

太阳影子定位

摘要

本文通过利用穷举法、最小二乘法的思想、综合运用了 *Matlab*、*SketchUp*、几何画板等软件建立了影子长度变化的数学模型、求解了如何根据影子顶点坐标、影子变化视频确定数据来源地点经纬度及测量日期的问题，并得到如下结果：

针对问题一，在引入太阳高度角的基础上，根据直杆投影图中的几何关系，建立出以日期、北京时间、经纬度、杆长为自变量，以直杆影长为因变量的影长变化模型。接着我们利用单因子分析法分析出影子长度关于各个参数的变化规律，最后将题目给出的数据带入模型中，利用 *Matlab* 绘制出给定时间范围内天门广场上直杆影子长度变化曲线，得到直杆影长变化范围在 $[3.8465\text{ m}, 7.7503\text{ m}]$ 。对结果进行误差分析和灵敏度分析，发现误差极小，验证了模型的准确性与可靠性。

针对问题二，首先在 *Matlab* 中利用附件一数据绘制直杆影子变化轨迹图，然后以太阳高度角测量值与实际值之差的平方和最小为目标函数，以直杆长度范围、经度范围、纬度范围分别为约束条件，建立非线性规划模型，然后根据最小二乘思想和穷举思想利用 *Matlab* 进行求解。采取经纬分区方法，即将经度、纬度组合产生不同分区，在每一个分区内对直杆长度、经度、纬度分别设定步长进行遍历，选取差值平方和较小的几个结果进行比较，从而求解出经纬度估计值及可能地点为：海南三亚市 ($109^{\circ}\text{E}, 18^{\circ}\text{N}$)、缅甸 ($96^{\circ}\text{E}, 23^{\circ}\text{N}$)。

针对问题三，首先分析附件二、三中影子长度随时间的变化规律，估计出经度的大致范围，然后将太阳赤纬角 δ 取值范围作为新增约束条件增加到问题二建立的模型中，从而建立出适合本题的非线性规划模型。接着再根据最小二乘思想和穷举思想利用 *Matlab* 进行求解。最终估计出可能地点与日期分别为：附件二对应地点及日期为：新疆 ($37^{\circ}\text{N} - 40^{\circ}\text{N}, 80^{\circ}\text{E} - 81^{\circ}\text{E}$)，5 月及 7 月。附件三对应地点日期为：湖北省十堰市 ($32^{\circ}\text{N}, 110^{\circ}\text{E}$)，2 月 1 日；湖南省 ($27^{\circ}\text{N}, 110^{\circ}\text{E}$)，12 月 2 日。

针对问题四，首先根据照相机成像的基本原理，分析了三维世界物体成像规律。然后使用 *SketchUp* 软件中的照片匹配功能，对从原视频中按相等时间间隔截取的图像建立合适的消隐点参考系，进而读取出了受到透视原理影响前真实的直杆影长。当拍摄日期已知时，利用问题二中建立的数学模型，求解得到可能的拍摄地点为：呼和浩特 ($40^{\circ}\text{N}, 111.7^{\circ}\text{E}$)；当拍摄日期未知时，利用问题三中建立的数学模型，求解得到可能的拍摄地点为内蒙古自治区巴彦淖尔市 ($41.2^{\circ}\text{N}, 107^{\circ}\text{E}$)，拍摄日期为 8 月 14 日。所以拍摄日期未知时仍能对地点进行预测，但是具有一定的误差性。

关键词：太阳高度角 最小二乘法 穷举法 单因子分析法 *SketchUp* 软件

一、问题重述

太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化，确定视频拍摄的地点和日期的一种方法，是视频数据分析的重要体现。

问题 1:建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒)3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

问题 2:根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点。将你们的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

问题 3: 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将你们的模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

问题 4:附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频，并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型，并应用你们的模型给出若干个可能的拍摄地点。如果拍摄日期未知，你能否根据视频确定出拍摄地点与日期？

二、模型假设

- 1.假设到达地球的太阳光线是平行的。
- 2.假设地球是一个表面光滑的正球体，即忽略地球微小椭球率对结果的影响。
- 3.忽略大气折射，消除蒙气差对实际观测的太阳高度角和理论值不同的影响。
- 4.假设地面水平，且直杆垂直于地面。

三、符号说明

3.1 符号说明:

L_0 :直杆长度	ω_i :太阳时角
L :直杆影子长度	h :太阳高度角
ST_i :真太阳时	δ :太阳赤纬角
ε :黄赤交角	n :附件中给出的坐标点数
\vec{e}_1 :太阳直射方向	x_i :第 i 组测量数据对应的 X 轴坐标
\vec{e}_2 :太阳照射方向	y_i :第 i 组测量数据对应的 Y 轴坐标
d :观测当天距离当年春分日的天数	t_i :第 i 组测量数据对应的北京时间
α :当地经度，东经取正，西经取负	β :当地纬度，北纬取正，南纬取负

3.2 名词解释:

- 1.真太阳时：即当地时间，非北京时间。
- 2.时角：从观测点天球子午圈沿天赤道量至太阳所在时圈的角距离。
- 3.太阳高度角：指从太阳中心直射到当地的光线与当地地面的夹角。
- 4.太阳赤纬：地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角。
- 5.消隐点：摄像头在成像时会将现实世界中平行的直线映射为图像上相交的直线，相交直线的交点就叫做消隐点。

四、问题分析

随着社会的发展，信息的提取不仅仅来自直观的样本数据，从视频中获取信息进行数学分析也逐渐成为重要的数据挖掘方式。通过分析附件中给出的固定直杆太阳影子顶点坐标数据建立数学模型可以确定直杆所处的地点和日期，从固定杆在太阳下的影子变化的视频中提取有价值的信息进行数学分析也可以确定视频拍摄地点和拍摄日期。通过太阳影子定位技术的使用，对视频数学分析的深入学习具有指导意义。

4.1 问题 1 分析

问题一要求我们建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场 3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

首先我们考虑引入太阳高度角概念，根据直杆投影图中的几何关系，建立出以日期、北京时间、经纬度、杆长为自变量，以直杆影长为因变量的影长变化模型。接着我们利用**单因子分析法**分析出各参数对影子长度变化的影响。最后将题目中给出的参数代入数学模型中，利用 *Matlab* 绘制出题目中给定时间段内天安门广场上直杆太阳影子长度的变化曲线。

4.2 问题 2 分析

问题二要求我们根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点。将模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

我们决定以太阳高度角测量值与实际值之差的平方和最小为目标函数，以直杆长度范围、经度范围、纬度范围分别作为约束条件，建立出**非线性规划模型**。最后根据**最小二乘思想**和**穷举思想**利用 *Matlab* 编程求解得到若干个可能的地点。

4.3 问题 3 分析

问题三要求我们根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。并将模型应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

比较附件二与附件三的数据发现，它们唯一不同之处在于附件三中没有给我们提供测量日期数据。已知通过太阳赤纬角可以推算出日期，所以我们考虑**将太阳赤纬角 δ 取值范围作为新增约束条件**增加到问题二建立的模型中，从而建立出适合问题三的非线性规划模型。最后根据最小二乘思想和穷举思想利用 *Matlab* 编程求解得到若干个可能的地点及日期。

4.4 问题 4 分析

问题四要求我们根据附件四中直杆在太阳下的影子变化的视频，确定视频拍摄地点与日期。

通过观看视频，我们发现附件四中展示了 2015 年 7 月 31 日某地点从 8:54:06 至 9:34:46，即 40 分钟 40 秒内的竖直杆太阳影子随着时间的变化过程。分析题目给出的数据，发现本题给出了竖直杆的估计长度为 2 米以及明确的日期，但是没有明确给出影长。因此我们考虑以某个时间段为间隔对视频进行截屏处理，获得视频图像信息，再利用能够对照片进行三维建模的 *SketchUp* 软件从图像中获取影长数据。

(1) 当拍摄日期已知时：我们可以利用问题二中建立的数学模型，根据最小二乘思想和穷举思想利用 *Matlab* 求解得到若干个可能的拍摄地点。

(2) 当拍摄日期未知时：我们可以利用问题三中建立的数学模型，根据最小二乘思想和穷举思想利用 *Matlab* 进行求解，得到若干个可能拍摄地点与拍摄日期。

五、模型建立与求解

5.1 问题 1

5.1.1 问题 1 的模型分析

为了分析影子长度变化，我们通过对投影图中几何关系的分析，引入太阳高度角概念。对太阳高度角计算公式进行分析发现其中直接或间接包含了日期、北京时间、经纬度这些变量，所以最终建立出以日期、北京时间、经纬度、杆长为自变量，以太阳影子长度为因变量的数学模型。

随后我们利用单因子分析法分析出日期、北京时间、经度、纬度、杆长各自对影子长度变化的影响。最后将题目中给出的数据带入模型中，利用 *Matlab* 绘制出给定时间段内天安门广场上直杆太阳影子长度的变化曲线。

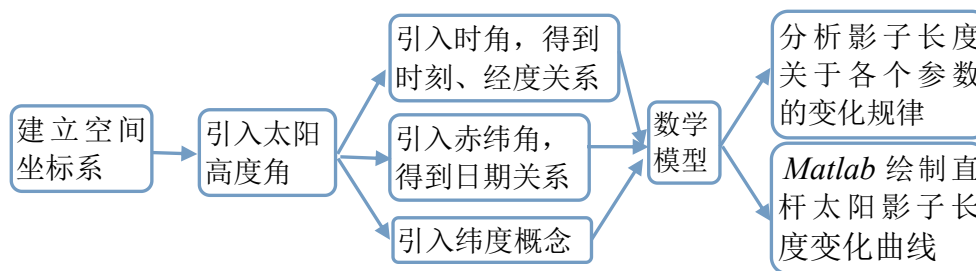


图 1：问题一流程图

5.1.2 问题 1 的模型建立

步骤一: 建立空间坐标系

为了得到影子长度变化的数学模型，我们参考文献[1]决定建立赤道坐标系,以地心为坐标原点 O ，以赤道平面上指向太阳的方向作为 X 轴，以 X 轴逆时针转 90° 的方向作为 Y 轴,以地球自转轴的方向作为 Z 轴。利用几何画板得到坐标系如下图：

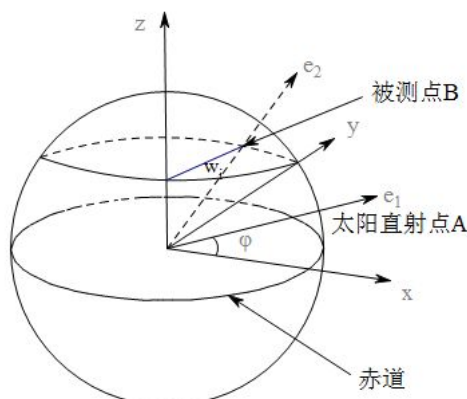


图 2：赤道坐标系

由图 2 我们可以发现， \vec{e}_1 为太阳直射方向，直射点 A 在 Oxz 平面内； \vec{e}_2 为被测点处的太阳方向，考虑到模型的一般性，所以我们选择的时间不是当地正午，

即被测点 B 不在 Oxz 平面上。

步骤二:绘制直杆在空间和平面上的投影图

为了得到直杆长度和影子关系,我们利用几何画板做出直杆平面投影图和对应的空间立体投影图如下:

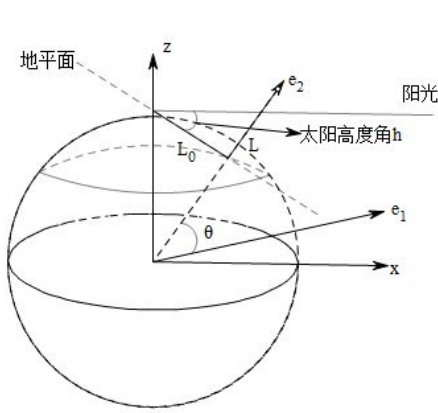


图 3:直杆空间投影图

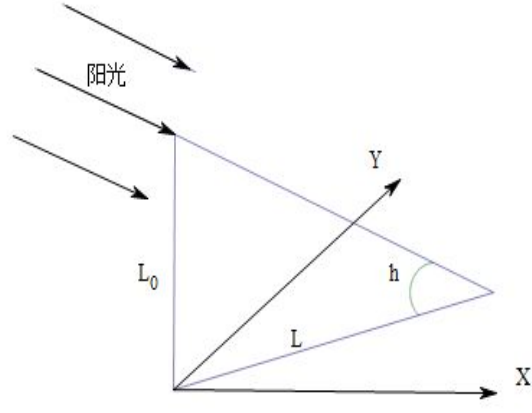


图 4:直杆平面投影图

由图 3、图 4 我们发现影子长度 L 计算如下:

$$L = \frac{L_0}{\tan h} \quad (1)$$

其中 L_0 为直杆高度, h 表示太阳高度角。

步骤三:引入参数建立模型

① 太阳高度角 h : 太阳高度角是太阳相对于地平线的高度角,这是以太阳视盘面的几何中心和理想地平线所夹的角度,计算公式如下:

$$\sin h = \sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega_i \quad (2)$$

其中, β 表示当地纬度; δ 表示太阳赤纬角; ω_i 表示太阳时角。

① 时角 ω_i

记当地的真正时间,即真太阳时为 ST_i 。计算公式如下:

$$ST_i = t_i - \frac{120^\circ - \alpha}{15^\circ} \quad (3)$$

其中, t_i 表示第 i 组测量数据对应的北京时间; α 表示当地经度,东经取正数,西经取负数。

由于在一天 24 小时时间内,地球自传一周即 360° 。即每小时转动 15° ,时角计算如下:

$$\omega_i = 15^\circ \times (ST_i - 12) \quad (4)$$

② 太阳赤纬角 δ : 赤纬角也称为太阳赤纬,即太阳直射纬度。我们取一年为 365 天,则计算公式如下:

$$\delta = \arcsin(\sin \varepsilon \sin \frac{2\pi d}{365}) \quad (5)$$

其中, ε 表示黄赤交角,此处 $\varepsilon = 23.5^\circ$, d 表示观测日距离当年春分日天数。

由(1)~(5)式我们得到影子长度变化的数学模型如下:

$$L = L_0 \sqrt{\frac{1}{(\sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cos \delta \cos \omega_i)^2} - 1}$$

其中： ω_i 表示太阳时角，此处 $\omega_i = 15^\circ \times (t_i - \frac{120^\circ - \alpha}{15^\circ} - 12)$ ， α 表示当地经度； t_i 表示第 i 组测量数据对应的北京时间； δ 表示太阳赤纬； β 表示当地纬度； L_0 表示直杆高度； L 表示影子长度。

5.1.3 问题 1 的模型求解

5.1.3.1 分析影子长度关于各个参数的变化规律

我们采取单因子分析法来分析影子长度关于各个参数的变化规律。为了对问题进行简化，我们选取地方时为 12 时进行分析，该情况下，太阳时角 $\omega_i = 0$ ，即 $\cos \omega_i = 1$ 。则太阳高度角正弦公式可以简化为：

$$\sin h = \sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cos \delta$$

① 分析影长 L 关于杆长 L_0 的变化规律

将经度、纬度、时间、日期均看成常量，将杆长当作唯一变量进行分析。令

$$K_1 = \sqrt{\frac{1}{(\sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cos \delta \cos \omega_i)^2} - 1}, \quad \text{则表达式为：} L = L_0 \cdot K_1$$

规律：在经纬度、时间、日期均固定的情况下，即时空关系确定，易知 L_0 对影长 L 起到等比例放大的作用。

② 分析影长 L 关于纬度 β 的变化规律

(1) 阳光直射北半球

易知此时 $\delta > 0$ ，且 $\delta \in [0^\circ, 23.5^\circ]$ 。易知 $\sin \delta > 0$ 、 $\cos \delta > 0$ 。不妨取辅助角 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta \in [66.5^\circ, 90^\circ]$ 。根据三角变换公式，易知辅助角 φ 满足 $\cos \varphi = \sin \delta$ ， $\sin \varphi = \cos \delta$ 。此时太阳高度角正弦值为：

$$\sin h = \sin \beta \cos \varphi + \cos \beta \sin \varphi = \sin(\beta + \varphi)。$$

可以看做正弦函数 $y = \sin \beta$ 向左平移 φ 个单位，做出示意图如下：

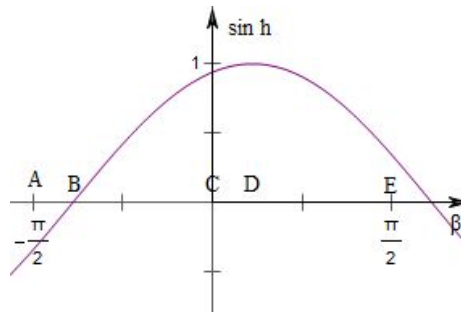


图 5：正午 h 正弦值随纬度 β 变化示意图 a

规律：由横轴 β 的物理意义可知，AC 段表示南半球的太阳高度、CE 段表示北半球的太阳高度。其中 AB 段正午太阳高度正弦值 $\sin h$ 出现负值表示，正午太阳高度仍未 0° 也就是我们通俗理解的南极圈内的极夜现象。

在南半球 BC 段, 正午太阳高度正弦值 $\sin h > 0$, 且随着纬度绝对值的增加, 值不断减小。 $(\sin h)^2$ 值单调递减, 又复合函数单调性知, 影长单调增加。

北半球 CE 段, 随着纬度的增加, 正午太阳高度角正弦值先增加, 于纬度 $\beta = \varphi$ 处达到最大值, 然后递减。由复合函数单调性可知, 影长先变短, 于纬度 $\beta = \varphi$ 处达到最小值, 然后开始增长。

总的来说, 当阳光直射北半球时, 南半球影长随着纬度绝对值得增加逐渐边长; 北半球阳光直射点所在纬线影长最短, 两侧逐渐增加。

(2) 阳光直射南半球

与阳光直射南半球情况类似。易知此时 $\delta < 0$, 且 $\delta \in [-23.5^\circ, 0^\circ]$ 。易知 $\sin \delta < 0$ 、 $\cos \delta > 0$ 。不妨仍取辅助角 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta \in [90^\circ, 113.5^\circ]$ 。根据三角变换公式, 易知辅助角 φ 也满足 $\cos \varphi = \sin \delta$, $\sin \varphi = \cos \delta$ 。

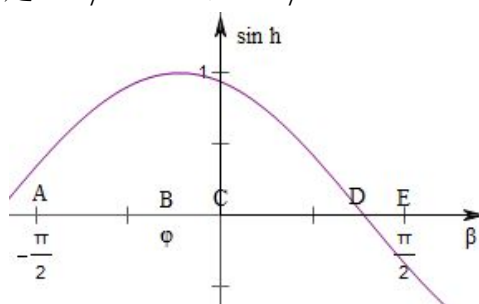


图 6: 正午 h 正弦值随纬度 β 变化示意图 b

规律: 与阳光直射北半球分析类似, 此时北半球影长随着纬度绝对值得增加逐渐边长; 南半球阳光直射点所在纬线影长最短, 两侧逐渐增加。

(3) 阳光直射赤道

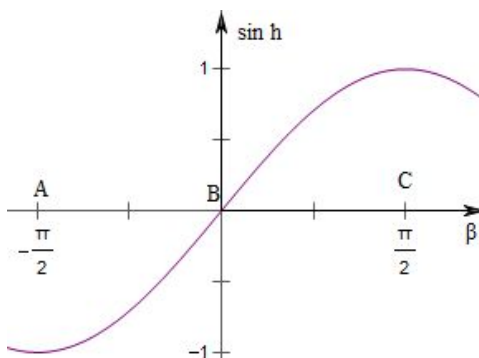


图 7: 正午 h 正弦值随纬度 β 变化示意图 c

规律: 此时, 一条经线上, 从太阳在赤道上的直射点开始, 随着纬度绝对值的增加, 物体影长逐渐边长。

③分析影长 L 关于经度 α 的变化规律

已知: $\alpha_i - \alpha \in [-180^\circ, 180^\circ]$, $\omega_i \in [-180^\circ, 180^\circ]$

此外 $t_i - \frac{\alpha_i - \alpha}{15^\circ} - 12$ 单调递增, 且 $t_i - \frac{\alpha_i - \alpha}{15^\circ} - 12 \in [-12, 12]$ 。

由于太阳高度角计算公式为: $\sin h = \sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega_i$, 易知 $\omega_i = 0$ 时, $\cos \omega_i$ 最大。此时太阳高度角正弦值 $\sin h$ 最大, 影长 L 最小。

规律: 根据余弦函数的对称性, 可以发现随着经度值远离地方时为 12 时的经

度值，正午太阳高度逐渐减小，影长逐渐变长。

④分析影长关于太阳赤纬角 δ 的变化规律

从地理角度看，太阳赤纬角也等于太阳直射点的纬度，且 $\delta \in [-23.5^\circ, 23.5^\circ]$ 。不妨仍取辅助角 $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta \in [0^\circ, 180^\circ]$ 。根据三角变换公式，易知辅助角 φ 也满足 $\cos \varphi = \sin \beta$ ， $\sin \varphi = \cos \beta$ 。

此时满足： $\sin h = \sin \delta \cos \varphi + \cos \delta \sin \varphi = \sin(\delta + \varphi)$ 不妨以北半球的 β 纬度为例分析正午太阳高度以及物体影长的变化规律。此时 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ 表示正弦函数 $y = \sin \delta$ 向右平移 φ 个单位，此时最高点对应的恒做表为 β ，做出示意图如下：

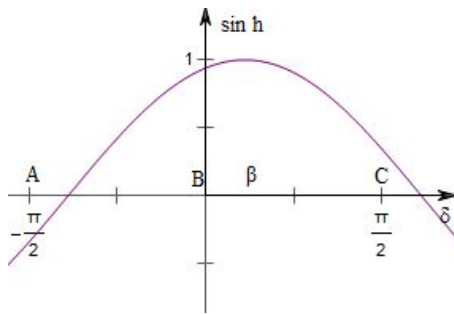


图 8：纬度 β 正午 h 正弦值随太阳赤纬角 δ 变化示意图 d

规律：

(1) 地点在赤道与北回归线之间，即 $\beta \in [0^\circ, 22.5^\circ]$

而太阳高度角正弦函数 $y = \sin h$ ，在 $\delta \in [-23.5^\circ, \beta]$ 的取值范围内单调递增，在 $\delta \in [\beta, 23.5^\circ]$ 范围内单调递减。根据复合函数单调性易知，此时影子长度 L 在 $\delta \in [-23.5^\circ, \beta]$ 单调递减，在 $\delta \in [\beta, 23.5^\circ]$ 的范围内单调递增。也就是说，随着太阳赤纬角纬度的增大，即太阳直射点由南向北移动，北半球太阳直射点以南的纬度上，影长 L 先变长；在太阳直射点超过此纬度 β 后，影长 L 再变短。

(2) 地点在北回归线以北，即 $\beta \in [22.5^\circ, 90^\circ]$

而太阳高度角正弦函数 $y = \sin h$ ，在 $\delta \in [-23.5^\circ, 23.5^\circ]$ 的取值范围内单调递增，根据复合函数单调性易知，此时影子长度 L 单调递减，也就是说，随着太阳赤纬角纬度的增大，即太阳直射点由南向北移动，北半球北极圈纬线以南部分正午太阳高度角逐渐增大、影子逐渐缩短。

以上得出的结论也符合人们的传统认知。对于南半球的各点，我们也可以得出类似的结论。

5.1.3.2 绘制太阳影子长度的变化曲线

我们首先将问题一中给出的数据,即 $\beta = 39^\circ 54' 26'' N$, $\alpha = 116^\circ 23' 29'' E$, $d = 215$, $L_0 = 3$ 代入前面得到的影子长度变化的数学模型中，得到表达式如下：

$$L = 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{(0.75 \cdot \cos \omega_i - 0.135)^2} - 1} \quad (6)$$

其中， $\cos \omega_i = 15 \cdot (t_i - 11.76)$, t_i 表示第 i 组测量数据对应的北京时间,时间段范围

9:00-15:00。

然后我们在 9:00–15:00 期间每隔 20 分钟对影子长度进行取值，得到下表：

表 1:20 分钟影子长度变化表

时间段	影长	时间段	影长
09:00	7.7503	12:20	3.8487
09:20	6.7106	12:40	3.8937
09:40	5.9346	13:00	3.9979
10:00	5.3415	13:20	4.1647
10:20	4.8828	13:40	4.4005
10:40	4.5286	14:00	4.7154
11:00	4.2595	14:20	5.1252
11:20	4.0633	14:40	5.6545
11:40	3.9321	15:00	6.3425
12:00	3.8614		

接着以时间 t_i 为自变量， $[9,15]$ 为自变量范围，以影子长度 L 为因变量，利用 *Matlab* 的 $\text{plot}(x,y)$ 函数对表达式(6)进行描点绘画，得到特定时间段内天安门广场上直杆太阳影子长度的变化曲线图如下：

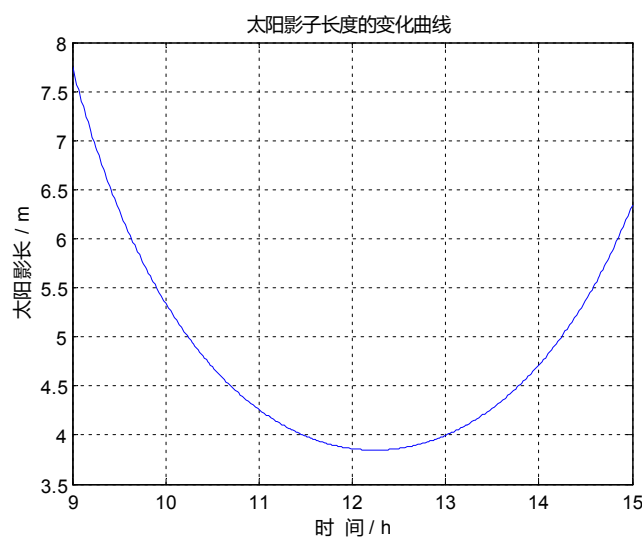


图 9:太阳影子长度的变化曲线图

5.1.4 问题 1 的结果分析

5.1.4.1 问题 1 太阳影子长度的变化曲线图分析

① 对称性:在 9:00–15:00 期间我们发现曲线不具有对称性。

② 最高点与最低点:我们分析图 9 发现在北京时间 12:15 的时候太阳影子最短为 3.8465m，在北京时间 9:00 的时候太阳影子最长为 7.7503m。原因是清晨的时候太阳高度角小，所以物体形成的影子最长，到了正午的时候太阳高度角达到最大，所以物体影子最短。

③ 单调区间:观察图 9 发现，在 9:00-12:15 之间图像单调递减，原因是随着太阳的运动，太阳高度角不断增大，故影子逐渐变短。在 12:15-15:00 之间图像单

调递增，原因是随着太阳的运动，太阳高度角不断减小，故影子逐渐变长。

④ **斜率变化**:分析图 9 发现，在 9:00-12:15 之间太阳影子长度递减的速度逐渐降低，在 12:15-15:00 之间太阳影子长度递增的速度逐渐加快。

5.1.4.1 问题 1 的误差分析及模型修正

对太阳影子长度的变化曲线图 9 进行分析时，我们发现太阳影子最短时是北京时间 12:15，而此时北京的地方时是 11:59。理论上应该在北京地方时 12:00 时影子长度达到最短，即**理论值与实测值相差了 1 秒钟**，我们分析误差的原因如下：

① 我们是在假设地球是正球体的基础上进行求解，但是事实上地球的椭球率对结果还是会造成一定误差。

② 我们前面在建模过程中忽略大气折射率，光线在透过大气层时发生折射也会影响结果。

由于求解出的结果与理论时间只相差 1 秒钟，误差非常小，可以忽略不计，有力的证明了模型的正确性和准确性，所以也不需要模型进行修正。

5.1.4.2 问题 1 的灵敏度分析

灵敏度分析是研究与分析模型的输出变化对参数的敏感程度的方法。此处我们采用局部灵敏度分析，每次选择一个变量进行分析，分别增大、减少 10%，相应的分析下模型的结果变化，最后发现影长对杆长变化敏感，对纬度、日期变化较敏感，对经度变化几乎不敏感。

5.2 问题 2

5.2.1 问题 2 的模型分析

首先在 *Matlab* 利用附件一中的影子顶点坐标数据绘制出太阳影子变化轨迹图，得到经度的大致范围。我们以太阳高度角测量值与实际值之差的平方和最小为目标函数，以直杆长度范围、经度范围、纬度范围分别作为约束条件，建立非线性规划模型。

根据最小二乘思想和穷举思想利用 *Matlab* 进行求解时，为了提高运算效率，我们采取**经纬度分区**方法，即将经度、纬度组合成不同的分区，在每一个分区内对直杆长度、经度、纬度分别设定步长进行遍历，再对该范围内设定较小的步长进行更加精确的搜索，最后选择误差平方和较小的结果对应的经纬度作为测试地点的经纬度的估计，从而得到若干个可能地点。

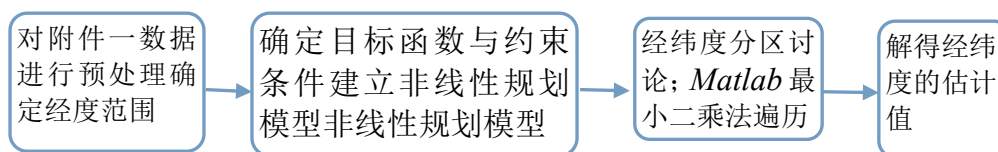


图 10：问题二流程图

5.2.2 问题 2 的模型建立

(1)数据预处理

我们利用 *Matlab* 中的 `plot(x,y)` 函数对附件一给出的太阳影子顶点坐标数据进行描点作图，得到太阳影子变化轨迹图如下：

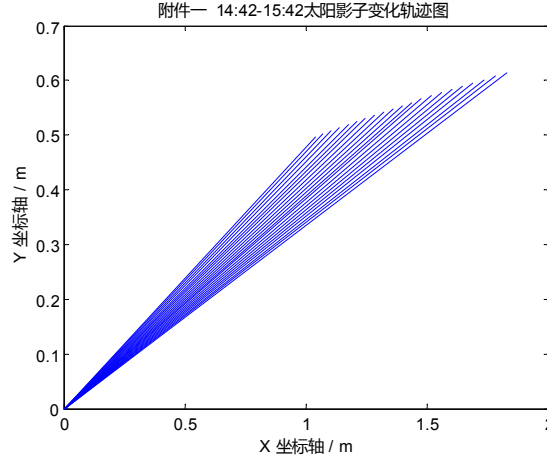


图 11：太阳影子变化轨迹图

分析上图发现：在北京时间下午 14:42 至 15:42 时，该地区的影长呈顺时针变化，且逐渐变长，据此，有理由推断出该地区在北京时间下午 2 点 42 分时，当地时间已经过中午。只有这样，随着时间推移，影长才会逐渐增长。接着我们根据经度每隔 15° 时间相差一小时的原理，可以得到经度大致范围在东经 80 度到 150 度之间。

(2)具体建模过程

已知太阳高度角实际值为： $\sin h = \sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega_i$

太阳高度角测量值为： $\sin h = \frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 + L^2}} = \frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 + x_i^2 + y_i^2}}$

1、目标函数：太阳高度角测量值与实际值之差的平方和最小

$$\min \sum_{i=1}^n \left[\frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 + x_i^2 + y_i^2}} - (\sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega_i) \right]^2$$

其中， L_0 为直杆长度， δ 为太阳赤纬角， ω_i 为太阳时角， h 为太阳高度角， β 为当地纬度， x_i 为第 i 组测量数据对应的 X 轴坐标， y_i 为第 i 组测量数据对应的 Y 轴坐标， n 为测量点个数。

2、约束条件：直杆长度范围、经度范围、纬度范围分别作为约束条件

① 经度范围约束：我们在数据预处理阶段估计出经度大致范围在东经 80 度到 150 度之间，即：

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$$

其中， α_0 表示经度范围的下限，此处 $\alpha_0 = 80^\circ E$ 。 α_1 表示经度范围的上限，此处 $\alpha_1 = 150^\circ E$ 。

② 纬度范围约束：考虑到运行的复杂性，我们选取 $0^\circ N \sim 45^\circ N$ ，即：

$$\beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$$

其中， β_0 表示纬度范围的下限，此处 $\beta_0 = 0^\circ N$ 。 β_1 表示纬度范围的上限，此处 $\beta_1 = 45^\circ N$ 。

③ **直杆长度范围约束**：由于题目中没有对定直杆的长度进行说明，此处我们考虑一般直杆的长度即：

$$1 \leq L_0 \leq 4$$

综上所述，我们得到初步调整模型为：

$$\min \sum_{i=1}^n \left[\frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 + x_i^2 + y_i^2}} - (\sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega_i) \right]^2$$

$$s.t. \begin{cases} 1 \leq L_0 \leq 4 \\ \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1 \\ \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \end{cases}$$

其中： L_0 为直杆长度； δ 为太阳赤纬角； ω_i 为太阳时角； h 为太阳高度角； β 为当地纬度； x_i 为第*i*组测量数据对应的*X*轴坐标； y_i 为第*i*组测量数据对应的*Y*轴坐标； n 为测量点个数； α 为当地经度； β 为当地纬度； β_0 表示纬度范围的下限，此处 $\beta_0 = 0^\circ N$ ； β_1 表示纬度范围的上限，此处 $\beta_1 = 45^\circ N$ ； α_0 表示经度范围的下限，此处 $\alpha_0 = 80^\circ E$ ； α_1 表示经度范围的上限，此处 $\alpha_1 = 150^\circ E$ 。

5.2.3 问题 2 的模型求解

为了提高运算效率，我们采取**经纬分区**方式求解，**具体操作如下**：

已知模型中选取纬度范围为 $(0^\circ N, 45^\circ N)$ ，此处对纬度以 15° 作为区间长度进行划分，得到了 3 段分别是：

$$(0^\circ N, 15^\circ N), (15^\circ N, 30^\circ N), (30^\circ N, 45^\circ N)$$

已知由数据预处理得到经度范围 $(80^\circ E, 150^\circ E)$ ，我们将其分成 3 段：即

$$(80^\circ E, 90^\circ E), (90^\circ E, 120^\circ E), (120^\circ E, 150^\circ E)$$

不同的经纬度分段两两组合，一共可以分成九个分区。

我们先将数据导入 *Matlab* 中，利用最小二乘思想和穷举思想，在上述方法划分出的每一段小区间内对直杆长度、经度、纬度分别设定步长进行遍历求解。同时引入**区域号**对遍历的每个经纬坐标进行编号，即通过区域号可以计算出此处的经纬度。最后将求解出的结果由小到大排序。得到纬度各分区前 10 组排序表如下：

表 2：纬度分区一 $(0^\circ N, 15^\circ N)$ 前 10 组

排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区域号	322	1070	446	946	1194	1318	1938	70	1442	822
平方和/ 10^{-6}	45	55	59	82	86	140	160	189	193	211

表 3：纬度分区二 $(15^\circ N, 30^\circ N)$ 前 10 组

排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区域号	450	1019	1263	326	574	1383	202	1066	1139	78
平方和/ 10^{-6}	0	25	27	33	37	89	93	147	152	16

表 4: 纬度分区三($30^{\circ}N, 45^{\circ}N$)前 10 组

排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区域号	8	3	158	77	13	232	82	382	163	227
平方和/ 10^{-6}	880	1214	1346	1417	1588	1636	1877	1993	2078	2390

由表 2~4 我们发现, 分区二($15^{\circ}N, 30^{\circ}N$)中的区域编号为 450 的坐标平方和最小, 数值为 0, 十分理想, 分析此区域号可以得到该地域坐标为北纬 18° , 东经 109° ,

我们查看地图发现海南省三亚市位于北纬 $18^{\circ}9'34'' \sim 18^{\circ}37'27''$ 、东经 $108^{\circ}56'30'' \sim 109^{\circ}48'28''$ 之间, 是我国唯一处在北纬 18° 的城市。所以我们认为该地点可能为海南省三亚市, 此外由 *Matlab* 遍历结果还估测出固定直杆长度为 $2m$ 。

其次可能存在的地点为分区二($15^{\circ}N, 30^{\circ}N$)中的区域号为 1019 和区域号为 1263 的地点。区域号为 1019 通过计算得到坐标为北纬 23° , 东经 96° , 查阅地图发现位于缅甸, 此外由 *Matlab* 遍历结果还估测固定直杆长度为 $3m$ 。区域号为 1263 通过计算得到坐标为北纬 25° , 东经 95° , 查阅地图发现位于缅甸实皆省, 此外由 *Matlab* 遍历结果还估测固定直杆长度为 $3m$ 。对结果绘制表格如下:

表 5: 问题二求解结果汇总表

序号	地点	纬度	经度	估测固定直杆长度
1	海南省三亚市	北纬 18°	东经 109°	$2m$
2	缅甸	北纬 23°	东经 96°	$3m$
3	缅甸实皆省	北纬 25°	东经 95°	$3m$

5.2.4 问题 2 的结果分析

5.2.4.1 问题 2 的模型检验与误差分析

由模型求解出直杆所处的可能地点是海南省三亚市、缅甸、缅甸实皆省。为了检验模型的正确性与准确性, 我们以对海南省三亚市为例进行模型检验和误差分析:

首先利用 *Excel* 对附件一坐标数据进行求解得到各时刻该测量地点太阳影子长度, 然后将海南省三亚市的估计固定直杆长度、经度、纬度、日期、时刻作为已知数据, 利用 PLANETCALC 官方网站的太阳影子长度在线计算软件求解出各时刻太阳影子长度, 最后我们将两组数据绘制成下表:

表 6: 海南省三亚市影长与当地影长部分对比分析表

北京时间	当地影长/m	海南省三亚市影长/m	绝对误差值	相对误差率
14:42	1.15	1.135	0.0142	0.0123
14:45	1.182	1.168	0.0141	0.0119
14:48	1.215	1.201	0.014	0.0115
14:51	1.249	1.235	0.0141	0.0113
14:54	1.283	1.269	0.014	0.0109
14:57	1.318	1.304	0.014	0.0106
15:00	1.353	1.339	0.0139	0.0103

分析上表发现在北京时间 14:42~15:00 期间，海南省三亚市的直杆影长与附件中给出的影长绝对误差值大致为 0.014m，相对误差率不超过 1.3%，绝对误差非常小，相对误差率非常低，有力的证明了海南省三亚市很可能就是测量地点，也充分说明了我们模型的正确性与准确性。

5.2.4.2 问题 2 的灵敏度分析

我们采用局部灵敏度分析，讨论参数纬度、日期、杆长、经度发生微小变化时对太阳影长影响，我们令自变量分别增大、减少 10%，相应的分析下因变量的结果变化，最后发现影长对杆长变化敏感，对纬度、日期变化较敏感，对经度变化几乎不敏感。

5.3 问题 3

5.3.1 问题 3 的模型分析

观察附件二、三中的数据，我们发现仅仅给出了影子顶点坐标以及北京时间的数据，缺少了测量日期。已知通过太阳赤纬度可以推算出日期，所以我们考虑将太阳赤纬度 δ 取值范围作为新增约束条件运用到问题二建立的模型中，从而建立出适合本题的非线性规划模型。

我们分析附件二、三中影子长度随时间的变化规律，估计出经度的大致区间范围。根据最小二乘思想和穷举思想利用 *Matlab* 进行求解时，采取经纬分区方法，最后选择误差平方和较小的结果对应的经纬度作为测试地点的经纬度的估计，利用对应的太阳赤纬角计算日期，从而得到若干个可能地点与日期。

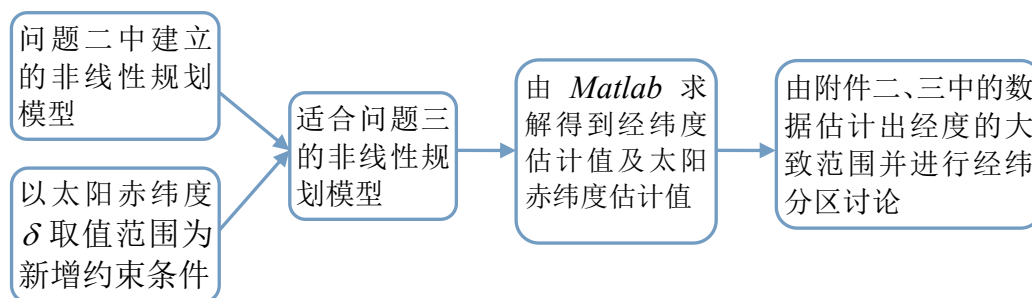


图 12：问题三流程图

5.3.2 问题 3 的模型建立

(1) 数据预处理

分析附件二中的数据，我们可以发现随着时间的变化影长逐渐变短。考虑到一天内太阳直射的纬度变化很小以及一天内物体影长的变化规律，这一现象意味着随着时间推移，太阳直射点所在经度越来越接近测试点经度。而最后一个观察点时间为北京时间 13:41，一个时区跨 15° ，所以此时对应的地方时为 12:00 所在经线即 $95^\circ E$ 。也就是说，附件二中测量点所处经度应该在在 $95^\circ E$ 西侧，即经度的大致范围为 $(0^\circ E, 95^\circ E)$ 。

分析附件三中的数据发现随着时间的变化影长逐渐变长，与对附件二数据分析方式类似，我们可以得出附件三测量点所处经度应该在 $105^\circ E$ 东侧，即经度的大致范围为 $(105^\circ E, 180^\circ E)$ 。

(2) 具体建模过程

我们发现利用问题二中的模型可以准确求出测量地的经纬度，但不能求解出日期，于是在问题二模型的基础上增加太阳赤纬角范围约束，得到问题三的模型。

新增约束条件，即太阳赤纬角范围约束如下：

$$-23.5^{\circ} \leq \delta \leq 23.5^{\circ}$$

综上所述，我们得到初步调整模型为：

$$\min \sum_{i=1}^n \left[\frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 + x_i^2 + y_i^2}} - (\sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cos \delta \cos \omega_i) \right]^2$$

$$s.t. \begin{cases} 1 \leq L_0 \leq 4 \\ \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1 \\ \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 \\ -23.5^{\circ} \leq \delta \leq 23.5^{\circ} \end{cases}$$

其中： L_0 为直杆长度； δ 为太阳赤纬角； ω_i 为太阳时角； h 为太阳高度角； β 为当地纬度； x_i 为第*i*组测量数据对应的*X*轴坐标； y_i 为第*i*组测量数据对应的*Y*轴坐标； n 为测量点个数； α 为当地经度； β 为当地纬度； β_0 表示纬度范围的下限； β_1 表示纬度范围的上限； α_0 表示经度范围的下限； α_1 表示经度范围的上限。

5.3.3 问题 3 的模型求解

我们以对附件二中的数据求解为例分析如下：

为了避免运算的复杂性，我们选取纬度范围($0^{\circ}N, 60^{\circ}N$)，以 30° 为区间长度进行划分，得到 2 段如下： $(0^{\circ}N, 30^{\circ}N)$ ， $(30^{\circ}N, 60^{\circ}N)$

由数据预处理阶段，我们获得经度范围($0^{\circ}E, 95^{\circ}E$)，划分成 3 段如下： $(0^{\circ}E, 40^{\circ}E)$ ， $(40^{\circ}E, 80^{\circ}E)$ ， $(80^{\circ}E, 95^{\circ}E)$ 。纬度的两段与经度的三段共可以组合产生六个分区。

接着我们先将数据导入 *Matlab* 中，利用最小二乘思想和穷举思想，在上述方法划分出的每一段小区间内对直杆长度、经度、纬度、太阳赤纬角分别设定步长进行遍历求解。同时引入区域号对遍历的每个经纬坐标进行编号，即通过区域号可以计算出此处的经纬度。最后将求解出的结果由小到大排序，可以得到各分区下的结果排序图，最后再汇总比较。下表是纬度($0^{\circ}N, 30^{\circ}N$)，经度($80^{\circ}E, 95^{\circ}E$)分区的前 10 组结果：

表 7：分区纬度($30^{\circ}N, 60^{\circ}N$)，经度($40^{\circ}E, 80^{\circ}E$)前 10 组结果

排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区域号	165498	165838	188870	189186	210798	211058	234174	234402	51542	52034
平方和/ 10^{-6}	0	0	0	0	0	0	0	0	4	5

由表 8 我们发现分区五($30^{\circ}N, 60^{\circ}N$)，($40^{\circ}E, 80^{\circ}E$)中区域编号为 165498、165838、188870、189186、210798、211058、234174、234402 的误差平方和最小，都接近 0，效果十分理想。

表 8：附件二计算结果汇总

区域号	北纬	东经	日期	杆长(米)	估测地点
165498	37	80	5 月 10 日	2	新疆省
165838	37	80	8 月 3 日	2	
188870	38	81	5 月 13 日	2	
189186	38	81	7 月 31 日	2	
210798	39	80	5 月 20 日	2	
211058	39	80	7 月 24 日	2	
234174	40	80	5 月 24 日	2	
234402	40	80	7 月 20 日	2	

我们发现虽然日期不同，但是估计出的杆长都为 2m，附件二中数据的测量区域大致为新疆 ($37^{\circ}N - 40^{\circ}N, 80^{\circ}E - 81^{\circ}E$) 附近。

同理，可以求解附件三中的数据并得到如下表所示结果：

表 9：附件三结果汇总表

区域号	北纬	东经	日期	杆长(米)	估测地点
550551	32	110	2 月 1 日	3	湖北十堰市
324155	27	110	1 月 8 日	3	湖南省
325463	27	110	12 月 2 日	3	
414723	29	110	1 月 20 日	3	
415935	29	110	11 月 19 日	3	
734111	36	111	10 月 25 日	3	陕西省
775544	37	109	3 月 13 日	3	
776356	37	109	10 月 1 日	4	
778182	37	111	1 月 1 日	2	山西省吕梁市
779554	37	111	12 月 9 日	2	
823478	38	111	1 月 9 日	2	

其中湖北十堰市 ($32^{\circ}N, 110^{\circ}E$) 的效果最好；湖南省 ($27^{\circ}N - 29^{\circ}N, 110^{\circ}E$)、陕西省 ($36^{\circ}N - 37^{\circ}N, 109^{\circ}E$) 以及山西吕梁市的部分地区 ($37^{\circ}N - 38^{\circ}N, 111^{\circ}E$) 也有很小的误差。

5.3.4 问题 3 的结果分析

通过求解附件二、附件三中的数据我们可以发现，由于日期的不同，显著地增加了问题多解的情况。虽然可供选择的日期、经纬度组合很多，但是从地理的角度看，都主要集中在某一区域。比如附件二的估计测量区域主要集中在新疆 ($37^{\circ}N - 40^{\circ}N, 80^{\circ}E - 81^{\circ}E$) 范围内；附件三的估计测量区域除了湖北十堰市比较独立外。其余的各估计测量地点都集中在湖南省 ($27^{\circ}N - 29^{\circ}N, 110^{\circ}E$)、陕西省 ($36^{\circ}N - 37^{\circ}N, 109^{\circ}E$)、山西吕梁市 ($36^{\circ}N - 37^{\circ}N, 109^{\circ}E$) 的一些区域，并且这些区域都相对集中在某个纬度值附近。这从侧面说明了我们的模型可能有着计算精度不够的缺点。

5.3.4.1 问题 3 的灵敏度分析

由于问题三只是比问题二多一个太阳赤纬角参数，我们主要对其进行分析，令其增加、减少 10%，分析影子长度变化，得到影子长度对太阳赤纬角敏感结论。

5.4 问题 4

5.4.1 问题 4 的模型分析

分析题目给出的数据，发现本题给出了竖直杆的估计长度为 2 米以及明确的日期，但没有明确给出影长。所以需要设法对视频进行数据采集，获取影长信息。

首先分析视频，以某时间段为间隔对视频进行截屏处理获得视频图像数据。因为 *SketchUp* 是一款依据小孔成像原理，利用消隐点提取照片中物体距离信息的软件，所以我们使用它对图像信息处理，获得影长数据。

当拍摄日期已知时：利用问题二中建立的数学模型，根据最小二乘思想和穷举思想利用 *Matlab* 可以解得若干个可能的拍摄地点。

当拍摄日期未知时：利用问题三中建立的数学模型，根据最小二乘思想和穷举思想利用 *Matlab* 求解得到若干个可能的拍摄地点，并利用对应的太阳赤纬角计算出可能的拍摄日期。

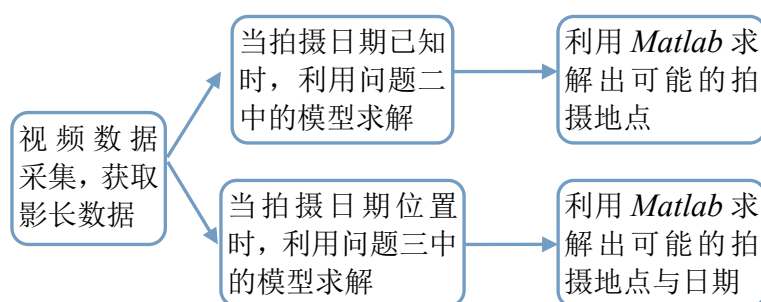


图 13：问题四流程图

5.4.2 问题 4 的模型建立

(1) 数据采集过程

① 分析视频，获得视频图像数据

附件四中的视频从 8:54:06 至 9:34:46，拍摄长度共计 40 分钟 40 秒。我们分析附件 1~3 发现均各自包含了 21 个影子顶点数据坐标，又考虑到将 40 分 40 秒的数据充分利用，所以我们选择以 2 分 2 秒为间隔对视频进行截屏获取数据，最终得到视频图像数据共计 21 组。

② 利用 *SketchUp* 从图像中获取影长信息

a. 摄像头成像原理

摄像头成像依据小孔成像原理，将立体世界中的图像投影到二维纸面。

b. *SketchUp* 软件采取影长信息操作

SketchUp 是一款可用于创建、共享和展示 3D 模型的软件。它是平面建模，通过一个使用简单、内容详尽的颜色、线条和文本提示指导系统，让人们不必键入坐标，就能帮助其跟踪位置和完成相关建模操作。

下图为 *SketchUp* 软件的操作界面为了获取消隐点，我们需要在图像中找到两组相互平行的 X 轴、 Y 轴的直线，如图绿色端点的两条线段是我们选取的 Y 轴方向的平行线；而红色端点的两条线段是我们选取的 X 轴方向的两条线段。*SketchUp* 软件会根据我们选择的线段自动处理分析消隐点的位置。

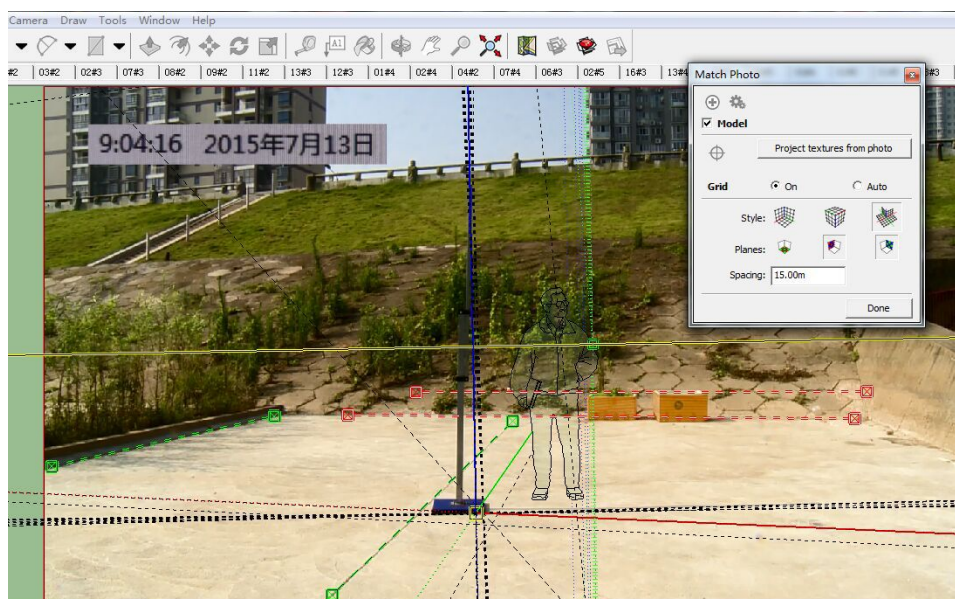


图 14: SketchUp 采取影长信息

接下来，我们选择需要进行立体化处理的物体为坐标原点，进行照片匹配，在本题中即为竖直杆。

坐标原点选定之后，*SketchUp* 软件会自动对照片进行建模立体化处理。然后我们利用 *SketchUp* 软件当中自带的量尺工具即可对照片中与坐标原点有关的物体进行长度的直接测量。

为了提高测量的精度，我们将三维建模中网格的单位长度放大，从而加强对后期估算测量数据精度的控制。然后我们通过对测量的三维模型中物体的长度进行等比例的转换并结合相邻两次测量影长的差值对软件采集影长数据进行略微的调整。

(2) 摄像机摄像的仿射变换

在摄像机的作用下，现实世界中的有些几何属性还是保持的，比如共线性，一条直线透视变换之后仍为一条直线。在计算机视觉中，视觉几何使用来源就各种变化下仍然保持不变的属性。此外，透视变换的逆变换也是一种透视变换。

记 $x(x_1, x_2, x_3)$ 为三维空间中的点，其经过透视变换 H 变为照片中的某一点 $x'(x'_1, x'_2, x'_3)$ 。其变换过程是一个采用三维向量的线性变换，可以表示为：

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

即 $x' = Hx$ 。由此三维空间的点形成了与照片空间上的点一一对应的关系。

5.4.3 问题 4 的模型求解

(1) 实际影长的估计

我们将截取的多组图片导入 *SketchUp* 软件，并对各点对应的影长进行测量。最后，我们结合附件一道三种影长变化的大致规律，统一对影长的测量值进行微调。最终得到各时间点对应影长如下表：

表 10: 各时间点实际对应影长

北京时间	8:54:06	8:56:08	8:58:10	9:00:12	9:02:14	9:04:16	9:06:18
影长	2.3575	2.3262	2.2955	2.2655	2.2357	2.2063	2.1774
北京时间	9:08:20	9:10:22	9:12:24	9:14:26	9:16:28	9:18:30	9:20:32
影长	2.149	2.1209	2.0933	2.0661	2.0392	2.0128	1.9867
北京时间	9:22:34	9:24:36	9:26:38	9:28:40	9:30:42	9:32:44	9:34:46
影长	1.961	1.9357	1.9107	1.886	1.8617	1.8377	1.8141

(2) 代入问题二中模型求解

估计出实际的影长之后，我们将它代入问题二中建立的模型进行求解，并筛选出误差平方和最小的几项。

最后我们发现：对前 14 组平方和为 0 的坐标域进行经纬度计算，我们发现经度都相等，纬度发生略微变化且在内蒙古的呼和浩特市。

表 11: 前八组误差最小地区示意图

区域号	北纬	东经	估测地点	区域号	北纬	东经	估测地点
2245	39.7	111.7	内蒙古呼和浩特市	3093	40.4	111.7	内蒙古呼和浩特市
2730	40.1	111.7	内蒙古呼和浩特市	3094	40.4	111.7	内蒙古呼和浩特市
2851	40.2	111.7	内蒙古呼和浩特市	3214	40.5	111.7	内蒙古呼和浩特市
2972	40.3	111.7	内蒙古呼和浩特市	3215	40.5	111.7	内蒙古呼和浩特市

(3) 视频日期未知情况

由问题二、三的求解我们可以知道，只要掌握了物体影长变化数据以及时间，我们就可以对地方的经纬度及日期进行有效的估算。在问题四中，我们已经解决了影长的估算问题，接下来只需要将其代入问题三中的模型进行求解就可以对地点经纬度及日期进行估算。

我们将本题数据代入问题三中的模型进行估算可得：可能的拍摄地点与拍摄日期为内蒙古自治区巴彦淖尔市 ($41.2^{\circ}N, 107^{\circ}E$)，8 月 14 日，所以仍能对地点进行估计但是可能推测结果不唯有一定误差性。

5.4.4 问题 4 的结果分析

呼和浩特有多个经纬度值在此范围之内，且用其经纬度数据代入计算的经纬度误差值很接近 0，可以认为呼和浩特的影长情况与录像中的阴影变化情况很接近，搜索的效果很好。因此我们可以认为该模型计算结果准确。

六、模型评价与推广

6.1 模型的优缺点

6.1.1 模型的优点

(1) 在问题二、三、四中，将最小二乘法与穷举法的思想相结合，将求解时间、经纬度问题的非线性规划问题转化为太阳高度角预测值与实际值之差平方和最小的最优化问题；并利用 *Matlab* 软件建立多重循环进行求解，最终得到误差结果较小的多个可能的地点及日期。

(2) 在问题四中, 利用 *Sketchup* 软件对录像截图进行照片建模处理, 排除了透视效果的影响, 较好的估计出了录像中的实际影长。

6.1.2 模型的缺点

(1) 本题在建立直杆影长变化模型时, 没有考虑到天气、空气污染状况、大气折射蒙气差等因素的影响, 在计算影长时可能会产生一定的误差。

(2) 在实际问题中, 物体影子是一个复杂的问题, 存在着大量的不确定性。

6.2 模型的改进和推广

考虑实际情况下, 由于地理位置的不同, 大气折射情况存在着很大的差异, 物体影长变化也会受到影响。于是我们引入大气折射率进行**模型改进**:

由于地球周围存在大气与真空对阳光折射率不同, 太阳照射过来的阳光在通过大气层时产生一定的折射作用。不妨记某地上空空气对阳光的平均折射率为 n_1 , 阳光在真空中的折射率为 n_2 , 折射后的太阳高度角为 h' 。

根据折射定律: $\sin h' = \frac{n_1}{n_2} \sin h = \frac{n_1}{n_2} (\sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega_i)$

又由几何关系易知: $L = \frac{L_0}{\tan h'}$

所以考虑了阳光折射之后的影长变化公式应该为:

$$L = \frac{L_0}{\tan h'} = L_0 \sqrt{\frac{n_2^2}{n_1^2 (\sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega_i)^2} - 1}$$

其中, n_1 为某地上空空气对阳光的平均折射率; n_2 为阳光在真空中折射率。

模型推广: 本文建立的太阳影子定位模型在航海、军事等领域都具有重要的作用, 模型具有广泛适用性,

七、参考文献

- [1] 肖志勇, 刘宇翔, 一种新的纬度测量方法[J], 大学物理, 第 29 卷第 9 期:1-4, 2010.9。
- [2] 费云霞, 王春顺, 对太阳高度角的了解及其计算方法[J], 中小企业管理与科技(上半月), 2008(01)。
- [3] 高翔, 基于消隐点的结构化场景的三维重建[D], 吉林大学, 2007。
- [4] 蒋洪力, 太阳直射点纬度的数学推导和分析[J], 数学通报, 2007(09)。
- [5] 王淼, 王保利, 焦翠坪, 景崇友, 太阳能跟踪系统设计[J], 电气技术, 2009(08)。
- [6] 郑守立, 赤纬的近似计算方法[J], 河北师范大学学报, 1988(Z1)。
- [7] 马莉, *Matlab* 数学实验与建模, 北京: 清华大学出版社, 2010。
- [8] 纪华, 仿射不变特征提取及其在景象匹配中的应用[D], 中国科学院研究生院(长春光学精密机械与物理研究所), 2010。
- [9] 冯孝礼, 一种太阳方位表方案的探讨[J], 大连海运学院学报, 1978(01)。

附录

(一) Matlab 程序

问题一:

1、绘制太阳影子长度的变化曲线

```
t=9:1/60:15;
w=15*(t-12.24);
c1=cos(w*pi/180);
c2=(0.75*c1-0.135).*(0.75*c1-0.135);
c3=1./c2 -1;
c4=sqrt(c3);
c5=3*c4
plot(t,c5)
title('太阳影子长度的变化曲线')
grid on;
```

问题二:

2、最小二乘法求解经纬度及估测直杆长度

(1)求解各参数下的平方:

```
syms s
fid = fopen('A1.txt','a');
for a=0:1:15
    for c=90:1:120
        for L=1:1:4 %此三行为分区一循环
            % for a=0:1:15
            % for c=90:1:120
            % for L=1:1:4 此三行为分区二循环
            % for a=0:1:15
            % for c=90:1:120
            % for L=1:1:4 此三行为分区三循环
            t=[14.7 14.75 14.8 14.85 14.9 14.95 15 15.05 15.1 15.15
15.2 15.25 15.3 15.35 15.4 15.45 15.5 15.55 15.6 15.65 15.7];
            x=[1.0365 1.0699 1.1038 1.1383 1.1732 1.2087 1.2448 1.2815
1.3189 1.3568 1.3955 1.4349 1.4751 1.516 1.5577 1.6003 1.6438
1.6882 1.7337 1.7801 1.8277];
            y=[0.4973 0.5029 0.5085 0.5142 0.5198 0.5255 0.5311 0.5368
0.5426 0.5483 0.5541 0.5598 0.5657 0.5715 0.5774 0.5833 0.5892
0.5952 0.6013 0.6074 0.6135];
            z=0.179*sin(a*3.14/180)+0.98*cos(a*3.14/180)*cos(15*(t-(300-c)/15)*3.14/180)-L./(sqrt(L*L+x.*
x+y.*y));
            s=z.*z
            fprintf(fid, '%4f',s);
        end
    end
end
end
fclose(fid);
```

(2)每 21 组求解平方和并入文本

```
fid = fopen('A12.txt', 'a');
x=load('A1.txt')
for i= 1:21:41664
    fprintf(fid, '%4f',sum(x(i:i+20)));
end
fclose(fid);
```

问题三:

3、求拍摄地及日期

1° 附件二

(1)求解各参数下的平方：（以区域 1 为例）

```
syms s
fid = fopen('A3.txt','a');
for a=0:1:30
    for c=0:1:40
        for n=1:1:365
            for L=1:1:4
                t=[12.68333333 12.73333333 12.78333333 12.83333333 12.88333333
12.93333333 12.98333333 13.03333333 13.08333333 13.13333333 13.18333333
13.23333333 13.28333333 13.33333333 13.38333333 13.43333333 13.48333333
13.53333333 13.58333333 13.63333333 13.68333333];
                x=[-1.2352 -1.2081 -1.1813 -1.1546 -1.1281 -1.1018 -1.0756 -1.0496
-1.0237 -0.998 -0.9724 -0.947 -0.9217 -0.8965 -0.8714 -0.8464 -0.8215
-0.7967 -0.7719 -0.7473 -0.7227];
                y=[0.173 0.189 0.2048 0.2203 0.2356 0.2505 0.2653 0.2798
0.294 0.308 0.3218 0.3354 0.3488 0.3619 0.3748 0.3876 0.4001
0.4124 0.4246 0.4366 0.4484];
                h=asin(sin(23.5*3.14/180)*sin(2*3.14*n/365));
                z=sin(h)*sin(a*3.14/180)+cos(h)*cos(a*3.14/180)*cos(15*(t-(300-c)/15)*3.14/180)-2./(sqrt(4+L.*
L));
                s=z.*z
                fprintf(fid,'%4f',s);
            end
        end
    end
end
fclose(fid);
```

(2)每 21 组求解平方和并入文本

```
fid = fopen('A4.txt','a');
x=load('A3.txt')
for i= 1:21:38968860
    fprintf(fid,'%4f',sum(x(i:i+20)));
end
```

2° 附件 3

(1)求解各参数下的平方：（以区域 1 为例）

```
syms s
fid = fopen('A5.txt','a');
for a=0:1:20
    for c=105:1:135
        for n=1:1:365
            for L=1:1:4
                t=[13.15 13.2 13.25 13.3 13.35 13.4 13.45 13.5 13.55 13.6 13.65
13.7 13.75 13.8 13.85 13.9 13.95 14 14.05 14.1 14.15];
                x=[1.1637 1.2212 1.2791 1.3373 1.396 1.4552 1.5148 1.575
1.6357 1.697 1.7589 1.8215 1.8848 1.9488 2.0136 2.0792 2.1457
2.2131 2.2815 2.3508 2.4213];
                y=[3.336 3.3299 3.3242 3.3188 3.3137 3.3091 3.3048 3.3007
3.2971 3.2937 3.2907 3.2881 3.2859 3.284 3.2824 3.2813 3.2805
3.2801 3.2801 3.2804 3.2812];
                % h=asin(sin(23.5*pi/180)*sin((2*pi*n)/365));
                h=asin(sin(23.5*3.14/180)*sin(2*3.14*n/365));
                % h=23.45*sin(2*3.14*(284+n)/365)*3.14/180;
```



```

z=sin(h)*sin(a*3.14/180)+cos(h)*cos(a*3.14/180)*cos(15*(t-(300-c)/15)*3.14/180)-2./(sqrt(4+L.*
L));
        s=z.*z
        fprintf(fid,'%4f',s);
    end
end
end
end
fclose(fid);

```

(2)每 21 组求解平方和并入文本

```

fid = fopen('A6.txt', 'a');
x=load('A5.txt')
for i= 1:21:19959660
    fprintf(fid, '%4f',sum(x(i:i+20)));
end
fclose(fid);

```

4、问题四：

(1)推测拍摄地的经纬度

```

syms s
fid = fopen('A7.txt','a');
for a=30:1:45
    for c=100:1:125
        t=[8.90025    8.933592593    8.966935185    9    9.033342593    9.066685185
9.100027778    9.13337037    9.166712963    9.200055556    9.233398148    9.266740741
9.300083333    9.333425926    9.366768519    9.400111111    9.433453704    9.466796296
9.500138889    9.533481481    9.566824074];
        L=[2.4167    2.3877    2.3495    2.3214    2.2937    2.2574    2.2306    2.2041
2.1694    2.1438    2.1185    2.0854    2.0609    2.0367    2.005    1.9815    1.9583
1.9279    1.9054    1.8832    1.854];
z=0.18*sin(a*3.14/180)+0.983*cos(a*3.14/180)*cos(15*(t-(300-c)/15)*3.14/180)-2./(sqrt(4+L.*L))
;
        s=z.*z
        fprintf(fid, '%4f',s);
    end
end
end
fclose(fid);
! 平方和
fid = fopen('A8.txt', 'a');
x=load('A37.txt')
for i= 1:21:8736
    fprintf(fid, '%4f',sum(x(i:i+20)));
End

```

(2)日期未知时，推测地点和日期

```

syms s
fid = fopen('A9.txt','a');
for a=38:0.2:43
    for n=190:235
        for c=105:0.2:115
            t=[8.90025    8.933592593    8.966935185    9    9.033342593    9.066685185
9.100027778    9.13337037    9.166712963    9.200055556    9.233398148    9.266740741
9.300083333    9.333425926    9.366768519    9.400111111    9.433453704    9.466796296
9.500138889    9.533481481    9.566824074];

```

```

                L=[ 2.3575    2.3262    2.2955    2.2655    2.2357    2.2063    2.1774
2.1490    2.1209    2.0933    2.0661    2.0392 2.0128    1.9867    1.9610    1.9357
1.9107    1.8860    1.8617    1.8377    1.8141];
                h=asin(sin(23.5*3.14/180)*sin(2*3.14*n/365));

z=sin(h)*sin(a*3.14/180)+cos(h)*cos(a*3.14/180)*cos(15*(t-(300-c)/15)*3.14/180)-2./(sqrt(4+L.*
L));
                s=z.*z
                fprintf(fid, '%4f',s);
            end
End
end
fclose(fid);

! 平方和
fid = fopen('A9.txt', 'a');
x=load('A10.txt')
for i= 1:21:1280916
fprintf(fid, '%4f',sum(x(i:i+20)));
end

```

(二) 表格

问题一:

表 1: 9:00–15:00 期间每隔一分钟影长取值表

7.7503	7.6901	7.631	7.5728	7.5156	7.4592	7.4038	7.3492	7.2954	7.2425	7.1904	7.1391
7.0886	7.0388	6.9898	6.9415	6.894	6.8471	6.8009	6.7554	6.7106	6.6664	6.6228	6.5798
6.5375	6.4958	6.4546	6.4141	6.3741	6.3346	6.2957	6.2573	6.2195	6.1822	6.1454	6.109
6.0732	6.0379	6.003	5.9686	5.9346	5.9012	5.8681	5.8355	5.8033	5.7715	5.7402	5.7092
5.6787	5.6486	5.6188	5.5894	5.5604	5.5318	5.5036	5.4757	5.4482	5.421	5.3941	5.3677
5.3415	5.3157	5.2902	5.265	5.2402	5.2156	5.1914	5.1675	5.1439	5.1206	5.0976	5.0748
5.0524	5.0302	5.0084	4.9868	4.9654	4.9444	4.9236	4.9031	4.8828	4.8628	4.8431	4.8236
4.8044	4.7854	4.7666	4.7481	4.7299	4.7118	4.694	4.6765	4.6592	4.6421	4.6252	4.6085
4.5921	4.5759	4.5599	4.5441	4.5286	4.5132	4.4981	4.4831	4.4684	4.4539	4.4395	4.4254
4.4115	4.3978	4.3843	4.3709	4.3578	4.3448	4.3321	4.3195	4.3071	4.2949	4.2829	4.2711
4.2595	4.248	4.2367	4.2256	4.2147	4.204	4.1934	4.183	4.1728	4.1627	4.1528	4.1431
4.1336	4.1242	4.115	4.106	4.0971	4.0884	4.0799	4.0715	4.0633	4.0552	4.0473	4.0396
4.032	4.0246	4.0174	4.0103	4.0033	3.9965	3.9899	3.9834	3.9771	3.971	3.965	3.9591
3.9534	3.9479	3.9425	3.9372	3.9321	3.9272	3.9224	3.9177	3.9132	3.9089	3.9047	3.9007
3.8968	3.893	3.8894	3.8859	3.8826	3.8795	3.8764	3.8736	3.8708	3.8683	3.8658	3.8635
3.8614	3.8594	3.8575	3.8558	3.8542	3.8528	3.8515	3.8504	3.8494	3.8486	3.8479	3.8473
3.8469	3.8466	3.8465	3.8465	3.8467	3.847	3.8474	3.848	3.8487	3.8496	3.8506	3.8518
3.8531	3.8545	3.8561	3.8579	3.8598	3.8618	3.864	3.8663	3.8688	3.8714	3.8741	3.877
3.8801	3.8833	3.8866	3.8901	3.8937	3.8975	3.9015	3.9055	3.9098	3.9141	3.9187	3.9233
3.9282	3.9331	3.9383	3.9435	3.949	3.9545	3.9603	3.9661	3.9722	3.9784	3.9847	3.9912
3.9979	4.0047	4.0117	4.0188	4.0261	4.0335	4.0411	4.0489	4.0568	4.0649	4.0731	4.0816
4.0901	4.0989	4.1078	4.1168	4.1261	4.1355	4.1451	4.1548	4.1647	4.1748	4.1851	4.1955
4.2061	4.2169	4.2278	4.239	4.2503	4.2618	4.2735	4.2853	4.2974	4.3096	4.322	4.3346
4.3474	4.3604	4.3736	4.3869	4.4005	4.4143	4.4282	4.4424	4.4568	4.4713	4.4861	4.5011
4.5163	4.5316	4.5473	4.5631	4.5791	4.5954	4.6118	4.6285	4.6455	4.6626	4.68	4.6976
4.7154	4.7335	4.7518	4.7704	4.7892	4.8082	4.8275	4.847	4.8668	4.8869	4.9072	4.9277
4.9486	4.9697	4.9911	5.0127	5.0346	5.0569	5.0794	5.1021	5.1252	5.1486	5.1723	5.1962
5.2205	5.2451	5.27	5.2953	5.3208	5.3467	5.3729	5.3995	5.4264	5.4536	5.4812	5.5092
5.5375	5.5662	5.5953	5.6247	5.6545	5.6848	5.7154	5.7464	5.7778	5.8097	5.842	5.8747
5.9078	5.9414	5.9754	6.0099	6.0449	6.0803	6.1163	6.1527	6.1896	6.227	6.265	6.3034
6.3425											

问题二：

表 1：分区一(0N-15N)前 40 组排序表

排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区域号	322	1070	446	946	1194	1318	1938	70	1442	822
平方和	0.000045	0.000055	0.000059	0.000082	0.000086	0.00014	0.00016	0.000189	0.000193	0.000211
排序	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
区域号	1814	1566	1690	27	570	198	698	279	403	151
平方和	0.000212	0.00023	0.000236	0.000285	0.0003	0.00034	0.00048	0.00049	0.000553	0.000569
排序	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
区域号	1895	694	155	779	252	194	903	655	1771	527
平方和	0.000665	0.000695	0.000717	0.00072	0.000727	0.000756	0.00076	0.000774	0.000801	0.000812
排序	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
区域号	128	1027	376	1647	1151	574	531	1275	1523	74
平方和	0.000822	0.00084	0.000901	0.000919	0.00093	0.000952	0.000972	0.000995	0.000995	0.001018

表 2：分区二(15N-30N)前 40 组排序表

排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区域号	450	1019	1263	326	574	1383	202	1066	1139	78
平方和	0	0.000025	0.000027	0.000033	0.000037	0.000089	0.000093	0.000147	0.000152	0.00016
排序	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
区域号	775	698	895	651	942	1143	1190	1503	1507	1627
平方和	0.000165	0.000181	0.000209	0.000219	0.000259	0.000282	0.000304	0.000317	0.000324	0.000357
排序	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
区域号	624	899	407	283	1434	822	527	1387	159	748
平方和	0.00041	0.00041	0.000436	0.000439	0.000455	0.000485	0.000489	0.000524	0.000528	0.00053
排序	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
区域号	1747	1259	818	500	531	1623	35	1310	1558	771
平方和	0.000556	0.000557	0.000566	0.000572	0.00058	0.000609	0.000665	0.000672	0.000699	0.000721

表 3：分区三(30N-45N)前 40 组排序表

排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区域号	8	3	158	77	13	232	82	382	163	227
平方和	0.00088	0.001214	0.001346	0.001417	0.001588	0.001636	0.001877	0.001993	0.002078	0.00239
排序	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
区域号	537	532	387	313	687	18	747	237	682	377
平方和	0.002659	0.00272	0.002809	0.002867	0.002941	0.003494	0.003502	0.003606	0.003635	0.003681
排序	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
区域号	72	168	897	752	902	742	318	992	1137	527
平方和	0.003702	0.003889	0.004229	0.00451	0.004541	0.004598	0.004693	0.00486	0.005058	0.005082
排序	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
区域号	542	87	1142	892	222	468	1287	392	1132	1292
平方和	0.005086	0.005295	0.005508	0.005521	0.00566	0.005974	0.005979	0.006336	0.006372	0.006418

表 4：缅甸影长与当地影长对比分析表

北京时间	当地影长/m	缅甸影长 /m	绝对误差值	相对误差率
14:42	1.15	1.098	0.0515	0.0448
14:45	1.182	1.132	0.0496	0.042
14:48	1.215	1.167	0.0479	0.0394
14:51	1.249	1.203	0.0465	0.0372
14:54	1.283	1.239	0.0442	0.0345
14:57	1.318	1.276	0.0423	0.0321
15:00	1.353	1.313	0.0396	0.0293
15:03	1.389	1.352	0.0372	0.0268
15:06	1.426	1.391	0.0351	0.0246
15:09	1.463	1.431	0.0323	0.0221
15:12	1.501	1.471	0.0298	0.0198
15:15	1.54	1.513	0.0275	0.0179
15:18	1.58	1.554	0.0255	0.0161
15:21	1.62	1.597	0.0228	0.0141
15:24	1.661	1.641	0.0203	0.0122
15:27	1.703	1.685	0.0181	0.0106
15:30	1.746	1.73	0.0161	0.0092
15:33	1.79	1.776	0.0143	0.008
15:36	1.835	1.822	0.0127	0.0069
15:39	1.881	1.87	0.0113	0.006
15:42	1.928	1.918	0.01	0.0052

表 5：缅甸实皆省影长与当地影长对比分析表

北京时间	当地影长/m	缅甸实皆省 影长/m	绝对误差值	相对误差率
14:42	1.15	1.130	0.0205	0.0178
14:45	1.182	1.160	0.0215	0.0182
14:48	1.215	1.192	0.0227	0.0187
14:51	1.249	1.225	0.0240	0.0192
14:54	1.283	1.259	0.0244	0.0190
14:57	1.318	1.293	0.0251	0.0190
15:00	1.353	1.328	0.0249	0.0184
15:03	1.389	1.364	0.0250	0.0180
15:06	1.426	1.401	0.0253	0.0177
15:09	1.463	1.438	0.0248	0.0169
15:12	1.501	1.476	0.0245	0.0163
15:15	1.54	1.515	0.0245	0.0159
15:18	1.58	1.555	0.0247	0.0156
15:21	1.62	1.596	0.0242	0.0149
15:24	1.661	1.637	0.0238	0.0144
15:27	1.703	1.679	0.0237	0.0139
15:30	1.746	1.722	0.0238	0.0136
15:33	1.79	1.766	0.0241	0.0135
15:36	1.835	1.810	0.0246	0.0134
15:39	1.881	1.856	0.0252	0.0134
15:42	1.928	1.902	0.0260	0.0135

表 6：海南省三亚市影长与当地影长部分对比分析表

北京时间	当地影长/m	海南省三亚 市 影长/m	绝对误差值	相对误差率
14:42	1.15	1.135	0.0142	0.0123
14:45	1.182	1.168	0.0141	0.0119
14:48	1.215	1.201	0.014	0.0115
14:51	1.249	1.235	0.0141	0.0113
14:54	1.283	1.269	0.014	0.0109
14:57	1.318	1.304	0.014	0.0106
15:00	1.353	1.339	0.0139	0.0103
15:03	1.389	1.375	0.0139	0.01
15:06	1.426	1.412	0.014	0.0098
15:09	1.463	1.45	0.0138	0.0095
15:12	1.501	1.488	0.0139	0.0092
15:15	1.54	1.526	0.0138	0.009
15:18	1.58	1.566	0.0139	0.0088
15:21	1.62	1.606	0.0138	0.0085
15:24	1.661	1.648	0.0137	0.0082

15:27	1.703	1.69	0.0137	0.008
15:30	1.746	1.733	0.0136	0.0078
15:33	1.79	1.777	0.0135	0.0075
15:36	1.835	1.821	0.0135	0.0074
15:39	1.881	1.867	0.0134	0.0071
15:42	1.928	1.915	0.0134	0.0069

问题四：

表 1: *Sketchup* 影长采集长度及调整

序号	北京时间	实际影长	修正	序号	北京时间	实际影长	修正
0	8:54:06	2.3056	2.306	11	9:16:28	2.0337	2.034
1	8:56:08	2.2869	2.287	12	9:18:30	1.9775	1.978
2	8:58:10	2.2510	2.251	13	9:20:32	1.9665	1.967
3	9:00:12	2.2177	2.238	14	9:22:34	1.9404	1.940
4	9:02:14	2.2097	2.210	15	9:24:36	1.9091	1.909
5	9:04:16	2.1925	2.192	16	9:26:38	1.8661	1.866
6	9:06:18	2.1875	2.188	17	9:28:40	1.8330	1.833
7	9:08:20	2.1719	2.162	18	9:30:42	1.8077	1.808
8	9:10:22	2.0241	2.140	19	9:32:44	1.7647	1.765
9	9:12:24	2.1172	2.117	20	9:34:46	1.7363	1.736
10	9:14:26	2.1120	2.112				

表 2：前 40 组坐标点误差平方和示意表

排名	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
区域号	2245	2730	2851	2972	3093	3094	3214	3215	3335	3336
平方和	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
排名	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
区域号	3457	3578	3699	4063	2366	3942	2487	4184	2124	2609
平方和	0	0	0	0	0.000001	0.000001	0.000003	0.000003	0.000004	0.000004
排名	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
区域号	3821	4427	2608	3820	1639	2003	4305	4548	4669	1760
平方和	0.000004	0.000005	0.000006	0.000006	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000007	0.000008
排名	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
区域号	3700	1518	1881	2488	2729	4306	3941	1397	1882	2002
平方和	0.000008	0.000009	0.000009	0.000009	0.000009	0.000009	0.000011	0.000012	0.000012	0.000012

表 3：前十四组误差最小地点分布图

区域号	北纬	东经	估测地点
2245	39.7	111.7	内蒙古呼和浩特市
2730	40.1	111.7	内蒙古呼和浩特市
2851	40.2	111.7	内蒙古呼和浩特市
2972	40.3	111.7	内蒙古呼和浩特市
3093	40.4	111.7	内蒙古呼和浩特市
3094	40.4	111.7	内蒙古呼和浩特市
3214	40.5	111.7	内蒙古呼和浩特市
3215	40.5	111.7	内蒙古呼和浩特市
3335	40.6	111.7	内蒙古呼和浩特市
3336	40.6	111.7	内蒙古呼和浩特市
3457	40.7	111.7	内蒙古呼和浩特市
3578	40.8	111.7	内蒙古呼和浩特市
3699	40.9	111.7	内蒙古呼和浩特市
4063	41.2	111.7	内蒙古呼和浩特市