华中科技大学 2023～2024 学年第二学期

“ 微积分（一） ”考试试卷(A 卷)参考解答

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.）

1. 已知直线 $L_1: x+1=y=\dfrac{z-1}{2}$ 和 $L_2: x=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{3}$，则这两直线的位置关系为【　　】.

A. 相交　　B. 平行　　C. 重合　　D. 异面

解析　L_1 的方向矢量为 $\overrightarrow{s_1}=\{1,1,2\}$，取 L_1 上点 $p_1(-1,01)$，

L_2 的方向矢量为 $\overrightarrow{s_2}=\{1,3,3\}$，取 L_2 上点 $p_2(0,-1,2)$，则

$\overrightarrow{p_1p_2}=\{1,-1,1\}$，$(\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2})\cdot\overrightarrow{p_1p_2}=0$，所以 L_1 与 L_2 共面. 又 $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{1}{3}\neq\dfrac{2}{3}$，故 L_1 与 L_2 相交.

答案为 A.

2. 设函数 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+e^{xz}-1$ 在点 $P(0,1,1)$ 附近满足方程 $F(x,y,z)=0$，则下列说法错误的是【　　】.

A. $F(x,y,z)$ 在点 $P(0,1,1)$ 可微　　B. $\left.\dfrac{\partial y}{\partial z}\right|_P=0$　　C. $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_P=-2$　　D. $\left.\dfrac{\partial x}{\partial y}\right|_P=\dfrac{1}{2}$.

解析　$F_x(x,y,z)=y+ze^{xz}$，$F_y(x,y,z)=x-\dfrac{z}{y}$，$F_z(x,y,z)=-\ln y+xe^{xz}$，这三个偏导数都在点 $P(0,1,1)$ 附近连续，所以选项 A 正确. $F_x(P)=1+1=2$，$F_y(P)=-1$，$F_z(P)=0$，由此得

$\left.\dfrac{\partial y}{\partial z}\right|_P=-\dfrac{F_z(P)}{F_y(p)}=0$，$\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_P=-\dfrac{F_x(P)}{F_y(p)}=2$，$\left.\dfrac{\partial x}{\partial y}\right|_P=-\dfrac{F_y(P)}{F_x(p)}=\dfrac{1}{2}$.

答案为 C.

3. 设 D 是 xoy 平面上以点 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)d\sigma=$【　　】.

A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y d\sigma$　　B. $2\iint\limits_{D_1}xyd\sigma$　　C. $\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$　　D. 0

解析　用 $y=-x$ 将区域 D 分为 D_2 和 D_3，于是有 D_2 关于 y 轴对称，D_3 关于 x 轴对称，则

$$\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)d\sigma=\iint\limits_{D_2}(xy+\cos x\sin y)d\sigma+\iint\limits_{D_3}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$$

$=\iint\limits_{D_2}xyd\sigma+\iint\limits_{D_2}\cos x\sin yd\sigma+\iint\limits_{D_3}xyd\sigma+\iint\limits_{D_3}\cos x\sin yd\sigma=2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin yd\sigma$，故正确答案为

A.

4. 已知函数 $f(x)=1-x(0\le x\le\pi)$，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx(-\infty<x<+\infty)$，其中 $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx(n=1,2,\cdots)$，则 $S(-\frac{\pi}{2})=$【　】.

A. $-\frac{\pi}{2}-1$　　B. $-\frac{\pi}{2}+1$　　C. $\frac{\pi}{2}-1$　　D. $\frac{\pi}{2}+1$

解析 此题是将 $f(x)$ 作奇延拓展开成正弦级数，$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上连续，由收敛定理可得 $x\in(-\pi,0),S(x)=-f(-x)$，

故 $S(-\frac{\pi}{2})=-f(-(-\frac{\pi}{2}))=-f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-1$，因此答案为 C.

5. 设 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_{\Gamma}(y+2z)ds=$【　】.

A. π　　B. 2π　　C. $-\pi$　　D. 0

解析 曲线 Γ 具有轮换对称性，因此有 $\oint_{\Gamma}(y+2z)ds=\oint_{\Gamma}yzds=\oint_{\Gamma}(x+y+z)ds=0$

故答案为 D

6. 关于级数的描述，下列命题中正确的是【　】.

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 收敛

解析 对于 A: 令 $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，显然 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故 A 不对

对于 B: 令 $u_n=\frac{1}{n}$，显然 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，故 B 不对

对于 C: 取 $u_n=(-1)^n,v_n=(-1)^{n-1}$，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都发散，故 C 不对

对于 D: $\dfrac{|a_n|}{n}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2}+a_n^2\right)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 均收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|a_n|}{n}$ 收敛，故 D 是正确的.

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上.）

7. 设 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2\quad(R>0)$，则 $\oiint\limits_S(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4})dS=$ ____________ .

解 $\oiint\limits_S(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4})dS=\oiint\limits_S\dfrac{x^2}{2}dS+\oiint\limits_S\dfrac{y^2}{3}dS+\oiint\limits_S\dfrac{z^2}{4}dS$

$$=\frac{1}{6}\oiint\limits_S(x^2+y^2+z^2)dS+\frac{1}{9}\oiint\limits_S(x^2+y^2+z^2)dS+\frac{1}{12}\oiint\limits_S(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$=(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12})\oiint\limits_S(x^2+y^2+z^2)dS=\frac{13}{36}\oiint\limits_S R^2dS=\frac{13}{9}\pi R^4.$$

8. 曲线 $\begin{cases}z=x^2+y^2\\2x^2+2y^2-z^2=0\end{cases}$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 的法平面方程为 ____________ .

解 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z,G(x,y,z)=2x^2+2y^2-z^2$，则

曲面 $2x^2+2y^2-z^2=0$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 的法向量为

$gradG|_{(1,1,2)}=\{4x,4y,-2z\}=\{4,4,-4\}=4\{1,1,-1\}$

曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $P_0(1,1,2)$ 的法向量为 $gradF|_{(1,1,2)}=\{2x,2y,-1\}|_{(1,1,2)}=\{2,2,-1\}$

曲线在该点的切线的方向向量为 $\vec{s}=gradF\times gradG=\{2,2,-1\}\times4\{1,1,-1\}=4\{-1,1,0\}$

故在该点的法平面方程为 $x-y=0$.

9. 设 $\left\{x^{2023}+2xy^3,ax^2y^2-y^{2024}\right\}$ 在整个 xoy 平面内是某一函数 $u(x,y)$ 的梯度，则 $a=$_____.

解析 记 $P=x^{2023}+2xy^3$，$Q=ax^2y^2-2y^{2024}$，则 $\mathrm{grad}u(x,y)=\{P,Q\}$ 等价于 $\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，于是由 $Q_x=P_y$ 可得到 $a=3$.

10. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!\,2^n}x^{2n+1}$ 的和函数为 ____________ .

解析 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!\,2^n}x^{2n+1}=x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(-\dfrac{x^2}{2})^n=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程．）

11. 一直线过点 $B(1,2,3)$ 且与矢量 $\vec{s}=\{6,6,7\}$ 平行,求点 $A(3,4,2)$ 到此直线的距离 d .

解 $\overrightarrow{BA}=\{2,2,-1\}$，$|\vec{s}|=\sqrt{6^2+6^2+7^2}=11$,

$\overrightarrow{BA}\times\vec{s}=\{2,2,-1\}\times\{6,6,7\}=20\{1,-1,0\}$,

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\times\vec{s}\right|}{|\vec{s}|}=\frac{20\sqrt{2}}{11}.$$

12. 设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{x}{y}}$, 求 dz， $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-\arctan\frac{x}{y}}+(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{x}{y}}\cdot\frac{-\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=2xe^{-\arctan\frac{x}{y}}-ye^{-\arctan\frac{x}{y}}=(2x-y)e^{-\arctan\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-\arctan\frac{x}{y}}+(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{x}{y}}\cdot\frac{x}{x^2+y^2}=(2y+x)e^{-\arctan\frac{x}{y}},$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=e^{-\arctan\frac{x}{y}}\big((2x-y)dx+(2y+x)dy\big).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^{-\arctan\frac{x}{y}}+(2x-y)e^{-\arctan\frac{x}{y}}\left(-\frac{-x}{x^2+y^2}\right)$$

$$=-e^{-\arctan\frac{x}{y}}+(2x-y)e^{-\arctan\frac{x}{y}}\left(-\frac{-x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{x}{y}}$$

所以 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$.

或者由 $z_x(0,y)=-y$ 直接得 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$.

13. 求曲线积分 $I=\int_L(y^2-\cos y)dx+x\sin ydy$，其中有向曲线 L 为沿着正弦曲线 $y=\sin x$, 由点 $O(0,0)$ 到点 $A(\pi,0)$.

解 补有向线段 $\overline{AO}:y=0,x:\pi\to 0$，设 L 和 $\overline{AO}$ 围成的区域记为 D , 则

$$I=\oint_{L+\overline{AO}}(y^2-\cos y)dx+x\sin ydy-\int_{\overline{AO}}(y^2-\cos y)dx+x\sin ydy$$

$$=-\iint\limits_D(\sin y-2y-\sin y)dxdy-\int_\pi^0(0-1)dx$$

$$=2\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}ydy-\pi=\int_0^\pi\sin^2 xdx-\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

14. 求由曲面$2z=x^2+y^2$和$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体Ω的体积V.

解法一：联立$2z=x^2+y^2$和$z=\sqrt{x^2+y^2}$得　$x^2+y^2=4$，

故Ω在xoy面上的投影区域为$D:x^2+y^2\le 4$ ，则Ω在柱坐标系下为

$$\Omega:0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le 2,\frac{r^2}{2}\le z\le r$$

$$V=\iiint\limits_\Omega dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^r dz$$

$$=2\pi\int_0^2 r(r-\frac{r^2}{2})dr=\frac{4}{3}\pi.$$

解法二　联立$2z=x^2+y^2$和$z=\sqrt{x^2+y^2}$得　$x^2+y^2=4$，则

Ω在xoy面上的投影区域为$D:x^2+y^2\le 4$

$$V=\iint\limits_D(\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2+y^2}{2})dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(r-\frac{r^2}{2})rdr=2\pi\int_0^2 r(r-\frac{r^2}{2})dr=\frac{4}{3}\pi.$$

15. 设S是上半球面$z=\sqrt{1-x^2-y^2}(R>0)$与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$围成的闭曲面的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$S$外法线的方向余弦,

求$I=\oiint\limits_S\left[(x^3+z^2)\cos\alpha+(y^3+x^2)\cos\beta+(z^3+y^2)\cos\gamma\right]dS$.

解　设S所围成的区域记为Ω, 则

$$I=\oiint\limits_S(x^3+z^2)dydz+(y^3+x^2)dxdz+(z^3+y^2)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(3x^2+3y^2+3z^2)dxdydz$$

$$=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^1 r^4dr=\frac{6\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi=\frac{3(2-\sqrt{2})}{5}\pi.$$

16. 设 $f(x)=\dfrac{1}{(4-x)^2}$,将 $f(x)$ 展开成关于 x 的幂级数,并求 $f^{(20)}(0)$.

解 $f(x)=\left(\dfrac{1}{4-x}\right)'=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{1-x/4}\right)'$

$$=\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n\right)'=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{x}{4}\right)^n\right)' \qquad |x|<4$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^{n+1}}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{4^{n+2}}x^n(|x|<4).$$

因为 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{n+1}{4^{n+2}}$ ，所以 $f^{(n)}(0)=\dfrac{(n+1)!}{4^{n+2}}$ ，因而 $f^{(20)}(0)=\dfrac{(20+1)!}{4^{20+2}}=\dfrac{21!}{4^{22}}$.

四．综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程．）

17. 设函数 $u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 空间曲线 $L:x=t,y=2t^2,z=-2t^4$, $P_0(1,2,-2)$ 为曲线 L 上的一点,求 u 在点 P_0 处沿曲线 L 的切矢量方向（t 增大的方向）$\vec{l}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}|_{P_0}$, 并求函数 u 在点 $P_0(1,2,-2)$ 处的最大变化率.

解 点 $P_0(1,2,-2)$ 对应的参数 $t=1$ ，则曲线 L 在点 $P_0(1,2,-2)$ 的切矢量 $\vec{\tau}=\{1,4t,-8t^2\}|_{t=1}=\{1,4,-8\}$, $\overrightarrow{\tau^0}=\dfrac{1}{9}\{1,4,-8\}$.

$$\mathrm{grad}u\Big|_{P_0}=\left\{\frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},-\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},-\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right\}\Bigg|_{P_0}=\left\{\frac{8}{27},-\frac{2}{27},\frac{2}{27}\right\}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}|_{P_0}=gradu|_{P_0}\cdot\overrightarrow{\tau^0}=\left\{\frac{8}{27},-\frac{2}{27},\frac{2}{27}\right\}\cdot\frac{1}{9}\{1,4,-8\}=-\frac{16}{243}.$$

u 在 $P_0(1,2,-2)$ 处的最大变化率就是最大方向导数，记为 m ，则

$$m=\left|gradu\,|_{P_0}\right|=\frac{1}{27}\sqrt{8^2+(-2)^2+2^2}=\frac{2\sqrt{2}}{9}.$$

18． 设函数 $f(x,y)$ 的全微分为 $df(x,y)=(2ax+by)dx+(2by+ax)dy(a,b$ 为常数), 且 $f(0,0)=-3, f_x'(1,1)=3$，求点 $(-1,-1)$ 到曲线 $f(x,y)=0$ 上的点的距离的最大值.

解 由题意得 $\frac{\partial f}{\partial x}=2ax+by,\frac{\partial f}{\partial y}=ax+2by$，由 $f_x'(1,1)=3$ 得 $2a+b=3$

$f(x,y)=\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\int\left(ax+2by\right)dy=axy+by^2+c(x)$，因而有 $\frac{\partial f}{\partial x}=ay+c'(x)$，比较系数得 $b=a,c'(x)=2ax$

联立 $2a+b=3$ 和 $b=a$ 得 $a=1,b=1$ $c(x)=\int c'(x)dx=\int 2xdx=x^2+c$

因而 $f(x,y)=x^2+xy+y^2+c$,将 $f(0,0)=-3$ 代入得 $c=-3$ ，故

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2-3.$$

或利用 $Q_x=P_y$ 得 $a=b$，进而 $a=1,b=1$，

$df(x,y)=(2x+y)dx+(2y+x)dy=d(x^2+xy+y^2)$

在曲线 $f(x,y)=0$ 上任取一点 (x,y),则 $(-1,-1)$ 到 (x,y) 的距离 $d=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$

令 $F(x,y,\lambda)=(x+1)^2+(y+1)^2+\lambda(x^2+xy+y^2-3)$,

令 $\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=0\\ \frac{\partial F}{\partial y}=0\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0\end{cases}$, 即 $\begin{cases}2(x+1)+\lambda(2x+y)=0\\ 2(y+1)+\lambda(2y+x)=0\\ x^2+xy+y^2-3=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases},\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases},\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases},\begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$.

$d(1,1)=2\sqrt{2},d(-1,-1)=0,d(2,-1)=3,d(-1,2)=3$，故所求最大值为 3.

五．证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程．）

19. 设 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$, 证明：$1\le\iint\limits_D(\cos y^2+\sin x^2)dxdy\le\sqrt{2}$.

证明 由轮换对称性得 $\iint\limits_D\cos y^2dxdy=\iint\limits_D\cos x^2dxdy$

从而有

$$\iint_D(\cos y^2+\sin x^2)dxdy=\iint_D(\cos x^2+\sin x^2)dxdy=\sqrt{2}\iint_D\sin(x^2+\frac{\pi}{4})dxdy.$$

当$0\le x\le 1$时,$\frac{\sqrt{2}}{2}\le\sin(x^2+\frac{\pi}{4})\le 1$

$\iint_D\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}dxdy\le\iint_D(\cos y^2+\sin x^2)dxdy\le\sqrt{2}\iint_D dxdy$，即

$$1\le\iint_D(\cos y^2+\sin x^2)dxdy\le\sqrt{2}.$$

20. 设$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}(n=2,3,\cdots)$，证明：$\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛.

证法一　$S_{2n}=\sum_{k=2}^{2n+1}a_k=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)<0.$$

又$S_{2n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

所以$\{S_{2n}\}$单调递减有下界，故$\lim_{n\to\infty}S_{2n}$存在

因为$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+2}$，而$\lim_{n\to\infty}a_{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+3}}=0$，所以$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$.

因而$\lim_{n\to\infty}S_n$存在，故级数$\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛.

证法二　$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

利用泰勒公式$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+o(x)$得

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\overset{\Delta}{=}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-b_n.$$

注意$b_n=\frac{1}{2}\frac{1}{n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{2}\frac{1}{n^{3/2}}$，$\sum\frac{1}{n^{3/2}}$收敛，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛，故级数$\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛.