储油罐的变位识别与罐容表标定

摘要

本文讨论的是储油罐的变位识别以及变位后罐容表的标定，根据附录中所给的变位前后的相关数据，建立模型，确定了变位参数，并对变位后的罐容表进行了较为准确的标定。

对于问题 1，在文章给出的高度数据范围外，我们利用了微积分的思想，得出了倾斜斜椭圆柱体中液体容量的积分模型，分析了误差并给出了标定值；同时我们还利用插值法的思想，建立了相关模型，给出了间隔为 1cm 的标定值并分析了误差。此外，我们还给出了无变位的模型以及无变位与变位条件下高度的映射，也从另一方面验证了标定值的正确性。

对于问题 2，我们沿用了问题一中微积分的思想，建立了罐内储油量与油位高度以及变位参数之间关系的模型，并利用分层搜索法并结合了附件 2 的数据，得到$\alpha = 2.12°, \beta = 4.42°$。然后利用模型求出了变位后油位间隔 10cm 的罐容表的标定（具体见正文），并进行了误差分析。最后，我们还做了对α, β的灵敏度分析并得出相关结论。

关键词： 标定值　变位参数　微积分　灵敏度分析

一．问题重述

通常加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，并且一般都有与之配套的“油位计量管理系统”，采用流量计和油位计来测量进/出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表（即罐内油位高度与储油量的对应关系）进行实时计算，以得到罐内油位高度和储油量的变化情况。

许多储油罐在使用一段时间后，由于地基变形等原因，使罐体的位置会发生纵向倾斜和横向偏转等变化（以下称为变位），从而导致罐容表发生改变。按照有关规定，需要定期对罐容表进行重新标定。图1是一种典型的储油罐尺寸及形状示意图，其主体为圆柱体，两端为球冠体。图2是其罐体纵向倾斜变位的示意图，图3是罐体横向偏转变位的截面示意图。

请用数学建模方法研究解决储油罐的变位识别与罐容表标定的问题。

（1）为了掌握罐体变位后对罐容表的影响，利用小椭圆型储油罐（两端平头的椭圆柱体），分别对罐体无变位和倾斜角为α=4.1°的纵向变位两种情况做了实验，实验数据如附件1所示。请建立数学模型研究罐体变位后对罐容表的影响，并给出罐体变位后油位高度间隔为1cm的罐容表标定值。

（2）对于图1所示的实际储油罐，试建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数（纵向倾斜角度α和横向偏转角度β ）之间的一般关系。请利用罐体变位后在进/出油过程中的实际检测数据（附件2），根据你们所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为10cm的罐容表标定值。进一步利用附件2中的实际检测数据来分析检验你们模型的正确性与方法的可靠性。

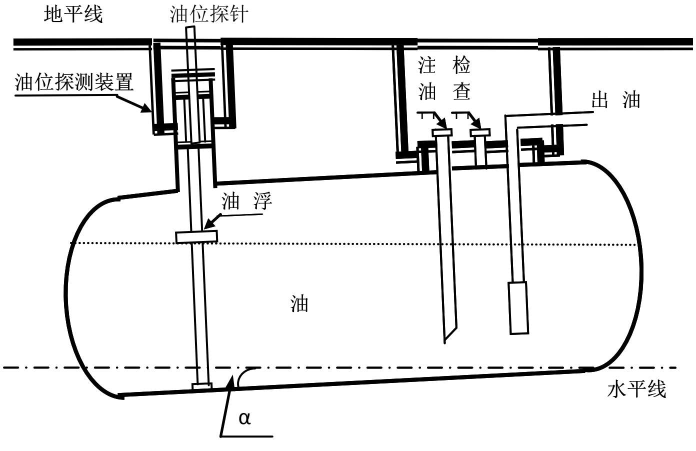
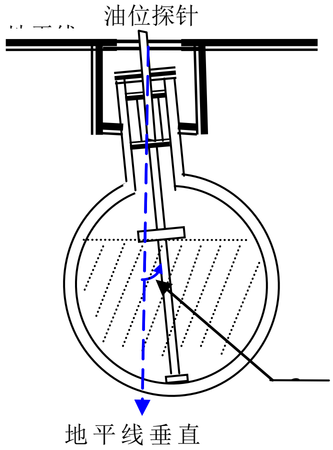


图 2 储油罐纵向倾斜变位后



（b）横向偏转倾斜后

二. 模型假设及符号说明

2.1 模型假设

1. 附件中油位高度和显示容量的测量均具有较高的准确性，能够较好的反映实际情况。
2. 油浮子在油罐底部时显示液面高度为 0，随着油面上升，油浮子向上运动，油面高度读数均匀增大。
3. 油浮子的体积、出油管体积、油位探针体积对于油面高度及油品容量的测量影响可以忽略不计。
4. 所给油罐的尺寸均为内径，不考虑油罐壁厚对油品容积的影响。
5 出油时，油罐内壁以及进出油管上油品的残留体积忽略不计。

2.2 符号说明

a：储油罐椭圆形截面的长半轴长(0.86m)

b：储油罐椭圆形截面的短半轴长(0.6m)

L：储油罐的总长度

R：球缺顶的顶部内半径

H：球缺顶部内高

h：储油罐内油面高度

三. 问题分析

3.1 背景分析

上世纪初兴起的汽车工业使世界各地加油站林立，由于汽油受高温的影响，会有一定的雾化和气化现象，其体积也会有一定的膨大，在白天加油的过程中常常会出现“虚多”情况。而现在的加油站都将储油罐埋在地下，这样白天与晚上汽油所处环境的气温差别不大，很好的克服了气温对加油的影响。每个标准的加油站，都有 3-5 个独立的地下式储油罐，所销售的油品也是分别存储在不同的油罐里的。地下油罐分为立式和卧式两种，一般的油罐有两个功能，一是储存功能，一是计量功能。利用油罐计量油品数量，是根据流量计和油位计测量出进、出油量与罐内油位高度等数据，通过预先标定的罐容表进行实时计算，得到罐内油位高度和储油量的变化情况。所以罐容表的标定对于油品的管理非常重要。

3.2 问题一的分析

罐容表即罐内油位高度与储油量的对应关系，为了探究罐体变位后对罐容表的影响，我们对罐体无变位和倾斜角$\alpha = 4.1$的纵向变位两种情况进行研究。首先对附录 1 所给的数据进行粗略的分析，可以看出没有发生位变的油罐进/出相同容积的油量，油面的高度差变化均先变小后变大，而纵向位变后的油罐进/出

相同容积的油量，油面的高度差变化没有明显规律，可以认为储油罐位变对罐容表的标定是有影响的。为解决这一问题，我们首先用解析几何的方法，根据几何关系和积分的计算得到各油面高度 h 对应的罐体内油品的理论容量的解析表达式，计 $V_{理论}=V(h)$，由于在假设中我们忽略了进出油管对测量的影响，而实际测量中这些影响均不可避免，所以用解析几何法求得的理论体积应与实测体积有一定的误差，我们再对这部分误差进行分析，，通过对曲线的拟合可以得到误差体积与油品体积的近似函数关系，则 $V_{实际} = V_{理论} - V_{误差}$------（1）。

对于罐体倾斜角 $\alpha = 4.1$ 的纵向变位的情况，要求我们探究罐体变位后对罐容表的影响，考虑用三种方法来实现。

第一种类似于对罐体无变位情况的研究，要得到 $V_{实际}$ 和 h' 的对应关系，首先利用几何关系和积分计算得到当 h' 属于（0,42）$\cup$（103, 120）cm 部分 $V_{理论}$ 和 h' 的对应关系 $V_{理论} = g(h')$

第二种对 h' 和 V 利用插值法。附录给出了罐体倾斜进油的采集数据，我们可以对已知点采用插值法得到一条平滑的曲线，那么各高度对应的罐容量就可以通过这条曲线确定。

第三种对 h 和 h' 利用插值法。既然我们要得到 $V_{实际}$ 和变位后的油位高度 h' 的对应关系，而 $V_{实际}$ 和 h 关系已经求出 $V_{实际} = k(h)$，首先我们可以找出相同油量下未变位时油面高度 h 和变位后油面高度 h' 关系，这里用插值法很容易得出每一个 h 所对应的 h' 即 $h = f(h')$，对于未给出数据部分（0,42）$\cup$（103, 120）cm，我们可以采用拟合的方法得到 $h = f(h')$，即可得到 $V_{实际}=k(f(h'))$，

由于附录 1 中所给出的倾斜变位油位高度 h' 的范围在 $(411.29,1035.36)$ mm 内，所以第二种方法只能对这部分 V 和 h' 关系进行研究，第一种方法可以对其余部分进行理论计算，第三种方法可以对其余部分进行拟合计算。那么（0, 120）cm 范围内油位高度为的 $1cm$ 罐容表标定值就都可以确定。

3.3 问题二的分析

根据已知球冠部分给定的数据，利用几何关系首先可以确定球体的半径 R，对于未变位时实际储油罐的高度和罐容量的关系 $V = f(h)$，我们分成圆柱体和球冠分别计算，圆柱体部分只要找出油品在截面上所占面积与高度关系 $S = f(h)$，然后乘以圆柱体长度 8m 即可得到圆柱体积 V_1。球冠体部分的计算较

为繁琐，我们需要利用积分运算给出表达式，但因这部分计算复杂度高，所占体积较小所以精确度要求相对低些，我们考虑通过查阅规程来得到球冠容量V_2和h

$V_2 = f(h)$的关系。那么通过$V = V_2 + V_1$，可得V与h的关系。

当发生变位时，由问题一的分析可知，储油罐位变位对其容量标定有影响且不可忽略，我们首先研究α对$V = f(h)$影响，得到$V = f(h_g, \alpha)$关系式，对这部分的研究仍然要分为球冠部分和圆柱体部分，圆柱体分成三部分$0 \le h_g \le L\tan\alpha$，$L\tan\alpha \le h_g \le d$，$h_g > d$讨论，通过复杂积分综合查阅的规程我们可以得到变位后的V和h_g及h_d的关系。对于球冠体部分，未变位时我们有个$V_2 = f(h)$的关系，变位之后我们可以通过$\Delta h = \frac{8h\sin\alpha}{3\pi}\sqrt{\frac{h_g}{d} - (\frac{h_g}{d})^2}$，对式中的 h 进行调整，得到左边球冠$V_2 = f(h_g + \Delta h)$，右边球冠$V_2 = f(h_d - \Delta h)$，综合这两部分表达式，我们就可以确定实际倾斜油罐任意高度 V 和h' α、β的理论关系$V = f(h', \alpha, \beta)$。

对于α、β的确定利用搜索法，在α从（0,10）范围内，以$\frac{1}{n}$为步长，β与α搜索范围相同，将每个α、β及显示油高h'代入（3）式得到对应的V值

记$\Delta V_i = V_{i+1} - V_i$（$i = 201,202,203,204 \ldots 803$），将$\Delta V_i$与出油量$\Delta L_i$相比较，取其绝对误差为$\Delta N_i = \left|\Delta V_i - \Delta L_i\right|$。那么误差平均值最小情况下对应的即为要求的$\alpha$、$\beta$值。确定了$\alpha$、$\beta$之后，我们就可以代入$V = f(h', \alpha, \beta)$中确定罐体变位后油位高度间隔为 10cm 的罐容表标定值，并利用实际数据进行检验。

四．模型的建立与求解

4.1 问题一模型的建立

对附录 1 中所给的数据进行粗略的分析，可以看出没有发生位变的油罐进/出相同容积的油量，油面的高度差变化均先变小后变大，这一点不难解释，由于油罐的纵向截面为一椭圆，当储油罐空罐进油或满罐出油时，上液面的面积均由小变大，后由大变小，所以进出油时油面高度变化的规律恰与之相反，符合实际情况。而纵向位变后的油罐进/出相同容积的油量，油面的高度差变化没有明显规律，这与实际不符，可以说明储油罐位变对罐容表的标定是有影响的。为对变

位后罐容量进行准确的标定，我们从通过以下方法解决。

4.1.1 罐体无变位时罐内油品理论容积的计算

小椭圆油罐的截面为一长半轴长为 0.86m,短半轴长为 0.6m 的椭圆形，建立如下图 1 所示的直角坐标系，其中 x 轴与水平面平行

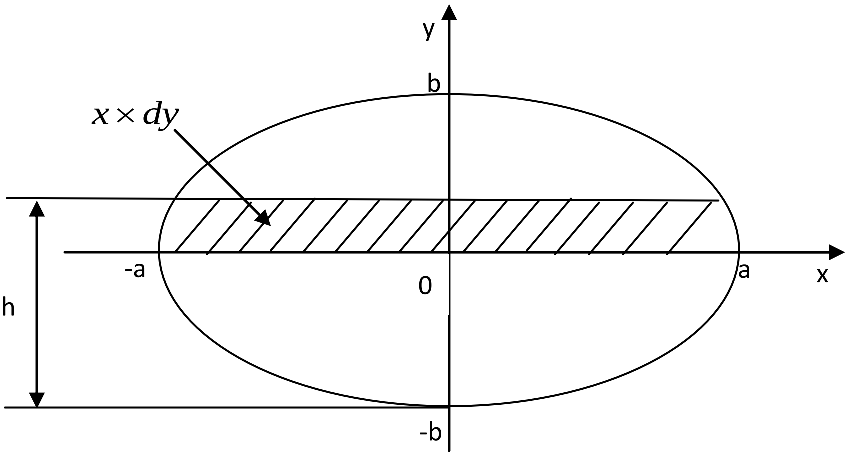


图 1

根据积分的概念，面积元素 $dS = xdy$

椭圆的标准方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$x = a \pm \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

截面椭圆形的面积：

$$S_{椭圆} = 2\int_{-0.6}^{y} xdy = 2a\int_{-0.6}^{y}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} = a\times b(\arcsin\frac{y}{b}+\frac{y}{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}+\frac{b\times\pi}{4})$$

用 h 表示油罐内油品的液面高度

则 $S_{椭圆} = \frac{a}{b}[(h-b)\sqrt{h(2b-h)}+b^2\arcsin(\frac{h}{b}-1)+\frac{1}{2}\pi b^2]$

在无变位情况下，得到储油罐内油品的体积是油品液面高度的函数 $V(h)$

$$V(h) = L\times S_{椭圆} = \frac{a}{b}\times L\times[(h-b)\sqrt{h(2b-h)}+b^2\arcsin(\frac{h}{b}-1)+\frac{1}{2}\pi b^2]$$

其中 L 为油罐的长度，a 为椭圆截面的长半轴长，b 为椭圆截面的短半轴长。
用 MATLAB 软件将附件 1 中未变位时罐内油的油品液面高度带入求得罐内油品体积如下表 1 所示：

油面高度	159.02	176.14	192.59	208.50	223.93	238.97
罐内油品体积	322.822	374.5724	426.3043	478.0712	529.7913	581.5452
油面高度	253.66	268.04	282.16	296.03	309.69	323.15
罐内油品体积	633.291	685.0204	736.7861	788.517	840.2682	891.995
油面高度	336.44	349.57	362.56	375.42	388.16	400.79

续表：

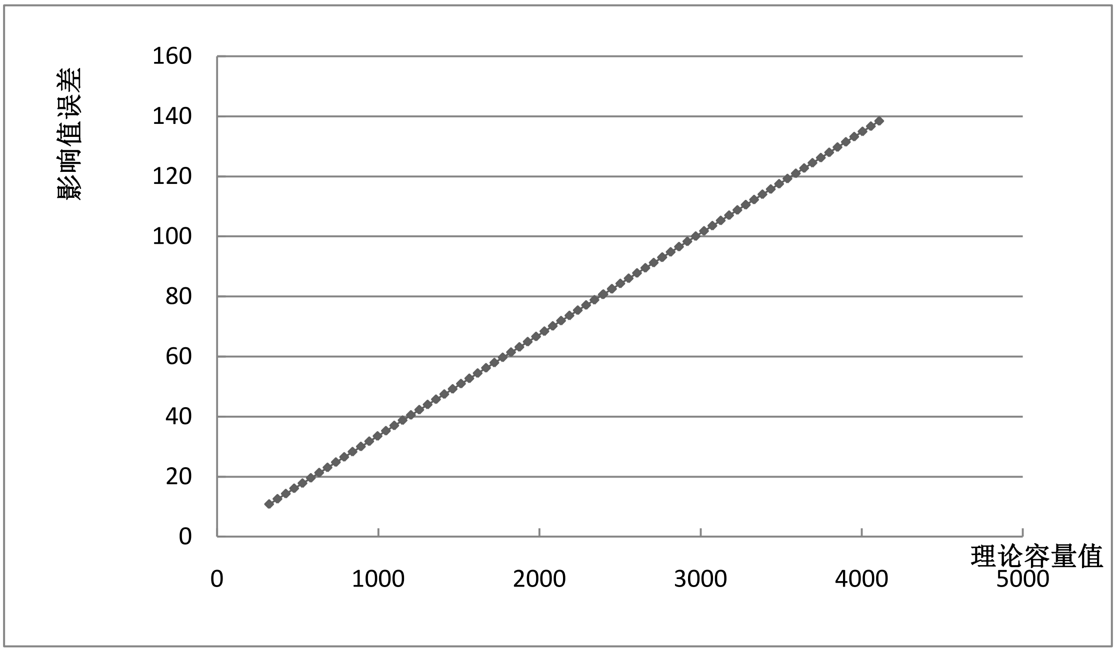
罐内油品体积	943.7417	995.4817	1047.237	1098.994	1150.747	1202.494
油面高度	413.32	425.76	438.12	450.40	462.62	474.78
罐内油品体积	1254.233	1305.971	1357.714	1409.431	1461.175	1512.918
油面高度	486.89	498.95	510.97	522.95	534.90	546.8
罐内油品体积	1564.677	1616.425	1668.182	1719.923	1771.669	1823.398
油面高度	558.72	570.61	582.48	594.35	606.22	618.09
罐内油品体积	1875.132	1926.894	1978.618	2030.373	2082.137	2133.891
油面高度	629.96	641.85	653.75	665.67	677.63	678.54
罐内油品体积	2185.613	2237.372	2289.102	2340.826	2392.61	2396.54
油面高度	690.53	690.82	702.85	714.91	727.03	739.19
罐内油品体积	2448.31	2449.561	2501.335	2553.054	2604.823	2656.531
油面高度	751.42	763.70	764.16	776.53	788.99	801.54
罐内油品体积	2708.277	2759.949	2761.879	2813.604	2865.359	2917.109
油面高度	814.19	826.95	839.83	852.84	866.00	879.32
罐内油品体积	2968.858	3020.606	3072.351	3124.084	3175.831	3227.574
油面高度	892.82	892.84	906.53	920.45	934.61	949.05
罐内油品体积	3279.323	3279.399	3331.119	3382.877	3434.614	3486.365
油面高度	963.80	978.91	994.43	1010.43	1026.99	1044.25
罐内油品体积	3538.107	3589.86	3641.609	3693.358	3745.077	3796.83
油面高度	1062.37	1081.59	1102.33	1125.32	1152.36	1193.49
罐内油品体积	3848.589	3900.325	3952.078	4003.803	4055.553	4107.302

4.1.2 未变位时实际体积与油面高度的函数关系

将其与附录 1 中实验测得的数据做差，计误差=理论容量值-实验容量值，得出如下表中的数据：

理论体积	322.822	374.5724	426.3043	478.0712	529.7913	581.5452	633.2914	685.0204	736.7861	788.517	840.2682	891.9955
误差	10.822	12.572	14.304	16.071	17.791	19.545	21.291	23.020	24.786	26.517	28.268	29.995
理论体积	943.7417	995.4817	1047.237	1098.994	1150.747	1202.494	1254.233	1305.971	1357.714	1409.431	1461.175	1512.918
误差	31.741	33.481	35.236	36.994	38.747	40.493	42.233	43.971	45.714	47.430	49.174	50.918
理论体积	1564.677	1616.425	1668.182	1719.923	1771.669	1823.398	1875.132	1926.894	1978.618	2030.373	2082.137	2133.891
误差	52.676	54.425	56.181	57.923	59.669	61.398	63.132	64.893	66.618	68.372	70.137	71.890
理论体积	2185.613	2237.372	2289.102	2340.826	2392.61	2396.544	2448.31	2449.561	2501.335	2553.054	2604.823	2656.531
误差	73.613	75.371	77.102	78.826	80.609	80.714	82.480	82.500	84.274	85.994	87.763	89.470
理论体积	2708.277	2759.949	2761.879	2813.604	2865.359	2917.109	2968.858	3020.606	3072.351	3124.084	3175.831	3227.574
误差	91.216	92.969	93.049	94.773	96.528	98.278	100.027	101.776	103.520	105.253	107.001	108.744
理论体积	3279.323	3279.399	3331.119	3382.877	3434.614	3486.365	3538.107	3589.86	3641.609	3693.358	3745.077	3796.83
误差	110.493	110.489	112.209	113.967	115.704	117.454	119.197	120.950	122.699	124.447	126.167	127.920

用表中的油面高的与误差值在坐标系中作散点图，得到如下图的曲线



通过线性拟合得到误差与理论容量的函数关系

即可得到修正函数的表达式：$V_{实际} = 0.03371V_{理论} - 0.05975$

4.1.3 罐体变位后罐容表的标定

对于罐体纵向变位后罐容表的标定，我们希望通过对比实测条件下相同油量进出后，发生位变情况下测出的油面高度h和没有发生位变情况下测出的油面高度h'，找出两者之间的关系$h = f(h')$，将此关系带入未变位的罐容表标定模型中，得到未变位储油罐油品容量与变位后测量出的油面高度的关系函数，计$V = g[f(h')]$，此函数即为位变后对罐容表的影响函数。

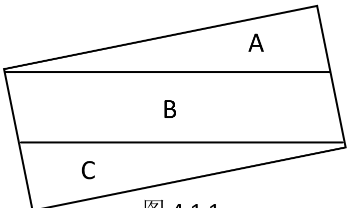
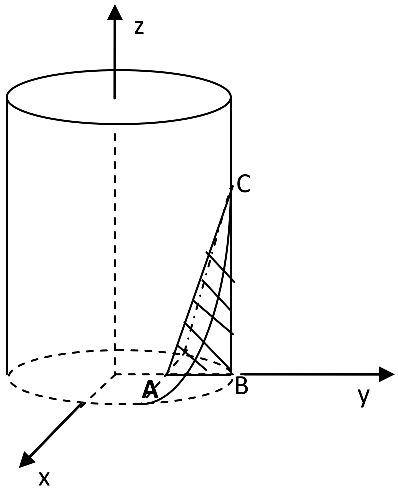


图 4.1.1

观察附录 1 中所给数据可以发现，在发生纵向位变倾斜后所给的累积进出油量及相对应油面高度的数据并不完备，我们将发生纵向位变的储油罐分为如下图 4.1.1 的A, B, C三部分。附录中实测数据只给出了 B 部分进出油后液面高度的完整数据，所以在实测条件下，我们只能找到 B 部分的容量表影响函数，而 A, B 部分的影响函数只能由油罐内油品的理论容积函数推导出。

a. 解析法求取纵向位变后油罐内油品的容积函数

对于纵向变位后油罐内油品容积的计算，我们采用“三角形切片积分”的方法求取。油罐底面椭圆方程为$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$，任一液面 AC 离底面椭圆圆心距离为$l$，在被积区域内取被积$\Delta$



ABC，使其垂直于 xoy 面，

其底长 $AB=\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}-l$

高 $BC=AB\times\cot\alpha=[\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}-l]\times\cot\alpha$

则被积三角形面积为：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cot\alpha(\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}-l)^2$

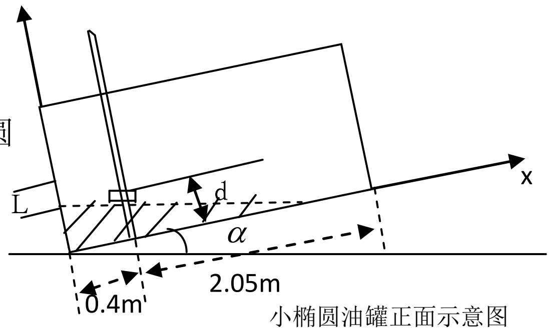
被积表达式为：$dv=\frac{1}{2}\cot\alpha(\sqrt{b^2(1-\frac{y^2}{a^2})}-l)^2dy$

对于油体容量的计算，我们分为两部分分别求取

1.当油体液面高度小于 $2.45\tan\alpha$ 时，如右图为小椭圆油罐正面示意图，我们带入以下公式进行计算，其中 d 为油浮子测出的液面高度，L 为液面距椭圆圆心的距离。

$d=(60-L)-40\tan\alpha \quad ------------(1)$

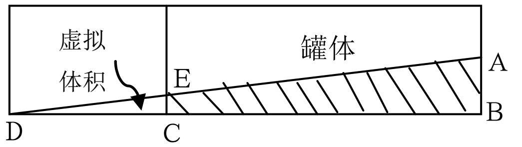
$V=\frac{\cot\alpha}{2}\int_{-89\sqrt{1-\frac{l^2}{60}}}^{89\sqrt{1-\frac{l^2}{60^2}}}(\sqrt{60^2(1-\frac{y^2}{89^2})}-L)^2dy--(2)$



小椭圆油罐正面示意图

这里 $\alpha=4.1^o$。由（1）式分别取 $d=0,1,2,...(cm)$ 求得相应的 L 的值，直到 $L=60-245\tan4.1°(cm)$ 为止，在将求得的Ｌ值带入（２）式，得出相应的容量，即可算出在此范围下的油体高度间隔为１ｃｍ的罐容表标定值。

2.当油体油面距地面的垂直高度超过 $2.45\tan\alpha$，但不超过，即油面升高到油罐另一端底线之上时，需将上述一般公式计算出的结果，减去相应的罐外虚拟部分，如图所示。



图中ＡＢＣＥ所包括的体积是所要求得的，利用上述一般公式计算的结果实际是ＡＢＤ所包括的体

积，应在利用一般公式计算出ＥＤＣ所包含的体积，并使 $V_{ABD}-V_{ECD}=V_{ABCE}$,即可求得。

在我们的问题中，体积的公式具体如下：

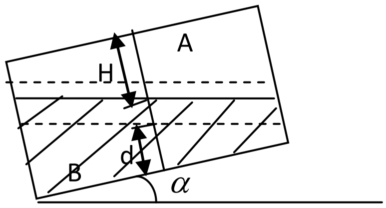
$$V=\frac{\cot\alpha}{2}\int_{-89\sqrt{1-\frac{l^2}{60}}}^{89\sqrt{1-\frac{l^2}{60^2}}}\left(\sqrt{60^2(1-\frac{y^2}{89^2})}-L\right)^2dy-\frac{\cot\alpha}{2}\int_{-89\sqrt{1-\frac{(l+245\tan\alpha)^2}{60}}}^{89\sqrt{1-\frac{(l+245\tan\alpha)^2}{60^2}}}\left(\sqrt{60^2(1-\frac{y^2}{89^2})}-L-\tan\alpha\right)^2dy \qquad (3)$$

求出ｄ每隔１ｃｍ变化时对应的Ｌ的值，将算得的结果带入（３）式即可求得此范围下的油体高度间隔为１ｃｍ的罐容表标定值。

用ＭＡＴＬＡＢ进行数值运算，求得在[0,42]cm 范围内，油体高度间隔为１ｃｍ的罐容表标定值如下表所示：油面高度（mm)，容量（L）

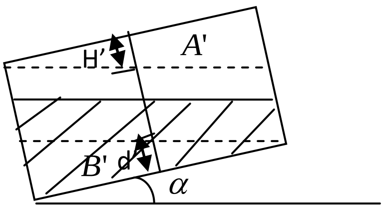
油面高度	０	１０	２０	３０	４０	５０	６０	７０
容量	**1.674**	**3.531**	**6.263**	**9.974**	**14.756**	**20.690**	**27.854**	**36.316**
油面高度	８０	９０	１００	１１０	１２０	１３０	１４０	１５０
容量	**46.142**	**57.393**	**70.126**	**84.396**	**100.254**	**117.74**	**136.923**	**157.818**
油面高度	１６０	１７０	１８０	１９０	２００	２１０	２２０	２３０
容量	**180.25**	**203.999**	**228.906**	**254.884**	**281.857**	**309.760**	**338.538**	**368.142**
油面高度	２４０	２５０	２６０	２７０	２８０	２９０	３００	３１０
容量	**398.52**	**429.656**	**461.490**	**493.996**	**527.143**	**560.902**	**595.245**	**630.146**
油面高度	３２０	３３０	３４０	３５０	３６０	３７０	３８０	３９０
容量	**665.580**	**701.525**	**737.958**	**774.85**	**812.20**	**849.97**	**888.153**	**926.721**
油面高度	４００	４１０						
容量	965.66	998.7						

3.当油体液面高度超过 1.03m 但小于（1.2 − 0.4 $\tan\alpha$）m 时，我们用总体减去 A 部分体积，如右图所示，其中 A 部分体积可通过 B 部分体积进行运算，而 B 部分体积的运算对应于上述２过程。



其中 $d = H + 1.65\tan\alpha$，$V_3 = V_{总} - V_2(d)$

当油体液面高度大于(1.2 − 0.4 $\tan\alpha$)m 小于等于 1.2m 时，用总体减去 A' 部分体积，如右图所示，其中 A' 部分体积可通过 B' 部分体积进行运算，而 B' 部分体积的运算对应于上述１过程。



其中 $d' = H' + 1.65\tan\alpha$，$V_4 = V_{总} - V_1(d)$

同理用 MATLAB 进行数值运算，得到变位后(104--120)cm，油面高度间隔为 1cm 的，罐容表的标定值 ：油高（mm)，容量（L）

油高	1040	1050	1060	1070	1080	1090	1100	1110	1120

容量	**3588.8**	**3621.8**	**3654.2**	**3685.9**	**3716.9**	**3747.2**	**3776.64**	**3805.27**	**3833.01**
油高	1130	1140	1150	1160	1170	1180	1190	1200	
容量	**3859.82**	**3885.62**	**3910.3**	**3933.86**	**3956.06**	**3976.6**	**3995.5**	**4010.3**	

b 插值法直接求得中间部分罐体内油品液面与容量之间的关系

由于用解析式推算油罐中间部分体积的表达式难以获得，我们考虑用插值法对中间部分的数据进行处理。一般的插值方法有很多种，比如牛顿插值，样条函数插值，B 样条函数插值。在本问题中，为得到变位后罐体内液面高度 h' 与容量之间的关系，在比较过多种插值方法后，我们认为采用拉格朗日抛物插值法较为合理。具体方法简化如下：若求

$(h_i^{'},V_i)$和（$h_{i+1}^{'},V_{i+1}$)之间任一点（h',V)的值，则可用（$h_{i-1}^{'},V_{i-1}$),$(h_i^{'},V_i)$,$(h_{i+1}^{'},V_{i+1})$

三个点求出（通常称为上三点）来求得，上三点的内插公式为：

$$V=\frac{(h'-h'_i)(h'-h'_{i+1})}{(h'_{i-1}-h_i)(h'_{i-1}-h'_{i+1})}V_{i-1}+\frac{(h'-h'_{i-1})(h'-h'_{i+1})}{(h'_i-h'_{i-1})(h'_i-h'_{i+1})}V_i+\frac{(h'-h'_{i-1})(h'-h'_i)}{(h'_{i+1}-h'_{i-1})(h'_{i+1}-h'_i)}V_{i+1}$$

有 MATLAB 进行插值计算，得到油面高度在[420,1030]m 范围内油面高度每升高 1cm，罐容表的标定如下：油面高度（mm），容量（L）

油面高度	420	430	440	450	460	470	480	490
容量	**1004.9**	**1034.9**	**1069.7**	**1110.6**	**1148.3**	**1184.9**	**1222.6**	**1265.2**
油面高度	500	510	520	530	540	550	560	570
容量	**1303.1**	**1343.5**	**1384.6**	**1425.9**	**1467**	**1505.2**	**1545**	**1585.8**
油面高度	580	590	600	610	620	630	640	650
容量	**1626.9**	**1668.6**	**1714.6**	**1756**	**1798.2**	**1839.7**	**1883.4**	**1927.8**
油面高度	660	670	680	690	700	710	720	730
容量	**1968.8**	**2011.8**	**2059.7**	**2100.5**	**2142.7**	**2185.4**	**2228.6**	**2272.7**
油面高度	740	750	760	770	780	790	800	810
容量	**2315.4**	**2358.8**	**2405.5**	**2448.3**	**2490.2**	**2534.4**	**2578.9**	**2619.6**
油面高度	820	830	840	850	860	870	880	890
容量	**2659.5**	**2701.1**	**2743.6**	**2786.1**	**2829.1**	**2872.4**	**2912.5**	**2951.4**
油面高度	900	910	920	930	940	950	960	970
容量	**2993.7**	**3034.5**	**3073.3**	**3113.2**	**3156.6**	**3195.3**	**3232.7**	**3270.7**
油面高度	980	990	1000	1010	1020	1030		
容量	**3312.1**	**3352.9**	**3390**	**3427.1**	**3465.8**	**3498.8**		

c. 插值法求取实验测量条件下相同油量进出时未变位测出的油面高度 h 与变位

后测出的油面高度h'之间的函数关系,通过拟合曲线预测找出罐容表的标定

这里我们依旧选用拉格朗日插值法得到任意h'与h间的对应关系，由于附录中所给数据有限，对于中间部分，即高度在 40cm 到 103cm 之间的对应关系用插值法给出。

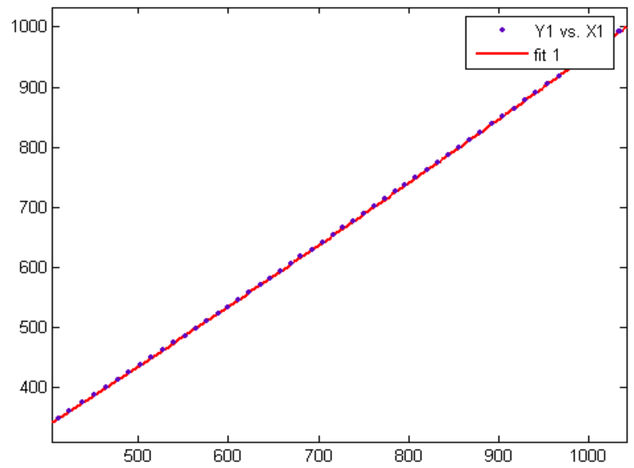
(h_i', h_i)和（h_{i+1}', h_{i+1})之间任一点（h', h)的值，可用（h_{i-1}', h_{i-1}),(h_i', h_i),(h_{i+1}', h_{i+1})三个点求出（通常称为上三点）来求得，上三点的内插公式为：

$$h=\frac{(h'-h'_i)(h'-h'_{i+1})}{(h'_{i-1}-h_i)(h'_{i-1}-h'_{i+1})}h_{i-1}+\frac{(h'-h'_{i-1})(h'-h'_{i+1})}{(h'_i-h'_{i-1})(h'_i-h'_{i+1})}h_i+\frac{(h'-h'_{i-1})(h'-h'_i)}{(h'_{i+1}-h'_{i-1})(h'_{i+1}-h'_i)}h_{i+1}$$

用 MATLAB 软件求得罐体变位后油位高度$h(mm)$在[400mm,1030mm]之间每隔 1cm 对应的未变位时油面的高度$h(mm)$并通过修正后的体积公式$V_{实际}=0.03371V_{理论}-0.05975$，求得实际容量值$V(L)$如下：（由于篇幅限制，这里我们只给出部分对应关系）

h'	400	410	420	430	440	450	460	470	480	490
h	330.24	347.81	359.39	368.1	377.06	387.6	397.31	406.09	415.68	426.4
V	**888.64**	**955.31**	**999.8**	**1033.5**	**1068.5**	**1109.9**	**1148.3**	**1183.2**	**1221.5**	**1264.6**
h'	500	510	520	530	540	550	560	570	580	590
h	435.72	445.57	455.75	465.85	475.85	485.08	494.6	504.53	514.26	524.31
V	**1302.3**	**1342.3**	**1383.9**	**1425.3**	**1466.4**	**1504.6**	**1544**	**1585.3**	**1625.8**	**1667.7**
h'	600	610	620	630	640	650	660	670	680	690
h	535.36	545.23	555.29	565.01	575.5	586.26	595.69	605.97	617.42	627.1
V	**1714**	**1755.4**	**1797.6**	**1838.5**	**1882.6**	**1928**	**1967.7**	**2011**	**2059.3**	**2100**
h'	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790
h	637.02	647.2	657.54	668.29	678.4	688.78	700.08	710.5	720.3	731.22
V	**2141.8**	**2184.6**	**2228**	**2273**	**2315.3**	**2358.6**	**2405.6**	**2448.9**	**2489.4**	**2534.4**

用 MATLAB 作$h-h'$图，可以看出其变化趋势，我们用多项式作最小二乘拟合，设拟合函数为$h=\sum_{k=1}^{m}a_k h'^k$当 m=2 时，即取二次多项式拟合，拟合效果最好，得到拟合函数$h=0.0001077h'^2+0.876h'-28.99$ ，拟合图形如下:



根据拟合出的二次项关系，将其带入未变位时油品体积公式

$$V(h)=L\times S_{椭圆}=\frac{a}{b}\times L\times[(h-b)\sqrt{h(2b-h)}+b^2\arcsin(\frac{h}{b}-1)+\frac{1}{2}\pi b^2]$$ ，算出油品容量。

综上分析，我们得到罐体变位后油位高度间隔为 1cm 的罐容表标定值如下：

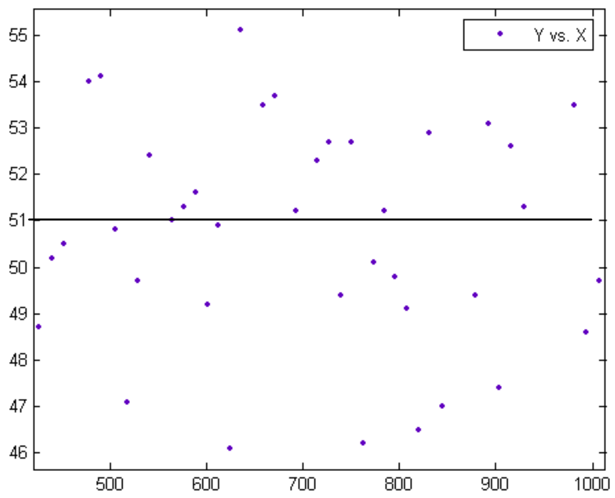
油面高度(mm)容量(L)

油面高度	0	10	20	30	40	50	60	70
容量	**1.674**	**3.531**	**6.263**	**9.974**	**14.756**	**20.690**	**27.854**	**36.316**
油面高度	80	90	100	110	120	130	140	150
容量	**46.142**	**57.393**	**70.126**	**84.396**	**100.254**	**117.74**	**136.923**	**157.818**
油面高度	160	170	180	190	200	210	220	230
容量	**180.25**	**203.999**	**228.906**	**254.884**	**281.857**	**309.760**	**338.538**	**368.142**
油面高度	240	250	260	270	280	290	300	310
容量	**398.52**	**429.656**	**461.490**	**493.996**	**527.143**	**560.902**	**595.245**	**630.146**
油面高度	320	330	340	350	360	370	380	390
容量	**665.580**	**701.525**	**737.958**	**774.85**	**812.20**	**849.97**	**888.153**	**926.721**
油面高度	400	410	420	430	440	450	460	470
容量	965.66	998.7	**1004.9**	**1034.9**	**1069.7**	**1110.6**	**1148.3**	**1184.9**
油面高度	480	490	500	510	520	530	540	550
容量	**1222.6**	**1265.2**	**1303.1**	**1343.5**	**1384.6**	**1425.9**	**1467**	**1505.2**
油面高度	560	570	580	590	600	610	620	630

容量	**1545**	**1585.8**	**1626.9**	**1668.6**	**1714.6**	**1756**	**1798.2**	**1839.7**
油面高度	640	650	660	670	680	690	700	710
容量	**1883.4**	**1927.8**	**1968.8**	**2011.8**	**2059.7**	**2100.5**	**2142.7**	**2185.4**
油面高度	720	730	740	750	760	770	780	790
容量	**2228.6**	**2272.7**	**2315.4**	**2358.8**	**2405.5**	**2448.3**	**2490.2**	**2534.4**
油面高度	800	810	820	830	840	850	860	870
容量	**2578.9**	**2619.6**	**2659.5**	**2701.1**	**2743.6**	**2786.1**	**2829.1**	**2872.4**
油面高度	880	890	900	910	920	930	940	950
容量	**2912.5**	**2951.4**	**2993.7**	**3034.5**	**3073.3**	**3113.2**	**3156.6**	**3195.3**
油面高度	960	970	980	990	1000	1010	1020	1030
容量	**3232.7**	**3270.7**	**3312.1**	**3352.9**	**3390**	**3427.1**	**3465.8**	**3498.8**
油面高度	1040	1050	1060	1070	1080	1090	1100	1110
容量	**3588.8**	**3621.8**	**3654.2**	**3685.9**	**3716.9**	**3747.2**	**3776.64**	**3805.27**
油面高度	1120	1130	1140	1150	1160	1170	1180	1190
容量	**3833.01**	**3859.82**	**3885.62**	**3910.3**	**3933.86**	**3956.06**	**3976.6**	**3995.5**
油面高度	1200							
容量	**4010.3**							

误差检验

将附录1中倾斜变位后间隔加进50L油品的油面高度带入校正后的油品容积计算公式中，得到相应的容积，两两作差，与50作比较，得出相对误差，散点图如下（y轴表示容量差，x轴表示液面高度）：



可以看出误差并不太大

误差产生原因：

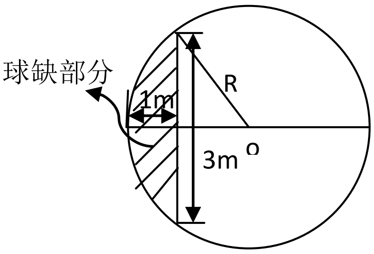
1 由于在模型假设中我们忽略了进出油管以及残留油量对油罐中油品容量的影响，使得理论计算与实际测量之间产生不可避免的误差

2 在进行数值的积分运算过程中会产生一定的计算误差

4.2 问题二模型的建立

4.2.1 未变位时罐容表的标定

a．球缺顶部内半径 R 的确定



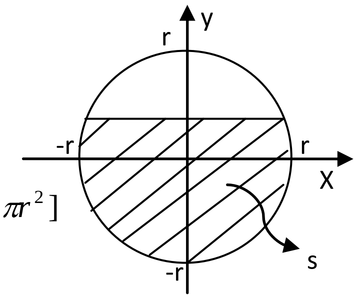
如图所示阴影部分为实际储油罐的球罐体，我们暂定它叫球缺顶部，将此球缺补成完整的球体。根据图 中所 示三角关系，利用勾股定理可得：

$$R^2=(\frac{3}{2})^2+(R-1)^2$$

从而得出球缺顶部内半径 R=1.625m。

b.圆柱体内（不包含球冠体）油品容量的确定

设h为柱体内油面的高度，r为圆柱体的底面圆形的半径，L为柱体的长度。构建如图坐标系，用积分求得



$$S=\int_{-r}^{y}2\sqrt{r^2-y^2}dy \quad , \qquad y=h-1.5$$

$$V_1(h)=L\times S=L[(h-r)\sqrt{h(2r-h)}+r^2\arcsin(\frac{h}{e}-1)+\frac{1}{2}\pi r^2]$$

c．球罐体内油品容积的确定

用积分的方法求取球缺内油品的容积非常困难，我们查找了大量资料，找出了球缺顶部分容积的计算公式，规程中给出的是一个保留 4 项的近似公式，余项就用省略号代替了，实际上，计算球缺部分容积的准确公式是存在的，但既然心规程中未提及，我们也不做具体推算，得到球缺部分容积的公式如下：

$$V_2(h)=\frac{\pi}{2}R^3(\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6})+\frac{2}{3}R^3c(1-\frac{h}{R})\sqrt{1-(1-\frac{h}{R})^2}+\frac{R^3}{3}c(1+2b^2)\arcsin(1-\frac{h}{R})$$

$$-\frac{2}{3}R^3b^3\arctan[\frac{c}{b}(1-\frac{h}{R})\frac{1}{\sqrt{1-(1-\frac{h}{R})^2}}]-R^3[b^2-\frac{1}{3}(1-\frac{h}{R})\arctan[\frac{1}{c}\sqrt{1-(1-\frac{h}{R})^2}$$

则未变位时油罐内油品的容量只要将圆柱体内油品容量与两球冠体内油品容量相加即可，得到的油品总容量与油面高度的函数关系，即$V(h)=V_1(h)+2V_2(h)$

4.2.2 变位后罐容表的标定

a 纵向位变倾角为α对罐容表标定的影响

对于倾斜直圆筒总容积的计算我们与水平直圆筒的计算方法一样。我们对圆筒分为如下三部分分别进行解析式的求解，这里，假设h_g为高端液面高，h_d为低端

液面高，d 为直圆筒内直径，α 为纵向变位倾斜角，L 为直圆筒总长。对于两端球冠体，罐体倾斜对其总容积没有影响，任用水平时的部分容积公式，但液高需进行修正，修正值 $\Delta h=\frac{8h\sin\alpha}{3\pi}\sqrt{\frac{h_g}{d}-(\frac{h_g}{d})^2}$

由于推导过程过于繁杂，我们只给出最终表达式

当高端液高 $0\le h_g\le L\tan\alpha$ 时，部分容积用下式计算：

$$V_{1柱}=d^3ctg\beta\{[\frac{1}{4}-\frac{h_g}{3d}+\frac{1}{3}(\frac{h_g}{d})^2]\sqrt{\frac{h_g}{d}-(\frac{h_g}{d})^2}-(\frac{1}{8}-\frac{h_g}{4d})\cos^{-1}(1-\frac{2h_g}{d})\}$$

$$V_{1球冠}=V_2(h_g+\Delta h)$$

当高端液高 $L\tan\alpha\le h_g\le d$ 时，其部分容积用下式计算：

$$V_{2柱}=d^3ctg\alpha\{[\frac{1}{4}-\frac{h_g}{3d}+\frac{1}{3}(\frac{h_g}{d})^2]\sqrt{\frac{h_g}{d}-(\frac{h_g}{d})^2}-(\frac{1}{8}-\frac{h_g}{4d})\cos^{-1}(1-\frac{2h_g}{d})$$
$$-[\frac{1}{4}-\frac{h_d}{3d}+\frac{1}{3}(\frac{h_d}{d})^2]\times\sqrt{\frac{h_d}{d}-(\frac{h_d}{d})^2}-(\frac{1}{8}-\frac{h_d}{4d})\cos^{-1}(1-\frac{2h_d}{d})$$

式中，$h_d=h_g-L\tan\alpha$

$$V_{2球冠}=V_2(h_g+\Delta h)+V_2(h_d-\Delta h)$$

当高端液高 $h_g>d$ 时，其部分容积用下式计算：

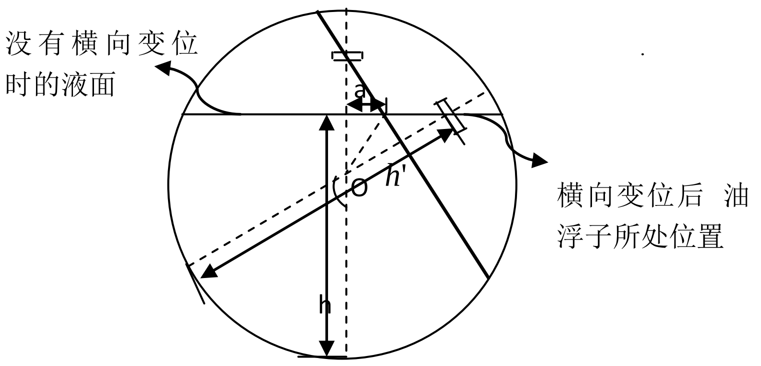
$$V_3=V-d^3ctg\alpha\{[\frac{1}{4}-\frac{h_k}{3d}+\frac{1}{3}(\frac{h_k}{d})^2]\sqrt{\frac{h_k}{d}-(\frac{h_k}{d})^2}-(\frac{h_k}{d})^2]\sqrt{\frac{h_k}{d}-(\frac{h_k}{d})^2}-(\frac{1}{8}-\frac{h_k}{4d})\cos^{-1}(1-\frac{2h_k}{d})\}$$

式中 h_k 为低端液面空高，$h_k=d-h_d$

$$V_{3球冠}=\frac{\pi}{6}\times(\frac{3\times3^2}{4}+1)+V_2(h_d-\Delta h)$$

b 横向变位倾角为 β 对罐容表标定的影响

由于横向变位后，油罐截面的面积不发生改变，所以，我们不直接将横向变位角 β 与油品容量 V 发生联系，而是找出 β 与位变后油面高度 h' 之间的函数关系 $h'(\beta)$，将其带入横向变位下容量的



计算公式中，间接得到容量V与β之间的关系。下图为实际油罐的横截面示意图，假设此时水位高度超出圆的直径，三角形相似及相关角度关系，很容易推出，h与h'有如下三角关系：

$$h'=(h-R)\tan\frac{\beta}{2}\tan\beta+h$$

同样很容易推出当油面高度在直径以下高度时，

$$h'=h-(R-h)\tan\frac{\beta}{2}\tan\beta$$

4.2.3 变位参数α，β的确定

然后综合横向位变倾角和纵向位变倾角的影响，可得到$V=f(h,\alpha,\beta)$的关系，由于上面已给了详细求解过程，且综合后关系式相当复杂，我们用$V=f(h,\alpha,\beta)$表示。

现在题目附件 2 中给出的显示油高h'，是同体积下未变位时实际储油罐高度在α、β共同作用下得到的值，由于实际储油罐偏转角度β，只影响标尺所在横截面的高度，因此，α、β对油高的作用相互独立纵向偏转角度α，所以可以由公式（2）的得到的实际油高h和变化β后油高h'的关系，将h'与没有β作用的将h作一个映射，从而使得到的h只受α影响.

之后，利用我们所建立的高度与α之间的关系搜索α使得我们得出的体积变化量与表中的排出油量的误差最小。再搜索β，同样使体积变化与实际排出量误差最小。从而得出最优α、β。

具体的搜索步骤如下：

step1．通过上面 a、b 的分析，我们可以得到V和h'、α、β的关系，函数关系为$V=f(h',\alpha,\beta)$---(3)，并设$H_0=\infty$，$n=1,i=1$。

step2.先固定β，α从（0，10）范围内，以 1/n 为步长，将α、β及显示油高h'代入（3）式得到对应的V值

step3. 记$\Delta V_i=V_{i+1}-V_i$（$i=201,202,203,204\ldots803$），取其绝对误差为

$\Delta \mathrm{N}_i = \left|\Delta V_i - \Delta L_i\right|$

step4. 求出 $H_i = \sum \Delta \mathrm{N}_i = \left|\Delta V_i - \Delta L_i\right|$，若 $H_i < H_0$ 记 $H_0 = H_i$。$i = i+1$. 若 α 没有超过范围，转 step2，否则转 step5.

step5. $n = n \times 10$，将 α 的范围定为（$H_0 - 1$， $H_0 + 1$），转 step2，直到搜索到我们所需要的精度为止。

Step6. 固定已经得到的 α，与 step2-step5 步骤一致地求出 β

Step7. 那么误差总值最小情况下对应的即为要求的 α、β 值

求解得到： $\alpha = 2.12°$，$\beta = 4.41°$

已知 α、β 将其代入 $V = f(h, \alpha, \beta)$ 中，可得到各高度下对应的罐体容量，然后我们就可以算出罐体变位后油位间隔为 10cm 的罐容表标定值，如下表示：油面高度（cm）容量（L）

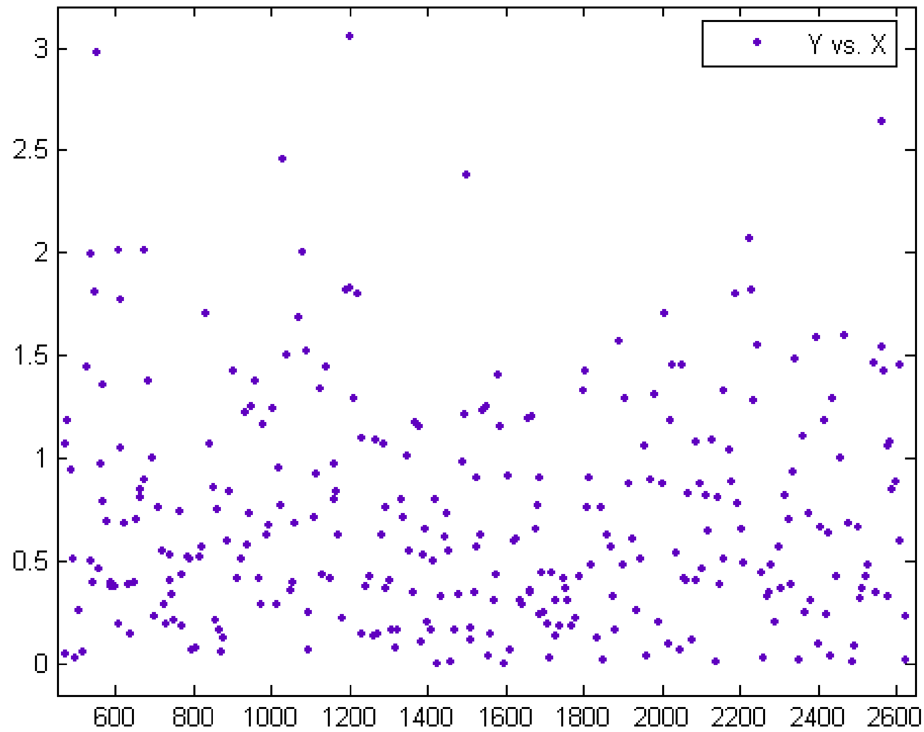
油面高度	0	10	20	30	40	50	60	70	80
容量	46.85	356.74	1067.4	2223.3	3701.6	5430.3	7367.8	9483.2	11751
油面高度	90	100	110	120	130	140	150	160	170
容量	14149	16657	19258	21933	24566	27441	30243	33057	35866
油面高度	180	190	200	210	220	230	240	250	260
容量	38657	41412	44118	46756	49311	51765	54099	56291	58318
油面高度	270	280	290	300					
容量	60153	61759	63084	64019					

误差分析：

误差产生原因：在进行积分的数值计算中，会产生计算误差，对结果造成影响。

针对上述问题，我们对问题二进行如下误差分析：

$\Delta \mathrm{N}_i = \left|\Delta h_i - L_i\right|$ 为相同高度差下，理论出油量和是实际出油量的绝对误差，如下所示：（其中 X轴 $\rightarrow$ 显示油高，单位 mm，Y轴 $\rightarrow$ $\Delta \mathrm{N}_i$，单位 L）误差示意图如下：



通过此图我们发现误差没有并明确的变化规律，这很正常，因为存在一系列因素的影响，比如出油管残留、α、β 对高度影响也没有既定的关系等等，但我们可以看出 $\mathrm{MAX}(\Delta N_i)=3.05L, MIN(\Delta N_i)=0$，平均误差百分比为 $\frac{2105.032}{54055.3}=0.003978$，是一个相当微小的数据，所以可以说我们得到的 α、β 与实际符合的相当完美。

灵敏度分析

针对问题二，我们以 $\alpha,\beta=0, H=2000mm$，对应的 $V=46210L$ 为基础进行 α 和 β 的灵敏度分析。

体现在以下表格中：

α \ β	0.5	1	1.5	2	2.5	3
0.5	45238	45235	45232	45227	45222	45215
1	44759	44756	44752	44748	44742	44736
1.5	44273	44270	44267	44262	44256	44250

2	43781	43779	43775	43771	43765	43758
2.5	43285	43282	43278	43274	43268	43262
3	42783	42781	42777	42773	42767	42760

从上表可以看出，对于$\Delta\beta=\Delta\alpha=0.5$, $\Delta\beta$所对应的ΔV仅等于 3-5 之间，而$\Delta\alpha$所对应的ΔV却为 400-500.

因此，对于α,β的灵敏度有$S_\alpha \approx 100S_\beta$.即$\alpha$对高度与容积关系的影响要比$\beta$大得多

五．模型的改进

由于题中信息有限，所以本文模型在实际应用时仍存在改进空间，若信息充足，则为使模型更具实用性，可在如下方面进行改进：

一、 考虑储油罐厚度进行标定

根据实际储油罐的情况，罐壁并不是可忽略厚度的薄板，因此在实际计算体积时，考虑厚度进行积分有利于提高标定的精度。

二、 考虑油管占用体积进行标定

由于油管占用一定体积，因此造成不同高度的截面面积产生差别，模型中采用近似计算忽略油管体积，若信息充足，可在考虑油管体积和高度的情况下提高标定的精度。

三、 对于任意变位进行标定

对于任意变位所求函数为不规则的非线性方程，可以对式子做适当的简化，将一些非线性的积分项先简化成线性的，再计算后用二次项来修正，这样产生的误差是不可避免的。

六．模型的评价及推广

1. 对于问题一中计算椭直圆筒部分变位后理论上体积 V 和液面高度h的切片积分法，适用于任何形状物体的积分，并且通过验证误差很小。

2. 问题一变位后计算油体高度间隔为 1cm 的罐容表标定中用到了 Lagrange 插值法，用来 Lagrange 插值是 n 次多项式插值，其成功地用构造插值基函数的方法解决了求 n 次多项式插值函数问题。模型中的输入数据可以是任意时刻的点值，然后将其拟合出来的曲线就可以的出各高度对应的容积，并且一旦提供了计算机的输入数据，这个模型很容易实现。我们可以将此模型推广到很多方面例如：已知不连续的有限时刻水的高度来估计一定范围内任意时刻水塔的水流量问题上。

3. 问题二中我们通过理论结合查阅规程得到的变位和未变位$V_{圆柱}$和$V_{球冠}$的计算公式适用于$\tan\alpha \le 0.08$的情况，对于$\tan\alpha \ge 0.008$的情况，我们可采用容量比较法或其它相应的方法进行容积检定。同时$\Delta h=\frac{8h\sin\alpha}{3\pi}\sqrt{\frac{h_g}{d}-(\frac{h_g}{d})^2}$ ，已

得到验证，可以对任意球冠体体积计算进行必要的简化。我们可以利用上述分割计算思想和规程中给出的各形状容器体积的计算公式对多种形状顶板如平顶、弧形顶、圆台顶、锥形顶、球缺顶、椭球顶的油罐给出标定值。这是很据有现实意义的。

参考文献：

[1] 韩中庚，数学建模方法及其应用，出版地：高等教育出版社，2005 年 6 月第一版。

[2] 作者，卧式倾斜安装圆柱体油罐不同液面高度时储油量的计算，山东冶金，第 20 卷 第一期：1998 年。

[3] 中华人名共和国国家计量检验规定。