模拟题分析与解答

2024-2025学年微积分（甲）I期末考试题型为：

- 1-8 为计算类型的填空题
- 9-13 为稍有些计算过程的解答题
- 14-15 为比较综合的解答题，但是有递进设问

本模拟试卷题型直接参考去年期末考试题型，知识点概览如下

题号	知识点	难易度
填空题		
1	函数无穷小	简单
2	求渐近线方程	简单
3	参数方程求导、导数定义	中等
4	隐函数求导	简单
5	高阶导数计算	简单
6	定积分求面积	简单
7	定积分求弧长	简单
8	反常积分审敛法与计算	中等
解答题		
9	泰勒公式计算极限	简单
10	计算不定积分	简单
11	定积分求体积，函数最值	中等
12	变上限积分的积分	中等
13	递推数列综合题	中等
14	定积分、微分中值定理综合题	中等
15	定积分、函数凹凸性、数形结合综合题	偏难

> 第9、14题为2025年研究生入学考试（数学一）真题
> 第13、15题为2024-2025学年微积分（甲）I期末考试真题改编而来

试题分析与解答

填空题

（每小题**5**分）

1.当$x \to 0$时，$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$与$x^\alpha$同阶无穷小，则$\alpha =$__________

Note

$\boxed{3}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{(1+\tan x)-(1+\sin x)}{x^\alpha(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-\sin x}{2x^\alpha} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x(1-\cos x)}{2x^\alpha\cos x} \\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{2x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{4}x^{3-\alpha}
\end{aligned}$$

上述极限若不为 0 且存在, 则只能有 $3-\alpha=0$, 解得 $\alpha=3$.

2.曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为 __________

Note

$\boxed{y=x+\frac{1}{e}}$

1. 求斜率 k：

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)=\ln e=1$$

2. 求截距 b:

利用等价无穷小 $\ln(1+t)\sim t$ (当 $t\to 0$):

$$\begin{aligned} b&=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-1\right]\\ &=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x-1}\right)-\ln e\right]\\ &=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{e(x-1)}\right)\\ &=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{e(x-1)}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

评分：斜率**2**分，截距**3**分

3.设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=1+t^3\\ y=e^{t^2}\end{cases}$确定，则$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[f\left(2+\frac{2}{x}\right)-f(2)\right]$的值为

____

Note

$\boxed{\frac{4}{3}e}$

容易看出函数$f(x)$可导，且$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{e^{t^2}\cdot 2t}{3t^2}$，

当$x=2,t=1$时，$f'(2)=\left.\frac{e^{t^2}\cdot 2t}{3t^2}\right|_{t=1}=\frac{2}{3}e$，所以，

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(f\left(2+\frac{2}{x}\right)-f(2)\right)=2\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(2+\frac{2}{x}\right)-f(2)}{\frac{2}{x}}=2f'(2)=\frac{4}{3}e.$$

4.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定, 则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$________

Note

$\boxed{\mathrm{d}x}$

代入 $x=0$, 则 $\ln y=0+0=0$, 所以 $y=1$.

对方程两边同时对 x 求导有

$$\frac{1}{x^2+y}(2x+y')=3x^2y+x^3y'+\cos x$$

代入 $x=0,y=1$, 则 $\frac{1}{0+1}(0+y')=0+0+\cos 0=1$.

$y'|_{x=0}=1$, 则 $\mathrm{d}y|_{x=0}=1\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{d}x$.

5.设函数 $f(x)=x\ln(1+x)$，则 $f^{(5)}(0)=$__________

Note

$\boxed{-30}$

方法**1**

1. 利用常见展开式：

$$f(x)=x\cdot\ln(1+x)=x\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$
$$=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{4}+\cdots$$

2. 根据泰勒展开式通项的定义：
   函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式通项为 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$。
   我们需要求 $f^{(5)}(0)$，因此只需要看 x^5 的系数。

$$f^{(5)}(0)=5!\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=120\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=-30$$

方法**2**

设 $u=\ln(1+x)$，$v=x$。

因为 $v=x$，其二阶及以上导数均为 0，所以公式只剩前两项：

$$f^{(5)}(x)=C_5^0u^{(5)}(x)\cdot x+C_5^1u^{(4)}(x)\cdot 1$$

代入 $x=0$：$f^{(5)}(0)=u^{(5)}(0)\cdot 0+5u^{(4)}(0)=5u^{(4)}(0)$

我们需要求 $u(x)=\ln(1+x)$ 的 4 阶导数：

容易计算$u^{(4)}(0)=-6$，代入得$f^{(5)}(0)=5\times(-6)=-30$。

6.已知曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$，则 L 与 x 轴围成的图形面积为

____

Note

$\boxed{3\pi}$

参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 围成的面积公式为 $S=\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}y(t)\mathrm{d}(x(t))$。

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t\right)\mathrm{d}t\\&=3\pi\end{aligned}$$

7.已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=1+\cos\theta$ $(0\le\theta\le 2\pi)$，则曲线 L 的全长为__________

Note

$\boxed{8}$

极坐标下弧长公式为 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\mathrm{d}\theta$。

由于图形关于极轴对称，可以先算上半部分 $(0\le\theta\le\pi)$ 再乘以 2。

$$\begin{aligned} s &= 2\int_0^{\pi} 2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= 8 \end{aligned}$$

8.设 $\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=1$，则$a=$________$b=$________

Note

$\boxed{a=2e-2}$, $\boxed{b=2e-2}$

通分，$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x$。

要想收敛，必须有 $a=b$（否则 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}=O\left(\frac{1}{x}\right)$，积分显然发散）。

此时，$I=\int_1^{+\infty}\frac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+a}\right)\mathrm{d}(2x)=\ln\frac{2x}{2x+a}\Big|_1^{+\infty}=0-\ln\frac{2}{2+a}=1$。

故 $\frac{2}{2+a}=\frac{1}{e}$，解得 $a=2(e-1)$，故 $a=b=2(e-1)$。

评分：答对一个给**3**分，两个给**5**分

解答题

（本题6分）9.求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)$.

Note

$\boxed{\dfrac{1}{2}}$

【分析】

本题属于 $\infty-\infty$ 型未定式，首先需要通分将其转化为 $\frac{0}{0}$ 型，然后可以利用等价无穷小代换、泰勒公式或洛必达法则求解。

【解答】

解：原式通分可得

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$$

由于当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$

$$L=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x^2}$$

当 $x\to0$ 时，$\sin x=x-\dfrac{1}{6}x^3+o(x^3),\ln(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$，

代入原式得：

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to0}\frac{\left[x-o(x^2)\right]-\left[x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

评分：写出泰勒展开式酌情给**1-2**分

（本题6分）10.求不定积分

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x$$

Note

令 $x = \tan t$。

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int \frac{\ln \tan t}{\sec^3 t} \sec^2 t \mathrm{d}t = \int \cos t \ln \tan t \mathrm{d}t = \int \ln \tan t \mathrm{d}(\sin t) \\
&= \sin t \ln \tan t - \int \sin t \frac{\sec^2 t}{\tan t} \mathrm{d}t = \sin t \ln \tan t - \int \sec t \mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln x - \ln |x + \sqrt{1+x^2}| + C
\end{aligned}$$

评分：使用换元法算出关于t的正确积分给**5**分，回代形式有多种，可以不化简

（本题8分）11.设$t > 0$，平面有界区域D由曲线$y = \sqrt{x}e^{-x}$与直线$x = t$，$x = 2t$及x轴围成，D绕x轴旋转一周所成旋转体的体积为$V(t)$，求$V(t)$的最大值。

Note

$$V(t) = \int_t^{2t} \pi x e^{-2x} \mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\left[(2t + \frac{1}{2})e^{-4t} - (t + \frac{1}{2})e^{-2t}\right]$$

则$V'(t) = -\pi t e^{-2t}(1 - 4e^{-2t})$，令$V'(t) = 0 \Rightarrow t = \ln 2$，

$\because t \in (\ln 2 - \delta, \ln 2)$有$V'(t) > 0$，$t \in (\ln 2, \ln 2 + \delta)$有$V'(t) < 0$，

$\therefore t = \ln 2$为$V(t)$的极大值点即最大值点，

故最大值为$V(\ln 2) = \dfrac{\pi}{16}(\ln 2 + \dfrac{3}{4})$。

评分：求出正确函数得**4**分，求出极值点得**2**分，结果正确得到剩下分数

（本题6分）12.设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

Note

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{x}\mathrm{d}f(x) \\
&= \boxed{-2\int_0^1 \sqrt{x}\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x} \xrightarrow{x\to x^2} -4\int_0^1 \ln(1+x^2)\mathrm{d}x \\
&= -4\ln 2 + 8\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x = 8-2\pi-4\ln 2
\end{aligned}
$$

评分：分部积分法结果正确得**2**分

13.已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_n=\ln(1+a_n)+b_n$，其中 $0<a_n<\frac{1}{n^2}$

（本小题6分）(1) 证明：$0<b_n<\frac{1}{2}a_n^2$；

（本小题4分）(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right)$ 存在。

Note

(1)由题设条件 $a_n=\ln(1+a_n)+b_n$ 可得：

$$
b_n = a_n-\ln(1+a_n) = \int_0^{a_n}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{a_n}\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t
$$

因为 $a_n>0$，所以积分区间为 $[0,a_n]$。当 $t\in(0,a_n]$ 时，显然有：$0<\frac{t}{1+t}<t$

$$
\int_0^{a_n} 0\,\mathrm{d}t < \int_0^{a_n}\frac{t}{1+t}\mathrm{d}t < \int_0^{a_n} t\,\mathrm{d}t
$$

即：

$$0 < b_n < \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{a_n} = \frac{1}{2}a_n^2$$

故不等式 $0 < b_n < \frac{1}{2}a_n^2$ 成立。

(2) 记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k}$。要证明极限存在，即证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n}$ 收敛。

由 (1) 中结论 $0 < b_n < \frac{1}{2}a_n^2$，两边同时除以 a_n（已知 $a_n > 0$）：

$$0 < \frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{2}a_n$$

根据题设条件，$0 < a_n < \frac{1}{n^2}$，代入上式可得：

$$0 < \frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{2n^2}$$

记$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{b_k}{a_k}$，则$S_n < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k^2} < 1$(裂项易得)

故S_n有上界，且S_n单调递增，故S_n收敛。

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n}\right)$ 存在。

评分：（**1**）（**2**）小问方法不唯一，正确即可

14.设可导函数 $f(x)$ 严格单调递增且满足 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$，记 $a = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

（本小题5分）（1）证明 $a > 0$;

（本小题5分）（2）令 $F(x) = a(1 - x^2) + \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，证明：存在 $\xi \in (-1, 1)$，使得 $F''(\xi) = 0$.

Note

(1)用反证法。假设 $a \leq 0$

因为$f(x)$严格单调递增，所以当$x\in(0,1)$时，$f(x)>f(0)$，当$x\in(-1,0)$时，$f(x)<f(0)$

$$\Longrightarrow\ 0\geq\boxed{a=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}>\boxed{\int_0^1 f(0)\mathrm{d}x=f(0)=\int_{-1}^0 f(0)\mathrm{d}x}>\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$$

则$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<0$矛盾！

故$a>0$

(2)由题可知 $F(-1)=F(0)=F(1)=0$

又因为 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续且可导，由罗尔定理可知：

$\exists\xi_1\in(-1,0)$，$\exists\xi_2\in(0,1)$，，使得$F'(\xi_1)=0,F'(\xi_2)=0$

再次使用罗尔定理：$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$使得 $F''(\xi)=0$

评分：（**1**）方法不唯一，正确即可
(2)观察到**3**个零点得**3**分

15.已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $f''(x)<0$，$f(0)=f(1)=0$。

（本小题7分）(1) 证明：存在唯一的 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f'(x_0)=0$，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{2}f(x_0)$$

（本小题7分）(2) 记 $k_1=f'(0)$，$k_2=f'(1)$，证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\frac{k_1k_2}{2(k_2-k_1)}$$

Note

(1)

因为 $f(0)=f(1)=0$ 由罗尔定理知道：$\exists x_0\in(0,1)$，使得 $f'(x_0)=0$。

因为 $f''(x)<0$ 知 $f'(x)$严格递减，因此有唯一零点x_0。

在区间 $[0,x_0]$ 上，令辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(x_0)}{x_0}x$。

显然 $F(0)=0$，$F(x_0)=0$。由罗尔定理知：$\exists\xi\in(0,x_0)$满足$F'(\xi)=0$。

又由$F''(x)=f''(x)<0$可知$F'(x)$严格递减，因此有唯一零点ξ。并且$x\in(0,\xi)$时，$F'(x)>0$，$F(x)$单调递增。$x\in(\xi,x_0)$时，$F'(x)<0$，$F(x)$单调递减

所以$\forall x\in(0,x_0)$有$F(x)>0 \iff f(x)>\dfrac{f(x_0)}{x_0}x,\forall x\in(0,x_0)$

同理可证 $f(x)>\dfrac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1)$。

综上，在 $[0,1]$ 上积分：

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{x_0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1 f(x)\mathrm{d}x\\ &> \int_0^{x_0}\frac{f(x_0)}{x_0}x\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1\frac{f(x_0)}{x_0-1}(x-1)\mathrm{d}x\\ &= \frac{f(x_0)}{2}\end{aligned}$$

(2)

记 $k_1=f'(0)$，$k_2=f'(1)$。
对 $f(x)$ 在 $x=0$ 处应用泰勒公式（拉格朗日余项）：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2\quad(0<\xi_1<x)$$

因 $f(0)=0$，$f''(\xi_1)<0$，故$f(x)<k_1x$。

同理，$f(x)<k_2(x-1)$。

令$x_p=\dfrac{-k_2}{k_1-k_2}$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\int_0^{x_p}k_1x\mathrm{d}x+\int_{x_p}^1 k_2(x-1)\mathrm{d}x=\frac{k_1k_2}{2(k_2-k_1)}$$

评分：（**1**）（**2**）本质上在探讨函数积分值和内接三角形、外切三角形面积的关系，若有画出图形说明却没有严谨证明者，可以得到一半分数

（**1**）证明零点**1**分，证明割线不等式**5**分，放缩**1**分

（**2**）证明切线不等式**5**分，取出交点**1**分，放缩**1**分