

储油罐的变位识别与罐容表标定

摘要

本文主要探讨了储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。本文通过建立合适的坐标系，使用二重积分的方法和近似积分、坐标变换等技巧，求解了小椭圆储油罐和实际储油罐在发生变位时储油量与油高变化的函数关系，从而分析了罐体变位后对罐容表的影响，并对数据结果和误差进行了详实的分析。本文在模型的建立与求解的过程中始终遵循化繁为简的原则，最先考虑简化的基本模型，再通过变换推导出实际的模型。

在第一问中，我们首先假设油罐壁的厚度为零，并通过二重积分的计算了小椭圆储油罐在无变位情况下的理论储油量。其次我们通过运用几何原理通过坐标变换利用现有模型计算了小椭圆储油罐在纵向倾斜后的理论储油量。在进行误差分析时，我们发现误差非线性，且误差数量级较大，得出油罐壁的厚度应不为零的结论，且经过理论分析油量 $V = O(d^3)$ ，故我们用三次多项式拟合误差曲线

$f(H)$ ，并通过 $V'(H) = V(H) - f(H)$ 修正了油量的计算公式。经检验，修正后模型的计算值与实际值十分吻合，模型准确度很高。并且，我们用修正后的模型 $V'(H)$ 对油罐进行了标定。

在第二问中，我们利用了问题一中的模型求解罐身中的油量体积，并通过二重积分给出了油罐凸头部分油量的计算公式，其中，在油罐发生纵向倾斜时，我们对凸头部分的油量进行了合理的近似计算。并且，我们通过坐标变换，给出了 $V(H) = f_2(f_1(H, \alpha), \beta) = f_1(H(\beta), \alpha)$ 的变位参数修正形式。在求解变为参数 α 、

β 时，我们通过最小二乘法拟合 $V(H)$ ，求出了 $\alpha = 2.1258^\circ$ ， $\beta = 4.6814^\circ$ 。将此变位参数代入模型中进行检验，得出理论计算值与实际值的相对误差限为 5.006%，平均相对误差为 0.029%，模型准确可靠。最后我们用所得模型对油罐进行了标定。

关键词：储油罐 油量 倾斜 标定

一、问题的重述与分析

1、问题重述

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（以下称为变位），从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。图 1 是一种典型的储油罐尺寸及形状示意图，其主体为圆柱体，两端为球冠体。图 2 是其罐体纵向倾斜变位的示意图，图 3 是罐体横向偏转变位的截面示意图。

请你们用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

（1）为了掌握罐体变位后对罐容表的影响，利用如图 4 的小椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体），分别对罐体无变位和倾斜角为 $\alpha=4.1^\circ$ 的纵向变位两种情况做了实验，实验数据如附件 1 所示。请建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为 1cm 的罐容表标定值。

（2）对于图 1 所示的实际储油罐，试建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度 α 和横向偏转角度 β ）之间的一般关系。请利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据（附件 2），根据你们所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为 10cm 的罐容表标定值。进一步利用附件 2 中的实际检测数据来分析检验你们模型的正确性与方法的可靠性。

2、问题分析

本题是基于二重积分运算的体积求解问题，关键在于建立合适的坐标系，确定被积函数，通过二重积分求出盛油量的体积 $V(H)$ 。对于给定的变位参数 α 、 β ，可通过对 H 进行坐标变换，在不改变 $V(H)$ 函数形式的情况下进行求解。

二、问题的假设

- 1、忽略油罐中的进油管、出油管和油浮子体积。
- 2、油罐在进油和出油的过程中油量没有损耗，且进油量和出油量为准确值。
- 3、认为油位探针的读数为准确值。

三、符号的说明

H ：罐内油量高度

α ：纵向倾斜角度

β ：横向偏转角度

L ：小油罐罐身长度

S_i ：第 i 种情况下罐体横截面含油量部分的面积

$V_i(H)$: 第 i 种情况下油罐中油量体积

$f_i(H)$: 第 i 种情况下的油量体积误差拟合曲线

a : 小油罐横截面椭圆的半长轴

b : 小油罐横截面椭圆的半短轴

r : 大油罐罐身横截面的半径

F : 凸头部分球缺的长

R : 凸头部分球缺的半径

四、 问题一的模型建立与求解

(一) 模型建立

由题意可知，罐容表的显示值由罐内油的高度测量值决定，罐内油的高度的测量值取决于油浮子的位置，所以当罐体发生倾斜时，罐容表的显示值就有可能和罐内油量实际体积产生偏差。为描述和分析这种偏差，我们需要计算出罐中油量的实际体积值随油量高度测量值 H 变化的函数关系 $V = V(H)$ ，将其与实验测得的测量值进行对比。

为了简化计算，在之前提出的问题假设基础上，暂增加油罐壁厚度为零的假设。

1、 罐体无变位情况下，罐中实际油量随高度变化的分析

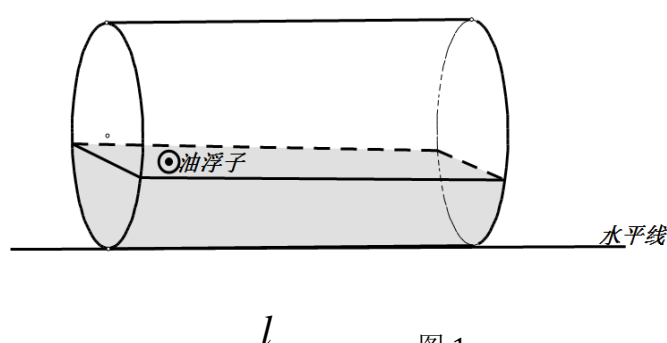


图 1

罐体无变位时保持水平的状态，罐体每一个截面椭圆中，油量所占面积 S 均为定值，我们可以将代表油量的阴影部分的空间几何体视作柱体，其体积 $V_1 = S_1 L$ 。

其中 $L = 0.4 + 2.05 = 2.45m$ 为定值，横截面的阴影面积 S_1 我们通过积分的方法进行求解。我们截取罐体的某一个截面，如图 2 所示建立坐标系：

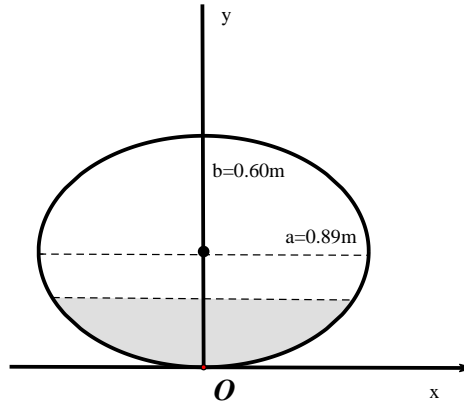


图 2

我们取横截面椭圆中心为坐标原点 O ，以椭圆长轴为 x 轴，椭圆短轴为 y 轴，

建立二维直角坐标系。设椭圆方程为： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1$ ，变换可得：

$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y-b)^2}$ ，则面积为：

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_0^H \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (y-b)^2} dy = 2 \int_{b-H}^b \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} dy = \frac{a}{b} [b^2 \arcsin \frac{y}{b} + y \sqrt{b^2 - y^2}] \Big|_{b-H}^b \\ &= \frac{a}{b} \left[\frac{\pi b^2}{2} - b^2 \arcsin \frac{b-H}{b} - (b-H) \sqrt{b^2 - (b-H)^2} \right] \end{aligned}$$

罐中实际的盛油体积为：

$$V_1(H) = LS_1 = abL [\arccos(1 - \frac{H}{b}) - (1 - \frac{H}{b}) \sqrt{\frac{2H}{b} - (\frac{H}{b})^2}]$$

即为所求的 $V_1 = V_1(H)$ 表达式。

2、倾斜角为 $\alpha = 4.1^\circ$ 时，灌中实际油量随高度变化的分析

根据前文所述，由于罐容表显示值是根据罐中当小油罐在竖直方向的高度计算的。因此，当油罐发生倾斜的时候，根据灌中油量高度的不同，在计算实际油量体积和罐容表显示值误差的有 5 种不同的可能情况，因此需要分别讨论这 5 种情况下的实际油量体积值。

在此之前我们先建立直角坐标系。由于倾角的产生，使得作为罐体的横截面面积 S 从无变位情况下的定值变成了随油面高度进行变化的函数表达式 $S(H)$ 。

因此，我们采取建立三维直角坐标系，进行二重积分的方法来分别计算这 5 种情况下的油量实际体积值，将其分别于对应的罐容表显示值进行对比。

如图 3 所示，选取油浮子所在点为 A ，由 A 向 l 引垂线，垂足为 O ，取油罐

被抬起一头的底面与 l 相交的一点为 B ，另一头的底面与 l 相交的一点记为 C 。
取 O 为坐标原点， OA 方向为 y 轴正方向， OB 方向为 z 轴正方向，从 O 点引一条与 yOz 平面垂直的射线作 x 轴正方向，设油面高度 OA 的值为 H 。

则在坐标系 $O-xyz$ 中， O 为坐标原点， A, B, C 三点的坐标值分别为：

$$A: (0, H, 0),$$

$$B: (0, 0, z_2) = (0, 0, 2.05)$$

$$C: (0, 0, z_1) = (0, 0, -0.4)$$

罐中油量的横截面面积设为 S_2 ，罐中油量的实际体积设为 V_2 ，则：

$$V_2 = V_2(S_2) = V_2(S_2(z))$$

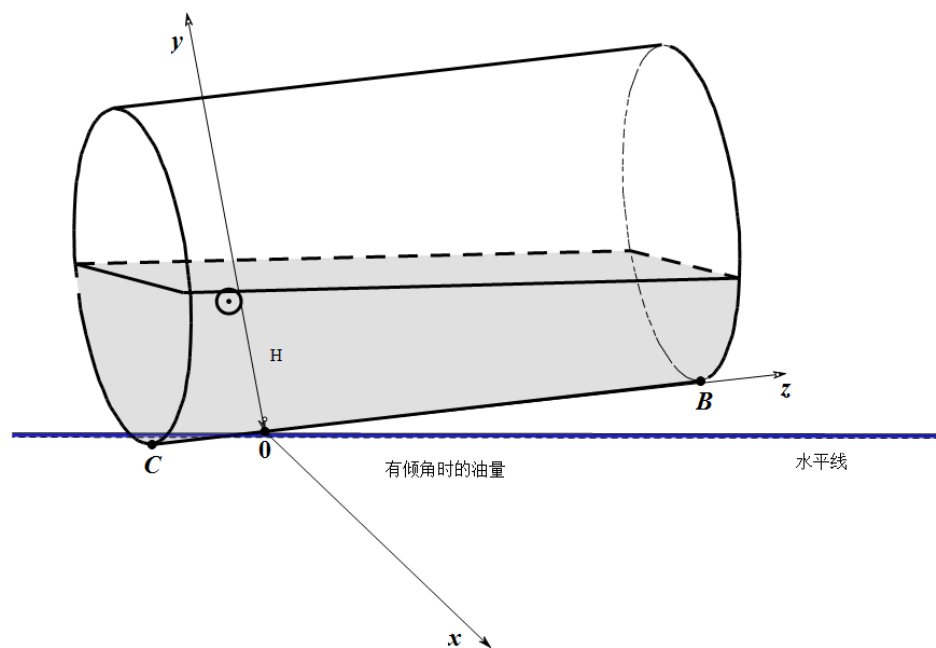


图 3

此时油罐的正面直视图（从油浮子所在处算起的部分）和横截面图如图 4 所示：

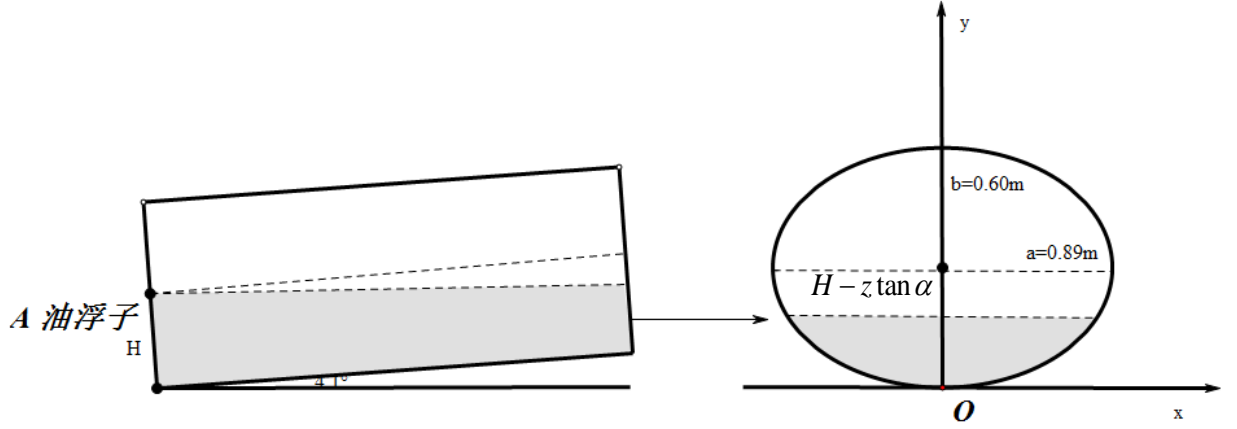


图 4

(1) $2.05 \tan \alpha < H \leq 1.2 - 0.4 \tan \alpha$ 时, 此时罐中油量的最高水平线应当位于图 5(1)所示的区域中, 液面的直线方程为 $y = H - z \tan \alpha$:

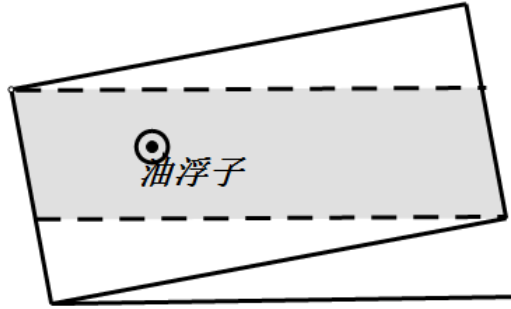


图 5(1)

在这种情况下有:

$$\begin{aligned} S_2(z) &= \frac{a}{b} \left[\frac{\pi b^2}{2} - (b-y) \sqrt{b^2 - (b-y)^2} - b^2 \arcsin\left(1 - \frac{y}{b}\right) \right] \Big|_{b-H}^{b-H+z \tan \alpha} \\ &= \frac{a}{b} \left[\frac{\pi b^2}{2} - (b-H+z \tan \alpha) \sqrt{b^2 - (b-H+z \tan \alpha)^2} - b^2 \arcsin\left(1 - \frac{H-z \tan \alpha}{b}\right) \right] \end{aligned}$$

则盛油体积为:

$$\begin{aligned} V_{21} &= \int_{z_1}^{z_2} S_2(z) dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{a}{b} \left[\frac{\pi b^2}{2} - (b-H+z \tan \alpha) \sqrt{b^2 - (b-H+z \tan \alpha)^2} - b^2 \arcsin\left(1 - \frac{H-z \tan \alpha}{b}\right) \right] dz \\ &= \frac{\pi ab}{2} \Big|_{z_1}^{z_2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{3 \tan \alpha} [b^2 - (b-H+z \tan \alpha)^2]^{\frac{3}{2}} \Big|_{z_1}^{z_2} \\ &\quad - \frac{ab}{\tan \alpha} \left[(b-H+z \tan \alpha) \cdot \arcsin\left(\frac{b-H+z \tan \alpha}{b}\right) + \sqrt{b^2 - (b-H+z \tan \alpha)^2} \right] \Big|_{z_1}^{z_2} \end{aligned}$$

(2) $0 < H \leq 2.05 \tan \alpha$, 此时油罐内最高水平线应当出现在如图 5 (2) 所示的情

况中:

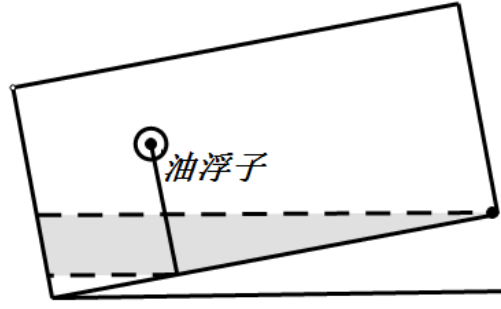


图 5(2)

在这种情况下，积分上限不再是 B 点在 y 轴上的坐标值 z_2 ，而是 $\frac{H}{\tan \alpha}$ ：

$$\begin{aligned}
 V_{22} &= V_{22}(S_2(z)) \\
 &= \int_{z_1}^{\frac{H}{\tan \alpha}} \frac{a}{b} \left[\frac{\pi b^2}{2} - (b - H + z \tan \alpha) \sqrt{b^2 - (b - H + z \tan \alpha)^2} - b^2 \arcsin\left(1 - \frac{H - z \tan \alpha}{b}\right) \right] dz \\
 &= \frac{\pi ab}{2} \left[\frac{H}{\tan \alpha} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{3 \tan \alpha} [b^2 - (b - H + z \tan \alpha)^2] \right] \bigg|_{z_1}^{\frac{H}{\tan \alpha}} \\
 &\quad - \frac{ab}{\tan \alpha} \left[(b - H + z \tan \alpha) \arcsin\left(\frac{b - H + z \tan \alpha}{b}\right) + \sqrt{b^2 - (b - H + z \tan \alpha)^2} \right] \bigg|_{z_1}^{\frac{H}{\tan \alpha}}
 \end{aligned}$$

(3) $1.2 - 0.4 \tan \alpha < H < 1.2$ 时，此时罐内油量的最高水平线如图 5 (3) 中阴影部分所示

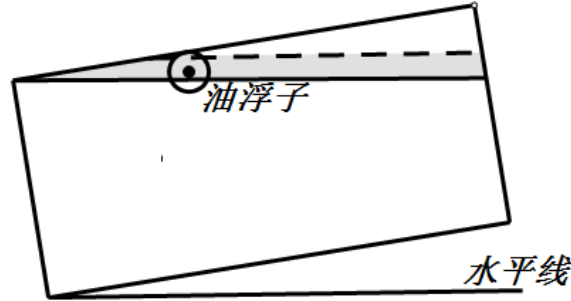


图 5(3)

此时，我们用油罐总体积减去未盛油部分的体积，总体积易算得为 πabL ，而根据对称性，未盛油部分体积的计算可以经过坐标变换有(2)的模型求得，为：

$$V'_{23} = V_{22}(H') = V_{22}\left(2.05 - \frac{0.4 - (1.2 - H)}{\tan \alpha}\right),$$

所以油罐的实际盛油体积为

$$V_{23} = V_{\text{总}} - V'_{23} = \pi abL - V_{22}\left(2.05 - \frac{0.4 - (1.2 - H)}{\tan \alpha}\right)$$

(4) $H \leq 0$ 时，此时罐内虽然有油量，但是由于液面高度不到油位探针的底部，因此在罐容表中的显示值为 0，即当 $h = 0$ 时，由 $V_2(0)$ 求得油罐盛油量的最大值，即油罐实际盛油量为 $0 \leq V_4 \leq V_2(0)$ 。

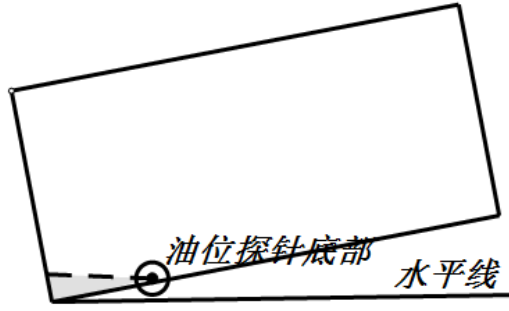


图 5(4)

(5) $H=1.2$ 时, 此时虽然罐内油量未滿, 但是由于油量的水平线已经漫过了油位探针在罐内的顶部, 因此此时罐容表的显示值为油滿。此时罐内实际盛油量 $V_{23}(3) \leq V_5 \leq \pi abL$, 即 $V_{23}(3) \leq V_5 \leq 4.108$

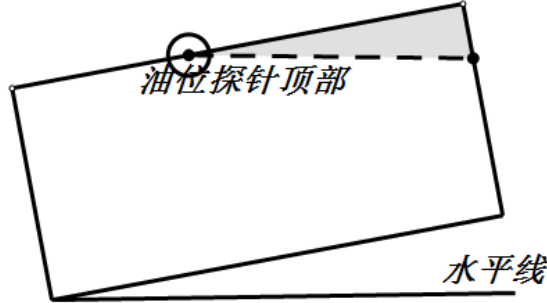


图 5(5)

所以当 $0 < H < 1.2$ 时, 油罐盛油量 $V(H)$ 为:

$$V_2(H) = \begin{cases} \frac{\pi ab}{2} \left| \frac{z_2}{z_1} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{3 \tan \alpha} [b^2 - (b - H + z \tan \alpha)^2] \right|^{\frac{3}{2}} \Big|_{z_1}^{z_2} - \frac{ab}{\tan \alpha} [(b - H + z \tan \alpha) \cdot \arcsin(\frac{b - H + z \tan \alpha}{b}) + \sqrt{b^2 - (b - H + z \tan \alpha)^2}] \Big|_{z_1}^{z_2}, & \text{其中 } z_1 = -0.4, z_2 = \frac{H}{\tan \alpha}, 0 < H \leq 2.05 \tan \alpha; \\ \frac{\pi ab}{2} \left| \frac{z_2}{z_1} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{3 \tan \alpha} [b^2 - (b - H + z \tan \alpha)^2] \right|^{\frac{3}{2}} \Big|_{z_1}^{z_2} - \frac{ab}{\tan \alpha} [(b - H + z \tan \alpha) \cdot \arcsin(\frac{b - H + z \tan \alpha}{b}) + \sqrt{b^2 - (b - H + z \tan \alpha)^2}] \Big|_{z_1}^{z_2}, & \text{其中 } z_1 = -0.4, z_2 = 2.05, 2.05 \tan \alpha < H \leq 1.2 - 0.4 \tan \alpha; \\ \pi abL - \left\{ \frac{\pi ab}{2} \left| \frac{z_2}{z_1} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{3 \tan \alpha} [b^2 - (b - H + z \tan \alpha)^2] \right|^{\frac{3}{2}} \Big|_{z_1}^{z_2} - \frac{ab}{\tan \alpha} [(b - H + z \tan \alpha) \cdot \arcsin(\frac{b - H + z \tan \alpha}{b}) + \sqrt{b^2 - (b - H + z \tan \alpha)^2}] \Big|_{z_1}^{z_2} \right\}, & \text{其中 } z_1 = -0.4, z_2 = 2.05 - \frac{0.4 - (1.2 - H)}{\tan \alpha}, 1.2 - 0.4 \tan \alpha < H < 1.2; \end{cases}$$

特别的, 当 $H=0$ 时, 实际盛油量 $V_2 \in [0, V_2(0)]$; 当 $H=1.2$ 时, 实际盛油量

$V_2 \in [V_2(0), \pi abL]$ 。

(二) 模型求解

1、理论值计算

(1) 根据模型采用 MATLAB 编程计算，得到水平放置时油罐的油量理论值，并与实际值作差计算差值，部分计算结果：

油位高度 H/mm	罐内实际 油量 V^*/L	理论计算 值油量 V/L	$(V-V^*)$ / L	油位高度 H/mm	罐内实际 油量 V^*/L	理论计算 值油量 V/L	$(V-V^*)$ / L
159.02	312.00	322.88	10.88
176.14	362.00	374.63	12.63
192.59	412.00	426.36	14.36
208.50	462.00	478.13	16.13
223.93	512.00	529.85	17.85	1081.59	3718.91	3848.65	129.74
238.97	562.00	581.61	19.61	1102.33	3768.91	3900.39	131.48
253.66	612.00	633.35	21.35	1125.32	3818.91	3952.14	133.23
268.04	662.00	685.08	23.08	1152.36	3868.91	4003.86	134.95
282.16	712.00	736.85	24.85	1193.49	3918.91	4055.61	136.70
296.03	762.00	788.58	26.58	1081.59	3968.91	4107.36	138.45

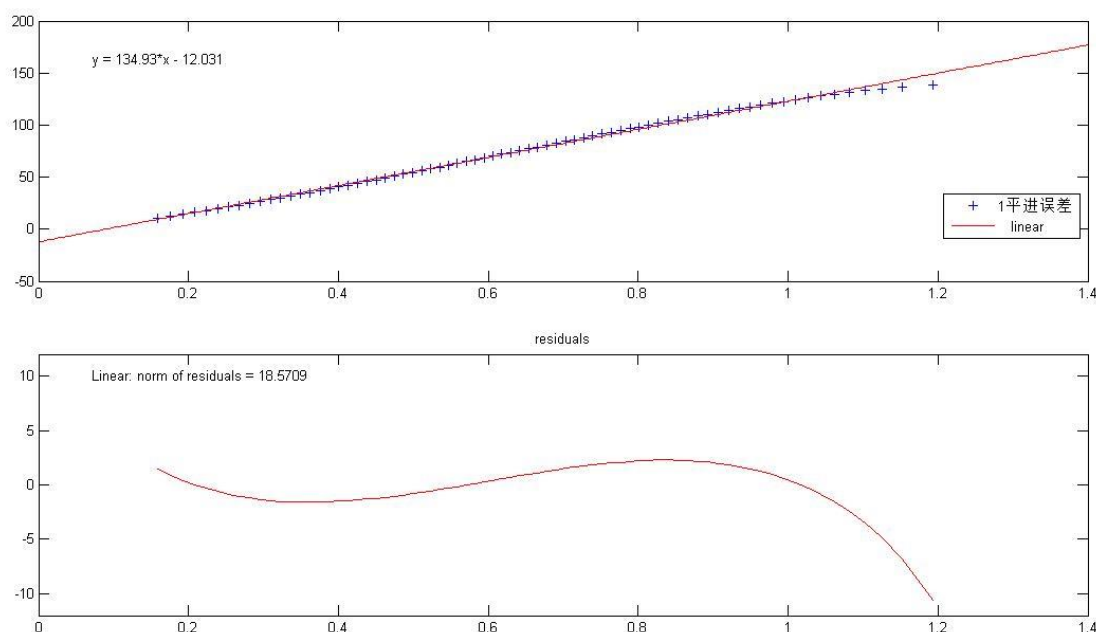
(2) 根据模型采用 MATLAB 编程计算，得到 $\alpha=4.1^\circ$ 时油罐的油量理论值，并与实际值作差计算差值，部分计算结果：

油位高度 H/mm	罐内实际 油量 V^*/L	理论计算 值油量 V/L	$(V-V^*)$ / L	油位高度 H/mm	罐内实际 油量 V^*/L	理论计算 值油量 V/L	$(V-V^*)$ / L
411.29	962.86	1010.05	47.19
423.45	1012.86	1058.33	45.47
438.33	1062.86	1118.05	55.19
450.54	1112.86	1167.53	54.67
463.90	1162.86	1222.15	59.29	980.14	3312.73	3379.02	66.29
477.74	1212.86	1279.20	66.34	992.41	3362.73	3423.55	60.82
489.37	1262.86	1327.49	64.63	1006.34	3412.73	3473.19	60.46
502.56	1312.79	1382.61	69.82	1019.07	3462.73	3517.66	54.93
514.69	1362.79	1433.61	70.81	1034.24	3512.73	3569.46	56.73
526.84	1412.73	1484.96	72.23	1035.36	3514.74	3573.23	58.49

2、误差分析及模型修正

(1) 将油罐水平放置时

理论值与实际值的误差拟合得：



粗看下，我们觉得在题给范围内，误差呈线性相关关系。

拟合曲线为 $y = 134.93x - 12.031$ 。

我们首先联想到线性上升的原因是：油箱内标杆没入液体的体积随液体高度逐渐增加而线性增加，从而导致损失的体积亦呈线性增加。

可是，由拟合函数知每上升 10cm，会有 13.5L 的油料体积损失掉，经过计算，此标杆面积达到 0.126m^2 ，半径达到 20cm，相比于油罐的大小，这显然是不可能的。事实上，标杆的横截面积相对于油罐来说是非常小的，完全不能够造成上述误差。

因此可以推翻以上误差分析。

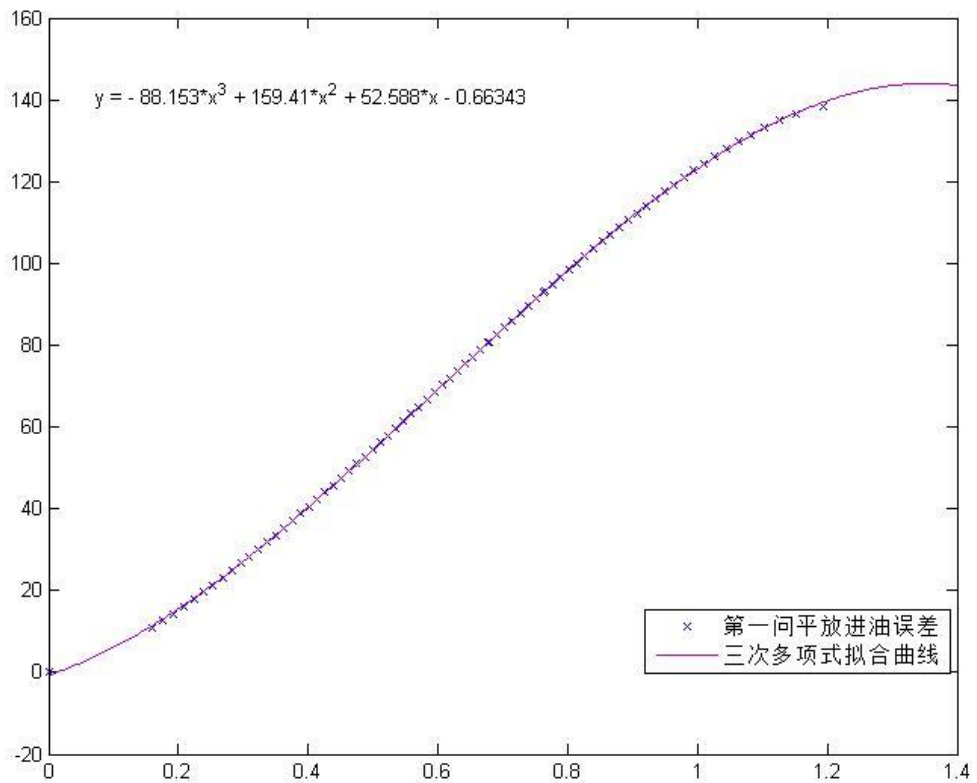
考虑在计算油量理论值时忽略了油罐壁的厚度，而实际上此厚度是存在的。

不妨设此厚度为 d 。则有 $a' = a - d$, $b' = b - d$, $L' = L - 2d$ ，将经过修正后的参数代入模型中得：

$$V'_1(H) = (a-d)(b-d)(L-2d)\left[\arccos\left(1 - \frac{H}{b-d}\right) - \left(1 - \frac{H}{b-d}\right)\sqrt{\frac{2H}{b-d} - \left(\frac{H}{b-d}\right)^2}\right]$$

但是， d 的实际值无法由所给数据精确求得。但可以估算得 $d \approx 1\text{cm}$ ，与国家标准相符，从而说明 d 即为主要误差来源。

我们注意到，当油罐满油时， $V = \pi(a-d)(b-d)(L-d)$ ，且由泰勒展式可以确定 $V = O(d^3)$ ，故我们用三次多项式拟合误差，并且，拟合误差时加入 $(\Delta V, H) = (0, 0)$ 一点，使拟合曲线更符合实际情况，结果如下：



拟合曲线为

$$f_1(H) = -88.153H^3 + 159.41H^2 + 52.588H - 0.66343$$

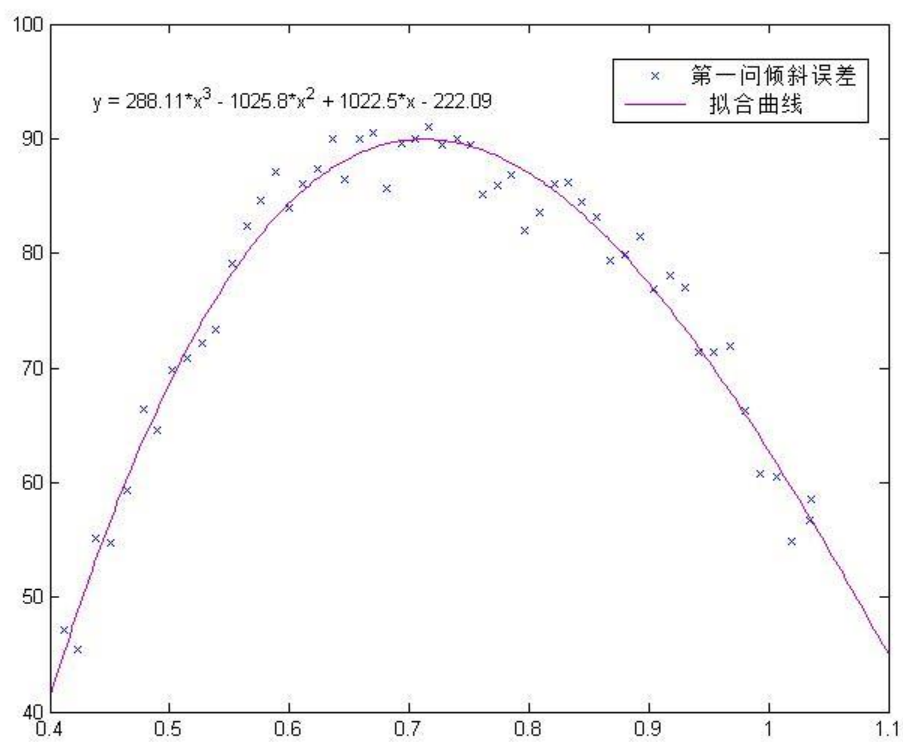
则修正后的模型为

$$V_1'(H) = V_1(H) - f_1(H)$$

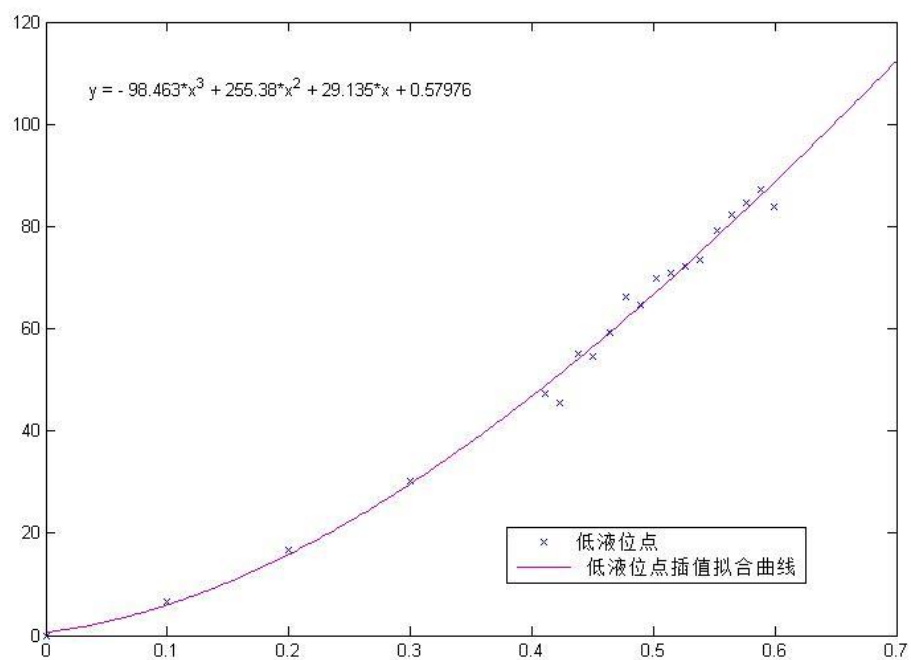
(2) 油罐以 $\alpha = 4.1^\circ$ 放置时

同上理，我们用三次多项式拟合误差，但是，必须考虑到题目中所给的 H 数值区间较短，且低液位点计算体积的公式与中间液位的有区别，拟合时若强行加入 $(\Delta V, H) = (0, 0)$ 点将产生较大误差，故我们的处理办法是：先以题目中所给数据拟合出一条三次曲线，再在数据中取 H 较小的一部分数值，加入 $(\Delta V, H) = (0, 0)$ ，用插值公式求出一些低液位点的误差，并进行三次多项式拟合，求出低液位点的误差函数。

中间液位点的拟合结果为：



低液位点的误差插值后拟合的三次曲线为：



求两条曲线的交点得， $H = 0.4483$ ，故误差曲线为

$$f_2(H) = \begin{cases} 0, & H = 0 \\ -98.463H^3 + 255.38H^2 + 29.135H + 0.57976, & 0 < H < 0.4483 \\ 288.11H^3 - 1025.8H^2 + 1022.5H - 222.09, & 0.4483 \leq H < 1.2 \end{cases}$$

则修正后的模型为：

$$V_2'(H) = V_2(H) - f_2(H)$$

3、模型检验

(1) 油罐水平放置时的模型检验

水平放置时，我们用出油的数据进行模型检验。注意到，进油最后一组流水号与出油第一组数据流水号不连续，表明两个操作之间，油罐进行了其他未知的进/出油操作，故无法确定出油操作的初始油量。但每次操作的出油量均为 50L，故我们可用模型算出的油量数据作差，检验差值是否为 50L，从而判断模型的正确与否。检验时取每相隔 4 个点的两点所得值作差并除以 4，算出差值 dV ，消除随机误差。

部分结果如下表：

模型计算出油差值 dV /L	模型计算结果与实际差值 ($dV - 50$)/L
49.91887	-0.08113
49.98107	-0.01893
50.00848	0.008484
50.02821	0.02821
50.03951	0.039513
50.03535	0.035352
50.0442	0.044204
50.0375	0.037496
50.0344	0.034396
.....

计算方差得 $\sigma^2 = 7.6904e-004$ ，可以看到，结果相当精确，从而验证了修正后的模型的正确性。

(2) 油罐以 $\alpha = 4.1^\circ$ 放置时的模型检验

检验原理同上，我们发现，每两点的差值有所浮动，但每五点的差值仍然精确。部分检测结果如下表：

模型计算出油差值 dV /L	模型计算结果与实际差值 ($dV - 50$)/L
50.222512	0.222512
49.21297	-0.78703
50.99986	0.9998597
50.180357	0.180357

50.214614	0.2146138
51.931247	1.9312469
50.227363	0.2273633
51.510497	1.5104974
48.819252	-1.180748
.....

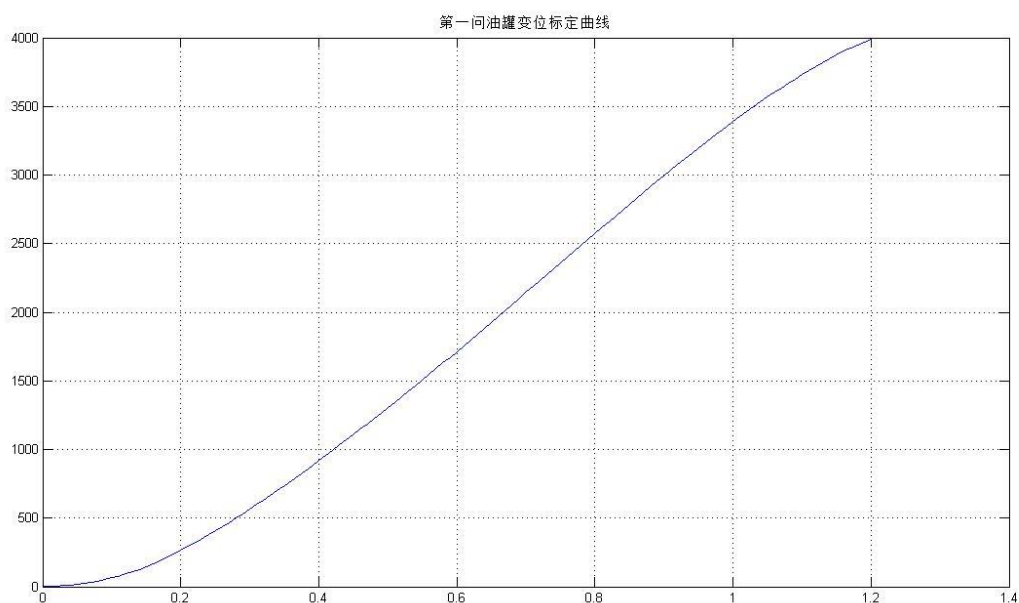
计算方差得 $\sigma^2 = 0.7818$ ，可以看到，结果相当精确，从而验证了修正后的模型的正确性。

4、油罐以 $\alpha = 4.1^\circ$ 放置时的标定

标定部分结果如下：

油位高度 H /m	标定油量 V /L	油位高度 H /m	标定油量 V /L
.....
0.15	147.45	0.70	2142.66
0.16	168.88	0.71	2185.93
0.17	191.57	0.72	2229.21
0.18	215.38	0.73	2272.51
0.19	240.23	0.74	2315.79
0.20	266.02	0.75	2359.05
0.21	292.71	0.76	2402.28
0.22	320.24	0.77	2445.45
0.23	348.55

标定结果的拟合曲线为：



五、问题二的模型建立与求解

对于变体后的罐体内油量体积计算，我们首先将油罐分为三个部分：罐身部分和两个罐头部分，自然地，我们有 $V = V_{\text{身}} + V_{\text{头1}} + V_{\text{头2}}$ ，我们分别建立模型计算这三部分的积分。首先，对于罐身部分，我们采用如问题一的方法在沿圆柱母线方向积分；其次，由于在实际油罐中，油罐两头的为球缺，直接对其采取符号积分求体积比较困难。为了简便计算以解决实际问题，我们采取近似积分的方法进行求解，由于油罐凸头部分容积较小，只要采取合理的近似方法，就可以把误差控制在很小的范围之内。

由于油罐在纵向和横向上都发生了变位，因此我们首先只考虑纵向偏转，利用第一问建立的模型求解，其次通过坐标变换的方法求解横向偏转的情况，最终求解出罐内储油量与油位高度及变位参数的函数关系。

求出上述函数关系后，我们根据附录中实际测量数据，利用最小二乘拟合的方法求解变为参数 α 、 β ，并给出高度为 10cm 的标定值，并检验模型的可靠性。

1、近似积分思想：

当罐体发生偏转时，罐头内的储油量很难直接符号积分求得，我们采用如图 8 所示的近似积分方法。

图 8 是偏转后油罐直视图，罐中实际液位线平行于水平线。设液位线与矩形 $ABCD$ 中 AD 边和 BC 边交点分别为 D 点和 E 点。过 D 点和 E 点分别作 l' 的平行线，与 AD 弧和 BC 弧分别交于 G 点和 H 点。设液位线与 AD 弧和 BC 弧分别交于 I 点和 J 点。

我们用图中阴影部分的体积来代替实际的储油量：

采用 V_{AEG} 近似代替 V_{AEI}

采用 V_{BFH} 近似代替 V_{BFJ}

不难发现，采用这种方法产生的误差为 $|V_{EGI} - V_{FHJ}|$ ，由于油罐拱凸度不大， α 、 β 的值较小，故这个误差是可以接受的。

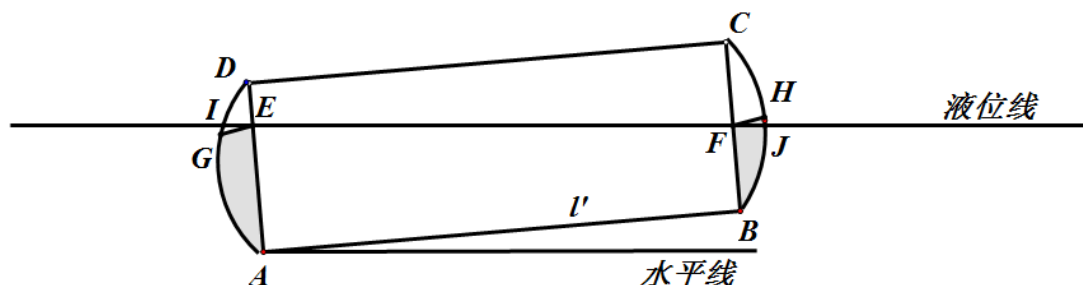


图 8

2、罐内油量体积的计算：

由于本小题中，罐体发生了纵向倾斜和横向偏转，两个方向的变化如果同时考虑会比较复杂，为了简化计算，我们首先只考虑纵向倾斜度 α ，无横向偏转的情况。然后再通过坐标变换的方式，求解有横向偏转 β 的情况。

(1) 纵向倾斜度为 α ，无横向偏转的情况：

① 罐身油量体积的计算：

我们采用第一问中小油罐油量的计算方法，是令第一问计算公式中 $a=b=r=1.5m$ ， $z_1=-2, z_2=6$ 的特殊情况。罐身横截面圆的方程为

$x^2 + (y-b)^2 = 1.5^2$ ，变换可得：

$x = \pm\sqrt{1.5^2 - (y-b)^2}$ ，则可求得其

$$\begin{aligned} S_{\text{身}}(z) &= \frac{\pi r^2}{2} - (r-y)\sqrt{r^2 - (r-y)^2} - r^2 \arcsin(1 - \frac{y}{r}) \\ &= \frac{\pi r^2}{2} - (r-h+z \tan \alpha)\sqrt{r^2 - (r-h+z \tan \alpha)^2} - r^2 \arcsin(1 - \frac{h-z \tan \alpha}{r}) \end{aligned}$$

对 $S_{\text{身}}(z)$ 进行积分，可推导求得罐身部分的体积公式 $V_{\text{身}}$ 为：

$$\begin{aligned} V_{\text{身}} &= V_{\text{身}}(h, z_1, z_2) \\ &= \int_{z_1}^{z_2} S_{\text{身}}(z) dz \\ &= \int_{z_1}^{z_2} [\frac{\pi r^2}{2} - (r-h+z \tan \alpha)\sqrt{r^2 - (r-h+z \tan \alpha)^2} - r^2 \arcsin(1 - \frac{h-z \tan \alpha}{r})] dz \\ &= \frac{\pi r^2}{2} \Big|_{z_1}^{z_2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{3 \tan \alpha} (r^2 - (r-h+z_2 \tan \alpha)^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{z_1}^{z_2} \\ &\quad - \frac{r^2}{\tan \alpha} [(r-h+z \tan \alpha) \cdot \arcsin(\frac{r-h+z \tan \alpha}{r}) + \sqrt{r^2 - (r-h+z \tan \alpha)^2}] \Big|_{z_1}^{z_2} \end{aligned}$$

② 罐头油量体积的计算：

我们首先考虑处于低端的罐头，如图 10 所示建立直角坐标系：

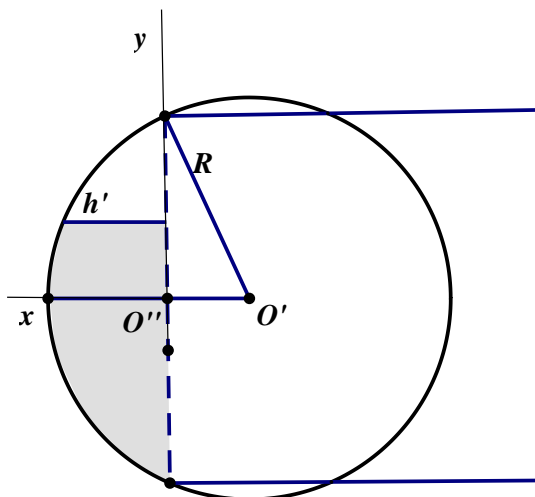


图 10(1)

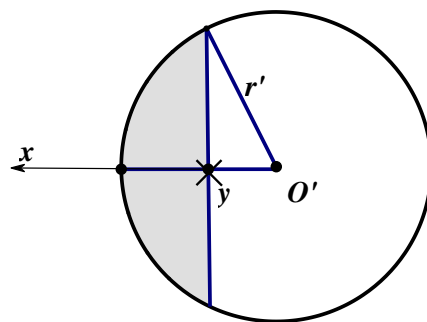


图 10(2)

图 10(1)是油罐的横截面图，圆 O' 罐头球缺部分的补完图，图中阴影部分为罐头中的储油量，以 O' 点为圆心建立直角坐标系，过 O' 点作平行 l 的直线，取指向低端罐头的方向为 x 轴正方向，过 O' 点作垂直于 l 的直线，取向上方向为 y 轴正方向，建立直角坐标系，记液面高度为 h

图 10(2)是罐头俯视图的补完图，图中阴影部分的面积即为被积函数 $S_{\text{头}1}(h)$

根据题中数据可知： $r = \frac{3}{2}$, $F = 1$, $R = \frac{r^2 + F^2}{2F} = 1.625$, $A = R - F = 0.625$,

则运用平面几何知识可得：

$$r' = \sqrt{R^2 - h^2}, \quad h' = r' - A = \sqrt{R^2 - h^2} - A, \quad \theta = \arccos \frac{r' - h'}{r'} = \arccos \frac{A}{\sqrt{R^2 - h^2}}$$

则阴影部分横截面积为：

$$\begin{aligned} S_{\text{头}1}(h) &= 2[r'^2 \theta - \frac{1}{2} \sqrt{r'^2 - (r' - h')^2} \cdot (r' - h')] \\ &= 2[(R^2 - h^2) \arccos \frac{A}{\sqrt{R^2 - h^2}} - \frac{1}{2} A \sqrt{R^2 - h^2 - A^2}] \end{aligned}$$

则部分球缺的体积为： $V_{\text{头}}(h) = \int_0^h S(h) dh$

利用Mathematica软件计算不定积分 $\int S(h) dh$ ，得：

$$\begin{aligned}
\int S(h)dh = & -\frac{Ah}{6}\sqrt{\frac{A^2+h^2-R^2}{h^2-R^2}}\cdot\sqrt{R^2-h^2}-\frac{Ah}{2}\cdot\sqrt{-A^2-h^2+R^2}-\frac{h}{3}(h^2-3R^2)\cdot\arccos\frac{A}{\sqrt{-h^2+R^2}} \\
& +\frac{A}{6}(A^2+3R^2)\cdot\arctan(h\cdot\sqrt{\frac{-A^2-h^2+R^2}{-h^2+R^2}}\cdot\frac{\sqrt{-h^2+R^2}}{A^2+h^2-R^2}) \\
& -\frac{A}{2}\cdot(A^2-R^2)\cdot\arctan(h\cdot\frac{\sqrt{-A^2-h^2+R^2}}{A^2+h^2-R^2}) \\
& +\frac{2R^3}{3}\cdot\sqrt{\frac{-A^2-h^2+R^2}{-h^2+R^2}}\cdot\sqrt{-h^2+R^2}\cdot\arctan(\frac{Ah}{R\sqrt{-A^2-h^2+R^2}}) \\
& +\frac{\sqrt{-A^2-h^2+R^2}}{\sqrt{-A^2-h^2+R^2}}
\end{aligned}$$

代入积分上下限，求得球缺部分体积为：

$$V_{\text{头}1}(h_1) = \int_0^{h_1} S(h)dh = V_{\text{头}}(h_1) - V_{\text{头}}(0) = V_{\text{头}}(h_1)$$

对于处于高处一端的罐头球缺，我们采用同样的方法进行处理。同理可得另一个球缺的体积也为

$$V_{\text{头}2}(h_2) = \int_0^{h_2} S(h)dh = V_{\text{头}}(h_2) - V_{\text{头}}(0) = V_{\text{头}}(h_2)$$

(2) 纵向倾斜度为 α ，横向偏转为 β 的情况：

由于(1)中我们已经求得了在横向无偏转的情况下的油量体积值，所以在处理横向偏转为 β 时，我们采用坐标变换的方式求取罐内油量体积。

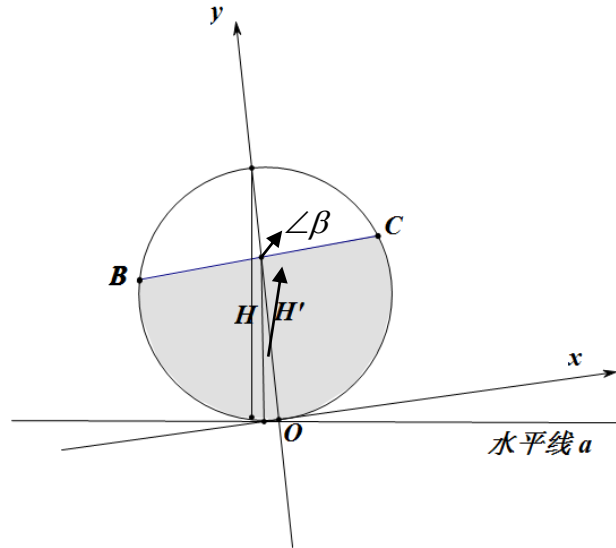


图 11

图 11 为油罐的横截面图， $S_{\text{头}1} = S_{\text{BOC}}$ ，油罐横向偏转 β ，我们得到 $H' \rightarrow H$ 的映射。

由题意可知， $H' - z \tan \alpha = h + r$ ，则 $h = H' - z \tan \alpha$

又 $\frac{H' - r}{H - r} = \cos \beta$ ，则 $H' = (H - r) \cos \beta + r$ ，将 H' 代入上式可得：

$$h = (H - r) \cos \beta - z \tan \alpha$$

即为 h 和 H 对应的函数关系式。

所以，我们可以采用 (1) 中的 $V(h) = \int_0^h S(h)dh$ 的计算公式来计算偏转之后罐头油量。

$$V_{\text{头}}(h) = \int_0^h S(h)dh = \int_0^{(H-r)\cos\beta - z\tan\alpha} S(h)dh$$

故总体积的求解函数为：

$$V(H) = \begin{cases} V_{\text{身}}((H-r)\cos\beta + r, -2, ((H-r)\cos\beta + r)/\tan\alpha) \\ \quad + V_{\text{头}}((H-r)\cos\beta + 2\tan\alpha), & 0 < H \leq \frac{6\tan\alpha - r}{\cos\beta} + r \\ V_{\text{身}}((H-r)\cos\beta + r, -2, 6) + V_{\text{头}}((H-r)\cos\beta + 2\tan\alpha) \\ \quad + V_{\text{头}}((H-r)\cos\beta - 6\tan\alpha), & \frac{6\tan\alpha - r}{\cos\beta} + r < H < \frac{3-2\tan\alpha - r}{\cos\beta} + r \\ V_{\text{身}}((H-r)\cos\beta + r, -2, 6 - (2 - (3 - (H-r)\cos\beta - r)/\tan\alpha)) + \frac{1}{2}\pi F^2(R - \frac{F}{3}) \\ \quad + V_{\text{头}}((H-r)\cos\beta - 6\tan\alpha), & \frac{3-2\tan\alpha - r}{\cos\beta} + r < H < 3 \end{cases}$$

3、变位参数 α 、 β 的求解模型：

本小题要求我们利用附件中的实测数据确定油罐变位参数 α 、 β ，我们注意到，附件中的“显示油量容积”是通过出厂预先标定测试所得的结果，经过计算，我们发现，这一数值与出油量这一准确值相矛盾，因此我们对“显示油量容积”数据的可信度表示怀疑，不采取该列数据求解 α 、 β 。

所以，我们认为出油量是正确的数据，我们设计了如下以出油量为基础的最小二乘拟合算法，以求解出 α 、 β 的值。

令理论计算的出油量为 ΔV ，实际出油量为 ΔV^* ，则规划模型为：

$$\begin{aligned} \min F &= \frac{\sum_{k=1}^n (\Delta V(k) - \Delta V^*(k))^2}{n} \\ \text{s.t.} \quad & s_1 \leq \alpha(i) \leq s_2, \\ & t_1 \leq \beta(j) \leq t_2, \\ & i \leftarrow 1 \text{ to } l, \\ & j \leftarrow 1 \text{ to } m. \end{aligned}$$

则求解模型的伪代码为：

```

min = INF;
for i ← 1 to l
    for j ← 1 to m
        for k ← 1 to n
            calculate ΔV(k);
            
$$F = \frac{\sum_{k=1}^n (\Delta V(k) - \Delta V^*(k))^2}{n};$$

        if min > F
            min = F;
             $\alpha^* = \alpha(i);$ 
             $\beta^* = \beta(j);$ 

```

上述伪代码的含义为：

(1) 构造一个 (α, β) 的二维矩阵，对 α 和 β 进行遍历。

(2) 根据 $(\alpha(i), \beta(j))$ 计算向量 ΔV ，求出 $\min F = \frac{\sum_{k=1}^n (\Delta V(k) - \Delta V^*(k))^2}{n}$ 时的变位参数值 (α^*, β^*) 。

根据上述算法，我们用 Matlab 解得如下结果：

$$\begin{cases} \min F = 0.8176 \\ \alpha^* = 2.1258 \\ \beta^* = 4.6814 \end{cases}$$

对于求得的变位参数 (α^*, β^*) ，我们认为其不等于实际值，而是实际值经过误差修正后的变位参数，且应与实际值十分接近，所以将 (α^*, β^*) 代入模型后的所求出的油量值应是经过误差修正后的准确值。

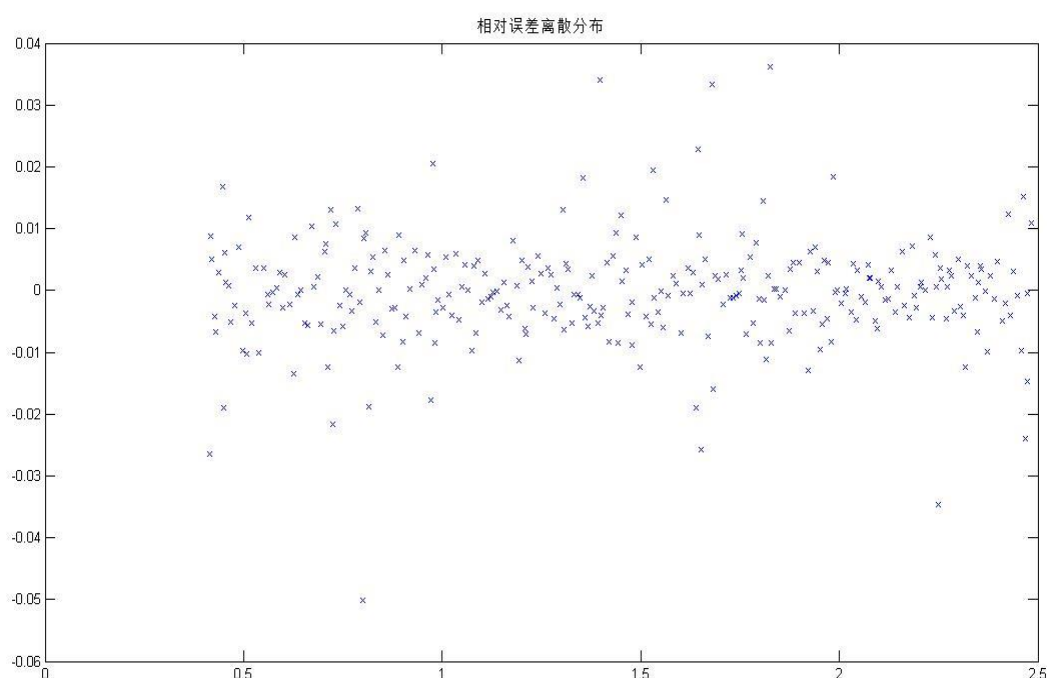
4、误差分析

我们计算出了理论出油量 ΔV ，采用重新经过加油后的出油量数据，并计算误差值 $\Delta V - \Delta V^*$ ，部分计算结果如下：

油位高度 H /m	理论出油量 ΔV /L	误差值 $(\Delta V - \Delta V^*)$ /L	相对误差
.....
2305.25	173.51	-0.46	-0.00265

2299.08	147.76	0.75	0.005078
2290.51	205.99	-0.68	-0.00328
2282.23	199.85	0.48	0.002398
2277.31	119.13	0.39	0.003281
2271.00	153.20	0.10	0.000639
2268.84	52.55	-0.24	-0.00463
2257.00	288.98	0.54	0.001853
2253.33	89.89	0.32	0.003589
2250.27	75.07	-2.60	-0.03469
.....

相对误差的散点分布图为：



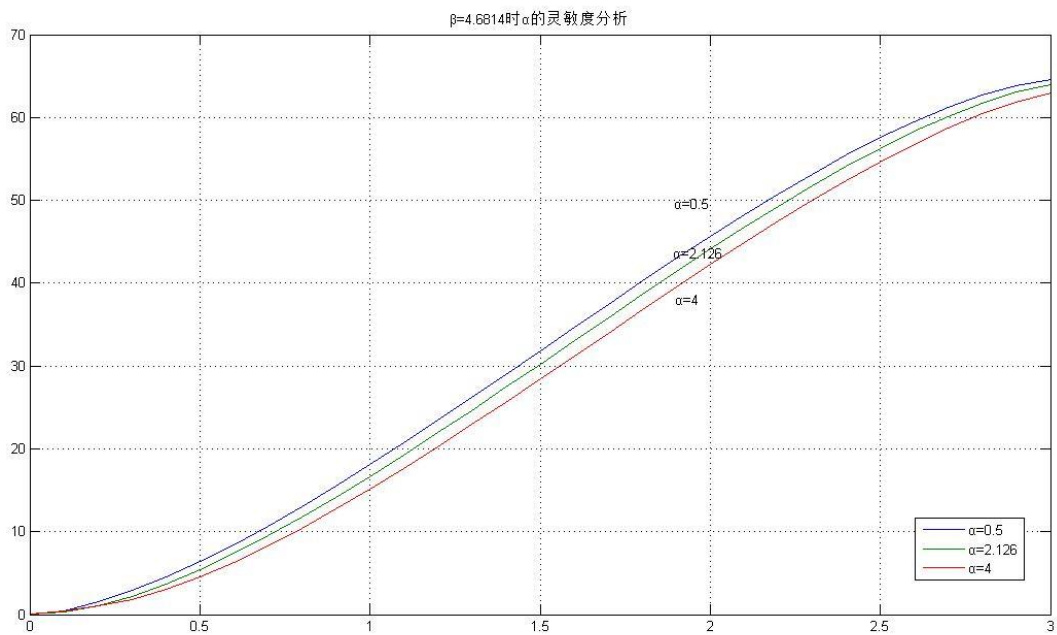
计算得相对误差限为 5.006%，平均相对误差 0.029%，且相对误差在 0 附近震荡，故可以认为模型误差相当小，5%应为随机误差。从而，我们在模型中对球缺部分的盛油量所作的近似计算是合理可靠的。

而且这证明了将 (α^*, β^*) 代入模型后的所求出的油量值的确是经过误差修正后的准确值。

5、 α 和 β 的灵敏度分析

(1) α 的灵敏度分析

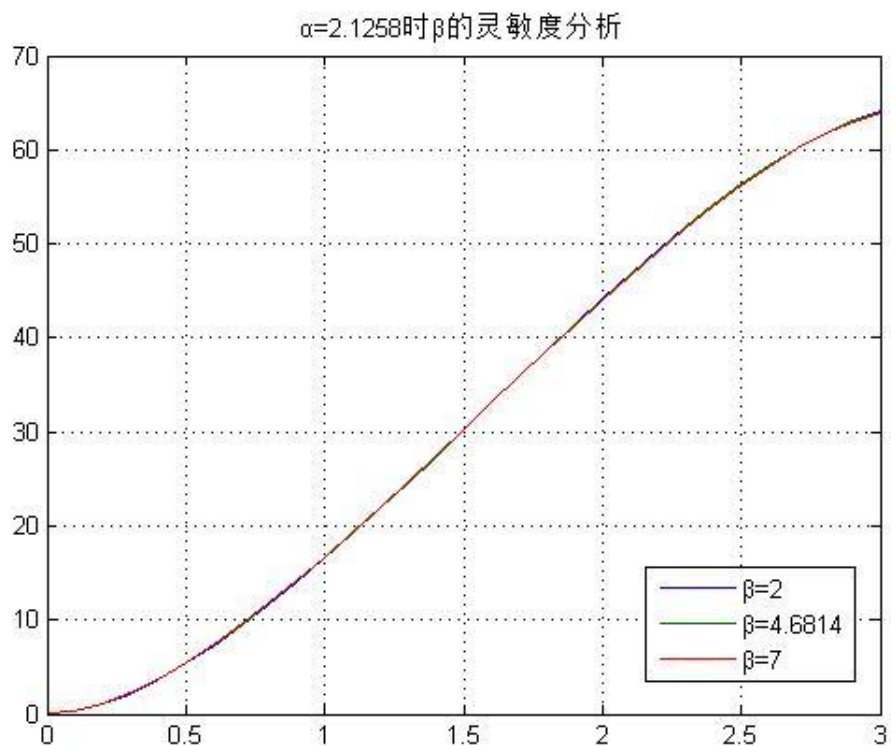
当 $\beta=4.6814$ 时，取 $\alpha=0.5, 2.1258, 4$ 分别进行标定得：



由图可知， α 在一定变化范围内，曲线大致形状不改变，可以认为模型关于 α 亦是稳定的。其次， α 越小，曲线中部近似线性区越大，与理论推测相符。

(2) β 的灵敏度分析

当 $\alpha=2.1258$ 时，取 $\beta=2, 4.6814, 7$ 分别进行标定得：



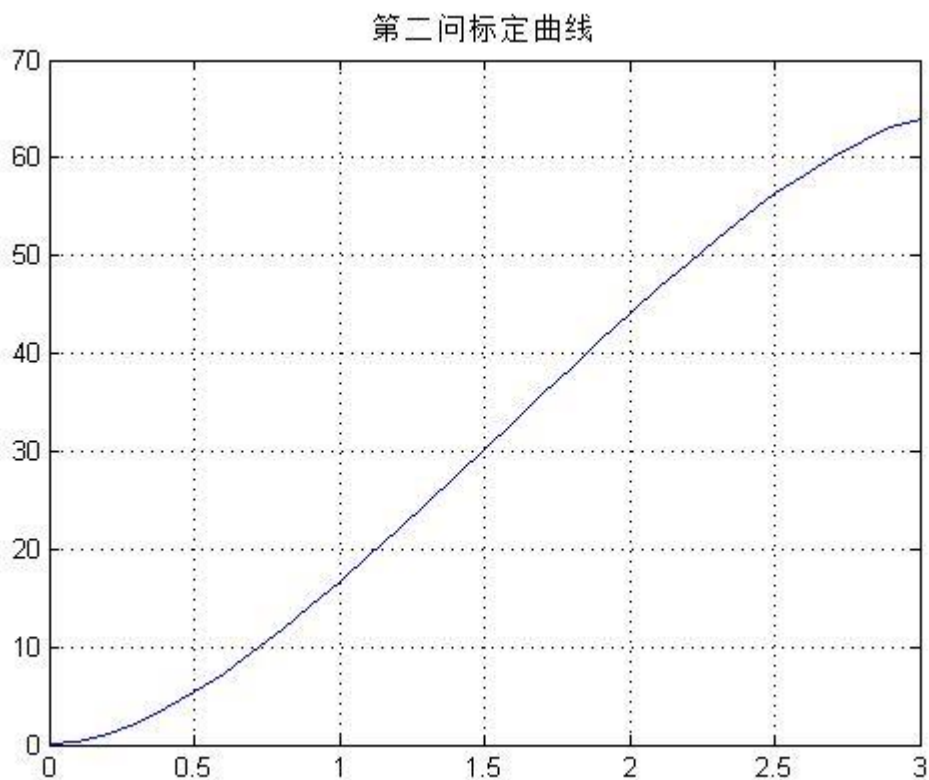
由图可知，在 α 一定时变化范围内，取不同的 β ，所得曲线几乎重合，这是因为在 β 较小时， $\cos\beta \approx 1$ ，对模型的影响很小。并且，我们同样可以得出模型关于 β 亦是稳定的。

6、标定结果

根据 3 中所述算法,利用 MATLAB 软件对实际采集数据表中的数据进行整合分析,求得高度间隔为 10cm 的罐容表标定值,所得结果如表 3 所示:

油位高度 H /m	标定油量 V /L	油位高度 H /m	标定油量 V /L
0.0	0.047276	1.6	33.05039
0.1	0.356939	1.7	35.86045
0.2	1.066004	1.8	38.65132
0.3	2.21961	1.9	41.40754
0.4	3.696221	2.0	44.11334
0.5	5.423705	2.1	46.75252
0.6	7.360405	2.2	49.30818
0.7	9.475229	2.3	51.76251
0.8	11.74264	2.4	54.09641
0.9	14.14048	2.5	56.2889
1.0	16.64881	2.6	58.31631
1.1	19.24924	2.7	60.15063
1.2	21.92448	2.8	61.75635
1.3	24.658	2.9	63.08159
1.4	27.43385	3.0	64.01625
1.5	30.23643		

将上述数据用 MATLAB 程序绘图,得到如图 11 所示标定曲线:



六、模型的优缺点分析及模型改进

1、模型的优缺点

优点：

(1) 本模型在处理第二问的求解时，在保证可信度的情况下，采取了近似积分和坐标变化的方式，降低了积分难度和计算过程。

(2) 本模型虽然采用了简化方法，但将误差控制在很小的范围内，同时进行了细致的误差分析，使求得的结果数值较精确、可靠性较好。

缺点：

本模型为降低难度而采取近似积分的方法必然会导致求解精度上的不足，有待改进。

2、模型的改进方向：

针对本模型在求解精度上存在的固然缺陷，可以进一步运用数学软件工具进行积分运算求得精度更高的解，于此同时也可以查阅更多文献，对油罐的内部结构和控制系统有更深入的了解，以使得模型更加完善。

七、参考文献

- [1] 陈仲，《大学数学》，南京：南京大学出版社，1998；
- [2] 陈致荣，《椭圆柱型卧式油罐容积的计算》，《数学的实践与认识》，第2期：17-26，1977；
- [3] 付昶林，《倾斜油罐容量的计算》，《黑龙江八一农垦大学学报》，第2期：43-52,1981。