华中科技大学 2020～2021 学年第二学期

“微积分（一）”考试试卷(A 卷)

考试方式：闭 卷　考试日期：2021.06.28　考试时长：150 分钟

院（系）：______ 专业班级：_______ 学　号：________ 姓　名：_______

一、单项选择题（每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上。）

1. 微分方程 $y''-3y'+2y=2x-2\mathrm{e}^x$ 的特解 y^* 的形式是【 】.

A. $y^*=(Ax+B)\mathrm{e}^x$　B. $y^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^x$　C. $y^*=Ax+B+C\mathrm{e}^x$　D. $y^*=Ax+B+Cx\mathrm{e}^x$

2. 设曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$，点 $M(1,-1,0)$，则在点 M 处下列说法*不正确* 的是【 】.

A. 切矢量为 $\{-2,-2,4\}$　　B. 切矢量为 $\{-2,2,4\}$

C. 切线方程为 $x-1=y+1=-\dfrac{z}{2}$　　D. 法平面方程为 $x+y-2z=0$

3. 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处【 】.

A.可微　B. 偏导数存在　C. 连续　D. 不连续

4. 已知函数 f 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$【 】.

A. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{1+\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^2 f(x,y)\mathrm{d}y$

5. 设 Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x+y+z=0 \end{cases}$, $I=\oint_\Gamma x\mathrm{d}s$, $J=\oint_\Gamma y\mathrm{d}s$, $K=\oint_\Gamma z^2\mathrm{d}s$. 以下说法中正确的是【 】.

A. $K=0$　B. I,J,K 中有两个等于 0　C. I,J,K 都等于 0　D. I,J,K 全都不等于 0

6. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数且 $f(x)=\begin{cases} 0, & -\pi\le x<0, \\ \pi-x, & 0\le x<\pi \end{cases}$，$f(x)$ 的傅里叶级数的和函数是 $S(x)$. 以下说法中正确的是【 】.

A. $S(x)$ 处处连续　B. $S(x)\equiv f(x)$　C. $S(-1)=0$　D. $S(0)=\pi$

二、填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上。）

7. 直线 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ 与平面 $x-y+2z+4=0$ 的夹角是_______.

8. 设 $P_0(1,1,-1)$, $P_1(2,-1,0)$,则 $u=x+y^2+z^3$ 在 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为____.

9. 若 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$，则 $z_x(0,0)=$_________.

10. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}(-\infty<x<\infty)$ 的和函数为________ .

三、基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程。）

11. 求微分方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\ln\dfrac{y}{x}$ 的通解.

12. 已知函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中 f 有二阶连续偏导数， g 可导，求 z_x, z_{xy} .

13. 计算二次积分 $I=\int_1^3\mathrm{d}x\int_{x-1}^2\sin y^2\mathrm{d}y$.

14. 求三重积分 $I=\iiint\limits_V(x^3+y^2+z)\mathrm{d}v$，其中 V 为 $x^2+y^2+z^2\le a^2, a>0$.

15. 求 $I=\iint\limits_S(z^2+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是 $z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 2)$ 下侧.

16. 将 $f(x)=\arctan x$ 展开为 Maclaurin 级数，并求 $f^{(20)}(0), f^{(21)}(0)$.

四、应用题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程。）

17. 求 $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$ 的极值.

18. 已知曲线积分 $\int_L yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=1$，求 $f(x)$ 和 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}yf(x)\mathrm{d}x+[f(x)-x^2]\mathrm{d}y$ 的值.

五、综合题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程。）

19. 设 $D: x^2+y^2\le 1$，证明不等式： $\iint\limits_D\sin\sqrt{(x^2+y^2)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\dfrac{2}{5}\pi$.

20. 设 $f(0)=1, f'(0)=0$， $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有界，证明： $\alpha>\dfrac{1}{2}$ 时， $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(f(\dfrac{1}{n^{\alpha}})-1\right)$ 绝对收敛.