微观经济学证明

2024 年 11 月 9 日

专题一：偏好关系与效用函数

1. **命题 1.1.1**：如果偏好关系 $\succsim$ 是理性的，则：

(1)$\succ$ 既是非自反的，又是可传递的。

(2)$\sim$ 是自反的，可传递的，且是对称的。

(3) 若 $x \succ y \succsim z$，则 $x \succ z$。

（证明见 ppt page 4 或答案 page 3）

2. **例题 1.2.1:** 假设 $X = \{x, y, z\}, \mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$，定义选择结构，

(1)$(\mathcal{B}, C_1(\cdot)), C_1(\cdot)$ 为$C_1(\{x, y\}) = \{x\}, C_1(\{x, y, z\}) = \{x\}$;

(2)$(\mathcal{B}, C_2(\cdot)), C_2(\cdot)$ 为$C_2(\{x, y\}) = \{x\}, C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$.

证明 (1) 满足 W.A., 证明 (2) 不满足 W.A.。

（证明见 ppt page 9）

3. **命题 1.3.1:** 由理性偏好关系 $\succsim$ 导出的选择结构 $(\mathcal{B}, C^*(\cdot, \succsim))$ 满足 W.A.

证明：假定某一 $B \in \mathcal{B}$, 有 $x, y \in B$, 且 $x \in C^*(B, \succsim)$。根据 $C^*(B, \succsim)$ 的定义，有 $x \succsim y$。假定某一 $B' \in \mathcal{B}, x, y \in B'$, 有 $y \in C^*(B', \succsim)$, 也就是说 $\forall z \in B'$, 均有 $y \succsim z$。由上 $x \succsim y$，根据传递性，则 $x \succsim z$，因此 $x \in C^*(B', \succsim)$。

4. **例 1.3.1:** $X = \{x, y, z\}, \mathcal{B} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$,$C(\{x, y\}) = \{x\}, C(\{y, z\}) = \{y\}, C(\{x, z\}) = \{z\}$. 选择结构是否满足 W.A.? 是否可被理性化？

（证明见 ppt page 12）

5. **命题 1.3.2:** 选择结构 $(\mathcal{B}, C(\cdot))$,

(1) 满足弱公理；

(2)$\mathcal{B}$ 包含了三元及三元以下所有子集，

则存在理性化与 $\mathcal{B}$ 相关的 $C(\cdot)$ 的理性偏好关系 $\succsim$（也就是说对于所有 $B \in \mathcal{B}$，有 $C(B) = C^*(B, \succsim)$），且是唯一的偏好关系。

思路：找到一个理性的偏好关系使得我们观察到的选择规则 C(•) 与我们找到的理性偏好形成的选择规则等价。(观察到的选择规则与理论上的选择规则等价)。

两步：第一步证明选择的偏好是理性的。第二步证明两个选择结构是等价的。

证明：给定选择结构就会有一个显示偏好关系 $\succsim^*$，其实若二者是一一对应的，显示偏好关系 $\succsim^*$ 就是我们要找的那个理性偏好关系。这样就需要证明两点：(1) 选择结构是理性的；(2) 两个选择结构是等同的。

(1) 选择结构是理性的，即满足完备性和传递性。

完备性：由 (b)，$\{x, y\} \in \mathcal{B}$。x, y 至少有一个被选，也就是 $C(\{x, y\})$ 中的一个元素，则或者 $x \succsim^* y$，或者 $y \succsim^* x$，或者二者兼有，故完备。

传递性：假设 $x \succsim^* y, y \succsim^* z$，往证 $x \succsim^* z$。若考虑 $\{x, y, z\} \in \mathcal{B}$，只需证明 $x \in C(\{x, y, z\})$，因为这意味着 $x \succsim^* z$。$C(\{x, y, z\}) \neq \emptyset$，则三者之一将被选择。

如果 $x \in C(\{x, y, z\})$，直接证毕；

如果 $y \in C(\{x, y, z\})$，由于假设中 $x \succsim^* y$，由 W.A. 自然 $x \in C(\{x, y, z\})$；

如果 $z \in C(\{x, y, z\})$，由于假设中 $x \succsim^* z$，那么 $y \in C(\{x, y, z\})$，自然 $x \in C(\{x, y, z\})$。

(2) $\succsim^*$ 理性化 $\mathcal{B}$ 上的 $C(\cdot) \iff \forall B \in \mathcal{B}, C(B) = C^*(B, \succsim^*)$。

假设 $x \in C(B)$，对于 $\forall y \in B$，由显示偏好定义 $x \succsim^* y$，再根据 $C^*(B, \succsim^*)$ 定义，$x \in C^*(B, \succsim^*)$。即 $C(B) \subset C^*(B, \succsim^*)$。

假设 $x \in C^*(B, \succsim^*)$，根据 $C^*(B, \succsim^*)$ 的定义，对于 $\forall y \in B, x \succsim^* y$。因此，对于每个 $y \in B$ 必存在某一集合 $B_y \in \mathcal{B}$，使得 $x, y \in B_y$，且 $x \in C(B_y)$。（会在 x, y 共同存在情况下 x 被选，并和每一个对比选择）因为 $C(B) \neq \emptyset$，由 W.A. 就是 $x \in C(B)$。即 $C^*(B, \succsim^*) \subset C(B)$。

综合，$C(B) = C^*(B, \succsim^*)$。

(3) 唯一性。包含所有含二元子集就可保证。

6. **命题 1.4.1:**

(1) 如果 $\succsim$ 是强单调的，则它是单调的；

(2) 如果 $\succsim$ 是单调的，则它是局部非饱和的。

（问题 (1) 的证明参见 ppt page 17）

证明 (2): 若 $\succsim$ 为单调,构造 y 满足条件,对于 $\forall x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$,$e = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^L$, $y = x + \frac{\varepsilon}{\sqrt{L}}e$, 那么 $\|y - x\| < \varepsilon$，且 $y \succ x$。

7. **命题 1.5.1:** u 是代表偏好关系 $\succsim$ 的一个效用函数，那么对于任意一个严格递增函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$v(\cdot) = f(u(\cdot))$ 是一个代表和 $u(\cdot)$ 一样偏好的效用函数。

（证明参见 ppt page 19）

8. **命题 1.5.2:** 当偏好关系 $\succsim$ 是理性时，才可用一个效用函数来表示。

（证明参见 ppt page 20）

9. **命题 1.5.3:** 词典式偏好关系是理性的。

（证明参见 ppt page 21）

10. **命题 1.5.4:** 不存在代表词典式偏好关系的效用函数。

证明:（反证法）假设存在这样的一个效用函数 $u(\cdot)$。对于每一个 x_1，可选择一个有理数 $r(x_1)$，使得 $u(x_1, 2) > r(x_1) > u(x_1, 1)$。如果 $x_1 > x_1'$，那么 $u(x_1, 2) > r(x_1) > u(x_1, 1) > u(x_1', 2) > r(x_1') > u(x_1', 1)$，即 $r(x_1) > r(x_1')$。这样 $r(\cdot)$ 就给出了一个从实数集到有理数集的一一映射（不可数到可数），这在数学上是不可能的，故不存在这样的效用函数。

11. **命题 1.5.5:** 词典式偏好关系不是连续的。

（证明参见 ppt page 22）

12. **定义 1.5.3**: 证明偏好为凸与效用函数的拟凹性之间是等价的。
（证明参见 ppt page 24）

专题二：消费者选择与需求理论

1. **命题 2.1.1:** 瓦尔拉斯预算集是凸集。
（证明参见 ppt page 29）

2. **命题 2.2.1:** 若 $p \gg 0, w > 0$, 且 $u(\cdot)$ 连续，则 UMP 有一个解。
证明：若 $p \gg 0, w > 0$，对于 $x \in B_{p,w}$，有 $x_l \leq w/p_l$，$\forall l = 1, \dots, L$。那么，$B_{p,w}$ 是有界闭集，故是紧集。连续函数在紧集上必有一个最大值。

3. **命题 2.2.2:** 瓦尔拉斯需求函数的相关性质。
假设 $u(\cdot)$ 是连续效用函数，代表定义在消费集 $X = \mathbb{R}^L_+$ 上的局部非饱和的理性偏好关系。
(1) 在 (p, w) 上，$x(p, w)$ 具有零次齐次性.
(2) 满足瓦尔拉斯定律。
(3) 凸性和唯一性：偏好关系 $\succsim$ 是凸的，从而 $u(\cdot)$ 是拟凹性，那么 $x(p, w)$ 是一个凸集；偏好关系 $\succsim$ 是严格凸的，从而 $u(\cdot)$ 是严格拟凹性，则 $x(p, w)$ 只有单一元素。
注：零次其次性：$f(t\alpha) = t^n f(\alpha)$，其中 n 为 0。
证明 (3): $x(p, w)$ 是一个凸集等价于 $x, x', x \neq x'$，且 $\forall \alpha \in [0, 1]$，令 $x'' = \alpha x + (1 - \alpha)x'$，则 $x'' \in x(p, w)$。
假设 x 和 x' 为 UMP 的最优解，则 $u(x) = u(x') \triangleq u^*$，根据 $u(\cdot)$ 的拟凹性，因为 $x'' = \alpha x + (1 - \alpha)x'$，所以 $u(x'') \geq u^*$。（达到最大效用）
由于 $p \cdot x \leq w, p \cdot x' \leq w$，可得 $p \cdot x'' = p \cdot [\alpha x + (1 - \alpha)x'] \leq w$，故 x'' 是 UMP 中一个可行选择，因此 $x'' \in x(p, w)$。
如果 $u(\cdot)$ 是严格拟凹，同样方法可证 x'' 是 UMP 中可行选择。
反证法，假设存在 UMP 中相异的最优解 x 和 x'，则 $u(x) = u(x') \triangleq u^*$，$\forall \alpha \in (0, 1)$，令 $x'' = \alpha x + (1 - \alpha)x'$，则 $u(x'') > u^*$，这与 x 和 x' 是最优解是矛盾的，故不可能存在相异的最优解，只能有一个元素。
（证明 (1)(2) 参见 ppt page 33）

4. **命题 2.2.3:** 间接效用函数的相关性质
(1) 零次齐次性。
(2) 在 w 上是严格递增的；$\forall l$，在 p_l 上是非递增的。
(3) 拟凸性。
(4) 在 p 和 w 上是连续的。（证略）
证明 (3)：$\forall \bar{v}$，$\{(p, w) : v(p, w) \leq \bar{v}\}$ 是凸的；或者假设 $v(p, w) \leq \bar{v}, v(p', w') \leq \bar{v}$，若 $\alpha \in [0, 1]$，$(p'', w'') = (\alpha p + (1 - \alpha)p', \alpha w + (1 - \alpha)w')$，那么 $v(p'', w'') \leq \bar{v}$。（线性组合的函数数值小于函数数值中的大者）
因此，往证任何满足 $p'' \cdot x \leq w''$ 的 x，一定有 $u(x) \leq \bar{v}$。

若 $p'' \cdot x \le w$，带入得 $\alpha p \cdot x + (1-\alpha)p' \cdot x \le \alpha w + (1-\alpha)w'$，则必有 $p \cdot x \le w$ 和 $p' \cdot x \le w'$ 中至少一个不等式成立。

若 $p \cdot x \le w$，x 在 (p, w) 下可行，则 $u(x) \le v(p, w) \le \bar{v}$，

若 $p' \cdot x \le w'$，x 在 (p', w') 下可行，则 $u(x) \le v(p', w') \le \bar{v}$，

$u(x) \le \bar{v}$ 得证。

（证明 (1)(2) 参见 ppt page 34）

5. **命题 2.3.1:** 假设 $u(\cdot)$ 是连续效用函数，代表定义在消费集上局部非饱和的理性偏好关系，且 $p \gg 0$，则

(1) 当 $w > 0$ 时，x^* 为 UMP 中最优，那么当要求达到的效用水平为 $u(x^*)$ 时，x^* 亦为 EMP 中最优，且 EMP 中最小支出为 w。

(2) 当要求达到的效用水平 $u > u(0)$ 时，x^* 为 EMP 中最优，那么当财富为 $p \cdot x^*$ 时，x^* 亦为 UMP 中最优，且 UMP 中最大效用为 u。

（证明参见 ppt page 39）

6. **命题 2.3.2:** 支出函数 $e(p, u)$ 的相关性质：

(1) 在 p 上是一次齐次的。

(2) 在 u 上严格递增；$\forall l$，在 p_l 上是非递减的。

(3) 在 p 上是凹的。

(4) 在 p 和 u 上是连续的。（证略）

（证明 (1)(3) 参见 ppt page 42）

证明 (2): 反证法：如果 x' 和 x'' 分别为要求达到效用为 u' 和 u'' 的 EMP 最优，不妨假设 $u'' > u'$，假设 $e(p, u)$ 在 u 上不是严格递增的，则非严格递增意味着 $p \cdot x' \ge p \cdot x'' > 0$。

令 $\tilde{x} = \alpha x''$，$\alpha \in (0, 1)$，由于 $u(x)$ 的连续性，当 $\alpha \to 1$ 时，可以有 $u(\tilde{x}) > u'$（根据假设 $u(x'') \ge u''$ 和 $u'' > u'$，现在还没有证明没有多余效用，故是大于等于），且 $p \cdot x' > p \cdot \tilde{x} > 0$。此与 x' 是要求达到效用为 u' 的 EMP 最优矛盾。

另外，$\forall k \ne l$，对于 p' 和 p''，有 $p''_l \ge p'_l$，$p''_k = p'_k$。令 x'' 为价格为 p'' 的 EMP 最优，那么 $e(p'', u) = p'' \cdot x'' \ge p' \cdot x'' \ge e(p', u)$，即 $e(p, u)$ 在 p_l 上是非递减的。

7. **命题 2.3.3:** 希克斯需求函数的相关性质：

(1) 在 p 上是零次齐次的。

(2) 没有超额效用。

(3) 凸性和唯一性：偏好关系 $\succsim$ 是凸的，从而 $u(\cdot)$ 是拟凹性的，则 $h(p, u)$ 是一个凸集；偏好关系 $\succsim$ 是严格凸的，从而 $u(\cdot)$ 是严格拟凹的，则 $h(p, u)$ 只有单一元素。

（证明参见 ppt page 45）

专题三：不确定性下的选择

1. **命题 3.1.1:** 如果 $\mathcal{L}$ 上的偏好关系 $\succsim$ 满足独立性公理，对于所有 $\alpha \in (0, 1)$ 和 $L, L', L'' \in \mathcal{L}$，有：

（1）当且仅当 $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$ 时，$L \succsim L'$;

（2）当且仅当 $\alpha L + (1-\alpha)L'' \sim \alpha L' + (1-\alpha)L''$ 时，$L \sim L'$;

（3）如果 $L \succsim L'$ 且 $L' \succsim L''$，则 $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succsim \alpha L' + (1-\alpha)L''$.

（证明参见 ppt page 59）

2. **例 3.3.1:**（风险规避和风险中性的例子）一个赌博，初始状态为 2 元的决策者得到或失去 1 元（二者发生可能性相同）。

如果决策者是严格风险规避的，该赌博的 v.N-M 效用为 $\frac{1}{2}u(1)+\frac{1}{2}u(3)$，它严格小于初始状态效用 $u(2)$。

如果决策者是风险中性的，Jensen 不等式的等号须对 $\forall F(\cdot)$ 都成立，当且仅当伯努利效用函数 $u(\cdot)$ 是线性的。

Chapter 1 课后习题及答案

$1.B.4^A$　考虑一个理性偏好关系 $\succsim$。证明若 $u(x)=u(y)$ 意味着 $x\sim y$，而且 $u(x)>u(y)$ 意味着 $x\succ y$，则 $u(\cdot)$ 是个代表偏好关系 $\succsim$ 的效用函数。

证明：首先，假设 $x\succsim y$，如果我们还有 $y\succsim x$，则 $x\sim y$，从而有 $u(x)=u(y)$。另一方面，如果 $x\succsim y$，但 $y\succsim x$ 不成立，则 $x\succ y$，从而有 $u(x)>u(y)$。因此，如果 $x\succsim y$，那么 $u(x)\geq u(y)$。

现在反过来看。假设 $u(x)\geq u(y)$。如果我们有 $u(x)=u(y)$，那么 $x\sim y$，从而 $x\succsim y$。另一方面，如果我们有 $u(x)>u(y)$，则 $x\succ y$，从而 $x\succsim y$。因此，如果 $u(x)\geq u(y)$，那么 $x\succsim y$。所以，$u(\cdot)$ 代表着 $\succsim$。■

$1.C.2^B$　证明弱公理（定义 1.C.1）等价于下列性质：

假设 $B,B'\in\mathcal{B}$，而且 $x,y\in B$ 和 $x,y\in B'$。那么如果 $x\in C(B)$ 且 $y\in C(B')$，我们必定有 $\{x,y\}\subseteq C(B)$ 和 $\{x,y\}\subseteq C(B')$。

证明：容易看出，问题中的性质等价于下列性质：如果 $B,B'\in\mathcal{B}$，而且 $x,y\in B$ 和 $x,y\in B'$，以及 $x\in C(B)$ 且 $y\in C(B')$，那么我们有 $x\in C(B')$ 和 $y\in C(B)$。所以，我们只要证明这个性质和弱公理等价即可。

首先，假设弱公理已经得到满足。假设 $B,B'\in\mathcal{B}$，而且 $x,y\in B$ 和 $x,y\in B'$，以及 $x\in C(B)$ 和 $y\in C(B')$。将弱公理应用两次，即可得到 $x\in C(B')$ 和 $y\in C(B)$。因此，题目中的性质也得到了满足。

其次，假设我们的性质已经得到满足，我们需要从这个性质推导出弱公理也得以满足的结论。令 $B\in\mathcal{B},x,y\in B,x\in B'$ 和 $x\in C(B)$。另外，令 $B'\in\mathcal{B},x,y\in B'$ 以及 $y\in C(B')$，于是上面的条件意味着 $x\in C(B')$（和 $y\in C(B)$）。因此，满足弱公理。■

$1.D.1^B$　举出一个能被若干偏好关系理性化的选择结构的例子。注意：如果预算集族 $\mathcal{B}$ 包含了 X 的所有二元子集，则至多存在一个理性化的偏好关系。

答案：最简单的例子是 $X=\{x,y\},\mathcal{B}=\{\{x\},\{y\}\},C(\{x\})=\{x\},C(\{y\})=\{y\}$。于是，$X$ 上的任何理性偏好关系都能理性化 $C(\cdot)$。■

$1.D.2^A$　证明如果 X 是有限的，则任何理性偏好关系都能生成一个非空选择规则；也就是说，对于任何 $B\subseteq X$ 且 $B\neq\emptyset$，我们都有 $C(B)\neq\emptyset$。

证明：根据习题 $1.B.5$，令 $u(\cdot)$ 是个代表偏好关系 $\succeq$ 的效用函数。由于 X 是有限的，对于任何 $B\subseteq X$ 且 $B\neq\emptyset$，存在 $x\in B$ 使得对于所有 $y\in B$ 我们都有 $u(x)\geq u(y)$。于是，$x\in C^*(B,\succeq)$，因此，$C^*(B,\succeq)\neq\emptyset$。

[这个题目也可以直接证明（不使用效用函数），但这种方法在本质上和问题 $1.B.5$ 的证明是相同的。] ■

$1.D.3^B$　令 $X=\{x,y,z\}$，考虑选择结构 $(\mathcal{B},C(\cdot))$，其中：

$$\mathcal{B}=\{\{x,y\},\{y,z\},\{x,z\},\{x,y,z\}\},$$

$$C(\{x,y\})=\{x\},\quad C(\{y,z\})=\{y\},\quad C(\{x,z\})=\{z\}.$$

证明 $(\mathcal{B},C(\cdot))$ 必定违背了弱公理。

证明：反证。假设弱公理成立。

如果 $x\in C(X)$，则 $x\in C(\{x,z\})$，这与 $C(\{x,z\})=\{z\}$ 矛盾。

如果 $y\in C(X)$，则 $y\in C(\{x,y\})$，这和 $C(\{x,y\})=\{x\}$ 矛盾。

如果 $z\in C(X)$，则 $z\in C(\{y,z\})$，这与 $C(\{y,z\})=\{y\}$ 矛盾。

因此，$(\mathcal{B},C(\cdot))$ 必定违背弱公理。■