数列极限

基础回顾

- **数列极限定义**: $\epsilon - N$ 语言, 无穷大数列

定义1.1.2 (收敛数列)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 如果存在 $a \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$ 当 $n \geq N$ 时, 都有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

就称数列 $\{a_n\}$ 是**收敛的**并且收敛于a, 记为 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ 或者 $a_n \to a$。

若不成立, 就称 $\{a_n\}$ 是**发散的**。

定义1.1.19 (无穷大数列)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 如果 $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}_+$ 当 $n \geq N$ 时, 都有 $|a_n| > M$, 那么称 $\{a_n\}$ 为无穷大数列, 记为 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$。

特别地, 如果 $a_n > M$ (或 $a_n < -M$), 则称 $\{a_n\}$ 趋于 $+\infty$ (或 $-\infty$)。

> **Tip**
>
> 上述定义的**否定**也要掌握。
>
> 请画图思考数列极限的几何意义

- **数列极限性质**: 唯一性、有界性、保号性、四则运算 (注意极限要存在才能用)

定理 1.1.9 (有界性)

如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 那么 $\{a_n\}$ 有界。

定理 1.1.10 (保号性)

如果 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a > 0$, 那么 $\forall p \in (0, a), \exists N > 0$, 当 $n \geq N$ 时, 有 $a_n > p > 0$

推论 1.1.11

若数列 $\{a_n\}$ 满足: 当 $n \geq N$ 时, $a_n \geq 0$ 且 $\{a_n\}$ 收敛于a, 则 $a \geq 0$。

> **Tip**
>
> 即使对所有的 n，都有$a_n > 0$, 也不能得出 $a > 0$。例如: 数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 满足 $\frac{1}{n} > 0$, 但其极限为零。

- **证明数列收敛或求极限**: 单调有界原理, 夹逼准则, Cauchy收敛原理

定理 1.2.6 (单调收敛准则)

若单调数列 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 必收敛。

定理 1.1.15 (夹逼定理)

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足当 $n \geq N_0$ 时, 有 $b_n \leq a_n \leq c_n$, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则数列 $\{a_n\}$ 也是收敛的, 且极限为a。

定理 1.3.5 (柯西准则)

数列 $\{a_n\}$ 收敛当且仅当 $\{a_n\}$ 是柯西数列。

(柯西数列: $\forall \epsilon > 0$, $\exists N$, 当 $m, n \geq N$ 时, $|a_m - a_n| < \varepsilon$)

> **Tip**
>
> 单调递增无上界的数列一定是正无穷大，为什么?
>
> 柯西收敛原理的否定形式也要掌握

例题讲解

幂平均极限

(4) 求极限: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 9^n}$

解:

利用夹逼定理。

一方面，显然有：

$$9=\sqrt[n]{9^n}<\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+9^n}$$

另一方面：

$$\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+9^n}<\sqrt[n]{9\cdot 9^n}=9\sqrt[n]{9}$$

综上：

$$9<\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+9^n}<9\sqrt[n]{9}$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} 9\sqrt[n]{9}=9\cdot 1=9$。

由夹逼定理可知:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^n+2^n+3^n+\cdots+9^n}=9.$$

幂平均

定义: 对 $a_i\geq 0, p\in R$, a_i 的p次幂平均定义为:

$$M_p(a_i)=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

- $p=1$: $M_1(a_i)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ (算术平均值)
- $p=-1$: $M_{-1}(a_i)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$ (调和平均值)
- $p\to 0$: $\lim\limits_{p\to 0} M_p(a_i)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ (几何平均值)
- $p\to +\infty$: $\lim\limits_{p\to +\infty} M_p(a_i)=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ (最大值)
- $p\to -\infty$: $\lim\limits_{p\to -\infty} M_p(a_i)=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ (最小值)

16. 求极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})\cdots(1+\frac{n}{n^2})$

提示: 利用不等式

$$\frac{x}{x+1}\le\ln(1+x)\le x$$

答案: $\sqrt{e}$

欧拉常数

(5) 利用单调有界准则证明下面极限存在: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$

证明:

令 $u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$.

1. **单调性**:
   $u_{n+1}-u_n=(\frac{1}{n+1})-(\ln(n+1)-\ln n)=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})$
   因为当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\frac{x}{x+1}$，令 $x=\frac{1}{n}$，则 $\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1/n}{1/n+1}=\frac{1}{n+1}$。
   所以 $u_{n+1}-u_n<0$，数列 $\{u_n\}$ 单调递减。
2. **有界性**:
   $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})-\ln n=\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)-\ln n$
   $=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)-\ln n$
   $=\ln(n+1)-\ln n>0$
   所以 $\{u_n\}$ 有下界。

结论: 数列 $\{u_n\}$ 单调递减有下界，故极限存在。(该极限即欧拉常数 $\gamma\approx0.5772$)

p级数

例1.3.7 证明数列 $\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\}$ **发散.**

证明 (柯西准则):

设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$。

取 $m=2n$, 则

$|a_{2n}-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$

$\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

由于不满足柯西收敛原理，故数列发散。

31. 证明数列 $\left\{\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right\}$ ($\alpha > 1$) 收敛.

证明 (单调有界准则):

令 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$。

1. **单调性**: $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$, 显然 a_n 单调增加。
2. **有界性 (柯西凝聚法)**:
   $a_n = \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots$
   $< 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \cdots + \frac{1}{4^\alpha}\right) + \cdots$
   $= 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} + \cdots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} + \cdots$
   $= \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$
   由于 $\alpha > 1$, 公比 $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \in (0, 1)$, 该等比级数收敛。
   其和为 $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}}$。
   所以 $\{a_n\}$ 有上界。

结论: 数列 $\{a_n\}$ 单调递增有上界，故收敛。

压缩映射原理

对于递推数列 $x_{n+1} = f(x_n)$:

方法一: 证明与不动点的距离收缩

若能证明极限为 A, 且存在 $k \in (0, 1)$ 使得:

$$|x_{n+1} - A| \leq k|x_n - A|$$

则可推出:

$$0 \leq |x_{n+1} - A| \leq k^n |x_1 - A|$$

由于 $k^n \to 0$, 根据夹逼定理, $x_n \to A$。

方法二: 证明相邻项的距离收缩

若能证明存在 $k \in (0,1)$ 使得:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k|x_n - x_{n-1}|$$

则可推出:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^{n-1}|x_2 - x_1|$$

由此可证明 $\{x_n\}$ 是柯西数列，因此收敛。

求出极限 A 后, 解方程 $A = f(A)$ 即可。

36. 设数列 $\{a_n\}$ 满足:对任意 $n \geq 1$,有 $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|$, 证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 (柯西准则):

由题意递推可得:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}| \leq \cdots \leq (\frac{1}{2})^{n-1}|a_2 - a_1|$$

对任意 $m > n$, 有:

$|a_m - a_n| = |(a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)|$

$\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n|$

$\leq |a_2 - a_1| \left((\frac{1}{2})^{m-2} + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1}\right)$

$= |a_2 - a_1| \cdot \frac{(\frac{1}{2})^{n-1}(1-(\frac{1}{2})^{m-n})}{1-\frac{1}{2}} < |a_2 - a_1| \cdot (\frac{1}{2})^{n-2}$

当 $n \to \infty$ 时, $(\frac{1}{2})^{n-2} \to 0$。

因此, $\forall \epsilon > 0$, 可取足够大的 N, 当 $m > n \geq N$ 时, $|a_m - a_n| < \epsilon$。

故 $\{a_n\}$ 是柯西列, 从而收敛。

例1.2.13 已知 $u_1 > 0, u_{n+1} = 3 + \frac{4}{u_n}$, 证明 $\{u_n\}$ 收敛并求极限。

解 (压缩映射):

> 不动点 $A = 3 + 4/A \Rightarrow A^2 - 3A - 4 = 0 \Rightarrow A = 4$ 或 $A = -1$(舍)。

$|u_{n+1} - 4| = |3 + \frac{4}{u_n} - 4| = |\frac{4-u_n}{u_n}| = \frac{|u_n-4|}{u_n}$

因为 $u_n > 3$, 所以 $\frac{1}{u_n} < \frac{1}{3}$。

$|u_{n+1} - 4| < \frac{1}{3}|u_n - 4| < \cdots < (\frac{1}{3})^n|u_1 - 4|$

由夹逼定理, $\lim\limits_{n\to\infty} |u_{n+1} - 4| = 0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 4$

26. 设 $u_1 = 2, u_{n+1} = \frac{u_n(u_n^2+3)}{3u_n^2+1}$, 证明 $\{u_n\}$ 收敛并求极限。

解 (单调有界):

> 不动点 $a = \frac{a(a^2+3)}{3a^2+1} \Rightarrow a = 0, 1, -1$。

1. **有界性**: 证明 $u_n > 1$。
   $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^3+3u_k-3u_n^2-1}{3u_n^2+1} = \frac{(u_n-1)^3}{3u_n^2+1}$
   $u_1 = 2 > 1$, 若 $u_n > 1$, 则 $u_{n+1} - 1 > 0$, 故 $u_{n+1} > 1$。
   由归纳法得 $u_n > 1$。
2. **单调性**:
   $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n^2+3}{3u_n^2+1} = \frac{3u_n^2+1-2u_n^2+2}{3u_n^2+1} = 1 - \frac{2(u_n^2-1)}{3u_n^2+1}$
   因为 $u_n > 1$, 所以 $u_n^2 - 1 > 0$, 故 $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, 即 $u_{n+1} < u_n$。

$\{u_n\}$ 单调递减有下界1, 故收敛。设极限为 b, 解得 $b = 1$。

Stolz公式与柯西命题

Stolz 公式 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

若 $\{y_n\}$ 严格单调趋于 $+\infty$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}} = A$,

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$。

Stolz公式的推论 (柯西命题)

- **算术平均形式**: 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n} = A$。
- **几何平均形式**: 若 $x_n > 0$ 且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, 则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = A$。

求极限 $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$

解:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln n} \overset{Stolz}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln n - \ln(n-1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\ln(1-\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

求 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

解:

令 $x_n = \frac{n^n}{n!}$。考虑 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^n = e$$

由柯西命题的几何平均形式的推论:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

设 $x_1 \in (0,1), x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, 证明 $\lim_{n\to\infty} n x_n = 1$

首先证明 $x_n \to 0$。 $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 < 0$, 数列单调递减。$x_n \in (0,1)$ 有下界0, 故收敛。设极限为 a, 则 $a = a(1-a) \Rightarrow a = 0$。

考虑 $\lim_{n\to\infty} n x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$。应用Stolz公式。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} x_n}{x_n - x_{n+1}}$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_n^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n(1-x_n)}{x_n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (1 - x_n)$

因为 $x_n \to 0$, 所以极限为 1。

卷积型极限

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, **求证** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab$

证明 (松弛变量法):

令 $b_n = b + c_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$。

原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k (b+c_{n-k+1})}{n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k b}{n} + \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k c_{n-k+1}}{n} \right)$

第一部分: $\lim\limits_{n\to\infty} b \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = b \cdot a = ab$ (由柯西命题)。

第二部分: 需证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k c_{n-k+1}}{n} = 0$。

因为 $\{a_n\}$ 收敛, 所以有界, $\exists M > 0, |a_n| \le M$。因为 $c_n \to 0, \forall \epsilon > 0, \exists N$, 当 $k > N$ 时, $|c_k| < \epsilon$。

可以证明第二部分极限为0。

所以原极限为 ab。

加权平均极限

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, 求证 $\lim_{n\to\infty} \frac{x_1+2x_2+\cdots+nx_n}{n^2} = \frac{a}{2}$

证明 (拆分数列法):

令 $x_n = a + \alpha_n$, 则 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$。

原式 $= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} kx_k}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k(a+\alpha_k)}{n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} ka}{n^2} + \frac{\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k}{n^2} \right)$

第一部分: $\lim_{n\to\infty} \frac{a\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{n+1}{2n} = \frac{a}{2}$。

第二部分: $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k\alpha_k}{n^2}$。应用Stolz公式。

$\lim_{n\to\infty} \frac{n\alpha_n}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\alpha_n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} \cdot \alpha_n = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$。

所以原极限为 $\frac{a}{2} + 0 = \frac{a}{2}$。

估阶

设 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$.

(1) 求证 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$

(2) 求 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(a_n-\sqrt{2n})}{\ln n}$

(1)

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} > 0$, 故 $\{a_n\}$ 单调递增。

若有上界则必收敛，设极限为C, 则 $C = C + \frac{1}{C}$, 矛盾。故 $a_n \to +\infty$。

考虑 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_n + \frac{1}{a_n})^2 - a_n^2 = 2 + \frac{1}{a_n^2}$。

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2)=2+0=2$。

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n}\xlongequal{Stolz}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2-a_{n-1}^2}{n-(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{a_{n-1}^2})=2$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$。

(2)

$$a_n^2-2n=(a_n^2-a_{n-1}^2-2)+\cdots+(a_2^2-a_1^2-2)+(a_1^2-2)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k^2}-1.$$

原极限 $\xlongequal{分子有理化}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(a_n^2-2n)}{(a_n+\sqrt{2n})\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k^2}-1)}{(a_n+\sqrt{2n})\ln n}$

由于 $a_n\sim\sqrt{2n}, a_n+\sqrt{2n}\sim2\sqrt{2n}$。

原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k^2}-1}{2\sqrt{2}\ln n}\xlongequal{Stolz}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\frac{1}{a_n^2}}{\ln(n+1)-\ln n}=\frac{1}{4\sqrt{2}}$。