2002年自动控制原理答案

一

$$W_k(s)=\frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1+\frac{K(1+K_hs)}{s(s+1)}}=\frac{K}{s^2+s+K+KK_hs}=\frac{K}{s^2+(1+KK_h)s+K}$$

1. 对应 $\omega_n^2=K$，$2\xi\omega_n=1+KK_h$

由 $\sigma\%=e^{\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}\times100\%=0.2$ 得 $\xi=0.456$

$t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2\omega_n}}=1$ 得 $\omega_n=3.996$

由此得 $K_h=1.315$　$K=1.991$

2. $t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}=0.579s$

$\theta=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}=62.87^\circ$

$t_s\approx\frac{3}{\xi\omega_n}=\frac{3}{0.456\times3.966}=1.659s$

二

$$W_k(S)=\frac{\frac{K_1}{S(S+2)}}{1+\frac{K_1K_2S}{S(S+2)}}=\frac{K_1}{S^2+2S+K_1K_2S}=\frac{K_1}{S^2+(2+K_1K_2)S}$$

对应 $\omega_n^2\approx K$，$2\xi\omega_n=2+K_1K_2$

1. 因为单位斜坡输入 $e_{ss}=\lim\limits_{s\to0}sE(s)=\lim\limits_{s\to0}\frac{1}{1+W_k(s)}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to0}s\cdot W_k(s)}$

所以 $e_{ss}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to0}s\cdot\frac{K_1}{S(S+2+K_1K_2)}}=\frac{2+K_1K_2}{K_1}\le0.35$

2. $\xi=\frac{2+K_1K_2}{2\sqrt{K_1}}\le0.707$

3. $t_s=\frac{3}{\omega_n\xi}=\frac{3\times2}{2+K_1K_2}\le3$

所以取 $K_1=10$　$K_2=0.1$

三

$$W_k(S)=\frac{40K}{S(S+2)(S+20)}=\frac{K}{S(\frac{S}{2}+1)(\frac{S}{20}+1)}$$

1. 当 $r(t)=t$ 时，

$$e_{ss}=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}\frac{s\cdot1}{1+W_k}\cdot\frac{1}{s^2}=\frac{1}{\lim\limits_{s\to0}s(1+W_k)}$$

$$\frac{1}{\lim\limits_{s\to0}\frac{40k}{(S+2)+(S+20)}}<0.2 \text{ 得 } \frac{40}{40k}\Rightarrow K>5$$

2. $G_M = 20\log\frac{1}{|W_k(j\omega_j)|} = -20\log W_k(j\omega_j)$

$$\varphi(\omega_j) = 90° - \arctan\frac{\omega_j}{2} - \arctan\frac{\omega_j}{20} = -180° = 90° - \arctan\frac{\frac{\omega_j}{2}+\frac{\omega_j}{20}}{1-\frac{\omega_j}{2}\times\frac{\omega_j}{20}}$$

$$\frac{\omega_j^2}{40} = 1 \Rightarrow \omega_j = 6.32$$

$$-20\log\left|\frac{k}{j\omega_k(\frac{j\omega_k}{2}+1)(\frac{j\omega_k}{20}+1)}\right| \geq 6dB$$

$$k \leq 0.5\omega_j(\frac{\omega_j}{2}+1)(\frac{\omega_j}{20}+1) = 17.3$$

所以 $5 < k \leq 17.3$

$\boxed{四}$

$$W_k(z) = (1-z^{-1})Z\{\frac{k}{s(s+1)}\} = k(1-z^{-1})Z\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\}$$
$$= k(1-z^{-1})[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-T}}] = \frac{k(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

特征方程 $1+W_k(z)=0$

$$1 \cdot e^{-T}z^{-1} + k(1-e^{-T})z^{-1} = 0$$
$$z = e^{-T} - k(1-e^{-T})$$

当 $|z|<1$ 即 $|e^{-T}-k(1-e^{-T})|<1$ 时，系统稳定，得 $-1<k<\frac{1+e^{-T}}{1-e^{-T}}$。

$\boxed{五}$

$x = A\sin\omega t \qquad y = x^3 = A^3\sin^3\omega t$

因为 $y(t)$ 具有奇次对称性，所以 $A_0=0$.

$$B_1 = \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sin\omega t\, d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y(t)\sin\omega t\, d\omega t] = 0$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\cos\omega t\, d\omega t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y(t)\cos\omega t\, d\omega t]$$
$$= \frac{A^3}{\pi}[\int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)\sin^2\omega t\cos\omega t\, d\omega t]$$
$$= \frac{4A^3}{\pi}\times\frac{\sin^4\omega t}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{A^3}{\pi}$$

$$N(A) = \frac{B_1}{A} + j\frac{A_1}{A} = j\frac{A^2}{\pi}$$

$\boxed{六}$

1. 穿过 ω_c 的幅频特性斜率以 $-20dB/dec$ 为宜，一般最大不超过 $-30dB/dec$。
2. 低频段和高频段可以有更大斜率，低频段有斜率更大的线段可以提高系统的稳态指标，高频段的线段斜率更大可以更好地排除高频干扰。
3. 中频率段的穿越频率 ω_c 的选择，决定了系统暂态响应速度要求。
4. 中频段的长度对相位裕量有很大影响，中频越长，相位裕量越大。