积分不等式 第 1 讲

——构造变限积分函数

期末范围内，证明积分不等式最常用而且最简单的一个方法，便是将积分上限的b修改为x，构造出一个变上限积分函数，然后对其求导，研究单调性.

这个方法有两个最大的好处：①将积分学问题转化为微分学问题；②将静态问题转化为动态问题.

注 1：当然，要保证变限积分可导的话，一般需要$f(x)$为连续函数，所以如果只告诉$f(x)$可积，则无法对$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$求导，希望大家在做题的时候看清楚条件；

注 2：既然我们可以将上限b视为x，那么自然也可以将下限a视为x，构造一个“变下限积分函数”，在大多数题目中，构造变上限和变下限的效果是一样的，但也有极个别题会有一些区别。

例题 1 设$f(x)$在$[a,b]$连续且单调递增，证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，并思考该不等式的几何意义.

注：若将条件“$f(x)$连续”改为“$f(x)$可积”，该如何证明？

提示：充分利用$f(x)$递增的条件，先构造出一个恒成立的不等式，然后两边积分即可.

类题 设$f(x)$在$[0,+\infty)$连续、递增，证明：若$0<a<b$，则$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\left[b\int_0^b f(x)\mathrm{d}x - a\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]$.

例题 2 已知$f(x)$在$[0,1]$连续可导，$0<f'(x)\leqslant 1$，$f(0)=0$，证明：$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \geqslant \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x$.

注 1：思考该不等式何时能够恰好取到等号？

注 2：该不等式称为“流行不等式”，它其实可以推广为**一般形式**，如下——

若$f(x)$在$[a.b]$连续可导，$0<f'(x)\leqslant \frac{2}{n+1}$，$f(a)=0$，则$\left[\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right]^2 \geqslant \int_a^b f^{2n+1}(x)\mathrm{d}x$

例题 3 设$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\mathrm{d}t\ (x>0)$，证明：$f(x)\leqslant \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

注：请问本题可以先放缩再求导吗？

例题 4 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且单调递减，证明：对任意的 $a\in(0,1)$，均有 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant a\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

注 1： 除了 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 以外，还能否构造其它辅助函数？

注 2： 两边的积分区间不一样，能否通过统一积分区间的方式证明此题？

注 3： 请思考能否使用积分中值定理证明本题？

类题 设 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[0,1]$ 连续可导，$f(0)=0$，$f'(x)>0$，$g'(x)>0$，证明：对于任意的 $a\in[0,1]$，均满足 $\int_0^a f'(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x \geqslant f(a)g(1)$.

例题 5 证明**阿达玛不等式**：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f''(x)>0$，则 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant \frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}\leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$

注： 本题若未告知 $f(x)$ 二阶可导，只告诉“$f(x)$ 是一个连续的凹函数”，则不能用上述方法，此时应该考虑“琴生不等式+定积分定义”，我们在后面的专题中会详细介绍这种方法.

下面，我们来看一道真题.

例题 6 (2014 年) $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(x)$ 递增，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，证明：$\int_a^{a+\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$

注： 没想到吧，这竟然是整个讲义里最简单的一道题.

例题 7 证明**柯西不等式**：若 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，则 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2$.

注 1： 事实上，柯西不等式成立的条件可以减弱为“$f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积”，此时变限积分就不一定可导，需要更换证明方法. 可行的方法非常多，我们会在后面的专题中一一讲解.

注 2： 柯西不等式是最经典的积分不等式之一，以后的很多题目都可以直接用柯西不等式搞定. 下面先看两个比较典型的题目.

类题 1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续且 $f(x)>0$，证明：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \geqslant 1$.

类题 2 请利用**柯西不等式**证明**闵可夫斯基不等式**：

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\left(\int_a^b [f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

例题 8 设$f(x)$与$g(x)$在$[a,b]$连续，且同为单调不减（或同为单调不增）的函数，证明：

$$(b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

类题 已知$f(x)$在$[a,b]$连续且递增，证明：$\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

注 1：参考答案是将a视为变量，构造“变下限积分”，大家可以尝试将b视为变量，看能否进行下去；

注 2：利用例题 8 的结论，可以一步秒杀此题. 其实例题 8 就是“切比雪夫不等式”的特例——

补充：切比雪夫不等式——设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$可积，证明：

(1) 若$f(x)$与$g(x)$同序，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)dx \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$；

(2) 若$f(x)$与$g(x)$反序，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)dx \geqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

注：所谓$f(x)$与$g(x)$同序，指的是对任意的x,y，均有$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\geqslant 0$；若将不等号反向，则称为反序.