有理函数积分

有理函数积分方法

通用解法

核心策略

- 遇到有理函数积分，一般采用“裂项 + 待定系数法”，不过对于特定有理函数可能存在更便捷方法，但仍需以掌握基本方法为主。
- 先将有理函数划分为真分式与假分式，假分式可通过多项式除法转化为多项式与真分式之和，所以解决有理函数积分关键在于处理有理真分式积分。

真分式积分步骤详解

- **步骤一：分母因式分解**：将真分式分母彻底分解，直至无法继续分解。
- **步骤二：裂项规则**
  - 若分母含有$(x-a)^k$，则裂项后的式子必定包含$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$。
  - 若分母含有$(x^2+px+q)^k$（需满足$p^2-4q<0$），则裂项后的式子必定包含$\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\cdots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$。
- **步骤三：确定待定系数**：对裂项后的式子通分，依据“通分后的分子与原被积函数的分子对应系数相等”原则，列出待定系数满足的方程，进而求解待定系数，从而将真分式分解为各个基本分式之和。
- **步骤四：计算基本分式积分**
  - 对于$\int\frac{A}{(x-a)^k}\mathrm{d}x$这类基本分式积分相对容易。
  - 对于$\int\frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$和$\int\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$，其计算有通用方法，尤其在期末、考研范围内，分母次数通常为 1 或 2，后续例题将详细介绍其计算方法。

例题解析

例题 1：

$$\int\frac{x+3}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$$

> 通过该例题可总结出$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$的积分套路为“改造分子，拆分为两个积分，其中第一个积分直接凑微分，第二个积分配方后套公式即可”。

例题 2：

$$\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

> **Tip**
>
> 提示可尝试三角换元，同时也可考虑分部积分法降低分母次数。

类题：$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$

> 借助例题 2 及该类题，能够推导出$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的计算方法，例如计算$\int \frac{x+2}{(x^2+2x+10)^2}\mathrm{d}x$，其方法可总结为“改造分子、拆分为两个积分，对分母配方、换元，归结于计算$\int \frac{1}{(a^2+t^2)^2}\mathrm{d}t$”，同时思考$\int \frac{x^2}{(x^2+px+q)^2}\mathrm{d}x$的计算方式。

例题 3：$\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$（此为 2019 年一道 10 分大题，考点单一）。

例题 4：$\int \frac{1}{1+x^3}\mathrm{d}x$。

例题 5：若不定积分$\int \frac{x^2+ax+2}{(x+1)(x^2+1)}$不含反正切函数，则$a$的值为

三、有理函数积分特殊解法

从理论上讲，所有有理函数积分均可运用上述待定系数法求解，但此通法未必是最优选择，其工作量往往较大。实际上，许多有理函数积分具备独特解法，需仔细剖析被积函数结构，具体问题具体分析。学习数学是一个积累过程，尽管特殊解法较为灵活，但同学们不应畏惧。

例题 6：$\int \frac{1}{1-x^4}$

Tip

在进行有理函数积分时，有时可依据分母形式对分子进行改造，以此达成裂项目的，类似题目如下：

类题 1：$\int \frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x$，可尝试倒代换$x=\frac{1}{t}$（倒代换一般适用于分母次数远高于分子时）。

类题 2：$\int \frac{1+x^4}{1+x^6}\mathrm{d}x$（一道颇具特色的题目）。

类题 3：$\int \frac{1}{x(x^3+27)}\mathrm{d}x$。

例题 7：$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

> 此例题解法经典且独具特色，通过该题可解决所有形如$\int \frac{1\pm x^2}{1+kx^2+x^4}\mathrm{d}x$的积分。
>
> 同时也可对$1+x^4$强行因式分解为$(1+x^2)^2-2x^2=(1+x^2+\sqrt{2}x)(1+x^2-\sqrt{2}x)$，但该方法在裂项后计算系数时运算量巨大，不太可取。类似题目还有：

类题 1：$\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$。

类题 2：$\int \frac{1}{1+x^6}\mathrm{d}x$

> 利用以上两题可求得$\int \frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x+\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x]$。