储油罐的变位识别与罐容表标定

摘 要

本文主要讨论了如何识别储油罐的变位情况以及如何计算倾斜状态下储油罐的任一油面的油量容积，从水平状态下的储油罐入手，逐步研究了生活中倾斜状态的储油罐问题，同时以加油过程为例比较了倾斜状态较水平状态下变化油量对于罐容表的影响，得到了变位识别应该改变对应的罐容去进行油量标定，使油浮子发挥本身该有的作用。

针对问题一，研究的平头圆柱体储油罐是一种忽略两端球冠的理想储油罐。在无变位的情况下，我们建立了合适的坐标系，并利用微元法的思想建立了任一高度的体积公式；同时使用 Matlab 以加油过程为例作出图形拟合与原始数据比较进行合理性分析。

纵向倾斜情形下，我们分三个区域进行考虑。其中当油面位于第一区域或第三区域时，由于纵向倾斜油浮子测高的特征可以知道此时的变化油量不会影响油浮子测高，因此只需要给出测高为固定值时的区域临界油量即可。对于第二区域我们采取法平面特征约束的思想，对倾斜的油罐底面进行分析，并根据在第二区域变化油量时必过的定点$(0,h,0)$，由点法式得到测高与y轴的约束关系，并根据此关系给出了以$1cm$为间隔的罐容表。

针对问题二，我们对圆柱形且两端为球冠体的储油罐建立储油量和油浮子测高的容罐表函数，其体积在原来平头储油罐的基础上增加了$2V_{头}$。在无变位的情况下，沿用第一问的微元法思想进行数值积分得到了球冠体储油罐的体积与油浮子测高关系。

对于纵向和横向倾斜对罐容表的影响分开讨论，对于纵向倾斜的情况，仍然可以沿用第一问的思想把储油罐分为三个区域进行讨论，同样当油面位于第一区域或第三区域时，由于纵向倾斜油浮子测高的特征可以知道此时的变化油量不会影响油浮子测高，因此只需要给出测高为固定值时的区域临界油量即可，第二区域利用微元法进一步讨论得到测高h_1与偏转角α的关系；对于横向倾斜，实际上影响的是油位探针侵入油内部的长度，即$h_2 = s(1-\cos\beta)+h_1$。

关键词： 微元法　法平面特征　变位识别　罐容表

一、 问题重述

1.1 问题背景

加油站都有若干个储存燃油的地下储油罐，通过预先标定的罐容表(即罐内油位高度与储油量的对应关系)，来反映油位高度和储油量（对应体积）的变化情况，但由于一些外界因素，使储油罐的位置发生偏转，从而导致罐容表发生改变，需要定期重新标定罐容表。

如下所示，图 1 是一种典型的储油罐尺寸及形状示意图，其以圆柱体为主体，两端为球冠体。图 2 则是罐体纵向倾斜变位的示意图。图 3 则是罐体横向偏转变位后的截面示意图。

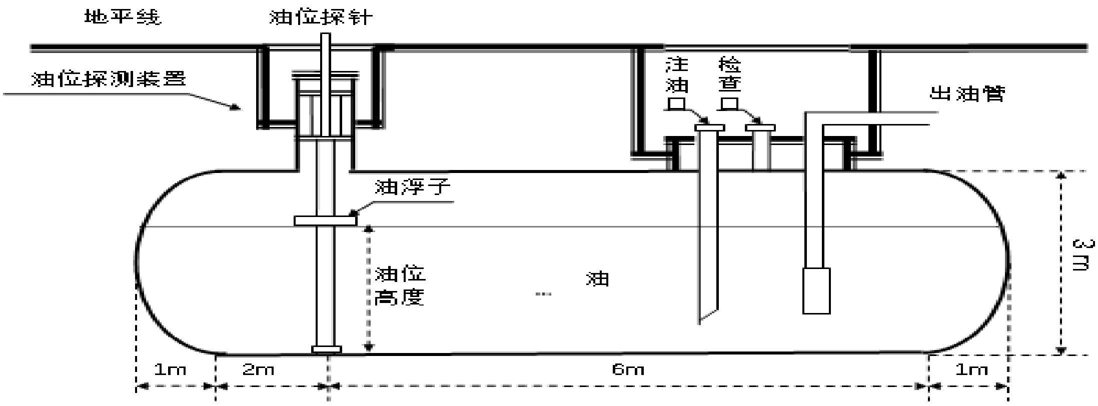


图 1 储油罐正面示意图

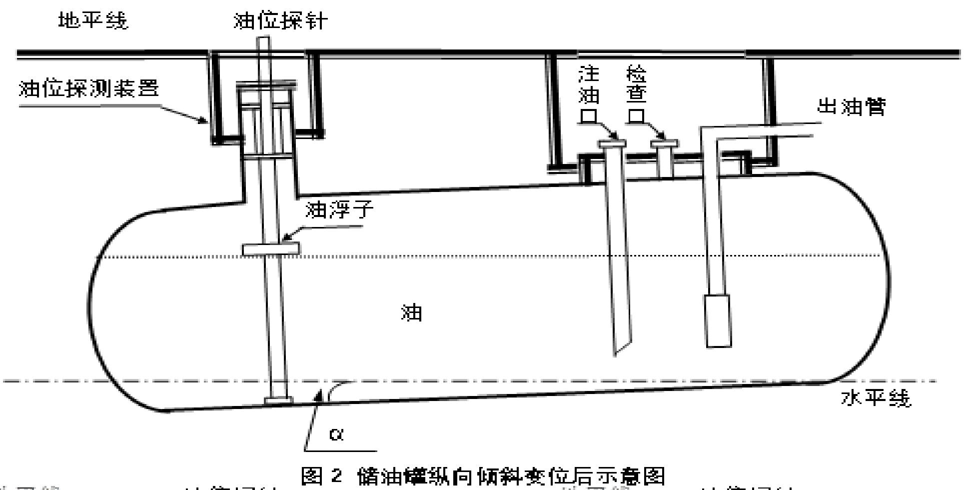
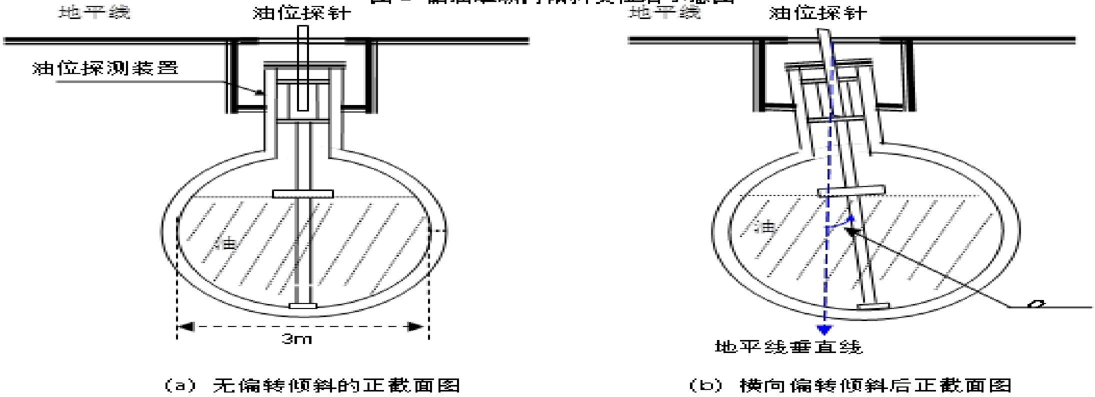


图 2 储油罐纵向倾斜变位后示意图



(a) 无偏转倾斜的正截面图　　(b) 横向偏转倾斜后正截面图

图 3 储油罐截面示意图

1.2 问题提出

（1）利用附件 1 已知的实验数据，建立数学模型研究椭直圆罐油体发生了倾斜角$\alpha = 4.1^{\circ}$的纵向变位后对罐容表的影响，并且给出罐体变位后油位高度间隔为$1cm$的罐容标定值。

（2）建立罐体变位后标定罐容表的数学模型，即罐内储油量与油位高度及变位参数之间的一般关系。利用罐体变位后在进或出油过程中的实际检测数据，根据所建立的数学模型确定变位参数，并给出罐体变位后油位高度间隔为$10cm$的罐容表标定值。进一步利用附件 2 中的实际检测数据来分析检验模型的正确性与方法的可靠性。

二、 问题分析

2.1 问题一的分析

储油罐属于规则几何体，因此可以利用数学积分的方法分别建立储油罐变位前后罐内油量体积的函数表达式，由此可得出理想条件下储油罐内油位高度和储油量的对应关系。但在实际生活中，由于储油罐内存在油位探针、注油管等附属部件，而这些部件都在储油罐中占有一定体积，因此实际用于标定的罐容表与理论值必然存在偏差。为尽量找出合理的罐容表，本文将问题一的解决办法分为两部分：（1）基于空间几何体微元法进行的罐容表模型一拟合。利用平头无倾斜的特性可知任意点的油浮子测高等于此时的油面高度。（2）基于法平面特征法进行的纵向 4.1° 倾斜的罐容表模型二拟合。

纵向倾斜后加油量单位高度内油面长度会发生改变，因此需要根据油罐体征将其分为三个区域进一步分析讨论，得到一个描述罐容表的分段函数并根据此函数给出罐体变位后油位高度间隔为$1cm$的罐容表标定值。最后根据两个部分的模型分析结果利用t检验进行变位前后的差异分析研究罐体变位后对罐容表的影响。

2.2 问题二的分析

平头储油罐在问题一的基础上增加了两端的球冠体其余部分不变，在问题一的基础上，我们对平头储油罐的模型进行改进，建立储油量容积与测高以及横向纵向变位参数的函数关系。首先利用同样的方法，对于纵向倾斜储油罐进行区域分割，第一区域和第三区域由于油浮子的位置特征，无论如何变化油量，油浮子测高始终为定值，对于第二区域通过微元法进行数值积分求解。

当储油罐发生横向倾斜的时候，实际上影响的是油位探针侵入油内部的长度，通过几何关系进行校正得到了前后对应关系即$h_2 = s(1 - cos\beta) + h_1$，并根据求解结果给出以$10cm$为间隔的球罐储油罐的罐容表。

三、 模型假设

1.假设不考虑变化油量时油面振动造成的油浮子测高变化，仅考虑油面平衡时的油浮子测高。
2.假设不考虑过程中温度变化造成油密度改变体积等环境因素的影响。
3.假设储油罐为理想几何体，且过程为理想过程，不考虑油位变化时贴壁附油

损失，及加油过程油量损失等因素。
4.假设储油罐的变位为小角度变位，未超出安全变位区间。
5.假设忽略内部装置体积。
6.假设油位探针是固定的，油浮子只能上下浮动。

四、 符号说明

符号	符号说明
V_i	储油罐油量容积
S_i	储油罐截面面积
L	油罐的底面长
a,b	平头储油罐长半轴，短半轴
α	纵向倾斜角
β	横向倾斜角
h	油浮子测高
h_1	纵向倾斜测高
h_2	在h_1下的横向倾斜测高
s	油浮子探针长度

五、 模型建立及求解

5.1 问题一模型的建立及求解

根据问题描述和分析可得平头椭圆体油罐简图及各边参数如下图所示：

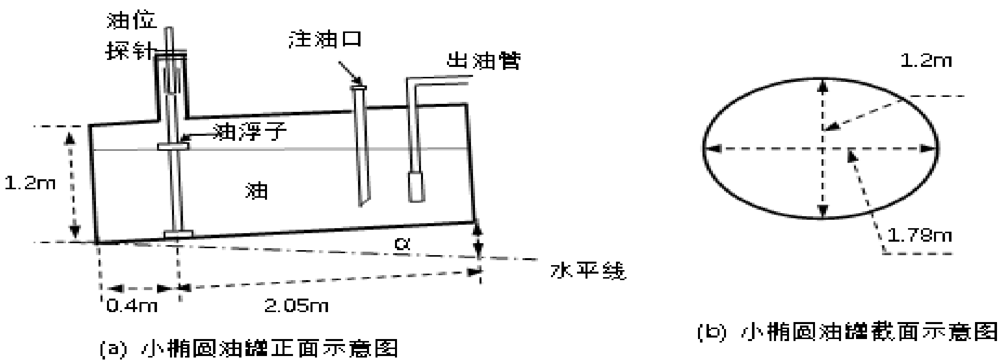


图 4 小椭圆型油罐形状及尺寸示意图

5.1.1 基于空间几何体微元法进行的罐容表模型一拟合

根据空间几何体微元法讨论无变位情况下的容罐表。当α=0 时，垂直油罐底面过侧面下底中心为原点，以油罐底面为x轴，垂直油罐底面为y轴，及由x,y轴确定的指向纸面外为 z 轴建立空间直角坐标系。再根据图 4 的平头椭圆体油罐的各边参数有侧截面简图，如图 5 所示：

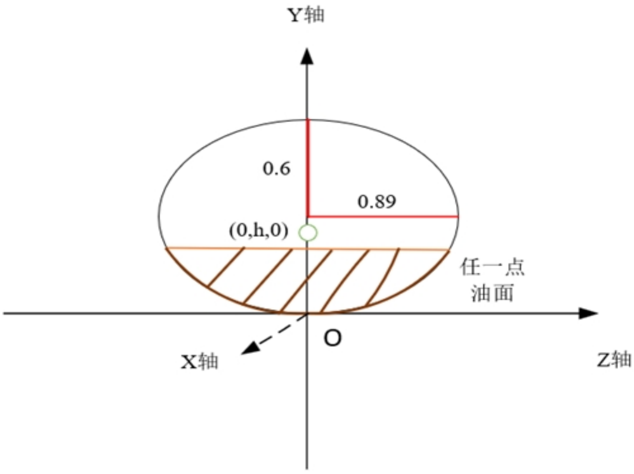


图 5：α=0 的油罐侧截面简图

由于储油罐是平头椭圆柱体，同时油面在重力的作用下总会与 x 轴保持平行，所以对于任一横截面而言具有相同的底面长度，因此对于任一侧截面面积有对应体积的关系如下：

$$V_i = S_i \cdot L(L = 2.45) \quad (1)$$

又由平头无倾斜的特性可知任意点的油浮子测高等于此时的油面高度，因此只需讨论侧截面面积的取值即可，不妨设微元 dy，则根据图 4 参数关系知在yoz平面内有椭圆方程如下：

$$\left(\frac{y-b}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1 \quad (2)$$

即：

$$z = a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y-b}{b}\right)^2}$$

又根据微元dy，可以推导出任一油面椭圆的侧截面面积为：

$$S = 2\int_0^h z dy \quad (3)$$

由（1），（3）两式确定关于体积$V-h$的表达式，并通过$Python$ $sympy$库进行积分求解可得无变位情况下的罐容表对应关系：

$$V = 2L \cdot \int_0^h \left[a \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{y-b}{b}\right)^2}\right] dy \quad (4)$$

令$\frac{y-b}{b} = \sin t$，经过代入变换得：

$$V = L\left[\frac{a}{b}(h-b)\sqrt{b^2-(h-b)^2} + ab\, arcsin\frac{h-b}{b} + \frac{\pi}{2}ab\right] \quad (5)$$

其中 $a = 0.89m$，$b = 0.6m$，$L = 2.45m$

基于此函数使用用 Matlab 软件进行过程演绎后得到理论值，与原始数据进行比较，进行模型分析得到理论值和拟合值的对比图如下：

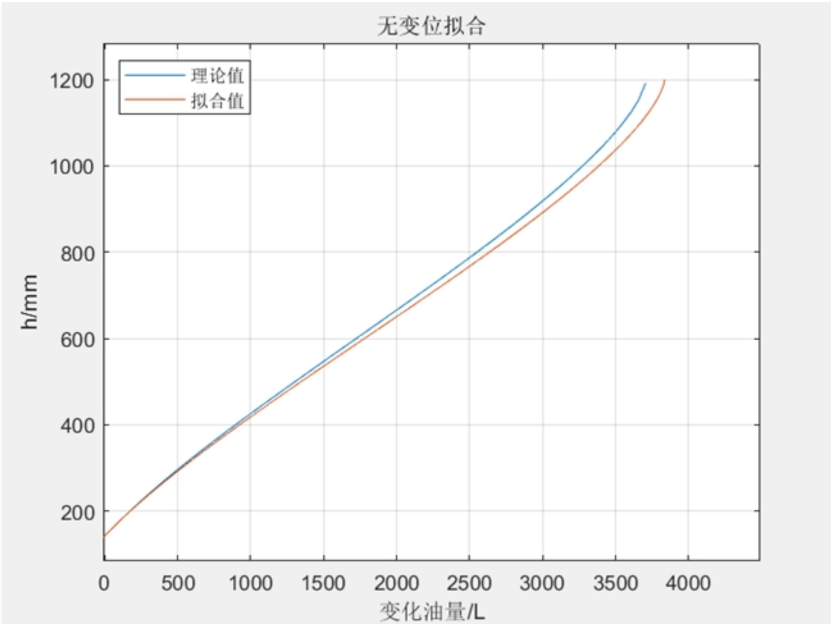


图 6：储油罐无变位时理论值与拟合值的对比

由图 6 可知，储油罐在无变位时，基于此函数解得的理论值和拟合值是非常接近的，利用$Matalb$对模型拟合值和原始数据进行误差分析，得到了模型拟合的相对误差平均值小于 3%，可见我们的模型是可靠的。

误差分析结果如下表所示：

表 1：误差分析 1

最大绝对误差/L	121.8	最大相对误差/%	3.3
最小绝对误差/L	0	最小相对误差/%	0
绝对误差平均值/L	58.3	相对误差平均值/%	2.7

5.1.2 基于法平面特征法进行的纵向 4.1° 倾斜的罐容表模型二拟合。

由于纵向倾斜后加油量单位高度内油面长度会发生改变，因此需要根据油罐体征分为三个区域进一步分析讨论，使用$Python$计算各区域分界线的数值后根据各区域的特征和取值范围分为如下三个区域：

（1）当$V < 341.73L$时，油浮子测高$h\ \equiv\ 0$，区域示图图下：

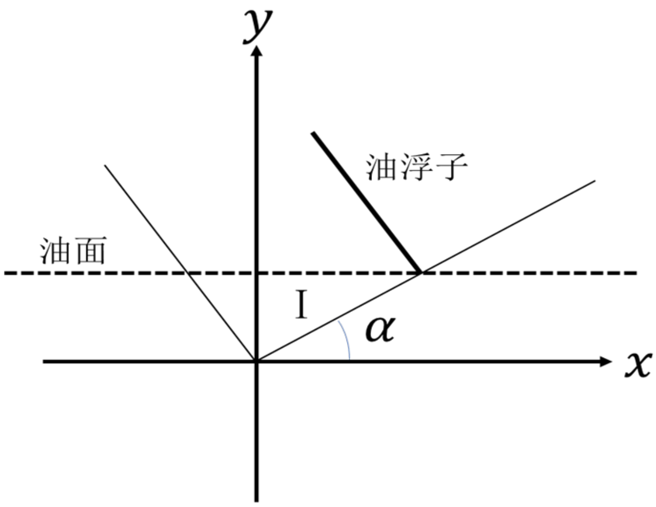


图 7：油面未接触油浮子时第一区域的正视图

（2）以加油过程为例，此时，由于油面始终未高过碰触到油浮子的最低高度，所以此时的进油量体积无论如何改变，油浮子的测高始终保持为0；根据图示角度关系及各参数（页数不够可列公式详写）得：

$$V_{min} = 341.73\ L$$

当$V > 3684.96L$时，油浮子测高$h\ \equiv\ 1.2m$，区域示图如下：

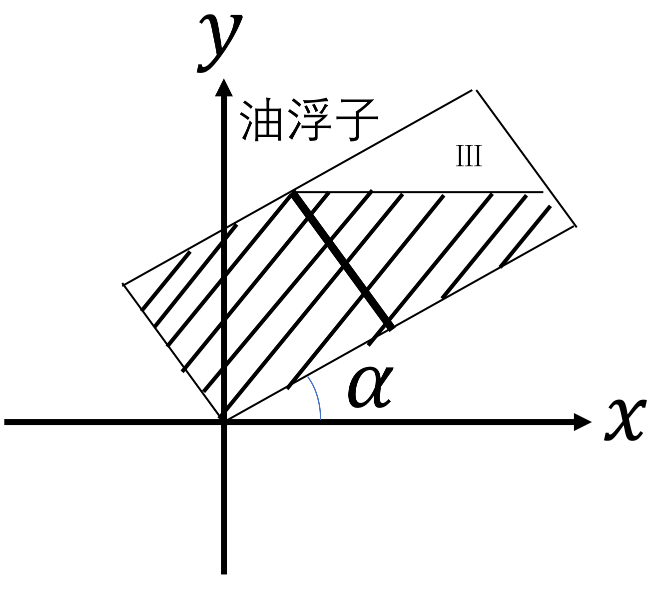


图 8：油浮子测高达 max=12m 时第三区域的正视图

（3）以加油过程为例，此时，油浮子已到达最高测高$h=1.2m$（由其平投椭圆柱体性质知$h_{max}=1.2m$），所以此时的进油量无论如何改变，油浮子的测高始终保持为$1.2m$，根据图示所示各参数（页数不够可列公式详写）得：

$$V_{max}=3684.96L$$

当$341.73L\leq V\leq 3684.96L$时，$h=y+x\tan\alpha$，区域示图如下：

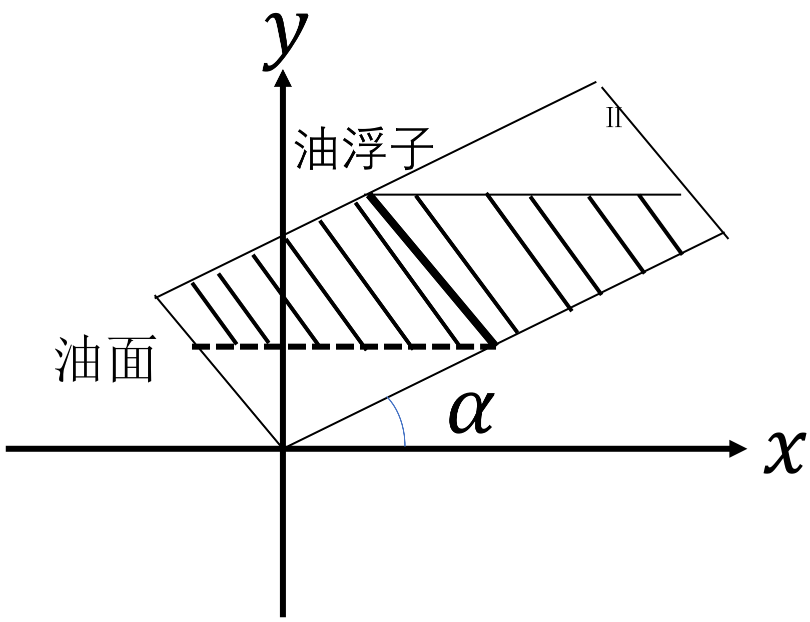


图 9：油面于Ⅰ、Ⅲ之间第二区域的正视图

（4）以加油过程为例根据模型二同上坐标系，从法平面的角度去约束各变量之间的关系。未变位时，原油平面的法向量为$n=(0,1,0)$，在平面椭圆体油罐发生纵向变位后，将其对应的法向量n'投影在原坐标轴上得：

$$n'=(\sin\alpha,\cos\alpha,0)$$

因为对于任一侧截面都横过点$(0,h,0)$，由平面的点法式得：

$x\sin\alpha+(y-h)\cos\alpha=0$ （6）

易得约束条件：

$$h=y+x\tan\alpha \qquad (7)$$

综上，以加油过程为例，由模型二可得纵向倾斜角$\alpha=4.1^{\circ}$的体积-高度函数如下：

$$\begin{cases} 0 & V<341.73L \\ h+x\tan\alpha & 341.73L\leq V\leq 3684.96L \\ 1.2 & V>3684.96L \end{cases} \qquad (8)$$

基于此函数使用用 Matlab 软件进行过程演绎后得到理论值，与原始数据进行比较，进行模型分析得到理论值和拟合值的对比图如下：

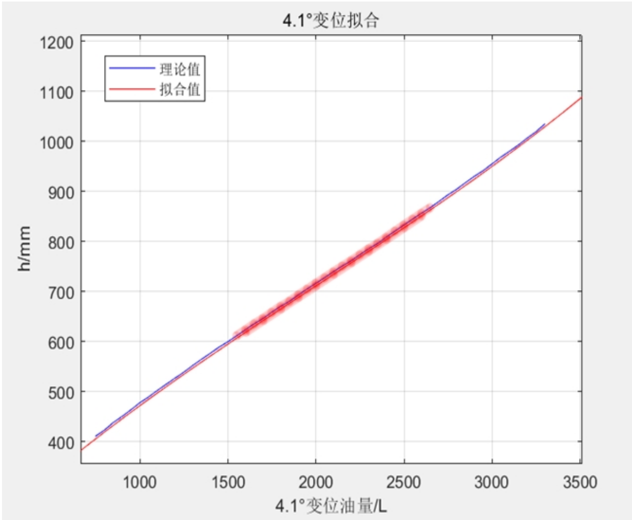


图 10：储油罐变位时理论值与拟合值的对比

由图 10 可知，储油罐在变位时，基于此函数解得的理论值和拟合值是非常接近的，利用$Matalb$对模型拟合值和原始数据进行误差分析，得到了模型拟合的相对误差平均值小于 3%，可见我们的模型是可靠的。

误差分析结果如下表所示：

表 2：误差分析 2

最大绝对误差/L	32.1	最大相对误差/%	3.3
最小绝对误差/L	1.5	最小相对误差/%	0.06
绝对误差平均值/L	10.8	相对误差平均值/%	0.63

（5）使用Matlab 软件绘出储油罐在未变位时与变位时两种情况下对应的曲线图：

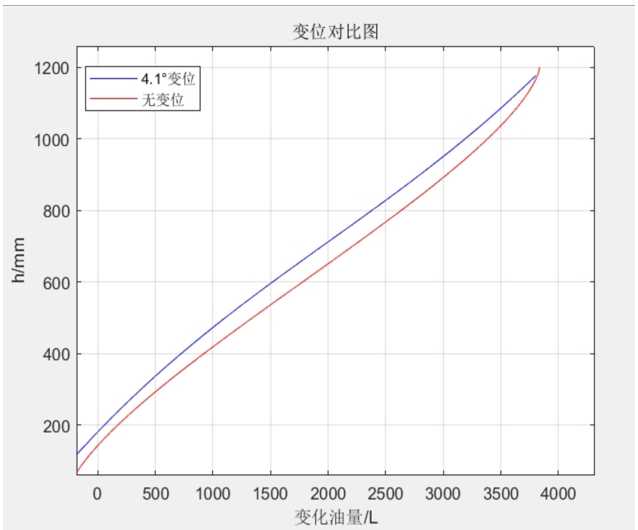


图 11：储油罐在变位时与未变位时对应的油量

再根据 t 检验的差异分析得：变位对罐容表的影响还是比较大的，其中，有如下主要影响：

1.由于罐体倾斜，油浮子开始工作的一段时间内，相对无变位油罐上升更快，之后由于单位高度需由变高，转化为变位上升更快。

2.油量进入到1000L左右时，两者上升幅度相当，但变位油浮子上升的高度相较于无变位高出了近 130mm 左右。

3.观察图像近1200mm知，由于罐体倾斜，油浮子会更快达到h_{max}，显然此时还有部分没有充满油即此时油浮子不能正确地显示罐内油量。此外，在刚开始加入油量时，倾斜的油浮子因为处于第一区域不会显示测高，此时也不能正确地显示罐内油量，原因如图 7 所示。

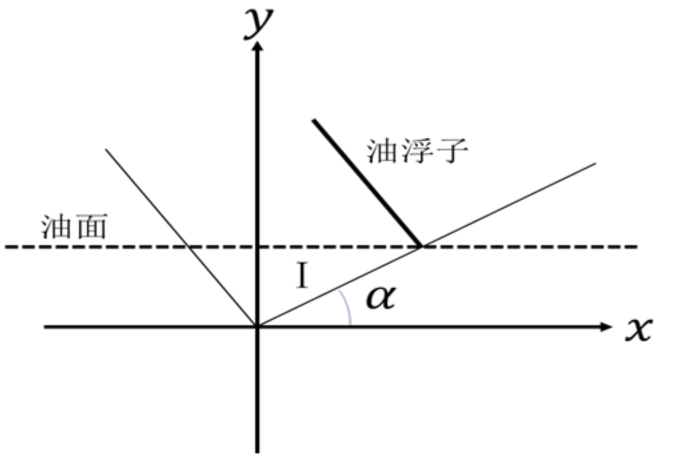


图 7：油面未接触油浮子时第一区域的正视图

综上所述，若对于变位倾斜的储油罐仍使用无变位的罐容表，不仅不能正确的显示此时的罐内储油量容积，还会造成浮油子假坏的现象，因此变位识别相当重要；对于不同的变位情况应当制定相应的罐容表以使浮油子发挥本身的作用。

（6）通过上面的仿真实验，再根据模型二使用$Matlab$软件行矩阵生成式产生罐体变位后油位高度间隔每1cm的油位高度与储油量之间的关系，即罐容表的标定值如下表所示：

表 3：油罐变位后罐容表标定值表

油高 h(mm)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
油量 V(L)	348.4	357.1	366.9	375.8	384.7	393.6	402.5	411.4	420.3	429.2
油高 h(mm)	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
油量 V(L)	438.1	447.0	456.0	464.9	473.8	482.7	491.6	500.5	509.4	518.3
油高 h(mm)	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300

油量 V(L)	527.2	536.1	545.0	554.0	562.9	571.8	580.7	589.6	598.5	607.4
油高 h(mm)	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400
油量 V(L)	616.3	625.2	634.1	643.1	652.0	660.9	669.8	678.7	687.6	709.9
油高 h(mm)	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500
油量 V(L)	745.8	782.2	819.0	856.2	893.9	931.9	970.4	1009.2	1048.5	1088.0
油高 h(mm)	510	520	530	540	550	560	570	580	590	600
油量 V(L)	1127.8	1168.0	1208.4	1249.3	1290.3	1331.6	1373.0	1414.9	1456.9	1499.0
油高 h(mm)	610	620	630	640	650	660	670	680	690	700
油量 V(L)	1541.2	1583.7	1626.5	1669.3	1712.2	1755.2	1798.3	1841.3	1884.7	1927.9
油高 h(mm)	710	720	730	740	750	760	770	780	790	800
油量 V(L)	1971.3	2014.5	2057.9	2101.1	2144.4	2187.6	2230.8	2274.0	2316.9	2359.8
油高 h(mm)	810	820	830	840	850	860	870	880	890	900
油量 V(L)	2402.6	2455.3	2487.8	2530.2	2572.2	2614.2	2656.0	2697.0	2738.7	2779.7
油高 h(mm)	910	920	930	940	950	960	970	980	990	1000
油量 V(L)	2820.6	2861.0	2901.1	2941.2	2980.5	3019.7	3058.5	3097.0	3135.2	3172.7
油高 h(mm)	1010	1020	1030	1040	1050	1060	1070	1080	1090	1100
油量 V(L)	3210.1	3246.8	3283.1	3319.1	3355.0	3390.9	3412.0	3433.5	3450.2	3466.5
油高 h(mm)	1120	1130	1140	1150	1160	1170	1180	1190	1200	
油量 V(L)	3494.7	3516.2	3534.5	3550.5	3563.81	3577.29	3588.47	3603.71	3617.84	

5.2 问题二模型的建立及求解

（1）问题二要求研究的是一个两球冠的储油罐，储油罐可视为三部分组成，其中V_1可视为问题一中的平头椭圆储油罐以及两头的球冠体V_2，V_3也即$V=V_1+V_2+V_3$，如下图所示：

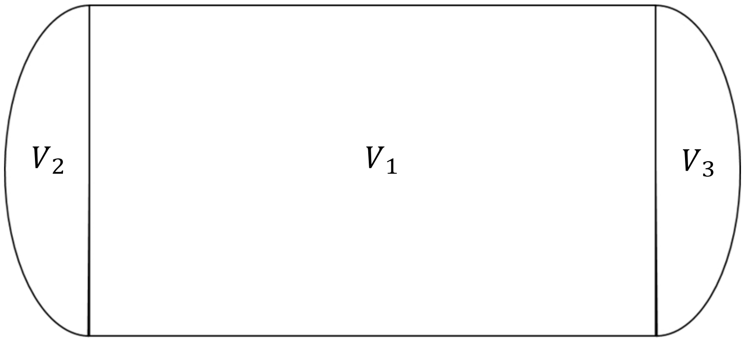


图 8：油罐过程中轴的切面

（2）同样由问题一的解答可将倾斜的球冠储油罐分为五个区域。

以加油过程为例，在第一个区域由于油面未能触碰到油浮子，所以此时无论如何改变区域内的油量容积，油浮子检测出来的测高始终保持为 $0m$，根据图示角度关系及各参数（页数不够可列公式详写）得：

$$V_{min}=230L$$

示意如下图 9：

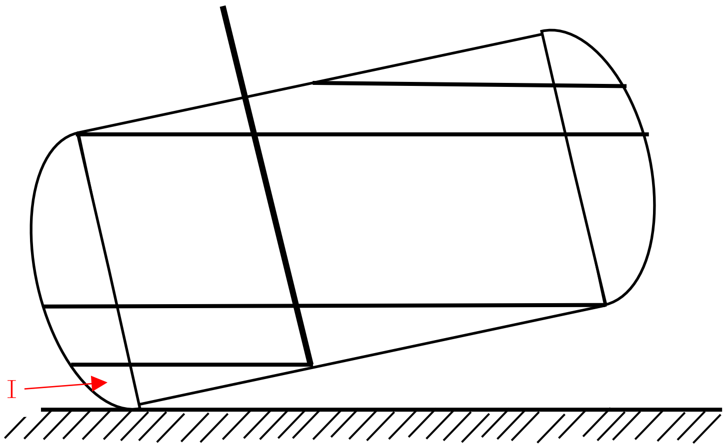


图 9：油罐倾斜时过中轴第一区域截面图

（3）以加油过程为例，在第五个区域由于油面已经高过了油浮子的最大测高$\mathrm{h_{max}}=3\mathrm{m}$，所以此时无论如何改变区域内的油量容积，油浮子产生测高始终保持为 $3m$，根据图示角度关系及各参数（页数不够可列公式详写）得：

$$V_{max}=56671L$$

示意如下图 10：

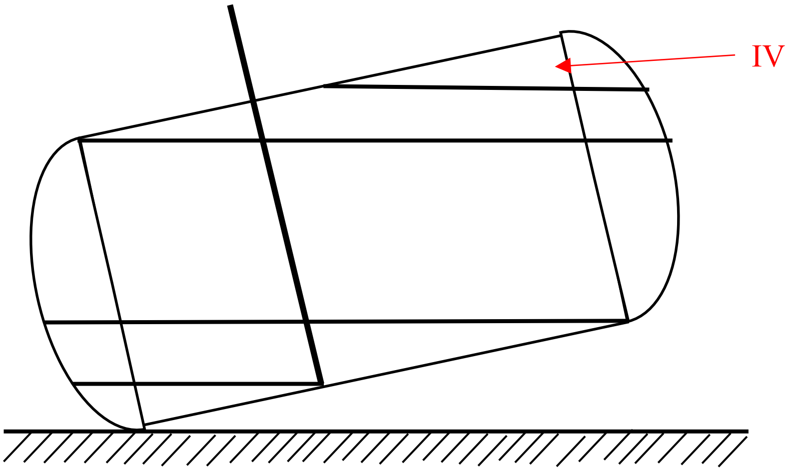


图 10：油罐倾斜时过中轴第五区域截面图

（4）接来下我们利用微元法进行对第二、三、四区域进行进一步的讨论。

在第二区域由于油面始终没有接触右球冠体，因此在此区域内任一油面均有$V_3=0$，也即：

$$V=V_1+V_2$$

由问题一模型的解知，V_1应满足如下关系：

$$V(h)=L\left[\frac{a}{b}(h-b)\sqrt{b^2-(h-b)^2}+ab\,arcsin\frac{h-b}{b}+\frac{\pi}{2}ab\right] \quad （9）$$

而在第二区域内，两冠体储油罐相较于平头圆柱体储油罐对参数进行校正即在两罐体种有$l_1=\frac{l}{2}+\frac{H}{tan\,\alpha}$、高为$H_1=\frac{H}{2}+\frac{H}{4}\tan\alpha$的油罐来计算，可得：

$$\mathrm{V} = \mathrm{R}^2\left(\frac{\mathrm{l}}{2}+\frac{2\mathrm{R}-\mathrm{H}}{\tan\alpha}\right)\mathrm{V}\left(\frac{\frac{2\mathrm{R}-\mathrm{H}}{2}+\frac{2\mathrm{R}-\mathrm{H}}{4}\tan\alpha}{\mathrm{R}}\right) \qquad -\frac{\tan^2\alpha}{12}\left(\frac{\mathrm{l}}{2}+\frac{2\mathrm{R}-\mathrm{H}}{\tan\alpha}\right)^3 V(\frac{\frac{H}{2}+\frac{H}{4}tan\,\alpha}{R})+V(\frac{\frac{H}{2}+\frac{H}{4}tan\,\alpha}{2R})$$

示意如下图 11：

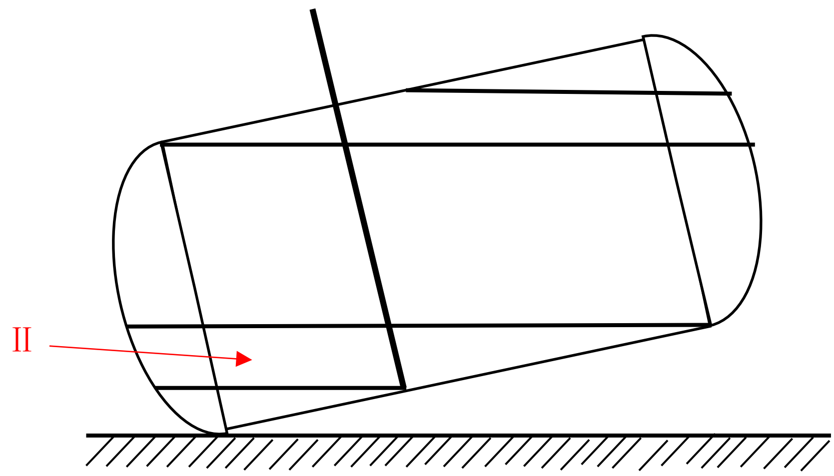


图 11：油罐倾斜时过中轴第二区域截面图

同理当油面处于第三区域时，有$V=V_1+V_2+V_3$，进行校正后得到其对应关系如下所示：

$$V=V_1+V_2+V3$$

此时对应的几何关系有：

$$H_1=H+\frac{l}{2}tan$$

代入原表达式可得：

$$V=R^2lV\left(\frac{H}{R}\right)-\frac{\tan^2\alpha}{12}\left(\frac{\mathrm{l}}{2}+\frac{2\mathrm{R}-\mathrm{H}}{\tan\alpha}\right)^3+V\left(H+\frac{1}{2}tan\alpha\right)+\frac{\pi}{2}R^2+V\left(\frac{\frac{2R-3H}{2}+\frac{Htan\,\alpha}{4}}{R}\right)$$

示意如下图 12：

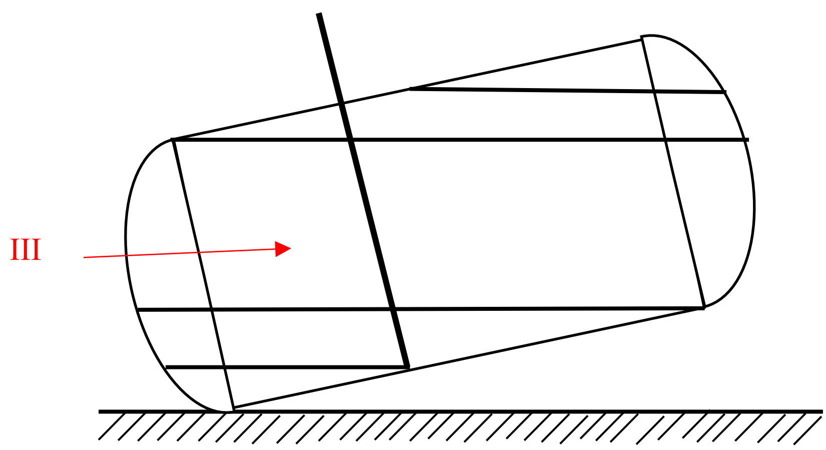


图 12：油罐倾斜时过中轴第三区域截面图

同理对于第四区域时，进行参数校正得：

$$H_1 = H - \frac{l}{2} tan$$

代入原表达式可得：

$$V = R^2\left(\frac{l}{2} + \frac{2R-H}{\tan\alpha}\right)\mathrm{V}\left(\frac{\frac{2\mathrm{R}-\mathrm{H}}{2} + \frac{2\mathrm{R}-\mathrm{H}}{4}\tan\alpha}{\mathrm{R}}\right) - \frac{\tan^2\alpha}{12}\left(\frac{\mathrm{l}}{2} + \frac{2\mathrm{R}-\mathrm{H}}{\tan\alpha}\right)^3 V\left(\frac{\frac{H}{2} + \frac{H}{4}\tan\alpha}{R}\right) + V\left(\frac{\frac{2R-H}{2} + \frac{2R-H}{4}\tan\alpha}{2R}\right)$$

其中$R = \frac{3}{2}m, \mathrm{l} = 8m$

示意如下图 13 所示：

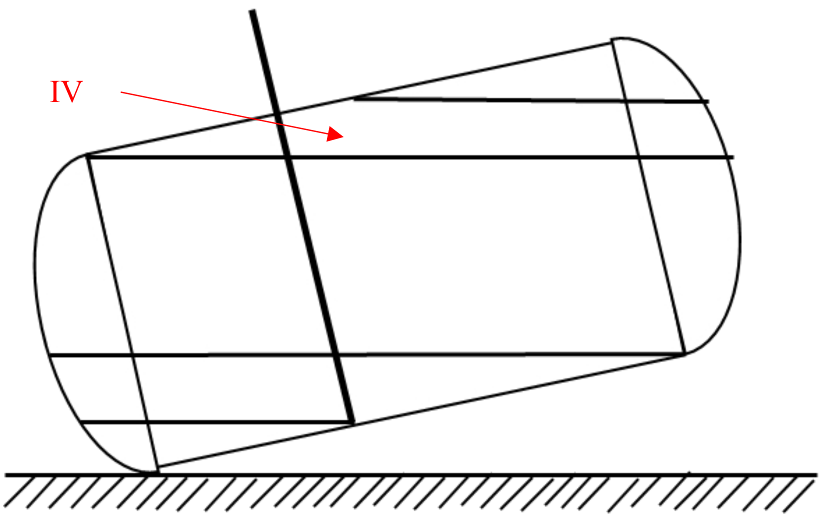
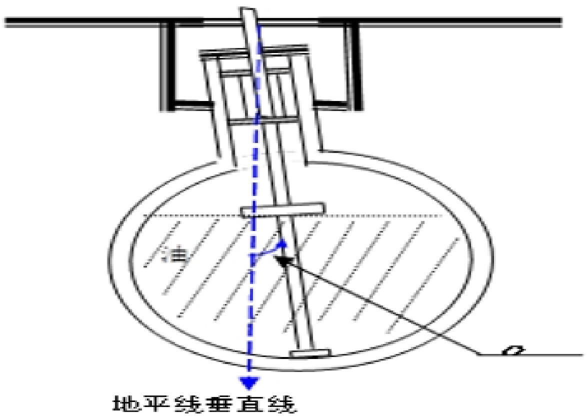


图 13：油罐倾斜时过中轴第三区域截面图

综上我们得到了发生纵向倾斜体积 V 和高度 H 各区域的一般关系。

（5）当储油罐发生了横向倾斜时，实际上是改变了油位探针的长度，根据如下图的几何关系可得：

$$h_2 = s(1 - cos\beta) + h_1 \tag{10}$$



(b) 横向偏转倾斜后正截面图

至此我们已经得到了倾斜球冠的所有参数与高度的一般关系，此时我们根据附件 2 中给出的原始数据以及最优模型算法利用$Python$进行题述所求角度的最优化拟合得到了如下结果：

$$\alpha = 2.8^\circ\ ,\ \beta = 4.1^\circ$$

最后我们根据模型求解函数同时基于此函数使用用 Matlab 软件进行过程演绎后得到理论值，与原始数据进行比较，进行模型分析得到理论值和拟合值的对比图如下：

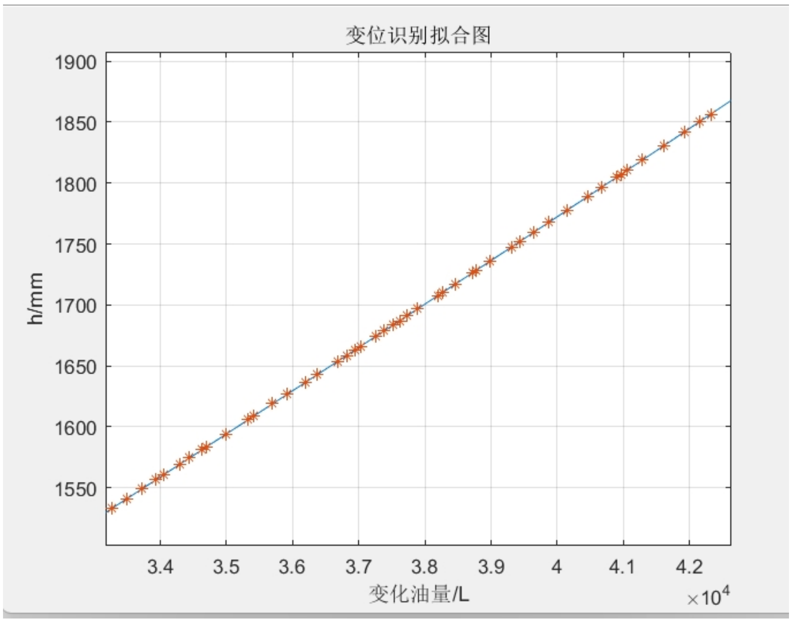


图 14：油罐变位时理论值和实际值的对比

由图 14 可知：我们的拟合模型几乎和原始数据重合，再利用$Matalb$对模型拟合值和原始数据进行误差分析，得到了模型拟合的相对误差平均值小于 3%，可见我们的模型是可靠的。

表 4：误差分析 3

最大绝对误差/*L*	96.4	最大相对误差/%	39.56
最小绝对误差/*L*	0.18	最小相对误差/%	0.2
绝对误差平均值/*L*	24.3	相对误差平均值/%	0.19

（6）通过上面的仿真实验，再根据模型二使用$Matlab$软件行矩阵生成式产生罐体变位后油位高度间隔每10cm的油位高度与储油量之间的关系，即罐容表的标定值如下表所示：

表 5：油罐变位后罐容表标定值表

油高 h(cm)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
油量 V(L)	3628	6878	9988	12966	15820	18557	21183	23703	26122	28445
油高 h(cm)	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
油量 V(L)	30676	32819	34875	36848	38740	40533	42287	43944	45523	47023

油高 h(cm)	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
油量 V(L)	48444	49784	51040	52207	53279	54248	55103	55825	56381	56671

六、 模型的评价

6.1 模型优点

本文从实际问题出发，综合考虑多种因素，分析不同因素对储油罐的影响，并建立综合变位参数的罐内储油量和油位高度的数学模型。据此，本文总结了模型有如下优点：

（1）模型和实验数据之间的相对误差较小，证明模型可以很好地反应油罐的工作情况，可以运用于实际问题。

（2）模型用大量的图表进行分析，使得问题的结果简明清晰。

（3）对模型中的各种影响因素进行量化分析，增强了文章的说服力。

6.2 模型缺点

由于时间紧迫，本文建立的模型是在做了部分的简化所得的。对于一些比较复杂、较次要的因素本文并未考虑，比如输油和出油管道的设置、油浮子自身的体积、重量等，这些都是值得改进的地方。

七、 模型的推广

问题一为一种理想的情况，本文首先分析小椭圆形储油罐无变位时的出入油情况，然后再分析当小椭圆形储油罐纵向变位时，油量与油高度的关系。而在问题二中，考虑到储油罐的实际形状为两端的球冠体加中间的圆柱体，在第一问的基础上，我们使用相似的积分求解方法先求解当储油罐无变位时储油量和油位高度的一般关系，然后再分析当储油罐横向和纵向变位时储油量和油位高度的一般关系。对于其他相似的容器，其求解过程与本模型是相似的。因此，本模型不仅适用于储油罐，还可用于其他与储油罐形状相似的容器的容量的计算。我们可以将本题的计算过程编成一个小软件，对于相似的容器，只要输入容器的对应参数，就可以求出容器此时的盛装量，具有较强的实用价值。

参考文献

[1] 窦雩虹,梅钰,陈振勋,王莉莉.储油罐的变位识别与罐容表标定模型[J].纯粹数学与应用数学,2011,27(06):829-840.

[2] 孔庆宽,季永聚,王景成.圆柱形斜卧贮液罐体的液体容重及其重心的计算[J].大连轻工业学院学报,1987(01):51-57.

[3] 武海辉.数学建模在储油罐问题研究中的应用[J].安康学院学报,2013,25(06):28-30.DOI:10.16858/j.issn.1674-0092.2013.06.009.

[4] 岳晓宁,安哲成,于广瀛,张玲玲.基于变位储油罐罐容表标定方法研究[J].沈阳大学学报(自然科学版),2012,24(01):64-67.

[5] 窦霁虹,梅钰,陈振勋,王莉莉.储油罐的变位识别与罐容表标定模型[J].纯粹数学与应用数学,2011,27(06):829-840.
[6] 解析几何[M]. 高等教育出版社 , 吕林根,许子道编, 2006
[7] 微积分学[M]. 高等教育出版社 , 华中科技大学数学系编, 2002

附录

问题一积分求解：

```
from sympy import*
from math import*
from numpy import*
#依题意对于平头无变位油罐可进行微元法求出高度与容积的关系
#以油罐左圆柱体地面中心为坐标原点建立如图()
#因为无变位，所以此时油浮子h与y轴投影相等
#
#由截面参数知
a=0.89
b=0.6
#因为柱体液面在重力等环境因素下总会水平
#因此L为常量即油罐底面长度
L=2.45
y=symbols('y')#对应坐标轴此时的积分变量
#由椭圆方程得
z=a*sqrt(1-((y-b)/b)**2)
#因为柱体关于y轴对称，同时由几何关系得
s=2*integrate(z,(y,0,b))
v=s*L
jf=simplify(s)#化简积分结果
print(jf)#输出截面积分结果
jf=simplify(v)#化简积分结果
#输出容积V与高度h之间的函数关系
print(f'容积V与高度h之间的函数关系为:{jf}')
#对于发生了角度为4.1° 的纵向变位分为三个部分讨论
theta=radians(4.1)
#在油浮子纵向高度以下，测高为0，此时可视为半圆锥体
V1=1000*(1/3)*pi*(4*sin(theta))**2*4*cos(theta)
print(f'变位罐体在{V1:2f}容积下高度h始终为0m')
#在油浮子测高为1.2时，再加油高度不改变
#此时体积V2同理等于总体积V3减去多余体积V4
V3=1000*pi*a*b*L
V4=1000*(1/3)*pi*(2.05*sin(theta))**2*20.5
V2=V3-V4
print(f'变位罐体在{V2:2f}容积上高度h始终为1.2m')
```

问题一模型求解

```
from math import cos,sin,sqrt,pi,asin
from sympy import Symbol,solve
from numpy import linspace
```

```
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy.interpolate import interp1d
import xlrd
import xlwt
def sr(x):
    return pow(x,2)
l1=2
l2=6
d=1
r1=1.5
r2=(sr(r1)+sr(d))/2/d
a=0
b=0
sa=0
cb=0
def init(aa=0,bb=0):
    global a,b,sa,cb
    a=aa
    b=bb
    sa=sin(a)
    cb=cos(b)
def calc_slice(h,r):
    if h<-r:
        return 0
    if h>r:
        return pi*sr(r)
    if r<5e-2:
        return 0
    return (h/r*sqrt(1-sr(h/r))+asin(h/r)+pi/2)*(sr(r))
def calc_b(h):
    if h>=r1:
        return (h*cb)-sqrt(sr(h*cb)-sr(h)+sr(r1))
    else:
        return -calc_b(2*r1-h)
def calc_a(h):
    o=2000
```

#问题二模型求解源码

```
from math import cos,sin,sqrt,pi,asin
from sympy import Symbol,solve
from numpy import linspace
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy.interpolate import interp1d
import xlrd
import xlwt
```

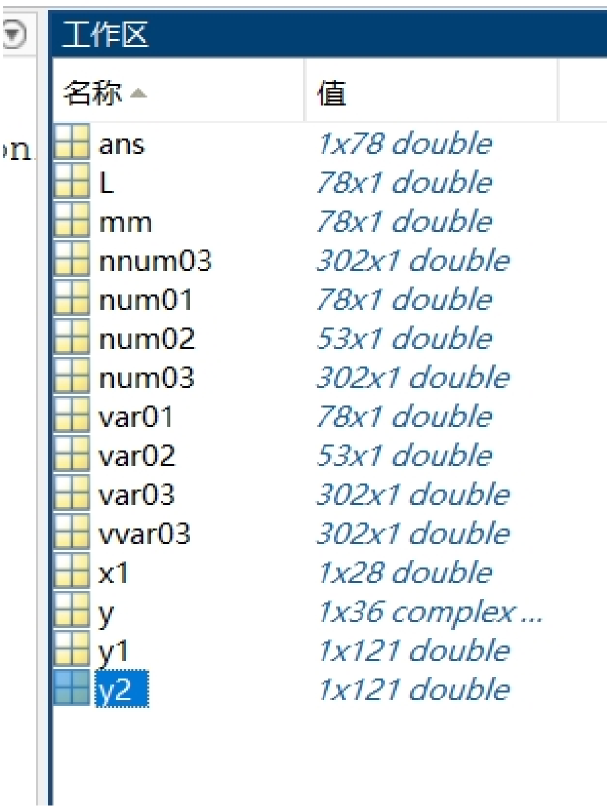
```
def sr(x):
    return pow(x,2)
l1=2
l2=6
d=1
r1=1.5
r2=(sr(r1)+sr(d))/2/d
a=0
b=0
sa=0
cb=0
def init(aa=0,bb=0):
    global a,b,sa,cb
    a=aa
    b=bb
    sa=sin(a)
    cb=cos(b)
def calc_slice(h,r):
    if h<-r:
        return 0
    if h>r:
        return pi*sr(r)
    if r<5e-2:
        return 0
    return (h/r*sqrt(1-sr(h/r))+asin(h/r)+pi/2)*(sr(r))
def calc_b(h):
    if h>=r1:
        return (h*cb)-sqrt(sr(h*cb)-sr(h)+sr(r1))
    else:
        return -calc_b(2*r1-h)
def calc_a(h):
    o=2000
    ans=0.0
    for x in range(-l2*o,l1*o):
        h0=h+sa*(x+0.5)/o
        ans+=(1/o)*calc_slice(h0,r1)
    for x in range(-l2*o-d*o,-l2*o):
        h0=h+sa*(x+0.5)/o
        dd=r2-(l2+d+(x+0.5)/o)
        ans+=(1/o)*calc_slice(h0,sqrt(sr(r2)-sr(dd)))
    for x in range(l1*o,l1*o+d*o):
        h0=h+sa*(x+0.5)/o
        dd=r2-(l1+d-(x+0.5)/o)
        ans+=(1/o)*calc_slice(h0,sqrt(sr(r2)-sr(dd)))
```

```
    return ans
def calc_c(h):
    return calc_a(calc_b(h))
def calc_xy():
    upp=int(2*r1*cb*10)
    global x,y
    y=[calc_c(i/10)for i in range(0,upp)]
    x=linspace(0,(upp-1)/10,upp)
def show():
    plt.figure()
    plt.plot(x,y,'--ro')
    plt.show()
if __name__=='__main__':
    d2=xlrd.open_workbook("2.xls")
    sheet=d2.sheet_by_index(0)
    qh=[sheet.cell_value(i,4)for i in range(1,sheet.nrows)]
    qv=[sheet.cell_value(i,5)for i in range(1,sheet.nrows)]
    mini=1e-3
    cnt=0
    ts=2*pi/360
    '''
    for a in linspace(-0.1*ts,0.1*ts,11):
        for b in linspace(-0.1*ts,0.1*ts,11):
            flag=True
            init(a,b)
            #yv=[calc_c(qh[i]/1000)*1000 for i in range(0,sheet.nrows-1)]
    '''
    '''
            plt.figure()
            plt.plot(qh,yv,'--ro')
            plt.plot(qh,qv,'--bo')
            plt.show()
            '''
            #cnt+=1
            #print(f'---{cnt}---')
    '''
            u=0
            for c in range(0,sheet.nrows-1):
                u=max(u,abs(calc_c(qh[c]/1000)-qv[c]/1000))
                if(u>mini):
                    flag=False
                    break
            if flag:
                mini=u
```

```
            print(f'alpha={a/ts}  beta={b/ts} max={u}')
    '''
    outbook=xlwt.Workbook(encoding="utf-8")
    outsheet=outbook.add_sheet("sheet1",cell_overwrite_ok=True)
    init(0*ts,0*ts)
    yv=[calc_c(qh[i]/1000)*1000 for i in range(0,sheet.nrows-1)]
    for i in range(0,sheet.nrows-1):
        outsheet.write(i,0,qh[i])
    for i in range(0,sheet.nrows-1):
        outsheet.write(i,1,yv[i])
    outbook.save("./00.xls")
    plt.figure()
    plt.plot(qh,yv,'--ro')
    plt.plot(qh,qv,'--bo')
    plt.show()

'''
    print(hcb-sqrt(sr(hcb)-sr(h)+sr(r1)))
    x=Symbol('x')
    print(solve([x*x+h*h-2*x*h*cos(b)-r1*r1],[x]))
'''
```

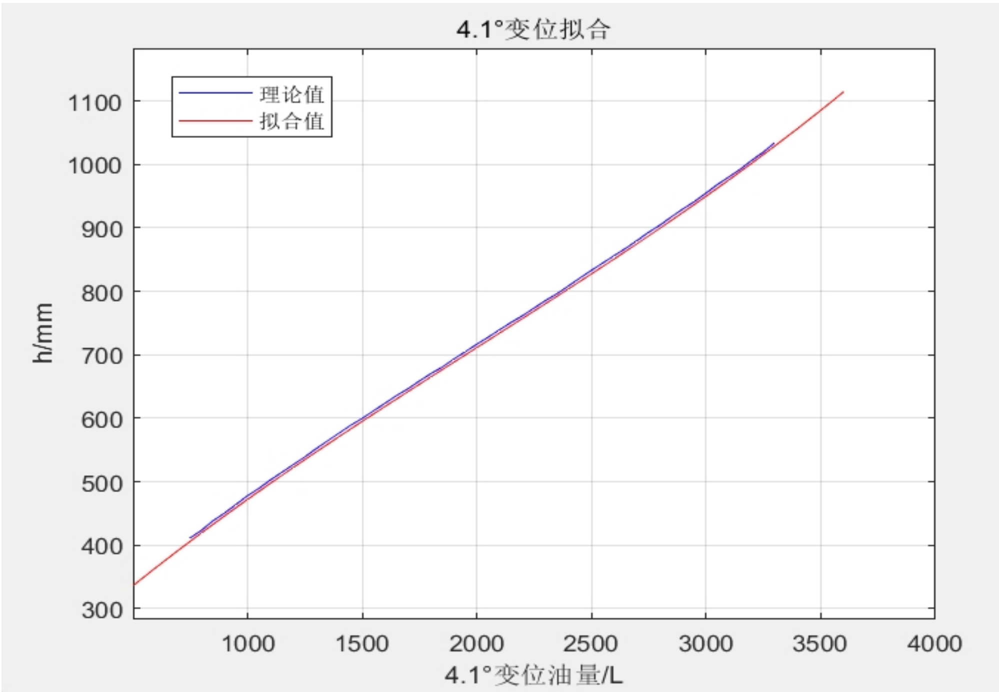
同时在 IDLE 运行框中得到了最优角度$\alpha = 2.8^\circ$ ， $\beta = 4.1^\circ$
Matlab 问题一第三区域讨论及绘图源码
在附件 mat 文档中使用 load A2010.mat 引入必要执行的变量参数工作区应如下：



%其中 num 命名的是自变量变化油量，var 命名的是因变量 h/mm
%01 为问题一无变位，02 为问题一倾斜变位，03 为问题二

```
clc,load A2010.mat
plot(var02,num02,'blue')
hold on
s=polyfit(var02,num02,3);
x1=700:100:3400;
y=s(1)*x1.^3+s(2)*x1.^2+s(3)*x1+s(4)-5;
plot(x1,y,'r')
xlabel('4.1°变位油量/L')
ylabel('h/mm')
legend('理论值','拟合值')
title('4.1°变位拟合')
    grid on
```

结果如图所示：




```
clc,load A2010.mat
```

```
plot(var03,num03)
hold on
grid on
plot(vvar03,nnum03,'*')
xlabel('变化油量/L')
ylabel('h/mm')
title('变位识别拟合图')
```

结果如下图所示：