计算机控制系统

# 第2章 信号转换与 *z* 变换

信息学院 · 谭树彬
tanshubin@ise.neu.edu.cn

2013年3月

**本章内容:**

- 信号变换原理
- 采样信号恢复与保持器
- 信号转换的工程化技术
- $z$ 变换
- $z$ 反变换
- 扩展 $z$ 变换

## 2.2 信号变换原理

### 2.2.1 计算机控制系统信号转换分析

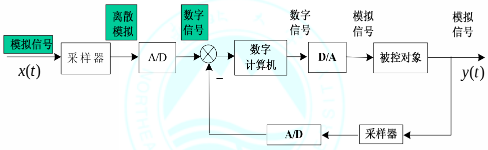



图2.1 计算机控制系统前后的信号转换关系

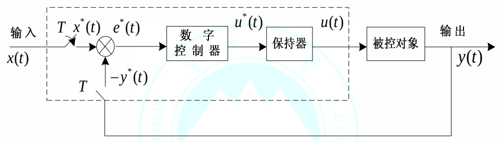



图2.2 计算机控制系统结构示意图

### 2.2.2 采样过程及采样函数的数学表示

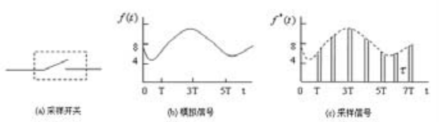
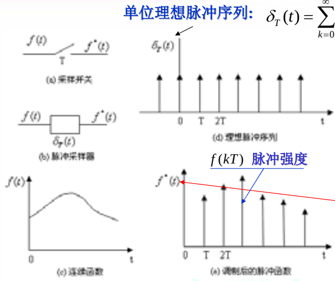



图2.3 信号的转换过程

每隔一定时间（例如$T$秒），开关闭合短暂时间（例如 $\tau$秒），对模拟信号进行采样，得到时间上离散数值序列：

$$f^*(t) = \{f(0T), f(1T), f(2T), \cdots f(kT), \cdots\}$$

单位理想脉冲序列: $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$




理想单位脉冲:

$$\delta(t-kT) = \begin{cases} \infty & t = kT \\ 0 & t \neq kT \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t-kT)dt = 1$$

冲量

采样函数:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$

图2.4 $f(t)$ 经脉冲采样器的调制过程

## 2.2.3 采样函数的频谱分析及采样定理

采样函数的一般表达式为 $f^*(t)=f(t)\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)=f(t)\delta_T(t)$

$\delta_T(t)$ 是周期函数，可以展成傅氏级数（Fourier）： $\delta_T(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}C_k e^{jk\omega_s t}$

其中采样角频率： $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$ 　傅氏系数： $C_k=\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)e^{-jk\omega_s t}dt$

$\delta_T(t)$ 在 $[-T/2,\ T/2]$ 时间内，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(t)\big|_{t=0}$$

于是得到： $C_k=\dfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_s t}dt=\dfrac{1}{T}e^{-jk\omega_s t}\Big|_{t=0}=\dfrac{1}{T}$

---

于是有： $\delta_T(t)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}e^{jk\omega_s t}$

从而得到： $f^*(t)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}f(t)e^{jk\omega_s t}$

于是采样函数 $f^*(t)$ 的拉氏变换式为：

$$F^*(s)=\int_0^{\infty}f^*(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(t)e^{jk\omega_s t}e^{-st}dt$$

定义拉氏变换式： $F(s)=\int_0^{\infty}f(t)e^{-st}dt$

采样函数 $f^*(t)$ 的拉氏变换式为：

$$F^*(s)=\int_0^{\infty}f^*(t)e^{-st}dt=\int_0^{\infty}\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(t)e^{jk\omega_s t}e^{-st}dt$$

---

根据拉氏变换复位移定理得到： $F^*(s)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}F(s-jk\omega_s)$

令 $n=-k$，得到 $F^*(s)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}F(s+jn\omega_s)$

在令 $s=j\omega$ 　则采样函数的傅氏变换式 为：

$$F^*(j\omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(j\omega+jn\omega_s)$$

周期函数，周期为 $\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$

---

$F^*(s)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F(s+jn\omega_s)$ $\xrightarrow{s=j\omega}$ $F^*(j\omega)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}F(j\omega+jn\omega_s)$

•**幅频谱的计算**

$$\left|F^*(j\omega_s)\right|=\frac{1}{T}\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(j\omega+jn\omega_s)\right|\le\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega+jn\omega_s)\right|$$

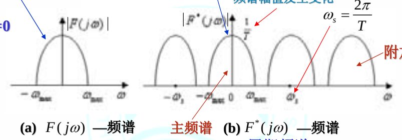
•**工程近似为：**

$$\left|F^*(j\omega_s)\right|\approx\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|F(j\omega+jn\omega_s)\right|$$

---

$F(j\omega)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$ 　 $F^*(j\omega)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}F(j\omega+jn\omega_s)$

n=0 　频谱幅值发生变化 　$\omega_s=\dfrac{2\pi}{T}$




附加频谱

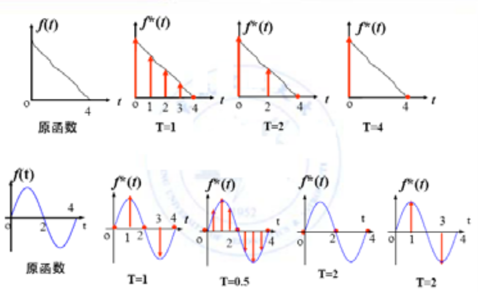
(a) $F(j\omega)$ —频谱 　主频谱 　(b) $F^*(j\omega)$ —频谱

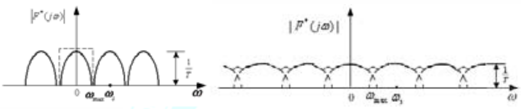
非周期频谱 　周期频谱

图2.5 频谱图

问题：如何选择采样周期 $T$？

---



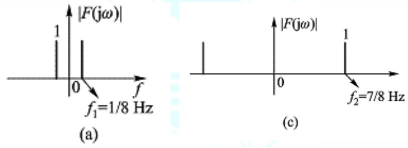



(a) $\omega_s \ge 2\omega_{max}$　　(b) $\omega_s < 2\omega_{max}$

为了不失真地由采样函数恢复原连续函数，要求：$\omega_s \ge 2\omega_{max}$

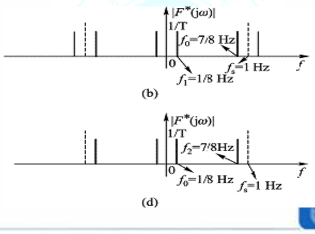
例2-1 两个频率为$f_1$=1/8Hz 、$f_2$=7/8Hz的余弦信号被采样频率为$f_s$=1Hz的采样开关采样。试研究其频谱及时域特性。

- 连续余弦信号的频谱为位于相应频率处的脉冲，如下图所示。

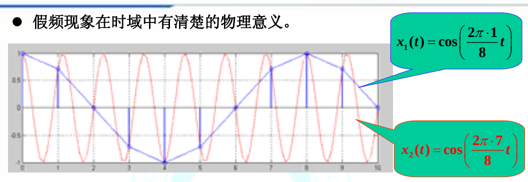



两个余弦信号采样信号频谱

- 采样信号频谱 如下图所示。
- 从图可见，两个信号的采样信号频谱完全相同；
- $f_2$=7/8Hz的余弦信号，采样后变为低频$f_1$=1/8Hz的余弦信号；
- $f_0=f_s - f_2$ =(1-7/8) Hz=1/8 Hz---频谱7/8Hz的假频。




- 假频现象在时域中有清楚的物理意义。



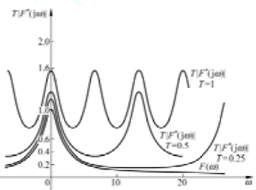

两个余弦信号的采样信号值(T=1s)

- 两个信号在所有采样时刻都具有相同的采样值；
- 采样信号频谱在以下两种情况下，将产生频率混叠现象：
  ----连续信号的频谱带宽有限，但采样频率太低，
  如$\omega_s < 2\omega_{max}$ ($\omega_{max}$ ---信号中的最高频率)。
  ----连续信号的频谱是无限带宽。

例2-2 画出$f(t)=e^{-t}$($t$<0时，$f(t)$=0)和它对应的采样信号的幅频特性

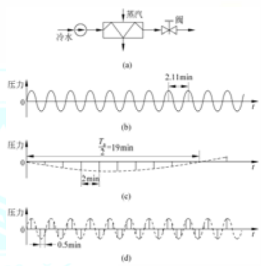
$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}e^{-j\omega t}dt=\int_{0}^{\infty}e^{-(1+j\omega)t}dt=\frac{1}{1+j\omega} \longrightarrow |F(j\omega)|=\frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

- 信号的频谱无限；
- 采样信号的各频谱分量互相有混叠；
- 混叠的程度与采样频率大小有关；
- 产生混叠时，输出与输入信号静态比值不等于1/$T$，视混叠程度而定。




$f(t)=e^{-t}$及其采样信号频谱

- 连续信号被采样，由于采样在时域内只保留了采样时刻的信息，丢失了采样间隔之间的信息，可能使采样信号与原连续信号特性相差较大。
- 左图为蒸汽加热冷水系统，其中
  - (b)---连续记录
  - (c)---$T$=2min时采样记录
  - (d)---$T$=0.5min时采样记录




正弦振荡信号的采样

## 香农（Shannon）采样定理：

“如果一个连续信号不包含高于频率 $\omega_{\max}$ 的频率分量（连续信号中所含频率分量的最高频率为 $\omega_{\max}$），那么就完全可以用周期 $T < \pi / \omega_{\max}$ 的均匀采样值来描述。或者说，如果采样频率 $\omega_s > 2\omega_{\max}$，那么就可以从采样信号中不失真地恢复原连续信号”

注意：连续信号的频谱是无限带宽，此时无论怎样提高采样频率，频谱混叠或多或少都将发生

## 2.2.4 采样周期 *T* 的讨论

从香农采样定理可以分析得到，采样周期越小越好。但是采样周期的减小，即采样频率的增加，将给计算机系统的硬件设备提出更高的要求，控制系统的硬件成本增加；另外香农采样定理只给出了理论指导原则，实际应用还有些问题，主要是系统数学模型不好精确地测量，系统的最高角频率不好确定，况且采样周期的选择与很多因素有关，因此工程上讲究“适当”就好。

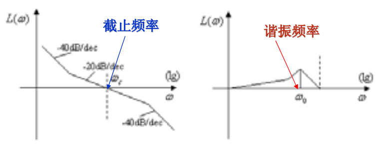
表2.1 模拟量的采样周期（工程上慢过程采样周期选择方法）

| 被控对象 | 流 量 | 液 位 | 压 力 | 温 度 | 成 分 |
|---|---|---|---|---|---|
| 采样周期T/s | 1~5 | 5~10 | 3~10优选3~8 | 10~20或取纯滞后时间 | 15~20 |

## 2.2.4 采样周期 *T* 的讨论

对于快过程，工程上采样周期选择方法：

$\omega_s \approx 10\omega_c$ 或者 $T \approx \pi / 5\omega_c$ 或 取上升时间的1/2～1/4



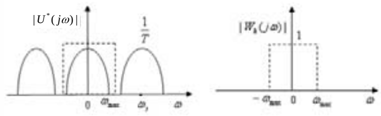

(a)系统预期开环频率特性 (b)系统预期闭环频率特性

图2.7 频谱法分析系统

## 2.3 采样信号恢复与保持器

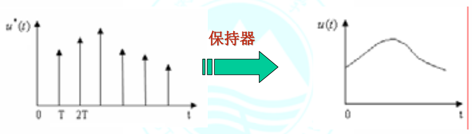
若把数字信号无失真地复现成连续信号，由香农采样定理可知，采样频率 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$，则在被控对象前加一个理想滤波器，可以再现主频谱分量而除掉附加的高频频谱分量。

$$|W_h(j\omega)| = \begin{cases} 1 & -\omega_{\max} \leq \omega \leq \omega_{\max} \\ 0 & |\omega| \geq \omega_{\max} \end{cases}$$




$U^*(j\omega)$ 频谱　　理想滤波器特性

但是，这种理想滤波器是不存在的，必须找出一种与理想滤波器特性相近的物理上可实现的实际滤波器，这种滤波器称为保持器。




脉冲序列　　连续信号

### 保持器外推表达式：

$$u(t) = u(kT) + u'(kT)(t-kT) + \frac{u''(kT)}{2}(t-kT)^2 + \cdots \qquad (kT \leq t < (k+1)T)$$

$$u'(kT) = \frac{1}{T}\{u(kT) - u[(k-1)T]\}$$

$$u''(kT) = \frac{1}{T^2}\{u(kT) - 2u[(k-1)T] + u[(k-2)T]\}$$

… …

## 2.3.1 零阶保持器

仅取保持器外推式的第一项时，组成零阶保持器：

$$u_h(t)=u(kT)\qquad kT\le t<(k+1)T$$

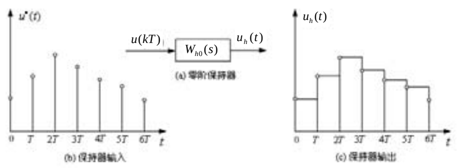



图2.9 零阶保持器输入输出的关系

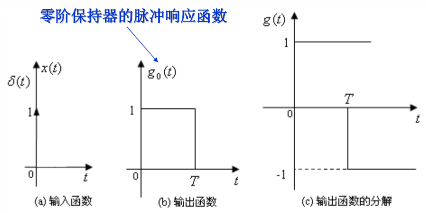



图2.10 零阶保持器时域特性

$$g_0(t)=1(t)-1(t-T)\qquad 1(t)=\begin{cases}1 & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

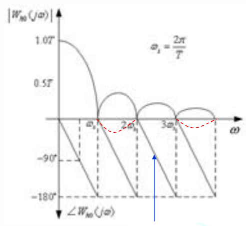
输出： $G_0(s)=L\left[g_0(t)\right]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}e^{-sT}=\frac{1-e^{-sT}}{s}$

输入： $X(s)=L\left[\delta(t)\right]=1$

于是得到零阶保持器的传递函数为：

$$W_{h0}(s)=\frac{G_0(s)}{X(s)}=\frac{1-e^{-sT}}{s}$$

零阶保持器的频率特性为： $W_{h0}(j\omega)=\frac{1-e^{-jT\omega}}{j\omega}=T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}e^{-j\frac{\omega T}{2}}$




幅频特性为：

$$\left|W_{h0}(j\omega)\right|=T\frac{\left|\sin(\omega T/2)\right|}{\omega T/2}$$

相频特性为：

$$\angle W_{h0}(j\omega)=-\omega T/2+k\pi,\ k=\mathrm{INT}(\omega/\omega_s)$$

取整函数

### 零阶保持器特性：

- 具有低通滤波特性，但不是一个理想的滤波器；
- 零阶保持器附加了滞后相位移，增加了系统不稳定因素，平均滞后 ***T*/2** 时间。

## 2.3.2 一阶保持器

取保持器外推式的前两项，组成一阶保持器：

$$u_h(t)=u(kT)+u'(kT)(t-kT)\qquad kT\le t<\left(k+1\right)T$$

$$u_h(t)=u(kT)+\frac{u(kT)-u\left[(k-1)T\right]}{T}(t-kT)$$

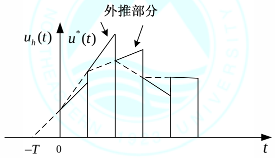
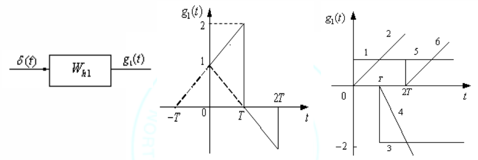



图2.12 一阶保持器工作情况




(a) 结构图　(b) 单位脉冲响应　(c) 单位脉冲响应分解

图2.13 一阶保持器的脉冲响应

---

一阶保持器的单位脉冲响应函数：

$$g_1(t)=1(t)+\frac{t}{T}\times 1(t)-2\times 1(t-T)-\frac{2(t-T)}{T}\times 1(t-T)$$
$$+1(t-2T)+\frac{(t-2T)}{T}\times 1(t-2T)$$

$$W_{h1}(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{s^2}-\frac{2}{s}e^{-sT}-\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{s^2}\cdot e^{-sT}+\frac{1}{s}e^{-2sT}+\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{s^2}e^{-2sT}$$

于是得到一阶保持器的传递函数为：

$$W_{h1}(s)=T(1+sT)\left(\frac{1-e^{-sT}}{sT}\right)^2$$

---

频率特性为： $W_{h1}(j\omega)=T\sqrt{1+(\omega T)^2}\left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}\right]^2\angle(-\omega T+\arctan\omega T)$

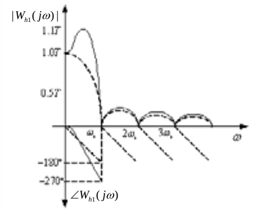



图2.14 一阶保持器幅频与相频特性（虚线为零阶保持器频率特性）

---

## 一阶保持器特性：

- 一阶保持器的幅频特性比零阶保持器的要高；
- 在低频时相移比零阶保持器要小，但在整个频率范围内相移比零阶保持器要大得多，对系统稳定不利。

结论：实际上较少采用

---

# 2.4 信息转换的工程化技术

## 2.4.1 A/D转换的基本工程化技术

### 1、A/D转换的性能指标

（1）A/D精度

指转换后所得数字量相当于实际模拟量值的准确度，即指对应一个给定的数字量的实际模拟量输入与理论模拟量输入接近的程度。

A/D转换器精度：数字部分由A/D转换器的位数决定；模拟部分由比较器、T型网络中的电阻以及基准电源的误差决定。

---

（2）分辨率

指输出数字量对输入模拟量变化的分辨能力，利用它可以决定使输出数码增加（或减少）一位所需要的输入信号最小变化量。

设A/D转换器的位数为$n$，则A/D转换器的分辨率为：

$$D=\frac{1}{2^n-1}$$

（3）转换时间

从A/D转换的启动信号加入时起，到获得数字输出信号（与输入信号对应之值）为止所需的时间称为A/D转换时间。该时间的倒数称为转换速率。

A/D的位数越大，则相应的转换速率就越慢。

（4）量程

量程指测量的模拟量的变化范围，一般有单极性（例如0~10V、0~20V）和双极性（例如-5V~+5V、-10V~+10V）两种。

## 2、A/D转换的典型芯片

是一种采用逐次逼近式转换原理的8位8通道的A/D转换器芯片。

ADC0809的主要特性参数如下：

分辨率：8位，零位误差和满量程误差均小于0.5LSB；
量程：0～5V；
通道：8个模拟量输入通道，有通道地址锁存、输出数据三态锁存功能；
转换时间：约为100；
工作温度范围：-40～+85℃；
功耗：15mW；
电源：单一的+5V电源供电。

另外：12位的A/D转换芯片AD574A

## 3、A/D转换的数据传输方式

（1）查询方式

由CPU执行输入指令启动并完成的，每次传送数据之前，要先输入A/D转换器的状态，经过查询符合条件后才可以进行数据的输入。

特点：

- 有比较大的灵活性；
- 会造成CPU效率的大大降低；
- CPU任务少时采用。

（2）中断方式

转换完成信号经过中断管理电路发出中断请求，CPU在中断服务子程序中读入转换结果。

特点：

- 省掉重复繁琐的查询，及时响应外设的要求；
- 对应的接口电路和程序要较复杂。

（3）DMA方式

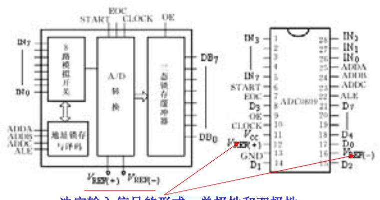
传送转换结果非常及时迅速。需要检查计算机保留的DMA通道，连接有关DMA请求及应答信号，而且还要修改DMA控制电路的初始化编程。

特点：

- 传送数据最快；
- 对应的接口电路和程序要更复杂。

## 4、A/D转换的输入信号形式

A/D输入信号可以有单极性和双极性两种形式。通过对参考电压的不同连接，可以构成不同的模拟量输入电路。




决定输入信号的形式：单极性和双极性

## 5、A/D转换芯片的选择

除了满足用户的各种技术要求外，还要求：

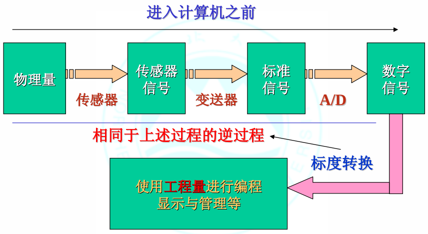
- A/D输出的方式；
- A/D芯片对启动信号的要求；
- A/D的转换精度和转换时间；
- 稳定性及抗干扰能力等。

A/D转换器位数选择：

$$n \geq \lg\left[u_{max} / u_{min} + 1\right] / \lg 2$$

模拟输入信号的最大值　　模拟输入信号的最小值

## 6、A/D转换的标度变换




计算机内部

## 2.4.2 D/A转换的基本工程化技术

### 1、D/A转换的性能指标

（1）D/A精度

D/A的精度指实际输出模拟量值与理论值之间接近的程度，与D/A转换器的字长、基准电压有关，主要由线性误差、增益误差及偏移误差的大小决定。

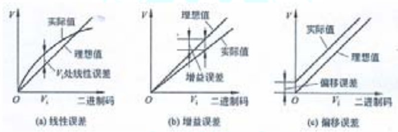



图2.16 D/A转换器的误差

（2）分辨率

指输入数字量发生单位数码变化时输出模拟量的变化量。分辨率也常用数字量的位数来表示。

如对于分辨率为12位的D/A转换器，表示它可以对满量程的$1/2^{12}$=1/4096的增量做出反应。

（3）转换时间

从接收一组数字量时起—到完成转换—输出模拟量为止所需的时间称为D/A转换时间。

一般为微秒级，有时可以短到几十纳秒。

D/A转换器的零阶保持功能（锁存器）。

（4）输出电平与代码形式

对于D/A来说，不同型号的D/A 转换器的输出电平相差较大，一般为5V~10V，高压输出型的输出电平可达24V~30V。还有一些电流输出型，低的有20mA，高的可达3A。

D/A转换器单极性输出时，有二进制码、BCD码；

当双极性输出时，有原码、补码、偏移二进制码等。

## 2、D/A转换的主要芯片

8位D/A转换器芯片DAC0832，有R-2R T型电阻网络。

主要特性参数如下：

输入数字量分辨率：8位；

电流建立时间：1微秒；

精度：1LBS；

基准电压：-10V~+10V；

电源电压：+5V~+15V；

输入电平：符合TTL电平标准；

功耗：20mW。

另外：12位D/A转换器DAC1208/1209/1210

## 3、D/A转换的输出方式

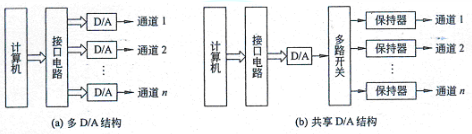



图2.17 模拟量输出通道的两种实现结构图

## 4、D/A转换的输出信号形式

D/A输出信号可以有单极性和双极性两种形式。

通过对输出电路的不同连接，也可以构成不同的模拟量输出电路。

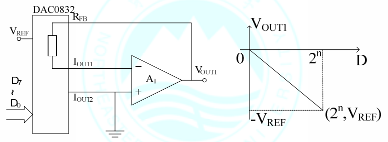



图2.18 DAC0832的单极性输出方式与变换关系

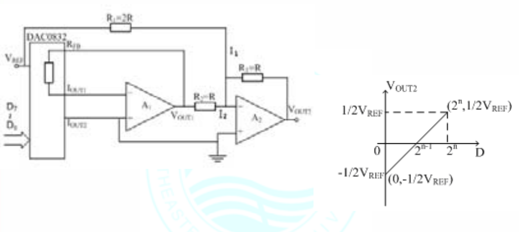



图2.19 DAC0832的双极性输出方式与变换关系

## 5、D/A转换芯片的选择

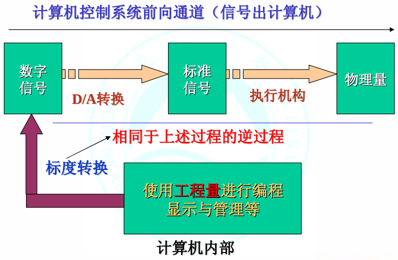
选择D/A转换芯片时，在性能上必须满足D/A转换的技术要求，在结构和应用上满足接口方便，外围电路简单，价格低廉等要求。在芯片选择时，主要考虑的是用位数（字长）表示的转换分辨率、转换精度及转换时间。

对于D/A转换器的字长的选择，可以由计算机控制系统中D/A转换器后面的执行机构的动态范围来选定：

$$n \geq \lg\left[u_{max}/u_R + 1\right]/\lg 2$$

执行机构的最大输入　　执行机构的死区电压

### 6、D/A转换的标度变换




## 2.5 z 变换

### 2.5.1 z 变换的定义

$f(t)$ 的拉普拉斯变换式为 $F(s)=L\left[f(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$

$f(t)$ 的采样信号为 $f^*(t)$ $\quad f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$ ← 时域

其拉普拉斯变换式为 $\quad F^*(s)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$ ← s 域

引入一个新的复变量 $\quad z=e^{sT}$

$$Z[f(t)]=Z[f^*(t)]=F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$ ← z 域

时间序列
(信号幅值信息)

序列时刻(时间信息):
单位延迟因子

**定义：**一个连续的函数可进行拉氏变换，采样后的函数同样可以进行拉氏变换.

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(T-Kt)$$

z 变换

$$Z[f(t)]=Z[f^*(t)]=F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$

**注：**$F(z)$ 与 $f(t)$ 不是一一对应关系，一个 $F(z)$ 可有无穷多个 $f(t)$ 与之对应。

### 2.5.2 z 变换方法

**1、级数求和法**

将离散函数 $f^*(t)$ 展开如下

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$
$$=f(0)\delta(t)+f(T)\delta(t-T)+\cdots+f(kT)\delta(t-kT)+\cdots\cdots$$

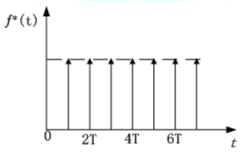
然后利用公式直接展开

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$$
$$=f(0)\cdot 1+f(T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\cdots+f(kT)z^{-k}+\cdots\cdots \quad (2.50)$$

**例2.1** 求单位阶跃函数 1(*t*) 的 *z* 变换

**解：**单位阶跃函数 1(*t*) 在任何采样时刻的值均为1

$$f(kT)=1(kT)=1, \quad k=0,1,2\cdots$$




代入式（2.50）中，得：

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}=1z^{0}+1z^{-1}+1z^{-2}+\cdots+1z^{-k}+\cdots \quad (2.51)$$

将式（2.51）两边乘以 $z^{-1}$，有：

$$z^{-1}F(z)=z^{-1}+z^{-2}+\cdots+z^{-k}+\cdots \quad (2.52)$$

上两式相减，得：

$$F(z)-z^{-1}F(z)=1$$

所以 $\quad F(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$

**例2.2** 求衰减指数 $e^{-at}$ 的 $z$ 变换。

**解：** 根据公式可得

$$F(z)=1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+\cdots+e^{-kaT}z^{-k}+\cdots$$

将两边同乘以 $e^{-aT}z^{-1}$ ，

得 $$e^{-aT}z^{-1}F(z)=e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+\cdots+e^{-kaT}z^{-k}+\cdots$$

上两式相减，可以求得 $F(z)(1-e^{-aT}z^{-1})=1$

$$F(z)=\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{z}{z-e^{-aT}}$$

## 2、部分分式法

设连续函数 $f(t)$ 的拉氏变换为有理函数，具体形式如下：

$$F(s)=\frac{M(s)}{N(s)}$$

式中，$M(s)$ 与 $N(s)$ 都是复变量的多项式。

通常无重极点的 $F(s)$ 能够分解成如下的部分分式形式：

$$F(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s+a_i} \qquad A_i=(s+a_i)F(s)|_{s=-a_i}$$

利用已知的典型函数 $z$ 变换，便可求出各个环节的 $z$ 变换。

$$\frac{A_i}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

**例2.3** 求 $F(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$ 的 $z$ 变换

**解：**

$$F(s)=\frac{a}{s(s+a)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}$$

$$\frac{1}{s}\xrightarrow{\text{拉氏反变换}}1(t)\xrightarrow{z\text{变换}}\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\frac{1}{s+a}\xrightarrow{\text{拉氏反变换}}e^{-at}\xrightarrow{z\text{变换}}\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$F(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$$

**例2.4** 求 $F(s)=\dfrac{s+3}{(s+2)^2(s+1)}$ 的 $z$ 变换。

**解：** 将 $F(s)$ 分解成部分分式：$F(s)=\dfrac{A}{(s+2)^2}+\dfrac{B}{s+2}+\dfrac{C}{s+1}$

$$A=\left[\frac{s+3}{(s+2)^2(s+1)}(s+2)^2\right]_{s=-2}=-1$$

$$B=\left\{\frac{d}{ds}\left[\frac{s+3}{(s+2)^2(s+1)}(s+2)^2\right]\right\}_{s=-2}=\frac{(s+1)-(s+3)}{(s+1)^2}\bigg|_{s=-2}=-2$$

$$C=\left[\frac{s+3}{(s+2)^2(s+1)}(s+1)\right]_{s=-1}=2$$

所以 $$F(s)=\frac{-1}{(s+2)^2}-\frac{2}{s+2}+\frac{2}{s+1}$$

上式中等号右边第一项不常见，查表2.2，得到

$$F(z)=\frac{-Te^{-2T}z^{-1}}{(1-e^{-2T}z^{-1})^2}-\frac{2}{1-e^{-2T}z^{-1}}+\frac{2}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

$$=\frac{(-T+2)e^{-2T}z-2z^2}{(z-e^{-2T})^2}+\frac{2z}{z-e^{-T}}$$

$$=\frac{(-T+2)e^{-2T}z^{-1}-2}{(1-e^{-2T}z^{-1})^2}+\frac{2}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

**说明：**

$$F(s)\Rightarrow f(t)\Rightarrow f^*(t)\Rightarrow F^*(s)\Rightarrow F(z)$$

$$F(s)\xrightarrow{s\neq\frac{1}{T}\ln z}F(z)$$

$$F^*(s)\xrightarrow{s=\frac{1}{T}\ln z}F(z)$$

例 2.5

3、留数计算法

若已知连续时间函数 $f(t)$ 的拉氏变换式及全部极点，则 $f(t)$的$z$ 变换可由下面留数计算公式求得：

$$F(z)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}\left[F(s_i)\frac{z}{z-e^{s_iT}}\right]$$

极点上的留数分两种情况求取：

（1）单极点情况 $\mathrm{Res}\left[F(s_i)\frac{z}{z-e^{s_iT}}\right]=\left[(s-s_i)F(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=s_i}$

（2）$n$ 阶重极点情况

$$\mathrm{Res}\left[F(s_i)\frac{z}{z-e^{s_iT}}\right]=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left[(s-s_i)^nF(s)\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=s_i}$$

例2.6 求 $F(s)=\frac{1}{(s+1)(s+3)}$ 的 $z$ 变换。

解：上式有两个单极点 $s_1=-1, s_2=-3, m=2$ ，于是

$$F(z)=[(s+1)\frac{1}{(s+1)(s+3)}\frac{z}{z-e^{sT}}]_{s=-1}+[(s+3)\frac{1}{(s+1)(s+3)}\frac{z}{z-e^{sT}}]_{s=-3}$$

$$=\frac{z}{2z(z-e^{-T})}+\frac{z}{(-2)(z-e^{-3T})}$$

$$=\frac{z(e^{-T}-e^{-3T})}{2(z-e^{-T})(z-e^{-3T})}$$

例2.7 求 $F(s)=\frac{1}{(s+a)^2}$ 的 $z$ 变换。

解：上式有二重极点 $s_{1,2}=-a, n=2$ ，于是

$$F(z)=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{ds}\left[(s+a)^2\frac{1}{(s+a)^2}\frac{z}{z-e^{sT}}\right]_{s=-a}=\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$$

例 2.8

## 2.5.3 z 变换的基本定理

1、线性定理

线性函数满足齐次性和迭加性，若

$$Z[f_1(t)]=F_1(z) \qquad Z[f_2(t)]=F_2(z)$$

$a$、$b$ 为任意常数， $f(t)=af_1(t)\pm bf_2(t)$

则 $F(z)=aF_1(z)\pm bF_2(z)$

2、滞后定理（右位移定理）

$$Z[f(t-nT)]=z^{-n}F(z)+z^{-n}\sum_{j=-1}^{-n}f(jT)z^{-j}$$

如果 $t<0, f(t)=0$ ，则

$$Z[f(t-nT)]=z^{-n}F(z)$$

3、超前定理（左位移定理）

$$Z[f(t+nT)]=z^nF(z)-z^n\sum_{j=0}^{n-1}f(jT)z^{-j}$$

如果 $f(0T)=f(T)=\cdots=f[(n-1)T]=0$

则 $Z[f(t+nT)]=z^nF(z)$

4、初值定理

如果 $f(t)$ 的z 变换为 $F(z)$，而 $\lim\limits_{z\to\infty} F(z)$ 存在，则

$$f(0)=\lim_{z\to\infty} F(z)$$

5、终值定理

如果 $f(t)$ 的z 变换为 $F(z)$， 而 $(1-z^{-1})F(z)$ 在z 平面以原点为圆心的单位圆上或圆外没有极点，则

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{k\to\infty} f(kT)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$$
$$=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)}{z}F(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)F(z)$$

例 2.9

6、求和定理（叠值定理）

在离散控制系统中，与连续控制系统积分相类似的概念叫**叠分**，用 $\sum\limits_{j=0}^{k} f(j)$ 来表示

如果 $\quad g(k)=\sum\limits_{j=0}^{k} f(j)(k=0,1,2,\cdots)$

则 $\quad G(z)=Z\left[g(k)\right]=\dfrac{F(z)}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}F(z)$

7、复域位移定理

如果 $f(t)$ 的z变换为 $F(z)$，$a$ 是常数，则 $F(ze^{\pm aT})=Z\left[e^{\mp at}f(t)\right]$

8、复域微分定理

如果 $f(t)$ 的z变换为 $F(z)$，则 $Z\left[tf(t)\right]=-Tz\dfrac{dF(z)}{dz}$

9、复域积分定理

如果 $f(t)$ 的z变换为 $F(z)$，则 $Z\left[\dfrac{f(t)}{t}\right]=\int_z^{\infty}\dfrac{F(z)}{Tz}dz+\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}$

10、卷积定理

两个时间序列（或采样信号）$f(k)$和$g(k)$，相应的z变换为$F(z)$和$G(z)$，当 $t<0$ 时，$f(k)=g(k)=0$ ，$t\geq 0$ 的卷积记为 $f(k)*g(k)$，其定义为

$$f(k)*g(k)=\sum_{i=0}^{k} f(k-i)g(i)=\sum_{i=0}^{\infty} f(k-i)g(i)$$

或 $\quad f(k)*g(k)=\sum\limits_{i=0}^{k} g(k-i)f(i)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} g(k-i)f(i)$

则 $\quad Z\left[f(k)*g(k)\right]=F(z)G(z)$

## 2.6 z 反变换

定义：

从z变换 $F(z)$ 求出的采样函数 $f^*(t)$，称为z反变换，表示为

$$Z^{-1}[F(z)]=f^*(t)$$

z反变换是得到各采样时刻上连续函数$f(t)$的数值序列$f(kT)$，而不是$f(t)$。

### 2.6.1 长除法

$$F(z)=\frac{K(z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m)}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n}\qquad m\leq n$$

用$F(z)$表达式的分子除以分母，得到 $z^{-k}$ 升幂排列的级数展开式，即：

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}=f(0)+f(1T)z^{-1}+f(2T)z^{-2}+\cdots+f(kT)z^{-k}+\cdots$$

$$f^*(t)=f(0)+f(1T)\delta(t-T)+f(2T)\delta(t-2T)+\cdots$$
$$+f(kT)\delta(t-kT)+\cdots$$

**例2.12** 求 $F(z)=\dfrac{5z}{z^2-3z+2}$ 的 $z$ 反变换。

**解：** 首先按 $z^{-1}$的升幂排列 $F(z)$的分子和分母，即 $F(z)=\dfrac{5z^{-1}}{1-3z^{-1}+2z^{-2}}$

应用长除法

$$
\begin{array}{r}
5z^{-1}+15z^{-2}+35z^{-3}+\cdots \\
1-3z^{-1}+2z^{-2}\,\big)\,5z^{-1}\qquad\qquad\qquad \\
\underline{5z^{-1}-15z^{-2}+10z^{-3}} \\
15z^{-2}-10z^{-3} \\
\underline{15z^{-2}-45z^{-3}+30z^{-4}} \\
35z^{-3}-30z^{-4} \\
\underline{35z^{-3}-105z^{-4}+70z^{-5}} \\
75z^{-4}-70z^{-5} \\
\vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

于是得到 $F(z)=5z^{-1}+15z^{-2}+35z^{-3}+\cdots$

相应的脉冲采样函数为 $f^*(t)=5\delta(t-T)+15\delta(t-2T)+35\delta(t-3T)+\cdots$

## 2.6.2 部分分式法

将$F(z)$ 写成如下有理式标准形式：

$$F(z)=\frac{M(z)}{N(z)}=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}$$

对 $F(z)$ 的分母进行因式分解，即

$$N(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$$

### 1、所有极点是互不相同的单极点

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_n}{z-z_n}$$

$$F(z)=\frac{A_1z}{z-z_1}+\frac{A_2z}{z-z_2}+\cdots+\frac{A_nz}{z-z_n} \qquad \textbf{(2.77)}$$

$$A_i=(z-z_i)\frac{F(z)}{z}\bigg|_{z=z_i}$$

各个分式所对应的时间序列为通常熟悉的指数序列：

$$f_i(kT)=Z^{-1}\left[\frac{A_iz}{z-z_i}\right]=A_iz_i^k,\quad k\ge 0,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

**例2.13** 求 $F(z)=\dfrac{0.5z}{(z-1)(z-0.5)}$ 的 $z$ 反变换

**解：** 将 $F(z)$除以$z$，并展开成部分分式，得 $\dfrac{F(z)}{z}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-0.5}$

上式两边乘以$z$，得 $F(z)=\dfrac{z}{z-1}-\dfrac{z}{z-0.5}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}-\dfrac{1}{1-0.5z^{-1}}$

于是得到 $f(kT)=1-(0.5)^k \quad k=0,1,2,\cdots$

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT)\delta(t-kT)=\sum_{k=0}^{\infty}[1-(0.5)^k]\delta(t-kT)$$

例 2.14

### 2、$F(z)$ 含重极点

设$F(z)$含有二重极点 $z_1$，其余极点 $z_3,z_4,\cdots,z_n$互不相同。

首先将$F(z)/z$ 展开成部分分式

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{A_1}{(z-z_1)^2}+\frac{A_2}{z-z_1}+\frac{A_3}{z-z_3}+\cdots+\frac{A_n}{z-z_n}$$

$$F(z)=\frac{A_1z}{(z-z_1)^2}+\frac{A_2z}{z-z_1}+\frac{A_3z}{z-z_3}+\cdots+\frac{A_nz}{z-z_n}$$

第一项 $\dfrac{A_1z}{(z-z_1)^2}$ 的$z$反变换为

$$f_1(kT)=A_1kz_1^{k-1},\quad k\ge 0$$

$$f(kT)=Z^{-1}[F(z)]=A_1kz_1^{k-1}+A_2z_1^k+\sum_{i=3}^{n}A_iz_i^k,\quad k\ge 0$$

**例2.15** 求 $F(z)=\dfrac{z}{z^3-4z^2+5z-2}$ 的$z$ 反变换

**解：** 对 $F(z)$ 的分母进行因式分解，得 $F(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}$

首先 $F(z)/z$ 将展开：$\dfrac{F(z)}{z}=F_1(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z-2)}=\dfrac{A_1}{(z-1)^2}+\dfrac{A_2}{z-1}+\dfrac{A_3}{z-2}$

其中上式中的系数

$$A_1=(z-1)^2F_1(z)\big|_{z=1}=-1$$

$$A_2=\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2F_1(z)\right]\bigg|_{z=1}=-1$$

$$A_3=(z-2)F_1(z)\big|_{z=2}=1$$

于是得到 $F(z)=\dfrac{-z}{(z-1)^2}-\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{z}{z-2}$

$$f(kT)=Z^{-1}[F(z)]=-k-1+2^k=2^k-k-1,\quad k\ge 0$$

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(2^k-k-1)\delta(t-kT)$$

## 2.6.3 留数法

在留数法中，采样函数 $f^*(t)$ 等于 $F(z)z^{k-1}$各个极点上留数之和，即 $f(kT)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}$

（1）单极点情况：

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}=[(z-z_i)F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}$$

（2）$n$ 阶重极点情况：

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}=\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_i)^nF(z)z^{k-1}]_{z=z_i}$$

**例2.16** 求 $F(z)=\dfrac{5z}{z^2-3z+2}$ 的z反变换。

**解：** $F(z)$ 中有两个单极点 $z_1=2$，$z_2=1$，$m=2$

$z=z_1=2$ 时，

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_1}=[(z-z_1)F(z)z^{k-1}]_{z=z_1}=\left[(z-2)\frac{5z}{(z-2)(z-1)}z^{k-1}\right]_{z=2}=5\times 2^k$$

$z=z_2=1$ 时，

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_2}=\left[(z-1)\frac{5z}{(z-2)(z-1)}z^{k-1}\right]_{z=1}=-5\times 1^k=-5$$

于是有：

$$f(kT)=\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}=5\times 2^k-5=5(2^k-1)$$

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}5(2^k-1)\delta(t-kT)$$

**例2.17** 求 $\dfrac{z}{(z-2)(z-1)^2}$ 的z反变换。

**解：** $F(z)$ 中有一个单极点和两个重极点：

$z_1=2\quad z_{2,3}=1\quad m=2\quad n=2$

$z=z_1=2$ 时，

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_1}=\left[(z-2)\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}z^{k-1}\right]_{z=2}=2^k$$

$z=z_{2,3}=1$ 时，

$$\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_{2,3}}=\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{z}{(z-2)(z-1)^2}z^{k-1}\right]_{z=1}=\frac{d}{dz}\left[\frac{z^k}{(z-2)}\right]_{z=1}=\left[\frac{kz^{k-1}(z-2)-z^k}{(z-2)^2}\right]_{z=1}=-k-1$$

于是有： $f(kT)=2^k-k-1$

$$f^*(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(2^k-k-1)\delta(t-kT)$$

分析*F*(*z*) 的*z*有理分式的分子中无*z*公因子的情况：

（1） $f(kT)=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}$ (2.84)

只适合 *k*>0 的情况

（2）*k*=0 时刻序列值 *f*(0)，应由初值定理确定或令 *k*=0 再用式（2.84）来计算

原因：

当 *k*=0 时，式（2.84）中的被积函数为 $F(z)z^{-1}$，它比 *k*>0 时的被积函数 $F(z)z^{k-1}$ 多一个 *z*=0 的极点，

例2.18 用留数法求 $F(z)=\frac{10}{(z-1)(z-2)}$ 的*z*反变换。

解： $F(z)z^{k-1}=\frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$

（1）求 *f*(0) 的值

$$f(0)=\sum_{i=1}^{3}\mathrm{Res}[F(z)z^{-1}]_{z=z_i}=K_1+K_2+K_3$$

$$K_1=\mathrm{Res}\left[F(z)z^{-1}\right]_{z=z_1}=\left[z\frac{10}{z(z-1)(z-2)}\right]_{z=0}=5$$

$$K_2=\mathrm{Res}\left[F(z)z^{-1}\right]_{z=z_2}=\left[(z-1)\frac{10}{z(z-1)(z-2)}\right]_{z=1}=-10$$

$$K_3=\mathrm{Res}\left[F(z)z^{-1}\right]_{z=z_3}=\left[(z-2)\frac{10}{z(z-1)(z-2)}\right]_{z=2}=5$$

因此： $f(0)=K_1+K_2+K_3=5-10+5=0$

（2）求 $k\geq1$ 时的 $f(kT)$

$$f(kT)=\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Res}[F(z)z^{k-1}]_{z=z_i}=K_1+K_2$$

$$K_1=\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]_{z=z_1}=\left[(z-1)\frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}\right]_{z=1}=-10$$

$$K_2=\mathrm{Res}\left[F(z)z^{k-1}\right]_{z=z_2}=\left[(z-2)\frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}\right]_{z=2}=10\cdot2^{k-1}$$

于是得到：

$$f(kT)=K_1+K_2=-10+10\cdot2^{k-1}=10(2^{k-1}-1)\quad k=1,2,\cdots$$

综合以上（1）和（2）的结果，得到：

$$f(kT)=\begin{cases}0, & k=0\\ 10(2^{k-1}-1), & k\geq1\end{cases}$$

于是得到：

$$f^*(t)=\sum_{k=1}^{\infty}[10(2^{k-1}-1)]\delta(t-kT)$$

# 2.7 扩展 *z* 变换

## 2.7.1 扩展*z*变换定义

通常称信号 ***f*(*t*)** 延迟 $\lambda T$ 后的 $f(t-\lambda T)$ $(\lambda<1)$ 的*z*变换 $Z[f(t-\lambda T)]$（将 $m=1-\lambda$ 作为参变数）为信号 ***f*(*t*)** 的扩展*z*变换。

$$F(z,m)=Z_m\left[f(t)\right]=Z\left[f(t-\lambda T)\right],\quad 0<\lambda\leq1$$

如果需要*z*变换能够反映 $f(t)$在采样时刻之间的变化情况，可以人为地使连续信号 $f(t)$延迟 $\lambda T(\lambda<1)$ 后再作*z*变换

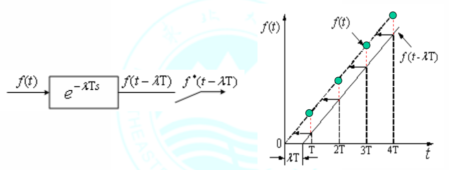



图2.22 信号右移扩展*z*变换

## 扩展z变换的应用:

（1）用来计算计算机控制系统连续输出在采样时刻之间的任意时刻的数值;

（2）可以用来处理被控对象带有非采样周期整数倍的延迟;

（3）非同步采样和多速率采样的计算机控制系统的有关分析问题。

---

扩展z变换常用符号 $Z_m[\cdot]$ 作为变换算子符，用 $F(z,m)$ 表示变换后的表示式。连续信号 $f(t)$ 的扩展z变换定义为

$$F(z,m)=Z_m\left[f(t)\right]=Z\left[f(t-\lambda T)\right],\ 0<\lambda\le 1$$

$$F(z,m)=Z_m\left[f(t)\right]=z^{-1}Z\left[f(kT+mT)\right]=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}f(kT+mT)z^{-k}\quad m=1-\lambda$$

对于用 $F(s)$ 表示的连续函数，其扩展z变换为

$$F(z,m)=Z_m\left[F(s)\right]=Z\left[F(s)e^{-\lambda Ts}\right]$$
$$=Z\left[F(s)e^{-Ts+(T-\lambda T)s}\right]=z^{-1}Z\left[F(s)e^{mTs}\right]$$

---

## 2.7.2 几种典型函数的扩展z变换

（1）单位阶跃函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\ge 0\end{cases}$$

$$F(z,m)=Z_m\left[f(t)\right]=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}f(kT+mT)z^{-k}$$
$$=z^{-1}\left[f(mT)+f(T+mT)z^{-1}+f(2T+mT)z^{-2}+\cdots\right]$$
$$=z^{-1}\left[1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots\right]=\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{z-1}$$

单位阶跃函数的扩展 z变换与参数 **m** 无关。

---

（2）单位斜坡函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\ge 0\end{cases}$$

$$F(z,m)=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}f(kT+mT)z^{-k}$$
$$=z^{-1}\left[f(mT)+f(T+mT)z^{-1}+f(2T+mT)z^{-2}+\cdots\right]$$
$$=z^{-1}\left[mT+(T+mT)z^{-1}+(2T+mT)z^{-2}+\cdots\right]$$
$$=z^{-1}\left[mT+mTz^{-1}+mTz^{-2}+\cdots+Tz^{-1}+2Tz^{-2}+\cdots\right]$$
$$=z^{-1}\left[\frac{mT}{1-z^{-1}}+\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right]$$
$$=\frac{mTz^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{Tz^{-2}}{(1-z^{-1})^2}=\frac{mT(z-1)+T}{(z-1)^2}$$

---

（3）指数函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-at}, & t\ge 0\end{cases}$$

$$F(z,m)=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}f(kT+mT)z^{-k}=z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a(kT+mT)}z^{-k}$$
$$=z^{-1}\left[e^{-amT}+e^{-amT-aT}z^{-1}+e^{-amT-2aT}z^{-2}+\cdots\right]$$
$$=z^{-1}\left[e^{-amT}(1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+\cdots)\right]$$
$$=\frac{e^{-amT}z^{-1}}{1-e^{-aT}z^{-1}}=\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$$

---

超前扩展z变换形式:

$$F(z,\Delta)=Z[F(s,\Delta)]=Z[F(s)e^{\Delta Ts}]=Z[f(t+\Delta T)]=\sum_{k=0}^{\infty}f(kT+\Delta T)z^{-k}\quad 0<\Delta<1$$

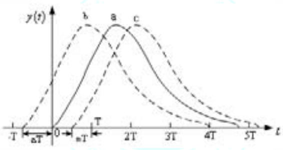



图2.23 z变换的超前和滞后

**例2.21** 已知 $F(s)=1/(s+a)$ ，求$F(s)$的广义$z$变换 $F(z,\Delta), F(z,m)$

**解：**

$$F(z,\Delta)=Z[F(s)e^{\Delta Ts}]=Z[\frac{1}{s+a}e^{\Delta Ts}]$$

$$=Z[e^{-a(t+\Delta T)}]=e^{-a\Delta T}Z[e^{-at}]=\frac{ze^{-a\Delta T}}{z-e^{-aT}}$$

$$F(z,m)=z^{-1}Z[F(s)e^{mTs}]=z^{-1}Z[\frac{1}{s+a}e^{mTs}]=z^{-1}Z[e^{-a(t+mT)}]$$

$$=z^{-1}e^{-amT}Z[e^{-at}]=z^{-1}e^{-amT}\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$$

**·本章结束·**