定积分计算（下）

——定积分计算中的综合题

综合题型一 被积函数中含有变限积分函数的定积分计算

当需要计算的定积分的被积函数中，含有变限积分函数时，我们的处理手段有两种——

① **利用分部积分**：将被积函数中，除了变限积分以外的其余函数全部凑到 d 后面去，然后分部积分——这样就可以消掉变上限积分函数了；

② **利用二重积分**：毕竟是积分号里套积分，所以明显可以视为累次积分，然后交换积分次序即可。

例题 1 设 $f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x$

类题 1 设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

类题 2 设$f'(x)=\arctan(x-1)^2$，且$f(0)=0$，求$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

类题 3 已知函数$f(x)$在$\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right]$连续，在$\left(0,\dfrac{3}{2}\pi\right)$内是$\dfrac{\cos x}{2x-3\pi}$的一个原函数，$f(0)=0$

(1) 求$f(x)$在$\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right]$上的平均值　　(2)证明$f(x)$在$\left(0,\dfrac{3}{2}\pi\right)$内有唯一零点

当然，也并非所有变限积分出现在被积函数中时，都要采用分部积分，比如下面这道经典题——

例题 2 设$f(x)$为非负连续函数，满足$f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\sin^4 x$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x$

注：该题的思想非常不错，类似的还有下面这道题目，请大家自行练习——

类题 设$f(x)$为连续函数，且$x>-1$时，$f(x)\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+1\right]=\dfrac{x\mathrm{e}^x}{2(1+x)^2}$，求$f(x)$

综合题型二 被积函数中含有导函数的定积分计算

这种题目，只需要把导函数凑到 d 后面，然后分部积分即可。这种题过于简单，大家可以自行练习。

例题 设$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=4$，$f(2)=1$，$f'(2)=0$，求$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x$

综合题型三 已知一个积分，求另一个积分

要建立两个积分的关系，我们有两种方法——

① 利用分部积分，因为分部积分会产生一个新的积分。

对于这种题目，在分部积分的时候，到底把谁凑到 d 后面去，把谁留下来，不需要在遵循“反对幂指三”之类的口诀，没用！这类题你要看清楚你要计算的积分和题干已知的积分，观察二者的区别与联系，然后去思考到底把谁凑进去才能够使两个积分之间相互转化，大家学东西的时候千万不要学的太死了！

② 换元法

例题 1 设 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} \mathrm{d}x = A$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x+1} \mathrm{d}x$

例题 2 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$，求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \mathrm{d}x$ 、$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} \mathrm{d}x$、$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin(x+y)}{x(x+y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$

注：积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ 是著名的狄利克雷积分，考研学生只需要知道它收敛，且收敛于 $\frac{\pi}{2}$ 即可，至于为什么等于 $\frac{\pi}{2}$，需要用到含参积分，是超纲内容。 **二重积分也是超纲内容，给有兴趣的同学研究！**

例题 3 设$f(x)$连续，证明：$\int_1^a f\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_1^a f\left(x+\frac{a^2}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，其中$a>0$.

例题 4 设$f(x)$连续，证明：$\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln 2\int_1^4 f\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

综合题型四 利用“定积分的结果是一个数字”来求解某些待定函数的问题

一般来说，求函数表达式往往会想到建立微分方程（这确实是常规思路），但是还有一类更简单的题——

$f(x)$的具体形式已经完全告诉，只是其表达式中含有一个未知的积分，我们只需要想办法把这个积分求解出来，那么这个函数的表达式就完全确定下来了。具体的解题方法有 2 种：

① 等式两边再次积分，可得到一个关于该积分的方程，即可解出该待定积分；② 待定系数法无脑秒杀。

例题 1 设$f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x+2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求$f(x)$

例题 2 设$f(x)$为连续函数，$f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,\mathrm{d}x$，求$f(x)$

例题 3 连续函数f和g满足$f(x)=3x^2+1+\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$，$g(x)=-x+6x^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求$f(x)$、$g(x)$

综合题型五 利用分部积分，导出积分的递推公式

例题 1 请默写并推导点火公式

例题 2 求积分$J_n=\int_0^1 x\ln^n x\,\mathrm{d}x$的递推关系，并计算$J_n$

例题 3 设$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，判断$J_n$的单调性，并利用分部积分，导出$J_n$和$J_{n+2}$的递推关系，并计算$\lim\limits_{n\to\infty}nJ_n$

例题 4 设$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x,\ b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cdot\cos^n x\,\mathrm{d}x$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$

例题 5 证明:$J_n \overset{\text{记}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n}\right)$，其中$n$为自然数

综合题型六 分段函数的定积分

只需要将积分区间拆开，在每一段上分别积分，然后相加即可。

例题 1 设$f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| \mathrm{d}t \,(x > 0)$，求$f'(x)$并求$f(x)$的最小值

例题 2 设$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{1+x}{x(1+x\mathrm{e}^x)}, & 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$，求函数$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的表达式

例题 3 已知$x \geqslant 0$时，$f(x) = x$，且$g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases}$，求$F(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t \,(x \geqslant 0)$