2020 ～2021 学年第 二 学期

《 微积分（一)》课程考试试卷(A 卷) 解答

一. 单项选择题(每小题 3 分, 6 个小题共 18 分, 将结果涂在答题卡上.)

1. 微分方程 $y''-3y'+2y=2x-2\mathrm{e}^x$ 的特解 y^* 的形式是【 D 】.

A. $y^*=(Ax+B)\mathrm{e}^x$　　B. $y^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^x$

C. $y^*=Ax+B+C\mathrm{e}^x$　　D. $y^*=Ax+B+Cx\mathrm{e}^x$

2. 设曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$，点 $M(1,-1,0)$，则在点 M 处下列说法*不正确* 的是【 B 】.

A. 切矢量为 $\{-2,-2,4\}$　　B. 切矢量为 $\{-2,2,4\}$

C. 切线方程为 $x-1=y+1=-\dfrac{z}{2}$　　D. 法平面方程为 $x+y-2z=0$

3. 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处【 C 】.

A. 可微　　B. 偏导数存在　　C. 连续　　D.不连续

4. 已知函数 f 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$【 C 】.

A. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}y$

5. 设 Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0 \end{cases}$, $I=\oint_\Gamma x\mathrm{d}s$, $J=\oint_\Gamma y\mathrm{d}s$, $K=\oint_\Gamma z^2\mathrm{d}s$. 以下说法中正确的是【 B 】.

A. $K=0$　B. I,J,K 中有两个等于 0　C. I,J,K 都等于 0　D. I,J,K 全都不等于 0

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数且 $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0, \\ \pi-x, & 0\le x<\pi \end{cases}$，$f(x)$ 的傅里叶级数的和函数是 $S(x)$. 以下说法中正确的是【 C 】.

A. $S(x)$ 处处连续　　B. $S(x)\equiv f(x)$　　C. $S(-1)=0$　　D. $S(0)=\pi$

二. 填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上. ）

7. 直线 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与平面 $x-y+2z+4=0$ 的夹角是______.

解 直线的方向矢量 $\boldsymbol{s}=\{2,1,1\}$，平面的法矢量 $\boldsymbol{n}=\{1,-1,2\}$. 记夹角为 φ，则

$$\sin\varphi=\frac{|\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{s}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\{2,1,1\}\cdot\{1,-1,2\}}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\quad \text{所以}\ \varphi=\frac{\pi}{6}.$$

8. 设 $P_0(1,1,-1)$, $P_1(2,-1,0)$,则 $u=x+y^2+z^3$ 在 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为____.

解 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的单位矢量为 $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{6}}\{1,-2,1\}$，$\nabla u(P_0)=\{1,2y,3z^2\}_{P_0}=\{1,2,3\}$，

所以 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1-4+3)=0$.

9.若 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$，则 $z_x(0,0)=$_________.

解 当 $x=0,y=0$ 时，$z=0$. 设 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz-1$，则

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{\mathrm{e}^{x+2y+3z}+yz}{3\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xy}，\text{所以}\ z_x(0,0)=-\frac{1}{3}.$$

10. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<\infty)$ 的和函数为________ .

解 和函数为 $\cos x$.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程. ）

11. 求微分方程 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\frac{y}{x}$ 的通解.

解 令 $u=\frac{y}{x}$，则原方程化为 $\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$，　(3 分)

两边积分得　$\ln u-1=Cx$.　(5 分)

所以原方程的通解为　$\ln\frac{y}{x}=Cx+1$.　(7 分)

解法二　$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\ln\frac{y}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}$，即 $\mathrm{d}\ln y=(\ln y-\ln x)\mathrm{d}\ln x$，

两边减去 $\mathrm{d}\ln x$，有　$\mathrm{d}(\ln y-\ln x-1)=(\ln y-\ln x-1)\mathrm{d}\ln x$，

即　$\mathrm{d}\ln(\ln y-\ln x-1)=\mathrm{d}\ln x$，

故通解为　$\ln y-\ln x-1=Cx$.

解法三　令 $\dfrac{y}{x}=\mathrm{e}^{t}$，则 $y=x\mathrm{e}^{t}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{t}(x+\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})$，原方程写作

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=t\mathrm{e}^{t}$　可变化为 $(t-1)\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x$，解得 $t-1=Cx$，故方程通解为

$\dfrac{y}{x}=\mathrm{e}^{Cx+1}$ 或 $\ln\dfrac{y}{x}=Cx+1$.

12. 已知函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中 f 有二阶连续偏导数，g 可导，求 z_x, z_{xy}.

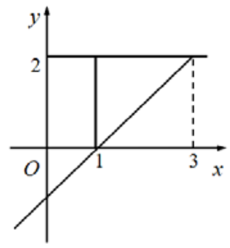
解　$z_x=y f_1'+yg'(x) f_2'=y[f_1'+g'(x) f_2']$　　(3 分)

$z_{xy}=[f_1'+g'(x) f_2']+y[(xf_{11}''+g(x) f_{12}'')+g'(x)(x f_{12}''+g(x) f_{22}''].$

$=f_1'+g'(x) f_2'+xyf_{11}''+y[g(x)+xg'(x)] f_{12}''+yg'(x)g(x) f_{22}''$　　(7 分)

注　保留 f_{12}'', f_{21}'' 不扣分.

13. 计算二次积分 $I=\int_1^3 \mathrm{d}x\int_{x-1}^2 \sin y^2\mathrm{d}y$.



解　内层积分中的被积函数 $\sin y^2$ 的原函数不能由初等函数表示，

因此，交换积分次序

$I=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_1^{1+y} \sin y^2\mathrm{d}x=\int_0^2 y\sin y^2\mathrm{d}y$　　(2 分)

$=\dfrac{1}{2}\int_0^2\sin y^2\mathrm{d}(y^2)=-\dfrac{1}{2}\cos y^2\Big|_0^2=\dfrac{1}{2}(1-\cos 4)$.　　(7 分)

另法　作坐标平移，所求积分变为 $I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \sin y^2\mathrm{d}y$，再用极坐标

$I=\int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\int_0^{2/\sin\theta} r\sin(r^2\sin^2\theta)\mathrm{d}r=\dfrac{1-\cos 4}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \dfrac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta=\dfrac{1-\cos 4}{2}$.

14. 求三重积分 $I=\iiint\limits_V (x^3+y^2+z)\mathrm{d}v$，其中 V 为 $x^2+y^2+z^2\le a^2, a>0$.

解　$I=\iiint\limits_V y^2\mathrm{d}v=\dfrac{1}{3}\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v$　　(3 分)

$=\dfrac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a \rho^4\sin\varphi\mathrm{d}\rho$　　(5 分)

$=\dfrac{4\pi}{15}a^5$.　　(7 分)

15. 求 $I=\iint\limits_S (z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 2)$ 下侧.

解法一　补面 $S_1: z=2\,(x^2+y^2\le 4)$ 上侧，则 $S+S_1$ 封闭，且指向外侧.　　(2 分)

$$I=\oint\!\!\!\oint_{S+S_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{S_1}(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V 0\mathrm{d}v+\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (5\text{ 分})$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 4}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\pi. \qquad (7\text{ 分})$$

解法二　用统一投影法, 向 xy 平面投影, 得

$$I=\iint_S[(z^2+x)(-x)-z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (2\text{ 分})$$

$$=-\iint_D\{-x[\frac{1}{2}(x^2+y^2)]^2-x^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (D\text{:}\ \ x^2+y^2\le 4) \qquad (4\text{ 分})$$

$$=\iint_D[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D[\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r=8\pi. \qquad (7\text{ 分})$$

16. 将 $f(x)=\arctan x$ 展开为 Maclaurin 级数，并求 $f^{(20)}(0), f^{(21)}(0)$.

解　因 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},|x|<1$，所以

$$f(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\text{，}\ |x|<1. \qquad （3\text{ 分}）$$

当 $x=\pm1$，因 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 及 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$ 均收敛，由和函数的连续性，得

$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 在 $x=\pm1$ 时也成立，

即 $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ ，$|x|\le 1$.　　（5 分）

$f^{(20)}(0)=0$，由 $\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}\Rightarrow f^{(21)}(0)=21!\cdot\dfrac{(-1)^{10}}{21}=20!$.　　（7 分）

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程. ）

17. 求 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

解　令 $\begin{cases} f_x(x,y)=4x^3-2x-2y=0 \\ f_y(x,y)=4y^3-2x-2y=0 \end{cases}$，两式相减可得 $x=y$，带入方程（1）得：$x=0$

及 $x=\pm1$，所以 $f(x,y)$ 的驻点为 $(1,1)$，$(-1,-1)$ 及 $(0,0)$.　　　　（2 分）

又 $f_{xx}=12x^2-2$，$f_{xy}=-2$，$f_{yy}=12y^2-2$，所以

	A	B	C	$AC-B^2$	
$(1,1)$	10	-2	10	$96>0$	$f(1,1)=-2$ 为极小值
$(-1,-1)$	10	-2	10	$96>0$	$f(-1,-1)=-2$ 为极小值
$(0,0)$	-2	-2	-2	0	方法失效

（5 分）

由于 $f(0,0)=0$，取 $y=x$，则 $f(x,y)=2x^4-4x^2=2x^2(x^2-1)<0$（在 $(0,0)$ 附近）;

取 $y=-x$，则 $f(x,y)=2x^4>0$（在 $(0,0)$ 附近），故 $(0,0)$ 不是极值点.　　　　（7 分）

18. 已知曲线积分 $\int_L yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$ 和 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 的值.

解　由积分与路径无关，得 $f'(x)-2x=f(x)$，即 $f'(x)-f(x)=2x$.　　　　（2 分）

$f(x)=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}(\int 2x\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^x(\int 2x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^x(-2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}+C)$.　（4 分）

由 $f(0)=1$，得 $C=3$，$f(x)=3\mathrm{e}^x-2x-2$.　　　　（5 分）

选择积分路径为折线 L_1：$y=0(x$ 从 $0\to1)$；L_2：$x=1(y$ 从 $0\to1)$

$I=0+\int_0^1[f(1)-1]\mathrm{d}y=f(1)-1=3\mathrm{e}-5$.　　　　（7 分）

五．综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程．）

19. 设 $D:x^2+y^2\le1$，证明不等式：$\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{2}{5}\pi$.

证　利用极坐标

$$I=\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sin r^3\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1 r\sin r^3\mathrm{d}r\,.\qquad（2 分）$$

因当$t>0$时，$\sin t<t$，因此　$r\sin r^3<r^4$. 又　$2\pi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\dfrac{2}{5}\pi$，

故
$$\iint\limits_D \sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\frac{2}{5}\pi\,.\qquad（5 分）$$

20. 设 $f(0)=1, f'(0)=0$， $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有界，证明：$\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f(\dfrac{1}{n^\alpha})-1\right)$绝对收敛.

证　由泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(\theta x)}{2}x^2$， $\theta\in(0,1)$ 及题设条件有

$$\left|f(\frac{1}{n^\alpha})-1\right|=\frac{1}{2}|f''(\frac{\theta}{n^\alpha})|\frac{1}{n^{2\alpha}}\le\frac{M}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}}\,,\qquad（3）$$

$\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f(\dfrac{1}{n^\alpha})-1\right)$绝对收敛.　（5）

或者由泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$给出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n^\alpha})-1}{\frac{1}{n^{2\alpha}}}=\frac{f''(0)}{2}，\quad \lim_{n\to\infty}\frac{|f(\frac{1}{n^\alpha})-1|}{\frac{1}{n^{2\alpha}}}=\frac{|f''(0)|}{2}，$$

$\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$收敛，$0\le\dfrac{|f''(0)|}{2}<+\infty$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f(\dfrac{1}{n^\alpha})-1\right)$绝对收敛.