



华中科技大学 2021~2022 学年第二学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)

考试方式：闭卷 考试日期：2022.06.27 考试时长：150 分钟

一、单项选择题(每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上.)

1. 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的待定特解形式可设为【 】.

A. $y^* = ax^2 + bx + c + x(A \sin x + B \cos x)$ B. $y^* = ax^2 + bx + c + A \sin x$

C. $y^* = x(ax^2 + bx + c + A \sin x + B \cos x)$ D. $y^* = ax^2 + bx + c + A \cos x$

2. 在下列极限结果中, 正确的是【 】.

A. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0$ B. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$ C. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y} = 0$ D. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x + y} = 0$

3. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t) = \int_1^t dy \int_y^t f(x) dx$, 则 $F'(2)$ 等于【 】.

A. $2f(2)$ B. $f(2)$ C. $-f(2)$ D. 0

4. 设曲线 $L: f(x, y) = 1$ ($f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数), 过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N , T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列积分小于零的是【 】.

A. $\int_T f(x, y) ds$ B. $\int_T f(x, y) dx$ C. $\int_T f(x, y) dy$ D. $\int_T f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy$

5. 设 L 为空间曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, 则 $\oint_L x^2 ds =$ 【 】.

A. 0 B. $2\pi a^3$ C. $\frac{1}{3}\pi a^2$ D. $\frac{2}{3}\pi a^3$

6. 设两个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则【 】.

A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛 B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

C. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛 D. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

二、填空题(每小题 4 分, 4 个小题共 16 分, 将计算结果写在答题卡上.)

7. 经过点 $A(1, -2, 3)$ 并且包含 x 轴的平面方程为 _____.

8. 设向量场 $\mathbf{A} = x^2\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zx\mathbf{k}$, 则 $\text{rot } \mathbf{A}|_{(1,1,2)} =$ _____.

9. $u = xe^y z^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的全微分 $du =$ _____.

10. 若将函数 $f(x) = \pi - x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成正弦级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, 则系数 b_4 的值为 _____.

三、基本计算题 (每小题 7 分, 6 个小题共 42 分, 必须写出主要计算过程.)

11. 设方程组 $\begin{cases} u+v=x \\ u^2+v^2=y \end{cases}$ 确定隐函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$, 且 $u \neq v$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$.

12. 设 \mathbf{n} 是曲面 $S: z = x^2 + y^2$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 处指向上侧的法向量, 求函数 $u = xz^3 - 3yz$ 在点 P_0 处沿方向 \mathbf{n} 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$.

13. 计算 $I = \iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 D 是正方形区域 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

14. 计算 $I = \iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分.

15. 设 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($R > 0$) 的外侧, 求 $I = \oiint_S x^3 dy dz + y^2 dz dx + z dx dy$.

16. 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ 的收敛域并求其和函数 $S(x)$.

四、综合题 (每小题 7 分, 2 个小题共 14 分, 必须写出主要过程.)

17. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$, 求非齐次方程 $y'' + ay' + by = x$ 满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = 0$ 的解.

18. 求 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y^2$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ 上的最大值和最小值.

五、证明题 (每小题 5 分, 2 个小题共 10 分, 必须写出主要过程.)

19. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - (-1)^n}$ 是条件收敛的.

20. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 ($y > 0$) 内的有向分段光滑曲线, 其

始点为 (a, b) , 终点为 (c, d) . 记 $I = \int_L \frac{1}{y} [1 + y^2 f(xy)] dx + \frac{x}{y^2} [y^2 f(xy) - 1] dy$, (1) 证明曲线积

分 I 与路径 L 无关. (2) 当 $ab = cd$ 时, 求 I 的值.