
太阳影子定位系统

摘 要

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面,本文通过分析视频中物体的太阳影子变化,基于视频拍摄的地点和日期的太阳影子的约束关系建立了太阳影子定位系统。

针对问题一,要求讨论指定地理位置和日期的直杆影长的变化问题,本文建立了影长关于经纬度、杆长、年天数、时间的**影长模型** $L(\alpha, N, t, e, h)$,得到了影长关于时间的变化为先减小后增大,并在正午 12 点达到最小值;影长关于日数的变化为先减小后增大,夏季影长最短,冬季影长最长;影长关于纬度的变化随纬度的变化呈正相关。

针对问题二,要求讨论日期时角已知而地理位置未知变化问题,可转化为已知年天数和时间对杆长和经纬度的**参数反演**问题。本文利用**最小二乘法**建立目标函数通过**单目标规划**进行参数反解,同时为了符合现实情况引入了**0/1 标志位 P** ,得到了 3 组测试数据,并根据是否位于大陆且天气晴朗的标志位 P ,最后筛选出海南省临高县做出最可信点。

针对问题三,选用年天数作为反演变量将所测时段内地球上任一点太阳方位角的变化值与实际影子方向角的变化值之差的绝对值之和最小为**目标函数**,约束条件为杆长、经度、纬度和日数范围,利用循环搜索法分别得到可能的杆长、经纬度和日期,分析结果模型的参数精确度较高。

针对问题四,利用 *MATLAB* 和 *PS* 软件以 3 分钟为步长,将视频中相对像素直杆影子的顶点坐标转换为实际顶点坐标,经过**像素采集**读取影长影长通过计算机图像处理相关的透视和投影变化的知识进行分析。并利用日期已知和未知的情况,将问题四的求解分别转化为问题二、三,利用搜索算法得到视频中可能的直杆长度、所处的经纬度及拍摄日期。

关键词: 太阳高度角 影长模型 最小二乘法 单目标规划 像素采集

一、问题重述

1.1 问题背景

如何确定视频的拍摄地点和拍摄日期是视频数据分析的重要方面，太阳影子定位技术就是通过分析视频中物体的太阳影子变化，确定视频拍摄的地点和日期的一种方法。

太阳影子定位技术通过分析视频中太阳照射下物体的影子变化，可以确定物体拍摄所处的时间和地点。技术通过得到在不同时刻太阳照射情况下，关于太阳高度角的变化角度能确定物体所处的时间和地点。该技术不仅贴近生活，分析并建立此类问题的模型具有十分重要的意义。

1.2 问题提出

(1) 建立影子长度变化的数学模型，分析影子长度关于各个参数的变化规律，并应用你们建立的模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

(2) 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点。将你们的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点。

(3) 根据某固定直杆在水平地面上的太阳影子顶点坐标数据，建立数学模型确定直杆所处的地点和日期。将你们的模型分别应用于附件 2 和附件 3 的影子顶点坐标数据，给出若干个可能的地点与日期。

(4) 附件 4 为一根直杆在太阳下的影子变化的视频，并且已通过某种方式估计出直杆的高度为 2 米。请建立确定视频拍摄地点的数学模型，并应用你们的模型给出若干个可能的拍摄地点。

二、模型假设

1. 假设研究过程中，全年保持天气晴朗即影长不受天气影响。
2. 假设海拔对影子长度的影响可忽略。
3. 假设忽略当天时间内地区相对经纬度的改变。
4. 假设附件数据真实可靠。
5. 假设太阳为平行光。

三、符号说明

符号	说明
h	直杆影长
L	影子的长度
θ	太阳高度角
β	太阳赤纬角
α	纬度
e	经度
ω	时角
N	年天数
t	北京时间

四、问题分析

4.1 问题一的分析

问题一要求建立关于影子长度变化的数学模型,通过随时间变化的太阳高度角的变化数据,建立线性回归模型,能够在给定经纬度的情况下,得到在不同时刻的太阳照射下影子的长度变化。在得到数据的前提下,运用 *Matlab* 软件作为辅助工具,绘出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场(北纬 39 度 54 分 26 秒,东经 116 度 23 分 29 秒)3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

4.2 问题二的分析

问题二中要求我们建立适当的模型根据附件 1 中的一段以 3 分钟为间隔的时间段内太阳影子的顶点坐标以及拍摄日期的原始数据进行合理的参数反解确定拍摄时直杆的地点即经纬度坐标;根据我们上述模型一可知,太阳高度角是关于杆长、经纬度、年天数、时间的一个多元函数。因此,本题可以利用已知年天数和时间进行最小二乘回归对杆长和经纬度参数反解。

4.3 问题三的分析

问题三相对于问题二而言,直杆影长的拍摄日期也是未知的。同样将其视为一个多目标优化问题,确定关于影子长度、影子方向的变化角度为另一目标函数,使每个地点的影子长度、影子方向变化角度与实际测量值间的累计绝对差值达到最小,可通过循环搜索算法来实现,第一次搜索出可能的拍摄地点和日期的大范

围，第二次搜索减小经纬度、杆长、日期的搜索范围以及步长（提高精度），逐步减小搜索范围找到最优解。

4.4 问题四的分析

视频中的直杆影子变化只是平面下的图像，它与实际空间中物体的位置等有很大不同。要想解决这样的难题，要考虑运用计算机图像处理中透视和投影的相关知识进行分析。难点在于如何将视频图像中直杆影子的顶点坐标转化为实际的顶点坐标，即透视与投影知识的灵活运用。首先，需要对题目中所给附件视频进行处理。每隔 3 分钟时间取出视频中直杆影子的顶点坐标，用来对其进行转化。所以仍考虑建立优化模型，通过多次搜索来减小搜索范围，逐步限制条件，进而找到视频拍摄的可能地点和日期。

五、模型的建立及求解

5.1 问题一模型的建立和求解

5.1.1 影长模型的建立

问题一要求建立影子长度变化的数学模型，同时根据数学模型分析影子长度关于各个参数的变化规律。基于上文假设在同一天忽略公转的前提下，建立关于影长变化的数学模型，考虑任一时刻直杆影长关系如下：

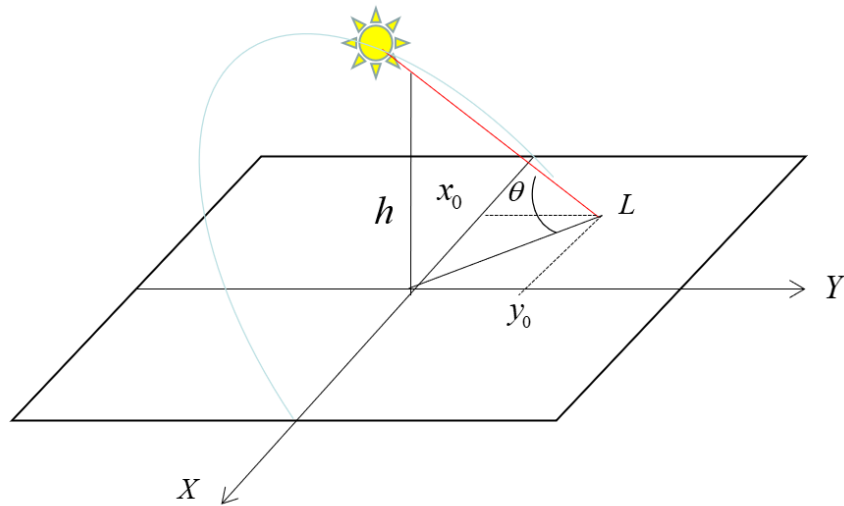


图 1：直杆和影长的关系示意图

根据图 1 所示位置关系，可以得到当直杆垂直地面时，在任一时刻直杆长度和影子长度存在如下几何关系 $L(h, \theta)$ ：

$$\tan \theta = \frac{h}{L} \quad (1)$$

其中， h 表示直杆影长， L 表示直杆杆长， θ 表示太阳高度角。

基于此，只需要能够定量表示太阳高度角 θ 就能够通过上文建立的 $L(h, \theta)$ 方程进行影长求解，从而给出对应直杆对应的影长的变化规律。考虑到计算太阳高度角 θ 的估算方式很多，选择合适的估算模型则尤为重要。

给出太阳高度角的估算方式选择流程图如下：

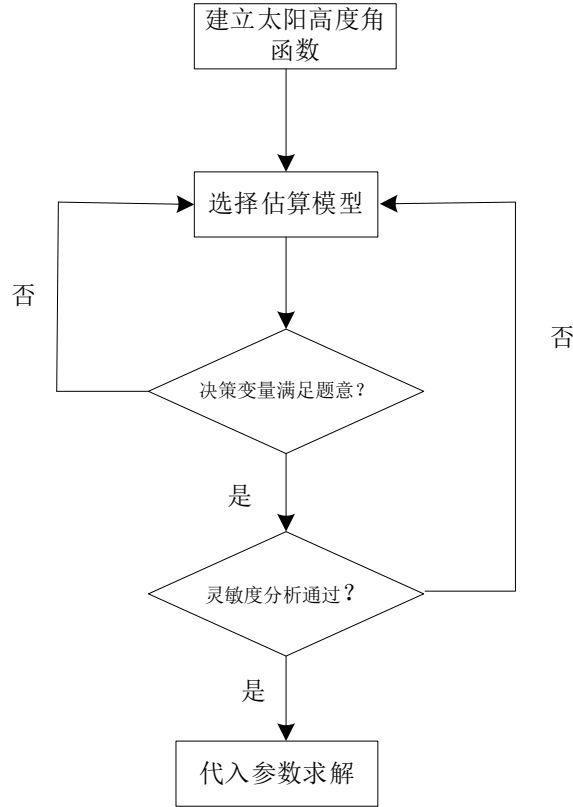


图 2：太阳高度角决策变量选择流程图

根据图 2 流程图以及题目要求，本文选取的决策变量至少包含经度、纬度、时间及年天数，选取决策变量通过灵敏度分析后即可更新影长模型 $L(\theta, h)$ 。

5.1.2 确定太阳高度角的估算

基于上文，本文首先需要确定太阳高度角的估算方式。太阳高度角是指某地的太阳光线与当地地平面的所交的最小线面角，在同一天不同时间段内，以及不同的日期、不同经纬度下，都会对太阳高度角造成影响。本文给出任一时刻，任一空间位置太阳高度角的数学模型如下：

$$\sin \theta = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \omega \quad (2)$$

其中 α 是太阳直射地理纬度； β 是当天的太阳赤纬角，即地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角， ω 是对应时刻的时角。

根据上文，本文可以进行影长模型优化如下：

$$L(\alpha, \beta, \omega, h) = \begin{cases} \tan \theta = \frac{h}{L} \\ \sin \theta = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \omega \end{cases}$$

为了进一步使得影长模型符合题目要求，下文对其中涉及到的决策变量进行再次等价替换。

(a) 太阳赤纬角 β 的等效替换

赤纬角又称太阳赤纬，是地球赤道平面与太阳和地球中心的连线之间的夹角。太阳赤纬角是由于地球绕太阳公转而产生的，同时其以天数为自变量以 365 天为一周期进行规律性变化，给出数学表达式如下：

$$\beta = -23.44^\circ \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (N+10)\right) \quad (3)$$

其中， N 为年天数即一年中的第几天，如 1 月 1 号时 $N=1$ ，2 月 1 号时 $N=32$ 依此类推，根据上式可以得到转换模型 $\beta(N)$ 的表达式。

(b) 时角 ω 的等效替换

时角被定义为该天体的赤经与当地的恒星时的差值。时角由子午线确定，遵循的规则是在子午线的东边则为负时角，在子午线的西边则为正时角。对于任一天的时角满足关系式如下：

$$\omega = 15^\circ \times (t^1 - 12) \quad (4)$$

其中， t^1 为当地时间数以 24 h 制计算。由于不同经度的时角不一样，位于不同地点的直杆也自然处于不同的时区，为了得到其在不同地点对应的时角，以北京时间 t 为标准时间给出关系如下：

$$t^1 = t - 8 + \frac{e}{15^\circ} \quad (5)$$

结论两式可得时角在任意点表达式为：

$$\omega = 15 \times \left(\frac{e-120}{15} + t - 12 \right) \quad (6)$$

其中， e 为当地经度， t 为标准北京时间，根据上式可以得到时角转化模型 $\omega(t, e)$ 的表达式，也即本文可以对任一地点任一时角的时角通过建立以北京时角为基准的转化模型。

其中两者在天体示意图如下所示：

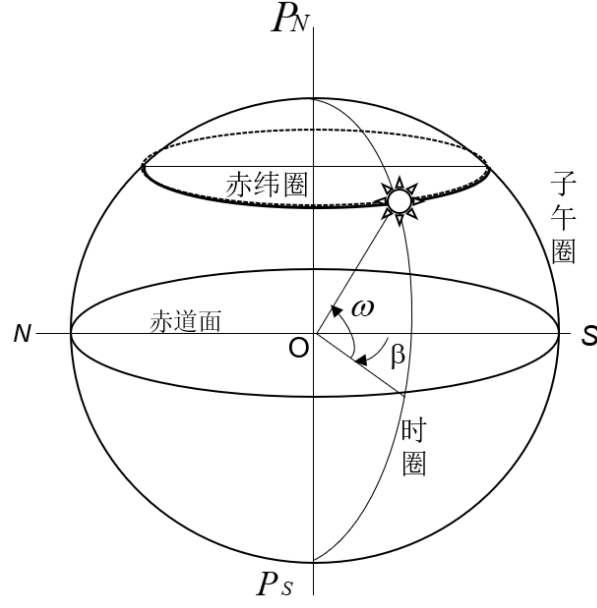


图 3：时角和太阳赤纬角示意图

(c) 模型整理

综上所述，本文给出了地理太阳赤纬角 β 以及当地时角 ω 的转化模型，再结合上文给出的影长优化模型 $L(\alpha, \beta, \omega, h)$ ，两者进行整合对本文影长模型做出进一步的优化，具体方案如下：

- (1) 太阳赤纬角 β 可以由日期即年天数 N 表示。
- (2) 地方时角 ω 可以由标准北京时间 t_o 和经度 e 的表示。
- (3) 优化模型 $L(\alpha, \beta, \omega, h)$ 与 $\beta(N)$ 、 $\omega(t, e)$ 联立得到最终影长模型。

基于上文，可以将先前模型中的太阳赤纬角 β 和地方时角 ω ，通过 $\beta(N)$ 和 $\omega(t, e)$ 进行等效替换可以得到最终模型如下：

$$L(\alpha, N, t, e, h) = \begin{cases} L(\alpha, \beta, \omega, h) = \begin{cases} \tan \theta = \frac{h}{L} \\ \sin \theta = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \omega \end{cases} \\ \beta = -23.44^\circ \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (N+10)\right) \\ \omega = 15 \times \left(\frac{e-120}{15} + t - 12\right) \end{cases} \quad (7)$$

其中各参数取值如下：

$$s.t. \begin{cases} N \in [1, 365] \cup Z \\ t \in (0, 24] \\ \alpha \in [-90^\circ, 90^\circ] \\ e \in [-180^\circ, 180^\circ] \\ h \in (0, 10] \end{cases}$$

5.1.3 探究各决策变量影响

基于上文，我们建立了最终的关于影子长度的多元函数模型 $L(\alpha, N, t, e, h)$ ，为了方便探究变量对影长结果的影响，本文做出规定非改变量取值同问题一数据也即给出参数表如下：

表 1：非改变量取值表

变量名	取值
经纬度	(3954'26"N, 11623'29"E)
太阳赤纬角	-12.017
年天数	298
杆长	3
时间	(6h, 18h)

(a) 杆长对影长的影响

对于上文建立的数学模型，以杆长为自变量其余变量的取值如表 1 所示，绘制出杆长单独影响影长的趋势图如下：

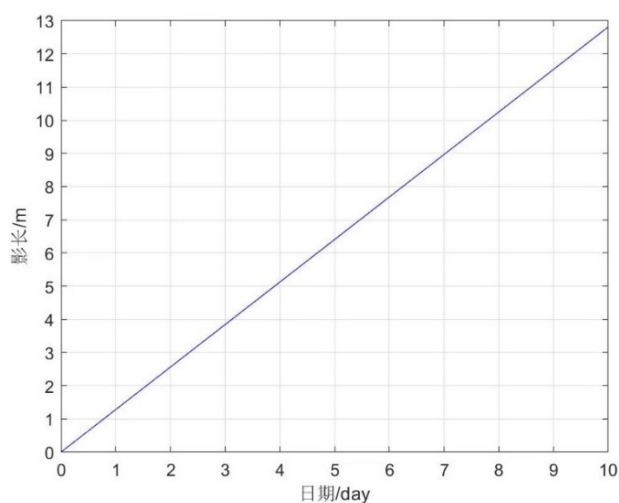


图 4：杆长对影长的影响分析

从上图中可以得出，杆长对影长的影响大致为过原点的线性关系，也即两者的长度成比例变化。

(b) 经度对影长的影响

对于上文建立的数学模型，以经度为自变量其余变量的取值如表 1 所示，绘制出经度单独影响影长的趋势图如下：

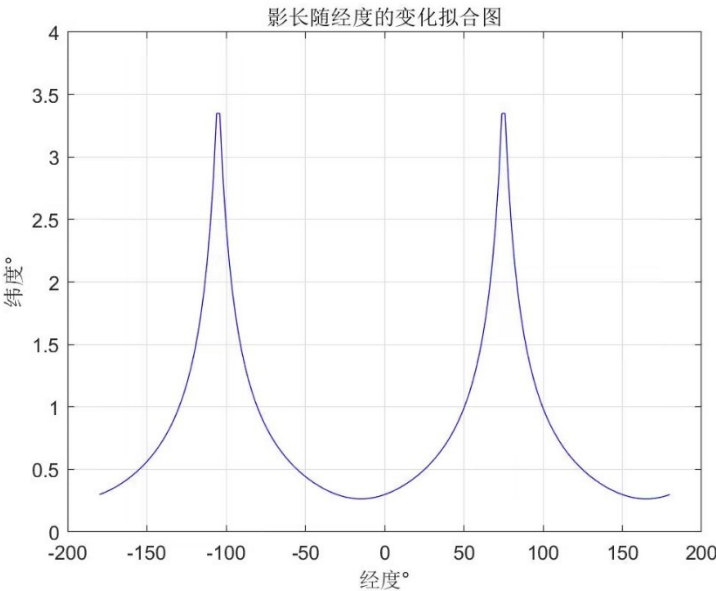


图 5：经度对影长的影响分析

从上图可以看出，在问题一参数假设的前提下，影长在绝对经度位于 100 左右达到最大值，在绝对 150 到 100 以及 0 到 50 呈上升趋势，其余呈下降趋势，总体呈现出一个对称图形。

(c) 纬度对影长的影响

对于上文建立的数学模型，以纬度为自变量其余变量的取值如表 1 所示，绘制出纬度单独影响影长的趋势图如下：

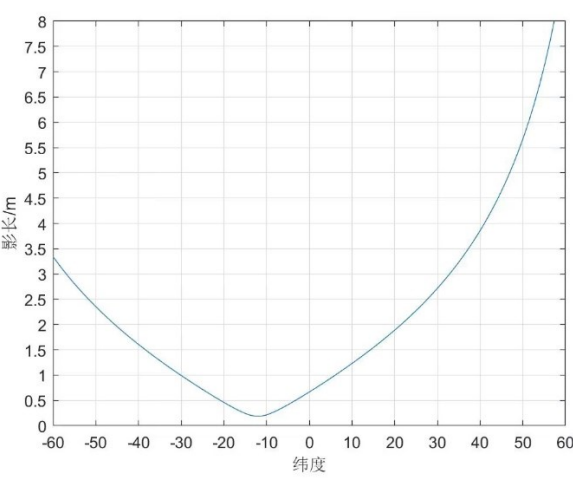


图 6：纬度对影长的影响分析

从上图可以看出，在问题一参数假设的前提下，影长大致随着纬度绝对值的增大而变大也即大致与纬度的绝对值呈正相关。

(d) 年天数对影长的影响

对于上文建立的数学模型，以年天数为自变量其余变量的取值如表 1 所示，绘制出年天数单独影响影长的趋势图如下：

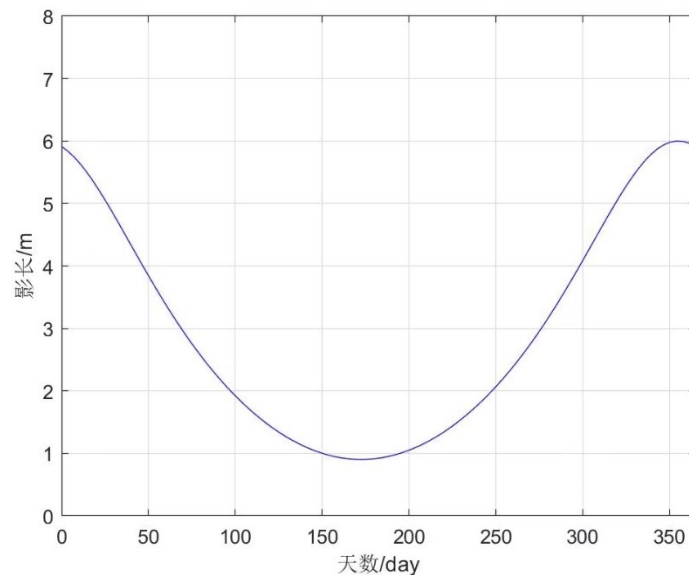


图 7：年天数对影长的影响分析

从上图可以看出，在问题一参数假设的前提下，影长大致随着年天数距离 170 左右的差值增大而变大，整体呈二次曲线。

(e) 时间对影长的影响

对于上文建立的数学模型，以时间为自变量其余变量的取值如表 1 所示，绘制出时间单独影响影长的趋势图如下：

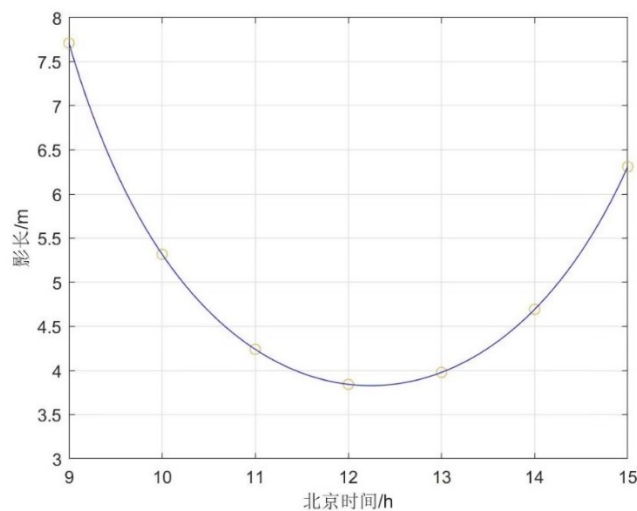


图 8：时间对影长的影响分析

根据上图，在 2015 年 10 月 22 日，以北京时间为自变量可以发现当地 3m 直杆的影长变化趋势大致为一条二次曲线，9:00 达到当日的最大值，在 12:00 处于当日的最小值。

5.1.4 北京太阳影长变化规律

题目一中要求建立了影子长度变化的数学模型，并应用建立的影长模型画出 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00-15:00 之间天安门广场（北纬 39 度 54 分 26 秒，东经 116 度 23 分 29 秒）3 米高的直杆的太阳影子长度的变化曲线。

根据上文建立的模型首先需要对题目给出数据进行决策变量参数提取以方便，对北京太阳影长的变化规律进行探究。提取变量时进行必要的单位转换后可以得到所需参数如下表 2：

表 2：问题一参数取值表

变量名	取值
经纬度	$(39^{\circ}54'N, 116^{\circ}23'E)$
太阳赤纬角	-12.1017
年天数	295
杆长	3
时角	$15 \times (t - 12.2406)$
时间	$(9h, 15h)$

将时间作为自变量代入，对一元函数 $L(39^{\circ}54', 295, t, 116^{\circ}23', 3)$ 进行逐值遍历后，对于数据点通过 *Plot* 绘图进行可视化处理，并给出各个整时点的数据进行规律探索如下表 3 所示：

表 3：北京整点时间影长

北京时间/h	直杆影长/m
9:00	7.7105
10:00	5.3176
11:00	4.2401
12:00	3.8434
13:00	3.9796
14:00	4.6931
15:00	6.3099

根据上表 3 可知，问题一中的影子长度在 9:00-15:00 时间段内，早上九点的影子最长，后随时间呈下降趋势于 13:00 左右开始反升。为了进一步确定影长变化规律，绘制出影长变化趋势图如下：

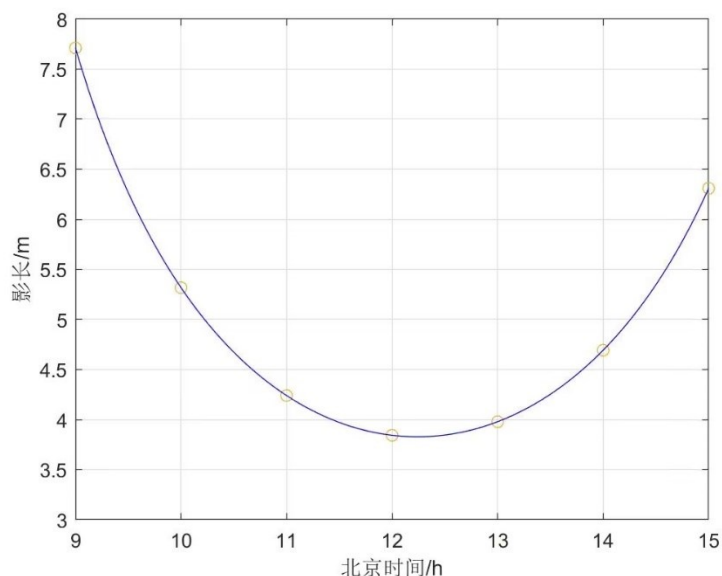


图 9：问题一影长随时间变化规律

根据上图，在 2015 年 10 月 22 日，以北京时间为自变量可以发现当地 3m 直杆的影长变化趋势大致为一条二次曲线，9:00 达到当日的最大值，在 12:00 处于当日的最小值。

为了验证模型合理性，从地理角度对变化趋势做出解释如下：

(1) 当太阳高度角到达被光照物体所处经度时，太阳高度角达到最大 90 度，此时的太阳高度角被称为正午太阳高度角，影长达到一天最短，甚至为 0。对应北京时间则为正午十二点。

(2) 从日出时分开始，太阳逐渐从东南方升起，被光照物体的影子指向西北方，并且呈现出最长的状态，此时太阳的高度角为 0。随着时间从早上到中午的移动，太阳高度角逐渐变大，而影子长度开始变短。下午到晚上，太阳逐渐落下，太阳高度角变小，影子长度则是开始变长。

5.2 问题二模型的建立和求解

5.2.1 附件数据预处理

问题二要求将本文的模型应用于附件 1 的影子顶点坐标数据，并给出若干个可能的地点。基于上文建立任一空间位置下，任一时刻的影长模型，通过附件 1 可以得到模型参数有 $N=108$, $t \in [14.70, 15.70]$ 。

未定参数分别有经纬度、杆长和影长，其中影长有如下关系：

$$l^2 = x^2 + y^2 \quad (l > 0) \quad (8)$$

对附件 1 数据进行处理得到影长如下表所示：

表 4：附件 1 影长预处理结果

北京时间/h	影长/m	北京时间/h	影长/m	北京时间/h	影长/m
14:42	1.1496	14:45	1.1821	14:48	1.2153
14:51	1.2490	14:54	1.2831	14:57	1.3181
15:00	1.3533	15:03	1.3893	15:06	1.4261
15:09	1.4633	15:12	1.5014	15:15	1.5402
15:18	1.5798	15:21	1.6201	15:24	1.6612
15:27	1.7032	15:30	1.7462	15:33	1.7900
15:36	1.8350	15:39	1.8808	15:42	1.9279

根据上表本文完成了对附件数据到影长数据的转换，并基于此建立最小二乘模型完成对问题二要求的经纬度参数反演。

5.2.2 最小二乘模型的建立

问题二要求应用建立的数学模型对附件 1 进行分析，确立直杆可能所处的若干地点也即给出可能的经纬度坐标。基于上文，通过附件 1 获得了影长数据再根据影长数据对经纬度和杆长进行参数反演流程如下：

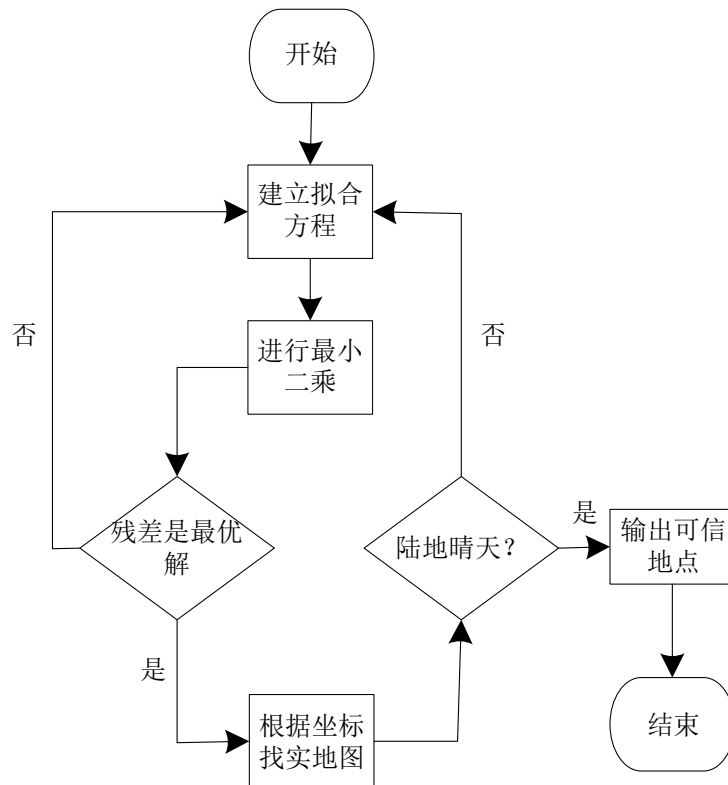


图 10：问题二参数反演流程图

不妨设附件 1 中的 21 组数据分别为 $(l_1, t_1), (l_2, t_2), \dots, (l_{21}, t_{21})$, 则根据上文建立的影长函数关系模型可以得到如下关系:

$$L_i(\alpha, N, t, e, h) = \begin{cases} \tan \theta = \frac{h}{L} \\ \sin \theta = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \alpha \\ \beta = -23.44^\circ \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (N+10)\right) \\ \omega = 15 \times \left(\frac{e-120}{15} + t - 12\right) \\ \alpha = \alpha_i \\ e = e_i \\ h = h_i \end{cases} \quad (9)$$

其中各参数取值约束如下:

$$s.t. \begin{cases} \alpha \in [-90^\circ, 90^\circ] \\ e \in [-180^\circ, 180^\circ] \\ h \in (0, 10] \\ N = 108 \end{cases}$$

根据上文给出最小二乘模型, 通过对已知模型进行数据计算得到的理论值与附件的真实值进行做差求和, 为了确保正负误差不会抵消因此使用误差的平方即残差作为判断依据, 进而求解最小残差和。

于本文给出问题二的残差定义如下:

$$\sigma_i = L_i - L_{fact}$$

基于此给出本文的规划目标:

$$\min \sum_{i=1}^{21} (\sigma_i)^2 \quad (10)$$

5.2.3 单目标规划求解最小二乘模型

(a) 目标函数的建立

根据上文, 已经确立了反演参数的规划目标, 其中通过遍历经度、纬度和杆长的合法区间数值作为一组合法解求得残差, 若残差越小则说明这组解越有可能为附件数据所测地点也即有目标函数:

$$\min \sum_{i=1}^{21} (L_i - L_{fact})^2$$

(b) 变量约束条件

在使用单目标规划求解最小二乘的同时，也需要考虑模型中各个变量的在题目限制条件以及取值范围。在本文中除参数取值合理性范围外，还给出了判断反演解合理性的 0/1 标志位 P ，综上给出各变量约束条件如下：

① 反演的地方经纬度：

根据上文建立的数学模型可知，在进行单目标规划时选用的地方经度和地方纬度都需要满足合理的取值范围如下：

$$\begin{cases} \alpha \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ e \in (-180^\circ, 180^\circ) \end{cases}$$

② 反演的直杆长度：

根据上文建立的数学模型可知，为了确保数据贴近显示，本文假设直杆的长度属于 $(0-10]m$ 即杆长取值范围如下：

$$h \in (0, 10] / m$$

③ 合理性 0/1 标志位：

根据题目的特殊性，因此本文引入合理性 0/1 标志位 P ，对于繁衍地点处于雨天或者处于海面的不合理安排进行剔除，因此取值范围如下：

$$P = \begin{cases} 0, \text{位于海面 or 雨天} \\ 1, \text{地点合理} \end{cases}$$

综上本文给出了以最小残差和为目标函数的规划模型如下：

$$\begin{aligned} & \min \sum_{i=1}^{21} (L_i - L_{fact})^2 \\ & s.t. \begin{cases} \begin{cases} \alpha \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ e \in (-180^\circ, 180^\circ) \end{cases} \\ h \in (0, 10] / m \\ N = 108 \\ P = \begin{cases} 0, \text{位于海面 or 雨天} \\ 1, \text{地点合理} \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

给出算法流程伪代码如下：

$$\begin{aligned} \min F &= \sum_{u=1}^{21} \left(L(u) - L_{fact}(u) \right)^2 \\ \text{s.t.} \\ -90 &\leq \alpha \leq 90, \\ -180 &\leq e \leq 180, \\ 0 &< h \leq 10, \\ i &\leftarrow \min(\alpha) \text{ to } \max(\alpha) \text{ step } 0.1, \\ j &\leftarrow \min(e) \text{ to } \max(e) \text{ step } 0.1, \\ k &\leftarrow \min(h) \text{ to } \max(h) \text{ step } 0.01, \end{aligned}$$

因为问题二中要求给出若干各地点，因此不能直接使用最小二乘获得最优解，定义 *ans* 数组，将每次得到的残差和及系数解作为一行向量进行保存操作，最后对残差和进行排序选用最小的三组作为合理解有：

修改后的求解伪代码为：

```
% ans = [];
% res = [];
% minn = inf;
% for i ← min(α) : 0.1 : max(α)
%     for j ← min(β) : 0.1 : max(β)
%         for k ← min(h) : 0.01 : max(h)
%             for u = linspace(14.7,15.7,21);
%                 F = ∑u=121 (L(u) - Lfact(u))2
%                 ans = [i j k F; ans]
%                 if(F > minn)
%                     minn = min(F,minn);
%                 res = [i j k F]
%             sort(ans,cmp)
```

其中 *ans* 数组保留全解，*res* 数组保留最优解，再通过获得的经纬度通过 *earth* 地球进行全球定位获得该处经纬度的坐标后进行 0/1 标志位 *P* 判断，得到最优的三组解如下表所示：

表 5: 问题二求解结果

杆长	经纬度	地点	残差和
1.85	(19.7N,110.2E)	海南省迈登县	$2.0794e^{-7}$
0.72	(1.59N,110.2E)	加丁山国家公园	$1.2321e^{-4}$
2.01	(19.8N,108.9E)	海南省临高县	$1.4524e^{-4}$

其中 0/1 标志位 P 的判断具体方案如下:

判断一 进行地理位置合法判断若为海面则不通过。

判断二 当日天气是否为晴天, 若为阴天或雨天则不通过。

当且仅当两者均通过时, 该反演地点为合理解也即:

$$P = \min\{flag1, flag2\} \quad (11)$$

5.2.4 模型检验

为了进一步验证本文模型的合理性, 将求解得到的反演参数代入模型并于真实值进行比较得到对比图如下:

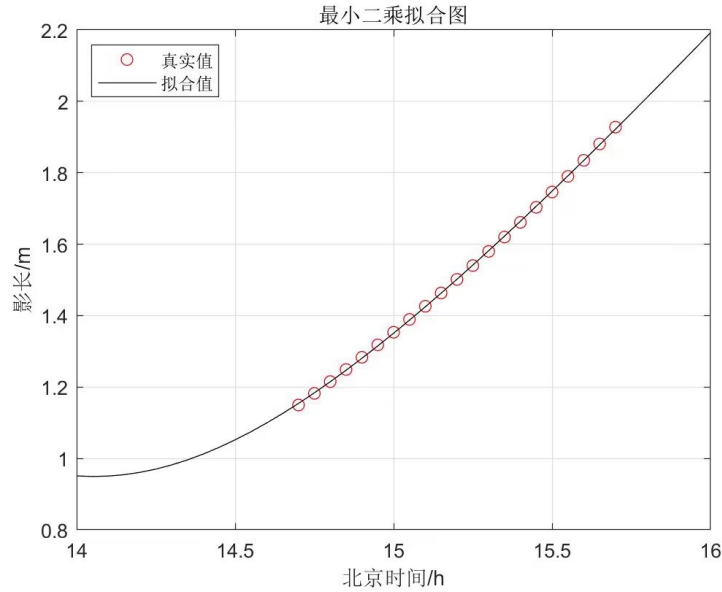


图 11: 反演结果对比图

通过图 11 不难看出, 通过本文模型反演得到的参数代入模型后, 其理论值与附件给出的真实值高度重合, 因此可以认为本文建立的模型能够很大程度上描述实际影长变化规律。

5.3 问题三模型的建立和求解

问题三同问题二的区别仅在附件 2、附件 3 中未给出年天数 N , 因此只需要在问题二原来模型的基础上增加年天数 N 的参数反演既可以获得问题三所需要的地点和日期, 步骤同问题二。

5.3.1 附件数据预处理

问题三要求将本文的模型应用于附件 2、3 的影子顶点坐标数据，并给出若干个可能的地点。基于上文建立了任一空间位置下，任一时刻的影长模型，通过附件 2、3 可以得到模型参数有 $t \in [14.70, 15.70]$ 。

未定参数有经纬度、杆长、年天数和影长，其中影长有如下关系：

$$l^2 = x^2 + y^2 \quad (l > 0)$$

对附件 2、3 数据进行处理得到影长如下表所示：

表 6：附件 2 影长预处理结果

北京时间/h	影长/m	北京时间/h	影长/m	北京时间/h	影长/m
14:42	1.1496	14:45	1.1821	14:48	1.2153
14:51	1.2490	14:54	1.2831	14:57	1.3181
15:00	1.3533	15:03	1.3893	15:06	1.4261
15:09	1.4633	15:12	1.5014	15:15	1.5402
15:18	1.5798	15:21	1.6201	15:24	1.6612
15:27	1.7032	15:30	1.7462	15:33	1.7900
15:36	1.8350	15:39	1.8808	15:42	1.9279

表 7：附件 3 影长预处理结果

北京时间/h	影长/m	北京时间/h	影长/m	北京时间/h	影长/m
14:42	1.1496	14:45	1.1821	14:48	1.2153
14:51	1.2490	14:54	1.2831	14:57	1.3181
15:00	1.3533	15:03	1.3893	15:06	1.4261
15:09	1.4633	15:12	1.5014	15:15	1.5402
15:18	1.5798	15:21	1.6201	15:24	1.6612
15:27	1.7032	15:30	1.7462	15:33	1.7900
15:36	1.8350	15:39	1.8808	15:42	1.9279

根据上表本文完成了对附件数据到影长数据的转换，并基于此建立最小二乘模型完成对问题二要求的经纬度和年天数参数反演。

5.3.2 问题三模型的建立

同理在问题二的基础上增加年天数 N 建立模型如下：

不妨设附件 2、3 中的 21 组数据分别为 $(l_1, t_1), (l_2, t_2), \dots, (l_{21}, t_{21})$, 则根据上文建立的影长函数关系模型可以得到如下关系:

$$L_i(\alpha, N, t, e, h) = \begin{cases} \tan \theta = \frac{h}{L} \\ \sin \theta = \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \cos \omega \\ \beta = -23.44^\circ \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (N+10)\right) \\ \omega = 15 \times \left(\frac{e-120}{15} + t - 12\right) \\ \alpha = \alpha_i, e = e_i, h = h_i \\ N = N_i \end{cases} \quad (12)$$

其中各参数取值约束如下:

$$s.t. \begin{cases} \alpha \in [-90^\circ, 90^\circ] \\ e \in [-180^\circ, 180^\circ] \\ h \in (0, 10] \\ N \in [1, 365] \end{cases}$$

根据上文给出最小二乘模型, 通过对已知模型进行数据计算得到的理论值与附件的真实值进行做差求和, 为了确保正负误差不会抵消因此使用误差的平方即残差作为判断依据, 进而求解最小残差和。

于本文给出问题三的残差定义如下:

$$\sigma_i = L_i - L_{fact}$$

基于此给出本文的规划目标:

$$\min \sum_{i=1}^{21} (\sigma_i)^2 \quad (13)$$

5.3.3 问题三模型的求解

问题三在问题二的基础上只增加了年天数 N , 并且为一个待求解的常数, 求解方法同问题二如出一辙。因此建模过程不再赘述, 参考问题二给出问题三的规划模型如下:

综上本文给出了问题三以最小残差和为目标函数的规划模型如下：

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=1}^{21} (L_i - L_{fact})^2 \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \alpha \in (-90^\circ, 90^\circ) \\ e \in (-180^\circ, 180^\circ) \\ h \in (0, 10] / m \\ P = \begin{cases} 0, \text{位于海面 or 雨天} \\ 1, \text{地点合理} \end{cases} \\ N \in (0, 365] \cup Z \end{cases} \end{aligned}$$

同理给出算法伪代码如下：

$$\begin{aligned} \min F &= \sum_{u=1}^{21} (L(u) - L_{fact}(u))^2 \\ \text{s.t.} & \\ & -90 \leq \alpha \leq 90, \\ & -180 \leq e \leq 180, \\ & 0 < h \leq 10, \\ & 0 < N \leq 365 \\ & i \leftarrow \min(\alpha) \text{ to } \max(\alpha) \text{ step } 0.1, \\ & j \leftarrow \min(e) \text{ to } \max(e) \text{ step } 0.1, \\ & k \leftarrow \min(h) \text{ to } \max(h) \text{ step } 0.01, \\ & N \leftarrow \min(N) \text{ to } \max(N) \text{ step } 1 \end{aligned}$$

问题三中同样要求给出若干个地点和日期，同理对传统的最小二乘做出修改使用 `ans` 数组记录全部解及其残差，使用 `res` 数组记录模型的最优解。改进后算法伪代码如下：

```
% ans = [];
% res = [];
% minn = inf;
% for i ← min(α) : 0.1 : max(α)
%     for j ← min(β) : 0.1 : max(β)
%         for k ← min(h) : 0.01 : max(h)
%             for N ← min(N) : 0.01 : max(N)
%                 for u = linspace(14.7,15.7,21);
%                     F = ∑u=121 (L(u) - Lfact(u))2
%                     ans = [i j k F; ans]
```

```

%          if(F > minn)
%          minn = min(F,minn);
%          res = [i j k F]
%  sort(ans,cmp)

```

同样经过 0/1 标志位检验给出结果如下表所示：

表 8：问题三求解结果

杆长	经纬度	年天数	残差和
----	-----	-----	-----

5.3.4 模型检验

5.4 问题四模型的建立和求解

问题四中通过给出视频的方式，以及告知视频中的杆长为 $2m$ ，同样根据数据进行对可能的拍摄地点进行推测。相较于问题二、三，需要自行提取出视频中的影子长度数据，之后处理方式不做改变。

5.4.1 像素采集

如果采集后的影长数据格式同问题二、三，那么就可以直接应用上文模型，因此本文首先通过 *Matlab* 以 3 分钟为步进长度提取出附件视频中的图片，再通过采集像素得到直杆的像素点 H_0 和影子的像素点 H_1 如下表所示：

表 9：视频像素提取

时间/h	影子长 h_0	杆子长 h_0
8.90	28.42	23.88
8.95	28.16	23.88
...
...
9.50	22.49	23.88
9.55	22.01	23.88

得到视频中的像素数据后，根据比例变换即可获得实际影长，后根据问题二、问题三步骤求解即可获得反演地点，其中比例变换为：

$$\frac{H_0}{H_1} = \frac{h_0}{h_1} \quad (14)$$

求解可得结果如下表所示：

表 10：问题四求解结果		
经纬度	地点	残差和

六、模型的评价及推广

6.1 模型的优点

1.问题一中所建立的影子长度变化模型，选取了直杆所处的经纬度、日期、时刻及杆长等因素作为影长的决策变量，全面地分析影子长度变化的规律。

2.问题二运用最小二乘法所建立的单目标模型，其实质为非线性的优化模型，故在求解中选择较为稳定的值，给出了可能的值。

6.2 模型的缺点

模型三中的残差检验系数是人为设定的，不具有科学地说服力。

6.3 模型的改进

由于单因素敏感性分析几个不确定因素同时变动，应考虑进行多因素敏感性分析各个参数对影长影响率的敏感性。由于太阳赤纬角等都为经验公式，故存在一定程度误差，可寻求更优的公式求解，减小误差对结果的影响大小。

6.4 模型的推广

本文所建立的模型不仅适用于于太阳影子定位，还可拓展适用于诸多方面，如多目标优化模型可以广泛用于诸多优化问题，如车间的布局优化、键盘的优化设计、水资源配置的优化等。

参考文献

- [1] 刘力源,吴子月,陈桂欣.太阳影子定位的研究[J].数码世界,2020(03):7.
- [2] 管斌,张静怡,徐伟东,王名词.一种基于最小二乘法的影子定位技术 [J].科技视 界,2016(12):148.
- [3] 沈曙昀,王立,郭三敏,闫旭旭,朱家明.基于几何方法对太阳影子定位的研究[J].河 北北方学院学报(自然科学版),2017,33(01):18-24.
- [4] 张红,康彤.太阳影子定位的模型构建及求解 [J]. 中国传媒大学学报 (自然科学 版),2019,26(06):56-59.
- [5] 于贺军.气象用太阳赤纬和时差计算方法研究[J].气象水文海洋仪器,2006(03):50-53.
- [6] 杨佳宇,李奇,杨小琴,朱芳芳,邓哲.基于 *Matlab* 的数字图像边缘检测研究[J].现代 传输,2022(03):54-56.
- [7] 张红,康彤.太阳影子定位的模型构建及求解 [J]. 中国传媒大学学报 (自然科学版),2019,26(06):56-59.

附录

%%引入问题一条件下的各决策变量取值

a=sin(39.943*pi/180);

b=sin(-12.1017*pi/180);

c=sin(-48.6086*pi/180);

h=3;

%fu=@(alp,N,h,t,gam)h*cos(asin(sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365))))+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))))*cos(asin(sin(pi/180*15*((gam-120)/15+t-12)))))./(sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))))*cos(asin(sin(pi/180*15*((gam-120)/15+t-12)))));

%% 问题一 北京直杆模型求解

clc

%定义问题一条件下的模型函数

y=@(t) h*cos(asin(a*b*cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(t-12.2406))))))./(a*b*cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(t-12.2406)))));

%输出整点时 3m 直杆的影长

y1=y(9)

for i = 10:1:15

y(i)

y1=[y1,y(i)];

end

%绘制对应时间段的影长变化拟合图

t=9:0.1:15;

plot(t,y(t))

hold on

x=9:1:15;

plot(x,y1,'o')

xlabel('北京时间/h')

ylabel('影长/m')

title('影长变化拟合图')

```

grid on
%% 问题一 影长随杆长的规律性变化探究

clc,close all

%讨论直杆杆长 h 对影长的变化影响规律
%利用控制变量法，将太阳高度角固定不变，其数值取问题一所解参数数值，时间取上午 9h
%定义影长关于杆长 h 的模型函数
y = @(h) h*cos(asin(a*b*cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-12.2406))))))./(a*b*cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-12.2406)))));

%绘制一区间为 h \in [0, 10] 的影长随杆长变化拟合图
h=0:0.1:10;
plot(h,y(h),'r')
xlabel('杆长/m')
ylabel('影长/m')
title('影长随杆长的变化拟合图')

grid on
%添加注释表明此为一元线性函数
%添加箭头文本框结果如正文所示

%% 问题一 影长随北京时间变化探究

clc,close all

%讨论北京时间 t 对影长的变化影响规律
%利用控制变量法，其余变量取值不变，其数值取问题一所解参数数值
%定义影长关于北京时间 t 的模型函数
y = @(t) 0.5*cos(asin(a*b*cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(t-12-12.2406))))))./(a*b*cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*(t-12-12.2406)))));

%绘制对应全天的影长随北京时间变化拟合图
t=6:0.1:18;
plot(t,y(t),'r')
ylim([0, 60])
xlabel('北京时间 h')
ylabel('影长/m')
title('影长随北京时间的变化拟合图')

grid on

```

```

%% 问题一 影长随年天数变化探究

clc,close all

%讨论年天数 N 对影长的变化影响规律

%利用控制变量法，其余变量取值不变，其数值取问题一所解参数数值, 时间取上午 9h

%定义影长关于年天数 N 的模型函数

y=@(N)
3*cos(asin(a*(sin((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365))))+cos(asin(a))*cos(asin((s
in((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365))))))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-
12.2406))))))./(a*b+cos(asin(a))*cos(asin((sin((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365
))))))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-12.2406)))));

%绘制一年的内影长随年天数变化拟合图

N=0:1:365;

plot(N,y(N),'r')

xlabel('年天数 N')

ylabel('影长/m')

title('影长随年天数的变化拟合图')

grid on

%clc,close all

%讨论年天数 N 对影长的变化影响规律

%利用控制变量法，其余变量取值不变，其数值取问题一所解参数数值, 时间取上午 9h

%定义影长关于年天数 N 的模型函数

%y=@(N)
3*cos(asin(a*(sin((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365))))+cos(asin(a))*cos(asin((s
in((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365))))))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-
12.2406))))))./(a*b+cos(asin(a))*cos(asin((sin((pi/180)*(23.45*sin(2*pi*(284+N)/365
))))))*cos(asin(sin(pi/180*15*(9-12.2406)))));

%绘制一年的内影长随年天数变化拟合图

%N=0:0.5:365;

%plot(N,y(N),'r')

%xlabel('年天数 N')

%ylabel('影长/m')

%title('影长随年天数的变化拟合图')

%grid on

%% 问题一 影长随纬度的变化探究

```

```

clc,close all

y = @(alp)
3*cos(asin(sin(alp*pi/180)*b+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(b)))*cos(asin(sin(p
i/180*15*(9-
12.2406))))))./(sin(alp*pi/180)*b+cos(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(b))*cos(asin(
sin(pi/180*15*(9-12.2406)))));

alp=-90:1:90;

plot(alp,y(alp),'r')
xlabel('纬度° ')
ylabel('影长/m')
title('影长随纬度的变化拟合图')

grid on

%% 问题一 影长随经度的变化探究

clc,close all

y = @(gam) 0.5*cos(asin(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*((gam-
120)/15+9-12))))))./(a*b+cos(asin(a))*cos(asin(b))*cos(asin(sin(pi/180*15*((gam-
120)/15+9-12)))));

x=-180:2:180;

plot(x,y(x),'r')
xlabel('经度° ')
ylabel('纬度° ')
ylim([0,60])

title('影长随经度的变化拟合图')

grid on

%% 问题二 基于最小二乘法的参数反解

clc,close all

%由题原问题转化为已知年天数和时间求杆长和经纬度的反解问题
%定义满足原始数据的三元函数,代入已知初值
syms t;%定义变量
f=fittype('h*cos(asin(sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+108)/365)))+c
os(asin(sin(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+108)/365)))))
*cos(asin(sin
(pi/180*15*((gam-120)/15+t-
12))))))./(sin(alp*pi/180)*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+108)/365)))+cos(asin(s
i
n(alp*pi/180)))*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+108)/365)))))
*cos(asin(sin

```

```

(pi/180*15*((gam-120)/15+t-
12))))','independent','t','coefficients',{ 'h','alp','gam'});
[cfun,rsquare]=fit(var01,num01,f,'Lower',[0,-90,-180],'Upper',[10,90,180])%输出坐标
及残差
%绘制对比图
x=14:0.05:16;
y3=cfun(x);
plot(var01,num01,'ro',x,y3,'k-')
grid on
xlabel('北京时间/h')
ylabel('影长/m')
legend('真实值','拟合值','Location','northwest')
title('非线性最小二乘拟合图')
%% 问题三 基于嵌套循环的多目标优化模型反解 附件 2
clc,close all
%此问题在第二问的基础上增加了年天数变量，由于最小二乘不能限制整数迭代，因此改用以最
小二乘插值为辅，嵌套循环为主的多目标优化模型
%附件 2
s=polyfit(var03,num03,2);
t=10:0.05:16;
func=s(1)*t.^2+s(2)*t+s(3);
plot(t,func)
hold on
grid on
plot(var03,num03,'o')
legend('拟合值','实际值')
xlabel('时间/h')
ylabel('影长/m')
title('插值拟合图')
% 输出当地经度
% gam=120-15*(3.2)
% 循环嵌套程序见 Python 文档
%% 基于嵌套循环的多目标优化模型反解 附件 3
clc,close all

```

%此问题在第二问的基础上增加了年天数变量，由于最小二乘不能限制整数迭代，因此改用以最小二乘插值为辅，嵌套循环为主的多目标优化模型

%附件 3

```
s=polyfit(var02,num02,2);  
t=12:0.05:16;  
func=s(1)*t.^2+s(2)*t+s(3);
```

```
plot(t,func)
```

```
hold on
```

```
grid on
```

```
plot(var02,num02,'o')
```

```
legend('拟合值','实际值')
```

```
xlabel('时间/h')
```

```
ylabel('影长/m')
```

```
title('插值拟合图')
```

% 输出当地经度

```
% gam=120-15*(0.8)
```

% 循环嵌套程序见 Python 文档

%% 问题四 视频图片提取及灰度图转换（每三分钟提取一张）

```
clc,clear;
```

```
video_file="C:\Users\19595\Desktop\video.avi";
```

```
video=VideoReader(video_file);
```

```
frame_number=floor(27941* video.FrameRate);
```

```
n=video.FrameRate*180;%每隔 3 分钟提取一张图片
```

```
k=1;
```

```
for i=1:n:frame_number
```

```
    image_name=strcat("C:\Users\19595\Desktop\Figure",num2str(k));
```

```
    image_name=strcat(image_name,'.jpg');
```

```
    I=read(video,i);           %读出图片
```

```
    imwrite(I,image_name,'jpg'); %写图片
```

```
    k=k+1;
```

```
    I=[];
```

```

end

%转换成灰度图，依次循环以图 1 为例

RGB = imread('C:\Users\19595\Desktop\Figure\Figure1. jpg');%将图像读入工作区
Y = rgb2gray(RGB);%将图像灰度化
imshow(Y)%显示灰度图像

%% 灰度图转二值图

I = imread('C:\Users\19595\Desktop\Lambda M\2015A\Figure\Figure1. jpg');
th=graythresh(I);
J=im2bw(I, th)
imshow(J)

%%

clear

clc

%第二问方法一

h=1:0.01:3;%设置杆长的搜索范围
alp=-90:0.01:90;%设置搜索的纬度范围
N=0:1:365;%计算该日期下的日数
d=0.62173;K=[];k=0;%当地正午 12 点对应的杆影长度
for i=1:length(h)
    for j=1:length(alp)
        for v=1:length(N)

D=h.*cos(asin(sin(alp*pi/180).*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))+cos(asin(sin(alp*pi/180))).*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))).*cos(asin(sin(pi/180*15*((72-120)/15+t-12))))))./(sin(alp*pi/180).*sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))+cos(asin(sin(alp*pi/180))).*cos(asin(sin(23.45*pi/180*(sin(2*pi*(284+N)/365)))).*cos(asin(sin(pi/180*15*((78-120)/15+t-12))))));

            if abs(d-D)<0.000008

                k=k+1;

                list=[h(i),alp(j),N(v)];

                K{k}=list;list=[];

            else

                continue;


```

```

        end
    end
end
end
%%
clear
clc

L=1:0.01:3;%设置杆长的搜索范围
phi=-20:0.01:30;%设置搜索的纬度范围
N=31+28+31+18;%计算该日期下的日数
delta=asind(0.39795*cosd(0.98563*(N-173)) );%该日下的赤纬角
A=sind(delta);B=cosd(delta);
d=0.4934;K=[];k=0;%当地正午 12 点对应的杆影长度
for i=1:length(L)
    for j=1:length(phi)
        D=L(i)*cotd(asind(A*sind(phi(j))+B*cosd(phi(j))));
        if abs(d-D)<0.000008
            k=k+1;
            list=[L(i),phi(j)];
            K{k}=list;list=[];
        else
            continue;
        end
    end
end
end
end

```