

基于插值嵌套循环方法的太阳影子定位实现

摘要

本文是一个对太阳影子定位的研究模型。通过对太阳赤纬角、时区分划的计算、研究以及直杆在不同时角下影长的变化，分别建立了基于太阳影子定位的最小二乘模型和基于嵌套循环的循环搜索、多目标优化等模型。

针对问题一的指定地理位置和日期的直杆影长的变化问题，建立影长关于经纬度、杆长、年天数、时间的函数模型得到了影长关于时间的变化为先减小后增大，并在正午 12 点达到最小值；影长关于日数的变化为先减小后增大，夏季影长最短，冬季影长最长；影长关于纬度的变化随纬度的变化呈正相关。

针对问题二的日期时角已知而地理位置未知的直杆影长的变化问题，实际上可转化为已知年天数和时间进行对杆长和经纬度参数反解的问题；我们利用非线性最小二乘法进行参数反解得到了 3 组测试数据，并根据是否位于大陆且天气晴朗，最后筛选出海南省临高县做出最可信点。

针对问题三，在问题二的基础上，将所测时段内地球上任一点太阳方位角的变化值与实际影子方向角的变化值之差的绝对值之和最小为目标函数，约束条件为杆长、经度、纬度和日数范围，利用循环搜索法分别得到可能的杆长、经纬度和日期，分析结果模型的参数精确度较高。

针对问题四的拍摄视频，先将其转化为 AVI 格式，利用 MATLAB 和 PS 软件以 3 分钟为步长，将视频中相对像素直杆影子的顶点坐标转换为实际顶点坐标，通过计算机图像处理相关的透视和投影变化的知识进行分析。并利用日期已知和未知的情况，将问题四的求解分别转化为问题二、三，利用搜索算法得到视频中可能的直杆长度、所处的经纬度及拍摄日期。

关键词: 太阳高度角 非线性最小二乘法 嵌套循环 多目标优化模型 像素

一、问题重述

1.1 问题背景

太阳影子定位技术通过分析视频中太阳照射下物体的影子变化，可以确定物体拍摄所处的时间和地点。该技术通过得到在不同时刻太阳照射情况下，关于太阳高度角的变化角度。这是影响物体影子长度变化的主要因素，而每一天同时刻太阳高度角的不同，能确定物体所处的时间和地点。该技术不仅贴近我们的生活，也实用于我们的生活。因此，分析并建立此类问题的模型是具有十分重要的意义的。

1.2 问题提出

(1) 地球的运动可以看成是在进行年复一年相同的转动，问题一给出了确切的时间。通过建立物体影子长度变化的数学模型，分析影子长度在各个参数影响下的变化规律，并用建立的数学模型描绘出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

(2) 通过固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型来确定直杆所处的地点，将附件一的影子顶点坐标数据代入建立的数学模型中，求解得到若干个可固定的直杆所处的地点。

(3) 通过固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型来确定直杆所处的地点和日期。将附件二和附件三中选取的数据代入建立的数学模型中，通过计算求解得出附件二和附件三的地点和日期。

(4) 已知直杆的高度为 2 米，附件四给出直杆在太阳下的影子变化的视频，建立确定视频拍摄地点的数学模型，通过代入数据利用模型给出若干个可能的拍摄地点。

若当拍摄日期未知时，判断能否根据视频确定出拍摄地点与日期？

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一要求建立关于影子长度变化的数学模型，通过随时间变化的太阳高度角的变化数据，建立线性回归模型，能够在给定经纬度的情况下，得到在不同时刻的太阳照射下影子的长度变化。在得到数据的前提下，运用 Matlab 软件作为辅助工具，绘出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

2.2 问题二的分析

问题二中要求我们建立适当的模型根据附件 1 中的一段以 3 分钟为间隔的时间段内太阳影子的顶点坐标以及拍摄日期的原始数据进行合理的参数反解确定拍摄时直杆的地点即经纬度坐标；根据我们上述模型一可知，太阳高度角是关于杆长、经纬度、年天数、时间的一个多元函数。因此，本题可以利用已知年天数和时间进行最小二乘拟合对杆长和经纬度参数反解。

2.3 问题三的分析

问题三相对于问题二而言，直杆影长的拍摄日期也是未知的。同样将其视为一个多目标优化问题，确定关于影子长度、影子方向的变化角度为另一目标函数，使每个地点的影子长度、影子方向变化角度与实际测量值间的累计绝对差值达到最小，可通过循环搜索算法来实现，第一次搜索出可能的拍摄地点和日期的大范围，第二次搜索减小经纬度、杆长、日期的搜索范围以及步长（提高精度），逐步减小搜索范围找到最优解。

2.4 问题四的分析

视频中的直杆影子变化只是平面下的图像，它与实际空间中物体的位置等有很大不同。要想解决这样的难题，要考虑运用计算机图像处理中透视和投影的相关知识进行分析。难点在于如何将视频图像中直杆影子的顶点坐标转化为实际的顶点坐标，即透视与投影知识的灵活运用。首先，需要对题目中所给附件视频进行处理。每隔 3 分钟时间取出视频中直杆影子的顶点坐标，用来对其进行转化。这样，便将问题简化至第 2 问的程度。所以仍考虑建立优化模型，通过多次搜索来减小搜索范围，逐步限制条件，进而找到视频拍摄的可能地点和日期

三、模型假设

1. 假设研究过程中，全年保持天气晴朗即影长不受天气影响。
2. 假设海拔对影子长度的影响可忽略。
3. 假设忽略当天时间内地区相对经纬度的改变。
4. 假设附件数据真实可靠。
5. 假设太阳为平行光。

四、符号说明

符号	本文含义
h	直杆杆长
L	直杆影长
θ	太阳高度角
α	纬度
γ	经度
ω	时角
t	当地时间
β	太阳赤纬角
N	年天数
R	残差系数
$L(h, \alpha, \omega)$	拟合方程

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 模型的建立

问题一研究对象为一根直立的杆，其影子的位置在一天中随太阳的位置不断变化。要建立关于影子长度变化的数学模型，不妨假设太阳的位置在确定的某一天某一时刻某一位置如图 1 所示：

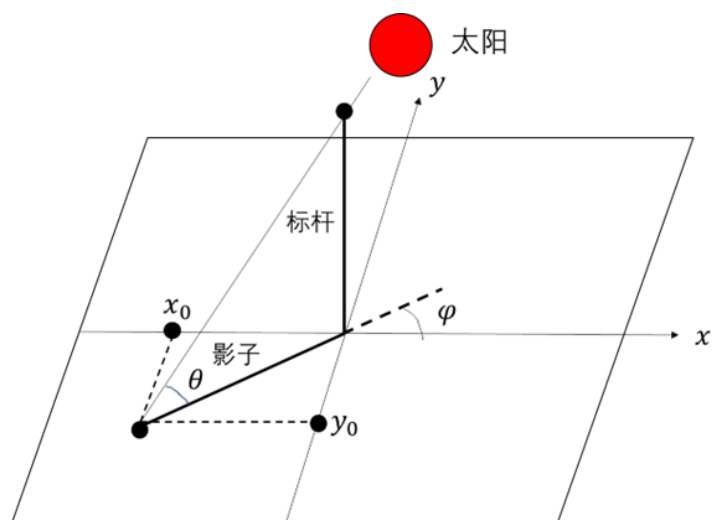


图 1: 太阳高度角示意图

以直杆为目标物，当其固定在水平地面上，影子的长度受直杆长度与太阳高度角的影响，分析其几何关系可以得到直杆太阳影子的长度满足：

$$\tan\theta = \frac{h}{L} \quad (1)$$

其中， h 为标杆的长度， L 为标杆太阳影子的长度， θ 为太阳高度角。显然我们只需要确定太阳高度角的大小即可完成问题一影长的计算。相关计算过程如下图 2 所示：

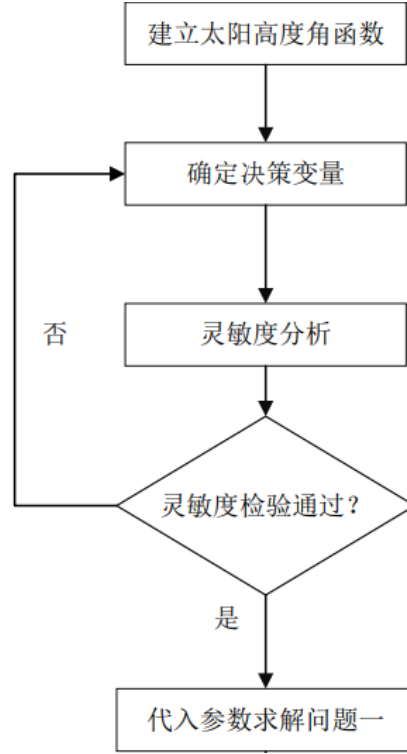


图 2: 确立决策变量流程图

接下来我们讨论太阳高度角的变化并且以影响太阳高度角变化的参数作为第一问的决策变量进行讨论以及灵敏度分析。

5.1.2 引入太阳高度角的计算

根据宇宙球体运行规律，我们可以知道由于地球会绕太阳公转以及地球本身自转的原因，在同一天不同时间段内，在一年不同的日期以及在不同经纬度下，都会对太阳高度角造成影响。同时通过查阅相关文献 [1] 知，在任一时刻，任一空间位置的太阳高度角的计算公式如下：

$$\sin\theta = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos\omega \quad (2)$$

其中 α 是太阳直射地理纬度； β 是当天的太阳赤纬角，即地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角； ω 是对应时刻的时角，即地球自转某一天内对应的时间。

5.1.3 涉及相关未知量定义及计算

(a) 太阳高度角 θ

太阳高度角 θ 是太阳光线直射与地平面的几何夹角，如图 1 所示。若已得知太阳高度角，则可以利用题述中的直杆长度 h 根据相似三角形的几何关系进行对应平面的太阳高度角时的影长 L 计算。

(b) 太阳赤纬角 β

太阳赤纬角 β 是地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角如下图所示。太阳赤纬角是由于地球绕太阳公转而产生的，同时其以天数为自变量以 365 天为一周期进行规律性变化，因此太阳赤纬角可以作为一个决策变量描述地球的公转对影长 L 的影响。通过查阅相关文献 [1] 可知对于任一日期太阳赤纬角 β 满足如下关系：

$$\beta = 23.45 \sin \left(\frac{2\pi (284 + N)}{365} \right) \quad (3)$$

其中， N 为一年中的天数。比如 1 月 1 日 $N = 1$ ，12 月 31 日 $N = 365$ ，根据相关地理知识可得太阳赤纬角如图 3 所示：

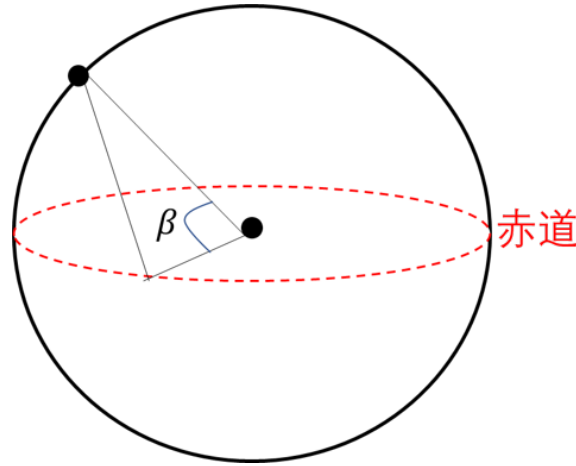


图 3: 太阳赤纬角示意图

(c) 时角 ω

时角 ω 是天赤道上所夹的弧度（或天子午圈与天体的赤经圈在北极所成的球面角）。由于地球的自转，在 24h 中自转一周 360° ，即天体的时角每小时（恒星小时）增长 15° ，同时其以 24 小时为一周期进行规律性变化，因此时角可以作为一个决策变量描述地球的自转对于影长 L 的影响，如图 4 所示：

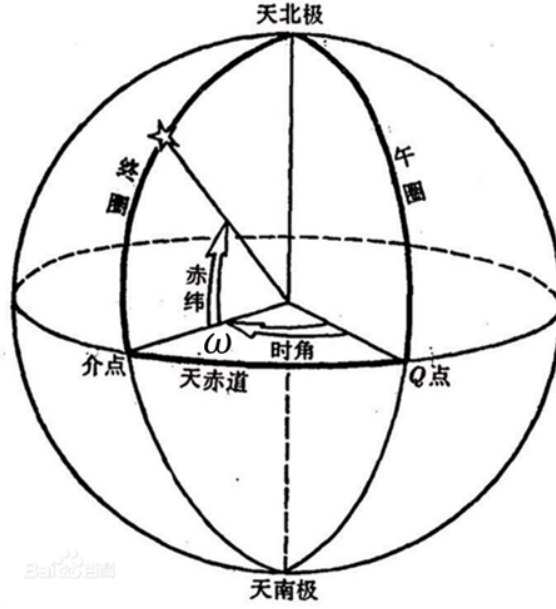


图 4: 时角示意图

通过查阅相关文献 [1] 可知对于任一天的时角 ω 满足如下公式：

$$\omega = 15 \times (t - 12) \quad (4)$$

其中 t 为当地时间数，以 24h 制计算。由于不同经度的时角不一样，位于不同地点的直杆也自然处于不同的时区，为了得到其在不同地点对应的时角，以北京时间 t_0 为标准时间，结合所处地点的经纬度进行换算，计算得到时角的表达式 [1] 为：

$$\omega = 15 \times \left(\frac{\gamma - 120}{15} + t_0 - 12 \right) \quad (5)$$

其中， γ 为当地地区的经度。综上所述，我们可以建立以地理经纬度、太阳赤纬角和时角为决策变量的影长变化的多元函数模型。其中：

- 太阳赤纬角 β 可以由日期即年天数 N 表示。
- 时角 ω 可以由标准的北京时间 t_0 和影长 L 表示。
- 影长 L 是一个关于三者的函数关系。

我们可以将原来的三个决策变量即地理纬度、太阳赤纬角和时角转化为地理经纬度、日期、年天数为决策变量进一步优化了我们的影长变化的多元函数模型，这也是题给信息，因此可见我们的模型是可解的。

5.1.4 模型的求解

(1) 以地理经纬度、日期、年天数为决策变量建立模型如下：

$$\begin{cases} L = \frac{h}{\tan\theta} = \frac{h\sqrt{1 - (\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos\omega)^2}}{\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos\omega} \\ \beta = 23.45 \times \sin\left(\frac{(2284 + N)}{365}\right) \\ \omega = 15 \times \left(\frac{(\gamma - 120)}{15} + t_0 - 12\right) \end{cases} \quad (6)$$

其中参数取值范围如下所示：

$$\begin{cases} N \in [0, 365] \cup \mathbb{Z} \\ t_0 \in [0, 24] \\ \alpha \in [-90, 90] \\ h > 0 \end{cases}$$

5.1.5 探究各决策变量对影长的变化规律

为了探究各决策变量对影长影响的变化规律，这就要求我们的影长函数为各决策变量的单值函数，可通过控制变量法达到单变量函数的要求为了方便讨论问题一，除单值函数变量外，其余决策变量取问题一中所述参数取值如下表 1 所示：

表 1: 其余参数取值表

变量名	取值
经纬度	(3954'26"N, 11623'29"E)
太阳赤纬角	-12.1017
年天数	298
时间	(6h, 18h)

(a) 杆长对影长的变化规律

经拟合，得到杆长对影长的影响变化规律如下图 5 所示：

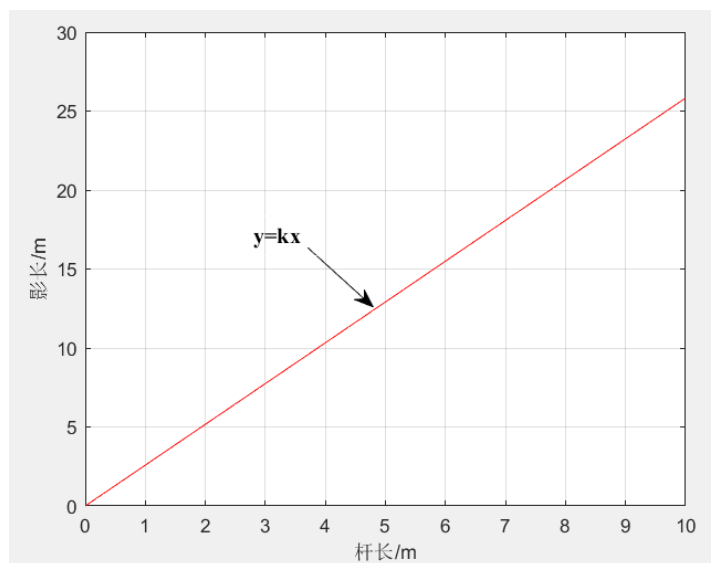


图 5: 杆长对影长的变化规律

(b) 经纬度对影长及决策变量的影响变化规律

因为其他决策变量对影长的影响受该变量影响，因此一并讨论；对于两个变量我们采用一定一变，控制变量的思想进行讨论。在北纬 60 度，年天数对影长的变化规律，经拟合如下图 6 所示：

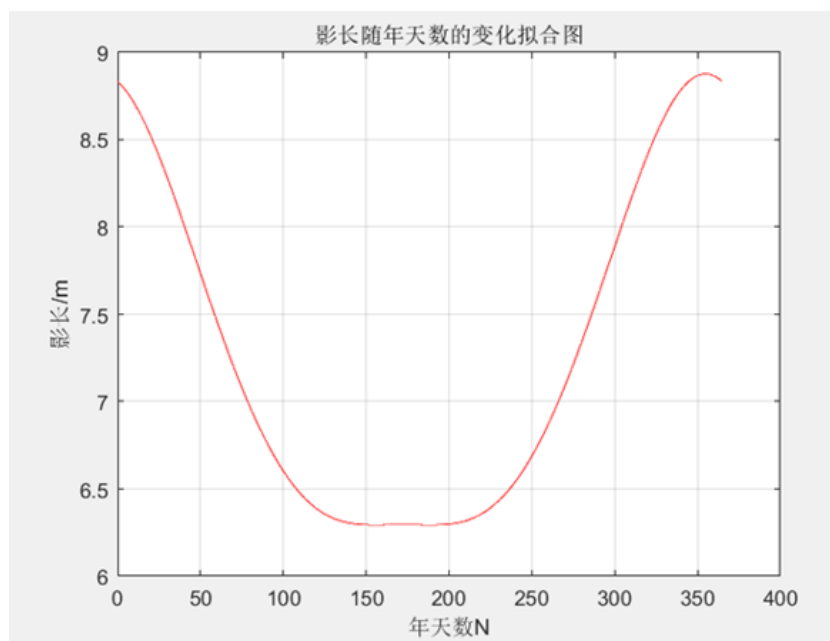


图 6: 北纬年天数对影长的变化规律

在纬度 60 度，经度对影长的变化规律，经拟合如下图 7 所示：

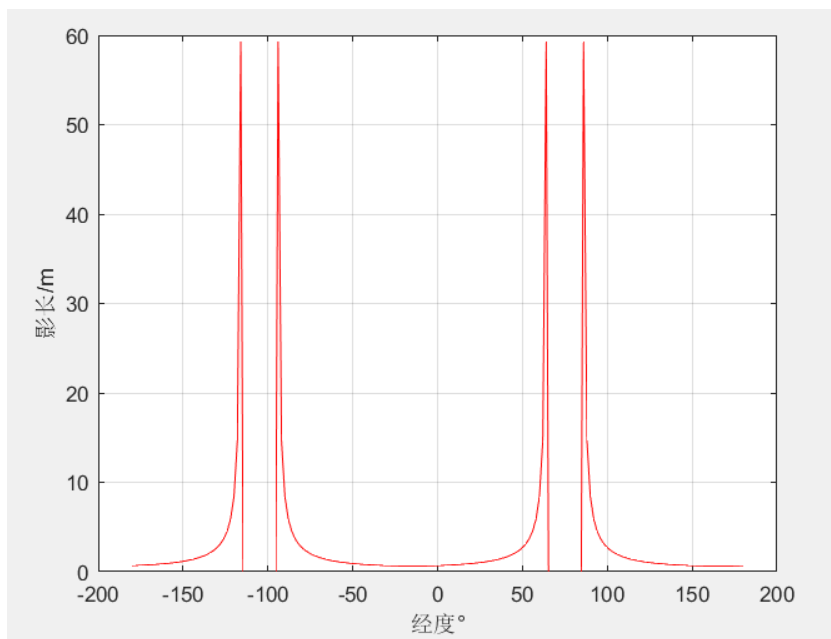


图 7: 北纬经度对影长的变化规律

在纬度 60，时间对影长的变化规律，经拟合如下图 8 所示：

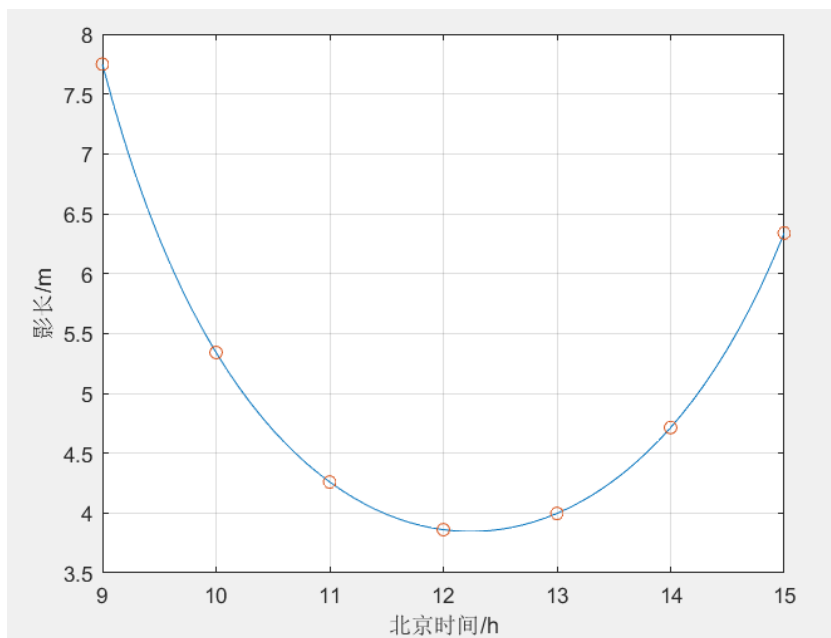


图 8: 北纬时间对影长的变化规律

同理，在南纬 60，年天数对影长的变化规律，经拟合如下图 9 所示：

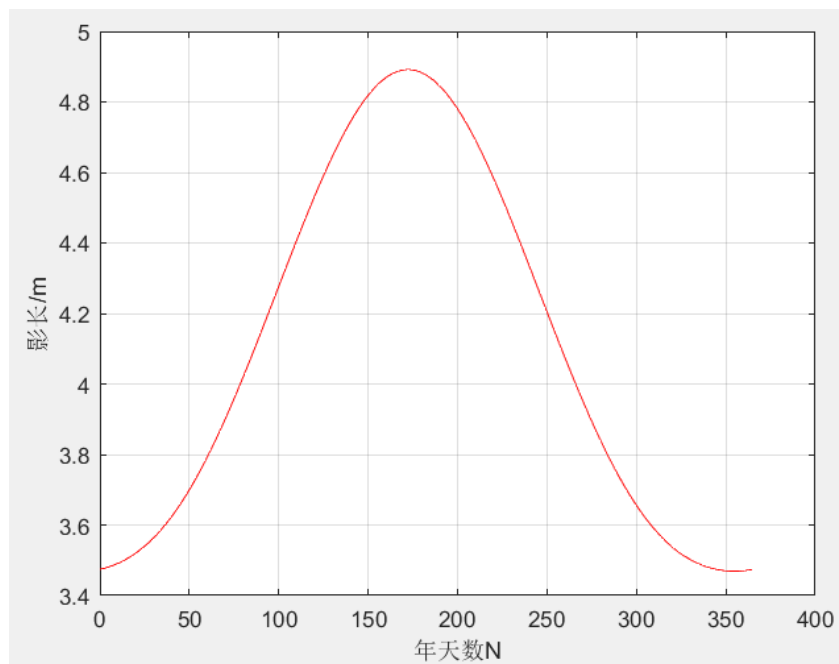


图 9: 北纬年天数对影长的变化规律

同理，在南纬 60，经度对影长的变化规律，经拟合如下图 10 所示：

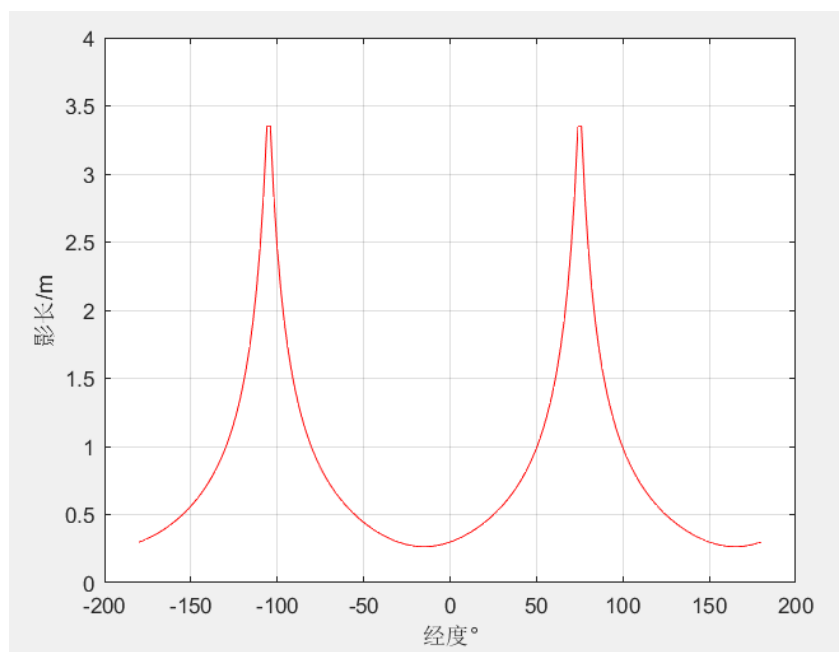


图 10: 南纬经度对影长的变化规律

由上述图 6 和图 9 对比知：在北半球一年内影子长度变化规律在年初和年终影子长度更长，而南半球在年中影子更长。

同时在另两个参数一定的情况下，影长关于时间的变化为先减小后增大，并在正午 12 点达到最小值；影长关于日数的变化为先减小后增大，夏季影长最短，冬季影长最长；影长关于纬度的变化为随纬度的变化呈正相关。

5.1.6 问题一影长变化规律图

综上述在 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高直杆的条件下，运用我们的模型求解，可得各决策变量取值如下表 2 所示：

表 2: 问题一参数取值表	
变量名	取值
经纬度	(3954'26"N,11623'29"E)
太阳赤纬角	-12.1017
年天数	298
杆长	3
时角	15/times (t-12.2406)
时间	(6h, 18h)

将已知的决策变量取值代入到我们建立的模型中，求解可得直杆太阳影长的整点时影长见表 3：

表 3: 问题一求解整时影长	
北京时间/h	直杆影长/m
9:00	7.7483
10:00	5.3409
11:00	4.2592
12:00	3.8610
13:00	3.9917
14:00	4.7137)

同时，运用 Matlab 软件我们也可以绘出 3 米高直杆的影子长度随时间变化的曲线，如下图 11 所示：

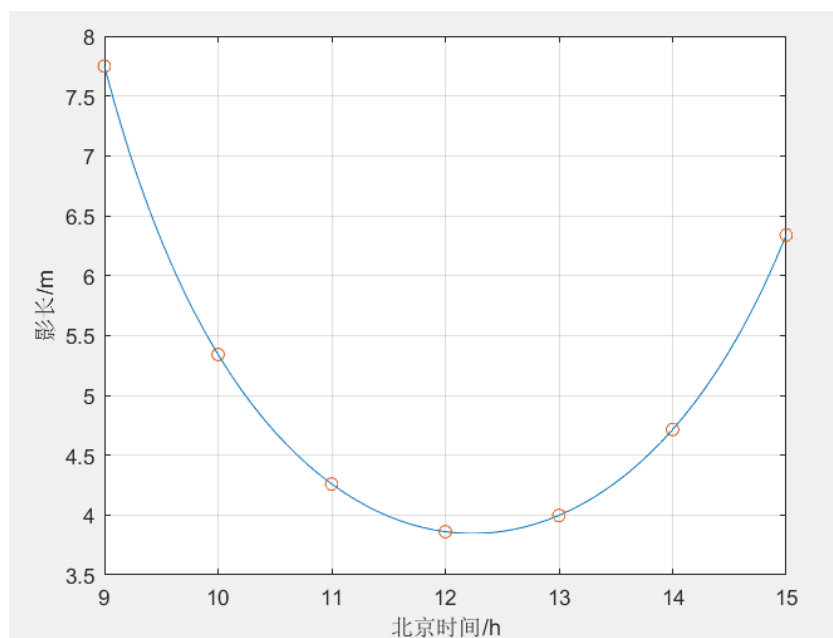


图 11: 问题一求解影长变化规律图

根据图 11，我们找到了随着时间的变化被光照物体受不同参数的影响下影子大致的长度变化走向：

1. 从日出时分开始，太阳逐渐从东南方升起，被光照物体的影子指向西北方，并且呈现出最长的状态，此时太阳的高度角为 0。随着时间从早上到中午的移动，太阳高度角逐渐变大，而此时的影子长度开始变短，方向也从西北方慢慢向东南方移动。
2. 当太阳高度角到达被光照物体所处经度时，太阳高度角达到最大 90 度，此时的太阳高度角被称为正午太阳高度角，影长达到一天最短，甚至为 0。
3. 当跨过正午太阳高度角时，太阳逐渐往西北方落下，而此时的被光照物体的影子指向东南方，开始变长，而此时的太阳高度角开始变小。直到太阳高度角达到 0，此时影长达到下午时刻最长。值得注意的是，被光照物体的影长关于正午太阳高度角时刻对称。

5.2 问题二模型的建立与求解

问题二中要求我们建立适当的模型根据附件 1 中的一段以 3 分钟为间隔的时间段内太阳影子的顶点坐标以及拍摄日期的原始数据进行合理的参数反解确定拍摄时直杆的地点即经纬度坐标；根据我们上述模型一可知，太阳高度角是关于杆长、经纬度、年天数、时间的一个多元函数。因此，本题可以转换为已知年天数和时间进行对杆长和经纬度参数反解。

5.2.1 原始数据处理

由于附件 1 中给出的是影子顶点坐标，因此需要进行数据处理，根据勾股定理：

$$l^2 = x^2 + y^2$$

进行数据处理后得到实际影子长度如下表 4 所示：

表 4: 附件 1 处理影长坐标结果

时间/h	影长/m	时间/h	影长/m
14.70	1.1496	15.25	1.5402
14.75	1.1822	15.30	1.5799
14.80	1.2135	15.35	1.6201
14.85	1.2491	15.40	1.6613
14.90	1.2832	15.45	1.7033
14.95	1.3180	15.50	1.7462
15.00	1.3534	15.55	1.7901
15.05	1.3894	15.60	1.8350
15.10	1.4264	15.65	1.8809
15.15	1.4634	15.70	1.9279
15.20	1.5015		

5.2.2 非线性最小二乘法

根据上文所述：本问题可以转换为已知年天数和时间进行对杆长和经纬度参数反解，以处理得到的 21 组数据作为待定数组，其中北京时间为决策变量，建立非线性最小二乘法模型如下：

不妨令待求的未知量为 x_1 、 x_2 、 x_3 ，设拟合方程为 $L(h, \alpha, \gamma)$ ，由 21 组原始数据提供拟合方程满足的 21 组值分别为 y_1 、 y_2 、 y_3 y_{21} 则各待定量应满足如下关系：

$$\begin{cases} y_1 = L_1(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ y_{10} = L_{10}(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ y_{21} = L_{21}(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (7)$$

根据最小二乘法：若 x_i 越接近真实值，其对应的测量值 y'_i 也越接近原始数据的真实值，则对应的误差 $\sigma = y_i - y'_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 21$) 也应当趋近于 0。为了使其能够定量

表示，同时避免误差正负相消，选择改用残差取代误差即根据文献 [3]，因此原问题转化为求如下函数最优解：

$$\min \sum_{i=1}^{21} (\sigma_i)^2 \quad (8)$$

5.2.3 模型求解

根据题意已知年天数，代入上述 (tag) 中可以解得此时 = 10.5110；由此此建立拟合方程 $L(h, \alpha, \beta)$ 如下：

$$L = \frac{x_3 \sqrt{1 - \left(\sin x_1 \sin \beta + \cos x_1 \cos \beta \cos \left(15 \times \left(\frac{x_2 - 120}{15} - t - 12 \right) \right) \right)^2}}{\sin x_1 \sin \beta + \cos x_1 \cos \beta \cos \left(15 \times \left(\frac{x_2 - 120}{15} - t - 12 \right) \right)} \quad (9)$$

使用 Matlab 中的内置函数 `fitttype` 进行非线性最小二乘拟合，输出满足残差系数最小的一组即目标函数为公式 (8)，其中算法流程如下图所示：

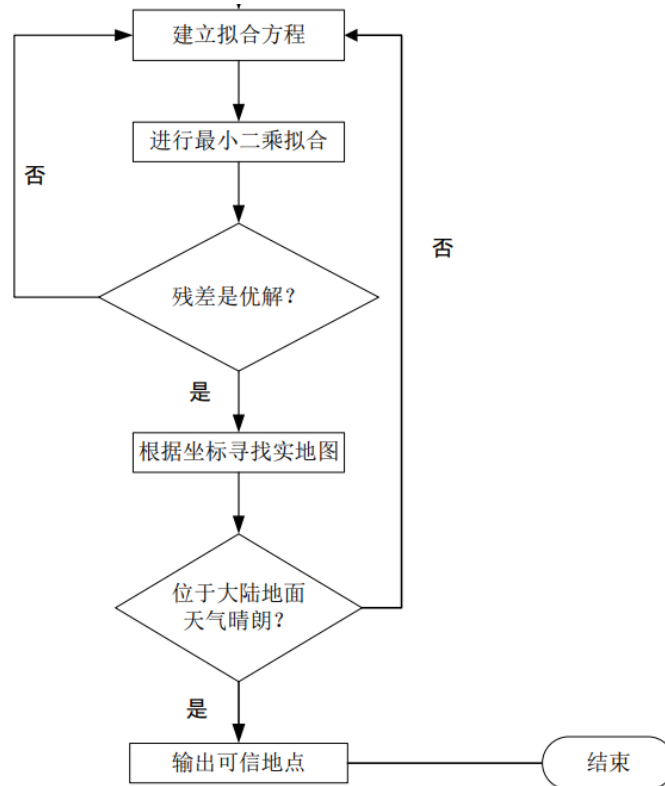


图 12: 模型二算法流程图

经拟合，得到非线性最小二乘拟合图如下：

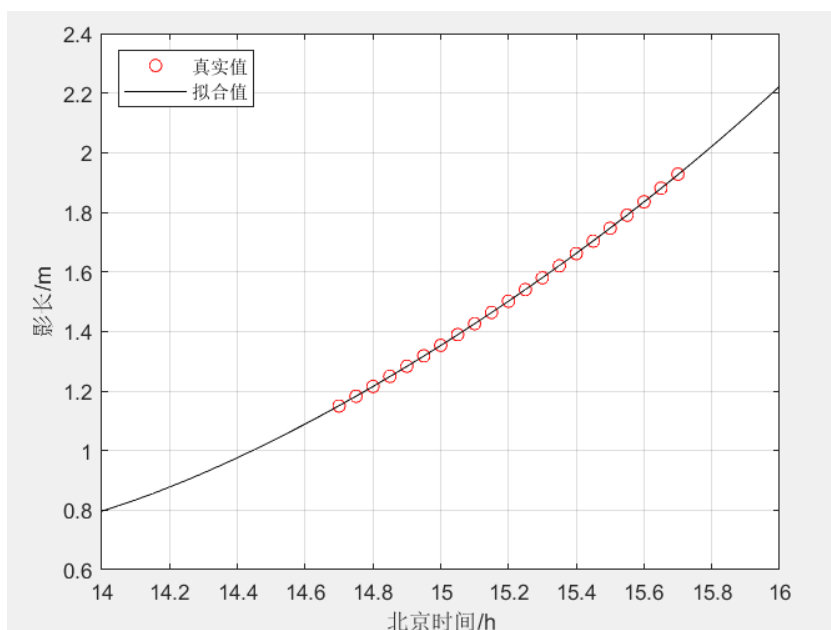


图 13: 问题二模型求解拟合图

此外，我们通过 *Google Earth* 地球在线中的经纬度搜索地点查询相应的实地图片得到关于可能点的信息如下表所示：

表 5: 问题一求解整时影长

影长/m	坐标	地点	残差
1.589	(115.9E,11.06N)	南海	$2.0794e^{-4}$
2.909	(107.5E,1.59N)	卡马里塔海湾	$2.7812e^{-4}$
2.018	(108.9E,19.08N)	海南省临高县	$1.5374e^{-7}$

由于点 (115.9,11.06) 和点 (108.9,19.08) 位于海面，因此由合理性可以排除这两点的可能，同时，我们查询了 (108.9,19.08) 当地 2015 年 4 月 18 日的天气为晴朗，此外该点残差为 $1.5374e^{-7}$ (108.9, 19.08)

5.3 问题三模型的建立与求解

问题三中在问题二的基础上增加了年天数作为待定变量，由于最小二乘法不能限制整数迭代，因此问题三改用以最小二乘法插值为辅，嵌套循环为主的多目标优化模型；此外对附件 2、附件 3 中的太阳影长顶点坐标同问题二进行处理。

5.3.1 原始数据处理

由于附件 2 与附件 3 处理方法完全相同，因此这里以附件 2 为例进行模型建立与求解，附件 3 原始数据处理结果见 RAR 附件。对附件 2 进行同问题二处理得处理结果如下表 6 所示：

表 6: 附件 1 处理影长坐标结果

时间/h	影长/m	时间/h	影长/m
12.68	1.2473	13.23	1.0046
12.73	1.2228	13.28	0.9855
12.78	1.1989	13.33	0.9668
12.83	1.1754	13.38	0.9486
12.88	1.1524	13.43	0.9303
12.93	1.1299	13.48	0.9138
12.98	1.1078	13.53	0.8971
13.03	1.0863	13.58	0.8810
13.08	1.0651	13.63	0.8655
13.13	1.0444	13.68	0.8505
13.18	1.0243		

5.3.2 最小二乘插值反解经度

利用 matlab 中 `polyfit` 函数对表 6 做出二次函数拟合并绘制其出其最小影长区间的拟合函数如下图所示：

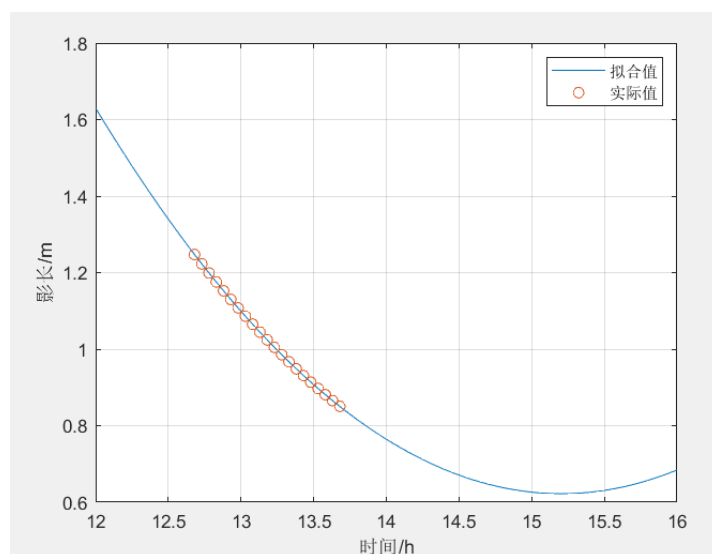


图 14: 模型三附件 2 插值拟合图

由上图知在该地理坐标下，最短影长大约在 $t=15.2$ 时取到，代入模型一可得此地的经度为： $\beta = 120 - 15 \times (15.2 - 12.0)$ 则原式转化为已知经度、时间、影长对纬度、杆长、年天数的反解问题。

5.3.3 循环嵌套多目标优化模型

根据上述建立的太阳高度角与杆长、影长的对应关系模型，定义纬度、杆长、年天数作为变量进行循环迭代，取原始数据真实值作为差量标准，设立残差系数为 0.00001，若输出值满足：

$$|y_i - y'_i| < 0.00001 \quad (10)$$

则视为可信测试点，若该点同时满足当日天气晴朗且位于大陆地面即为可信点。算法流程如下图所示：

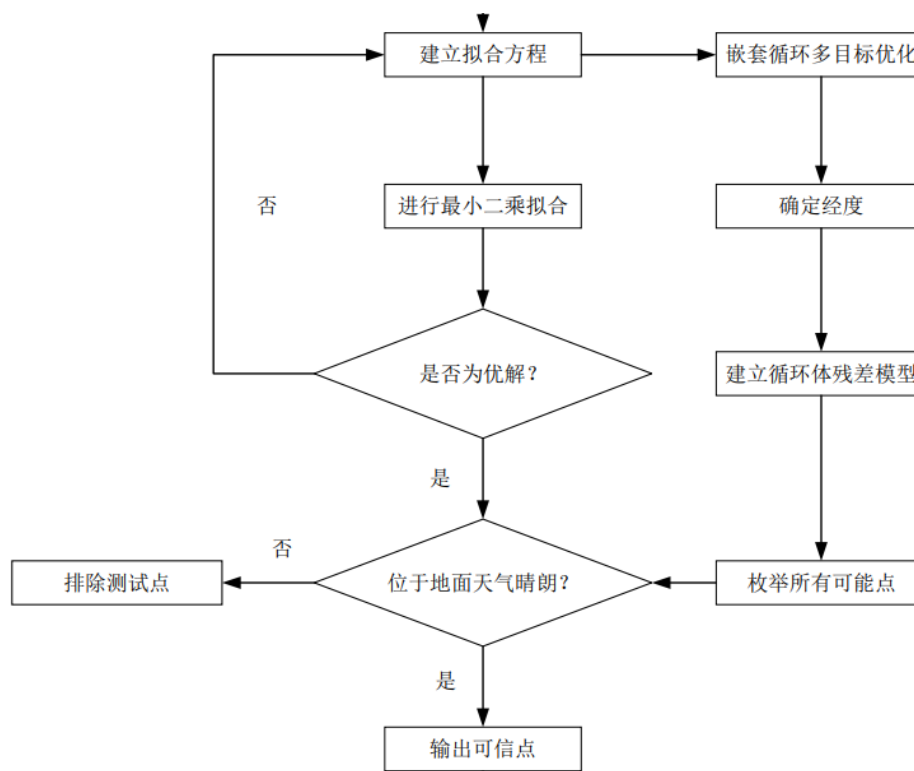


图 15: 模型三算法流程图

5.3.4 模型的求解

利用 Python 对三个决策变量进行循环嵌套，经拟合得到 8 组解，同问题二处理排除位于海面点，综上有如下表 7 解数组：

表 7: 问题三附件 2 结果信息表

经度	纬度	杆长	年天数
72	-28	1.0	62
72	33	1.7	134

附件 3 处理同上，结果见 RAR 附件。

5.4 问题四模型的建立与求解

利用 PS 软件，得到视频中实际直杆底端和顶端的横纵坐标像素值及各个时刻直杆影子顶点的横纵坐标像素值。忽略相机拍摄角度的影响，通过坐标变换，得到实际的影子长度值。进而基于所建立的优化模型，求解出视频可能的拍摄地点。

5.4.1 视频中直杆实际影长的计算

我们对题目中所给附件视频做灰度图了处理如图 16：利用 PS 软件，首先得出实际直杆底端和顶端的横纵坐标像素值。然后，从视频中所显示的 8:57-9:33 的时间段内，每隔 3 分钟提取一次直杆影子顶点的横纵坐标像素值。



图 16: 灰度图

以直杆底端 xy 坐标的像素值为参考点 $(0,0)$ ，分别计算出实际直杆顶端和 13 个影子顶点 xy 坐标像素值相对于参考点 $(0,0)$ 的坐标值，进而计算出影长相对像素值。其中，我们取影长相对像素值 679.71 为参考值 2，根据这一比例，分别计算出 13 个影子对应比例的影长实际值，后续处理同模型二、模型三：

得拟合的二次曲线方程为：

$$L = 0.1192t^2 - 3.0259t + 19.8932 \quad (11)$$

拟合图像中，曲线最低点对应的横坐标时间值为 12.6953h，即为北京时间 12:41，同时也对应于当地时间正午 12 点。可计算出视频拍摄地点的经度值为 109.65 度。

拟合结果如下表 8:

表 8: 问题三附件 2 结果信息表

序号	年天数	经度	纬度
1	18	111.65	-41
2	129	114.65	40

六、模型的评价、改进与推广

6.1 模型的优点

1. 问题一中所建立的影子长度变化模型，选取了直杆所处的经纬度、日期、时刻及杆长等因素作为影长的决策变量，能够较全面地分析影子长度变化的规律。
2. 问题二运用最小二乘法所建立的单目标模型，其实质为非线性的优化模型，故在求解中选择较为稳定的值，给出了可能的值。

6.2 模型的缺点

模型三中的残差检验系数是人为设定的，不具有科学地说服力。

6.3 模型的改进

由于单因素敏感性分析几个不确定因素同时变动，应考虑进行多因素敏感性分析各个参数对影长影响率的敏感性。由于太阳赤纬角、太阳高度角等都为经验公式，故存在一定程度误差，可寻求更优的公式求解，减小误差对结果的影响大小。

6.4 模型的推广

本文所建立的模型不仅适用于于太阳影子定位，还可拓展适用于诸多方面，如多目标优化模型可以广泛用于诸多优化问题，如车间的布局优化、键盘的优化设计、水资源配置的优化等。

参考文献

- [1] 刘力源, 吴子月, 陈桂欣. 太阳影子定位的研究 [J]. 数码世界, 2020(03):7.
- [2] 管斌, 张静怡, 徐伟东, 王名词. 一种基于最小二乘法的影子定位技术 [J]. 科技视界, 2016(12):148.
- [3] 沈曙昀, 王立, 郭三敏, 闫旭旭, 朱家明. 基于几何方法对太阳影子定位的研究 [J]. 河北北方学院学报 (自然科学版), 2017, 33(01):18-24.
- [4] 张红, 康彤. 太阳影子定位的模型构建及求解 [J]. 中国传媒大学学报 (自然科学版), 2019, 26(06):56-59.
- [5] 于贺军. 气象用太阳赤纬和时差计算方法研究 [J]. 气象水文海洋仪器, 2006(03):50-53.
- [6] 杨佳宇, 李奇, 杨小琴, 朱芳芳, 邓哲. 基于 Matlab 的数字图像边缘检测研究 [J]. 现代传输, 2022(03):54-56.
- [7] 张红, 康彤. 太阳影子定位的模型构建及求解 [J]. 中国传媒大学学报 (自然科学版), 2019, 26(06):56-59.

附录

附录 1

问题一的求解的 matlab 程序

```
%引入问题一条件下的各决策变量取值
a=sin(39.943*pi/180);
b=sin(-12.1017*pi/180);
c=sin(-48.6086*pi/180);
h=3;
%fu=@(alp,N,h,t,gam)h*cos(asin(sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(
2*pi*(284+N)/365)))+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/
180*(sin(2*pi*(284+N)/365))))) *cos(asin(sin(pi/180*15*((gam-
120)/15+t-
12)))))./( sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365))
+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+
N)/365))))) *cos(asin(sin(pi/180*15*((gam-120)/15+t-12)))));
%% 问题一 北京直杆模型求解
clc
%定义问题一条件下的模型函数
y=@(t)
h*cos(asin(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(t-
12.2406)))))./(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*
(t-12.2406)))));
%输出整点时 3m 直杆的影长
y1=y(9)
for i = 10:1:15
    y(i)
    y1=[y1,y(i)];
end
%绘制对应时间段的影长变化拟合图
t=9:0.1:15;
plot(t,y(t))
hold on
x=9:1:15;
plot(x,y1,'o')
xlabel('北京时间/h')
ylabel('影长/m')
title('影长变化拟合图')
grid on
%% 问题一 影长随杆长的规律性变化探究
clc,close all
%讨论直杆杆长 h 对影长的变化影响规律
%利用控制变量法，将太阳高度角固定不变，其数值取问题一所解参数数值，时间取上
午 9h
```

```

%定义影长关于杆长h 的模型函数
y =@(h)
h*cos(asin(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-
12.2406))))))./(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*
(9-12.2406)))));
%绘制一区间为h \in [0,10]的影长随杆长变化拟合图
h=0:0.1:10;
plot(h,y(h),'r')
xlabel('杆长/m')
ylabel('影长/m')
title('影长随杆长的变化拟合图')
grid on
%添加注释表明此为一元线性函数
%添加箭头文本框结果如正文所示
%% 问题一 影长随北京时间变化探究
clc,close all
%讨论北京时间t 对影长的变化影响规律
%利用控制变量法，其余变量取值不变，其数值取问题一所解参数数值
%定义影长关于北京时间t 的模型函数
y =@(t)
0.5*cos(asin(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(t-
12-
12.2406))))))./(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*
(t-12-12.2406)))));
%绘制对应全天的影长随北京时间变化拟合图
t=6:0.1:18;
plot(t,y(t),'r')
ylim([0,60])
xlabel('北京时间 h')
ylabel('影长/m')
title('影长随北京时间的变化拟合图')
grid on
%% 问题一 影长随年天数变化探究
clc,close all
%讨论年天数N 对影长的变化影响规律
%利用控制变量法，其余变量取值不变，其数值取问题一所解参数数值,时间取上午9h
%定义影长关于年天数N 的模型函数
y =@(N)
3*cos(asin(a*(sin((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365)))))+cos(asin(a
))*cos(asin((sin((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365))))))*cos(asin(
sin(pi/180*15*(9-
12.2406))))))./(a*b+cos(asin(a))*cos(asin((sin((pi/180)*(23.45*sin(2*
pi*(284+N)/365))))))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-12.2406)))));
%绘制一年的内影长随年天数变化拟合图

```

```

N=0:1:365;
plot(N,y(N),'r')
xlabel('年天数 N')
ylabel('影长/m')
title('影长随年天数的变化拟合图')
grid on
%clc,close all
%讨论年天数N 对影长的变化影响规律
%利用控制变量法, 其余变量取值不变, 其数值取问题一所解参数数值, 时间取上午 9h
%定义影长关于年天数N 的模型函数
%y =@(N)
3*cos(asin(a*(sin((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365)))))+cos(asin(a
))*cos(asin((sin((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365))))))*cos(asin(
sin(pi/180*15*(9-
12.2406))))))./(a*b+cos(asin(a))*cos(asin((sin((pi/180)*(23.45*sin(2*
pi*(284+N)/365))))))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-12.2406)))));
%绘制一年的内影长随年天数变化拟合图
%N=0:0.5:365;
%plot(N,y(N),'r')
%xlabel('年天数 N')
%ylabel('影长/m')
%title('影长随年天数的变化拟合图')
%grid on
%% 问题一 影长随纬度的变化探究
clc,close all
y =@(alp)
3*cos(asin(sin(alp*pi/180)*b+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(b))*
cos(asin(sin(pi/180*15*(9-
12.2406))))))./(sin(alp*pi/180)*b+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin
(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-12.2406)))));
alp=-90:1:90;
plot(alp,y(alp),'r')
xlabel('纬度°')
ylabel('影长/m')
title('影长随纬度的变化拟合图')
grid on
%% 问题一 影长随经度的变化探究
clc,close all
y =@(gam)
0.5*cos(asin(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*((g
am-120)/15+9-
12))))))./(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*((gam
-120)/15+9-12)))));
x=-180:2:180;

```



```

plot(x,y(x),'r')
xlabel('经度°')
ylabel('纬度°')
ylim([0,60])
title('影长随经度的变化拟合图')
grid on

```

附录 2

基于最小二乘法的参数反解的 matlab 程序

```

clc,close all
%由题原问题转化为已知年天数和时间求杆长和经纬度的反解问题
%代入已知初值
sbe=sin(pi*23.45/180*sin(2*pi/365*(284+108)))
%定义满足原始数据的三元函数函数
y=@(h,alp,gam,t)h*(cos(asin((sin(alp*pi/180))*sbe+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sbe))*cos(asin(sin(15*pi/180*(t-12.2406))))))./((sin(alp*pi/180))*sbe+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sbe))*cos(asin(sin(pi*15/180*(t-12.2406))))));
%%
x=14:0.05:16;
y3=cfun(x);
plot(var01,num01,'ro',x,y3,'k-')
grid on
xlabel('北京时间/h')
ylabel('影长/m')
title('非线性最小二乘拟合图')

```

附录 3

基于问题三的嵌套循环求解日期和时间的 Python 程序

```
from math import*
from sympy import*
from numpy as np import*
#附件 2 处理
gam=72
t=12.98
d=1.10784
for h in range(1,31,1):
    for alp in range(-90,91,1):
        for N in range(0,365,1):

D=h*cos(asin(sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365))
)+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284
+N)/365)))))*cos(asin(sin (pi/180*15*((gam-120)/15+t-
12)))))/( sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))+
cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N
)/365)))))*cos(asin(sin(pi/180*15*((gam-120)/15+t-12)))))
        if abs(D/10-d)<0.000001:
            print('附件 2 取值数组:')
            print(h,alp,N,end=';')
        else:
            continue
#附件 3 处理
gam=108
t=13.55
d=3.68054
for h in range(1,31,1):
    for alp in range(-90,91,1):
        for N in range(0,365,1):

D=h*cos(asin(sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365))
)+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284
+N)/365)))))*cos(asin(sin (pi/180*15*((gam-120)/15+t-
12)))))/( sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))+
cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N
)/365)))))*cos(asin(sin(pi/180*15*((gam-120)/15+t-12)))))
        if abs(D/10-d)<0.000001:
            print('附件 3 取值数组:')
            print(h,alp,N,end=';')
        else:
            continue
```

附录 4

基于问题 4 中转换灰度图，提取阴影长度与时间进行二次拟合及对应地点经度估算的 matlab 程序

%% 问题四 视频图片提取及灰度图转换（每三分钟提取一张）

```
clc,clear;
```

```
video_file="C:\Users\19595\Desktop\video.avi";  
video=VideoReader(video_file);  
frame_number=floor(27941* video.FrameRate);  
n=video.FrameRate*180;%每隔 3 分钟提取一张图片
```

```
k=1;  
for i=1:n:frame_number  
    image_name=strcat("C:\Users\19595\Desktop\Figure",num2str(k));  
    image_name=strcat(image_name,'.jpg');  
    I=read(video,i); %读出图片  
    imwrite(I,image_name,'jpg'); %写图片  
    k=k+1;  
    I=[];
```

```
end
```

%转换成灰度图，依次循环以图 1 为例

```
RGB = imread("C:\Users\19595\Desktop\Figure\Figure1.jpg");%将图像读入工作区
```

```
Y = rgb2gray(RGB);%将图像灰度化
```

```
imshow(Y)%显示灰度图像
```

%% 灰度图转二值图

```
I = imread('C:\Users\19595\Desktop\Lambda M\2015A\Figure\Figure1.jpg');  
th=graythresh(I);
```

```
J=im2bw(I,th)
```

```
imshow(J)
```

```
%%
```

```
clear
```

```
clc
```

%第二问方法一

```
h=1:0.01:3;%设置杆长的搜索范围
```

```
alp=-90:0.01:90;%设置搜索的纬度范围
```

```
N=0:1:365;%计算该日期下的日数
```

```
d=0.62173;K={};k=0;%当地正午 12 点对应的杆影长度
```

```
for i=1:length(h)
```

```
    for j=1:length(alp)
```

```
        for v=1:length(N)
```

```
D=h.*cos(asin(sin(alp*pi/180).*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))+cos(asin(sin(alp*pi/180)).*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365))))).*cos(asin(sin(pi/180*15*((72-120)/15+t-12))))))./( sin(alp*pi/180).*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365))) +cos(asin(sin(alp*pi/180)).*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365))))).*cos(asin(sin(pi/180*15*((78-120)/15+t-12)))));
```

```
        if abs(d-D)<0.000008
```

```
            k=k+1;
```

```

        list=[h(i),alp(j),N(v)];
        K{k}=list;list=[];
    else
        continue;
    end
end
end
end
end
%%
clear
clc

L=1:0.01:3;%设置杆长的搜索范围
phi=-20:0.01:30;%设置搜索的纬度范围
N=31+28+31+18;%计算该日期下的日数
delta=asind(0.39795*cosd(0.98563*(N-173)));%该日下的赤纬角
A=sind(delta);B=cosd(delta);
d=0.4934;K={};k=0;%当地正午12点对应的杆影长度
for i=1:length(L)
    for j=1:length(phi)
        D=L(i)*cotd(asind(A*sind(phi(j))+B*cosd(phi(j))));
        if abs(d-D)<0.000008
            k=k+1;
            list=[L(i),phi(j)];
            K{k}=list;list=[];
        else
            continue;
        end
    end
end
end

```