

## NO.4-2 不定积分解题方法（下）

——换元法、分部积分、综合题

### 套路三 换元法的基本套路

换元法最重要的作用就是“打开局面”。在做积分题时，只要我们选择恰当的换元，就可以让一些看似很复杂的积分变得非常的简洁。尤其是在处理带有根式的积分时，常常会使用换元法。

#### (1) 整体换元

一般来说，只要见到被积函数中出现了“ $\sqrt{\text{一次函数}}$ 、 $\sqrt{\frac{\text{一次函数}}{\text{一次函数}}}$ 、 $\sqrt{e^{ax}+b}$ 、 $\sqrt{\frac{e^{ax}+b}{e^{ax}-b}}$ ”，可以直接将

整个根号令成 $t$ ，达到消去根号的作用。

当然，值得指出的是，这个方法虽然肯定可行，但并不一定是最简单的方法。我们拿到一个题目以后，也要学会具体问题具体分析，寻找最适合那个题目的解法。

例题 1  $\int \sqrt{\frac{x}{x+1}} dx$

注：换元以后不要把 $dx$ 解出来，而应该直接分部积分。因为如果把 $dx$ 具体计算出来的话，反而会升高分母的阶，导致整个积分的次数特别高。这个思想我们在后面的一道真题中也会用到，请大家先留个心眼。

类题 1  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx$

类题 2 请计算  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$  和  $\int \left( \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) dx$  两个积分

注：换元法固然可行，但请思考，本题有没有简便方法？（提示：分子有理化，然后裂开，拆成2个积分）

类题 3  $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 2}} dx$

类题 4  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} dx$

注：本题如果是第一次做，想不到很正常。(本题是同济版高等书教材的课后习题)

例题 2  $\int \frac{1}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}} dx$

注：为了同时消去  $\sqrt[3]{x}$  和  $\sqrt{x}$  的根号，很明显需要令  $x = t^6$ 。这说明我们在换元的时候，不要拘泥于具体的形式，而应该具体问题具体分析。总之记住一点——换元的目的是简化被积函数，是为了打开局面！下面是一个类似的题目。

类题  $\int \frac{1}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} dx$  (提示：令  $e^{\frac{x}{6}} = t$ ，然后转化为有理函数的积分)

## (2) 三角换元

如果在被积函数中出现了“ $\sqrt{\text{二次函数}}$ ”，则一般采用三角换元，具体而言又分为以下几种情况：

1) 若根号里面没有一次项，只有平方项和常数项：

① 形如“ $\sqrt{a^2 - x^2}$ ”，则令  $x = a \sin t$ ；

② 形如“ $\sqrt{a^2 + x^2}$ ”，则令  $x = a \tan t$ ；

③ 形如“ $\sqrt{x^2 - a^2}$ ”，则令  $x = a \sec t$ ；

(注：有时候不一定非要出现根号才用三角换元，如： $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$ ，也可以利用三角换元+二倍角处理)

2) 若根号里面含有一次项，则需先对根号里面的二次函数配方，消去一次项后，便转化为了上面的问题；

下面的这几道例题，我故意选得比较简单，自己在草稿本上演算即可。因为我们这份讲义的重头戏在后面，所以前面这些基础的内容只进行简要的回顾即可。

例题 3  $\int \frac{1}{x^4} \sqrt{4-x^2} dx$

提示：令  $x = 2 \sin t$ ，即可转化为三角有理函数积分。

例题 4  $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} dx$

提示：令  $x = \tan t$

例题 5  $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} dx$

提示：先配方，变形为  $\int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx$ ，再令  $x-2 = 2 \sin t$

例题 6  $\int x \sqrt{2x-x^2} dx$

提示：先配方，变形为  $\int x \sqrt{2x-x^2} dx = \int x \sqrt{1-(x-1)^2} dx$ ，再令  $x-1 = \sin t$

例题 7  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$

总结：令  $x = \sec t$  当然可以做，但其实本题可以归为一种模型——一切可化为  $\int \frac{1}{(x+d) \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$

和  $\int \frac{1}{(x+d)^2 \sqrt{ax^2+bx+c}} dx$  的不定积分，都可以先用倒代换  $x+d = \frac{1}{t}$ ，将被积函数大大简化后再积分。

现在，我们以两个最典型的例子作为演示，如下：

类题 1  $\int \frac{1}{x \sqrt{2x^2+2x+1}} dx$

类题 2  $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{2x^2 + 2x + 1}} dx$

至此为止，我们的换元法就讲到这里。

## 套路四 分部积分法的基本套路

见到不同种类函数相乘，一般要用分部积分公式， $\int u dv = uv - \int v du$ 。分部积分的使用原则如下：

(1) 口诀：按照“反对幂指三”的顺序，谁排在后面，就把谁凑到微分符号d后面去，然后分部积分；

(2) 思想：我们之所以有上述口诀，其本质是因为——“对/反”这两类函数“很怕求导”，这俩一旦求导，就不再是这两类函数了，也就是说，求导会将它们“瓦解”。既然它们怕求导，那我们就要想办法对它们求导，那么怎么才能对它们求导呢？那当然是把除了“对/反”这两类函数以外的其它函数，凑到微分符号d后面去，然后分部积分，因为分部积分以后，会交换 $u$ 和 $v$ 的位置，而 $du$ 就相当于是对 $u$ 在求导了；同理，当指数函数和幂函数相乘，为什么要把指数函数凑到d后面去？因为幂函数怕求导，指数函数完全不怕。

总之——谁怕求导，我们就要想办法对谁求导，所以就要将其余部分凑到d后面去！

例题 1  $\int x \cdot \arctan x \, dx$

注：在分部积分时，要善于在d后面增减一个恰当的常数，使得分部积分以后的式子更加简洁。

类题  $\int x \cdot \ln(1+x^2) \cdot \arctan x \, dx$

例题 2  $\int e^x \sin x \, dx$ ,

注：当被积函数为指数函数和三角函数相乘时，我们需要连续两次分部积分，出现“积分重现”以后，问题才得以解决，并且需要注意——这两次分部积分，每一次凑到d后面的函数，必须是同一种类的函数，否则会原路返回。

类题  $\int x \cdot e^x \cdot \sin x \, dx$

例题 3  $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$

### 套路五 换元法+分部积分

换元以后，紧接着一步分部积分，是考试中比较常见的出题风格，大家一定要对这种题目特别熟练！而且大家一定要记住，当我们预判出某一个题既要换元，又要分部积分的时候，我个人的建议是先用换元法，因为换元法是用来打开局面的，换元以后，会让你的整个被积表达式看起来更加的“清爽”，有利于后续的操作。下面，请看几道针对性的例题。

例题 1  $\int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} \, dx$  (该题是 2018 年考研数学大题，明明毫无难度，但得分率并不高)

类题 1 请计算  $\int \frac{x \cdot e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$  和  $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \, dx$  (考研真题)

类题 2  $\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

类题 3 请计算  $\int \frac{\arctan \sqrt{x-1}}{x\sqrt{x-1}} dx$  和  $\int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx$

例题 2  $\int \ln \left( 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) dx$  (考研真题)

特别注意：本题换元以后不需要解出  $dx$ ，即——在换元以后，宜直接进行分部积分，以消去对数符号。若按照平时的做题习惯，解出  $x = \frac{1}{t^2-1}$  后，将  $dx$  具体计算出来，再代入被积表达式，那么接下来的计算，就反而更加繁琐了。类似的题目还有以下几道——

类题 1  $\int \arctan(1 + \sqrt{x}) dx$

类题 2  $\int \sqrt{1+x^2} dx$

## 套路六 利用分部积分，对分母进行降阶

如果分母的次数太高，我们除了可以利用倒代换进行降阶以外，还可以利用分部积分进行降阶。在具体操作时，最核心的步骤就是“想办法将分母凑到d后面，然后分部积分”。

比如我们在第一次课讲过的  $\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2} dx$ ，就是利用这个了这个思想。下面请看一些类似的典型例题。

例题 1  $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$

类题 1  $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$

类题 2  $\int \frac{x e^x}{(1+e^x)^2} dx$

以上三个题目，将分母凑到d后面去是很容易的。下面，我们再来看一个难一点的例题，它需要用到“强制凑微分”的技巧，但是其核心思想仍然是“利用分部积分，对分母进行降阶”。

例题 2  $\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx$

例题 3  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2} dx$

### 套路七 利用分部积分，实现“积分抵消”

有些题目，需要把一个积分拆成两个积分，其中一个积分  $I_1$  暂时不动，另一个积分  $I_2$  使用分部积分，而分部积分后得到的新积分，刚好和  $I_1$  相互抵消。这种题，被积函数中“一般”都含有指数函数  $e^x$ （并且一定含有）。

例题 1  $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$

注：本题的题源其实非常简单，即  $\int e^x [f(x) + f'(x)] dx$ 。对于这个积分，当然可以拆开以后，利用“分部积分+积分抵消”的思想来做，但是如果还记得基本公式  $[e^x f(x)]' = e^x [f(x) + f'(x)]$ ，那么这类题我将绝杀。

类题 1  $\int \frac{(1 + \sin x) e^x}{1 + \cos x} dx$

类题 2  $\int e^x \left( \frac{1-x}{1+x^2} \right)^2 dx$



类题 3  $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$

**注：**前面 4 个题目，被积函数中全都含有  $e^x$ ，不禁让人联想——难道“分部积分+积分抵消”的思想，只能用在被积函数出现  $e^x$  的情形吗？其实也不尽然，有的题目，被积函数中出现的是  $e^{f(x)}$ ，也可以尝试这个方法。请看下面的几个例题。

例题 2  $\int \frac{e^{-\sin x} \cdot \sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} dx$

**注：**本题十分综合，如果是几天前，可能这题我们难以下手；但是，经过两三次课的洗礼，以我们现在的功力来看，本题不过是一道送分题。所以，把我的不定积分讲义和视频吃透，足够你应付任何一本辅导书中的不定积分计算题。

例题 3  $\int e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx$

类题 1  $\int e^{\sin x} \frac{x \cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x} dx$

**注：**此题表明，有时候需要对两个积分同时使用分部积分，使得分部积分以后的两个新的积分相互抵消。

类题 2  $\int \left(1+x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$

注：以上几个题，要么含有  $e^x$ ，要么含有  $e^{f(x)}$ ，但事实上，“分部积分+积分抵消”思想的应用范围远不止如此。很多题目没有出现指数类的函数，但也能用这个思想，请看下面几道题目。

例题 3  $\int \left(\ln \ln x + \frac{1}{\ln x}\right) dx$

例题 4 已知  $f''(x)$  连续， $f'(x) \neq 0$ ，求  $\int \left[ \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{(f'(x))^3} \right] dx$

例题 5  $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx$

注：很多考研辅导书都有此题，但标准答案的解法和我并不相同。标答的解法，我会在下一个套路讲解。

## 套路八 对复杂因子求导，期待出现奇迹

有时候，当被积函数中的某一部分，出现了一个比较复杂的“整体”时(这个整体一般来说是一个复合函数或者两个函数的乘积)，那么我们可以尝试对这个整体求求导，看一下它的导函数有什么特点(比如这个整体求导以后的函数，会不会刚好是被积函数的分子呢?)，这便于我们后续的凑微分等操作。

例题 1  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1+[x(\ln x-1)]^2}} dx$

例题 2  $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$

类题  $\int \frac{1+x\cos x}{x(1+xe^{\sin x})} dx$

注 1: 其实通过上面的例题 2 和类题, 我们甚至可以自己总结出一个出题模板, 如下——

$$\int \frac{1+xf'(x)}{x(1+xe^{f(x)})} dx = \int \frac{[1+xf'(x)]e^{f(x)}}{xe^{f(x)}(1+xe^{f(x)})} dx = \int \frac{[xe^{f(x)}]'}{xe^{f(x)}(1+xe^{f(x)})} dx = \ln \left| \frac{xe^{f(x)}}{1+xe^{f(x)}} \right| + C$$

如果取定  $f(x) = \arctan x$ , 代入出题模板, 稍作变形, 即可原创一道题目  $\int \frac{1+x+x^2}{(1+x^2)(x+x^2e^{\arctan x})} dx$ ,

注 2: 下面的题目, 难倒了很多的学生, 很多人即使看了答案也不知道为何要那么做。现在, 请将下面的题目, 和上面的两个题做对比, 猜测每个题的第一步应该如何操作, 就可以将下面这些难题转化为上面的题型 (或者类似的题型)。

例题 3  $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx$

注: 其实, 如果稍微敏感一点的话, 我们看到  $1-\ln x$  的时候, 就应该想到  $\left(\frac{\ln x}{x}\right)'$  了, 就如同看到  $1+\ln x$  就

可以联想  $(x\ln x)'$  一样。

类题 1  $\int \frac{e^x(x-1)}{(x-e^x)^2} dx$

类题 2  $\int \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{(\cos x - x \cdot \sin x)^2} dx$