2019 ～2020 学年第 二 学期

《 微积分（一)》课程考试试卷(A 卷) 解答

一. 单项选择题(每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.）

1. 已知函数 $f(x,y)=|xy|$， 则以下说法中正确的是【 A 】.

A. $f(x,y)$ 在原点连续且偏导数存在　　B. $f(x,y)$ 在原点连续但偏导数不存在

C. $f(x,y)$ 在原点不连续但偏导数存在　　D. $f(x,y)$ 在原点不连续且偏导数不存在

2. 函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 可微是函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 有连续的偏导数的【 B 】.

A. 充分必要条件　　B. 必要但非充分条件

C. 充分但非必要条件　　D. 既非充分也非必要条件

3. 设光滑曲线 C 是光滑曲面 $F(x,y,z)=0$ 与 $G(x,y,z)=0$ 的交线，P 是 C 上一点.若 $\nabla F(P)$ 与 $\nabla G(P)$ 不平行， 则 C 在点 P 的一个切矢量为【 D 】.

A. $\nabla F(P)+\nabla G(P)$　B. $\nabla F(P)-\nabla G(P)$　C. $\nabla F(P)\cdot\nabla G(P)$　D. $\nabla F(P)\times\nabla G(P)$

4. 已知函数 $f(x,y)$ 连续， 则二次积分 $\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y=$【 A 】.

A. $\int_1^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$　　B. $\int_1^4 \mathrm{d}y\int_1^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_1^4 \mathrm{d}y\int_1^2 f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^2 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$

5. 设 Ω 是曲面 $z=x^2+y^2, 0\le z\le 1$，$I=\iint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}S$，$J=\iint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}S$，$K=\iint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}S$. 以下说法中正确的是【 B 】.

A. I,J,K 中仅有一个等于 0　　B. I,J,K 中有两个等于 0

C. I,J,K 都等于 0　　D. I,J,K 全都不等于 0

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数且 $f(x)=x, -\pi<x\le\pi$，$f(x)$ 的傅里叶级数的和函数是 $S(x)$. 以下说法中正确的是【 D 】.

A. $S(x)$ 处处连续　B. $S(x)\equiv f(x)$　C. $S(\pi)=\pi$　D. $S(\pi)=0$

二.　填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上．）

7. 设 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=3$，则 $(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})]=\underline{\ 3\ }$.

8. 方程 $x=z+y\mathrm{e}^z$ 在点 $(1,1,0)$ 的一个邻域内确定函数 $z=z(x,y)$，则 $z_y(1,1)=\underline{-\dfrac{1}{2}}$.

9. 函数 $u=x^2+3y^2+5z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 沿曲面 $x^2+3y^2+5z^2=9$ 的外法线方向的方向导数为 $\underline{2\sqrt{35}.}$

注: 写 $\sqrt{140}$ 也算对.

10. 已知 L 为直线 $2x+y=2$ 从点 $(1,0)$ 到点 $(0,2)$ 的一段，则 $\int_L(2x+y)\mathrm{d}s=\underline{2\sqrt{5}}$.

三. 基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程．）

11. 求微分方程 $y''+y=\cos 2x$ 的通解.

解 原方程的特征方程为 $r^2+1=0$，得两个特征根为 $r_{1,2}=\pm i$．故齐次方程的通解为

$$Y=C_1\cos x+C_2\sin x.\qquad(3\text{ 分})$$

设非齐次方程特解为 $y^*=A\cos 2x+B\sin 2x$.（5 分）

代入原方程解得 $A=-1/3,B=0$．故所求通解为 $y=-\dfrac{1}{3}\cos 2x+C_1\cos x+C_2\sin x$.（7 分）

12. 求经过点 $P(3,1,-2)$ 并且包含直线 L：$\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

解 所求平面过点 $P(3,1,-2)$ 以及直线 L 上的点 $Q(4,3,0)$，且垂直于直线的方向矢量 $\boldsymbol{s}=\{5,2,1\}$，所求平面的法矢量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}\times\overrightarrow{PQ}=\{2,-9,8\}$.（5 分）

所求平面方程为 $2(x-3)-9(y-1)+8(z+2)=0$，即 $2x-9y+8z+19=0$.（7 分）

13. 已知函数 $z=f(x^2-y^2,2x+3y)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 z_x,z_{xy}.

解 $z_x=2xf_1'+2f_2'$.（3 分）

$z_{xy}=-4xyf_{11}''+6xf_{12}''-4yf_{21}''+6f_{22}''=-4xyf_{11}''+6xf_{12}''-4yf_{12}''+6f_{22}''$.（7 分）

注 保留 f_{12}'',f_{21}'' 不扣分.

14. 求二重积分 $I=\iint\limits_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆域 $x^2-2x+y^2\le 0$.

解 $I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r$ （3 分）

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\cos^4\theta\mathrm{d}\theta$ (5 分)

$=8(\frac{3}{8}-\frac{5}{6}\frac{3}{8})\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$. (7 分)

另法 平移、对称性、极坐标 $I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$.

15. 求曲面积分 $I=\iint\limits_S xz^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0$ 的下侧.

解法一 补面 $S_1: x^2+y^2\le 1, z=0$ 上侧, 根据高斯公式,

$\iint\limits_S xz^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{S_1} xz^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iiint\limits_V z^3\mathrm{d}V$ (3 分)

$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\cos^3\phi\mathrm{d}\phi\int_0^1\rho^5\mathrm{d}\rho=-2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=-\frac{\pi}{12}$. (5 分)

显然 $\iint\limits_{S_1} xz^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, 故 $\iint\limits_S xz^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{12}$. (7 分)

解法二 用统一投影法, 向 xy 平面投影, 得

$\iint\limits_S xz^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-\iint\limits_D xz^3\frac{x}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D x^2(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ (4 分)

$=-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3(1-r^2)\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{12}$. (7 分)

16. 将 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x\ne 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 展开为 Maclaurin 级数.

解法一 直接代入 $\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots$,

以及 $\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$ （3 分）

得到 $f(x)=-\frac{2}{3!}x+\frac{4}{5!}x^3-\frac{6}{7!}x^5+\cdots$. （5 分）

即 $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{(2k+1)!}x^{2k-1}$， （7 分）

或 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2k+2)}{(2k+3)!}x^{2k+1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(\frac{1}{(2k)!}-\frac{1}{(2k+1)!})x^{2k-1}$.

解法二 注意 $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{5!}x^4-\frac{1}{7!}x^6+\cdots$. （$x\ne 0$） （3 分）

逐项求导得

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2k}{(2k+1)!}x^{2k-1}\ .\qquad（7 分）$$

四. 应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程．）

17. 求函数 $f(x,y)=x+y$ 在曲线 $x^2+2y^2=6$ 上所取到的最大值和最小值.

解法一 构造 Lagrange 辅助函数 $L(x,y,\lambda)=x+y+\lambda(x^2+2y^2-6)$.　（2 分）

令 $L_x=0, L_y=0, L_\lambda=0$,得到

$$\begin{cases}1+2\lambda x=0,\\ 1+4\lambda y=0,\\ x^2+2y^2=6.\end{cases}\qquad（4 分）$$

解得 $\lambda=\frac{1}{4}, x=-2, y=-1$ 或者 $\lambda=-\frac{1}{4}, x=2, y=1$. 由于最大值和最小值肯定存在, 比较得到最值 $\mathrm{Max}=f(2,1)=3, \mathrm{Min}=f(-2,-1)=-3$.　（7 分）

解法二 作椭圆周 $x^2+2y^2=6$ 的切线与函数 f 的等值线 $x+y=c$ 平行,

设切点为 (u,v)，则 $\vec{n}=\{2u,4v\}\,\|\,\{1,1\}$，即 $u=2v$，又 $u^2+2v^2=6$，　（4 分）

解得 $u=2v=\pm 2$，函数 f 在两个切点 $(2,1)$、$(-2,-1)$ 处取值分别为 $3,-3$.

几何上知函数 f 在椭圆周上的最小值为 -3，最大值为 3.　（7 分）

解法三 将椭圆周 $x^2+2y^2=6$ 参数化表示为 $x=\sqrt{6}\cos t, y=\sqrt{3}\sin t, t\in[0,2\pi]$　（3 分）

则 $f=\sqrt{6}\cos t+\sqrt{3}\sin t=3\sin(t+\arctan\sqrt{2}), t\in[0,2\pi]$，

显然其最小值为 -3，最大值为 3.　（7 分）

18. 求抛物柱面 $z=3-2x^2$ 和椭圆抛物面 $z=x^2+3y^2$ 所围成的立体的体积.

解 立体往 xoy 坐标面的投影区域是 $D: x^2+y^2\le 1$　（2 分）

$$V=\iiint_V \mathrm{d}v=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+3y^2}^{3-2x^2}\mathrm{d}z\qquad(3 分)$$

$$=\iint_D (3-3x^2-3y^3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(3-3r^2)r\mathrm{d}r\qquad(5 分)$$

$=\dfrac{3\pi}{2}$.　　(7 分)

五．综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程．）

19. 设 L 为位于右半平面内的光滑曲线，积分 $\int_L 2xy(x^4+y^2)^a\,\mathrm{d}x - x^2(x^4+y^2)^a\,\mathrm{d}y$ 在右半平面 ($x>0$)与路径无关，求 a 和 $I=\int_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})} 2xy(x^4+y^2)^a\,\mathrm{d}x - x^2(x^4+y^2)^a\,\mathrm{d}y$ 的值.

解　$Q_x=-2x(x^4+y^2)^a-4ax^5(x^4+y^2)^{a-1}, P_y=2x(x^4+y^2)^a+4axy^2(x^4+y^2)^{a-1}$.

令 $Q_x=P_y$,得到 $x(x^4+y^2)^a(a+1)=0$,故 $a=-1$.　　（3 分）

$$I=\int_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})}\frac{2xy}{x^4+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x^2}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=\int_{(2,0)}^{(1,0)}+\int_{(1,0)}^{(1,\sqrt{3})}=-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{3}.$$　　（5 分）

或 $I=\int_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})}\dfrac{y\mathrm{d}x^2-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\int_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})}\dfrac{-1}{1+(\frac{y}{x^2})^2}\mathrm{d}\dfrac{y}{x^2}=-\arctan\dfrac{y}{x^2}\Big|_{(2,0)}^{(1,\sqrt{3})}=-\dfrac{\pi}{3}$.

20. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，证明级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{n\ln^2 n}$ 绝对收敛.

证法一　注意到 n 充分大时

$$\frac{|a_n|}{n\ln^2 n}\le\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2\ln^4 n})\le\frac{1}{2}(a_n^2+\frac{1}{n^2}),$$　　（3 分）

根据比较判别法即得所证.　　（5 分）

证法二 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，故 $\lim a_n=0$,故 $|a_n|\le M$.

$$\frac{|a_n|}{n\ln^2 n}\le\frac{M}{n\ln^2 n}, n\ge 2.$$　　（3 分）

根据积分判别法，$\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{M}{n\ln^2 n}$ 收敛，再根据比较判别法即得所证.　　（5 分）