华中科技大学 2022～2023 学年第二学期

“ 微积分（一） ”考试试卷(A 卷)

考试方式：闭卷　考试日期: **2023.06.19**　考试时长: **150** 分钟

一、单项选择题(每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.)

1. 在空间直角坐标系中, 方程 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$ 表示【　　】.

A. 半球面　　B. 柱面　　C. 锥面　　D. 单叶双曲面

2. 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处有 $f_x(1,1)=f_y(1,1)=1$，则必有【　　】.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to1}} f(x,y)$ 存在

B. $\mathrm{d}z|_{(1,1)}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

C. $\lim\limits_{x\to1} f(x,1)$ 及 $\lim\limits_{y\to1} f(1,y)$ 都存在

D. $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$ 的方向导数存在

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y$，则点 $(0,0)$【　　】.

A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　B. 不是 $f(x,y)$ 的驻点

C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　D. 是 $f(x,y)$ 的极小值点

4. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成的空间区域，将 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为柱坐标系下的累次积分，下列结果正确的是【　　】.

A. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

B. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

C. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

D. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^z f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}r$

5. 设 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\ge0,R>0)$，$abc\ne0$，则 $\iint\limits_S (ax+by+cz)\mathrm{d}S=$【　　】.

A. $c\pi R^2$　　B. $\frac{1}{4}c\pi R^3$　　C. $c\pi R^3$　　D. $(a+b+c)\pi R^2$

6. 下列命题中，正确的是【　　】.

A. 若 $a_n \le b_n \le c_n$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

B. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

C. 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上．）

7. 设曲线 Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 则 $\oint_{\Gamma} (x^2+2y^2+3z)\mathrm{d}s =$ ____________ .

8. $z = x + 3y + \ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 的切平面方程为____________ .

9. 设 $u = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $div(\mathbf{grad}u)|_{(1,-2,2)} =$ ____________ .

10. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 2x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ ，将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $x = -3\pi$ 处的值为____________ .

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程．）

11. 求过点 $P(2,1,3)$ 且与 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{-1}$ 垂直的平面方程，并求该平面与 L_1 的交点.

12. 设 $z = \mathrm{e}^{-x}\sin\frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,\pi)}$， $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}|_{(2,\pi)}$.

13. 求曲面 $z = xy$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内那部分面积 S .

14. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $\begin{cases} y^2+\dfrac{z^2}{2}=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面所围成的立体. .

15. 设 S 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,(R>0)$，取上侧，求 $I=\iint\limits_{S}\dfrac{(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

16. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

四．综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程．）

17．设 L 是 xoy 面上任意的光滑曲线，$f(x)$ 具有二阶连续的导数，且 $f(0)=4, f'(0)=3$，若曲线积分 $\int_L(-x\mathrm{e}^x+f''(x))y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $f(x)$.

18．求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|4x^2+y^2\le 4\right\}$ 上的最大值和最小值.

五．证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程．）

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，证明：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}A^2$.

20. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$2a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+u_n}$，其中 $u_n>0$，$\{a_n\}$ 有上界，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.