2021-2024期中考试题分类整理

▼ 2021-2024期中考试题分类整理

- 数列(函数)极限, 函数极限定义
- 求极限
- 函数连续性和间断点
- 利用导数的定义计算 分段函数可导性讨论
- 计算题: 直接求导, 隐函数求导, 参数方程求导, 极坐标求导 | 求微分
- 计算题: 高阶导数: 莱布尼兹公式
- 抽象函数导数计算证明
- 大题: 递推数列题
- 大题: 微分中值定理

数列(函数)极限, 函数极限定义

> **Note**
>
> 抓住定义, 掌握简单的放缩技巧

24.2. 用数列极限定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$, 其中 a 是常数.

解:

令$k=[|a|]+1>a, n>k$时

$\dfrac{a^n}{n!}=\dfrac{a\cdot a\cdots a}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\dfrac{a\cdots a}{(k+1)\cdots n}$

$=\dfrac{a^k}{k!}\dfrac{a}{k+1}\dfrac{a}{k+2}\cdots\dfrac{a}{n}<\dfrac{a^{k+1}}{k!}\dfrac{1}{n}$

则对于任意 $\varepsilon>0$, 取 $N=\max\{\left[\frac{a^{k+1}}{k!\varepsilon}\right]+1,k\}$.

当 $n>N$ 时,

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\frac{a^{k+1}}{k!}\frac{1}{n}<\frac{a^{k+1}}{k!}\frac{1}{N}<\varepsilon$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0.$

24.12. 写出无穷大量 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ 的定义, 并举例说明无界量不一定是无穷大量.

解:

定义: 对任意 $M > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < x < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > M$, 则称 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

举例:

取 $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

则当 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ 时, $f(x_n) = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$.

当 $n \to +\infty$ 时, $x_n \to 0$, 有 $f(x_n) \to +\infty$.

为无界量.

但对 $y_n = \frac{1}{2n\pi}$, $f(y_n) = 0$.

当 $n \to +\infty$ 时有 $f(y_n) = 0$.

则不为无穷大量.

即 $\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$ 在 $x \to 0^+$ 时为无界量但不为无穷大量.

23.1. 叙述函数极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R}$ 的 "$\varepsilon - \delta$" 定义, 并利用 "$\varepsilon - \delta$" 语言证明: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{2x+1} = 1$.

解:

定义: 已知 $f(x)$ 在 $D \subset \mathbb{R}$ 内有定义, 且 x_0 包含于 D 的某去心邻域. 对任意 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 对 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \cap D$ ($\mathring{U}(x_0, \delta)$ 为去心邻域), 均有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

证明:

此时

$$\left| \frac{x+2}{2x+1} - 1 \right| = \left| \frac{(x+2) - (2x+1)}{2x+1} \right| = \left| \frac{1-x}{2x+1} \right| = \frac{|x-1|}{|2x+1|}$$

不妨设 $|x-1| < 1$ 成立, 则此时有 $0 < x < 2$ 成立.

因此 $|2x+1| > 1$, 则 $\frac{1}{|2x+1|} < 1$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(1, \varepsilon)$. 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x+2}{2x+1} - 1 \right| = \frac{|x-1|}{|2x+1|} < |x-1| < \delta \leq \varepsilon \text{ 成立.}$$

因此 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+2}{2x+1} = 1$.

22.1. 叙述数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ 的 "$\varepsilon - N$" 定义, 并利用 "$\varepsilon - N$" 语言证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-n+1}{n^2+2} = 2$.

解:

定义: 若存在 $A \in \mathbb{R}$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}_+$, 当 $n > N$ 时均有 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立, 则称 $\{a_n\}$ 收敛于 A, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

证明:

由于

$$\left|\frac{2n^2-n+1}{n^2+2}-2\right| = \left|\frac{(2n^2-n+1)-2(n^2+2)}{n^2+2}\right| = \left|\frac{-n-3}{n^2+2}\right| = \frac{n+3}{n^2+2}$$
$$< \frac{n+3n}{n^2} = \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}$$

且对 $n \geq 1$, 有 $3 \leq 3n$ 成立, 即有

$$\left|\frac{2n^2-n+1}{n^2+2}-2\right| < \frac{n+3n}{n^2+2} < \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = [\frac{4}{\varepsilon}] + 1$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n^2-n+1}{n^2+2}-2\right| < \frac{4}{n} < \frac{4}{N} < \varepsilon \text{ 成立}.$$

因此有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-n+1}{n^2+2} = 2$.

求极限

> **Note**
>
> 包括基本类型的识别和处理技巧, 正确运用等价无穷小, 根式处理手法, 求和类型处理手法

24.1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e - e^{\cos x} - x^3 \sin\frac{1}{x}}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cos x}$

解:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e - e^{\cos x} - x^3 \sin\frac{1}{x}}{(\sqrt{1+x^2}-1)\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e - e^{\cos x} - x^3 \sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^2 \cdot 1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e(1-e^{\cos x-1})}{\frac{1}{2}x^2} - \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e(-(\cos x-1))}{\frac{1}{2}x^2} - \lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e(1-\cos x)}{\frac{1}{2}x^2} - 0 = \lim_{x\to 0} \frac{e\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = e$$

24.3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2e^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)^x$

解:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2e^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(2e^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(1+2e^{\frac{x}{x^2+1}}-2\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(2e^{\frac{x}{x^2+1}}-2\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2x\left(e^{\frac{x}{x^2+1}}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 2x\cdot\frac{x}{x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1}} = e^2$$

24.4. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2n+1}+\frac{2}{n^2+2n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n+n}\right)$

解:

设 $S_n = \frac{1}{n^2+2n+1}+\frac{2}{n^2+2n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n+n}$.

下界:

$$S_n > \frac{1}{n^2+2n+n}+\frac{2}{n^2+2n+n}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n+n} = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+3n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2+3n} = \frac{n+1}{2(n+3)}$$

上界:

$$S_n < \frac{1}{n^2+2n+1}+\frac{2}{n^2+2n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n+1} < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(n+2)} = \frac{n+1}{2(n+2)}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}$$

由夹逼准则 (Squeeze Theorem) 可知,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

23.2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{\cos\ln(1-2x)}]^{\frac{1}{x^2}}$

解:

$$\lim_{x\to 0}[\cos\ln(1-2x)]^{\frac{1}{2x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2x^2}\ln[\cos\ln(1-2x)]}$$

考虑指数部分:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos\ln(1-2x)-1)]}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos\ln(1-2x)-1}{2x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}[\ln(1-2x)]^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(-2x)^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

则原极限 $= e^{-1}$.

23.3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^3}-1+x^4\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+2x)\cdot\tan^2 x}$

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^3}-1+x^4\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+2x)\cdot\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(3x^3)+o(x^3)+x^4\cos\frac{1}{x}}{(2x)\cdot x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}x^3}{2x^3} + \lim_{x\to 0}\frac{x^4\cos\frac{1}{x}}{2x^3} = \frac{3}{4} + \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{x} = \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}$$

23.4. 当 $x\to 1$ 时, $1-\dfrac{m}{1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}}$ 是 $(x-1)$ 的等价无穷小量 ($m\in\mathbb{N}$), 求常数 m 的值

解:

根据等价无穷小量的定义，有：

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{m}{1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}}}{x-1} = 1$$

对极限表达式的左边进行化简：

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \lim_{x\to1}\frac{\frac{(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})-m}{1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}}}{x-1}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}-m}{(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+\cdots+(x^{m-1}-1)}{(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)[1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{m-2}+\cdots+1)]}{(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})}\\
&= \lim_{x\to1}\frac{1+(x+1)+(x^2+x+1)+\cdots+(x^{m-2}+\cdots+1)}{1+x+x^2+\cdots+x^{m-1}}\\
&= \frac{1+2+3+\cdots+(m-1)}{1+1+1+\cdots+1}\\
&= \frac{\frac{(m-1)m}{2}}{m}\\
&= \frac{m-1}{2}
\end{aligned}
$$

因为该极限值为 1，所以：

$$\frac{m-1}{2}=1$$

解得：$m=3$

23.5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1+\sin 1}+\frac{2}{n^2+1+\sin 2}+\cdots+\frac{n}{n^2+1+\sin n}\right)$

解:

对任意正整数 $i, 1\le i\le n$, 有 $n^2\le n^2+1+\sin i\le n^2+2$ 成立.因此

$$\frac{1}{n^2+2}\le\frac{1}{n^2+1+\sin i}\le\frac{1}{n^2}$$

设 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+1+\sin i}$

下界:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+1+\sin i}\ge\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2}=\frac{1}{n^2+2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2(n^2+2)}$$

上界:

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+1+\sin i}\le\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{n+1}{2n}$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2)}=\frac{1}{2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$.

利用夹逼准则,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$$

22.2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}(e^{2x}-\arctan x)^{\csc x}$

解:

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\csc x\ln(e^{2x}-\arctan x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{2x}-\arctan x)}{\sin x}}$

考虑指数部分:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+e^{2x}-1-\arctan x)}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-\arctan x}{x}$$

$(e^{2x}-1-\arctan x\to 0,\arctan x\to 0)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=2-1=1$$

从而原极限 $=e^1=e$.

22.3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\frac{2\pi}{3}}\frac{1+2\cos x}{3x-2\pi}$

解:

令 $t=x-\frac{2\pi}{3}$, 则 $x=t+\frac{2\pi}{3}$. 当 $x\to\frac{2\pi}{3}$ 时, $t\to 0$.

$$\lim_{t\to 0}\frac{1+2\cos(t+\frac{2\pi}{3})}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{1+2(\cos t\cos\frac{2\pi}{3}-\sin t\sin\frac{2\pi}{3})}{3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1+2(-\frac{1}{2}\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t)}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t-\sqrt{3}\sin t}{3t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t}-\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{3t}-\frac{\sqrt{3}}{3}=0-\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

22.4. 计算极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+6x-1}+x+3)$

解:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+6x-1}+(x+3))(\sqrt{x^2+6x-1}-(x+3))}{\sqrt{x^2+6x-1}-(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x((x^2+6x-1)-(x^2+6x+9))}{\sqrt{x^2+6x-1}-x-3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-10x}{-x\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}-x-3}$$

(注意 $x<0, \sqrt{x^2}=-x$)

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-10}{-\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{3}{x}}=\frac{-10}{-\sqrt{1}-1-0}=\frac{-10}{-2}=5$$

22.5. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{\sqrt{n^6+1+1}}+\frac{2^2}{\sqrt{n^6+2+\frac{1}{2}}}+\cdots+\frac{n^2}{\sqrt{n^6+n+\frac{1}{n}}}\right)$

解:

由于 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+k+\frac{1}{k}}}$

上界:

$$S_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6}}=\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

下界:

$$S_n>\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n^6+n+1}}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n+1}}$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\sqrt{n^6+n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

从而由夹逼定理, 原极限 $=\frac{1}{3}$.

21.1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\arcsin x\arctan x}{(\sqrt{\cos x}-1)\ln(1+x)}$

解:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot x\cdot x}{(\cos x-1)\ln(1+x)}\cdot(\sqrt{\cos x}+1)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{(-\frac{1}{2}x^2)\cdot x}\cdot 2=-4$$

21.2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$, 求常数 a, b.

由题可知

$$b=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax)$$

令 $t=\dfrac{1}{x}$，则当 $x\to-\infty$ 时, $t\to 0^-$

$$\begin{aligned}
b&=\lim_{t\to 0^-}(\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}-\frac{a}{t})\\
&=\lim_{t\to 0^-}(\frac{\sqrt{1-t+t^2}}{\sqrt{t^2}}-\frac{a}{t})\\
&=\lim_{t\to 0^-}(\frac{\sqrt{1-t+t^2}}{-t}-\frac{a}{t})\\
&=\lim_{t\to 0^-}\frac{-\sqrt{1-t+t^2}-a}{t}
\end{aligned}$$

因为极限存在，所以分母趋于 0 时，分子也必须趋于 0。

则应有 $\lim_{t\to 0^-}(-\sqrt{1-t+t^2}-a)=0$ 成立。

$$a=\lim_{t\to 0^-}(-\sqrt{1-t+t^2})=-1$$

从而，

$$\begin{aligned}
b&=\lim_{t\to 0^-}\frac{1-\sqrt{1-t+t^2}}{t}\\
&=\lim_{t\to 0^-}\frac{(1-\sqrt{1-t+t^2})(1+\sqrt{1-t+t^2})}{t(1+\sqrt{1-t+t^2})}\\
&=\lim_{t\to 0^-}\frac{1-(1-t+t^2)}{t(1+\sqrt{1-t+t^2})}\\
&=\lim_{t\to 0^-}\frac{t-t^2}{t(1+\sqrt{1-t+t^2})}\\
&=\lim_{t\to 0^-}\frac{1-t}{1+\sqrt{1-t+t^2}}\\
&=\frac{1-0}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

综上，$a=-1, b=\dfrac{1}{2}$.

22.3. 设 a, b, c 为正数, 求下列极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$

解:

原式 $=\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)}$

考虑指数部分:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{a\cdot a^x+b\cdot b^x+c\cdot c^x-(a+b+c)}{a+b+c}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{a(a^x-1)+b(b^x-1)+c(c^x-1)}{a+b+c}\\
&=\frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to 0}\left(a\frac{a^x-1}{x}+b\frac{b^x-1}{x}+c\frac{c^x-1}{x}\right)\\
&=\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}=\frac{\ln(a^ab^bc^c)}{a+b+c}
\end{aligned}$$

原极限 $=e^{\frac{\ln(a^ab^bc^c)}{a+b+c}}=(a^ab^bc^c)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

22.4. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}$

$$\begin{aligned}
&=(t=\frac{1}{x})\lim_{t\to 0^+}(\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1})\\
&=\lim_{t\to 0^+}(\frac{\sqrt[3]{1+t+t^3}}{t}-\frac{\sqrt{1+t+t^2}}{t})\\
&=\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{1+t+t^3}-1}{t}+\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\sqrt{1+t+t^2}}{t}\\
&=\lim_{t\to 0^+}\frac{1+t+t^3-1}{t((\sqrt[3]{1+t+t^3})^2+\sqrt[3]{1+t+t^3}+1)}+\lim_{t\to 0^+}\frac{1-(1+t+t^2)}{t(1+\sqrt{1+t+t^2})}\\
&=\lim_{t\to 0^+}\frac{t+t^3}{3t}+\lim_{t\to 0^+}\frac{-t-t^2}{2t}\\
&=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

22.11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{1}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

有绝对值, 为了去绝对值分两侧考虑

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{x} \quad (\text{此时} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty)\\
&=\lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{(\cos x)e^{-\frac{2}{x}}+1}+1\\
&=\frac{0+0}{1\cdot 0+1}+1=1
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^-}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}-\frac{\sin x}{x} \quad (\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0)\\
&=\lim_{x\to 0^-}\frac{2+0}{1+0}-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}\\
&=2-1=1
\end{aligned}$$

则$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{\cos x+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1$

函数连续性和间断点

> **Note**
>
> 关注函数分子本身的间断点, 让分母为 0 的点

24.5. 指出函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0,\\ \ln(1+x), & -1<x\le 0\end{cases}$ 的间断点, 并判断其类型.

解: 可能的间断点为 0 和 1.

在 x=0 处:

$f(0)=\ln(1+0)=0.$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点 (第一类).

在 x=1 处:

$f(x)$ 在 $x=1$ 无定义.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0.$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$

因为右极限为无穷大, 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点 (无穷间断点).

> 间断点考虑的是函数在去心邻域有定义，而在$x=-1$ 处,左侧函数没定义, 所以不考虑-1是否为间断点.

22.12. 已知 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{\sin\pi x}{x-1}}-1}\quad(-1<x<2)$, 试判断 $f(x)$ 的间断点并据理说明间断点的类型。

考虑所有无定义点, 即分母为0处, 有

$$\begin{cases} x-1=0 \\ e^{\frac{\sin\pi x}{x-1}}-1=0 \text{ 且 } x-1\neq 0 \end{cases}$$

对 $e^{\frac{\sin\pi x}{x-1}}-1=0$, 有 $\frac{\sin\pi x}{x-1}=0$, 对 $-1<x<2$ 解得 $x=0$。

考虑 $x=0$ 时, 则 $x\to 0$ 有 $e^{\frac{\sin\pi x}{x-1}}-1\to 0$, 从而 $f(x)\to\infty$。

则 $x=0$ 为第二类间断点。

再考虑 $x=1$ 时, 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1} &\xrightarrow{t=x-1}\lim_{t\to 0}\frac{\sin[\pi(t+1)]}{t}\\ &=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin\pi t}{t}=-\pi\end{aligned}$$

则

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{e^{\frac{\sin\pi x}{x-1}}-1}=\frac{1}{e^{-\pi}-1}$$

则 $x=1$ 为可去间断点。

综上, $f(x)$ 有可去间断点 $x=1$, 第二类间断点 $x=0$。

21.9. 设函数 $f(x)=e^{\frac{x}{x-1}}-1$，求函数 $\frac{1}{f(x)}$ 的间断点，并判断它们的类型。

考虑间断点即考虑 $\frac{1}{f(x)}$ 没有定义的点。

① 当 $f(x)$ 无定义时，$x-1=0, x=1$。

而对 $x \to 1^{+}$, 有 $\frac{x}{x-1} \to +\infty, f(x) \to +\infty$

则 $\lim\limits_{x \to 1^{+}} \frac{1}{f(x)}=0$

$x \to 1^{-}$ 时, $\frac{x}{x-1} \to -\infty, f(x) \to -1$

则 $\lim\limits_{x \to 1^{-}} \frac{1}{f(x)}=-1$

$0 \neq -1$, 则 $x=1$ 为跳跃间断点；

② 当 $f(x)=0$ 时，同样 $\frac{1}{f(x)}$ 无定义

此时 $e^{\frac{x}{x-1}}-1=0$ 解得 $x=0$。

而 $x \to 0$ 时, $f(x) \to 0$,

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{f(x)}$ 不存在, 则 $x=0$ 为第二类间断点。

综上, $\frac{1}{f(x)}$ 的间断点为 $x=0$ (第二类间断点) 和 $x=1$ (跳跃间断点)。

利用导数的定义计算 分段函数可导性讨论

24.10. 试确定常数 a,b 的值, 使函数 $f(x)=\begin{cases}1+\ln(1-2x), & x \leq 0, \\ a+be^{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 并求此时导函数 $f'(x)$(吉米多维奇高数174)

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,必有 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,即 $\lim\limits_{x \to 0^{+}} f(x)=\lim\limits_{x \to 0^{-}} f(x)=f(0)=1$，得 $a+b=1$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x \to 0^{-}} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \to 0^{-}} \frac{1+\ln(1-2x)-1}{x}=-2$$

$$f'_{+}(0)=\lim_{x \to 0^{+}} \frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x \to 0^{+}} \frac{a+be^{x}-(a+b)}{x}=\lim_{x \to 0^{+}} \frac{b(e^{x}-1)}{x}=b$$

所以 $b=-2$, 于是 $a=3$, 且有 $f'(0)=-2$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{1-2x}, & x \leq 0, \\ -2e^{x}, & x>0.\end{cases}$$

24.11. 设函数 $f(x)=x^2D(x)$, 其中 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$, 试讨论函数 $f(x), x\in(-\infty,+\infty)$ 的连续性和可导性; 若可导, 求其导数.

解:

先考虑连续性

当$x\to 0$时，$D(x)$有界而x^2为无穷小

所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\cdot D(x)=0$.**且 $f(0)=0$, 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.**

在 $x=x_0$ 处, $x_0\neq 0$ 时,

x 为有理数时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} x^2\cdot 1=x_0^2$.

x 为无理数时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} x^2\cdot 0=0$.

二者不相等, 故 $f(x)$ 在 $x=x_0, x_0\neq 0$ 处不连续.

因此考虑 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot D(x)-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0} x\cdot D(x)=0$.

综上, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且可导, $f'(0)=0$.

在 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上 $f(x)$ 不连续, 也不可导.

23.9. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+e^{2x}, & (x<0)\\ ax+b, & (x\geq 0)\end{cases}$

(1) 求常数 a,b 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导;

(2) 计算 $f'(x)$ ($x\in\mathbb{R}$).

(3) 试问 $f''(0)$ 是否存在? 为什么?

解:

1) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导则首先要在 $x=0$ 处连续.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2\sin\frac{1}{x}+e^{2x})=0+e^0=1$$

且 $f(0)=b$. 由连续知 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)$, 从而 $b=1$.

又因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}+e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}+\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{x}=0+2=2$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+b-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a$$

利用可导则 $f'_-(0)=f'_+(0)$, 则 $a=2$. 综上, $a=2, b=1$.

2)

$x<0$ 时, $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})+2e^{2x}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+2e^{2x}$.

$x>0$ 时, $f'(x)=a=2$.

$x=0$ 时由(1), $f'(0)=2$.

综上, $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}+2e^{2x}, & x<0\\ 2, & x\geq 0\end{cases}$

3)

由题, $\lim\limits_{x\to 0^-}2x\sin\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}2e^{2x}=2$, 而 $\lim\limits_{x\to 0^-}\cos\frac{1}{x}$ 不存在.

则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)$ 不存在.

因此 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续, 从而 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不可导, 即 $f''(0)$ 不存在.

22.6. 已知 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2xe^{n(x-1)}+ax^2+b}{e^{n(x-1)}+1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 求常数 a, b 的值.

由于 $x>1$ 时, $n(x-1)\to+\infty$, 有 $e^{n(x-1)}\to+\infty$.
此时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2xe^{n(x-1)}+ax^2+b}{e^{n(x-1)}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x+(ax^2+b)/e^{n(x-1)}}{1+1/e^{n(x-1)}}=2x$$

$x<1$ 时, $n(x-1)\to-\infty$, 有 $e^{n(x-1)}\to 0$.

此时

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2xe^{n(x-1)}+ax^2+b}{e^{n(x-1)}+1}=ax^2+b$$

而

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2e^0+a+b}{e^0+1}=\frac{2+a+b}{2}$$

则有

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x>1\\ \frac{a+b+2}{2}, & x=1\\ ax^2+b, & x<1\end{cases}$$

又 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

此时有 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=f(1)$.

$\lim\limits_{x\to1^-}(ax^2+b)=a+b$, $\lim\limits_{x\to1^+}2x=2$.

则有 $\frac{a+b+2}{2}=a+b=2$.

又由可导则应有 $f'_-(1)=f'_+(1)$.

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{ax^2+b-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{a(x^2-1)+(a+b-2)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}a(x+1)=2a$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{2x-2}{x-1}=2$$

从而有 $2a=2$, 即 $a=1$. 因此 $b=2-a=1$.

21.5. 定义函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的值, 使其在 $x=0$ 处连续, 并讨论在 $x=0$ 处是否可导, 其中 $f(x)=(1+\sin^2\frac{1}{x})^x$.

解:

对 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin^2\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln(1+\sin^2\frac{1}{x})}$.

由于 $\sin^2\frac{1}{x}\in[0,1]$, 则 $\ln(1+\sin^2\frac{1}{x})\in[0,\ln2]$.

从而 $0\le x\ln(1+\sin^2\frac{1}{x})\le x\ln2$ (for $x>0$).

又 $\lim\limits_{x\to0}x\ln2=0$. 由夹逼准则, $\lim\limits_{x\to0}x\ln(1+\sin^2\frac{1}{x})=0$.

从而 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=e^0=1$.

因此定义 $f(0)=1$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

再讨论可导性, 考虑 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+\sin^2\frac{1}{x})^x-1}{x}$.

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln(1+\sin^2\frac{1}{x})}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+\sin^2\frac{1}{x})}{x}$$

(分子部分 $\to0$, 利用 $e^u-1\sim u$)

$$= \lim_{x\to 0} \ln(1+\sin^2 \frac{1}{x})$$

对 $n\to\infty$, 当 $x_n = \frac{1}{n\pi}$ 时, $\sin^2 \frac{1}{x_n} = 0, \ln(1+\sin^2 \frac{1}{x_n}) = \ln 1 = 0.$

当 $x_n = \frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ 时, $\sin^2 \frac{1}{x_n} = 1, \ln(1+\sin^2 \frac{1}{x_n}) = \ln 2.$

根据**归结原理的逆否命题**知道，$\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+\sin^2 \frac{1}{x})$ 不存在.

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

计算题: 直接求导, 隐函数求导, 参数方程求导, 极坐标求导 | 求微分

> **Note**
>
> 每年必考, 计算量可能有点大

24.6. 设函数 $y = x^2 e^{\sin^2 \frac{1}{x}}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2xe^{\sin^2 \frac{1}{x}} + x^2 e^{\sin^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(2\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= e^{\sin^2 \frac{1}{x}}(2x - \sin\frac{2}{x})\end{aligned}$$

24.7. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

解:

代入 $x=0$, 则 $\ln y = 0+0 = 0$, 所以 $y=1$.

对方程两边同时对 x 求导有

$$\frac{1}{x^2+y}(2x+y') = 3x^2 y + x^3 y' + \cos x$$

代入 $x=0, y=1$, 则 $\frac{1}{0+1}(0+y') = 0+0+\cos 0 = 1.$

$y'|_{x=0} = 1$, 则 $\mathrm{d}y|_{x=0} = 1\cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}x.$

24.8. 求极坐标系下曲线 $r = e^{\theta}$ 在点 $(r, \theta) = (e^{\pi/2}, \pi/2)$ 处在直角坐标系下的切线方程.

解:

由题 $\begin{cases} x = r\cos\theta = e^{\theta}\cos\theta \\ y = r\sin\theta = e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$

则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = e^{\theta}\cos\theta + e^{\theta}(-\sin\theta) = e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} = e^{\theta}\sin\theta + e^{\theta}\cos\theta = e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta} = \frac{e^{\theta}(\sin\theta + \cos\theta)}{e^{\theta}(\cos\theta - \sin\theta)} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$$

在 $\theta = \pi/2$ 处切线斜率 $k = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{\theta=\pi/2} = \frac{1+0}{0-1} = -1$.

又 $\theta = \pi/2$ 时 $x = 0, y = e^{\pi/2}$, 即切点直角坐标 $(0, e^{\pi/2})$.

所以切线方程为 $y - e^{\pi/2} = -1(x - 0)$, 即 $y = -x + e^{\pi/2}$.

23.6. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $x^2 + y = \tan(x - y)$ 所确定, 且 $y(0) = 0$. 求 $y'(0)$ 和 $y''(0)$.

解:

对 $x^2 + y = \tan(x - y)$, 方程两边同时对 x 求导有

$$2x + y' = \sec^2(x - y)\cdot(1 - y') \quad \cdots ①$$

代入 $x = y = 0$, 有 $0 + y' = \sec^2(0)(1 - y')$, 有 $y' = 1 - y'$, $2y' = 1$, $y' = \frac{1}{2}$. 即 $y'(0) = \frac{1}{2}$.

对 ① 式两边再对 x 求导有

$$2 + y'' = 2\sec(x - y)\cdot(\sec(x - y)\tan(x - y))\cdot(1 - y')^2 + \sec^2(x - y)\cdot(-y'')$$

代入 $x = y = 0, y' = \frac{1}{2}$, 有

$$2 + y'' = 2\sec^2(0)\tan(0)(1 - \frac{1}{2})^2 + \sec^2(0)(-y'') = 0 - y''$$

$2 + y'' = -y'' \implies 2y'' = -2 \implies y'' = -1$. 即 $y''(0) = -1$.

23.7. 已知 $y=x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x\cdot\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\\&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+x\cdot\frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{(x+\sqrt{x^2+1})}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\\&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}})=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

23.8. 设 $y=\arctan\frac{x+1}{x-1}+\ln\sqrt{1+x^2}$，求 $\mathrm{d}y$ 与 $\mathrm{d}y\big|_{x=3}$.

$$\begin{aligned}y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{1}{1+(\frac{x+1}{x-1})^2}\cdot\frac{(x-1)\cdot1-(x+1)\cdot1}{(x-1)^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\\&=\frac{-2}{(x-1)^2+(x+1)^2}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{-2}{2x^2+2}+\frac{x}{1+x^2}=\frac{x-1}{1+x^2}\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{d}y=\frac{x-1}{1+x^2}\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y\big|_{x=3}=\frac{3-1}{1+3^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\mathrm{d}x$

23.11. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\y=1-\cos t\end{cases}$ 所确定.

(1) 试求曲线 $y=y(x)$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程； (2) 计算 $y''(x)$.

(1) 由参数方程, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\cos t,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\sin t$.

则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$.

代入 $t=\frac{\pi}{2}$, 有 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{1-0}=1$.

即切线斜率为 1. 又 $t=\frac{\pi}{2}$ 时 $x=\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-1,y=1-\cos\frac{\pi}{2}=1$.

从而在 $t=\frac{\pi}{2}$ 处切线方程为 $y-1=1\cdot(x-(\frac{\pi}{2}-1))$, 即 $x-y-\frac{\pi}{2}+2=0$.

(2) 因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}=\frac{\cos t-(\cos^2 t+\sin^2 t)}{(1-\cos t)^2}=\frac{\cos t-1}{(\cos t-1)^2}=\frac{1}{\cos t-1}$.

则 $y''(x)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{1}{\cos t-1}}{1-\cos t}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}$.

22.7. 已知 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ (a>0为实常数), 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解:

$$
\begin{aligned}
y'&=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}\\
&=\frac{(a^2-x^2)-x^2+a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{2a^2-2x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}
\end{aligned}
$$

8. 设 $y=f(x)$ 是由方程 $e^{x+y}-2xy=e$ 所确定的隐函数.

(1) 求 $f'(0)$; (2) 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(y-1)\sin(ex)}{\sqrt{1+2x^2}-1}$.

解:

(1) 对等式 $e^{x+y}-2xy=e$, 代入 $x=0$ 则 $e^y=e$, 所以 $y=1$.

再对该等式两端对 x 求导有:$e^{x+y}(1+y')-2(y+xy')=0$.

代入 $x=0,y=1$, 有 $e(1+y')-2(1)=0$, 解得 $y'=\frac{2}{e}-1$.

即 $f'(0)=\frac{2}{e}-1$.

(2)

$$
\lim_{x\to0}\frac{(y-1)\sin(ex)}{\sqrt{1+2x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{(y-1)\cdot ex}{\frac{1}{2}(2x^2)}=\lim_{x\to0}e\frac{y-1}{x}
$$

又因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{y-1}{x}$.

则原极限 $=e\cdot f'(0)=e(\frac{2}{e}-1)=2-e$.

22.9. 已知 $\begin{cases} x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}) \\ y=\sqrt{1+t^2} \end{cases}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解:

由 $x=\ln(t+\sqrt{1+t^2})$, 有 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

由 $y=\sqrt{1+t^2}$, 有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{t/\sqrt{1+t^2}}{1/\sqrt{1+t^2}}=t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{1}{1/\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{1+t^2}$$

22.10. 曲线 C 的极坐标方程为 $r=e^\theta+\theta$, 求曲线 C 在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处的切线方程.

解:

利用极坐标方程, 结合极坐标与直角坐标变换公式 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$.

则曲线C的参数方程为 $\begin{cases} x=(e^\theta+\theta)\cos\theta \\ y=(e^\theta+\theta)\sin\theta \end{cases}$.

从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}=(e^\theta+1)\sin\theta+(e^\theta+\theta)\cos\theta$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=(e^\theta+1)\cos\theta-(e^\theta+\theta)\sin\theta$$

有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(e^\theta+1)\sin\theta+(e^\theta+\theta)\cos\theta}{(e^\theta+1)\cos\theta-(e^\theta+\theta)\sin\theta}$$

在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 处, 切线斜率 $k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{\theta=\pi/2}=\frac{(e^{\pi/2}+1)\sin\frac{\pi}{2}+(e^{\pi/2}+\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}}{(e^{\pi/2}+1)\cos\frac{\pi}{2}-(e^{\pi/2}+\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{\pi/2}+1}{-(e^{\pi/2}+\frac{\pi}{2})}$.

且此时 $x=(e^{\pi/2}+\frac{\pi}{2})\cos\frac{\pi}{2}=0$, $y=(e^{\pi/2}+\frac{\pi}{2})\sin\frac{\pi}{2}=e^{\pi/2}+\frac{\pi}{2}$.

从而切线方程为 $y-(e^{\pi/2}+\frac{\pi}{2})=-\frac{e^{\pi/2}+1}{e^{\pi/2}+\frac{\pi}{2}}x$.

21.6. 设 $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$, 求 y', y''.

解:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2}\frac{3x^2(x-1)^2-x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{1}{2}\frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3}=\frac{3x^3-3x^2-2x^3}{2(x-1)^3}=\frac{x^3-3x^2}{2(x-1)^3}\\
y'' &= \frac{1}{2}\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-(x^3-3x^2)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{1}{2}\frac{(3x^2-6x)(x-1)-3(x^3-3x^2)}{(x-1)^4}\\
&=\frac{1}{2}\frac{(3x^3-3x^2-6x^2+6x)-(3x^3-9x^2)}{(x-1)^4}=\frac{1}{2}\frac{3x^3-9x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4}=\frac{3x}{(x-1)^4}
\end{aligned}
$$

21.7. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 确定, 求 $y'(0), y''(0)$.

解:

由 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$, 代入 $x=0$, 则 $0+\ln y=0 \implies y=1$.

再对该等式两边同时对 x 求导, 有:

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{y'-1}{y-x}=1 \quad \cdots ①$$

代入 $x=0, y=1$, 有 $\cos 0\cdot(1)+\frac{y'-1}{1-0}=1$, 得此时 $y'=1$.

对 ① 式, 再对等式两边对 x 求导, 有

$$-\sin(xy)(y+xy')^2+\cos(xy)(y'+y'+xy'')+\frac{y''(y-x)-(y'-1)^2}{(y-x)^2}=0$$

代入 $x=0, y=1, y'=1$ 有:

$$-\sin 0+\cos 0(1+1+0)+\frac{y''(1-0)-(1-1)^2}{(1-0)^2}=0 \implies y''=-2$$

故 $y'(0)=1, y''(0)=-2$.

21.8. 设参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=t-\arctan t \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解:

有 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2}$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{t^2/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)}=\frac{t}{2}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{1/2}{2t/(1+t^2)}=\frac{1+t^2}{4t}$$

计算题: 高阶导数: 莱布尼兹公式

> **Note**
>
> 每年必考, 计算量可能有点大

24.9. 设函数 $y=e^x\sin x$, 证明 $y^{(n)}=2^{\frac{n}{2}}e^x\sin(x+\dfrac{n\pi}{4})$.

解:用数学归纳法

当 $n=1$ 时, $y'=e^x\cos x+e^x\sin x=\sqrt{2}e^x(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x)=\sqrt{2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})=2^{1/2}e^x\sin(x+\frac{\pi}{4})$. 成立.

假设 $n=k$ 时有 $y^{(k)}=2^{k/2}e^x\sin(x+\frac{k\pi}{4})$ 成立.

对 $n=k+1$,

$$\begin{aligned}y^{(k+1)}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y^{(k)}=2^{k/2}[e^x\sin(x+\frac{k\pi}{4})+e^x\cos(x+\frac{k\pi}{4})]\\&=2^{k/2}e^x\sqrt{2}\sin((x+\frac{k\pi}{4})+\frac{\pi}{4})=2^{(k+1)/2}e^x\sin(x+\frac{(k+1)\pi}{4}).\end{aligned}$$

成立.因此 $y^{(n)}=2^{n/2}e^x\sin(x+\dfrac{n\pi}{4})$.

23.10. 已知 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, 求 $f^{(6)}(0)$.

10. 法① 利用 Leibniz 公式, $f(x)=x\cdot(1+x)^{-1/2}$
由于

$$[(1+x)^{-1/2}]^{(n)}=(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)(1+x)^{-1/2-n}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

从而 $f^{(n)}(x)=\binom{n}{0}x\cdot[(1+x)^{-1/2}]^{(n)}+\binom{n}{1}(x)'\cdot[(1+x)^{-1/2}]^{(n-1)}+0$

$$f^{(n)}(x)=x[(1+x)^{-1/2}]^{(n)}+n[(1+x)^{-1/2}]^{(n-1)}$$

代入 $n=6,x=0$

$$f^{(6)}(0)=0+6\cdot[(1+x)^{-1/2}]^{(5)}|_{x=0}$$

$$[(1+x)^{-1/2}]^{(5)}|_{x=0}=(-1)^5\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}{2^5}(1)^{-\frac{11}{2}}=-\frac{945}{32}$$

则 $f^{(6)}(0)=6\cdot(-\frac{945}{32})=-\frac{2835}{16}$.

法②, 对 $f(x)$ 进行变形, $f(x)=\frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{1/2}-(1+x)^{-1/2}$

又

$$[(1+x)^{\alpha}]^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

从而 $f^{(n)}(x)=[(1+x)^{1/2}]^{(n)}-[(1+x)^{-1/2}]^{(n)}$.

代入 $n=6,x=0$:

$$[(1+x)^{1/2}]^{(6)}|_{x=0}=(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})=-\frac{945}{64}$$

$$[(1+x)^{-1/2}]^{(6)}|_{x=0}=(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})(-\frac{11}{2})=\frac{10395}{64}$$

则 $f^{(6)}(0)=-\frac{945}{64}-\frac{10395}{64}=-\frac{11340}{64}=-\frac{2835}{16}$.

22.11. 已知 $f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(7)}(0)$.

解:

对 $f(x)=\arctan x$, 有 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

转化可得 $(1+x^2)f'(x)=1$, 对等式两边求 n 阶导, (n≥1).

由莱布尼兹公式, 有

$$\binom{n}{0}(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+\binom{n}{1}(2x)f^{(n)}(x)+\binom{n}{2}(2)f^{(n-1)}(x)+0=0$$

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x)+2nxf^{(n)}(x)+n(n-1)f^{(n-1)}(x)=0$$

此时令 $x=0$, 则对上式有

$$f^{(n+1)}(0)+n(n-1)f^{(n-1)}(0)=0\quad(n\geq1)$$

逐项递推可得

$f^{(7)}(0) = -720 f'(0) = -720.$

21.10. 设 $f(x) = x\ln(1+x)$, 求 $f^{(100)}(x)$.

解:
由莱布尼兹公式

$$f^{(100)}(x) = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} [x]^{(100-k)} [\ln(1+x)]^{(k)}$$

由于 $[x]^{(n)}$ 在 $n \geq 2$ 时为 0, 故只剩前两项:

$$= \binom{100}{100} [x]^{(0)} [\ln(1+x)]^{(100)} + \binom{100}{99} [x]^{(1)} [\ln(1+x)]^{(99)}$$

$$= x[\ln(1+x)]^{(100)} + 100[\ln(1+x)]^{(99)}$$

$$[\ln(1+x)]^{(k)} = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$$

$$= x\left(\frac{(-1)^{99}99!}{(1+x)^{100}}\right) + 100\left(\frac{(-1)^{98}98!}{(1+x)^{99}}\right)$$

$$= \frac{-99!x}{(1+x)^{100}} + \frac{100 \cdot 98!}{(1+x)^{99}} = \frac{-99 \cdot 98!x + 100 \cdot 98!(1+x)}{(1+x)^{100}}$$

$$= \frac{98!(-99x + 100 + 100x)}{(1+x)^{100}} = \frac{98!(x+100)}{(1+x)^{100}}$$

抽象函数导数计算证明

> **Note**
>
> 结合抽象函数运算性质和导数的定义去做

21.13. 设函数 $f(x), g(x)$ 定义于 $\mathbb{R}$ 上, 且满足

(1) $f(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$;

(2) $f(x), g(x)$ **在** $x = 0$ **处可导;**

(3) $f(0) = 0, g(0) = 1, f'(0) = 1, g'(0) = 0.$

证明: $f(x)$ **在** $\mathbb{R}$ **上可导, 且** $f'(x) = g(x)$.

抽象函数与导数结合, 扣住导函数的定义式即可, 基本上把条件和待证列出来关系就明晰了.

13. 要证 $f(x)$ 可导, 即证 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 均存在.

由题, $f(x+\Delta x)=f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)$.

又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f(0)=0, f'(0)=1$.

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=f'(0)=1$.

类似地, 由 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导, $g(0)=1, g'(0)=0$.

有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}=0$.

则对 $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\frac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}=f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)-1}{\Delta x}=0$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}g(x)\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=g(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=g(x)$$

二者相加有

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)(g(\Delta x)-1)+f(\Delta x)g(x)}{\Delta x}=g(x)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(\Delta x)+f(\Delta x)g(x)-f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=g(x)\end{aligned}$$

则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 又 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=g(x)$.

则 $f'(x)=g(x)$.

大题: 递推数列题

> **Note**
>
> 主要侧重单调有界定理

23.13. 设函数 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1\quad(n\in\mathbb{N}^+)$.

(1) 证明方程 $f_n(x)=0$ 有唯一正根 x_n;

(2) 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并计算 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

（1）证明:

$f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=n-1\geq 0$ 由零点存在性定理可知:

$\exists x_n\in(0,1)$ 使得 $f_n(x_n)=0$

由$f_n(x)$的单调性可知，当$0<x<x_n$时，$f_n(x)<f_n(x_n)=0$，当$x_n<x<1$时，$0=f_n(x_n)<f_n(x)$

所以x_n是$f_n(x)$在$(0,1)$的唯一正根

(2)证明:

$f_n(x_n)=0=f_{n+1}(x_{n+1})=x_{n+1}^{n+1}+f_n(x_{n+1})>f_n(x_{n+1})$

结合$f_n(x)$单调性 $\implies x_n>x_{n+1}>0$ 又 $x_n\in(0,1)$有上界1

依单调有界定理:$\{x_n\}$收敛

$f_n(x_n)=\dfrac{x_n(x_n^n-1)}{x_n-1}-1=0$

设$A=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 由于$x_n\in(0,1) \implies x_n^n\to 0(n\to+\infty)$

$\Rightarrow \dfrac{1-2A}{A-1}=0$解得$A=\dfrac{1}{2}$

22.14. 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1=3, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{a_n+1} \quad (n\geq 1)$.

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛; (2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

> 分析：$2A=A+\dfrac{6}{A+1}\Rightarrow A=2(A>0)$

$2(a_{n+1}-2)=\dfrac{(a_n-2)(a_n-1)}{a_n+1}$

所以$a_{n+1}-2$和a_n-2符号相同 $\implies a_n-2$和a_1-2符号相同

$\therefore a_1>2\Rightarrow a_n>2,\forall n\in N^+$

$\implies \dfrac{1}{2}\dfrac{a_n-1}{a_n+1}=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{2}{a_n+1})<\dfrac{1}{2}$

$\implies 0<a_{n+1}-2<\dfrac{1}{2}(a_n-2)<...<\dfrac{1}{2^n}(a_1-2)\to 0(n\to+\infty)$

由夹逼定理可以知道，$\{a_n\}$ 收敛于2

21.12. 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)}, n = 1, 2, \ldots$.

试证: 此数列极限存在, 并求该极限.

由基本不等式可以知道：

$\forall n \in \mathbb{N}^+, 0 < x_{n+1} \le \dfrac{x_n + 3 - x_n}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt{\dfrac{3-x_n}{x_n}} > 1(n \ge 2)$所以$x_n$ 单调递增$(n \ge 2)$

由单调有界定理知，$\{x_n\}$ 收敛

令$L = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

在递推公式中令$n \to +\infty$，有$L = \sqrt{L(3-L)}$

解得$L = \dfrac{3}{2}$

大题: 微分中值定理

24.13. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且$f(0) = 0, f(1) = 1$。证明:

(1) 存在 $c \in (0,1)$, 使得 $f(c) = 1 - c$;

(2) 存在两个不同的数 $\xi, \eta \in (0,1)$, 使得 $f'(\xi)f'(\eta) = 1$.

(1)略

(2)在$[0,c],[c,1]$上分别使用拉格朗日中值定理：

存在$\xi \in (0,c)$使$f(c) - f(0) = f(c) = 1 - c = f'(\xi)c$

存在$\eta \in (c,1)$使$f(1) - f(c) = 1 - f(c) = c = f'(\eta)(1-c)$

相乘即证

23.12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0) = 0, f(1) = 1$.证明：

(1) $\exists c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=\frac{3}{2023}$;

(2) $\exists\xi\neq\eta\in(0,1)$ 使得 $\frac{3}{f'(\xi)}+\frac{2020}{f'(\eta)}=2023.$

本题是一个双中值问题

(1) 令 $g(x)=f(x)-\dfrac{3}{2023}$, 则 $g(0)=f(0)-\dfrac{3}{2023}=-\dfrac{3}{2023}<0.$

$g(1)=f(1)-\dfrac{3}{2023}=1-\dfrac{3}{2023}>0$, 则有 $g(0)g(1)<0.$

由零点存在定理, $\exists c\in(0,1)$ 使 $g(c)=0.$

即此时有 $f(c)-\dfrac{3}{2023}=0$, 也即 $f(c)=\dfrac{3}{2023}.$

(2) 由拉格朗日中值定理,

$\exists\xi\in(0,c)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(c)-f(0)}{c-0}=\dfrac{3}{2023c}.$

$\exists\eta\in(c,1)$ 使 $f'(\eta)=\dfrac{f(1)-f(c)}{1-c}=\dfrac{1-3/2023}{1-c}=\dfrac{2020}{2023(1-c)}.$

则 $\dfrac{3}{f'(\xi)}=2023c,\ \dfrac{2020}{f'(\eta)}=2023(1-c).$

因此 $\exists\xi\neq\eta\in(0,1)$, 使 $\dfrac{3}{f'(\xi)}+\dfrac{2020}{f'(\eta)}=2023c+2023(1-c)=2023$ 成立.

13. 叙述并证明 Rolle(罗尔)定理.

本题是定理叙述题, 需要同学们关注知识脉络, 熟悉知识体系

定理 4.1.3 (Rolle 罗尔定理) 如果函数 f 满足:
(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(2) 在开区间 (a,b) 内可导;

(3) $f(a)=f(b).$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0.$

证明:

(a) 如果 f 在 $[a,b]$ 上为常数, 则 (a,b) 内的任何点 ξ 都有 $f'(\xi)=0.$

(b) 如果 f 在 $[a,b]$ 上不为常数, 则存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)\neq f(a)$. 不妨设 $f(x_0)>f(a)$. 于是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 都不是 f 在 $[a,b]$ 上的最大值, 其最大值必定在区间 (a,b) 的内部某点$x=\xi$ 取到, 那么由费马定理, 必有

$f'(\xi) = 0.$