

云峰学园 25-26 微甲模拟

填空题（每小题5分，共40分）

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时， $\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}$ 与 x^α 同阶无穷小，则 $\alpha = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 曲线 $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x-1} \right)$ 的斜渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$

3. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = e^{t^2} \end{cases}$ 确定，则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[f \left(2 + \frac{2}{x} \right) - f(2) \right]$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定，则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$

5. 设函数 $f(x) = x \ln(1+x)$ ，则 $f^{(5)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$

6. 已知曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ ，则 L 与 x 轴围成的图形面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$

7. 已知曲线 L 的极坐标方程为 $r = 1 + \cos \theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ ，则曲线 L 的全长为 $\underline{\hspace{2cm}}$

8. 设 $\int_1^{+\infty} \left[\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right] dx = 1$ ，则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ $b = \underline{\hspace{2cm}}$

解答题（共60分）

(本题6分) 9. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x \sin x} \right)$.

(本题6分) 10.求不定积分

$$\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

(本题8分) 11.设 $t > 0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y = \sqrt{x}e^{-x}$ 与直线 $x = t$, $x = 2t$ 及 x 轴围成, D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积为 $V(t)$, 求 $V(t)$ 的最大值。

(本题6分) 12. 设 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$, 计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$

13. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_n = \ln(1 + a_n) + b_n$, 其中 $0 < a_n < \frac{1}{n^2}$

(本小题6分) (1) 证明: $0 < b_n < \frac{1}{2}a_n^2$;

(本小题4分) (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \right)$ 存在。

14. 设可导函数 $f(x)$ 严格单调递增且满足 $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$, 记 $a = \int_0^1 f(x)dx$.

(本小题5分) (1) 证明 $a > 0$;

(本小题5分) (2) 令 $F(x) = a(1 - x^2) + \int_1^x f(t)dt$, 证明: 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $F''(\xi) = 0$.

15. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f''(x) < 0$, $f(0) = f(1) = 0$ 。

(本小题7分) (1) 证明: 存在唯一的 $x_0 \in (0, 1)$ 使得 $f'(x_0) = 0$, 且

$$\int_0^1 f(x)dx > \frac{1}{2}f(x_0)$$

(本小题7分) (2) 记 $k_1 = f'(0)$, $k_2 = f'(1)$, 证明:

$$\int_0^1 f(x)dx < \frac{k_1 k_2}{2(k_2 - k_1)}$$