)在C上 (考虑过原点曲线C的切线OA, OB的夹角θ (在内部的角))



$$I=\oint_{C_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}ds=\theta$$

平面图形面积: 作为Green公式推论可得如下面积公式

由逐段光滑的简单曲线C所围的面积S

$$S=\oint_C x\,dy=-\oint_C y\,dx=\frac{1}{2}\oint_C x\,dy-y\,dx$$

(C定向为正向)

例: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围区域面积

Green公式法 对称性 只需算一四象限

$r^4=a^2r^2\cos2\theta$ $r=\sqrt{a^2\cos2\theta}$ $\theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ $\theta\uparrow$

$x y'(\theta)-y x'(\theta)=r\cos\theta\cdot(r'\sin\theta+r\cos\theta)-r\sin\theta(r'\cos\theta-r\sin\theta)$

$=r^2=a^2\cos2\theta$ $\therefore S=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}a\cos2\theta\,d\theta=a^2$

重积分法

$r^2=a^2\cos2\theta$

$\theta\in[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3}{4}\pi,\frac{5}{4}\pi]$

$S=4\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{a^2\cos2\theta}}r\,drd\theta$

$=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2d\theta$

$=a^2$

平面曲线积分与路径无关的条件

$\Omega \subset R^2$ $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 Ω 上连续

$$w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

任取 $A, B \in \Omega$ Ω 内 $A \to B$ 的一条逐段光滑的简单曲线称为 Ω 内从 A 到 B 的一条路径. 对 Ω 内 A 到 B 的任意路径 L, 若第二型曲线积分

$\int_L w = \int_L Pdx + Qdy$ 只与 A, B 有关, 与 L 具体选取无关

则称一阶微分形式 w 在 Ω 的积分与路径无关

对单连通区域 Ω: $\int_C w = 0$ $\forall C$ 为 Ω 中闭曲线

$\Updownarrow$

对 Ω 内任一路径 C $\int_C w$ 仅与起点终点有关, 与路径无关

$\Updownarrow$

在 Ω 内处处成立 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\Updownarrow$

$\exists \varphi(x,y)$ s.t. D 内成立

$d\varphi(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

称 $Pdx + Qdy$ 为 φ 的全微分

φ 为 w 的势函数. w 为 1 个恰当微分形式

则 $\varphi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C$

$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \varphi\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} = \varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)$

万用函数

eg. 习题 7.5.6.

$\vec{F} = -k\vec{x}$ $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a,0)$ 到 $(0,b)$

$I = \int_{(a,0)}^{(0,b)} -kx\,dx - ky\,dy$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ $\varphi'_x = -kx \Rightarrow \varphi(x,y) = -\frac{k}{2}x^2 + C(y)$

又 $\varphi'_y = -ky \Rightarrow \varphi(x,y) = -\frac{k}{2}(x^2+y^2) + C$, C 为 constant

$\Rightarrow I = \varphi((0,b)) - \varphi((a,0)) = \frac{k}{2}(a^2 - b^2)$

R^3中曲线积分与路径无关的条件

D为R^3中曲面单连通区域　$w=P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$

P, Q, R 均在D内有连续偏导数

则　$\int_C w=0$，$\forall C$ 为D中闭曲线

$$\Updownarrow$$

$\int_C w$ 仅与起点、终点有关，与路径无关

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z} \qquad \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\Updownarrow$$

$\exists\,\varphi(x,y,z)$

$$d\varphi = Pdx+Qdy+Rdz$$

例：对微分式

$$z\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2+z^2}\right)dx+\frac{z}{xy^2}dy+\left(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\right)dz$$

判断原函数存在性并求出之.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{z}{x^2y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{1}{xy^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{x^2y}+\frac{z^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

求原函数

$$\varphi'_y(x,y,z)=\frac{z}{xy^2} \qquad \varphi=-\frac{z}{xy}+C(x,z)$$

$$\text{又 } \varphi'_z=\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy} \Rightarrow \varphi=-\frac{z}{xy}+\arctan\frac{z}{x}+C(x)$$

$$\text{又 } \varphi'_x=\frac{z}{x^2y}-\frac{z}{x^2+z^2} \Rightarrow \varphi=-\frac{z}{xy}+\arctan\frac{z}{x}+C,\ C=\text{constant}$$

第二型曲面积分的计算

对 $\iint_D dxdy$ 注意 D的定向！

$\boxed{\text{(1) 用 } \vec{n} \text{ 简化计算}}$

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \iint_S (P,Q,R)\cdot\vec{n}\,ds$$

例 $I=\iint_\Sigma xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)ds$

Σ 为第一卦限中球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (x\ge0,\ y\ge0,\ z\ge0)$

参数式 $ds=a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$\text{原式}=\iint_{\substack{0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}}} a^9\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)\,d\theta\, d\varphi$$

直角式 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

$$I=\iint_{x^2+y^2\le a^2} xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}\left[(y^2+x^2)[a^2-(x^2+y^2)]+x^2y^2\right]\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dx\cdot dy$$

(有一个定向过程)

$$=\iint_{x^2+y^2\le a^2} a\,xy\left[(y^2+x^2)(a^2-x^2-y^2)+x^2y^2\right]dxdy$$

$\vec{n}$式 $\vec{n}=\frac{1}{a}(x,y,z)$

$$\text{原式}=\iint_\Sigma (y^3z^3,\ x^3z^3,\ x^3y^3)\cdot\vec{n}\cdot a\cdot ds$$

$$=a\iint_\Sigma y^3z^3dydz+x^3z^3dzdx+x^3y^3dxdy$$

对称性 $=3a\iint_\Sigma x^3y^3dxdy$ 有一个定向过程 $=3a\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^7\sin^3\theta\cos^3\theta\, dr\, d\theta$

$$=3a\cdot\frac{a^8}{8}\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\theta\, d\theta$$

$$=\frac{3a^9}{64}\cdot\frac{1}{2}\cdot2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\, d\theta=\frac{3a^9}{64}\cdot\frac{2!!}{3!!}=\frac{a^9}{32}$$

$\boxed{\text{(2) Gauss 公式化为三重积分}}$

与Green线类似 闭曲面直接用（可能要挖洞）

非闭曲面可加辅助面

例：计算曲面积分

$$I=\iint_S \frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$$

S为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 取外侧 $(a>0,\ b>0,\ c>0)$

解1：设 $P(x,y,z)=\dfrac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad Q(x,y,z)=\dfrac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$

$R(x,y,z)=\dfrac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{3/2}}$，则在不包含原点的任何区域上

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

为利用 Gauss 公式 对充分小 $\varepsilon>0$ 作闭曲面

$S_\varepsilon=\{ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2\}$ 取外侧

由 Gauss 公式

$$I=\iint_{S_\varepsilon}\frac{x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\varepsilon^3}\iint_{S_\varepsilon} x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$$

再用一次 Gauss 公式

$$=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{ax^2+by^2+cz^2\le\varepsilon^2}dxdydz=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4}{3}\pi\frac{\varepsilon^3}{\sqrt{abc}}$$

$$=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

解2：不用 Gauss 公式直接计算

$x=\sin\varphi\cos\theta\quad y=\sin\varphi\sin\theta\quad z=\cos\varphi$

$0\le\varphi\le\pi\quad 0\le\theta\le2\pi$

$$\text{原式}=\pm\iint_S\begin{vmatrix}\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}d\theta d\varphi$$

（$\because r_\theta\wedge r_\varphi$ 与曲面定向方向同向 $\therefore$ 取"+"）

$$\text{原式}=\iint_S\frac{1}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{vmatrix}x & y & z\\ \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\theta}\\ \frac{\partial x}{\partial\varphi} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{vmatrix}d\theta d\varphi$$

对称性 $$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta}{(a\sin^2\varphi\cos^2\theta+b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta+c^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $\cos\varphi = t$ 则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{(a\sin^2\varphi\cos^2\theta + b\sin^2\varphi\sin^2\theta + c^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\,d\varphi$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{\left[(a\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) - (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - c^2)t^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta} \cdot \frac{t}{\left[(a\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta) - (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta - c^2)t^2\right]^{\frac{1}{2}}}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{1}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta}$$

$$I = \frac{8}{\sqrt{c}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a\cos^2\theta + b\sin^2\theta} = \frac{8}{\sqrt{c}}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{a+bt^2} = \frac{8}{\sqrt{cab}}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{abc}}$$

Gauss 积分推论：体积公式

$$V = \frac{1}{3}\oiint_{\partial\Omega} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$$

$$= \frac{1}{3}\left|\iint_{\partial\Omega}\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix} du\,dv\right|$$

特别若 $\partial\Omega$: $r = r(\theta, \varphi)$

$$V = \frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega} r^3 \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

（也可直接重积分得到）

Stokes 公式

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_D \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

D 与 ∂D 方向协调（服从右手法则）

例：Σ分段光滑闭曲面 $\vec{n}$ 为Σ上单位外法向量，试证明

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos(n,x) & \cos(n,y) & \cos(n,z)\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS=0$$

①若 P,Q,R 在Σ上一阶连续可微

$$\text{原式}=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

Σ分片 $\Sigma_上$ $\Sigma_下$ $\partial\Sigma_上=T^+$ $\partial\Sigma_下=T^-$

$$\text{原式}=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_上}+\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_下}$$

Stokes公式运用 $=\oint_{T^+}Pdx+Qdy+Rdz+\oint_{T^-}Pdx+Qdy+Rdz$

$=0$

②若 P,Q,R 在 Ω 上二阶连续可微

$$\text{原式}=\oint\!\!\!\oint\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Gauss公式 $=\iiint 0\,dxdydz=0$

$$I=\oint\!\!\!\oint\nabla\times(P,Q,R)\cdot\vec{n}\,dS=\oint\!\!\!\oint\nabla\times(P,Q,R)\,d\vec{S}$$

$$=\iiint\nabla\cdot(\nabla\times(P,Q,R))\,dV$$

$$=0$$

Add：第一类曲面积分在正交变换下的不变性

$$\iint_S f(\vec{x})\,dS=\iint_{\Sigma}f(A^Tu)\,d\Sigma$$

$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ $U=AX$ (s,t)为参数

$E=\langle\vec{X}_s,\vec{X}_s\rangle$ $F=\langle\vec{X}_s,\vec{X}_t\rangle$ $G=\langle\vec{X}_t,\vec{X}_t\rangle$

$E'=\langle\vec{U}_s,\vec{U}_s\rangle=\langle A\cdot\vec{X}_s,A\cdot\vec{X}_s\rangle=\vec{X}_sA^TA\vec{X}_s=\langle\vec{X}_s,\vec{X}_s\rangle=E$

同理 $F'=F$

$G'=G$

曲面定向问题再叙

例：求第二类曲面积分

$$\iint_S x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy$$ 其中S是柱体 $x^2+y^2\le 1$ 被 xy 平面 $z=0$ 与

$z=4$ 所截部分的边界，积分沿边界的外侧

解：上底面 S_1、下底面 S_2、侧面 S_3

S_2上 $dz=0$ $z=0$ $\therefore \iint_{S_2}(\cdots)=0$

S_3上

$x=\cos\theta$ $y=\sin\theta$ $z=z$

$(\theta,z)\in D=\{0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 4\}$

$r_\theta\wedge r_z=(\cos\theta,\sin\theta,0)$ 与柱面外法向一致

$$\therefore \iint_{S_3} = \iint_{S_3} x\cos\theta+y\sin\theta\ d\theta dz = \iint_{S_3} d\theta dz = 8\pi$$

$$\iint_{S_1} = 4\iint_{S_1} dxdy = 4\pi$$

不改符号因为 $(0,0,1)$ 与向上法向一致

（此时可将 x,y 看成参数）

$\therefore I=12\pi$

球面上的曲面积分

$x=x_0+r\sin\varphi\cos\theta$ $y=y_0+r\sin\varphi\sin\theta$ $z=z_0+r\cos\varphi$

$\sqrt{EG-F^2}=r^2\sin\varphi$ $\theta\in[0,2\pi]$ $\varphi\in[0,\pi]$

$$\oiint_{\partial B_r(M_0)} f(x,y,z)\,dS_r = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+r\sin\varphi\cos\theta, y_0+\cdots)\,r^2\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$= r^2\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(x_0+r\sin\varphi\cos\theta,\cdots)\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta$$

$$= r^2\oiint_{\partial B_1(M_0)} f(x_0+r\sin\varphi\cos\theta,\cdots)\,dS_1$$

$$= r^2\oiint_{\partial B_1(M_0)} f(\vec{x_0}+r\cdot\vec{n})\,dS_1$$

例：设 $B_r(\vec{M_0})$ 是以 $\vec{M_0}=(x_0,y_0,z_0)$ 为心，r 为半径的球，
$\partial B_r(\vec{M_0})$ 是以 (x_0,y_0,z_0) 为心，r 为半径球面，正法向向外

求证

(1) $$\iiint\limits_{B_r(\vec{M_0})} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^r \oiint\limits_{\partial B_\rho(\vec{M_0})} f(x,y,z)\,dS_\rho\,d\rho$$

(2) $$\frac{d}{dr}\iiint\limits_{B_r(\vec{M_0})} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial B_r(\vec{M_0})} f(x,y,z)\,dS_r$$

(1) $$LHS = \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\quad)\,\underbrace{\rho^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta}_{dS_\rho}\,d\rho$$

球坐标变换

$$= \int_0^r \rho^2 \cdot \oiint\limits_{\partial B_\rho(\vec{M_0})} f(\quad)\,dS_\rho\,d\rho$$

(2) (1)两边求导即可