

定积分计算（下）

——定积分计算中的综合题

综合题型一 被积函数中含有变限积分函数的定积分计算

当需要计算的定积分的被积函数中，含有变限积分函数时，我们的处理手段有两种——

① **利用分部积分：**将被积函数中，除了变限积分以外的其余函数全部凑到 d 后面去，然后分部积分——这样就可以消掉变上限积分函数了；

② **利用二重积分：**毕竟是积分号里套积分，所以明显可以视为累次积分，然后交换积分次序即可。

例题 1 设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ ，计算 $\int_0^\pi f(x) dx$

类题 1 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ ，计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$

类题 2 设 $f'(x) = \arctan(x-1)^2$, 且 $f(0) = 0$, 求 $I = \int_0^1 f(x) dx$

类题 3 已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ 连续, 在 $\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$ 内是 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, $f(0) = 0$

- (1) 求 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{3}{2}\pi\right]$ 上的平均值 (2) 证明 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{3}{2}\pi\right)$ 内有唯一零点

当然，也并非所有变限积分出现在被积函数中时，都要采用分部积分，比如下面这道经典题——

例题 2 设 $f(x)$ 为非负连续函数，满足 $f(x) \int_0^x f(x-t) dt = \sin^4 x$ ，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

注：该题的思想非常不错，类似的还有下面这道题目，请大家自行练习——

类题 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $x > -1$ 时， $f(x) \left[\int_0^x f(t) dt + 1 \right] = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}$ ，求 $f(x)$

综合题型二 被积函数中含有导函数的定积分计算

这种题目，只需要把导函数凑到 d 后面，然后分部积分即可。这种题过于简单，大家可以自行练习。

例题 设 $\int_0^2 f(x) dx = 4$ ， $f(2) = 1$ ， $f'(2) = 0$ ，求 $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$

综合题型三 已知一个积分，求另一个积分

要建立两个积分的关系，我们有两种方法——

① 利用分部积分，因为分部积分会产生一个新的积分。

对于这种题目，在分部积分的时候，到底把谁凑到 d 后面去，把谁留下来，不需要在遵循“反对幂指三”之类的口诀，没用！这类题你要看清楚你要计算的积分和题干已知的积分，观察二者的区别与联系，然后去思考到底把谁凑进去才能够使两个积分之间相互转化，大家学东西的时候千万不要学的太死了！

② 换元法

例题 1 设 $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{(x+2)^2} dx = A$ ，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x+1} dx$

例题 2 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ，求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ 、 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$ 、 $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin(x+y)}{x(x+y)} dx dy$

注：积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ 是著名的狄利克雷积分，非数学生只需要知道它收敛，且收敛于 $\frac{\pi}{2}$ 即可，至于

为什么等于 $\frac{\pi}{2}$ ，需要用到含参积分，是超纲内容。 **二重积分也是超纲内容，给有兴趣的同学研究！**

例题 3 设 $f(x)$ 连续, 证明: $\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{1}{x} dx = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{1}{x} dx$, 其中 $a > 0$.

例题 4 设 $f(x)$ 连续, 证明: $\int_1^4 f\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right) \frac{\ln x}{x} dx = \ln 2 \int_1^4 f\left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2}\right) \frac{1}{x} dx$

综合题型四 利用“定积分的结果是一个数字”来求解某些待定函数的问题

一般来说, 求函数表达式往往会想到建立微分方程 (这确实是常规思路), 但是还有一类更简单的题——

$f(x)$ 的具体形式已经完全告诉, 只是其表达式中含有一个未知的积分, 我们只需要想办法把这个积分求解出来, 那么这个函数的表达式就完全确定下来了。具体的解题方法有 2 种:

① 等式两边再次积分, 可得到一个关于该积分的方程, 即可解出该待定积分; ② 待定系数法无脑秒杀。

例题 1 设 $f(x) = x^2 - x \int_0^2 f(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$, 求 $f(x)$

例题 2 设 $f(x)$ 为连续函数, $f(x) = \frac{x}{1 + \cos^2 x} + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx$, 求 $f(x)$

例题 3 连续函数 f 和 g 满足 $f(x) = 3x^2 + 1 + \int_0^1 g(x) \, dx$, $g(x) = -x + 6x^2 \int_0^1 f(x) \, dx$, 求 $f(x)$ 、 $g(x)$

综合题型五 利用分部积分, 导出积分的递推公式

例题 1 请默写并推导点火公式

例题 2 求积分 $J_n = \int_0^1 x \ln^n x \, dx$ 的递推关系，并计算 J_n

例题 3 设 $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$ ，判断 J_n 的单调性，并利用分部积分，导出 J_n 和 J_{n+2} 的递推关系，并计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} nJ_n$

例题 4 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} \, dx$, $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot \cos^n x \, dx$ ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$

例题 5 证明: $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{2^{n+1}} \left(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots + \frac{2^n}{n} \right)$, 其中 n 为自然数

综合题型六 分段函数的定积分

只需要将积分区间拆开, 在每一段上分别积分, 然后相加即可。

例题 1 设 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| \, dt (x > 0)$, 求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值

例题 2 设 $f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{3}{2}x^2, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1+x}{x(1+xe^x)}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 求函数 $F(x) = \int_0^x f(t) \, dt$ 的表达式

例题 3 已知 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x$, 且 $g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 求 $F(x) = \int_0^x f(t)g(x-t) \, dt (x \geq 0)$