2022 ～2023 学年第 二 学期

《 微积分（一)》课程考试试卷(A 卷)解答

一. 单项选择题(每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.)

1、在空间直角坐标系中, 方程 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$ 表示（ D ）.

A. 半球面　　B. 柱面　　C. 锥面　　D. 单叶双曲面

分析：二次曲面的方程及名称.

2、设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处有 $f_x(1,1)=f_y(1,1)=1$，则必有 （ C ）.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to1}} f(x,y)$ 存在

B. $\mathrm{d}z\,|_{(1,1)}=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

C. $\lim\limits_{x\to1} f(x,1)$ 及 $\lim\limits_{y\to1} f(1,y)$ 都存在

D. $f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 沿方向 $\boldsymbol{n}=\{\cos\theta,\sin\theta\}$ 的方向导数存在

分析：偏导数，全微分、二重极限、连续和方向导数之间的关系

函数在某点可微可以推出函数在该点连续和偏导数存在及沿任意方向的方向导数存在，函数在某点的偏导数存在，能得到函数关于变量 x 或 y 在该点连续，但不能得到函数函数在某点连续、可微，故选答案 C

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x+3y\mathrm{d}y$，则点 $(0,0)$ （ D ）.

A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　B. 不是 $f(x,y)$ 的驻点

C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　D. 是 $f(x,y)$ 的极小值点

分析：由题意有 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x,\dfrac{\partial z}{\partial y}=3y$，令 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$ 得 $(0,0)$ 为驻点

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=3,\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

在点 $(0,0)$ 处，$A=2>0,C=3$，$B=0,AC-B^2=6>0$，

由极值判别的充分条件定理得：点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点，故答案为 D.

4. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 所围成的空间区域，将 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 化为柱坐标系下的累次积分，下列结果正确的是（ B ）.

A. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$　　B. $I=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$

C. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z$　　D. $I=2\pi\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^z f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}r$

分析：在柱坐标系下 Ω 可以表示为 $0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 1, r\le z\le 1$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_r^1 f(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}z,$$

在柱坐标系下 Ω 又可以表示为 $0\le z\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le z$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^z rf(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}r=2\pi\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z rf(\sqrt{r^2+z})\mathrm{d}r$$

故答案为 B.

5. 设 S 是上半球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(z\ge 0, R>0)$，$abc\ne 0$，则 $\iint\limits_S (ax+by+cz)\mathrm{d}S=$（ C ）.

A. $c\pi R^2$　　B. $\frac{1}{4}c\pi R^3$　　C. $c\pi R^3$　　D. $(a+b+c)\pi R^2$

分析：由对称性（偶倍奇零）得

$$\iint\limits_S (ax+by+cz)\mathrm{d}S=c\iint\limits_S z\mathrm{d}S$$

$$=c\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=c\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\pi R^3,$$

故答案为 C.

6. 下列命题中，正确的是（ A ）.

A. 若 $a_n\le b_n\le c_n$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

B. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}$ 收敛

分析：注意不等式 $0\le b_n-a_n\le c_n-a_n$，A 正确

B. 取 $a_n=\dfrac{1}{n}$, 则 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+1}<1(n=1,2,\cdots)$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散 ，故 B 不对

C. 对正项级数，结论是成立的. 但如取 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, v_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n}$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=1\ne 0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{n})$ 发散.

D. 不对，取 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n a_n}{\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散。

二.　填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上. ）

7. 设曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0\end{cases}$ 则 $\oint_{\Gamma}(x^2+2y^2+3z)\mathrm{d}s=\underline{2\pi}$

解：由第一型曲线积分的轮换对称性得

$$\oint_{\Gamma}(x^2+2y^2)\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}\mathrm{d}s=2\pi.$$

$$\oint_{\Gamma}3z\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}(x+y+z)\mathrm{d}s=0.$$

8. $z=x+3y+\ln(1+x^2+y^2)$ 在点 $(0,0,0)$ 的切平面方程为 $\underline{x+3y-z=0}$.

解: 令 $F(x,y,z)=x+3y+\ln(1+x^2+y^2)-z$，$\mathbf{grad}F=\{1+\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},3+\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},-1\}$

取在点 $(0,0,0)$ 的切平面方程的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\mathbf{grad}F|_{(0,0,0)}=\{1+\frac{2x}{1+x^2+y^2},3+\frac{2x}{1+x^2+y^2},-1\}|_{(0,0,0)}=\{1,3,-1\},$$

得 切平面方程为：$x+3y-z=0.$

9. 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $div(\mathbf{grad}u)|_{(1,-2,2)}=\underline{\frac{1}{9}}$.

解：$\mathbf{grad}u=\{\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\}$,

$$div(\mathbf{grad}u)=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2},$$

$$div(\mathbf{grad}u)|_{(1,-2,2)}=\frac{1}{1+4+4}=\frac{1}{9}.$$

10. 设 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi\le x<0, \\ 1, & x=0, \\ 2x, & 0<x<\pi \end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数在 $x=-3\pi$ 处的值为 $\underline{\frac{\pi}{2}}$.

解：由傅里叶级数的收敛定理得

$$S(x)=\begin{cases} x,-\pi<x<0, \\ 2x,0<x<\pi \\ 0,x=0 \\ \frac{\pi}{2},x=\pm\pi \end{cases}，S(-3\pi)=S(-\pi)=\frac{\pi}{2}$$

三．基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程．）

11. 求过点 $P(2,1,3)$ 且与 $L_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}$ 垂直的平面方程，并求平面与 L_1 的交点.

解：过点 $P(2,1,3)$ 且垂直于 L_1 的平面方程为：

$$2(x-2)+(y-1)-(z-3)=0 \quad 即\ 2x+y-z-2=0$$ （3 分）

设平面与 L_1 的交点为 Q，将直线 L_1 参数化为 $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=t+2, \\ z=-t+2 \end{cases}$ 代入平面方程得

$$2(2t+1)+(t+2)-(-t+2)-2=0,$$

解得交点参数 $t=0$．即 Q 点坐标为 $(1,2,2)$.　（7 分）

12. 设 $z=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{y}{x}$,求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}|_{(2,\pi)}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}|_{(2,\pi)}$．

解：$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x}\cdot\cos\dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\cos\dfrac{y}{x}$，　　$\dfrac{\partial z}{\partial y}|_{(2,\pi)}=0$．　　（3 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}(-\sin\frac{y}{x})\cdot(-\frac{y}{x^2})+\frac{-x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\cos\frac{y}{x}$$

$$=\frac{y\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\sin\frac{y}{x}-\frac{(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}\cos\frac{y}{x}$$ （5 分）

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}|_{(2,\pi)}=\frac{\pi\mathrm{e}^{-2}}{2^3}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{(2+1)\mathrm{e}^{-2}}{2^2}\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}\mathrm{e}^{-2}$$ （7 分）

13. 求曲面 $z=xy$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=1$ 内那部分面积 S．

解：所求曲面块在 xoy 面上的投影区域为 $D: x^2+y^2\le 1$，　　（1 分）

则所求面积 $S=\iint\limits_D\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　（3 分）

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$ （5 分）

$$=\frac{2\pi}{3}(1+r^2)^{3/2}|_0^1=\frac{2(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$$ （7 分）

14. 求 $I=\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $\begin{cases}y^2+\dfrac{z^2}{2}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成的曲面所围成的立体.

解：　旋转曲面方程为：$x^2+y^2+\dfrac{z^2}{2}=1$，故 Ω 为：$x^2+y^2+\dfrac{z^2}{2}\le 1$　　（2 分）

被积函数仅是 z 的函数，用截面法．截面为圆域：$D_z: x^2+y^2\le 1-\dfrac{z^2}{2}$

于是 $I=\iiint\limits_V z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　（4 分）

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}z^2\cdot\pi(1-\frac{z^2}{2})\mathrm{d}z$$ （6 分）

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}(z^2-\frac{z^4}{2})\mathrm{d}z=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$ （7 分）

15. 设 S 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,(R>0)$，取上侧，求 $I=\iint\limits_S \dfrac{(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

解：$I=\dfrac{1}{R}\iint\limits_S (x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，（2 分）

设 Σ：$z=0,(x,y)\in D_{xy}:x^2+y^2\le R^2$, 取下侧，则 $S+\Sigma$ 封闭，且取外侧 .

记 S 和 Σ 所围成的区域为 Ω，则

$$I=\frac{1}{R}\oiint\limits_{S+\Sigma}(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{R}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{（3 分）}$$

$$=\frac{1}{R}\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-0 \quad \text{（5 分）}$$

$$=\frac{1}{R}\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{2}{3}\pi R^2. \quad \text{（7 分）}$$

16. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的收敛域与和函数 $S(x)$.

解 因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2n+3)x^{2(n+1)}}{(n+1)!}\cdot\dfrac{n!}{(2n+1)x^{2n}}\right|=0\Rightarrow R=+\infty$.（2 分）

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2\cdot\frac{n}{n!}+\frac{1}{n!}\right)x^{2n},$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\cdot\dfrac{n}{n!}x^{2n}=2x^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)!}\left(x^2\right)^{n-1}=2x^2\mathrm{e}^{x^2}$ ，（4 分）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(x^2\right)^n=\mathrm{e}^{x^2}-1, \quad \text{（6 分）}$$

所以 $S(x)=2x^2\mathrm{e}^{x^2}+\mathrm{e}^{x^2}-1$， $x\in(-\infty,+\infty)$.（7 分）

四．综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程．）

17. 设 L 是 xoy 面上任意的光滑曲线， $f(x)$ 具有二阶连续的导数，且 $f(0)=4, f'(0)=3$, 若曲线积分 $\int_L(-x\mathrm{e}^x+f''(x))y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，求 $f(x)$.

解：记 $P=(-x\mathrm{e}^x+f''(x))y,Q=f(x)$，由曲线积分与路径无关，得 $P_y=Q_x$，

因而可得 $-xe^{x}+f''(x)=f'(x)$，即 $f''(x)-f'(x)=xe^{x}$ （2 分）

这是常系数线性非齐次微分方程，其对应的齐次微分方程的特征方程为：

$r^2-r=0$，特征根为 $r_1=1, r_2=0$

齐次方程的通解为 $f(x)=C_1+C_2e^{x}$. （4 分）

$\lambda=1$ 是特征方程的单根，故可设非齐次方程的特解为 $f^*(x)=x(ax+b)e^{x}$, 代入方程得

$(2ax+2a+b)e^{x}=xe^{x}$，比较系数得 $a=\dfrac{1}{2}, b=-1$

故原方程的通解为 $f(x)=C_1+C_2e^{x}+(\dfrac{1}{2}x^2-x)e^{x}$ （6 分）

将 $f(0)=4, f'(0)=3$ 代入通解得 $\begin{cases} C_1+C_2=4 \\ C_2-1=3 \end{cases}$, 解得 $C_1=0, C_2=4$，

故 $f(x)=4e^{x}+(\dfrac{1}{2}x^2-x)e^{x}$. （7 分）

18. 求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|4x^2+y^2\le 4\right\}$ 上的最大值和最小值.

解法 1 令 $\begin{cases} f_x(x,y)=2x=0, \\ f_y(x,y)=-2y=0 \end{cases}$ 解得 $f(x,y)$ 在 D 内部的唯一驻点 $(0,0)$. （2 分）

在椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上，$f(x,y)=x^2-(4-4x^2)+2=5x^2-2\ (-1\le x\le 1)$， （4 分）

容易得到其最大值 $M_1=f\big|_{x=\pm 1}=3$，最小值 $m_1=f\big|_{x=0}=-2$， （6 分）

与 $f(0,0)=2$ 比较可知 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值 $M=3$，最小值 $m=-2$. （7 分）

解法 2 令 $\begin{cases} f_x(x,y)=2x=0, \\ f_y(x,y)=-2y=0 \end{cases}$ 解得 $f(x,y)$ 在 D 内部的唯一驻点 $(0,0)$. （2 分）

设 $F(x,y,\lambda)=x^2-y^2+2+\lambda(x^2+\dfrac{y^2}{4}-1)$，令

$$\begin{cases} F_x=2x+2\lambda x=0, \\ F_y=-2y+\dfrac{\lambda}{2}y=0, \\ F_\lambda=x^2+\dfrac{y^2}{4}-1=0 \end{cases}$$ （4 分）

解得 4 个可能的条件极值点 $(0,2),(0,-2),(1,0),(-1,0)$. 因

$f(0,2)=-2, f(0,-2)=-2, f(1,0)=3, f(-1,0)=3$，　　（6 分）

再与 $f(0,0)=2$ 比较可知 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值 $M=3$，最小值 $m=-2$.　　（7 分）

五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程.）

19. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$，证明：$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}A^2.$

证法一　记 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则有 $F(0)=0,F(1)=A.$　　（1 分）

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]\mathrm{d}x \quad （3 分）$$

$$=A\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x=A^2-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x)$$

$$=A^2-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=A^2-\frac{1}{2}A^2=\frac{1}{2}A^2. \quad （5 分）$$

证法二　交换积分次序，有　$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x.$　　（2）

将上式右边的 x,y 互换（因为积分与积分变量用什么字母无关），得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y. \quad （3）$$

因此

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}A^2. \quad （5）$$

证法三　记 $D_1: 0\le y\le x, 0\le x\le 1$，　$D_2: x\le y\le 1, 0\le x\le 1$，$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$,

D_1,D_2 关于直线 $y=x$ 对称，则

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\iint_{D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad （1 分）$$

$$=\iint_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad （轮称性） \quad （3 分）$$

$$=\frac{1}{2}\left(\iint_{D_1} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}A^2 \quad （5 分）$$

20. 设 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$2a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+u_n}$，其中 $u_n>0$，$\{a_n\}$ 有上界，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证　$u_n=4a_{n+1}(a_{n+1}-a_n)$.　（1 分）

由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\sqrt{a_n^2+u_n})>a_n$ 知，$\{a_n\}$ 单增，利用题设 $\{a_n\}$ 有上界，得 $\{a_n\}$ 收敛. (2 分)

注意　$0<\frac{u_n}{4}=a_{n+1}^2-a_{n+1}a_n\le a_{n+1}^2-a_n^2$.　（3 分）

由 $\{a_n\}$ 收敛，知 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}^2-a_1^2)$ 存在，得 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}^2-a_n^2)$ 收敛.　（4 分）

进一步用比较判别法得 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.　（5 分）