—

2018 ～2019 学年第 二 学期

《 微积分（一）》课程考试试卷(A 卷) 解答

一. 单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 设 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 都是微分方程 $y''+a(x)y'+b(x)y=x^2$ 的解，则以下函数中也是该微分方程的解的是【 B 】.

A. $y_1+y_2+y_3$　　B. $\dfrac{3}{2}y_1-y_2+\dfrac{1}{2}y_3$　　C. y_1-y_2　　D. $2y_3$

2. 以下函数在原点可微的是【 A 】.

A. $z=x^2+y^2$　　B. $z=\sqrt{x^2+y^2}$　　C. $z=|x-y|$　　D. $z=\sqrt{|xy|}$

3. 设 $F(x,y)=0$ 是一条平面光滑曲线，则以下说法中正确的是【 C 】.

A. $\{F_x,\ F_y\}$ 是该曲线的切矢量　　B. $\{F_y,\ F_x\}$ 是该曲线的法矢量

C. $\{-F_y,\ F_x\}$ 是该曲线的切矢量　　D. $\{-F_x,\ F_y\}$ 是该曲线的法矢量

4. 设平面区域 D 由 $x^2+y^2\le 1$ 表示，区域 D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint_D (xy+\cos x\sin y)dxdy=$【 A 】.

A. 0　　B. $4\iint_{D_1} xyd\sigma$　　C. $4\iint_{D_1}\cos x\sin yd\sigma$　　D. $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$

5. 设区域 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 围成，$I=\iiint_\Omega f(z)dV$，则以下表达式***错误*** 的是【 D 】.

A. $I=\pi\int_0^1 zf(z)dz$　　B. $I=2\pi\int_0^1 rdr\int_{r^2}^1 f(z)dz$

C. $I=\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{x^2+y^2}^1 f(z)dz$　　D. $I=2\pi\int_0^1 f(z)dz\int_0^z rdr$

6. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则以下说法中正确的是【 B 】.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$ 收敛　　C. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

二. 填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 微分方程 $y''+2y'+y=x+2$ 的通解为 $\underline{y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+x}$.

8. 设 $z=f(x^2+y^2,xy)$，f 有连续偏导数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\underline{2xf_1'+yf_2'}$.

9. 设 $f(x,y,z)=x+y^3+z^5$, 则 **div grad** $f=\underline{6y+20z^3}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^n}=\underline{\ln 3}$.

分析 根据 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),-1\le x<1$, 代入 $x=\frac{2}{3}$ 即可.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 求点 $A(1,2,3)$ 到直线 $L:\frac{x-6}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-6}{-2}$ 的距离.

解一　取直线 L 上的点 $B(6,1,6)$,则 $\overrightarrow{AB}=\{5,-1,3\}$. 直线的方向矢为 $\vec{s}=\{-1,1,-2\}$.（3 分）

所求距离为

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}=\frac{\left|\{-1,7,4\}\right|}{\sqrt{6}}=\sqrt{11}.$$ （7 分）

解二　设直线 L 上垂足为 $B(6-t,1+t,6-2t)$,则 $\overrightarrow{AB}=\{5-t,-1+t,3-2t\}$.　（3 分）

根据 $\overrightarrow{AB}\cdot\{-1,1,-2\}=0$, 得到 $6t-12=0$.

从而有 $t=2, B=(4,3,2)$.　故所求距离为 $\left|AB\right|=\sqrt{11}$.　（7 分）

12. 设方程组 $\begin{cases}x^2-2x+y^2+\ln z+z^3=1,\\ x+y+z=1\end{cases}$ 在包含点 $(0,0,1)$ 的一个邻域上确定隐函数 $y=y(x), z=z(x)$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0},\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0}$.

解一　方程组对 x 求导得到

$$\begin{cases}2x-2+2yy'+\frac{1}{z}z'+3z^2z'=0,\\ 1+y'+z'=0\end{cases}$$ 代入点 $(0,0,1)$ 得到 $\begin{cases}4z'=2,\\ 1+y'+z'=0\end{cases}$.　（5 分）

解得 $y'=\frac{-3}{2}, z'=\frac{1}{2}$.　（7 分）

解二　看作两个曲面交线. 于是 $\nabla F=\{2x-2,2y,\frac{1}{z}+3z^2\},\nabla G=\{1,1,1\}$.　（3 分）

从而有切矢量

$\vec{\tau}=\nabla F(0,0,1)\times\nabla G(0,0,1)=\{-2,0,4\}\times\{1,1,1\}=\{-4,6,-2\}$, 平行于 $\{1,\frac{-3}{2},\frac{1}{2}\}$.

故 $y'=\frac{-3}{2}, z'=\frac{1}{2}$　（7 分）

—

13. 求函数 $f(x,y)=4x+2xy-x^2-3y^2$ 的极值.

解　求偏导令 $f_x=0, f_y=0$,得到

$$\begin{cases}4+2y-2x=0,\\ 2x-6y=0,\end{cases}$$

解得唯一驻点 $(3,1)$.　　　　（4 分）

又 $f_{xx}=-2, f_{xy}=2, f_{yy}=-6$，所以 $\Delta=AC-B^2=8>0$.

函数在 $(3,1)$ 取得极大值 $f(3,1)=6$.　　　　（7 分）

14. 求 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$，其中 Ω 是平面 $x+y+z=1$ 与三坐标面所围成的四面体.

解一　$I=3\iiint\limits_{\Omega}xdv$　　　　（2 分）

$=3\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}dz$　　　　（4 分）

$=3\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy=3\int_0^1 x\cdot\dfrac{(1-x)^2}{2}dx=\dfrac{3}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx=\dfrac{1}{8}$.　　（7 分）

解二　$I=3\iiint\limits_{\Omega}zdv$　　　　（2 分）

$=3\int_0^1 z\sigma(z)dz$　（$\sigma(z)$ 为 $z=$ 常数截 Ω 所得三角形的面积）　　　　（4 分）

$=3\int_0^1 z\cdot\dfrac{(1-z)^2}{2}dz=\dfrac{1}{8}$.　　　　（7 分）

15. 求曲线积分 $I=\int_L(2xy-y^2\cos x)dx+(x^2-2y\sin x)dy$，其中曲线 L 沿抛物线 $y=\pi x-x^2+1$ 从 $A(0,1)$ 到 $B(\pi,1)$.

解一　$I=[x^2y-y^2\sin x]_{(0,1)}^{(\pi,1)}=\pi^2$.

解二　显然有 $Q_x=P_y=2x-2y\cos x$.　　　　（2 分）

积分与路径无关，更改路径为水平线段 AB 得到

$I=\int_{AB}$　　（4 分）　　$=\int_0^{\pi}(2x-\cos x)dx=\pi^2$　　　　（7 分）

解三　补充水平线段 C 从 $B(\pi,1)$ 指向 $A(0,1)$.

则 $\int_L+\int_C=\iint\limits_D(Q_x-P_y)\mathrm{d}\sigma=0$.　　　　（4 分）

—

所以 $I=-\int_C \quad =\int_0^{\pi}(2x-\cos x)dx=\pi^2$ （7 分）

16. 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-3)^n}{(2n-1)!!}$的敛散性，若收敛指出是绝对收敛还是条件收敛，说明你的理由。

解一 显然有 $\frac{|2+(-3)^n|}{(2n-1)!!}\le\frac{2\cdot 3^n}{(2n-1)!!}$. （3 分）

对于$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 3^n}{(2n-1)!!}$，因$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n+1}=0<1,$ （5 分）

由比值判别法知其收敛. 故原级数为绝对收敛. （7 分）

解二 用比值判别法得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)!!}$为绝对收敛, （3 分）

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n-1)!!}$也是绝对收敛， （6 分）

所以原级数为绝对收敛. （7 分）

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 求曲面$z=x^2+y^2, 0\le z\le 2$的面积.

解 $dS=\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$.故

$S=\iint_S dS=\iint_D\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$ （3 分）

$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}rdr=2\pi\cdot\frac{1}{12}(1+4r^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13\pi}{3}$. （7 分）

18. 计算曲面积分 $I=\oiint_S 3xzdydz+yzdzdx-z^2dxdy$，其中 S 是曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

解一 根据 Gauss 公式得到

$I=\iiint_\Omega 2zdV$ （3 分）

$=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3 d\rho=\pi$. （7 分）

解二 用统一投影法（锥面块、球面块往 xoy 面的投影区域为$D: x^2+y^2\le 1$）.

在锥面上$I_1=\iint_D(4x^2+2y^2)dxdy=3\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{3\pi}{2}$. （3 分）

—

在球面上$I_2=\iint_D(4x^2+2y^2-2)dxdy=-\frac{\pi}{2}$.　　（6 分）

故$I=I_1+I_2=\pi$.　　（7 分）

五. 综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设L是圆周曲线$(x-1)^2+(y-1)^2=1$（取正向），$f(x)$为正值连续函数.证明:

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx\ge 2\pi.$$

证　由格林公式，得

$$\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy,$$　　（2 分）

因为$D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 1$具有轮换性，所以

$$\iint_D f(y)dxdy=\iint_D f(x)dxdy,$$

从而 $\oint_L xf(y)dy-\frac{y}{f(x)}dx=\iint_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]dxdy\ge\iint_D 2dxdy=2\pi$.　　（5 分）

20. 证明：当$-\pi<x<\pi$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}=\frac{x}{2}$.

证　将函数$f(x)=\frac{x}{2},-\pi<x<\pi$展开为正弦级数. 则　　（2 分）

$a_n=0,n=0,1,2,\cdots$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nxdx=\frac{(-1)^{n-1}}{n},n=1,2,3,\cdots.$$　　（4 分）

根据傅里叶级数收敛定理

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}=\frac{x}{2},-\pi<x<\pi.$$　　（5 分）