



华中科技大学 2019~2020 学年第二学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)

考试方式: 闭 卷 考试日期: 2020.09.03 考试时长: 150 分钟

院 (系): _____ 专业班级: _____

学 号: _____ 姓 名: _____

一、单项选择题 (每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上。)

1. 已知函数 $f(x, y) = |xy|$, 则以下说法中正确的是【 】.

- A. $f(x, y)$ 在原点连续且偏导数存在 B. $f(x, y)$ 在原点连续但偏导数不存在
C. $f(x, y)$ 在原点不连续但偏导数存在 D. $f(x, y)$ 在原点不连续且偏导数不存在

2. 函数 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 可微是函数 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 有连续的偏导数的【 】.

- A. 充分必要条件 B. 必要但非充分条件
C. 充分但非必要条件 D. 既非充分也非必要条件

3. 设光滑曲线 C 是光滑曲面 $F(x, y, z) = 0$ 与 $G(x, y, z) = 0$ 的交线, P 是 C 上一点. 若 $\nabla F(P)$ 与 $\nabla G(P)$ 不平行, 则 C 在点 P 的一个切矢量为【 】.

- A. $\nabla F(P) + \nabla G(P)$ B. $\nabla F(P) - \nabla G(P)$ C. $\nabla F(P) \cdot \nabla G(P)$ D. $\nabla F(P) \times \nabla G(P)$

4. 已知函数 $f(x, y)$ 连续, 则二次积分 $\int_1^2 dx \int_1^{x^2} f(x, y) dy =$ 【 】.

- A. $\int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx$ B. $\int_1^4 dy \int_1^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ C. $\int_1^4 dy \int_1^2 f(x, y) dx$ D. $\int_1^2 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx$

5. 设 S 为 $z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$, $I = \iint_S x dS$, $J = \iint_S y dS$, $K = \iint_S z dS$. 以下说法中正确的是【 】.

- A. I, J, K 中仅有一个等于 0 B. I, J, K 中有两个等于 0
C. I, J, K 都等于 0 D. I, J, K 全都不等于 0

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数且 $f(x) = x, -\pi < x \leq \pi$, $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数是 $S(x)$. 以下说法中正确的是【 】.

- A. $S(x)$ 处处连续 B. $S(x) \equiv f(x)$ C. $S(\pi) = \pi$ D. $S(\pi) = 0$

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 设 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 3$ ，则 $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot [(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})] = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 方程 $x = z + ye^z$ 在点 $(1,1,0)$ 的一个邻域内确定函数 $z = z(x, y)$ ，则 $z_y(1,1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 函数 $u = x^2 + 3y^2 + 5z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 沿曲面 $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 9$ 的外法线方向的方向导数为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知 L 为直线 $2x + y = 2$ 从点 $(1,0)$ 到点 $(0,2)$ 的一段，则 $\int_L (2x + y)ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 求微分方程 $y'' + y = \cos 2x$ 的通解.

12. 求经过点 $P(3,1,-2)$ 并且包含直线 $L: \frac{x-4}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程.

13. 已知函数 $z = f(x^2 - y^2, 2x + 3y)$ ，其中 f 有二阶连续偏导数，求 z_x, z_{xy} .

14. 求二重积分 $I = \iint_D y^2 dx dy$ ，其中 D 为圆域 $x^2 - 2x + y^2 \leq 0$.

15. 求曲面积分 $I = \iint_S xz^3 dy dz$ ，其中 S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ 的下侧.

16. 将 $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 展开为 Maclaurin 级数.

四、应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 求函数 $f(x, y) = x + y$ 在曲线 $x^2 + 2y^2 = 6$ 上所取到的最大值和最小值.

18. 求抛物柱面 $z = 3 - 2x^2$ 和椭圆抛物面 $z = x^2 + 3y^2$ 所围成的立体的体积.

五、综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设 L 为位于右半平面内的光滑曲线，积分 $\int_L 2xy(x^4 + y^2)^a dx - x^2(x^4 + y^2)^a dy$ 在右半平面 $(x > 0)$ 与路径无关，求 a 和 $I = \int_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})} 2xy(x^4 + y^2)^a dx - x^2(x^4 + y^2)^a dy$ 的值.

20. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n \ln^2 n}$ 绝对收敛.