2021 ～2022 学年第 二 学期

《 微积分（一)》课程考试试卷(A 卷)

一. 单项选择题(每小题 3 分，6 个小题共 18 分，将结果涂在答题卡上.）

1. 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为【 A 】.

A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$.　　B. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$.

C. $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$.　　D. $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$.

2. 在下列极限结果中，正确的是【 B 】.

A. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=0$　B. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$　C. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{x+y}=0$　D. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x+y}=0$

解析：因为 $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\le 1$，而 $0\le\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le|y|\xrightarrow{x\to0,y\to0}0$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

3. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则 $F'(2)$ 等于【 B 】

A. $2f(2)$.　　B. $f(2)$.　　C. $-f(2)$.　　D. 0.

解析：交换积分次序，得 $F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t[\int_1^x f(x)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x=\int_1^t f(x)(x-1)\mathrm{d}x$，

于是，$F'(t)=f(t)(t-1)$，从而有 $F'(2)=f(2)$.

4. 设曲线 $L: f(x,y)=1$（$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数)，过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N，T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是【C 】

A. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}s$　　B. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_T f(x,y)\mathrm{d}y$　　D. $\int_T f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$

解析：设 M 、N 点的坐标分别为 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2),x_1<x_2,y_1>y_2$：

$\int_T f(x,y)\mathrm{d}s=\int_T\mathrm{d}s=s>0$；$\int_T f(x,y)\mathrm{d}x=\int_T\mathrm{d}x=x_2-x_1>0$.

$\int_T f(x,y)\mathrm{d}y=\int_T\mathrm{d}y=y_2-y_1<0$；$\int_T f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y=\int_T\mathrm{d}f(x,y)=0$.

5. 设 L 为空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则 $\oint_L x^2 \mathrm{d}s =$【 D 】.

A. 0.　　B. $2\pi a^3$.　　C. $\frac{1}{3}\pi a^2$.　　D. $\frac{2}{3}\pi a^3$.

解析： 由轮换性 $I=\frac{1}{3}\oint_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\pi a^3$.

6. 设两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则【 C 】.

A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛　　B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散

C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛　　D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散

解析： 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则由定义可知 $\exists N_1$, 使得 $n > N_1$ 时，有 $|a_n| < 1$

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n| = 0$, 则由定义可知 $\exists N_2$, 使得 $n > N_2$ 时，有 $|b_n| < 1$

从而，当 $n > N_1 + N_2$ 时，有 $a_n^2 b_n^2 < |b_n|$，则由正项级数的比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

A 取反例 $a_n = b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$；B 取反例 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$；D 取反例 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$

二.　填空题（每小题 4 分，4 个小题共 16 分，将计算结果写在答题卡上．）

7. 经过点 $A(1,-2,3)$ 并且包含 x 轴的平面方程为 $\underline{3y+2z=0}$

解 1　x 轴的方向 $\boldsymbol{i}=\{1,0,0\}$，$\overrightarrow{OA}=\{1,-2,3\}$，

取所求平面的法矢量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}\times\overrightarrow{OA}=\{0,-3,-2\}$，

所以，所求平面方程为 $3y+2z=0$.

解 2 由条件可设所求平面方程为 $By+Cz=0$，由平面过点 $A(1,-2,3)$，得

$-2B+3C=0$，即 $B=\frac{3}{2}C$，

故所求平面方程为$\frac{3}{2}Cy+Cz=0$，即$3y+2z=0$.

8. 设矢量场$\boldsymbol{A}=x^2\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$，则$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\big|_{(1,1,2)}=\underline{-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}}$.

解 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\big|_{(1,1,2)}=-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$.

9. $u=xe^yz^3$在点$(1,1,1)$处的全微分$\mathrm{d}u=\underline{e\,\mathrm{d}x+e\,\mathrm{d}y+3e\,\mathrm{d}z}$

解 记$(1,1,1)$为P，因

$$u_x(P)=e^yz^3\big|_P=e,\quad u_y(P)=xe^yz^3\big|_P=e,\quad u_z(P)=3xe^yz^3\big|_P=3e,$$

所以 $\mathrm{d}u(P)=e\mathrm{d}x+e\mathrm{d}y+3e\mathrm{d}z$.

10. 若将函数$f(x)=\pi-x\ (0\le x\le\pi)$展开成正弦级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，则系数$b_4$的值为$\underline{\frac{1}{2}}$.

解 $$b_4=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin 4x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)\mathrm{d}(\cos 4x)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[(x-\pi)\cos 4x\big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 4x\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}.$$

三．基本计算题（每小题 7 分，6 个小题共 42 分，必须写出主要计算过程．）

11. 设方程组$\begin{cases}u+v=x\\ u^2+v^2=y\end{cases}$确定隐函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$，且$u\ne v$，求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$.

解 对方程组求关于x 的偏导数，得：

$$\begin{cases}u_x+v_x=1,\\ 2uu_x+2vv_x=0\end{cases},$$ （4 分）

由此解出 $u_x=\frac{v}{v-u}$，$v_x=\frac{-u}{v-u}$. （7 分）

12. 设$\boldsymbol{n}$是曲面$S:z=x^2+y^2$在点$P_0(1,1,2)$处指向上侧的法矢量，求函数$u=xz^3-3yz$在点P_0处沿方向$\boldsymbol{n}$的方向导数$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$.

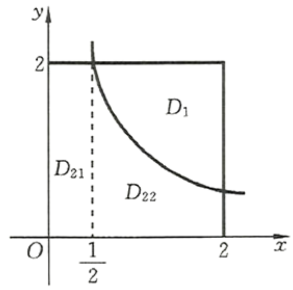
解 矢量$\boldsymbol{n}=\{-2x,-2y,1\}\big|_{P_0}=\{-2,-2,1\}$， 单位法矢量$\boldsymbol{n}^0=\frac{1}{3}\{-2,-2,1\}$， （3 分）

函数u在P_0处的梯度为

$$\mathbf{grad}u\big|_{P_0}=\left\{z^3,-3z,3xz^2-3y\right\}\big|_{(1,1,2)}=\{8,-6,9\},$$ （5 分）

则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{P_0} = \mathbf{grad}u\big|_{P_0}\cdot \boldsymbol{n}^0 = \dfrac{5}{3}$. （7 分）

13. 计算 $I=\iint\limits_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是正方形区域 $0\le x\le 2, 0\le y\le 2$.



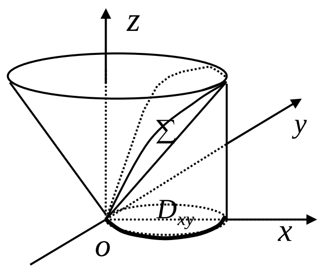
解 $I=\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ （2 分）

$$=\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{21}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{22}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{1/2}^{2}x\,\mathrm{d}x\int_{1/x}^{2}y\mathrm{d}y+\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{1/2}\mathrm{d}x+\int_{1/2}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{1/x}\mathrm{d}y$$ （5 分）

$$=\frac{19}{4}+\ln 2.$$ （7 分）

14. 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.



解 由于 Σ 关于 xOz 面对称，且被积函数 xy 及 yz 是关于 y 的奇函数，故

$$\iint\limits_{\Sigma}xy\mathrm{d}S=0,\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}S=0,$$ （2 分）

于是 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}zx\mathrm{d}S=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\cos\theta\,\mathrm{d}r$$ （5 分）

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$ （7 分）

15. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$（$R>0$）的外侧，求 $I=\unicode{x222F}_S x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 $I=\iiint\limits_V(3x^2+2y+1)\mathrm{d}v$ （3 分）

$$=\iiint\limits_V(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v+0+\iiint\limits_V\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^R\rho^2\cdot\rho^2\sin\rho\mathrm{d}\rho+\frac{4}{3}\pi R^3$$ （5 分）

$$=2\pi\cdot(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{1}{5}\rho^5\Big|_0^R+\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$=\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^3$$ （7 分）

16. 确定幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n$ 的收敛域并求其和函数 $S(x)$.

解 （1）$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1}=1$，

当 $x=\pm1$ 时，对应的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$，因通项不趋于 0 而发散，

所以收敛域为 $(-1,1)$. (3 分)

（2）$S(0)=0$.

当 $x\in(-1,1)$ 且 $x\neq0$ 时， $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[x^n-\frac{x^n}{n+1}\right]$,

而 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1$，$|x|<1$；

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\left[\frac{1}{1-t}-1\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{x}\left(-\ln(1-x)-x\right),\ |x|<1,$$

综上可得，$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}, & |x|<1, x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ （7 分）

四. 综合题（每小题 7 分，2 个小题共 14 分，必须写出主要过程. ）

17. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$，求非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解.

解 由常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$ 可知

$y_1=\mathrm{e}^x$， $y_2=x\mathrm{e}^x$ 为其线性无关解. 代入齐次方程，有

$y_1'' + ay_1' + by_1 = (1+a+b)e^x = 0 \Rightarrow 1+a+b=0$

$y_2'' + ay_2' + by_2 = [2+a+(a+1+b)x]e^x = 0 \Rightarrow 2+a=0$

从而可见 $a=-2, b=1$. （3 分）

因此，微分方程为 $y''-2y'+y=x$ 。

设特解 $y^* = Ax+B$，代入原方程，$-2A+Ax+B=x$

比较系数，的 $A=1, B=2$，所以 特解 $y^*=x+2$

因此，方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x+2$ （5 分）

把 $y(0)=2$， $y'(0)=0$ 代入，得 $C_1=0, C_2=-1$ ，

所以所求解为 $y=-x\mathrm{e}^x+x+2$. （7 分）

18. 求 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\big| x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$ 上的最大值和最小值.

解 因为 $f_x'(x,y)=2x-2xy^2$， $f_y'(x,y)=4y-2x^2y$，解方程：

$$\begin{cases} f_x' = 2x-2xy^2=0, \\ f_y' = 4y-2x^2y=0 \end{cases}$$ 得开区域内的可能极值点为 $(\pm\sqrt{2},1)$.

其对应函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$. （2 分）

又当 $y=0$ 时， $f(x,y)=x^2$ 在 $-2\le x\le 2$ 上的最大值为 4，最小值为 0. （4 分）

当 $x^2+y^2=4, y>0, -2<x<2$，构造拉格朗日函数

$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4)$

解方程组 $\begin{cases} F_x' = 2x-2xy^2+2\lambda x=0, \\ F_y' = 4y-2x^2y+2\lambda y=0, \\ F_\lambda' = x^2+y^2-4=0, \end{cases}$ 得可能极值点：$(0,2), (\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$，其对应函数

值为 $f(0,2)=8, f(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})=\frac{7}{4}$. （6 分）

比较函数值 $2,0,4,8,\frac{7}{4}$，知 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值为 8，最小值为 0. （7 分）

五. 证明题（每小题 5 分，2 个小题共 10 分，必须写出主要过程. ）

19. 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$是条件收敛的.

证法一　因$|u_n|\sim\dfrac{1}{n}$（$n\to\infty$），故绝对值级数是发散的.　（2 分）

又$u_n=\dfrac{(-1)^n n}{n^2-1}+\dfrac{1}{n^2-1}$，而$\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^2-1}$是条件收敛的（$\dfrac{n}{n^2-1}=\dfrac{1}{n-\dfrac{1}{n}}$单调递减趋于零，且

$\dfrac{n}{n^2-1}\sim\dfrac{1}{n}$），$\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$绝对收敛，故原级数是条件收敛的.　（5 分）

证法二　$a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\cdot\dfrac{1}{1-(-1)^n n^{-1}}=\dfrac{(-1)^n}{n}\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}+o(\dfrac{1}{n})\right\}$

$$=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\ ,$$　（2 分）

记 $b_n=\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})\sim\dfrac{1}{n^2}$，则 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+b_n$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$条件收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$绝对收敛，故原级数是条件收敛的.　（5 分）

20. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数, L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线, 其始点为(a,b), 终点为(c,d). 记$I=\int_L\dfrac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\dfrac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$,

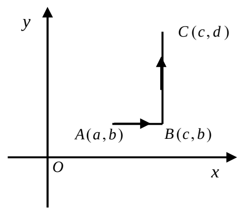
(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关. (2) 当 $ab=cd$ 时, 求 I 的值.

证明（1）设$P=\dfrac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]$, $Q=\dfrac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分 I 与路径无关.　（2 分）

(2) 如图, 由于积分 I 与路径无关，所以



$$I=\int_{(a,b)}^{(c,b)}\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

$$+\int_{(c,b)}^{(c,d)}\frac{1}{y}\left[1+y^2f(xy)\right]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2f(xy)-1\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^c\frac{1}{b}\left[1+b^2f(bx)\right]\mathrm{d}x+\int_b^d\frac{c}{y^2}\left[y^2f(cy)-1\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)\mathrm{d}t+\int_{cb}^{cd}f(t)\mathrm{d}t\quad=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t$$

当 $ab=cd$ 时, $\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t=0$， 所以 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.　（5 分）

另法　被积式

$$\varphi=\frac{1}{y}\mathrm{d}x+yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y=\mathrm{d}\frac{x}{y}+f(xy)\mathrm{d}(xy)=\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}+F(xy)\right),$$

其中 $F(t)$ 为 $f(t)$ 的原函数.　（3 分）

$$I=\left(\frac{x}{y}-F(xy)\right)\Big|_{(c,d)}^{(a,b)}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$　（5 分）