计算机控制系统

第5章 数字控制器的直接设计方法

信息学院 · 谭树彬
tanshubin@ise.neu.edu.cn

2012年 6月

数字控制器:

模拟设计方法（离散控制器）
1、模拟控制器的离散化
2、PID控制器
3、Smith预估控制器

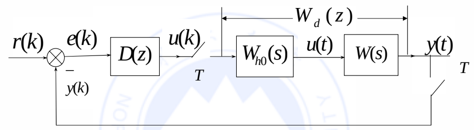
直接设计方法（离散对象）
1、根轨迹设计方法
2、频率响应设计方法
3、解析设计方法 —— （1）最小拍控制 （2）大林算法

本章内容:

- 设计基本原理
- 最小拍控制器的设计方法
- 最小拍控制器的工程化改进
- 大林算法（Dahlin）
- 大林算法工程应用中关键参数的选择
- 数字控制器的程序实现

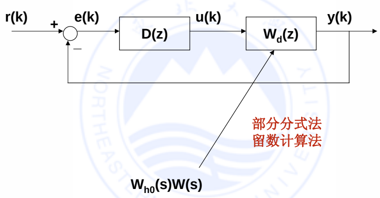
5.2 设计基本原理

计算机控制系统的基本结构：



离散化设计方法——把连续部分离散化，把整个系统变成离散化系统，直接设计数字控制器*D(z)*——直接数字控制设计方法

直接数字化设计方法

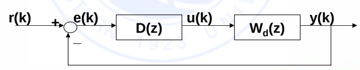


闭环系统传递函数：

$$W_B(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=\frac{D(z)W_d(z)}{1+D(z)W_d(z)} \qquad (1)$$

闭环系统误差传递函数：

$$W_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+D(z)W_d(z)}=1-W_B(z) \qquad (2)$$



于是得到：

$$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]}=\frac{W_B(z)}{W_d(z)W_e(z)}=\frac{1-W_e(z)}{W_d(z)W_e(z)} \quad (3)$$

设计步骤：

(1) 确定$W_d(z)$；

(2) 确定$W_B(z)$或$W_e(z)$；

(3) 计算得到D(z)；

(4) 编制控制算法（差分方程）。

问题：如何给定$W_B(z)$或$W_e(z)$?

(1) 考虑D(z)的物理可实现性 $D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{z^2+z+1}{z-1}$

(2) 考虑闭环系统的稳定性（y(k)和u(k)收敛）

(3) 考虑满足系统的静态指标的要求：准确性

(4) 考虑满足系统的动态指标的要求：

(a) 强调 调节时间：最小拍控制

(b) 强调 超调量：大林算法

5.3 最小拍控制器的设计

定义：

最小拍控制为时间最优控制，即闭环控制系统对典型输入信号 在最少的采样周期内达到稳定，且系统在采样点上的输出能够准确地跟踪输入信号，不存在稳态误差。

1、简单对象最小拍控制器设计

广义对象的脉冲传递函数$W_d(z)$:

（1）是稳定的，即在单位圆上或圆外没有极点；

（2）最小相位系统，即在单位圆上或圆外没有零点和极点；

（3）不含有纯滞后环节。

思想：

根据稳态误差为零，且拍数最小的原则给定$W_e(z)=1-W_B(z)$，从而确定控制器D(z)。

$$\begin{aligned}E(z)&=R(z)-Y(z)\\&=[1-W_B(z)]R(z)\\&=e(0)+e(1)z^{-1}+e(2)z^{-2}+\cdots\end{aligned}$$

典型输入的通用表达式可以写成：

$$R(z)=\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} \quad (4)$$

（1）单位阶跃输入：

$$r(t)=1(t),\quad R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

（2）单位速度输入：

$$r(t)=t,\quad R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$R(z)=\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}$$

（3）加速度输入：

$$r(t)=\frac{1}{2}t^2,\quad R(z)=\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

于是得到系统误差为：

$$E(z)=W_e(z)R(z)=W_e(z)\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}=[1-W_B(z)]\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} \qquad (5)$$

系统稳态误差为：

$$e(\infty)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})E(z)=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})[1-W_B(z)]\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m} \qquad (6)$$

于是得到：

$$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^M F(z) \qquad (7)$$

其中： $M\geq m$

$$E(z)=[1-W_B(z)]\frac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}$$

为实现时间最优的最小拍控制，取

$$M=m,\quad F(z)=1$$

于是得到：

$$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^m \qquad W_B(z)=1-(1-z^{-1})^m \qquad (8)$$

所以最小拍控制是与输入有关的时间最优控制。

（1）单位阶跃输入：m=1

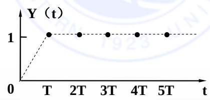
$$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^m$$

$$E(z)=W_e(z)R(z)=(1-z^{-1})(\frac{1}{1-z^{-1}})=1+0\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-2}+\cdots$$

$$e(0)=1,\quad e(1)=e(2)=\cdots=e(n)=0$$

$$Y(z)=W_B(z)R(z)=z^{-1}\times\frac{1}{1-z^{-1}}=z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

$$\therefore\quad Y(1)=Y(2)=Y(3)=\cdots=1$$



（2）单位速度输入：m=2

$$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^m$$

$$E(z)=W_e(z)R(z)$$

$$=(1-z^{-1})^2\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$=0\cdot z^{-0}+T\cdot z^{-1}+0\cdot z^{-2}+\cdots$$

$$e(0)=0,\ e(1)=T,\ e(2)=\cdots=e(n)=0$$

（3）加速度输入：m=3

$$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^m$$

$$E(z)=W_e(z)R(z)$$

$$=(1-z^{-1})^3\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

$$=\frac{T^2}{2}z^{-1}+\frac{T^2}{2}z^{-2}$$

$$=0\cdot z^{-0}+\frac{T^2}{2}\cdot z^{-1}+\frac{T^2}{2}\cdot z^{-2}+0\cdot z^{-3}\cdots$$

$$e(0)=0,\quad e(1)=\frac{T^2}{2},\quad e(2)=\frac{T^2}{2},\quad e(3)=e(4)=\cdots+e(n)=0$$

表5.1 三种典型输入的最小拍系统

$r(t)$	$1-W_B(z)$	$W_B(z)$	$D(z)$	t_s
$1(t)$	$1-z^{-1}$	z^{-1}	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})W_d(z)}$	T
t	$(1-z^{-1})^2$	$2z^{-1}-z^{-2}$	$\frac{2z^{-1}-z^{-2}}{(1-z^{-1})^2W_d(z)}$	2T
$\frac{t^2}{2}$	$(1-z^{-1})^3$	$3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}$	$\frac{3z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}}{(1-z^{-1})^3W_d(z)}$	3T

$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^M F(z)$ 无静差 ＋ 快速性

最小拍控制系统数字控制器的设计步骤：

(1) 根据被控对象的数学模型求出广义对象的脉冲传递函数$W_d(z)$；

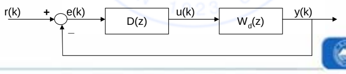
(2) 根据输入信号类型，查上表确定偏差脉冲传递函数$1-W_B(z)$；

(3) 将$W_d(z)$、$1-W_B(z)$ 代入

$$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]} \qquad (9)$$

进行变换运算，即可求出数字控制器的脉冲传递函数；

(4) 根据结果，求出输出序列及画出其响应曲线等。



例题讲解

例5.1： 被控对象的传递函数

$$W(s)=\frac{2}{s(1+0.5s)}$$

采样周期 $T=0.5s$ ，采用零阶保持器，试设计在单位速度输入时的最小拍数字控制器。

解： 根据解题步骤：

(1) 写出该系统的广义对象脉冲传递函数

$$W_d(z)=Z[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{2}{s(1+0.5s)}]=Z[(1-e^{-Ts})\frac{4}{s^2(s+2)}]$$

$$=(1-z^{-1})[\frac{2Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}-\frac{1}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}]$$

$$=\frac{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

(2) 输入 r(t)=t，查表5.1得到：

$$1-W_B(z)=(1-z^{-1})^2 \qquad W_B(z)=2z^{-1}-z^{-2}$$

(3) 控制器的脉冲传递函数

$$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]}=\frac{5.435(1-0.5z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.718z^{-1})}$$

(4) 当输入为单位速度信号时，系统输出序列的变换

$$Y(z)=W_B(z)R(z)=(2z^{-1}-z^{-2})\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$=z^{-2}+1.5z^{-3}+2z^{-4}+2.5z^{-5}+\cdots$$

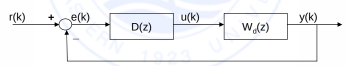
上式中各项系数即为**y(t)**在各个采样时刻的数值。

$$y(0)=0,\ y(T)=0,\ y(2T)=1,\ y(3T)=1.5,\ \cdots$$

<u>思考：</u>

输入为单位速度信号时，控制信号输出序列U(z).

$$U(z)=u(0)+u(1)z^{-1}+u(2)z^{-2}+u(3)z^{-3}+\cdots$$



求$U(z)$：

$$U(z)=\frac{Y(z)}{W_d(z)}=\frac{W_B(z)}{W_d(z)}R(z)$$

$$W_B(z)=2z^{-1}-z^{-2}$$

$$W_d(z)=\frac{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

$$R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

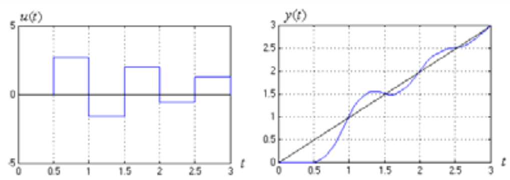
$$U(z)=\frac{Y(z)}{W_d(z)}=\frac{W_B(z)}{W_d(z)}R(z)$$

$$U(z)=(2z^{-1}-z^{-2})\cdot\frac{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}\cdot\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

$$=5.435T\frac{z^{-1}-0.868z^{-2}+0.184z^{-3}}{1-0.282z^{-1}-0.718z^{-2}}$$

$$=2.717z^{-1}-1.593z^{-2}+2.00z^{-3}-0.579z^{-4}+1.275z^{-5}+\cdots$$

单位速度输入时系统控制信号与响应信号

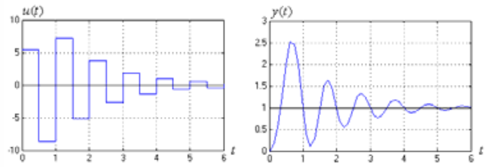


$$U(z)=2.717z^{-1}-1.593z^{-2}+2.00z^{-3}-0.579z^{-4}+1.275z^{-5}+\cdots$$

$$Y(z)=z^{-2}+1.5z^{-3}+2z^{-4}+2.5z^{-5}+\cdots$$

$$W(s)=\frac{2}{s(1+0.5s)}$$

当输入为单位阶跃时：

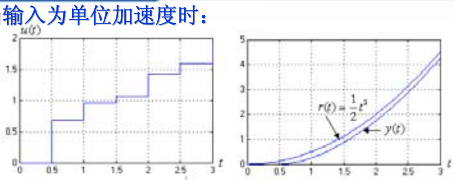


$$U(z)=\frac{Y(z)}{W_d(z)}=\frac{1}{W_d(z)}W_B(z)R(z)=\frac{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}\cdot(2z^{-1}-z^{-2})\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$=5.435\frac{1-0.868z^{-1}+0.184z^{-2}}{1+0.718z^{-1}}=5.435-8.511z^{-1}+7.191z^{-2}+\cdots$$

$$Y(z)=W_B(z)R(z)=(2z^{-1}-z^{-2})\frac{1}{1-z^{-1}}=2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

当输入为单位加速度时：



$$U(z)=\frac{Y(z)}{W_d(z)}=\frac{1}{W_d(z)}W_B(z)R(z)=\frac{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}\cdot(2z^{-1}-z^{-2})\cdot\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}$$

$$=0.679\frac{z^{-1}+0.132z^{-2}-0.684z^{-3}+0.184z^{-4}}{1-1.282z^{-1}-0.436z^{-2}+0.718z^{-3}}=0.679z^{-1}+0.960z^{-2}+1.063z^{-3}+\cdots$$

$$Y(z)=W_B(z)R(z)=(2z^{-1}-z^{-2})\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}=0.25z^{-2}+0.875z^{-3}+1.75z^{-4}+\cdots$$

$$e(\infty)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})W_e(z)R(z)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})(1-z^{-1})^2\frac{T^2z^{-1}(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})^3}=0.25$$

结 论：

- 当系统为单位速度输入时，经过两拍以后，输出量完全等于输入采样值，但在各采样点之间还存在着一定的偏差，即存在着一定的纹波；
- 按某种典型输入设计的最小拍系统，当输入形式改变时，系统的性能变坏，输出响应不一定理想。这说明最小拍系统对输入信号的变化适应性较差。

一般来说，针对一种典型的输入函数设计，用于次数较低的输入函数时，系统将出现较大的超调，响应时间也会增，但在采样时刻的误差为零。

反之，当一种典型的最少拍特性用于次数较高的输入函数时，输出将不能完全跟踪输入以致产生稳态误差。

练习：

$$W_d(z)=\frac{0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

(1) 设计 单位速度输入时 最小拍控制器D(z)；

(2) 求系统在输出采样时刻的值；

(3) 分析对单位阶跃输入和单位加速度输入的响应。

2、复杂对象最小拍控制器设计

广义对象的脉冲传递函数$W_d(z)$：

（1）不稳定，即在单位圆上或圆外有极点；

（2）非最小相位系统，即在单位圆上或圆外有零点；

（3）含有纯滞后环节。

在最小拍控制器设计时，当简单对象的三个假设条件不满足时，如何进行设计？

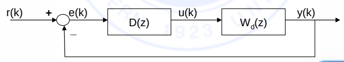
思想：

根据可实现性、稳定性和稳态误差为零的要求给定$W_B(z)$，从而确定控制器$D(z)$。

如图5.1所示的系统得到

$$W_B(z)=\frac{D(z)W_d(z)}{1+D(z)W_d(z)}=D(z)W_d(z)W_e(z)$$

当$W_d(z)$中含有Z平面单位圆外或圆上的极点时，并且该极点没有与$D(z)$或$W_e(z)$的零点完全对消的时，则它将成为$W_B(z)$的极点，从而造成整个闭环系统不稳定。



又 $Y(z)=W_B(z)R(z)=W_d(z)U(z)$

得到 $U(z)=\dfrac{W_B(z)}{W_d(z)}R(z)$

当$W_d(z)$中含有Z平面单位圆外或圆上的零点时，并且该极点没有与$D(z)$或$W_e(z)$的极点完全对消的时，则它将成为不稳定的极点，从而使数字控制器的输出趋向于无穷大，造成整个闭环系统不稳定。

为保证闭环系统稳定，当$W_d(z)$中含有Z平面单位圆外或圆上的零、极点时，它应被$D(z)$ 或$W_e(z)$的极、零点相抵消；

而用$D(z)$的零点或极点抵消$W_d(z)$的极点或零点是不允许的，因为简单地利用$D(z)$的零点或极点去对消$W_d(z)$中的不稳定零点或极点，从理论上来说可以得到一个稳定的闭环系统，但这种稳定是建立在零极点完全对消基础上的；

当系统参数产生漂移，或者对象参数辨识有误差时，这种零极点对消就不可能准确实现，从而引起闭环系统不稳定。

所以，建立在这种零极点对消基础上的稳定系统实际上是不可能稳定工作的，没有实用价值。

设广义对象的脉冲传递函数为

$$W_d(z)=\frac{z^{-L}(p_0+p_1z^{-1}+\cdots+p_mz^{-m})}{q_0+q_1z^{-1}+\cdots+q_nz^{-n}}=z^{-L}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{q}(1-b_iz^{-1})}{\prod_{j=1}^{p}(1-a_jz^{-1})}W_d'(z)$$

其中，b_1，b_2，…，b_q是$W_d(z)$的q个不稳定零点；a_1，a_2，…，a_p是$W_d(z)$的p个不稳定极点；$W_d'(z)$是$W_d(z)$中不包含Z平面单位圆外或圆上的极、零点时的部分；z^{-L}为$W_d(z)$中含有的纯滞后环节。

为避免发生$D(z)$与$W_d(z)$的不稳定零极点对消，应满足如下稳定性条件：

1．$W_e(z)$的零点应包含$W_d(z)$中全部不稳定的极点

$$W_e(z)=\prod_{j=1}^{p}(1-a_jz^{-1})\cdot F_1(z)$$

其中，$F_1(z)$ 是关于z^{-1}的多项式且不包含$W_d(z)$中的不稳定极点a_j（除（1，j0）外）。

$$W_B(z)=\frac{D(z)W_d(z)}{1+D(z)W_d(z)}=D(z)W_d(z)W_e(z)$$

2．$W_d(z)$在单位圆上或圆的零点应全部包含在 希望闭环传递函数$W_B(z)$的零点中

$$W_B(z)=\prod_{i=1}^{q}(1-b_iz^{-1})\cdot F_2'(z)$$

其中，$F_2'(z)$是关于z^{-1}的多项式，且不包含$W_d(z)$中的不稳定零点b_i。

$$U(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)}R(z)$$

3．如果$W_d(z)$中含有纯滞后的环节即z^{-L}（L为整数），则$W_d(z)$分子中的z^{-L}因子应全部包含在$W_B(z)$分子中

$$W_B(z)=z^{-L}\prod_{i=1}^{q}(1-b_iz^{-1})\cdot F_2(z)$$

其中，$F_2(z)$是关于z^{-1}的多项式，且不包含$W_d(z)$中的纯滞后的环节和不稳定零点b_i。

其结果会导致系统过渡过程时间延长。

$$W_B(z)=D(z)W_d(z)W_e(z)$$

因此，满足了上述稳定性条件后的$D(z)$不再包含$W_d(z)$的Z平面单位圆上或单位圆外零、极点和纯滞后的环节。

$$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_e(z)W_d(z)}=\frac{F_2(z)}{F_1(z)W_d'(z)}$$

根据前面分析，已知：

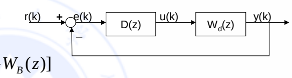
$$W_e(z)=\prod_{j=1}^{p}(1-a_jz^{-1})\cdot F_1(z)$$

$$W_d(z)=z^{-L}\cdot\frac{\prod_{i=1}^{q}(1-b_iz^{-1})}{\prod_{j=1}^{p}(1-a_jz^{-1})}W_d'(z)$$

$$W_B(z)=z^{-L}\prod_{i=1}^{q}(1-b_iz^{-1})\cdot F_2(z)$$

由于 $D(z)=\dfrac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]}$

可以导出



$$W_B(z)=D(z)W_d(z)[1-W_B(z)]$$

令 $D(z)=\dfrac{S(z)}{R(z)}$ 以及

$$W_d(z)=z^{-L}\frac{B(z)}{A(z)}=z^{-L}\frac{B^-(z)B^+(z)}{A^-(z)A^+(z)}$$ L 为纯滞后时间

由前述可知：$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^MF(z)$

于是得到：

$$W_B(z)=\underbrace{\frac{S(z)}{R(z)}}_{D(z)}\cdot\underbrace{z^{-L}\frac{B^-(z)B^+(z)}{A^-(z)A^+(z)}}_{W_d(z)}\cdot\underbrace{(1-z^{-1})^M F(z)}_{W_e(z)}$$

分析：

1. 对象不稳定的极点 $A^-(z)$
2. 对象不稳定的零点 $B^-(z)$
3. 纯滞后因子 z^{-L}

于是，得到结论 $W_B(z)=\frac{S(z)}{R(z)}\cdot z^{-L}\frac{B^-(z)B^+(z)}{A^-(z)A^+(z)}\cdot(1-z^{-1})^M F(z)$

（1）对象不稳定的极点(除(1，j0)外)由F(z)，即 $W_e(z)=1-W_B(z)$来抵消；

（2）对象不稳定的零点和纯滞后因子，需包含在闭环系统传递函数$W_B(z)$中；

（3）$W_B(z)=1-W_e(z)$与$W_d(z)$的z^{-1}因子个数相同。

现象：

控制器可以实现，系统稳定，但是系统调整时间延长。

假设广义对象 中有p个不稳定的极点，q个不稳定的零点，纯滞后时间为L，则系统闭环脉冲传递函数$W_B(z)$的一般形式为:

稳态误差的要求

可实现性的要求

$$W_B(z)=[\underbrace{f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+\cdots+f_mz^{-m}}_{\text{输入典型函数决定}}+\underbrace{f_{m+1}z^{-(m+1)}+\cdots+f_{m+p}z^{-(m+p)}}_{\text{对象不稳定的极点个数}\ p\ \text{决定}}]\underbrace{(1+\beta_1z^{-1})\cdots(1+\beta_qz^{-1})}_{\text{对象不稳定的零点因子式}}\underbrace{z^{-L}}_{\text{对象纯滞后环节}}$$

稳定性的要求

系数$f_1 \sim f_{m+p}$ 可由下列 m+p 个方程联立求解得到：

$$\left.\begin{aligned}&W_B(z)\big|_{z=1}=1\\&\left.\frac{dW_B(z)}{dz}\right|_{z=1}=0\\&\vdots\\&\left.\frac{d^{m-1}W_B(z)}{dz^{m-1}}\right|_{z=1}=0\\&W_B(z)\big|_{z=a_1}=1\\&\vdots\\&W_B(z)\big|_{z=a_p}=1\end{aligned}\right\}$$

$$1-W_B(z)=(1-z^{-1})^m F_1(z)$$

$1-W_B(z)$包含对象不稳定的极点：

$$1-W_B(z)=(1-a_1z^{-1})(1-a_2z^{-1})\cdots(1-a_pz^{-1})F_2(z)$$

例题讲解

例5.2：$W_d(z)=\frac{2.2z^{-1}}{1+1.2z^{-1}}$ 设计 阶跃输入下的最小拍控制器。

解：（1）不考虑对象不稳定的极点时，对于单位阶跃输入，有

$$1-W_B(z)=W_e(z)=1-z^{-1}\qquad W_B(z)=1-W_e(z)=z^{-1}$$

于是 $D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]}=\frac{0.4545(1+1.2z^{-1})}{1-z^{-1}}$

输出信号序列为

$$Y(z)=W_B(z)R(z)=z^{-1}+z^{-2}+\cdots$$

系统似乎稳定。

若对象产生漂移，变为

$$W_d^*(z)=\frac{2.2z^{-1}}{1+1.3z^{-1}}\qquad W_d(z)=\frac{2.2z^{-1}}{1+1.2z^{-1}}$$

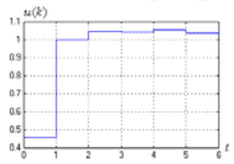
则在控制器不变的情况下，有

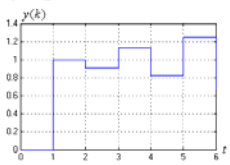
$$W_B^*(z)=\frac{W_d^*(z)D(z)}{1+W_d^*(z)D(z)}=\frac{z^{-1}(1+1.2z^{-1})}{1+1.3z^{-1}-0.1z^{-2}}$$

输出信号序列为

$$Y^*(z)=W_B^*(z)R(z)$$
$$=z^{-1}+0.9z^{-2}+1.13z^{-3}+0.821z^{-4}+1.246z^{-5}+\cdots$$

输出信号发散，系统不稳定。





（2）考虑对象不稳定的极点时，对于单位阶跃输入有

$$W_B(z)=[f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+\cdots+f_mz^{-m}+$$
$$f_{m+1}z^{-(m+1)}+\cdots+f_{m+p}z^{-(m+p)}](1+\beta_1z^{-1})\cdots(1+\beta_qz^{-1})z^{-L}$$

$p=1$, $q=0$, $L=0$

$$W_B(z)=f_1z^{-1}+f_2z^{-2}$$

$$W_d(z)=\frac{2.2z^{-1}}{1+1.2z^{-1}}$$

于是有：
$$\begin{cases} W_B(z)|_{z=1}=f_1+f_2=1 \\ W_B(z)|_{z=-1.2}=-\dfrac{f_1}{1.2}+\dfrac{f_2}{1.44}=1 \end{cases}$$

可得： $f_1=-0.2$ $f_2=1.2$

于是 $W_B(z)=-0.2z^{-1}+1.2z^{-2}$

$$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)[1-W_B(z)]}=\frac{-0.2z^{-1}+1.2z^{-2}}{\frac{2.2z^{-1}}{1+1.2z^{-1}}(1+1.2z^{-1})(1-z^{-1})}=-\frac{0.091(1-6z^{-1})}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)=W_B(z)R(z)=\frac{-0.2z^{-1}+1.2z^{-2}}{1-z^{-1}}=-0.2z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots$$

系统稳定。

若对象产生漂移，变为

$$W_d^*(z)=\frac{2.2z^{-1}}{1+1.3z^{-1}}$$

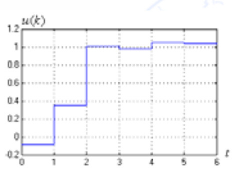
则在控制器不变的情况下，有

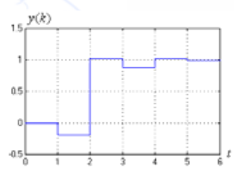
$$W_B^*(z)=\frac{D(z)W_d^*(z)}{1+D(z)W_d^*(z)}=-\frac{0.2z^{-1}(1-6z^{-1})}{1+0.1z^{-1}-0.1z^{-2}}$$

输出信号序列为

$$Y(z)=W_B^*(z)R(z)=\frac{-0.2z^{-1}(1-6z^{-1})}{(1+0.1z^{-1}-0.1z^{-2})(1-z^{-1})}$$
$$=-0.2z^{-1}+1.02z^{-2}+0.878z^{-3}+1.0142z^{-4}+\cdots$$

可知在被控对象参数变化后，闭环系统仍然稳定。





练习：

例题5.3 最小拍控制器的设计。

例题5.4 最小拍控制器的设计。

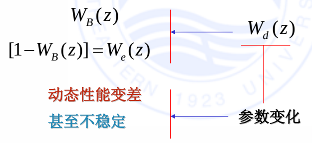
5.4 最小拍控制器的工程化改进

1、最小拍控制系统存在的问题

（1）最小拍控制系统的输出在采样点之间可能存在纹波；

（2）最小拍控制系统对各种典型输入函数的适应性差；

（3）最小拍控制系统对被控对象的模型参数变化敏感。



按最少拍控制系统设计出来的闭环系统，在有限拍后即进入稳态，这时闭环系统输出在采样时刻精确地跟踪输入信号；

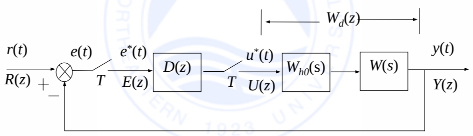
然而，进一步研究可以发现，虽然在采样时刻闭环系统输出与所跟踪的参考输入一致，但是在两个采样时刻之间，系统的输出存在着纹波或振荡；

这种纹波不但影响系统的控制性能，产生过大的超调和持续振荡，而且还增加了系统功率损耗和机械磨损。

对于下图所示的系统，设

$$G_0(s)=\frac{10}{s(s+1)}$$

T*=1s**，输入为单位阶跃信号，试确定最少拍系统的数字控制器D(z)***，并分析系统输出响应。



最少拍系统框图

解：

$$W_d(Z)=\mathbb{Z}\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10}{s(s+1)}\right]=\frac{3.68z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

$$W_B(z)=z^{-1}\quad,\quad W_e(z)=1-z^{-1}$$

$$D(z)=\frac{W_B(z)}{W_e(z)W_d(z)}=\frac{0.272(1-0.368z^{-1})}{1+0.718z^{-1}}$$

利用广义**Z**变换。可求出系统的输出响应。

$$W_d(z,m)=10(1-z^{-1})\left[\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{(m-1)z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{e^{-m}z^{-1}}{1-e^{-1}z^{-1}}\right]$$

设 ***m*=0.5**，则

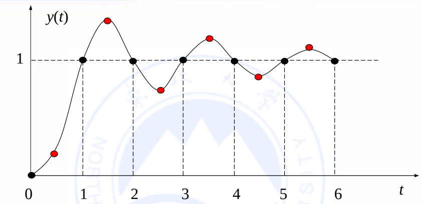
$$W_d(z,m)=\frac{10z^{-2}}{1-z^{-1}}-5z^{-1}+\frac{6.065z^{-1}(1-z^{-1})}{1-0.368z^{-1}}$$

$$W_B(z,m)=\frac{D(z)W_d(z,m)}{1+D(z)W_d(z)}$$

$$Y(z,m)=W_B(z,m)R(z)=\frac{0.289z^{-1}(1+4.42z^{-1}+0.512z^{-2})}{1-0.282z^{-1}-0.718z^{-2}}$$

$$=0.289z^{-1}+1.359z^{-2}+0.738z^{-3}+1.184z^{-4}+0.864z^{-5}+1.093z^{-6}+\cdots$$

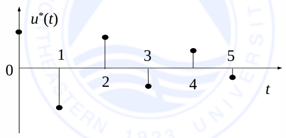
其输出响应如下图所示，可以看出系统输出存在波纹。



最少拍系统输出响应

进一步分析可知，产生波纹的原因是数字控制器***D(z)***输出序列$u^*(t)$在系统输出$y^*(t)$过渡过程结束后，还在围绕其平均值不停地波动。

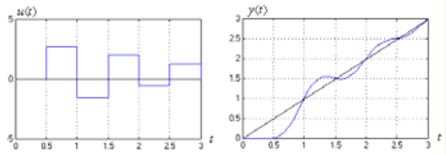
$$U(z)=D(z)E(z)=D(z)W_e(z)R(z)=\frac{0.272(1-0.368z^{-1})}{1+0.718z^{-1}}$$
$$=0.272-0.295z^{-1}+0.212z^{-2}-0.152z^{-3}+0.109z^{-4}-0.078z^{-5}+\cdots$$



数字控制器输出序列

2、最小拍无纹波控制器的设计

最少拍无纹波设计的要求：在典型输入作用下，经过尽可能 少的采样周期以后，输出跟随输入，而且在非采样点上也没有纹波。



2、最小拍无纹波控制器的设计

问题归结为：设计一个系统在典型输入作用下，控制器输出**u(*n*T)**经过有限个周期以后，达到相对稳定，即为一个恒定值。

$$U(z)=u(0)+u(1)z^{-1}+\cdots+u(n)(z^{-n}+z^{-(n+1)}+\cdots)$$
$$=u(0)+u(1)z^{-1}+\cdots+u(n)z^{-n}(1+z^{-1}+z^{-2}+\cdots)$$
$$=u(0)+u(1)z^{-1}+\cdots+u(n)z^{-n}\frac{1}{1-z^{-1}}$$
$$=\frac{u'(0)+u'(1)z^{-1}+\cdots+u'(n)z^{-n}}{1-z^{-1}}=\frac{U'(z)}{1-z^{-1}}$$

已知 $U(z)=\dfrac{Y(z)}{W(z)}=\dfrac{W_B(z)}{W(z)}R(z)$

设 $W(z)=\dfrac{M(z)}{N(z)}$ 且 $R(z)=\dfrac{A(z)}{(1-z^{-1})^m}$

得到：

$$U(z)=\frac{N(z)W_B(z)}{M(z)}R(z)=\frac{N(z)W_B(z)A(z)}{M(z)(1-z^{-1})^m}$$
$$=\frac{N(z)W_B(z)}{M(z)(1-z^{-1})^{m-1}}\cdot\frac{A(z)}{1-z^{-1}}$$

$$U(z)=\frac{N(z)W_B(z)}{M(z)(1-z^{-1})^{m-1}}\cdot\frac{A(z)}{1-z^{-1}}$$

已经得到： $U(z)=\dfrac{U'(z)}{1-z^{-1}}$

二者比较

得到：

$$W_B(z)=M(z)F(z)$$
$$N(z)=(1-z^{-1})^{m-1}N'(z)$$

其中 $F(z)$ 和 $N'(z)$ 为关于 z^{-1} 的多项式。

因此，实现无纹波最小拍控制的条件：

（1）被控对象至少含有m-1个积分环节；

$N(z)=(1-z^{-1})^{m-1}N'(z)$

（2）满足有纹波控制的稳定性和控制器物理可实现性的要求；

（3）闭环系统传递函数模型$W_B(z)$包含对象W(z)所有的零点。 $W_B(z)=M(z)F(z)$ $W(z)=\dfrac{M(z)}{N(z)}$

假设广义对象 中有p个不稳定的极点，n个零点，纯滞后时间为L，则系统闭环脉冲传递函数$W_B(z)$ 的一般形式为：

稳态误差的要求

$$W_B(z)=[\underbrace{f_1 z^{-1}+f_2 z^{-2}+\cdots+f_m z^{-m}}_{\text{输入典型函数决定}}+$$

可实现性的要求

$$\underbrace{f_{m+1}z^{-(m+1)}+\cdots+f_{m+p}z^{-(m+p)}}_{\text{对象不稳定的极点个数 }p\text{ 决定}}]\underbrace{(1+\beta_1 z^{-1})\cdots(1+\beta_n z^{-1})}_{\text{对象所有的零点因子式}}\underbrace{z^{-L}}_{\text{对象纯滞后环节}}$$

稳定性和无纹波的要求

系数f_1~f_{m+p} 可由下列 m+p 个方程联立求解得到：

$$\left.\begin{aligned}
&W_B(z)\big|_{z=1}=1\\
&\left.\frac{dW_B(z)}{dz}\right|_{z=1}=0\\
&\vdots\\
&\left.\frac{d^{m-1}W_B(z)}{dz^{m-1}}\right|_{z=1}=0\\
&W_B(z)\big|_{z=a_1}=1\\
&\vdots\\
&W_B(z)\big|_{z=a_p}=1
\end{aligned}\right\}$$

$$1-W_B(z)=(1-z^{-1})^m F_1(z)$$

1-$W_B(z)$包含对象不稳定的极点：

$$1-W_B(z)=(1-a_1 z^{-1})(1-a_2 z^{-1})\cdots(1-a_p z^{-1})F_2(z)$$

例题讲解

例5.5：被控对象的传递函数

$$W(s)=\frac{2}{s(1+0.5s)}$$

采样周期 $T=0.5s$ ，采用零阶保持器，试设计在单位阶跃输入时的最小拍无纹波系统。

解：根据解题步骤：

(1) 写出该系统的广义对象脉冲传递函数

$$W_d(z)=Z[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{2}{s(1+0.5s)}]=Z[(1-e^{-Ts})\frac{4}{s^2(s+2)}]$$

$$=\frac{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

（2）确定闭环系统脉冲传递函数$W_B(z)$

输入函数为单位阶跃： $R(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$ ， m=1

脉冲传递函数 $W_B(z)$ 的表达式为：

$$W_B(z)=\underbrace{f_1 z^{-1}}_{\text{输入决定}}\underbrace{(1+0.718z^{-1})}_{\text{对象零点}}$$

由 $W_B(z)\big|_{z=1}=1$ 得到： $f_1=\frac{1}{1.718}=0.582$

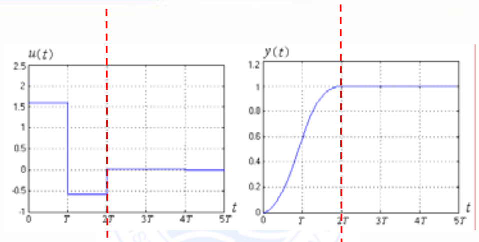
所以有： $W_B(z)=0.582z^{-1}(1+0.718z^{-1})$

$$1-W_B(z)=(1-z^{-1})(1+0.418z^{-1})$$

于是得到控制器模型为：

$$D(z)=\frac{1}{W_d(z)}\cdot\frac{W_B(z)}{1-W_B(z)}=\frac{1.582(1-0.368z^{-1})}{1+0.418z^{-1}}$$

系统的控制量与输出量波形：



波形分析：系统的调整时间为2T，比最小拍系统拖长一个采样周期，但是系统输出响应没有纹波。

练习：

例题5.6 最小拍无纹波控制器的设计。

3、针对输入信号类型敏感问题的改进

采用阻尼因子法:

在最小拍控制系统设计的基础上，通过在系统的闭环脉冲传递函数中，引入附加的极点因子，又称为阻尼因子。

系统过渡过程时间增加，但整个系统的输出响应比较平稳，对不同输入信号的适应性有所改善。

设 $W_B^{'}(z)$ 是最小拍控制系统的闭环脉冲传递函数,在引入 n 个附加极点因子后，闭环脉冲传递函数为:

$$W_B(z)=\frac{W_B^{'}(z)}{\prod_{i=1}^{n}(1-c_i z^{-1})}$$

c_i 是引入的第 个附加极点。

一般情况下，取一个附加极点，即 $n=1$。

于是闭环脉冲传递函数的具体形式为：

$$W_B(z)=\frac{W_B^{'}(z)}{1-cz^{-1}}=\frac{[f_1z^{-1}+\cdots+f_{m+p}z^{-(m+p)}](1+\beta_1z^{-1})\cdots(1+\beta_qz^{-1})z^{-L}}{1-cz^{-1}}$$

—— 有纹波系统

$$W_B(z)=\frac{W_B^{'}(z)}{1-cz^{-1}}=\frac{[f_1z^{-1}+\cdots+f_{m+p}z^{-(m+p)}](1+\beta_1z^{-1})\cdots(1+\beta_nz^{-1})z^{-L}}{1-cz^{-1}}$$

—— 无纹波系统

设计控制器 $D(z)$ 思路：

设定附加的 c 极点 → 确定原闭环系统传递函数模型 $W_B^{'}(z)$

有纹波/无纹波

得到 $D(z)$ ← 结合 $W_d(z)$

引入附加极点时应遵循的原则:

(1) 必须满足系统的稳定性要求，即 $|c|<1$

(2) 应注意尽量不引起系统振荡，故它应位于平面上单位圆内的正实轴上，即 $0<c<1$

为什么?

(3) 应兼顾系统响应的快速性和对输入信号类型的适应性两个方面的性能。

c大：快速性差，适应性强;

c小：快速性好，适应性弱。

(4) 系统的性能应反复调试满足

方法：通过调整附加极点c的位置

例题讲解

例5.1：被控对象的传递函数

$$W(s)=\frac{2}{s(1+0.5s)}$$

采样周期 $T=0.5s$ ，采用零阶保持器。

试在单位速度信号输入作用下的最小拍控制系统的基础上，取附加极点 **c=0.5**，按阻尼因子法，进行系统算法的改进设计；并分析系统在单位阶跃、单位速度及单位加速度信号输入作用下的系统输出与系统偏差。

解：（1）确定广义对象脉冲传递函数。从例5.1已知

$$W_d(z)=\frac{0.368z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.368z^{-1})}$$

（2）确定加阻尼因子的系统闭环脉冲传递函数：

$$W_B(z)=\frac{f_1z^{-1}+f_2z^{-2}}{1-cz^{-1}}$$ （单位速度输入）

$$W_B(z)\big|_{z=1}=1 \qquad \left.\frac{dW_B(z)}{dz}\right|_{z=1}=0$$

$$f_1=2-c=1.5 \qquad f_2=-1$$

于是得到:

$$W_B(z)=\frac{1.5z^{-1}-z^{-2}}{1-0.5z^{-1}}$$

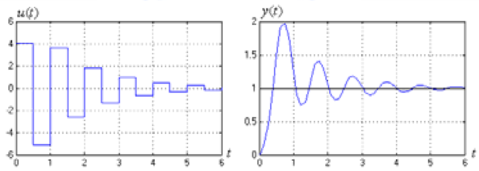
$$1-W_B(z)=W_e(z)=1-\frac{1.5z^{-1}-z^{-2}}{1-0.5z^{-1}}=\frac{(1-z^{-1})^2}{1-0.5z^{-1}}$$

（3）数字控制器 **D(z)** 计算

$$D(z)=\frac{1}{W_d(z)}\frac{W_B(z)}{W_e(z)}=\frac{4.076(1-0.67z^{-1})(1-0.368z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.718z^{-1})}$$

单位阶跃 输入时系统控制信号和响应信号:

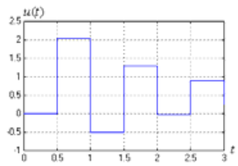
$$E_1(z)=1-0.5z^{-1}-0.25z^{-2}-0.13z^{-3}-\cdots \qquad E_1(\infty)=0$$

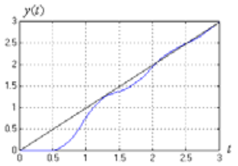


分析：超调量明显减小(和图5.3相比)，但调节时间增加为无限拍，系统不再具有“最少拍且无差”性能。

单位速度 输入时系统控制信号与响应信号：

$$E_2(z)=0.5z^{-1}+0.25z^{-2}+0.125z^{-3}+\cdots \qquad E_2(\infty)=0$$

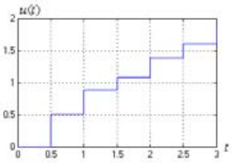


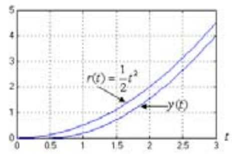


分析：调节时间增加为无限拍，系统不具有“最少拍且无差”性能。

单位加速度 输入时系统控制信号与响应信号：

$$E_3(z)=0.125z^{-1}+0.3125z^{-2}+0.4063z^{-3}+\cdots \qquad E_3(\infty)=0.5$$





分析：系统的稳态误差增大。

结论：

按阻尼因子法设计，即引入附加极点进行系统改进设计后，系统输出响应的过渡过程时间不再为最少拍，但可以改善系统对输入信号的适应性。

输入信号比设计信号阶次**m**低 ⟶ 动态性能得以改善

输入信号比设计信号阶次**m**高 ⟶ 稳态误差增大

4、针对模型参数变化敏感问题的改进

采用有限拍设计方法：

在最小拍控制系统设计的基础上，把系统闭环脉冲传递函数 z^{-1} 的幂次适当地提高 1~2 阶。

增加控制器设计的参数自由度，从而可以降低系统对模型参数变化的敏感性。

例5.8 设广义被控对象的脉冲传递函数为：

$$W_d(z)=\frac{0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

采样周期 **T=1s**，试设计单位速度信号输入作用下的最小拍数字控制器的算法。

考察当广义被控对象的脉冲传递函数变为：

$$W_d^{'}(z)=\frac{0.6z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$

系统输出响应的变化情况，并采用有限拍控制算法进行相应的改进。

解：（1）按照最小拍控制系统的设计原则，设

$$W_B(z)=f_1z^{-1}+f_2z^{-2}$$

于是得到

$$W_B(z)=2z^{-1}-z^{-2}$$

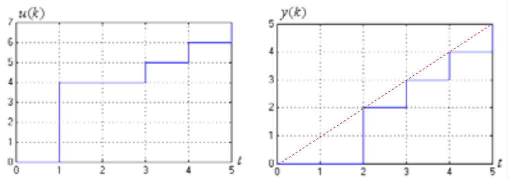
$$1-W_B(z)=W_e(z)=(1-z^{-1})^2$$

数字控制器的控制算法为：

$$D(z)=\frac{1}{W_d(z)}\cdot\frac{W_B(z)}{1-W_B(z)}=\frac{4(1-0.5z^{-1})^2}{(1-z^{-1})^2}$$

（2）系统控制序列u(k)和输出序列y(k)为

$$Y(z)=2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+5z^{-5}+\cdots$$



稳态误差： $e(\infty)=0$

过渡过程时间 T_s=2T

（3）应用最小拍控制时，被控对象模型发生变化：

$$W_d(z)=\frac{0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \longrightarrow W_d'(z)=\frac{0.6z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$

此时，D(z)不变，闭环系统的脉冲传递函数变为：

$$W_B'(z)=\frac{D(z)W_d'(z)}{1+D(z)W_d'(z)}=\frac{2.4z^{-1}(1-0.5z^{-1})^2}{1-0.6z^{-2}+0.2z^{-3}}$$

原来： $W_B(z)=2z^{-1}-z^{-2}$

极点：z=0的二重极点

变化后：

$$W_B'(z)=\frac{D(z)W_d'(z)}{1+D(z)W_d'(z)}=\frac{2.4z^{-1}(1-0.5z^{-1})^2}{1-0.6z^{-2}+0.2z^{-3}}$$

极点：3个

$z_1=-0.906$

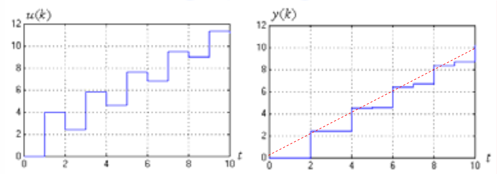
对系统性能影响较大的极点

（靠近单位圆）

$z_{2,3}=0.253\pm j0.12$

系统控制序列u(k)和输出序列y(k)为：

$$Y'(z)=2.4z^{-2}+2.4z^{-3}+4.44z^{-4}+4.56z^{-5}+6.38z^{-6}+\cdots$$



结果：导致系统输出响应的动态性能变差，偏差加大，甚至可能造成系统的不稳定。

（4）采用有限拍控制算法进行控制器的设计。

被控对象模型参数未发生变化时，按照有限拍控制算法的设计原则，取

$$W_B(z)=f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+f_3z^{-3}$$

增加1拍，多1个参数自由度

$W_B(z)\big|_{z=1}=1 \longrightarrow f_1+f_2+f_3=1$

$\left.\frac{dW_B(z)}{dz}\right|_{z=1}=0 \longrightarrow -f_1-2f_2-3f_3=0$

2个方程，3个参数，有无数解

任取 $f_1=1.5$ （根据经验和试凑）

得到： $f_2=0$ $f_3=-0.5$

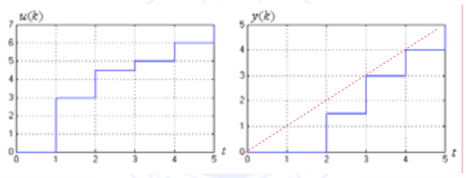
于是有： $W_B(z)=1.5z^{-1}-0.5z^{-3}$

相应数字控制器的控制算法为：

$$D(z)=\frac{1}{W_d(z)}\frac{W_B(z)}{1-W_B(z)}=\frac{3(1-0.5z^{-1})(1-0.67z^{-2})}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-3}}$$

（5）系统控制序列u(k)和输出序列y(k)为

$$Y(z)=1.5z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+5z^{-5}+\cdots$$



稳态误差： $e(\infty)=0$

过渡过程时间 T_s=3T

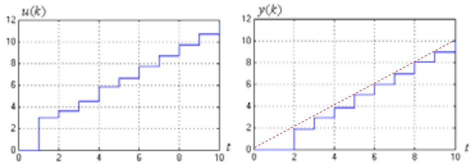
（6）应用有限拍控制时，被控对象模型发生变化的情况。

$$W_d(z)=\frac{0.5z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \longrightarrow W_d^{'}(z)=\frac{0.6z^{-1}}{1-0.4z^{-1}}$$

$$W_B^{'}(z)=\frac{D(z)W_d^{'}(z)}{1+D(z)W_d^{'}(z)}=\frac{1.8z^{-1}(1-0.5z^{-1})(1-0.33z^{-2})}{1-0.1z^{-1}-0.3z^{-2}-0.1z^{-3}+0.1z^{-4}}$$

系统控制序列u(k)和输出序列y(k)为

$$Y^{'}(z)=1.8z^{-2}+2.88z^{-3}+3.83z^{-4}+5.03z^{-5}+5.96z^{-6}+\cdots$$



结果：与最小拍控制且被控对象模型参数未发生变化时基本一致，达到了抑制模型参数变化的目的。

5.5 大林算法（Dahlin）

研究意义:

最小拍控制：时间最优，其它动态指标无约束。

大林算法：约束超调量，对调节时间不加以严格限制。

适合于滞后较小的情况

1、大林算法设计原理

被控对象为带有纯滞后的一阶或二阶环节：

$$W(s)=\frac{K}{T_1s+1}e^{-\tau s}, \quad \tau=NT$$

$$W(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}e^{-\tau s}, \quad \tau=NT$$

大林算法的设计目标是设计一个合适的数字控制器，使整个闭环系统的传递函数相当于一个带有纯滞后的一阶惯性环节，即：

滞后与被控对象相同

$$W_B(s)=\frac{e^{-\tau s}}{T_0s+1}, \quad \tau=NT$$

T_0比T_1和T_2中最小的还要小。

整个系统的闭环脉冲传递函数为：

$$W_B(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{e^{-NTs}}{T_0s+1}\right]=\frac{z^{-(N+1)}(1-e^{-T/T_0})}{1-e^{-T/T_0}z^{-1}}$$

为什么加零阶保持器？

原因：

（1）加入零阶保持器：保证离散前后的阶跃响应相等

（2）不加零阶保持器：保证离散前后的脉冲响应相等

得到控制器传递函数为：

$$D(z)=\frac{1}{W_d(z)}\cdot\frac{W_B(z)}{1-W_B(z)}=\frac{1}{W_d(z)}\cdot\frac{z^{-(N+1)}(1-e^{-T/T_0})}{1-e^{-T/T_0}z^{-1}-(1-e^{-T/T_0})z^{-(N+1)}}$$

对象为具有纯滞后的一阶惯性环节时：

$$W_d(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{Ke^{-NTs}}{T_1s+1}\right]=K\frac{(1-e^{-T/T_1})z^{-(N+1)}}{1-e^{-T/T_1}z^{-1}}$$

得到控制器传递函数为：

$$D(z)=\frac{1}{W_d(z)}\cdot\frac{W_B(z)}{1-W_B(z)}=\frac{(1-e^{-T/T_1}z^{-1})(1-e^{-T/T_0})}{K(1-e^{-T/T_1})[1-e^{-T/T_0}z^{-1}-(1-e^{-T/T_0})z^{-(N+1)}]}$$

对象为具有纯滞后的二阶惯性环节时：

$$W_d(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{Ke^{-NTs}}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\right]=\frac{K(c_1+c_2z^{-1})z^{-(N+1)}}{(1-e^{-T/T_1}z^{-1})(1-e^{-T/T_2}z^{-1})}$$

其中：$c_1=1+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_1}-T_2e^{-T/T_2}\right)$

$c_2=e^{-T(1/T_1+1/T_2)}+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_2}-T_2e^{-T/T_1}\right)$

得到控制器传递函数为：

$$D(z)=\frac{1}{W_d(z)}\cdot\frac{W_B(z)}{1-W_B(z)}=\frac{(1-e^{-T/T_0})(1-e^{-T/T_1}z^{-1})(1-e^{-T/T_2}z^{-1})}{K(c_1+c_2z^{-1})[1-e^{-T/T_0}z^{-1}-(1-e^{-T/T_0})z^{-(N+1)}]}$$

例5.9 已知某控制系统被控对象的传递函数为

$$W(s)=\frac{e^{-s}}{s+1}$$

采样周期 **T=0.5s**，试用大林算法设计数字控制器。

解： 系统广义被控对象传递函数为

$$W_d(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}W(s)=\frac{(1-e^{-0.5s})e^{-s}}{s(s+1)}$$

求得广义被控对象的脉冲传递函数为：

$$W_d(z)=K\frac{(1-e^{-T/T_1})z^{-(N+1)}}{1-e^{-T/T_1}z^{-1}}=z^{-3}\frac{1-e^{-0.5}}{1-e^{-0.5}z^{-1}}=\frac{0.3935z^{-3}}{1-0.6065z^{-1}}$$

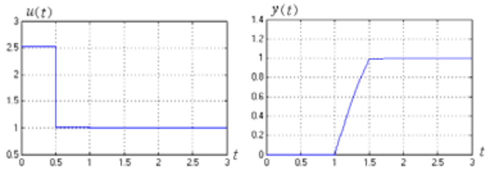
于是得到数字控制器**D(z)**:

$$D(z)=\frac{1}{W_d(z)}\cdot\frac{z^{-(N+1)}(1-e^{-T/T_0})}{1-e^{-T/T_0}z^{-1}-(1-e^{-T/T_0})z^{-(N+1)}}$$

$$=\frac{1-0.6065z^{-1}}{0.3935z^{-3}}\cdot\frac{z^{-3}(1-e^{-5})}{1-e^{-5}z^{-1}-(1-e^{-5})z^{-3}}=\frac{2.524(1-0.6065z^{-1})}{(1-z^{-1})(1+0.9933z^{-1}+0.9933z^{-2})}$$

取 $T_0=0.1$

阶跃输入下系统控制信号序列和阶跃响应序列：



例5.10 被控对象为带有纯滞后的二阶惯性环节

$$W(s)=\frac{10e^{-12s}}{(20s+1)(30s+1)}$$

采样周期 T=2s，试用大林算法设计数字控制器D(z)。

解： 首先计算对象模型离散化后的参数

$$c_1=1+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_1}-T_2e^{-T/T_2}\right)=0.00315$$

$$c_2=e^{-T(1/T_1+1/T_2)}+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_2}-T_2e^{-T/T_1}\right)=0.00298$$

选取闭环传递函数中的时间常数：

$$T_0=10<\min(T_1=20,T_2=30)$$

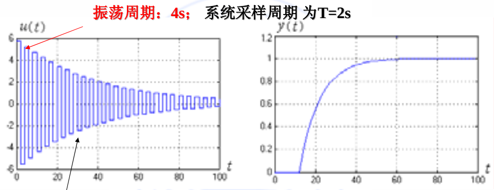
得到数字控制器的传递函数模型：

$$D(z)=\frac{(1-e^{-T/T_0})(1-e^{-T/T_1}z^{-1})(1-e^{-T/T_2}z^{-1})}{K(c_1+c_2z^{-1})[1-e^{-T/T_0}z^{-1}-(1-e^{-T/T_0})z^{-(N+1)}]}$$

$$=\frac{5.7546(1-0.90484z^{-1})(1-0.93551z^{-1})}{(1+0.946z^{-1})(1-0.81873z^{-1}-0.18127z^{-7})}$$

阶跃输入信号下系统控制信号序列和阶跃响应序列：

振荡周期：4s； 系统采样周期 为T=2s



控制量振荡收敛 ⟶ 振铃现象

2、振铃现象及其消除方法

振铃（Ringing）现象：指数字控制器的输出以1/2采样频率大幅度衰减的振荡。

结果：

对系统的输出几乎无任何影响 ⟵ 被控对象中惯性环节的低通滤波特性

增加执行机构的磨损，还有可能影响到系统的稳定性

思考题：

振铃现象与纹波现象的区别与联系？

振铃现象原因分析：

控制器输出 **U(z)** 与参考输入 **R(z)** 之间的关系为：

$$U(z)=\frac{Y(z)}{W_d(z)}=\frac{W_B(z)}{W_d(z)}R(z)=W_u(z)R(z)$$

于是得到：
$$W_u(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)}=\frac{D(z)}{1+D(z)W_d(z)}$$

若$W_u(z)$有或有接近于z=-1的极点，则将引起输出序列u(k)的振荡。

对于带纯滞后的一阶惯性环节有：

$$W_u(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)}=\frac{(1-e^{-T/T_0})(1-e^{-T/T_1}z^{-1})}{K(1-e^{-T/T_1})\underbrace{(1-e^{-T/T_0}z^{-1})}_{\text{大于零}}}$$

已知：

$$W_d(z)=K\frac{(1-e^{-T/T_1})z^{-(N+1)}}{1-e^{-T/T_1}z^{-1}} \qquad W_B(z)=\frac{z^{-(N+1)}(1-e^{-T/T_0})}{1-e^{-T/T_0}z^{-1}}$$

结论：

不存在负实轴上的极点，因此不存在振铃现象。

对于带纯滞后的二阶惯性环节，有

$$W_u(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)}=\frac{(1-e^{-T/T_0})(1-e^{-T/T_1}z^{-1})(1-e^{-T/T_2}z^{-1})}{Kc_1\underbrace{(1-e^{-T/T_0}z^{-1})}_{\text{大于零}}\underbrace{(1+\frac{c_2}{c_1}z^{-1})}_{\text{小于零，且}}}$$

$$c_1=1+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_1}-T_2e^{-T/T_2}\right)$$

$$c_2=e^{-T(1/T_1+1/T_2)}+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_2}-T_2e^{-T/T_1}\right)$$

$$\lim_{T\to 0}\left[-\frac{c_2}{c_1}\right]=-1$$

$$\downarrow$$

结论： 引起振铃现象

振铃幅度RA:

在单位阶跃作用下数字控制器第0拍输出与第1拍输出的差值来衡量振铃现象强烈的程度。

$$U(z)=R(z)W_u(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\bullet\frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots}$$

归一化处理

$$=\frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots}{1+(a_1-1)z^{-1}+(a_2-a_1)z^{-2}+\cdots}$$

$$=1+(b_1-a_1+1)z^{-1}+\cdots$$

对于带纯滞后的二阶惯性环节：

$$RA=1-(b_1-a_1+1)=\frac{c_2}{c_1}-e^{-T/T_0}+e^{-T/T_1}+e^{-T/T_2} \Longrightarrow \lim_{T\to 0}RA=2$$

例A: 设数字控制器 $D(z)=\frac{1}{1+z^{-1}}$ ，求振铃幅度*RA*。

解：数字控制器在单位阶跃信号作用下的输出为

$$U(z)=\frac{1}{1+z^{-1}}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}=1+z^{-2}+z^{-4}+\cdots$$

则 ***RA*=*u*(0)−*u*(1)=1−0=1**

例B: 设数字控制器 $D(z)=\frac{1}{(1+0.5z^{-1})(1-0.2z^{-1})}$ ，求振铃幅度*RA*。

解：数字控制器在单位阶跃信号作用下的输出为

$$U(z)=\frac{1}{(1+0.5z^{-1})(1-0.2z^{-1})}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}=1+0.7z^{-1}+0.89z^{-2}+0.803z^{-3}+\cdots$$

则 ***RA*=*u*(0)−*u*(1)=1−0.7=0.3**

例C： 设数字控制器$D(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.2z^{-1})}$ ，求振铃幅度*RA*。

解：数字控制器在单位阶跃信号作用下的输出为

$$U(z)=\frac{1-0.5z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})(1-0.2z^{-1})}\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}=1+0.2z^{-1}+0.5z^{-2}+0.37z^{-3}+\cdots$$

则 ***RA*=*u*(0)−*u*(1)=1−0.2=0.8**

因 此：

产生振铃现象的原因是数字控制器$D(z)$在z平面上位于$z=-1$附近有极点；

当$z=-1$时，振铃现象最严重；

在单位圆内，离$z=-1$越远，振铃现象越弱；

在单位圆内右半面的极点会减弱振铃现象，而在单位圆内右半面的零点会加剧振铃现象。

消除振铃现象的方法：

找出 **D(z)** 中引起振铃现象的因子（**z=-1** 附近的极点），然后令其中的 **z=1**。

结果：

消除了振铃现象，不影响稳态值，改变了系统动态特性

终值定理

见下页

对于二阶环节：

$$W_u(z)=\frac{W_B(z)}{W_d(z)}=\frac{(1-e^{-T/T_0})(1-e^{-T/T_1}z^{-1})(1-e^{-T/T_2}z^{-1})}{Kc_1(1-e^{-T/T_0}z^{-1})(1+\frac{c_2}{c_1}z^{-1})}$$

目标：消除

方法：消除

$$W_u(z)=\frac{D(z)}{1+D(z)W_d(z)}$$

$$D(z)=\frac{(1-e^{-T/T_0})(1-e^{-T/T_1}z^{-1})(1-e^{-T/T_2}z^{-1})}{K\underline{(c_1+c_2z^{-1})}[1-e^{-T/T_0}z^{-1}-(1-e^{-T/T_0})z^{-(N+1)}]}$$

令z=1

消除振铃极点后控制器的形式为:

$$D(z)=\frac{(1-e^{-T/T_0})(1-e^{-T/T_1}z^{-1})(1-e^{-T/T_2}z^{-1})}{K\underbrace{(1-e^{-T/T_1})(1-e^{-T/T_2})}_{c_1+c_2}[1-e^{-T/T_0}z^{-1}-(1-e^{-T/T_0})z^{-(N+1)}]}$$

$$c_1=1+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_1}-T_2e^{-T/T_2}\right)$$

$$c_2=e^{-T(1/T_1+1/T_2)}+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_2}-T_2e^{-T/T_1}\right)$$

例5.11 对**例5.10**的被控对象，考虑消除振铃现象的影响，试用大林控制算法设计数字控制器**D(z).**

$$W(s)=\frac{10e^{-12s}}{(20s+1)(30s+1)}$$

解：根据**例5.10**，数字控制器传递函数模型为：

$$D(z)=\frac{5.7546(1-0.90484z^{-1})(1-0.93551z^{-1})}{\underline{(1+0.946z^{-1})}(1-0.81873z^{-1}-0.18127z^{-7})}$$

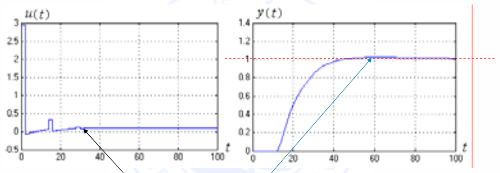
振铃因子，令z=1

于是控制器传递函数模型变为：

$$D(z)=\frac{5.7546(1-0.90484z^{-1})(1-0.93551z^{-1})}{\underline{1.946}(1-0.81873z^{-1}-0.18127z^{-7})}$$

$$=\frac{2.9571(1-0.90484z^{-1})(1-0.93551z^{-1})}{1-0.81873z^{-1}-0.18127z^{-7}}$$

令振铃因子z=1后系统的控制信号和输出信号曲线:



效果：消除了振铃现象

出现了超调，过渡过程时间变长

5.6 大林算法工程应用中关键参数的选择

大林算法在实际应用过程中常面临的问题:

振铃现象：控制量振荡 ⟶ 增加执行机构的磨损

分数时滞：时滞不是采样周期的整数倍

⟶ 控制效果严重恶化，甚至使系统不稳定

原因分析：大林算法是在时滞常数等于采样周期的整数倍的情况下推导得到的

解决方法:

选择合适的采样周期 T 和闭环系统时间常数 T_0 的方法

削弱振铃现象

消除方法：令振铃因子中z=1

解决分数时滞问题

1、解决振铃现象中关键参数的选择

目的:

在尽量削弱振铃幅度的同时，不希望系统的动态性能有太大的改变

与振铃幅度有关的参数:

$$RA = \frac{c_2}{c_1} - e^{-T/T_0} + e^{-T/T_1} + e^{-T/T_2}$$

（1）与T_1、T_2有关：被控对象固有参数，不能改变

（2）与T、T_0有关：设定的参数，可以改变

设计方法:

（1）确定闭环系统的参数T_0，给出振铃幅度RA的指标;

（2）由下式确定采样周期T

$$RA = \frac{c_2}{c_1} - e^{-T/T_0} + e^{-T/T_1} + e^{-T/T_2}$$

如果T有多解，则选择较大的采样周期

为什么？

（3）确定N： $N=\tau/T$

（4）计算对象的脉冲传递函数$W_d(z)$及闭环系统的脉冲传递函数$W_B(z)$；

（5）计算数字控制器的脉冲传递函数$D(z)$。

例5.12 被控对象为：

$$W(s)=\frac{10e^{-12s}}{(20s+1)(30s+1)}$$

考虑振铃现象的影响，试用大林控制算法，通过关键参数选择来设计数字控制器D(z)。

解：（1）根据题意取 $T_0=10$

（2）选择采样周期T。

振铃幅度与采样周期的关系如下：

RA=1.91，T=4s；
RA=1.88，T=5s；
RA=1.85，T=6s；
……

采样周期的加大，振铃幅度并没有明显地减小，因此，选取采样周期T=4s。

（3）确定纯滞后时间与采样周期之比：

$$N=\tau/T=12/4=3$$

（4）确定对象的脉冲传递函数：

$$W_d(z)=\frac{K(c_1+c_2z^{-1})z^{-(N+1)}}{(1-e^{-T/T_1}z^{-1})(1-e^{-T/T_2}z^{-1})}=\frac{0.119z^{-4}(1+0.9076z^{-1})}{(1-0.8187z^{-1})(1-0.8752z^{-1})}$$

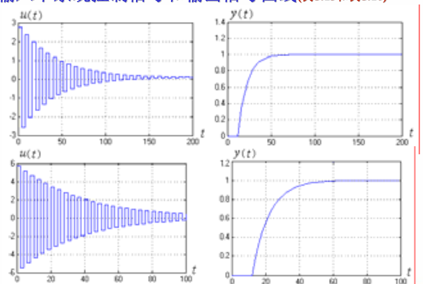
$$c_1=1+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_1}-T_2e^{-T/T_2}\right)=0.0119$$

$$c_2=e^{-T(1/T_1+1/T_2)}+\frac{1}{T_2-T_1}\left(T_1e^{-T/T_2}-T_2e^{-T/T_1}\right)=0.0108$$

（5）数字控制器的传递函数为：

$$D(z)=\frac{2.773(1-0.8187z^{-1})(1-0.8752z^{-1})}{(1+0.9076z^{-1})(1-0.67z^{-1}-0.33z^{-4})}$$

阶跃输入下系统控制信号和输出信号曲线(例5.19和例5.10)



2、解决分数时滞问题中关键参数的选择

（1）分数时滞对系统稳定性的影响

纯滞后一阶惯性环节的大林算法控制器为：

$$D(z)=\frac{(1-a)(1-bz^{-1})}{K(1-b)[1-az^{-1}-(1-a)z^{-N-1}]}$$

式中： $a=e^{-T/T_0}$　　$b=e^{-T/T_1}$

被控对象为： $W(s)=\frac{K}{T_1 s+1}e^{-(N+\rho)Ts}$

ρ 为分数时滞 τ 的小数部分，且 $0\le\rho\le1$

思考：如何求 $W_d(z)$?

$$W_d(z)=Z\left[\frac{1-e^{-sT}}{s}W(s)\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s(T_1s+1)}e^{-(N+\rho)Ts}\right]$$

$$=(1-z^{-1})z^{-N}Z\left[\frac{K}{s(T_1s+1)}e^{-\rho Ts}\right]=K(1-z^{-1})z^{-N}Z\left[\frac{1/T_1}{s(s+1/T_1)}e^{-\rho Ts}\right]$$

第2章表2.3
标准形式6

$$=K(1-z^{-1})z^{-N}\left[\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}-\frac{e^{-(1-\rho)T/T_1}z^{-1}}{1-e^{-T/T_1}z^{-1}}\right]=\frac{b_1+b_2z^{-1}}{1-bz^{-1}}z^{-N-1}$$

其中： $b_1=K(1-b^{1-\rho})$　　$b_2=K(b^{1-\rho}-b)$

根据被控对象模型 $W_d(z)$ 和控制器模型 $D(z)$，求取闭环系统的传递函数，从而得到闭环系统的特征方程为：

$$F(z)=(1-b)z^{N+2}-a(1-b)z^{N+1}$$
$$+(1-a)(b-b^{1-\rho})z+(1-a)(b^{1-\rho}-b)=0$$

由此可知，闭环系统的特征根为 ρ 的函数。

当 ρ 在[0,1]区间内变化时

→ 可能产生不稳定的特征根

目标：

当 ρ 在[0,1]区间内变化时

→ 特征根必须在单位圆内

同理，对于纯滞后二阶惯性环节的大林算法控制器为：

$$D(z)=\frac{(1-a)(1-b_1z^{-1})(1-b_2z^{-1})}{K(c_0+c_1z^{-1})[1-az^{-1}-(1-a)z^{-N-1}]}$$

式中： $a=e^{-T/T_0}$　　$c_0=1-(T_1b_1-T_2b_2)/(T_1-T_2)$

$b_1=e^{-T/T_1}$　　$c_1=b_1b_2-(T_1b_2-T_2b_1)/(T_1-T_2)$

$b_2=e^{-T/T_2}$

广义被控对象脉冲传递函数为：

$$W_d(z)=\frac{K[c_0(\rho)+c_1(\rho)z^{-1}+c_2(\rho)z^{-2}]z^{-N-1}}{(1-b_1z^{-1})(1-b_2z^{-1})}$$

其中： $\tau=(N+\rho)T \quad 0\le\rho\le 1$

$$c_0(\rho)=1-(T_1b_1^{1-\rho}-T_2b_2^{1-\rho})/(T_1-T_2)$$

$$c_1(\rho)=\left[T_1b_1(b_1^{-\rho}-1)-T_2b_2(b_2^{-\rho}-1)\right]/(T_1-T_2)$$
$$+b_1b_2(T_1b_1^{-\rho}-T_2b_2^{-\rho})/(T_1-T_2)-(T_1b_2-T_2b_1)/(T_1-T_2)$$

$$c_2(\rho)=b_1b_2-b_1b_2(T_1b_1^{-\rho}-T_2b_2^{-\rho})/(T_1-T_2)$$

根据被控对象模型$W_d(z)$和控制器模型$D(z)$，得到闭环系统的特征方程为：

$$F(z)=c_0z^{N+3}+(c_1-ac_0)z^{N+2}-ac_1z^{N+1}+(1-a)[c_0(\rho)-c_0]z^2$$
$$+(1-a)\left[c_1(\rho)-c_1\right]z+(1-a)c_2(\rho)=0$$

由此可知，闭环系统的特征根仍然为 ρ 的函数。

由于纯滞后二阶惯性环节的特征方程比较麻烦，因此下面仅以纯滞后一阶惯性环节为对象进行研究。

（2）基于朱利稳定性判据的关键参数选择

绝对稳定性：

当被控系统时滞常数在[NT, NT+1] 区间内任意变化时，由大林算法数字控制器构成的闭环系统总是稳定的。

⇓

由朱利稳定判据判定系统的绝对稳定性：

当 ρ 在 [0, 1] 区间内任意变化时，特征方程 F(z) 必须同时满足 n+1 个不等式的约束条件，其中特征方程的阶次 n=N+2。

定理5.1 当 ρ 在[0，1]区间内任意变化时，闭环系统总具有绝对稳定性的必要条件是：

$$a>(2-\sqrt{2})/2 \quad\Rightarrow\quad T_0>T/\ln(2+\sqrt{2})$$

其中： $a=e^{-T/T_0}$

证明：略。

定理5.2 若N为奇数，当 ρ 在[0，1]区间内任意变化时，闭环系统总具有绝对稳定性的必要条件是：

$$a>1/3 \quad\Rightarrow\quad T_0>T/\ln 3$$

其中： $a=e^{-T/T_0}$

证明：略。

推论5.1 当N=1时，闭环系统总具有绝对稳定性的充要条件是：

$$a>1/3 \quad\Rightarrow\quad T_0>T/\ln 3$$

其中： $a=e^{-T/T_0}$

证明：略。

推论5.2 当N=2时，闭环系统总具有绝对稳定性的**充分条件**是：

$$a \ge (3-\sqrt{5})/2 \quad \Rightarrow \quad T_0 \ge T/\ln\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$$

其中： $a = e^{-T/T_0}$

证明：略。

例5.13 已知某被控对象为带纯滞后的一阶惯性环节，参数分别为 T_1=30s，τ在10~20s之间任意变化。若取 T=10s，T_0=9s，当 τ=19.999 99s 时，即N=1，ρ=0.999 99，分析系统的稳定性。

解：利用计算机辅助分析得到朱利阵列表和分析结果

表5.3 朱利阵列表

z^0	z^1	z^2	z^3
0. 190 152 6	-0. 190 152 6	-0. 093 315 91	0. 283 468 7
0. 283 468 7	-0. 093 315 91	-0. 190 152 6	0. 190 152 6
-0. 044 196 52	-0. 009 705 858	0. 036 158 05	—

$F(z) = 0.2834687z^3 - 0.09331591z^2 - 0.1901526z + 0.1901526$

于是有 $F(1) = 0.19015279 > 0 \quad (-1)^3 F(-1) = -0.00352059 < 0$

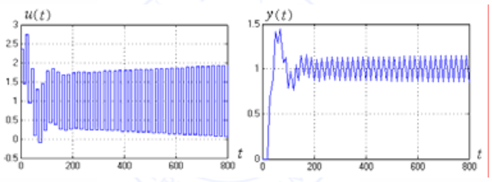
不满足 $(-1)^n F(-1) > 0$

结论：由朱利判据知，该系统是不稳定的。

此时，有 $T/\ln 3 = 9.1 > T_0 = 9$

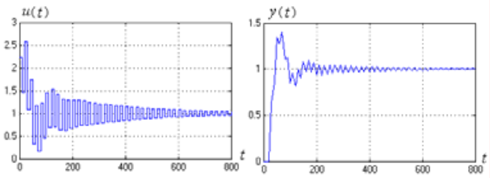
不满足推论5.1的条件，因此该系统不具有绝对稳定性。

阶跃输入下系统控制信号与输出信号曲线：



根据推论5.1，取： $T/\ln 3 = 9.1 < \underbrace{T_0 = 10}_{增大}$

此时满足朱利稳定判据，则系统稳定。



5.7 数字控制器的程序实现

数字控制器实现途径 → 硬件电路实现

数字控制器实现途径 → 软件实现

灵活方便，常被采用

- 直接程序设计法 → 减少计算机延时
- 串联程序设计法 → 简化程序设计
- 并行程序设计法 → 简化程序设计

1、直接程序设计法

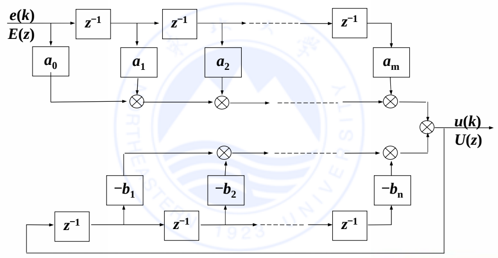
数字控制器 D(z) 通常可表示为：

$$D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_mz^{-m}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_nz^{-n}}=\frac{\sum_{i=0}^{m}a_iz^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{n}b_jz^{-j}}\qquad (m\le n)$$

于是得到 $U(z)=\sum_{i=0}^{m}a_iE(z)z^{-i}-\sum_{j=1}^{n}b_jU(z)z^{-j}$

其差分方程为： $u(k)=\sum_{i=0}^{m}a_ie(k-i)-\sum_{j=1}^{n}b_ju(k-j)$

$$u(k)=\sum_{i=0}^{m}a_ie(k-i)-\sum_{j=1}^{n}b_ju(k-j)$$



直接程序法方块图

2、串联程序设计法

数字控制器 D(z) 表示为零极点的形式：

$$D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{K(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_n)}\qquad m\le n$$

令

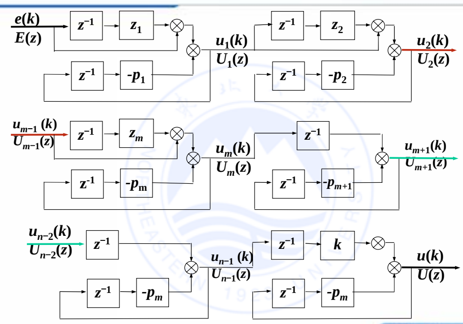
$$\begin{cases}D_1(z)=\frac{U_1(z)}{E(z)}=\frac{z+z_1}{z+p_1}\\ D_2(z)=\frac{U_2(z)}{U_1(z)}=\frac{z+z_2}{z+p_2}\\ \vdots\\ D_m(z)=\frac{U_m(z)}{U_{m-1}(z)}=\frac{z+z_m}{z+p_m}\\ D_{m+1}(z)=\frac{U_{m+1}(z)}{U_m(z)}=\frac{1}{z+p_{m+1}}\\ \vdots\\ D_n(z)=\frac{U(z)}{U_{n-1}(z)}=\frac{K}{z+p_n}\end{cases}$$

则：

$$D(z)=D_1(z)D_2(z)\cdots D_n(z)$$

写成差分方程的形式为:

$$\left.\begin{array}{c}u_1(k)=e(k)+z_1e(k-1)-p_1u_1(k-1)\\ u_2(k)=u_1(k)+z_2u_1(k-1)-p_2u_2(k-1)\\ \vdots\\ u_m(k)=u_{m-1}(k-1)+z_mu_{m-1}(k-1)-p_mu_m(k-1)\\ \\ u_{m+1}(k)=u_m(k-1)-p_{m+1}u_{m+1}(k-1)\\ \vdots\\ u(k)=Ku_{n-1}(k-1)-p_nu(k-1)\end{array}\right\}$$



串行程序法方块图

3、并行程序设计法

数字控制器 D(z) 表示为部分分式的形式：

$$D(z)=\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{k_1z^{-1}}{1+p_1z^{-1}}+\frac{k_2z^{-1}}{1+p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{k_nz^{-1}}{1+p_nz^{-1}}$$

令

$$\left.\begin{aligned}D_1(z)&=\frac{U_1(z)}{E(z)}=\frac{k_1z^{-1}}{1+p_1z^{-1}}\\D_2(z)&=\frac{U_2(z)}{E(z)}=\frac{k_2z^{-1}}{1+p_2z^{-1}}\\&\vdots\\D_n(z)&=\frac{U_n(z)}{E(z)}=\frac{k_nz^{-1}}{1+p_nz^{-1}}\end{aligned}\right\}$$

则有 $D(z)=D_1(z)+D_2(z)+\cdots+D_n(z)$

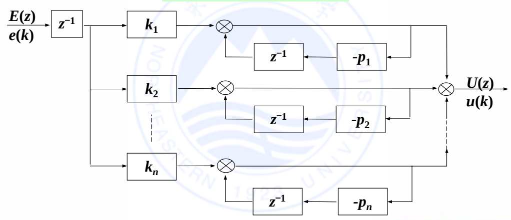
写成差分方程的形式为:

$$u(k)=u_1(k)+u_2(k)+\cdots+u_n(k)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}u_1(k)&=k_1e(k-1)-p_1u_1(k-1)\\u_2(k)&=k_2e(k-1)-p_2u_2(k-1)\\&\vdots\\u_n(k)&=k_ne(k-1)-p_nu_n(k-1)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}u_1(k)&=k_1e(k-1)-p_1u_1(k-1)\\u_2(k)&=k_2e(k-1)-p_2u_2(k-1)\\&\vdots\\u_n(k)&=k_ne(k-1)-p_nu_n(k-1)\end{aligned}\right\}$$



并行程序法方块图

例子： 设数字控制器为

$$D(z)=\frac{5(1+0.25z^{-1})}{(1-0.5z^{-1})(1-0.1z^{-1})}$$

写出计算机实现的控制算法。

解：

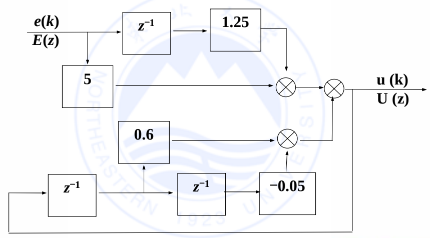
1） 直接程序法

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{5+1.25z^{-1}}{1-0.6z^{-1}+0.05z^{-2}}$$

$$u(k)=5e(k)+1.25e(k-1)+0.6u(k-1)-0.05u(k-2)$$

其方块图下图所示。

$$u(k)=5e(k)+1.25e(k-1)+0.6u(k-1)-0.05u(k-2)$$



直接程序法

2) 串行程序法

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{1+0.25z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}\cdot\frac{5}{1-0.1z^{-1}}=\frac{U_1(z)}{E(z)}\cdot\frac{U(z)}{U_1(z)}$$

$$U_1(z)=E(z)+0.25z^{-1}E(z)+0.5z^{-1}U(z)$$

$$u_1(k)=e(k)+0.25e(k-1)+0.5u(k-1)$$

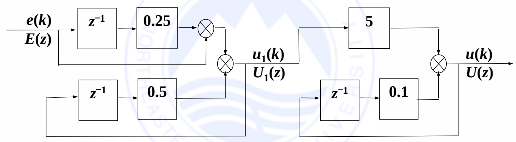
$$U(z)=5U_1(z)+0.1z^{-1}U(z)$$

$$u(k)=5u_1(k)+0.1u(k-1)$$

其方块图下图所示。

$$u_1(k)=e(k)+0.25e(k-1)+0.5u(k-1)$$

$$u(k)=5u_1(k)+0.1u(k-1)$$



串行程序法

3) 并行程序法

$$\frac{U(z)}{E(z)}=\frac{9.375}{1-0.5z^{-1}}-\frac{4.375}{1-0.1z^{-1}}=\frac{U_1(z)}{E(z)}-\frac{U_2(z)}{E(z)}$$

$$U(z)=U_1(z)-U_2(z)$$

$$U_1(z)=9.375E(z)+0.5z^{-1}U_1(z)$$

$$u_1(k)=9.375e(k)+0.5u_1(k-1)$$

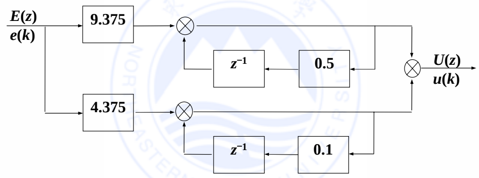
$$U_2(z)=4.375E(z)+0.1z^{-1}U_2(z)$$

$$u_2(k)=4.375e(k)+0.1u_2(k-1)$$

其方块图下图所示。

$$u_1(k)=9.375e(k)+0.5u_1(k-1)$$

$$u_2(k)=4.375e(k)+0.1u_2(k-1)$$



并行程序法

·本章结束·