东北大学 2005 年攻读硕士学位研究生试题

——自动控制原理（答案）

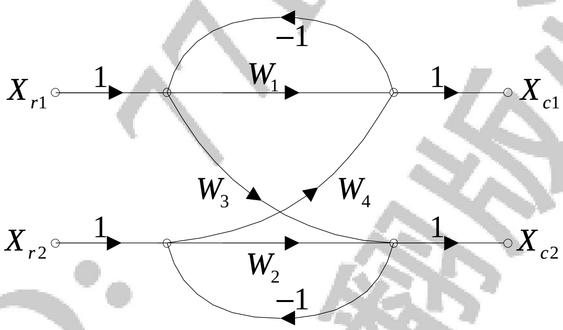
一、（10 分）

答：正反馈控制可以增大开环放大系数，但是容易导致系统不稳定。

二、（20 分）

答：微分方程，传递函数和频率特性都是表征系统本质特性的描述。传递函数是基于微分方程的，是在零初始条件下输出与输入的拉氏变换之比，即$W(s)=X_c(s)/X_r(s)$**；而频率特性是**$W(s)$**中自变量**s**沿虚轴变化时的特性，表征系统跟踪信号的快慢程度，即**$W(j\omega)=W(s)|_{s=j\omega}$**。**

信号流图如图所示



则系统单回路有 $L_1=-W_1$，$L_2=-W_2$，$L_3=W_3W_4$**；两两互不接触的回路有** $L_1L_2=W_1W_2$**，则**

$$\Delta=1+W_1+W_2-W_3W_4+W_1W_2$$

$\dfrac{X_{c1}(s)}{X_{r1}(s)}$**：前向通路有** $T_1=W_1$，$T_2=-W_3W_4$**，且** $\Delta_1=1+W_2$，$\Delta_2=1$**，由梅森增益公式得**

$$W_1(s)=\frac{X_{c1}(s)}{X_{r1}(s)}=\frac{W_1(1+W_2)-W_3W_4}{1+W_1+W_2-W_3W_4+W_1W_2}$$

$\dfrac{X_{c2}(s)}{X_{r2}(s)}$**：前向通路有** $T_1=W_2$，$T_2=-W_3W_4$**，且** $\Delta_1=1+W_1$，$\Delta_2=1$**，由梅森增益公式得**

$$W_2(s)=\frac{X_{c2}(s)}{X_{r2}(s)}=\frac{W_2(1+W_1)-W_3W_4}{1+W_1+W_2-W_3W_4+W_1W_2}$$

三、（20 分）

解：当线性系统在零初始条件下，微分方程的输出与输入的拉氏变换之比所构成的闭环传递函数，其闭环特征方程的根全部在s**平面左半平面时**$\Leftrightarrow$**线性系统稳定。（系统的闭环极点都具有负实部）**

易知控制系统的闭环传递函数为

$$W_B(s)=\frac{10}{s^2+10\tau s+9}$$

i）**当** $\tau=0$ **时**

$$Y(s)=R(s)W_B(s)=\frac{10}{s^2+9}=\frac{10}{3}\cdot\frac{3}{s^2+9}$$

对上式两边取拉式反变换得系统的单位脉冲响应为

$$y(t)=\frac{10}{3}\sin 3t$$

ii）**由公式**

$$\begin{cases}2\xi\omega_n = 10\tau \\ \omega_n^2 = 9 \qquad \Rightarrow \tau = 0.3 \\ \xi = 0.5\end{cases}$$

从而超调量为$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\% = 16.3\%$；**上升时间为**$t_r = \dfrac{\pi - \arccos\xi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 0.806\mathrm{s}$；**调节时间为**

$t_s = \dfrac{3}{\xi\omega_n} = 2\mathrm{s}$；**稳态误差为**$e_{ss} = \lim\limits_{s\to 0} s(1-W_B(s))\dfrac{1}{s} \approx -0.11$。

四、（20 **分**）

解：线性系统的闭环极点，即系统的特征根决定了系统的稳定性和暂态性能，而系统的根轨迹时利用开环零点和极点来分析系统某一参数变化时，系统闭环特征根的变换情况，因此可以用根轨迹来分析系统。

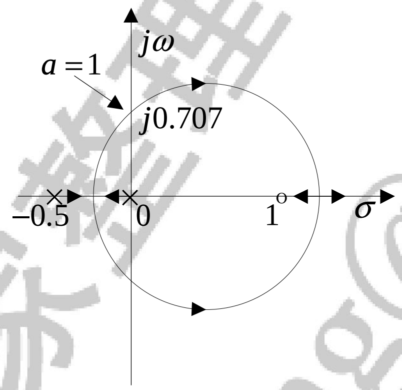
由开环传递函数易知其闭环特征方程为

$$2s^2 - as + s + a = 0$$

易求得其等效开环传递函数为

$$W_{keq}(s) = \frac{a(1-s)}{s(2s+1)} = \frac{0.5a(1-s)}{s(s+0.5)}$$

绘制零度根轨迹如下图所示



根轨迹与虚轴交点由方程$-2\omega^2 - ja\omega + j\omega + a = 0$**确定，解得**$\omega \approx 0.707$，$a = 1$，**交点坐标为** $s_{1,2} = \pm j0.707$。**则当**$0 < a < 1$**时系统稳定，当**$a \geq 1$**时系统不稳定。**

五、（20 **分**）

解：标准二阶系统$0 < \xi < 1$**时，频域指标与时域指标之间的关系为**

截止频率：$\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+(2\xi)^2} - 2\xi^2}$；**相位裕度：**$\gamma(\omega_c) = \arctan\dfrac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{1+(2\xi)^2} - 2\xi^2}}$；**频带宽度：**

$\omega_b = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4}}$；**谐振频率：** $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}, (0 < \xi \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2})$；**谐振峰值：**

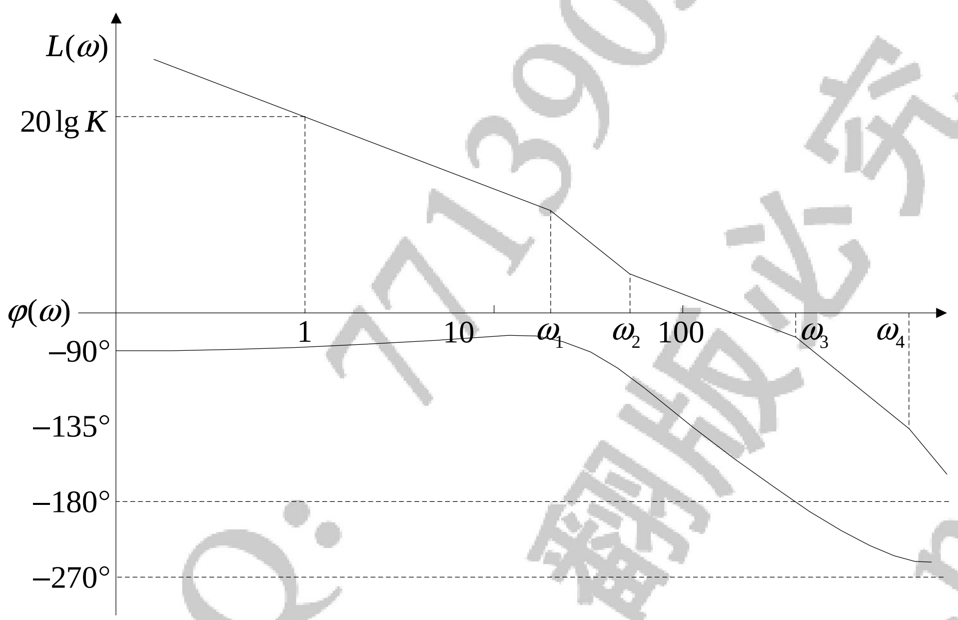
$M_p = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, (0 < \xi \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2})$。

由开环传递函数知系统为 I 型系统，且 $20\lg K = 20\lg 500 = 53.98$ **；交接频率为** $\omega_1 = 20$ **，斜率下降** $+20\text{dB/dec}$ **；** $\omega_2 = 59.88$ **，斜率上升** 20dB/dec **；** $\omega_3 = 400$ **，斜率下降** 20dB/dec **；** $\omega_4 = 1000$ **，斜率下降** 20dB/dec **。**

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90° + \arctan 0.0167\omega - \arctan 0.05\omega - \arctan 0.0025\omega - \arctan 0.001\omega$$

绘制 Bode **图如下图所示**



易求得截止频率为 $\omega_c = 167$ **，相位穿越频率为** $\omega_j = 595.66$ **，则相位裕度和幅值裕度分别为**

$$\begin{cases} \gamma(\omega_c) = 180° + \varphi(\omega_c) = 44.96° \\ GM = -20\lg\left|W_k(j\omega_j)\right| = 17.4 \end{cases}$$

六、（20 **分）**

解：校正装置是为改善系统性能指标而以串联、反馈或前馈等连接方式与未校正系统相连，构成新的满足指标要求的物理设备。其作用是改善系统性能指标，使其达到预定的性能要求。

由于 $K_v = \lim_{s\to 0} sW_k(s) = 2K = 20$ **，则取** $K = 10$ **，采用串联超前校正，校正装置传递函数为**

$$W_c(s) = \frac{Ts+1}{\frac{1}{\gamma_d}Ts+1} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \dfrac{1}{T} \\ \omega_2 = \dfrac{\gamma_d}{T} \end{cases}$$

校正前系统的截止频率为 $\omega_c = 2\sqrt{10} = 6.32$ **，则相位裕度为** $\gamma(\omega_c) = 180° + \varphi(\omega_c) = 17.77°$ **，若要求相位裕度** $\gamma(\omega_c') \ge 50°$ **，则** $\varphi_{\max} \ge 50° - 17.77° = 32.23°$ **，不妨取** $\varphi_{\max} = 40°$ **，则**

$$\gamma_d = \frac{1+\sin\varphi_{\max}}{1-\sin\varphi_{\max}} = 4.6$$

令 $\omega_c' = \sqrt{\omega_1\omega_2} = \omega_1\sqrt{\gamma_d}$ **，由于当** $\omega = \omega_c'$ $A'(\omega_c') = 1$ **，且** ω_c'/ω_1 ? $1, \omega_c'/\omega_2 = 1$ **，那么**

$$A'(\omega_c') = \frac{20 g\frac{\omega_c'}{\omega_1}}{\omega_c' g\frac{\omega_c'}{2}} = 1 \Rightarrow \omega_1 = 4.32, \omega_c' = 9.26, \omega_2 = 19.85$$

则校正装置为

$$W_c(s)=\frac{\frac{1}{4.32}s+1}{\frac{1}{19.85}s+1}$$

校正后装置为

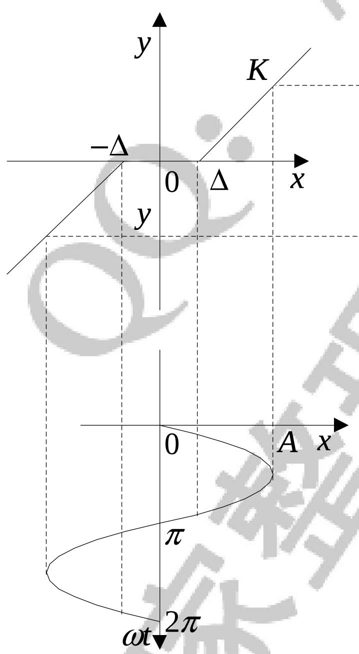
$$W'(s)=\frac{20(\frac{1}{4.32}s+1)}{s(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{19.85}s+1)}$$

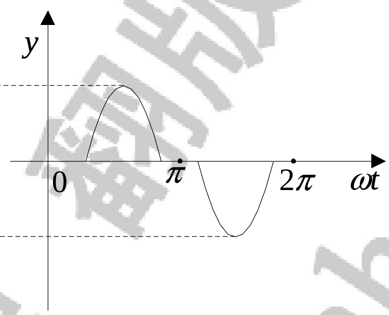
验证 $\gamma(\omega_c')=52.17°$ **，由于** $\omega_j\to+\infty$ **，显然** $\mathrm{GM}\geq 10\mathrm{dB}$

七、（20 分）

解：由于非线性系统会产生自振，因此相应的相平面上会出现一条鼓励的封闭曲线，曲线附近的相轨迹都渐进的趋向这条封闭曲线，或从这条封闭曲线离开。这条特殊的相轨迹就是极限环。

死区特性如图所示





$$y=\begin{cases}K(x-\Delta),\ x\geq\Delta\\0,\ |x|<\Delta\\K(x-\Delta),\ x\geq\Delta\end{cases}$$

由于 y **为奇对称函数，则** $C_1=0$ **，** $\varphi_1=0$ **，且**

$$B_1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}y(t)\sin\omega td(\omega t)=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}KA\sin^2\omega td(\omega t)=\frac{2KA}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\Delta}{A}+\frac{\Delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}\right)$$

则描述函数为

$$N(A)=\frac{B_1}{A}=\frac{2K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{\Delta}{A}+\frac{\Delta}{A}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{A}\right)^2}\right)$$

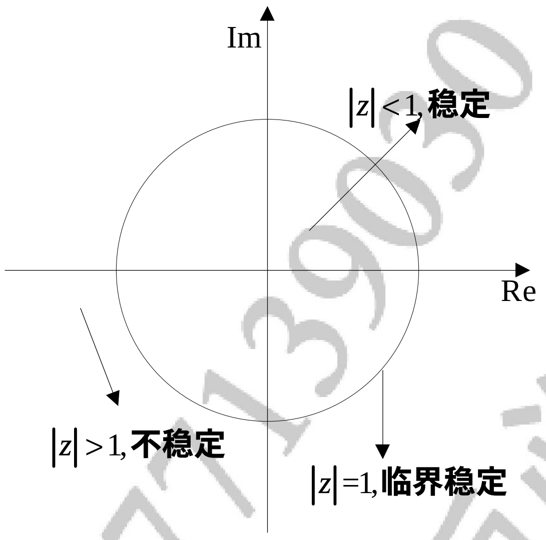
八、（20 分）

解：如图所示，离散系统闭环特征方程的所有根都位于 z **平面单位圆内时系统稳定。**

未校正时，开环脉冲传递函数为

$$W_k(z)=\mathrm{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s^2}\right]=\frac{T}{z-1}$$

易知其闭环特征方程为$z-1+T=0$，解得闭环极点为$z=1-T$。则当$|z|=|1-T|<1(T>1)$，即$1<T<2$时系统稳定。



按最少拍设计，当$x_r(t)=t$时$W_e(z)=(1-z^{-1})^2$，则闭环脉冲传递函数为

$$W_B(z)=\frac{W_k(z)D(z)}{1+W_k(z)D(z)}=1-(1-z^{-1})^2$$

控制器表达式为

$$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_k(z)W_e(z)}=\frac{2z-1}{T(z-1)}$$

输出信号Z变换为

$$X_c(z)=W_B(z)X_r(z)=\frac{T(2z-1)}{z(z-1)^2}$$

展开成泰勒级数如下

$$X_c(z)=2z^{-2}+3z^{-3}+\cdots+nz^{-n}+\cdots$$