Taylor

泰勒公式及展开点和被展开点的选取

若要证明的式子中含有高阶导数（如$f''(\xi)$、$f^{m}(\xi)$、$f^{(4)}(\xi)$等），一般要用带拉格朗日余项的泰勒公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

在选取展开点和被展开点时，总的思路是“ 选取导数值信息多的点作为x_0，而选取仅告知了函数值信息的点为x ”。当然，有时也会有其他展开方式，如将两端点均在中点处展开、将中点分别在两个端点处展开、两端点处相互展开、在任意点处展开等，具体情况需具体分析。

示例1

设$f(x)$在$[-1,1]$三阶连续可导，$f(-1)=0$，$f'(0)=0$，$f(1)=1$，证：$\exists\xi\in(-1,1)$，s.t.$f'''(\xi)=3$。

> **Note**
>
> 由达布定理可知，这里的“三阶连续可导”可弱化为“三阶可导”，部分题目有类似情况。

示例2

设$f(x)$在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，$[f(x)]_{min}=-1$，证：$\exists\xi\in(0,1)$，s.t.$f''(\xi)\geq 8$。

> **Note**
>
> 极值点蕴含了导数的信息，所以常常将函数在极值点处泰勒展开。

示例3

设$f(x)$在$x=x_0$的邻域内四阶可导，$|f^{(4)}(x)|\leq M(M>0)$，证：对此邻域上任意一个不同于x_0的点x，有$|f''(x_0)-\frac{f(a)+f(b)-2f(x_0)}{(a-x_0)^2}|\leq\frac{M}{12}(a-x_0)^2$（其中$a$是关于$x_0$的对称点）。

> [!TIP]
> 若题干中无具体点的导数信息，可观察欲证结论确定展开点和被展开点，此思想可解决下面两道类题。

> [!NOTE]

> **类题1**
>
> $f(x)$在$[a,b]$二阶连续可导，证：$\exists\xi\in(a,b)$，使$f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)$。

> [!NOTE]
>
> **类题2**
>
> $f(x)$在$[a,b]$三阶连续可导，证：$\exists\xi\in(a,b)$，使$f(b)=f(a)+f'(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(\xi)$。

示例4

在一条笔直的道路上，一辆汽车从开始启动到刹车停止用单位时间走完了单位路程，证明：至少有一个时间点，其加速度的绝对值不小于4。

> [!TIP]
> 对于端点处函数、导数信息都已知的题目，初学者可能选“两端点处相互展开”，但不够精确，通常将中点在端点处展开利用“对称美”，类似题目如下。

类题

$f(x)$在$[a,b]$上n阶可导$(n\geq 2)$，满足$f^{(i)}(a)=f^{(i)}(b)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$，得$|f^{(n)}(\xi)|\geq \frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|$。

> [!NOTE]

总结

遇到的题目多会提示展开点和被展开点的选取，核心思想是

“将题干中导数信息多的点作为展开点x_0，将仅告知函数值的点作为被展开点x”。

题干无具体点函数值和导数值时的处理

有些题目题干条件中无任何具体点处函数值和导数值，需深入分析，这类题难度更大。

示例5

$f(x)$在$(0,+\infty)$三阶可导，且$f(x)$和$f^m(x)$有界，证明：$f'(x)$和$f''(x)$在$(0,+\infty)$也有界。

> [!TIP]
> 本题只需证“有界”，未求具体“界”，而下面三道题给出了具体界。

示例6

设$f(x)$在$(0,1)$二阶可导，且$|f(x)|\leq a$，$|f''(x)|\leq b$，证：$|f'(x)|\leq 2a+\frac{b}{2}$成立。

> [!TIP]
> 本题最后一步放缩关键，很多学生和老师易在此犯错，需仔细思考。

> [!NOTE]
>
> ### 类题1
>
> 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$二阶可导，记$M_i=\max|f^{(i)}(x)|(i=0,1,2)$，证明：$M_1^2\le 2M_0M_2$。

> [!NOTE]
>
> ### 类题2
>
> 设$f(x)$在$(0,+\infty)$二阶可导，记$M_i=\max|f^{(i)}(x)|(i=0,1,2)$，证明：$M_1^2\le 4M_0M_2$。

> [!TIP]
> 类题2定义域缩小为$(0,+\infty)$，对称美消失，界不精确，属正常情况。