云峰学园 25-26 微甲模拟

填空题 (每小题5分，共40分)

1.当$x\to 0$时，$\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$与$x^{\alpha}$同阶无穷小，则$\alpha=$__________

2.曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为 __________

3.设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=1+t^3\\ y=e^{t^2}\end{cases}$确定，则$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)-f(2)\right]$的值为

____

4.设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定,则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$__________

5.设函数 $f(x)=x\ln(1+x)$，则 $f^{(5)}(0)=$__________

6.已知曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$，则 L 与 x 轴围成的图形面积为

____

7.已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=1+\cos\theta\ (0\le\theta\le 2\pi)$，则曲线 L 的全长为 __________

8.设 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]\mathrm{d}x=1$，则$a=$________$b=$_________

解答题(共60分)

(本题6分) 9.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\ln(1+x)}{x\sin x}\right)$.

(本题6分) 10.求不定积分

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

(本题8分) 11.设$t>0$，平面有界区域D由曲线$y=\sqrt{x}e^{-x}$与直线$x=t$，$x=2t$及x轴围成，D绕x轴旋转一周所成旋转体的体积为$V(t)$，求$V(t)$的最大值。

(本题6分) 12.设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$，计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

13.已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $a_n=\ln(1+a_n)+b_n$，其中 $0<a_n<\frac{1}{n^2}$

(本小题6分) (1) 证明：$0<b_n<\frac{1}{2}a_n^2$；

(本小题4分) (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n}\right)$ 存在。

14.设可导函数 $f(x)$ 严格单调递增且满足 $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$，记 $a = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

(本小题5分) (1)证明 $a > 0$；

(本小题5分) (2)令 $F(x) = a(1-x^2) + \int_{1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，证明：存在 $\xi \in (-1,1)$，使得 $F''(\xi) = 0$.

15.已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，且 $f''(x)<0$，$f(0)=f(1)=0$。

(本小题7分) (1) 证明：存在唯一的 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f'(x_0)=0$，且

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x>\frac{1}{2}f(x_0)$$

(本小题7分) (2) 记 $k_1=f'(0)$，$k_2=f'(1)$，证明：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\frac{k_1k_2}{2(k_2-k_1)}$$