



地面自适应运动。

### 1.1 轮式运动——倒立摆模型

对于机器人的轮式运动,可作如下理想化假设:机体的质量等效集中于质心位置;忽略腿部运动对轮式运动的影响;忽略腿部连杆的质量;驱动轮与地面为无滑动的滚动摩擦。

基于以上理想化假设,可将轮腿式平衡机器人的轮式运动等效简化为摆长可变的双轮倒立摆模型,如图1、图2所示。

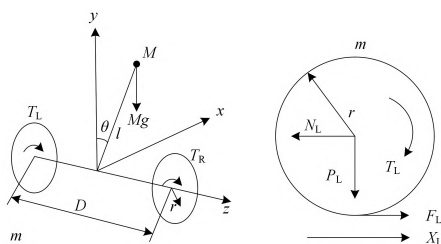


图1 双轮倒立摆模型

图2 驱动轮简化模型

## 1.2 经典力学分析

驱动轮在  $x$  方向的力平衡方程为:

$$m_w \ddot{x} = F_I - N_I \quad (1)$$

$$I_w \frac{\ddot{x}}{R} = T - F_L R \quad (2)$$

合并式(1)和式(2),消去 $F_1$ ,得到 $\ddot{x}$ 的表达式为:

$$\ddot{x} = \frac{T - N_L R}{\frac{I_w}{R} + m_w R} \quad (3)$$

对摆杆,有:

$$N_L - N_x = m_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} (x + L \sin \theta) \quad (4)$$

$$P_L - P_y - m_p g = m_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} (L \cos \theta) \quad (5)$$

$$I_p \ddot{\theta} = (P_L L + P_y L_M) \sin \theta - (N_L L + N_x L_m) \cos \theta - T + T_p \quad (6)$$

对机体,有:

$$N_x = M \frac{\partial^2}{\partial t^2} (x + (L + L_M) \sin \theta - l \sin \varphi) \quad (7)$$

$$P_y - Mg = M \frac{\partial^2}{\partial t^2} ((L + L_M) \cos \theta + l \cos \varphi) \quad (8)$$

$$I_M \ddot{\varphi} = T_p + N_M l \cos \varphi + P_y l \sin \varphi \quad (9)$$

机器人的模型参数如表1所列。

表1 机器人模型参数

符号	含义	单位
$m_w$	驱动轮转子质量	kg
$m_p$	摆杆质量	kg
$M$	机体质量	kg
$I_w$	驱动轮转子转动惯量	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$I_p$	摆杆绕质心转动惯量	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$I_M$	机体绕质心转动惯量	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
$R$	驱动轮半径	m
$L$	摆杆重心到驱动轮轴距离	m
$L_M$	摆杆重心到机体转轴距离	m
$l$	机体重心到其转轴距离	m

## 2 LOR算法

## 2.1 LOR建模分析

根据轮腿的倒立摆模型,设定一个反馈矩阵  $K$ :

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix} \quad (10)$$

令  $\mu = -KZ$ , 则  $\dot{Z} = AZ - BKZ = (A - BK)Z$ 。将  $A - BK$  命名为  $A_{cl}$  矩阵, 通过改变反馈矩阵  $K$  的各项参数, 可使  $A_{cl}$  矩阵的特征值全部非正, 以使系统稳定。

针对如何配置极点使系统性能最优的问题,本文为线性二次型调节器(Linear Quadratic Regulator, LQR)<sup>[5]</sup>引入了代价函数:

$$J = \int_0^{+\infty} (Z^T Q Z + \mu^T R \mu) dt \quad (11)$$

其目的是通过调节状态反馈控制器 $\mu=-KZ$ ,使代价函数取得最小值 $J_{\min}$ 。在此过程中, $Q$ 和 $R$ 表示需要设计的半正定矩阵和正定矩阵, $Q$ 矩阵表示对于状态变量 $Z$ 的惩罚, $R$ 矩阵表示对于输入量 $\mu$ 的惩罚。 $Q$ 矩阵的某一分量值越大,对应的状态变量衰减至0的速度越快; $R$ 矩阵的分量则用于限制对应输入量 $\mu$ 的大小。

反馈矩阵  $K$  的计算公式为:

$$K=R^{-1} B^T P \quad (12)$$

其中,  $P$  矩阵由 Riccati 方程解得:

$$A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P = 0 \quad (13)$$

通过上述方法即可在线性化平衡点附近实现系统稳定。代入相应的  $Q$  矩阵和  $R$  矩阵进行计算则能够得到反馈矩阵  $K$ 。

## 2.2 MATLAB 建模

在 Simulink 中搭建轮式运动的仿真控制模型,具体如图 3 所示。

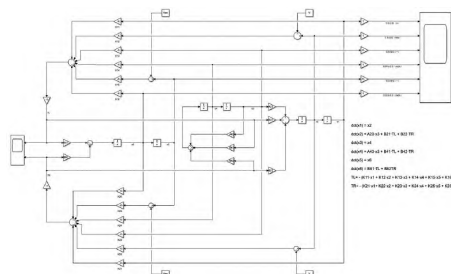


图3 轮式运动的Simulink仿真控制模型

将 MATLAB Simulink 仿真得到的反馈矩阵  $K$  的参数代入仿真模型中,并设定初始俯仰角为  $20^\circ$ ,以模拟机器人从远离平衡点的起始位置回到平衡点的过程。各状态变量的仿真结果如图 4 所示,各输入量的仿真结果如图 5 所示。

由图4和图5可知,机器人在1 s左右回到平衡点并保持平衡状态。此过程中的车体位移在0.2 m左右,同时对转

向运动的影响非常小。左右驱动轮所需的回复力矩不超过  $3.5 \text{ N} \cdot \text{m}$ , 在所选电机的峰值扭矩范围内, 满足实际要求。

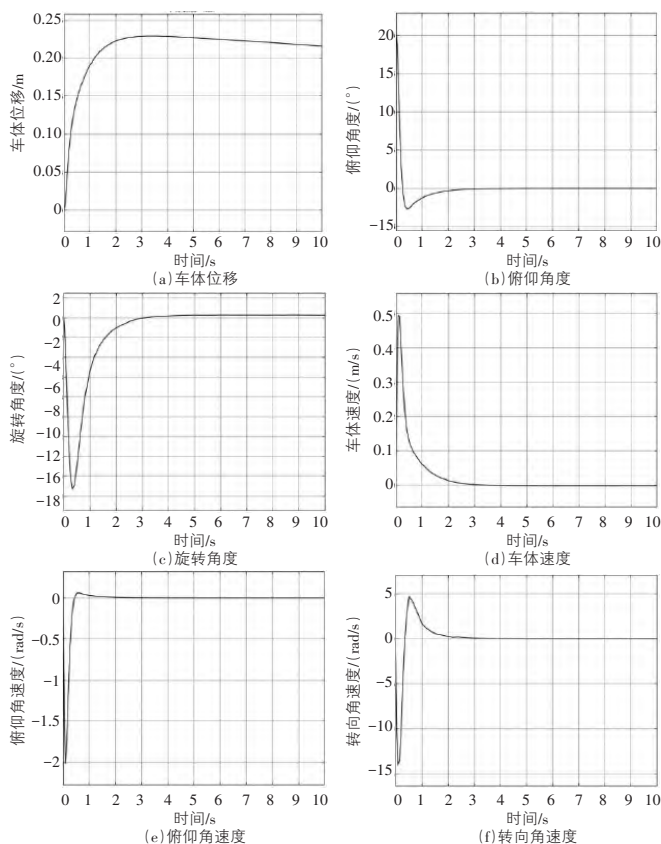


图4 初始俯仰角  $20^\circ$  时各状态变量的仿真结果

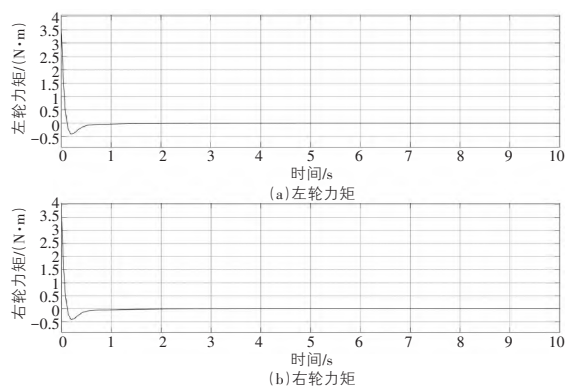


图5 初始俯仰角  $20^\circ$  时各输入量的仿真结果

### 3 VMC解算

#### 3.1 正运动学解算

五连杆机构参数定义如图6所示。其中, A、E两转动副由电机驱动, 其角度  $\phi_1$ 、 $\phi_4$  可通过电机编码器测得。在控制任务中主要关注五连杆机构末端C点的位置, 通常可用直角坐标  $(x, y)$  或极坐标  $(L_0, \phi_0)$  表示。

通过五连杆左右两部分列写C点坐标, 可得到:

$$\begin{cases} x_B + l_2 \cos \phi_2 = x_D + l_3 \cos \phi_3 \\ y_B + l_2 \sin \phi_2 = y_D + l_3 \sin \phi_3 \end{cases} \quad (14)$$

求解方程组可得到角度  $\phi_2$ :

$$\phi_2 = 2 \arctan \left( \frac{B_0 + \sqrt{A_0^2 + B_0^2 - C_0^2}}{A_0 + C_0} \right) \quad (15)$$

其中,

$$A_0 = 2l_2(x_D - x_B) \quad (16)$$

$$B_0 = 2l_2(y_D - y_B) \quad (17)$$

$$C_0 = l_2^2 + l_{BD}^2 - l_3^2 \quad (18)$$

$$l_{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} \quad (19)$$

通过角度  $\phi_2$  可解算出C点的直角坐标  $(x, y)$ :

$$\begin{cases} x_C = l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos \phi_2 \\ y_C = l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin \phi_2 \end{cases} \quad (20)$$

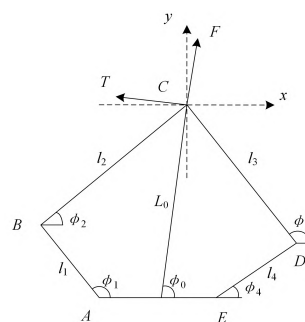


图6 五连杆机构

#### 3.2 VMC雅可比矩阵

虚拟模型控制 (Virtual Model Control, VMC)<sup>[6]</sup> 是一种直觉控制方式, 其关键是在每个需要控制的自由度上构造恰当的虚拟构件以产生合适的虚拟力。虚拟力不是实际执行机构的作用力或力矩, 而是通过执行机构的作用转换而形成。为了将工作空间的力或力矩映射成关节空间的关节力矩, 需要得到这两个空间的位置映射关系, 即正运动学模型:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{q}) \quad (21)$$

式中:  $\mathbf{x} = [L_0 \phi_0]^T$ ,  $\mathbf{q} = [\phi_1 \phi_4]^T$ 。求  $\mathbf{x}$  全微分得:

$$\begin{cases} \delta L_0 = \frac{\partial f_1}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \phi_4} \delta \phi_4 \\ \delta \phi_0 = \frac{\partial f_2}{\partial \phi_1} \delta \phi_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \phi_4} \delta \phi_4 \end{cases} \quad (22)$$

即:

$$\delta \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_4} \end{bmatrix} \delta \mathbf{q} \quad (23)$$

定义雅可比矩阵  $\mathbf{J}$  为:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \phi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi_4} \end{bmatrix} \quad (24)$$

有:

$$\delta x = J \delta q \tag{25}$$

通过雅可比矩阵  $J$  将关节速度  $\dot{q}$  映射为五连杆姿态变化率  $\dot{x}$ 。根据虚功原理,有:

$$T^T \delta q + (-F)^T \delta x = 0 \tag{26}$$

式中:  $T = [T_1 T_2]^T$  为前后两关节电机输出力矩列向量,  $F = [F T_p]^T$  为腿部五连杆机构沿腿的推力  $F$  与沿中心轴的力矩  $T_p$  构成的列向量。将式(25)代入,有:

$$T = J^T F \tag{27}$$

综上,通过正运动学模型雅可比矩阵即可解算出关节电机输出力矩。要想得到机器人腿长  $L_0$ ,则需对机器人腿部平面五杆机构进行正运动学解算。而在轮腿倒立摆模型中,则需要运用VMC,并根据  $T_p$  获得两关节的电机输出扭矩。

4 关节电机

由于轮腿式平衡机器人没有被动悬挂,其避震效果全靠五连杆的轮腿来实现,所以关节电机需要具备较大的输出力矩。通过上述动力学建模和MATLAB建模分析,同时综合考虑各种算法,最终本项目选择了海泰HT-03型号的关节电机(见图7),其扭矩为6.5 N·m,满足使用要求。

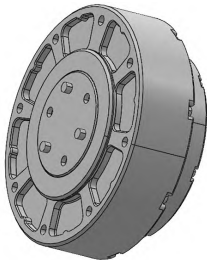


图7 海泰HT-03电机

5 结语

本文主要介绍了轮腿式平衡机器人的数学模型,将五连杆机构引入了轮腿机器人中,应用基于输出调节和LQR方法的线性反馈控制器,采用VMC算法设计了腿部运动控制器。设计过程均是先根据动力学方程建立控制模型,再使用Simulink搭建控制方框图进行仿真计算,根据仿真结果调整控制参数,最后分析本系统在该参数下的控制效果,保障机器人在各个高度下均能实现良好的控制效果。

腿部控制过程的系统性分析为实现本倒立摆机器人系统提供了完整的理论分析,也为后续搭建轮腿机器人的硬件系统、进一步的软件分析及系统优化奠定了一定的理论基础。

参考文献

[1]佚名.腾讯轮腿式机器人“Ollie”升级增加触觉感知功能[J].机器人技术与应用,2022(5):8.  
[2]Akesson J, Blomdell A, Braun R. Design and control of YAIP — an inverted pendulum on two wheels robot[C]// IEEE International Symposium on Computer Aided Control SystemDesign, IEEE International Conference on Control Applications. IEEE, 2006.  
[3]刘帅帅.新型两轮轮腿式自平衡机器人研究[D].杭州:浙江农林大学,2023.  
[4]陈阳,王洪玺,张兰勇.轮腿式平衡机器人控制[J].信息与控制,2023,52(5):648-659.  
[5]于红英,唐德威,王建宇.平面五杆机构运动学和动力学特性分析[J].哈尔滨工业大学学报,2007,39(6):940-943.  
[6]贺回国.基于VMC的四足机器人运动控制仿真及参数分析[D].太原:太原科技大学,2023.