

# 目 录

|                     |    |
|---------------------|----|
| 第 0 章 预备知识          | 1  |
| §0.1 集合与映射          | 1  |
| 一、集合                | 1  |
| 二、映射                | 6  |
| §0.2 一元实函数          | 8  |
| 一、函数的概念             | 8  |
| 二、函数的简单特性           | 13 |
| §0.3 极坐标系与参数方程      | 15 |
| 一、极坐标系              | 15 |
| 二、曲线的极坐标方程与参数方程     | 16 |
| 第 0 章习题             | 21 |
| 第 1 章 数列的极限         | 26 |
| §1.1 数列             | 26 |
| 一、数列及其极限的概念         | 26 |
| 二、收敛数列的性质与极限的四则运算法则 | 29 |
| 三、无穷大数列             | 33 |
| §1.2 确界原理           | 34 |
| §1.3 柯西准则           | 39 |
| 第 1 章习题             | 42 |
| 第 2 章 函数的极限与连续性     | 46 |
| §2.1 函数的极限          | 46 |
| §2.2 连续函数           | 54 |
| §2.3 无穷小和无穷大        | 59 |
| §2.4 有限闭区间上连续函数的性质  | 61 |
| 第 2 章习题             | 64 |
| 第 3 章 导数与微分         | 71 |
| §3.1 导数的概念          | 71 |

离散

连续

$$n > N \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

收敛性

$$|x - x_0| < \delta$$

$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon$$

# 2023 微积分 H 小测 1

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e. \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

1. 当  $x$  趋于 1 时,  $\cos \frac{\pi x}{2}$  与  $A(x-1)^n$  是等价无穷小, 求  $A$  和  $n$  的值

$$\cos \frac{\pi x}{2} = -\sin(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}) = -\sin[\frac{\pi}{2}(x-1)]$$

$$A = -\frac{1}{2}$$

$$n = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sin[\frac{\pi}{2}(x-1)]}{-\frac{\pi}{2}(x-1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{A(x-1)^n} = 1$$

$$A(x-1)^n = -\frac{\pi}{2}(x-1)$$

2. 当  $x_{n+1} = \frac{x_n + 4}{x_n + 1}$ , 下列说法正确的是 (多)

- A 该数列极限不存在  
B 该数列收敛  
C 该数列极限为 2  
D 该数列极限为 2 或 -2

BC.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

$$pf: x_{n+1} = \frac{3}{x_n + 1} + 1 \geq 1$$

柯西准则

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{3(x_n - x_{n-1})}{(x_n + 1)(x_{n-1} + 1)} \leq \frac{3}{4} (x_n - x_{n-1}) \leq (\frac{3}{4})^{n-1} (x_2 - x_1) \rightarrow 0$$

3. 已知  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\sqrt{x^2 + bx + 8}) - (ax + b)] = 1$ , 求  $a, b$  的值

$$\textcircled{A} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + bx + 8 - a^2 x^2 - b^2 - 2abx}{\sqrt{x^2 + bx + 8} + ax + b}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(b-2ab)x + 8 - b^2}{x \sqrt{1 + \frac{b}{x} + \frac{8}{x^2}} + ax + b} = \textcircled{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a^2)x^2 + (b-2ab)x + 8 - b^2}{\sqrt{x^2 + bx + 8} + ax + b} = 1$$

$$1 - a^2 = 0$$

$$\begin{cases} a - 1 = b - 2ab \\ 1 - a^2 = 0 \end{cases}$$

$$a = \pm 1$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases} \quad -2 = b + 2b$$

4. 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/2} (3\sqrt{x^3 + 2x} - 3\sqrt{x^3 - x}) =$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^3 + 2x - x^3 + x}{\sqrt{x^3 + 2x} + \sqrt{x^3 - x}} \right)$$

$$= 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^3 + 2x} + \sqrt{x^3 - x}}$$

$$= 9 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{1 + 2x^{-2}} + \sqrt{1 - x^{-2}})}$$

$$= \frac{9}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

5. 函数  $f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{(x^2+3x+2)\ln|x-1|}$  有几个可去间断点

$$= \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x+2)\ln|x-1|} \quad \textcircled{1} x=-2 \quad \textcircled{2} x=2 \quad \textcircled{3} x=1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{(x+1)(x+2)\ln|x-1|} = 0$$

$$\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{\ln|x-1|}$$

$$x=-1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x(-3)}{(x+1)(1)\ln 2}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\ln(x-1)}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-1} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = \frac{1}{3}$$

$$x=0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot (-2)}{1 \cdot 2 \ln(1-x)}$$

$$x=1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3 \cdot (-1)}{2 \cdot 3 \ln(x+1)} = 0.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4}{2 \cdot (-x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 \cdot (-1)}{2 \cdot 3 \ln(1-x)} = 0.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x}$$

$$f(1)$$

$$\ln 0 \quad \text{Total}$$

B C.

6.  $y = \arcsin(\sin x)$  是

A 单调函数

B 定义域为  $\mathbb{R}$

C 奇函数

D  $T = \pi$  的周期函数

$$y = \arcsin x$$

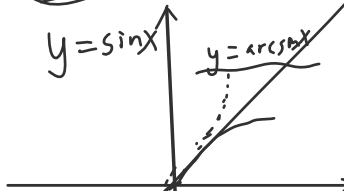
$$\sin y = \sin x$$

$$x = \sin y$$

$$f(g(x))$$

$$\arcsin$$

$$\sin$$



7.  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上严格单调有界,  $\{x_n\}$  为实数列, 下列叙述错误的是 (多)

A 若  $\{x_n\}$  单调, 则  $\{f(x_n)\}$  必收敛

B 若  $\{f(x_n)\}$  发散, 则  $\{x_n\}$  必发散

C 若  $\{f(x_n)\}$  单调, 则  $\{x_n\}$  必收敛

D 若  $\{x_n\}$  发散, 则  $\{f(x_n)\}$  必发散

B.C.D

A.  $f(x_n)$  单调有界 (正确)

