

- 1, (3+3) 用 $\varepsilon - N$ 语言叙述数列 a_n 不收敛到 a 的定义, 并按定义证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{2n^2 - 7n} = \frac{1}{2}$$

2, (6) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}}$

3, (8) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3+2 \sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x}$

4, (6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$

5, (8) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (n^k + 1)^{-\frac{1}{k}} + (n^k - 1)^{-\frac{1}{k}}$

6, (8) 求 $f(x) = \frac{\left(e^{\frac{1}{x}} + e\right) \tan x}{x \left(e^{\frac{1}{x}} - e\right)}$ 的间断点, 并判断类型

7, (8) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 求 $f(x)$ 在零点的左右

导数, 判断在零点是否可导

8, (6) $f(x) = (e^x + \log_3 x) \arctan \frac{1+x}{1-x}$, 求 $f(x)$ 的导函数

9, (4+4) 已知 x 和 y 满足参数方程

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

求此曲线 $y = y(x)$ 的在任意一点的法线到原点的距离,

求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

10, (4+4) 已知 $2y \sin x + x \ln y = 0$ 确定了 $y = f(x)$ 的函

数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

- 11, (8) 求 $y = \frac{x^n}{1-x}$ 的 n 阶导函数
- 12, (6+2) 已知 $c > 0$, $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$, 讨论 a_n 的收敛情况, 若收敛, 求其极限
- 13, (6) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$
- 14, (3+3) 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ 。证明:
- (1) $\exists \varepsilon \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使得 $f(\varepsilon) = \varepsilon$ 。
- (2) $\forall \gamma \in \mathbb{R}$, $\exists \rho \in (0, \varepsilon)$, 使得 $f'(\rho) - \gamma(f(\rho) - \rho) = 1$