基于流量及可靠性的不确定图边关键度研究

作者名

摘要

在实际的应用中，不确定性是许多系统的固有特性，如电力传输网络中的元件、数据通信网络中的节点都存在着发生故障的概率，交通运输网络中道路有发生拥塞的概率等。可以将此类的问题建模成不确定图，从而将问题转化为不确定图的问题来解决。根据最大流最小割定理，网络的最大流受限于网络中存在的最小割集，也就是说最小割集中的任意一条边断掉都会使整个网络可以传输的最大流量下降，这样的边就成了整个网络相对于流量的薄弱环节。同样的，不确定图中的边可以看做是从源点到汇点的信息传输通道，而关键边对于网络的信息传输可靠性起到支撑的作用，一旦发生故障，将对整个网络的信息传输产生巨大影响，甚至导致整个网络瘫痪，这样的边就构成了网络相对于可靠性的薄弱环节。为此，针对不确定图中边对于可靠性的重要度进行评估，寻找关键边就成为一项有意义的工作，这对于后期网络维护具有重大的决策和指导意义，对于薄弱环节的改进也可以显著的提高系统的可靠性。

基于此，本文将从一个新的角度，即从不确定图流分布的可靠性和流量的角度来构建边关键度识别模型，根据边对于不确定图可靠性的影响，对关键边进行识别。同时为更加准确，多角度的体现出不确定图中边的关键程度，本文在流分布可靠性指标的基础上添加不确定图能够达到最大流量大小以及对应的随机流网络的可靠性这两个指标，多角度、综合对关键边进行识别。

为研究该问题，本文首先基于状态划分算法，提出一种以增量的方式计算移除边之后不确定图最可靠最大流可靠性的变化，该方法利用边移除之前计算状态的中间结果，根据边在子图区间的存在多少的状况对不确定图的边进行定性分类，然后结合求得的子图区间，定量的求移除边对于不确定图状态的影响。相对于重新计算而言，使用增量计算能有效减少复杂度。同时考虑到传统状态划分算法需要划分的状态空间较大，本节在原有计算方式的基础上提出一种基于确定边过滤的状态划分算法，该算法的主要思路是在使用状态划分算法之前，首先给出能够确定类别的边（定性的边），从而减少状态划分的空间。这些确定边包括割集中的边和悬挂边。

最后本文基于边移除后对流量及可靠性产生的损失这一系统论的角度提出（1）字典序模型、（2）化多目标为单目标模型、（3）多重排序模型，三种基于流量和流可靠性指标的边关键度识别模型，然后研究他们的算法性能，并根据归一化误差方法衡量三种模型在识别关键边上的优劣，最后结合智能电网这一具体的应用背景，综合研究这三个模型，以实现对关键边更灵活、更准确、更快速的识别。

**Keyword:** 不确定图, 关键边, 流可靠性, 流量

目录

[基于流量及可靠性的不确定图边关键度研究 1](#_Toc420941437)

[**1** 研究背景和意义 3](#_Toc420941438)

[**2** 研究现状 4](#_Toc420941439)

[**3** 研究内容 5](#_Toc420941440)

[**3.1** 如何基于可靠性构建边关键度识别模型 5](#_Toc420941441)

[**3.2** 如何快速计算边发生故障对不确定图状态的影响 5](#_Toc420941442)

[**3.3** 如何综合权衡流量和可靠性以实现对关键边更快更准的识别 5](#_Toc420941443)

[**4** 研究方案 6](#_Toc420941444)

[**4.1** 基于流分布可靠性的边关键度识别模型 6](#_Toc420941445)

[4.1.1 不确定图的流分布可靠性 6](#_Toc420941446)

[4.1.2 基于流分布可靠性建立关键度识别模型 8](#_Toc420941447)

[**4.2** 边移除前后不确定图状态的计算 9](#_Toc420941448)

[4.2.1 基于增量状态划分算法 9](#_Toc420941449)

[4.2.2 基于确定边过滤的状态划分算法 17](#_Toc420941450)

[**4.3** 基于流量及可靠性的不确定图关键边识别 21](#_Toc420941451)

[4.3.1 指标计算和预处理 21](#_Toc420941452)

[4.3.2 化多目标为单目标模型 22](#_Toc420941453)

[4.3.3 字典序模型 22](#_Toc420941454)

[4.3.4 多重排序模型 23](#_Toc420941455)

[**4.4** 电力系统数据分析 24](#_Toc420941456)

[4.4.1 评价体系 24](#_Toc420941457)

[4.4.2 综合多种模型分析 25](#_Toc420941458)

[**5** 试验（思考中） 26](#_Toc420941459)

[**5.1** 试验1.1：重复计算方法、ICA、FEA对同样的数据集时间对比 26](#_Toc420941460)

[**5.2** 试验1.2：不同稠密度（集合度）的影响 26](#_Toc420941461)

[**5.3** 试验2.1：后一个模型（3目标）为什么优于前一个模型（只有流可靠性一个目标） 26](#_Toc420941462)

[**5.4** 试验2.2：三种模型识别效果通过评价指标体现 26](#_Toc420941463)

[**5.5** 试验2.3：两种评价体系试验比较 26](#_Toc420941464)

[**5.6** 试验2.4：电网数据基于三种模型结合的效果是不是更佳？ 26](#_Toc420941465)

# 研究背景和意义

图是离散数学和计算机科学中一种重要的数据结构，它可以很好的表示数据的内部结构及数据之间的关联，因其能表示丰富的信息和复杂的结构而在众多的领域有着广泛的应用。对于实际网络系统如数据通讯网络、输变电网络、交通网络等，不确定性是其固有特性，这种不确定性或是由于测量数据存在误差，或是应用本身包含概率特征而引入。如电能传输网络中，输变电设备都有发生故障的可能性，而交通网络中每条道路都有一个发生拥塞的概率，当这种不确定性表达于图数据中，则形成不确定图[1-3]。

最大流问题是传统图论中一类经典的组合优化问题, 在众多的领域有着广泛而深入的研究, 一般情况下最大流通常对应多个不同的分布方案, 对于确定图而言, 这些不同的分布方案对于流的传递是等价的, 但是对于边、节点都可能存在不确定性的不确定图来说, 不同的流分布方案对应着不同的可靠性, 从而存在着最可靠最大流问题。例如：在输变电网络中, 电能从发电站A点传输到目的地B点可能存在着多种传输方案, 而这些方案由于涉及到具体不同可靠性的输电设备和输电线路而具有不同的可靠性, 为了保证电网电能传递具有更好的安全可靠性, 就需要找到最可靠的一种传输电能的方案。

在不确定图中, 对于流分布的可靠性研究已经形成两种较为普遍的方法，一种是流量组合的算法[5]，另外一种是状态划分算法[6]。假设一个不确定图处于最可靠最大流的状态, 能够体现不确定图的状态的有不确定图能够达到的最大流（连通性）及可靠性（包括随机流网络的可靠性和不确定图流分布的可靠性）, 然而由于不确定图中边的不确定性, 任何一条边发生故障都有可能对于整个不确定图的状态造成影响, 即任何一条边发生故障都可能使得不确定图不能达到原有的最大流最可靠性的状态（即原有的连通性和可靠性）。

根据最大流最小割定理，网络的最大流受限于网络中存在的最小割集，也就是说最小割集中的任意一条边断掉都会使整个网络可以传输的最大流量下降，这样的边就成了整个网络的薄弱环节，或者可以说是相对于流量的薄弱环节。同样的，不确定图中的边可以看做是从源点到汇点的信息传输通道，而关键边对于网络的信息传输可靠性起到支撑的作用，一旦发生故障，将对整个网络的信息传输产生巨大影响，甚至导致整个网络瘫痪[4]。为此，针对不确定图中边对于可靠性的重要度进行评估，寻找关键边就成为一项有意义的工作。同时，根据关键边对于网络的连通性和可靠性的影响程度，对关键边的关键程度进行衡量，对于后期网络维护具有重大的决策和指导意义，对于薄弱环节的改进也可以显著的提高系统的可靠性。

如下图, 不确定图1中, 如果边e1断掉, 会使整个不确定图的流量减少（连通性改变）, 而边e5断掉不会减少流量, 但是会使不确定图的最可靠最大流分布的可靠性下降, 随机流网络的可靠性也发生改变，边e7发生故障不确定图流量不会发生改变，最大流分布的可靠性也不会发生改变，但是随机流网络的可靠性会减小， e4断掉不会对不确定图的连同性和最大流分布造成影响等等。因此如何对诸如e1, e7这些边进行分类, 且对其影响的量化是需要解决的问题。



图1.1 不确定图G

通过阅读文献[1-22]，对于随机流网络的可靠性的研究已经十分成熟，近些年来对于不确定图的可靠性研究也越来越多，然而很少有基于流可靠性指标的对于不确定图边关键度研究的案例，而这样一个问题又确实有着十分重要的研究价值, 如：在电力传输网络中, 发电站A正以最可靠最大流的分布向目的地B传输电能。这样一种传输分布方式有可能受到不确定图中任何一条边的影响, 然而每条边发生故障对不确定图整个运行状态造成的影响大小是不一定的, 有可能使不确定图的最大流减少（连通性改变）, 也有可能使不确定图的可靠性下降（可靠性改变）, 这样便体现出了边的关键性, 同样的这些可靠性衡量指标又对于以后的不确定图模型的维护提供依据。

# 研究现状

最大流问题是网络流理论的重要组成部分, 它是一类经典的组合优化问题, 同时也可以看作是特殊的线性规划问题, 针对这个问题的研究有40多年的历史[2]。典型的最大流算法包括：网络单纯形法[1,5]﹑Ford-Fulkerson方法[3]﹑Edmonds-Karp方法[4]和Dinic方法[1,5]等, 当前的最大流算法主要可以分为两大类：增载算法[5-7]和预流推进算法[8-10]。

对于不确定图, 近年来的大部分研究都是针对网络的可靠性问题研究展开的[6-20], 即给定一个流量约束阈值d,如何得到满足d的网络可靠度。目前, 网络可靠性的计算已经证明是NP-hard问题。多状态（图中每条边上容量均服从一定的离散概率分布）网络可靠度的计算可以分为3类：两终端可靠性﹑全终端可靠性和k-终端可靠性。对于网络可靠性的算法通常可以分为两大类：精确的可靠性算法[11,13,18-20]和近似的可靠性算法[15]。精确的可靠性算法中最基本的就是穷举算法, 通过枚举所有可能的状态来得到最终网络可靠度, 在此基础上, 基于状态空间划分的方法在算法效率上则就有很明显的提高[16-20]。文献[10-12]和文献[13]则分别采用了基于路径集和割集的方式来求取网络可靠性。典型的近似算法包括：神经网路算法﹑遗传算法和Monte-Carlo[15]模拟算法等。此外, 文献[12,14]还研究了不确定图网络中节点发生故障情况下可靠性问题。

在随机流网络中，每个网络元件由于完全故障或部分故障等诸多因素而存在多种状态，也就是说每个网络元件有多种容量状态，而这些容量对应的概率服从一定的概率分布。随机流网络可靠性问题是一种概率问题，描述的是从网络给定的源点s到汇点t成功传递流量需求d的概率，该问题已经被证明是NP-hard[7-8]。当前，可靠性的分析已经成为许多系统规划、设计和运行中不可缺少的重要组成部分[9]。

关于随机流网络可靠性的算法研究大致可以分为两大类：精确方法和近似方法。精确方法中完全枚举算法是最基本的算法，它通过直接枚举网络的所有可能状态得到网络的可靠度。Chin-Chia Jane与Yih-Wenn Laih采用了基于d-flows[10]和基于d-cuts[11]的不同状态空间划分方法，将状态空间划分成能够满足流量阈值需求的合格状态集，不能够满足流量阈值需求的不合格状态集和同时包含了合格状态和不合格状态的待划分状态集，通过迭代的方式进一步处理待划分状态集，最终通过计算合格状态集中所有合格状态的概率之和来得到网络可靠性。一些研究人员还提出了基于最小路径集[12-14]或最小割集[15]的算法对状态空间进行过滤，然后运用容斥原理来计算网络可靠性。对于复杂的系统，精确算法的运行时间代价往往过高而让人难以容忍，为了从准确性和算法执行效率中找到一种折中的方案，实际系统中通常会选取近似算法来代替精确算法。为此，许多近似算法被相继提出，Ramirez-Marquez和Coit[16]提出了蒙特卡洛模拟算法， Rocco和Muselli[17]则采用机器学习方法成功的获得网络可靠性。

Lin[14,18-19]还将网络可靠性问题扩展到节点不可靠的情况，采用最小路径集的方法进行了研究。考虑到网络中的每条边及节点都有一定的传输代价参数，Lin and Yeh 研究了在实际应用中基于传输代价限定的网络可靠性问题 [20-24]，这其实是一类具有多条件约束的网络可靠性问题。对于一个拓扑结构给定的网络，如何从一堆给定的多状态元件中选取该网络需求数量的元件来构建一个实际的网络，同时又需要满足该网络所要满足的传输流量、代价、时间、可靠性等诸多因素限制的实际需求，也是一类比较经典的网络元件分配与网络可靠性结合的研究问题。针对这类问题，Yi-Kuei Lin和Cheng-Ta Yeh 提出了相应的遗传算法[25]。

不确定图流分布的可靠性是网络流问题在不确定图上的自然延伸，它是一类重要的最优决策问题，关系到如何最大限度的利用现有网络条件选择最可靠的最大流传输方案，对解决实际中诸如构建可靠性网络、选取可靠传输路线以及分析系统薄弱环节等一系列问题有重要的研究意义[34]。目前不确定图流分布的可靠性的计算方法主要是基于简单路径组合分流的最可靠最大流算法SPCA和基于极小子图的最可靠最大流算法MSBA，这两类算法分别从不同的角度有效地解决不确定图最可靠最大流问题[35]。

寻找网络中关键边的方法有很多，1989年Ball等人提出了通过移除网络中某条边后最短路径的变化情况的方法[23]来判断该条边的重要性，但对于节点之间仅有一条路径连接的情况，该方法就不适用；2002年Girvan和Newman在介数中心度的基础上，提出了边介数[24]（edge-betweenness）概念。通过计算网络中边介数的大小来反应边对网络资源传输能力和控制能力的强弱。边介数越大，表明网络中任意节点对经过该边的次数就越多，对网络资源的传输能力和控制能力就越强，在网络中所起到的作用也就越大。因此，边介数在一定程度上反应了边的重要程度。但仅仅以边介数作为度量关键边的方法[25]忽视了边的2个端点对其本身的影响，具有片面性[4]。目前对于网络中边关键性的衡量，大多都是判断边对网络资源传输能力或控制能力强弱来判断，如随机流网络中的一条边E发生故障，使得随机流网络能够达到的最大流减少大小等指标进行判断，很少有使用边发生故障对于随机流网络的可靠性造成的影响进行判断的；在不确定图中则对应的是流分布的可靠性。

目前对于随机流网络的可靠性的研究已经相当成熟，对于不确定定图流分布可靠性的研究也已经达到一定的阶段，但是尚没有或很少有基于流可靠性指标的对于不确定图边关键度研究的案例，而这样一个问题又确实有着十分重要的研究价值，本文将从此着手，基于流量及其可靠性指标，对于不确定图的关键边识别。

# 研究内容

## 如何基于可靠性构建边关键度识别模型

目前对于网络中边关键度的衡量，一般根据边介数的大小来反应边对网络资源传输能力和控制能力的强弱[24]，也有通过移除网络中某条边后最短路径的变化情况或者流量变化的情况[23]来判断该条边的重要性，然而使用这些方法求得的关键边，比较单一，如通过移除边后流量变化的情况获得的关键边，只体现出边对于流量的影响，这样获得的关键边是单一的、片面的。对于不确定图来说，最可靠最大流分布有较强的应用价值，最大流分布中的边决定流分布的稳定性，基于此，本文将从一个新的角度，即从不确定图流分布的可靠性来构建边关键度识别模型，根据边对于不确定图流分布可靠性的影响，来识别关键边。同时为更加准确，多角度的体现出不确定图中边的关键程度，本节在流分布可靠性指标的基础上添加不确定图能够达到最大流量大小以及对应的随机流网络的可靠性这两个指标，多角度、综合对关键边进行识别。经研究，涉足这方面的研究知之甚少。

## 如何快速计算边发生故障对不确定图状态的影响

许多问题都可以转化为图论的方式来解决，如交通网络等，在实际的应用中，不确定性是许多系统的固有特性，如电力传输网络中的元件、数据通信网络中的节点都存在着发生故障的概率，交通运输网络中也有着发生拥塞的概率等，这些问题都可以建模为不确定图，从而将问题转化为不确定图的问题来解决。对于一个确定的网络，其最大流以及网络可靠性的计算，经过长时间的发展已经有很成熟的模型[1-20]；对于不确定图来说，计算最可靠最大流也有较成熟的方案[1-3]，以上的计算方法的发展为本文中关于不确定图状态变化的计算奠定了理论基础。

关于移除边前后计算不确定图的状态，主要包括不确定图的最大流，最可靠最大流分布以及网络可靠性。如何计算最可靠最大流分布，现已有了较深入的研究[1-10]。通过重复计算移除边前后状态，获得状态改变量，显然是可行的，但该方法复杂度较高，难以应对大规模图模型。本文提出一种增量的计算方法，利用边移除之前计算状态的中间结果，根据边在子图区间的存在多少的状况对不确定图的边进行定性的分类，然后结合求得的子图区间，定量的求移除边对于不确定图状态的影响。相对于重新计算而言，使用增量计算能有效减少复杂度。

同时考虑到传统状态划分算法需要划分的状态空间较大，本节在原有计算方式的基础上提出一种基于确定边过滤的状态划分算法，该算法的主要思路是在使用状态划分算法之前，首先给出能够确定类别的边（定性的边），从而减少状态划分的空间。这些确定边包括割集中的边和悬挂边。

## 如何综合权衡流量和可靠性以实现对关键边更快更准的识别

本节首先解释在流分布可靠性的基础上添加流量和随机流网络可靠性这两个指标的必要性；接着，本文基于边移除后对流量及可靠性产生的损失这一系统论的角度，提出（1）字典序模型、（2）化多目标为单目标模型、（3）多重排序模型，三种边关键度识别模型；然后，研究他们的算法性能，并结合智能电网这一具体的应用背景，分析、比较三种模型的识别效果；最后本文将研究如何综合这三个模型，以实现对关键边更灵活、更准确、更快速的识别。

# 研究方案

本文研究的不确定图均为二态网络，可靠性都基于最大流进行研究，所有的故障只考虑单故障而不考虑多故障或者组合故障。研究基于流量和可靠性（指标）的不确定图边的关键度研究，因为容量和可靠性的对应关系和对方案选择的制约，所以同样考虑不确定图流量的特性。

## 基于流分布可靠性的边关键度识别模型

目前对于网络中边关键度的衡量，一般都是判断边对于网络资源的传输能力或控制能力的强弱来判断，如随机流网络能够达到的最大流减少的大小等指标进行判断。而对于不确定图来说，最大流分布的可靠性能够体现流分布的稳定性，同时最大流分布的可靠性和分布中的边存在依赖关系，因此最大流分布的可靠性也能够体现出边的关键程度。

基于此，本文将从一个新的角度，即从不确定图流分布的可靠性来构建边关键度识别模型，根据边对于不确定图可靠性的影响，对关键边进行识别。

### 不确定图的流分布可靠性

不确定图流分布问题是在传统的流网络问题的基础上加入了边的存在概率，因此对于不确定图流分布问题而言，边上存在着两种属性，一种是容量属性，另一种是概率属性。下面给出本文所研究的不确定图的定义。

**定义（不确定图）**一个不确定图G是一个五元组G=(V, E, s, t, (C, P))，其中，V是有向图G中顶点的集合，E是G中边的集合，s和t分别为G的源点和汇点，(C,P)是一个二元组且C：E->N是边上容量函数，P：E->(0,1]是边上的概率函数，表明该边能通过的最大容量为C时的概率为P，当边不存在，即边上能通过的容量为0时对应的概率为1-P。



图1.1 不确定图G

如上图所示，不确定图的源点为s，汇点为t，除此之外还包含其他的顶点，边E1,（S，V2）上的二元组（2,0.8）表示该边能通过的最大流为2时的概率为0.5，还有0.5的概率该边会出现故障，使其不能通过流量。

**定义(不确定图的子图)**不确定图G=(V, E, s, t, (C, P))的子图g(V’，E’, s, t , C’ )是一个确定图，其中V’ = V，E’∈E，C’是容量的集合，且C’满足e∈E’, C’(e)=C(e)。如果E’ = E，则称g为不确定图G的最大子图，记作MSG(G)。



图2-xx子图g（a）和最大子图MSG(G)（b）

图2-xx所示的两个确定图均是图2-1中的不确定图G的子图，且图（b）为G的最大子图。

**定义(不确定图的子图概率)**不确定图G=(V, E, s, t, (C, P))的一个子图为g(V’，E’, s, t , C’ )，则该子图g的概率为。即子图中边的存在概率和不确定图中其余边的不存在概率之积。

根据上述的子图概率的计算公式可知，图2-5中的子图g的概率为P(g)=0.5\*0.6\*0.8\*0.5\*0.8\*0.5\*0.8\*0.2=0.00768，同样可以知道最大子图的概率为P(MSG(G))= 0.5\*0.6\*0.8\*0.5\*0.8\*0.5\*0.8\*0.8=0.03072

**定义（不确定图s-t流f）**在不确定图G中，其源点为s、汇点为t，那么不确定图G上的s-t流f是一个函数，该函数将G的最大子图MSG（G）上的每条边映射到一个非负实数，f：E🡪R+;值f（e）表示边e上流经过的流量。一个流f必须满足以下两个性质：

（1）容量条件，每条边e∈E，有0≤f(e) ≤c（e）

（2）守恒条件，

不确定图中的每一个s-t流f均对应着一个流分布，为了方便表述流分布，在此引入一个|E|元组F=(f1,f2,….f|e|)，其中fi=f(ei)，表示边ei上有流量通过。



图2-xx 不确定图G的一个f=4的流分布

上图所示的是不确定图G中流量值f=4的一个流分布。并且该流量值是s-t流中的最大值，因此不确定图G的最大流为4.

**定义（不确定图流分布F的可靠性）** 给定一个不确定图G=(V,E,s,t,(C,P))及其上的一个流分布F，则F的可靠性是G中所有包含该流分布F的子图概率之和。

**性质**[23]：不确定图G流分布F的可靠性等于G中所有流量不为0的边的概率之的边的概率之积，即。

对于图2-xx中流量值为4的流分布运用以上性质可以得出该流分布的可靠性为p（f）=0.5\*0.6\*0.8\*0.5\*0.8\*0.5\*0.8=0.0384.

**定义（不确定图最大流分布及其可靠性）** 不确定图G上的一个最大流分布F即为在G的最大子图MSG(G)上一个最大流分布，F的可靠性为G中所有流量不为0的边的概率之积。

图2-xx所示的不确定图G的一个流分布即为G的一个最大流分布。

**定义（不确定图最可靠最大流分布）**给定一个不确定图G，在G中有多个最大流分布，在这多个最大流分布中，对应可靠性最大的一个最大流分布即为不确定图G的最可靠最大流分布。



a(F1) b(F2)

图2-xx不确定图G的最大流分布

图2-xx所示的是不确定图G的两个最大流分布，假设与G对应的最大流分布有2个，F1、F2对应的可靠性分别为0.0288，0.0384。根据上述的数据可知流分布F2的可靠性更大，因此F2为不确定图G的最可靠最大流。

根据本节中关于不确定图流分布F的可靠性的定义，及其相关性质，不确定图G流分布F的可靠性等于G中所有流量不为0的边的概率之的边的概率之积，可见不确定图流分布的可靠性是由其对应的流分布中的边作为支撑的。此时存在于该流分布中的边可以看做是相对于流可靠性的关键边，而不存在与该流分布中的边则可以视为关于流分布可靠性的非关键边。本文的一个主要研究内容就是找到能够影响不确定图流分布可靠性的边，并确定影响的大小。

### 基于流分布可靠性建立关键度识别模型

本文所述的流分布的可靠性均指的是不确定图最可靠最大流分布的可靠性，关于不确定图流分布可靠性关键边的定义如下：

**定义（不确定图分布可靠性关键边）**影响不确定图可靠性的关键边。给定不确定图G, 假设不确定图G的最大子图MSG（G）中源点s到汇点t的最大流为F（G）max, 此时最可靠最大流分布的可靠性为p（G）, 则e∈E是G中的一条可靠性关键边, 且需要同时满足如下两个条件：

1、e移除后, 不确定图G’最大子图MSG(G’)中源点s到汇点t的最大流F（G’）max=F（G）max

2、e移除后, 最可靠最大流分布的可靠性p(G’)<p（G）

以上可靠性都指不确定图最可靠最大流分布的可靠性。

和不确定图能够达到的最大流类似的，不确定图流分布的可靠性显现出不确定图流分布的稳定性，而可靠性关键边对于不确定图传输资源的稳定性起到支撑作用，一旦发生故障，将对整个网络的信息传输产生巨大影响，甚至导致整个网络瘫痪。

若β为移除边e，不确定图最可靠最大流分布的可靠性减少量，则β可以表示如下：

显然β越大, 表示移除边e之后，不确定图G能够提供的最大流分布的稳定性就损失越多,该传输资源的分布瘫痪的可能性越大，也就是说e的关键程度也越高。

例2：如图3.2为图1.1中不确定图G分别断掉e1和e2之后的不确定图G3和G4



图4.2 两个剩余不确定图G3和G4

如图4.2，很明显G3和G4能够达到的最大流都是2，即边e1和e2引起的流量变化相同，则比较剩余不确定图G3和G4的可靠性大小，此处的可靠性大小可分别指随机流网络可靠性大小或不确定图的流分布可靠性的大小。

显然，本文的一个主要内容就是如何找到不确定图G的所有流分布可靠性关键边，并计算移除不确定图中边前后，不确定图的最可靠最大流的可靠性的变化大小。

## 边移除前后不确定图状态的计算

在研究该问题的过程中，为简化模型，我们考虑的都是单故障情形，即只考虑一条边发生故障或断掉的情形，而不存组合边发生故障的可能。

不确定图在以最大流分布的状态运行时，其中的任意一条边发生故障都有可能对不确定图的运行状态造成影响，这些影响包括网络的联通性和网络的可靠性，其中连通性指不确定图在边发生故障之后能到到最大流的能力，网络的可靠性包括随机流网络的可靠性和不确定图的流分布可靠性。

### 基于增量状态划分算法

#### 1）算法基本思想

基于增量的状态划分算法ICA（Increment Cost Algorithm）使用的主体框架是基于论文[23]提出的基于极小子图的状态划分算法，该算法通过状态划分规则获得极小子图，根据极小子图定理[23]，极小子图对应的流分布就是不确定图的最可靠最大流分布。

ICA算法首先根据状态划分方法获取所有的不确定图满足最大流的子图区间A，根据状态划分方法的规则可知，获得的子图区间中的每一个子图都能够满足最大流。根据随机流网络可靠性的定义，随机流网络的可靠性为所有满足最大流的子图概率之和，即：

根据极小子图理论可以求得不确定图G在移除边之前最可靠最大流的可靠性，以及对应的最大流。

现在面对的问题是如何计算每天边发生故障对不确定图最可靠最大流分布的可靠性（本文在不指明的情况下均指最可靠最大流）的影响。

根据状态划分算法获取的所有满足最大流的子图区间A1∪A2…. ∪A*τ*=A，其中τ获取的子图区间的个数，A是说有子图区间的并集。根据子图向量的定义，如果子图中边对应的为1，则表示边在子图区间中始终存在，如果为0，则表示始终不存在，如果为x，则表示可能存在可能不存在。根据边在子图区间中存在的多少，将边定性的分为3类。如果Si=τ表示，边在所有的子图中都存在，定义为A类边；如果Si=0表示，边在所有子图中都不存在，定义为C类边；如果0<Si<τ，则表示边在子图中的存在情况多少未知。在经过对边定性分析之后，需要对每一类边特殊的定量分析，因为每一类边有相同的性质，比直接分析要简化不少。

首先对于A类边，经推理可知，其断掉会使流量减少，即不能达到原有的最大流，因此此时原有最大流的网络可靠性和流分布的可靠性都为下降为0。此时需要重新根据状态划分算法的极小子图理论对剩余不确定图，重新计算获得断掉之后的最大流及其对应的网络可靠性和分布的可靠性；对于B类边，经推理可知，断掉B类边，流量不会减少，此时的重点在于计算剩余的网络可靠性和流分布的可靠性。对于网络的可靠性，如果子图区间中不包含该边，那么该区间中所有子图依然满足最大流，如果子图区间包含该边，那么判断该子图区间中的其他子图是否大于等于其他不包含该边的子图区间极小子图，如果满足，则表示其依然能够满足最大流，否则不能满足，移除边之后的网络的可靠性可以表示为这些断掉B类边任然能够满足最大流的子图概率之和。对于流分布的可靠性，移除一条B类边之后，则判断这条边是否在极小子图上，如果不在极小子图上，则说明极小子图并没有被破坏，最大流分布没有被破坏，流分布的可靠性也不会减少；如果在极小子图上，则首先判断移除该边之后的区间下界子图是否满足最大流，如果满足则该区间生成新的下界子图，找到极小子图进行计算，如果不能满足最大流，则需要去除该子图区间，在剩余的区间中找到极小子图进行计算；对于C类边，经推理可知，移除之后不会影响连通性，也不会影响可靠性，也就是说C类边断掉不会对不确定图的状态照成任何的影响，移除之后的最大流、最可靠最大流分布可靠性、网络可靠性和移除前保持一致。

基于以上算法思想，算法流程图如下：



图xx 算法ICA计算框架



图xx 移除B类边计算随机流网络可靠性流程图



图xx 移除B类边，计算不确定图最可靠最大流分布的可靠性

#### 2）相关定义

**定义1（不确定图连通性关键边）**影响不确定图流量的关键边。给定不确定图G, MSG(G)是不确定图的最大子图, F(G)max是不确定图能够达到的最大流量, e∈E为不确定图中的某一条边, 假设将边e移除, 剩余的不确定图为G’,使得不确定G’的最大子图MSG（G’）的最大流F(G’)max<F（G）max, 那么称e为不确定图联通性关键边。

对于一个确定图来说，其能够达到的最大流的大小，体现出网络对资源传输能力的强弱，显然其能够达到的最大流越大，代表其传输网络资源的能力越强。因此传统的计算边关键度模型都使用其发生故障对于网络资源传输能力，即能够达到的最大流的影响作为判定依据。同样的，对于不确定图有同样的性质，不确定图能够达到的最大流同样体现出其对资源传输能力的强弱。

若α为移除边e，不确定图流量的减少量，则α可以表示如下：

显然α越大, 表示移除边e之后，不确定图G能够提供的最大流就损失的越多, 其对资源的传输能力就越弱，也就是说e的关键程度也越高。

例1：如下图4.1为图1.1中不确定图G分别断掉e2和e8的剩余不确定图G1和G2

 

图4.1 两个剩余不确定图G1和G2

其中G1是断掉e2后获得的剩余不确定图，G2是断掉e8之后获得的剩余不确定图。因为图1.1中的不确定图G能够达到的最大流为4，而不确定图G2和G4分别达到的最大流是2和3，因此不确定图中的边e2和e4是不确定图联通性关键边，且关键程度We>We.

**定义3（不确定图非关键边）**给定不确定图G, 边e∈E为不确定图G 中的一条边,F(G)max为其最大子图MSG(G)的最大流,p（G）为可靠性,假设移除边e,剩余不确定图为G’的最大子图为MSG(G’),如满足以下两个条件：

1、MSG(G’)能达到的最大流F（G’）max=F(G)max

2、不确定图G‘的最可靠最大流分布可靠性P（G）=P(G’)

即移除边e对不确定图G的状态不造成影响，此时e为非关键边。

例3：如图3.3是图1.1中不确定图G断掉边e4之后的不确定图G5。



图4.3 剩余不确定图G5

边e4移除之后，不会是确定图的流量减少，即联通性不变，同时，如果针对不确定图的流分布可靠性为边关键度指标，则边e4断掉不会影响最可靠最大流分布，因此不确定图的最可靠最大流分布的可靠性并不会下降，即可靠性不会改变，因此，在以不确定图的流分布可靠性为边关键度指标的情况下，边e4为非关键边。

#### 3）状态划分规则

为了后面更加方便的描述子图空间中的子图, 这里引入子图的向量表示。对于不确定图*G*的子图空间*Ω*与一个|*E*|元0-1向量空间*V*之间存在一一映射关系*ϕ*：*Ω→V*, 对于*Ω*中任意一个子图*x*, 在*V*中都存在一个0-1向量*v*(*v*1, *v*2, …, *v*|*E*|)与之一一对应, 即*ϕ*(*x*) = *v*, 且对*i* = 1, 2, …, |*E*|, *vi*的值可以通过如下方式获得：

其中：*E*(*x*)表示子图*x*的边集, *ei*是不确定图*G*中的第*i*条边, *ei ∉* *E*(*x*)表示边在子图*x*中不存在(*ei*在*G*中取容量为0的状态), *ei ∈* *E*(*x*)则表示边在*x*中存在。

例4. 如下图4.4所示，该子图是图1.1中不确定图G的一个子图，其对应的0-1向量可表示为：(1,1,1,0,1,1,1,1,1,1)。 不确定图*G*的子图空间*Ω*对应的0-1向量空间*V*可表示为[(0, 0, …, 0*|E|*), (1, 1, …, 1|*E*|)]。在后面的描述中, 子图*x*与子图*v*(*v*1, *v*2, …, *v*|*E*|)是等价说法, 对应于同一子图。



图4.4 不确定图G的一个子图

在讲解子图空间划分理论及划分规则之前, 先介绍两个子图向量之间的“=”, “≥”和“>”关系及任意一个流分布与0-1向量之间的对应关系。

对于两个|*E*|元0-1向量*v*1(*v*11, *v*12, …, *v*1|*E*|)和*v*2(*v*21, *v*22, …, *v*2|*E*|),

如果*∀ i*, *i ∈*{1, 2, …, |*E*|}, *v*1*i* = *v*2*i* , 则*v*1 = *v*2；

如果*∀ i*, *i ∈*{1, 2, …, |*E*|}, *v*1*i* ≥ *v*2*i* , 则*v*1 ≥ *v*2；

当*v*1 ≥ *v*2, 且至少存在一个*i*, *i ∈*{1, 2, …, |*E*|}, 使得*v*1*i* > *v*2*i* , 则*v*1 > *v*2。

设*FV*(*v*1, *v*2, …, *v*|*E*|)是*G*的任意一个流分布, 则*FV*对应着一个0-1向量*x*(*x*1, *x*2, …, *x|E|*), 其中：对*i∈*{1, 2, …, |*E*|}, 如果*vi* > 0, 则*xi*=1；如果*vi*=0, 则*xi*=0。

**引理1.** 给定不确定图*G*, *v*1 (*v*11, *v*12, …, *v*1|*E*|)和*v*2(*v*21, *v*22, …, *v*2|*E*|)是*G*的子图空间*Ω*中两个子图, 则存在如下结论：

1. 如果*v*1 = *v*2, 则*P*(*v*1) = *P*(*v*2)；
2. 如果*v*1 ≥ *v*2, 则*P*(*v*1) ≤ *P*(*v*2)；
3. 如果*v*1 > *v*2, 则*P*(*v*1) < *P*(*v*2)；

其中：*P*(*vi*)表示子图*vi*被*Ω*中所有子图包含的概率。

证明：根据*P*(*vi*) = Σ*g*{*PG*(*g*) | *g∈Ω* ∧ *vi ⊆ g*}= Π*e*{*p*(*e*, *c*) | *e∈E*(*vi*)}, 所以, (1)显然成立, 对(2)由于*v*1 ≥ *v*2, 所以*E*(*v2*)⊆ *E*(*v2*), 而0 < *p*(*e*, *c*) ≤1, 因此, *P*(*v*1) ≤ *P*(*v*2), 同理, 对*v*1 > *v*2, 有*P*(*v*1) < *P*(*v*2)。

为了进行状态空间的划分, 本文在文献[20]定义的序关系（≥）基础上给出了自己的序关系（>）的定

义, 同时给出了如下的划分规则：

**(规则1)** 对完备集合S的三个子集合*A* = {*x* | *x* > *x*0}, *C* = {*x* | *x* = *x*0}和*B* = {*x* | *x* ⋡ *x0*}构成*S*的划分, 即*A* ∩ *B* = *φ*, *A* ∩ *C* = *φ*, *B* ∩ *C* = *φ*, *A* ∪ *B* ∪ *C* = *S*．

**(规则2)** *B* = {*x* | *x* ⋡ *x0*} 是*S*划分后的一个非空子集, 假定*x*0 = (*v*10,*v*20,*…*,*v*m0), 定义

*B j* = { *x* ∈ *B* | *vi* ≥ *vi0* , *i* =1,*…*,*j*-1 , *vj* < *vj0* }

则*B1*,*B2*,*…*,*B m* 构成非空集合*B*的划分．

划分算法步骤如下：

1) 求解满足第一类约束条件的一个解*x0* ．

2) 利用*x0*与规则1对②有上下界条件限制的约束空间进行划分得到*A*,*B*,*C*, 判断C={x | x= *x0*}是否满足第二类约束, 若是则加入结果集, *B*={*x* | *x* ⋡ *x*0}按规则2划分成非空集合*B*1,…,*B* *m* ．

3) 对*Bi*的上下边界分别求和, 若上界和小于*F* *max*或下界和大于*F* *max* , 则过滤, 否则, 对*Bi*转1进行迭代处理．

4）求得所有满足最大流的闭合子图区间

设*A*是*Ω*中所有*s-t*最大流值等于*Fmax*的子图构成的子图空间, 对于一个给定的0-1闭合子图空间*C*[*L*, *U*],  *L* = (*l*1, *l*2, …, *lm*), *U* = (*u*1, *u*2, …, *um*), *F*(*CL*) , *F*(*CU*) 分别表示子图空间*C*的下界子图*L*和上界子图*U*的*s-t*最大流值,

如果*F*(*CL*)≥ *Fmax* , 则称*C∈ A* (表示*C*中的所有子图都满足*s-t*最大流值*Fmax*), 记录该子图区间；

如果*F*(*CU*) < *Fmax* , 则称*C∉ A* (表示*C*中的所有子图都不满足*s-t*最大流值*Fmax*)；

如果*F*(*CL*) < *Fmax* ≤ *F*(*CU*) , 则称*C*与*A*关系不确定(表示*C*中同时存在满足*Fmax*和不满足*Fmax*的子图), 此时, *C*需要进一步划分。

根据*C*与*A*的上述三种关系, 给出基于空间划分方法寻找不确定图*G*极小子图的基本思想：对*G*的整个子图空间*Ω*[(01, 02, …, 0*|E|*), (11, 12, …, 1*|E|*)]进行迭代划分：

对划分过程中出现闭合子图空间*C∉ A*的情况, *C*被直接过滤；

对划分过程中出现闭合子图空间*C∈ A*的情况, *C*被保存下来, 记录该子图区间；

对*C*与*A*关系不确定的情况, 则需要进一步划分, 经过反复的迭代划分处理直至不再出现关系不确定情况为止,

此时, 被保存下来的所有闭合子图空间集为{*C*1, *C*2, …, *Cτ* }, 且满足*Ci* ∩ *Cj =* ∅, *C*1 ∪ *C*2 ∪ … ∪ *Cτ* = *A*, 其中τ 为满足最大流的子图区间的个数。

例5. 给定图1.1中的不确定图G，按照状态划分算法获得的所有满足最大流的闭合子图区间如下表所示。以编号为1的子图区间为例，按照子图的向量表示方法可知，该子图区间有两个子图，对应的0-1向量分别可以表示为(1,1,1,0,1,1,1,1,1,1)和(1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)，其中0表示对应的边不存在于子图，而1表示对应的边存在于子图。为了简化描写，我们将同一子图区间内的子图可能存在也可能不存在的两条边用”x”表示，代表存在和不存在，即“0”和“1”两种可能，如表3.1中编号为2的子图区间，如果按照0-1的向量可以简化表示为[111x0x111]，改子图区间存在2n个子图，其中n为符号“x”的数目。以此方式可以将表3.1中的子图区间都简化为表3.2中的子图区间表示方法。

表3.1 不确定图G的所有满足最大流的子图区间

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 编号 | **子图下界** | | | | | | | | |  | **子图上界** | | | | | | | | | 个数 |
| 边号 | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |  |
| 1 | **1** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | 2 |
| 2 | **1** | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | 4 |
| 3 | **1** | **1** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | 2 |
| 4 | **1** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | 2 |

表3.2 简化后的子图区间表示方式

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 编号 | **子图下界** | | | | | | | | |  |
| 边号 | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | 个数 |
|  | **1** | **1** | **1** | **x** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | 2 |
|  | **1** | **1** | **1** | **x** | **0** | **x** | **1** | **1** | **1** | 4 |
|  | **1** | **1** | **1** | **x** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | 2 |
|  | **1** | **1** | **1** | **x** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | 2 |

#### 4）不确定图边定性分析

不管是随机流网络的可靠性还是不确定图最可靠最大流分布的可靠性都和不确定图能够满足最大流的子图有关系，根据状态划分规则可以求解不确定图满足最大流的所有子图，因此一个合理的考虑是根据边被多少满足最大流的子图包含来分类。根据不确定图子图的向量表示法以及向量的偏序关系，本文在获取的子图区间的基础上定义边在所有满足最大流子图的存在率Si。

首先定义sij为边ei在子图区间j的存在状况，根据偏序规则，其中ei=1为在子图区间j中的所有子图都必须包含边ei；ei=0表示在子图区间j中的所有子图都不包含边ei；如果ei=x则表示子图区间j中的子图有包含和不包含两种情况，定义sij如下：

其中i表示边的序号，j表示子图区间的序号。

对于不确定图中的每一条边ei都有边存在率Si，定义如下

其中i为边的序号，i∈{1….n}, n为不确定图G边的个数，j为子图区间的序号，j∈{1…*τ*}, *τ* 为使用状态划分后闭合区间的个数。

根据定义我们可知，Si有如下性质：

其中*τ*为使用状态划分区间算法获得的最大流区间的个数。根据边存在率Si，对边进行定性的分类如下：

1. Si=*τ* ，那么ei为A类边；
2. 0＜Si＜τ ，那么ei为B类边；
3. Si=0，那么ei为C类边；

根据边存在率Si的定义可知，如果Si=τ，那么边ei存在于所有的满足最大流的子图中；如果Si=0，表示边ei，不存在任意一个满足最大流的子图中；如果0＜Si＜τ，表示边ei存在于部分，满足最大流的子图中。

根据以上的定性分析，可以得到如下的一系列的推论。

**推论1.** 对于不确定图G中的一条边ei, 如果边ei是A类边，那么边ei为不确定图连通性关键边。

证明：想要证明A类边是不确定图G的联通性关键边，需要证明两点（1）A类边发生故障，不确定图G不能达到最大流；（2）非A类边断掉，不确定图G任然可以达到最大流。下面将按照这两条分别证明；

（1）因为Ei是A类边，有Si=*τ*，根据定义边ei存在于所有的满足最大流的不确定子图中，假设经过划分算保存下来的所有闭合子图空间集为{*C*1, *C*2, …, *Cτ* }, 满足*Ci* ∩ *Cj =* ∅, *C*1 ∪ *C*2 ∪ … ∪ *Cτ* = *A*, 其中τ 为满足最大流的子图区间的个数, 因为Si=*τ* ，所以满足最大流的子图g一定有g∈A且有ei∈g，如果当ei发生故障之后，剩余不确定图G‘的任意子图g’都不包含ei, 即ei∉g’,则必有g∉A，因此对于ei发生故障后的剩余不确定图G‘的任意子图都不能达到最大流，那么G’也不能达到最大流；

（2）同理，对于一条非A类边，因为Si＜*τ*，则在A中必存在一个子图g，使得ei∉g，如果边ei发生故障，不确定图可以使用子图g传递流量，同时因为g∈A，即g能传递的最大流仍然为最大流，所以对于非A类边发生故障，不确定图G任然能够达到最大流；

的证。

例6. 如表3.2中，有（S1，S2，S3，S8，S9）=4，则表示边（e1,e2,e3,e8,e9）为A类边，显然边e1,e2，e3断掉会是不确定图的流量变为2，而边e8，e9断掉会使不确定图的流量变为3。

**推论2.** 对于不确定图中的一条边ei，如果边ei是B类边，那么ei是不确定图可靠性关键边。

证明：对于不确定图G的任意一条边ei，如果边ei是B类百年，即如果有0<Si＜*τ* ，则ei发生故障之后，可以找不包含边ei的子图达到最大流，使得最大流不会下降，即连通性不变，但是ei的断掉使得一部分能够达到最大流的子图遭到破坏，使得随机流网络的可靠性下降，此时边ei为不确定图可靠性关键边。

想要证明当0<Si＜*τ* 时ei是不确定图G的可靠性关键边，只需要证明当ei断掉之后，不确定图依然能够达到最大流，但是可靠性下降。

经过划分算保存下来的所有闭合子图空间集为{*C*1, *C*2, …, *Cτ* }, 满足*Ci* ∩ *Cj =* ∅, *C*1 ∪ *C*2 ∪ … ∪ *Cτ* = *A*, 其中τ 为满足最大流的子图区间的个数, 因为0<Si＜*τ* ，则对于任意的ei∈g子图，可以将子图的集合A分为g∈A1和g∉A2，其中满足A1∩A2=∅，A1∪A2=A。

在ei断掉之前，随机流网络的可靠性可以为A中的所有子图概率之和，可以表示为P(A)，而当ei断掉之后，集合A1中的子图不一定能够满足最大流，但是集合A2中的流量可以满可以满足最大流，因此保证了不确定图的连通性不变；同时ei断掉使得A1中至少有一个子图不能满足最大流，因此使得随机流网络的可靠性下降，此时即证明ei为不确定图的可靠性关键边。

的证。

例7. 如表3.2中，有0＜（S5，S6，S7）＜4，则表示边（e5，e5，e6）为B类边，也就是说这些边断掉之后，不确定图的可靠性会减少，可靠性指网络可靠性或最大流分布的可靠性。

**推论3.** 对于不确定图中的一条边ei，如果ei是C类边，那么ei是不确定图的非关键边。

证明：对于不确定图G中的任意一条边ei，如果ei是C类边，即如果Si=0，则ei断掉之后，原先满足最大流的子图任然能够满足最大流，使得不确定图的最大流不会改变，即连通性不会改变，随机流网络的可靠性性也不会改变，此时边ei为不确定图的非关键边。

想要证明Si=0时，ei是不确定图G的非关键边，只需要证明当ei断掉之后，不确定图的能达到的最大流和随机流网络可靠性不发生改变，即连通性和可靠性都不变即可。

经过划分算法保存下来的所有闭合子图空间集为{*C*1, *C*2, …, *Cτ* }, 满足*Ci* ∩ *Cj =* ∅, *C*1 ∪ *C*2 ∪ … ∪ *Cτ* = *A*, 其中τ 为满足最大流的子图区间的个数, 因为Si=0，那么对于所有的子图区间每一个对应的边ei处都为标记“x”，即任意一个子图区间可以表示为C=（c1,c2…x…cn），其中ci表示为子图区间C的各条边对应的表示，i={1…i-1, i+…n}，则C可以分为两个子图区间（或子图）C1=（c1,c2…0…cn）和C2=（c1,c2…1…cn），当边ei发生故障之后，C2=C1，因为C1中的子图都能够满足最大流，故ei断掉之后C2中的子图也都能够满足最大流，所以不确定图的连通性和随机流可靠性都不会发生改变，此时ei为不确定图G的非关键边。

的证。

例8. 如表3.2中，有S4=0，则表示边e4为C类边，也就是说边e4断掉之后，图1.1中的不确定图G的连通性不变，可靠性也不变。

#### 5）不确定图状态改变定量计算

对边进行定性分类可以有效的减少重复计算的次数，对于不同的类别的边设置不同的计算方式是ICA算法的核心思想。

1）A类边计算

对于A类边，由推理1可知，其断掉会使流量减少，即不能达到原有的最大流，因此此时原有最大流的网络可靠性和流分布的可靠性都为下降为0。

我们需要重新根据状态划分算法的极小子图理论对剩余不确定图，重新计算获得断掉之后的最大流及其对应的网络可靠性和分布的可靠性。

2）B类边计算

对于B类边，同样由推论1可以知道，断掉B类边，流量不会减少，此时的重点在于计算剩余的网络可靠性和流分布的可靠性。

对于网络的可靠性，如果子图区间中不包含该边，那么该区间中所有子图依然满足最大流；如果子图区间包含该边，那么判断该子图区间中的其他子图是否大于等于其他不包含该边的子图区间极小子图（可能存在多个）。如果满足，则表示其依然能够满足最大流，否则不能满足，网络的可靠性可以表示为这些断掉B类边任然能够满足最大流的子图概率之和。

对于流分布的可靠性，当一条B类边断掉之后，则判断这条边是否在极小子图上，如果不在极小子图上，则说明极小子图并没有被破坏，最大流分布没有被破坏，流分布的可靠性也不会减少；如果在极小子图上，则首先判断断掉该比边之后的区间下界子图是否满足最大流，如果满足则该区间生成新的下界子图，找到极小子图进行计算，如果不能满足最大流，则需要去除该子图区间，在剩余的区间中找到极小子图进行计算。

例9.

3）C类边计算

对于C类边的计算，根据推论1，其断掉不会影响连通性，根据推论3，其断掉不会影响可靠性，也就是说C类边断掉不会对不确定图的状态照成任何的影响。

根据以上计算的方式，我们对于图1.1中的不确定图，根据状态划分算法计算出来的子图区间见表3.2，获得的其每一条边发生故障，使得不确定图的状态改变如下表3.3所示：

表3.3 不确定图1.1中个边断掉对于不确定图G照成的影响

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **编号** | **边类型** | **△F边断掉流量下降量** | **△P边断掉网络可靠性下降量** | **△P边断掉流分布可靠性下降量** | **剩余最大流** | **边断掉网络可靠性(对于现有最大流)** | **边断掉流分布可靠性(对于现有最大流)** |
| **1** | **A** | 2 | 0.05568 | 0.0384 | 2 | 0.26112 | 0.192 |
| **2** | **A** | 2 | 0.05568 | 0.0384 | 2 | 0.272 | 0.2 |
| **3** | **A** | 2 | 0.05568 | 0.0384 | 2 | 0.272 | 0.2 |
| **4** | **C** | 0 | 0 | 0 | 4 | 0.05568 | 0.0384 |
| **5** | **B** | 0 | 0.02688 | 0.0096 | 4 | 0.02688 | 0.02688 |
| **6** | **B** | 0 | 0.02688 | 0.0096 | 4 | 0.02688 | 0.02688 |
| **7** | **B** | 0 | 0.01728 | 0 | 4 | 0.0384 | 0.0384 |
| **8** | **A** | 1 | 0.05568 | 0.0384 | 3 | 0.0288 | 0.0288 |
| **9** | **A** | 1 | 0.05568 | 0.0384 | 3 | 0.0288 | 0.0288 |

### 基于确定边过滤的状态划分算法

#### 1）算法基本思想

考虑到传统状态划分算法需要划分的状态空间较大，本节在原有计算方式的基础上提出一种基于确定边过滤的状态划分算法FEA（Filter Edge Algorithm），该算法的主要思路是在使用状态划分算法之前，首先给出能够确定类别的边（定性的边），从而减少状态划分的空间。这些确定边包括割集中的边和悬挂边。

假设不确定图G的边集为E，那么在传统的状态划分算法中，需要划分的状态区间的个数有2|E|个，而在基于过滤集合的状态划分算法中，只要能够确定一条确定边（包括割集中的边或者悬挂边），都能够是状态划分的区间减少一半，显然尽可能多的确定这些边能够很大程度上简化算法复杂度。该算法对于连接度比较高的图效果更好。

FEA算法的是一个基于ICA的算法，只是减少了ICA算法状态划分的初始空间。因此FEA算法的主要着手点就是如何找到所谓的确定边。确定边包括割集中的边和悬挂边。

对于割集中的边，目前求解割集中的边已经被证明是一个NP问题[23]，本文提供一种计算割集中的边算法，该方法不追求找到所有割集中的边，而是尽可能多的找到割集中的边，且满足找到的边一定是割集中的边。该方法的主要思想是首先用最大流最小割算法找到一组割，获取的最大流为全局最大流，然后，根绝割集将图分割为两部分，并补全虚拟源点或虚拟汇点，连接割集边上的顶点到虚拟源点或者虚拟汇点作为一条边，并设置边的容量为一个大于原容量的值；接着，对构造的新图递归使用最大流最小割定理计算局部最大流，如果局部最大流等于全局最大流，则表示该最大流表示的割集也是所求割集，并将该子图继续分割，如果局部最大流大于全局，则舍弃该子图，直到没有可以计算的子图为止，获得的边即为所求部分割集中的边。

对于悬挂边，指的是只有入度或者只有出度的边（特殊的对于源点的入度边、汇点的出度边归为此类），不管单入度边还是单初度边对于不确定图的最大流都是可有可无的，在计算的时候只需要通过图中点的出入度判断即可。

#### 割集中的边计算

目前求解图中所有割集的方法有割集矩阵算法[23], 然而求解图中所有的割集是一个NP问题[24]，当图的规模越来越大，算法复杂度会上升很快，显然是不合适的，因此本文使用一种递归的方式求解割集中的边，该方法的目的是尽可能多的求解割集中的边，而不能保证求得的边包含所有割集中的边。

在一般的图中，割集之间一般有两种形式存在，一种是独立的割集，另一种是关联割集。独立割集就是多个割集之间没有重合的割边，而关联割表示，多个割集中至少存在一条边公用。

 

图4.5某不确定图的最大子图 图4.6 不确定图最大子图的割集表示

如上图所示，图4.5是某个不确定图的最大子图MSG（G），这个最大子图的其中一个割集如图4.6所示，那么MSG（G）的的割集可以表示为{（ST，SV）（ST，VT）}，可以看出（ST，SV）（ST，VT）两个割集中包含相同的边，则表明两割集是关联割集。同理如果两个割集中不含有相同边，表示两割集为独立割集。

如果求解如图2中的割集，经过划分获得如下的两个子图，如图3.

 

图4.7 求得一个割集之后获得的两个子图

使用递归的方式求解所有子图中的局部最小割，直到没有子图生成为止，返回所得割集中的边，就是割集中的边。

在一般的图中也会存在一些悬挂边，这些边对于计算不确定图关键程度之前可以确定下来，已减少状态划分算法的划分区间，从而减少算法的复杂度。

算法流程图如下：



图xxx 求解部分割集中的边的算法流程图

证明：使用该算法获取的边都是割集中的边。

待证明。

#### 悬挂边的计算

悬挂边，指的是只有入度或者只有出度的边（特殊的对于源点的入度边、汇点的出度边归为此类），不管单入度边还是单初度边对于不确定图的最大流都是可有可无的，在计算的时候只需要通过图中点的出入度判断即可。

如下图所示为一个比较特殊的不确定图的最大子图，课件点v1只有初度而没有入度，V2只有入度而没有初度，那么v1便是单出度点，V2是单入度点，又因为这些点都是中间节点，因此与这些点相连的边都不会出现在流分布当中，自然也不会出现在最大流分布当中，所以都可以去除，从而减少状态划分算法的划分空间，从而减少算法的复杂度。



图4.8 某不确定图的最大子图

计算悬挂边的算法流程如下图：



图xxx 计算悬挂边流程图

#### 基于确定边过滤的状态划分算法

FEA算法的主要框架还是基于ICA算法，只是在使用ICA的状态划分算法之前，确定了部分确定边，使得状态划分算法的划分空间减少，从而减少复杂度。对于出后后的不确定图部分边是确定的，部分是不确定的。对于确定的边使用向量表示方法做如下设置：

对于割集中的边，始终满足空间中存在，即为1；

对于悬挂边，始终满足划分空间中不存在，即为0；

然后对于预处理的初始划分空间，使用状态划分空间求得所有满足最大流的不确定的子图区间。

使用确定边过滤之后的状态划分算法可以有效的减少算法的复杂度。

使用该方法的流程图如下：



算法xxx FEA算法整体流程图

## 基于流量及可靠性的不确定图关键边识别

基于流分布可靠性获取的关键边，体现出了不确定图中的边相对于最可靠最大流分布稳定性的关键程度，通过这种方式获取的关键边在一定程度上体现出了其对于不确定图的重要性，然而作为不确定图，其能达到的最大流，其随机流网络的可靠性都是不确定图很重要的状态指标。因此只用流可靠性作为衡量边对于整个不确定图的关键程度指标显然是单一的、片面的、不准确的。因此为更加准确，多角度的体现出不确定图中边的关键程度，本节在流分布可靠性指标的基础上添加不确定图能够达到最大流的大小这一指标来对关键边进行识别，基于边删除后对流量及其可靠性产生的损失这一系统论的角度，提出（1）字典序模型、（2）化多目标为单目标模型、（3）多重排序模型，三种基于流量和流可靠性指标的边关键度衡量模型，然后研究他们的算法性能，并结合智能电网这一具体的应用背景，分析、比较三种模型的识别效果。

最后本文将研究如何综合这三个模型，以实现对关键边更灵活、更准确、更快速的识别。

### 指标计算和预处理

如何根据流量和可靠性的指标来分析边的重要程度可以看做是一个多目标的决策性问题，不确定图中的一条边发生故障造成其流量和可靠性减少之间是有一定的联系的，但这是一个多元（边个数）分段函数，其中分段的区间已经达到了可能世界中的所有可能，因此利用这个关系来分析显然是不可行的。

对于4.2节中算法稍微进行改进就可以获取流量，流分布可靠性的指标，然而获取的结果具有重合的性质，如可靠性下降的量和可靠性剩余的量明显是重合的部分。

由表3.3可知，不确定图1.1中的边断掉对于不确定图各种状态的影响，也就说通过上述的方式对于不确定图进行分析，获取的边对于不确定图状态的影响都是六维的，然而进过分析发现这些数据具有重复性，为了简化数据结构，我们需要对于数据进行预处理操作。

对于流量下降的量和剩余的最大流，这连个量的和为原有不确定图的最大流，对于A类边，流量下降，可靠性都下降为0，此处保留剩余最大流的可靠性；对于流量而言，下降越大，边越关键，对于剩余可靠性，可靠性剩余越大越不关键。

对于B类边，流量不下降，可靠性下降的量和剩余可靠性的和是对应的原有可靠性，因此也可以使用一组就行了，此处保留的是剩余可靠性的量，对于B类边，剩余可靠性越小，表示可靠性下降的量越大，代表该边越关键。

对于C类边不需要考虑，但为了和AB类边表示一致，即量越小表示边越关键，此处C的取值为剩余最大流和剩余的可靠性。

经过如上考虑，我们对于第一部分的出来的结果简化如下，如下图3.4所示：

图3.4 经过降维处理后的不确定图1.1的边对于不确定图状态的影响

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **编号** | **边类型** | **剩余最大流** | **边断掉网络可靠性**  **(对于现有最大流)** | **边断掉流分布可靠性(对于现有最大流)** |
| 1 | A | 2 | 0.26112 | 0.192 |
| 2 | A | 2 | 0.272 | 0.2 |
| 3 | A | 2 | 0.272 | 0.2 |
| 4 | C | 4 | 0.05568 | 0.0384 |
| 5 | B | 4 | 0.02688 | 0.02688 |
| 6 | B | 4 | 0.02688 | 0.02688 |
| 7 | B | 4 | 0.0384 | 0.0384 |
| 8 | A | 3 | 0.0288 | 0.0288 |
| 9 | A | 3 | 0.0288 | 0.0288 |

单从上面的某一个指标都是可以从一个方面体现出边的关键程度，如何整体综合衡量这些指标，对关键边进行识别是本文的重点。

### 化多目标为单目标模型

由于直接求多目标决策问题比较困难，而单目标决策问题又较易求解，因此在样本量不大的情况下，可以考虑将多目标问题转换成单目标问题然后再进行求解的许多方法。将多目标转化为单目标的方法一般的做法是给不同的目标设置权重，设置权重的方法多种多样，这里应该视实际情况而寻找合适的方法，下面介绍几种常见的方法。需要说明的是化多目标为单目标模型比较适用于数据量较小，要求精度较高的应用场景。

#### 1）线性加权和法

设有一多目标决策问题，共有*f*1(*x*)，*f*2(*x*)，…，*f*m(*x*)等*m*个目标，则可以对目标 *f*i(*x*) 分别给以权重系数（*i*=1，2，…，*m*），然后构成一个新的目标函数如下：

计算所有方案的*F*(*x*)值，从中找出最大值的方案，即为最优方案。

在多目标决策问题中，或由于各个目标的量纲不同，或有些目标值要求最大而有些要求最小，则可首先将目标值变换成效用值或无量纲值，然后再用线性加权和法计算新的目标函数值并进行比较，以决定方案取舍。

#### 2）平方和加权法

设有*m*个目标的决策问题，现要求各方案的目标值*f*1(*x*)，*f*2(*x*)，…，*f*m(*x*)与规定的*m*个满意值*f*1\*，*f*2\*，…，*f*m\*的差距尽可能小，这时可以重新设计一个总的目标函数：

并要求min *F*(*x*)，其中是第*i*(*i*=1,2,…)个目标的权重系数。

#### 3）理想点加权法

一个多目标决策问题，要想达到理想解一般是不可能的，但是决策者常希望尽可能接近理想点，或者与理想点的偏离最小。如果考虑各目标与理想点的偏离的重要程度不同，则希望各目标与理想值的偏离的加权和最小。这样，决策规则是选择与理想点的综合距离最小的方案。

设有m个目标的决策问题，现要求各方案的目标值*f*1(*x*)，*f*2(*x*)，…，*f*m(*x*)和一个理想点的值(f1,f2,f3…,fm)，可以通过欧式距离的方式来表示解和目标值的差距，这时可以重新设计一个总的目标函数：

其中是第*i*(*i*=1,2,…)个目标的权重系数。理想点加权法是平方和加权分的一个特例。

### 字典序模型

#### 1）无边界字典序方法

字典序法是把目标按照重要程度重新排序，将重要的目标排在前面，例如已知排成*f*1(*x*)，*f*2(*x*)，…，*f*m(*x*)。然后对第1个目标求最优，找出所有最优解集合，用*R*1表示，接着在集合*R*1范围内求第2个目标的最优解，并将这时的最优解集合用*R*2表示，依此类推，直到求出第*m*个目标的最优解为止。将上述过程用数学语言描述，即

其中。

#### 2）有边界字典序方法

在实际的应用情况中，一般都会提供比实际需求更大需求的能力，以应对特殊的情况，如在电力系统中一般需要一定的裕度来应对应急情况的出现，在网络系统中，如果需求是1M带宽，但是网络所能承载的能力往往大于1M的带宽以应对特殊的情况。

有边界字典序方法的思想就是在一定可以接受的裕度范围内设置为相同优先级，在满足相同优先级的情况下查看次优先级的目标，直到分类完成为止，该方法可以看做是一个弱字典序的模型。如对于2个数据点对应的数据为A(1,2)，B(1.5,1.5)，在无边界字典序中，首先看第一位的数据，显然B>A,因为第一个目标优先级高，因此就不考虑第二个目标位，结果B>A；然而在有边界字典序方法情况下，如果第一个目标为被分[0,2]被分为一个边界，因为A，B的第一位目标都在这个边界内，因此视为第一个目标的优先级相同，于是需要查看第二位的目标，如果2和1.5不在一个边界，显然A>B。由此可见，使用无边界和有边界获取结果有可能不同，有边界的字典序方法的边界需要根据实际的应用背景来设置。

使用决策树的方式来完成以上方法。

### 多重排序模型

重排次序法是直接对多目标决策问题的待选方案的解重排次序，然后决定解的取舍，直到最后找到“选好解”。

在解释重排次序法之前首先要说明劣解与非劣解的概念。

**定义：（劣解与非劣解）**对于一个决策空间X中的解x，如果可以找到一个解x’∈X，有f（x）≤f（x’），则称x为一个劣解。相反的，对于一个决策空间X中的解x，如果不能找到一个解x’∈X，使得f（x’）＞f（x），那么称x为一个非劣解。

非劣解也称为有效解，或者pareto解。

非劣解作为多目标决策问题的解来说，虽然是合理的，是可行解的子集合，但通常给出的是无穷多个点。然而，在工程上，一般是希望求出唯一解或适当的解集。

为了从多目标函数的非劣解集中，选出特定的解或子集，必须对f(x)设定评价标准（或决策规则）。决策者必须确定在非劣解上的决策规则或选好规则，将多目标问题标量化。在非劣解中，基于这个决策规则标量化的目标函数称为选好函数，由这一选好函数所确定的解叫做选好最优解。

如何根据所有的数据集合求出对应的非劣点是本部分的重点部分，本文提供三种方式，分别为嵌套查询算法，预排序算法和分治算法。

#### 1）嵌套查询算法

嵌套排序算法是对待测元组建立临时表T，然后再内存中维持一个临时窗口队列，以收集相互间不存在控制关系的元组，窗口队里初始为空，第一个读取的元组自然的被放进窗口队列中，然后每当从临时表中读取一个元组P时，就用该元组和窗口队列中的已有的所有元组依次进行比较，肯尼个出现以下3中情况：

（1）窗口中存在元组q，q控制元组p，则p被删除，以后的迭代中也不再考虑P；

（2）窗口中存在元组q，q被元组p控制，则从窗口中删除q，以后迭代中也不再考虑元组q，p元组被插入窗口队列中；

（3）元组p与窗口队里中的所有元组都不存咋控制关系，若窗口中有足够的空间，则将p插入窗口中，如窗口空间不够，则将P写入下一个临时队里中；

最后返回窗口队列中的元素就是所有满足的非劣点。

#### 2）预排序算法

预排序算法是在嵌套排序算法的基础上对数据集进行了预排序。嵌套排序算法的I/O开销依赖于迭代的次数和每次迭代要处理的数据集的大小。因为内存中窗口大小有限，不一定能装下所有的SP，所以对要处理的元组先排序，过滤掉一些受控元组,。

预排序算法的思想是，对临时表中的元组按照SP 的选取规则先做一个拓扑排序，然后用嵌套查询算法处理这些元组。故一旦有一个临时表*Ti* 中的元组被加入窗口中,它就一定是SP 了.因为*Ti* 有序,所以它后面的元组不可能控制它,这样就不需要做替换的检查,减少了开销。

#### 3）分治算法

该算法将数据集划分为几部分，使得每部分都可以放入内存，然后使用内存算法分别计算每一部分的SP，最后通过合并每部分的SP，去除其中受控的数据点来得到最终的SP集。该算法的具体流程是：

1) 计算输入的点在某维*dp* 上的中值(这里的中值可以指精确中值,也可以指模糊中值)*mp*,并按这个中值把输入的点集划分为两部分*P*1,*P*2.其中,*P*1 集合包含所有在*dp* 上的属性值优于*mp* 的元组,*P*2 集合包含其他剩余的元组.

2) 分别计算*P*1 的SP 集合*S*1 和*P*2 中的SP 集合*S*2.计算时,*P*1 和*P*2 不断地迭代划分,直到每个部分只包含一个或没有元组为止.

3) 通过合并全部的集合*S*1 和*S*2,得到最终的SP 集合.具体地说,就是删去*S*2 中被*S*1 中的元组控制的元组。

该算法对于数据量大的案例比较有效，尤其是在当今大数据和云计算时代，利用并行计算或分布式计算解决这样的问题是很简单的。

## 电力系统数据分析

智能电网中传输电线存在发生故障的可能，因此电力系统可以建模为不确定图，本部分将结合电网这一具体的应用背景，分别使用上节中提出的三种关键边识别的模型，并分析三种模型的识别效果，以及各模型的特点。

### 评价体系

#### 精确率与召回率

假设通过以上三种模型识别出来的关键边集合为RecognizeSet，RealSet为真实的关键边数据集合，包含的电网中的关键边是通过实际应用中通过经验或是实际情况基于统计而得出来的真是结果，其最后指标通过F-measure作为一个融合度量。

以下数据通过RealSet而获得：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | 关键边 | 非关键边 |
| 获得 | A | B |
| 未获得 | C | D |

其中RealSet=A U B U C U D, RecognizeSet= A U B.

设置精确度Precision为：

设置召回率Recall为：

我们以F值最为最终的判定标准，其中定义F为：

根据上式定义，其中精确度Precision表示的是识别正确的关键边比率，该值能够反映出识别的边的正确程度，但是不能够反映出来识别的数量。如我们仅仅识别一个正确的的值，此时精确度为100%，显然此时只识别出来一个边，是不合理的。

定义召回率Recall表示识别的正确集合在实际集合中的比率，该值能够反映出识别效果的数量，但是不能够反映正确率。如我们使用不确定图中的所有边最为识别结果集合，此时Recall为100%，但是此时显然正确率是最少的，是不合理的。

因此结合精确度和召回率的方式，综合使用F作为判断，只有当精确度和召回率同时很高的时候才能表示该模型是比较优秀的识别模型。

#### 2）平均归一化误差

本文提供另一种平均归一化误差（Average Normalized Error）来评价以上三个模型的计算效果，Normalized Error定义为获取关键边的多个目标值与对应目标在多能获得的最优值之间的差距。它的计算方式分为4步：

（1）通过单目标优化算法获得在各个分目标上所能获得的最优值Rmax和最劣值Rmin ；

（2）将以上的模型求得的关键边在各个分目标上的值r，根据最优值Rmax和最劣值Rmin进行正则化获得关键边在这个分目标上的Normalized Error值r‘；

（3）对于关键边上在各个分目标上所获得的Normalized Error进行评价获得该关键边的Normalized Error值。

（4）求所得关键边中的所有边的Normalized Error的平方差。

### 综合多种模型分析

对于4.3节提到的3种查询不确定图关键结点的方法策略，不同的应用应该选择适当的策略才能获得更加适当的解以及更快的计算速度。对于化多目标为单目标的方法，比较适合图规模较小的情形；字典序的方法更加适合多个目标分主次的情形；重排次序法则更适合应用在大规模的不确定当中。

表4.1表示各种识别模型适于的场合

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **比较项/方法名** | **化多目标为单目标** | **字典序** | **多重排序** |
| **计算速度** | 慢 | 快 | 快 |
| **数据量大小** | 少 | 多 | 多 |
| **目标是否明确主次关系** | 不需要 | 需要 | 不需要 |
| **是否有裕度** | 不需要 | 需要 | 不需要 |
| **是否要求精确** | 精确 | 中等 | 不精确 |

考虑到电网中的边很多，如果化多目标为单目标的方法会浪费很多计算劣解的时间，同时考虑到在现实情况时，一般都提供相应的裕度，所以在必要的时候可以“牺牲”一部分的流量以获取更多的可靠性，因此并不能说明流量或者可靠性对于电网的重要程度是不同的，所以字典序法并不适用于电力系统。

综合以上考虑，本节在分析电网关键结点上使用了重排次序法，首先获取所有的非劣解，但因为电力系统边数据量较大的背景，通过此方法通常会给出较多的结果。然而，在工程上，一般是希望求出唯一解或适当的解集。

为了从众多的非劣解集中，选出特定的解或子集，必须设定评价标准（或决策规则）。决策者必须确定在非劣解上的决策规则或选好规则，将多目标问题标量化。在非劣解中，基于这个决策规则标量化的目标函数称为选好函数，由这一选好函数所确定的解叫做选好最优解。

本文给出最简单的一个加权的模式，通过加权获取边的关键程度：

假设有如下条件，原有流量为Fmax，原有网络可靠性为：P网络，原有分布可靠性为：P分布；断掉边之后的流量为：F剩余，现有网络的可靠性为：P网络剩余，剩余分布的可靠性为：P分布剩余；因为剩余流量，剩余网络可靠性，剩余分布的可靠性都和边的关键程度成反比，因此，设边的关键程度为：

其中a,b,c分别为流量，网络可靠性，流分布可靠性在关键程度中所占的权重。

因为剩余的网络可靠性和流可靠性不仅仅和具体的边的可靠性有关，还与不确定图整体能达到的流量有关，且是一个分段函数的关系，因此此处不适宜使用求偏导数的形式计算每条边对于整个网络的可靠性的影响程度。

# 试验（思考中）

## 试验1.1：重复计算方法、ICA、FEA对同样的数据集时间对比

## 试验1.2：不同稠密度（集合度）的影响

## 试验2.1：后一个模型（3目标）为什么优于前一个模型（只有流可靠性一个目标）

列出来找出来的关键边的3个指标维度。（体现包含了之前的模型，但是体现的更多信息，所有优）

## 试验2.2：三种模型识别效果通过评价指标体现

## 试验2.3：两种评价体系试验比较

## 试验2.4：电网数据基于三种模型结合的效果是不是更佳？

参考文献

1. Thomas H.Cormen Charles E.Leiserson, Ronald L.Rivest Clifford Stein. Introduction to Algorithms. Second Edition. MIT Press.2001.
2. A.V.Goldberg. Recent developments in maximum flow algorithms(Invited Lecture). In: S.Arnborg,L.Tvansson eds. Pro of the Sixth Scandinavian Workshop on Algorithm Theory(LNCS 1004).Heidelber: Springer-Verlags1988,pp.1-10.
3. L.R.Ford, D.R.Fulkerson. Flows in networks. Princeton: Princeton University Press,1962.
4. J.Edmonds, R.M.Karp. Theoretical improvements in algorithm efficiency for networks flow problems.1972(02).
5. R.K.Ahuja,T.L.Magnanti,J.B.Orlin. Network Flows: Theory, Algorithms and Applications.2005:294-356.
6. Clancy,D.O. Probability flows for reliability evaluation of multi-area power system interconnections. Electrical Power and Energy System,5,1983,pp.100-114.
7. Lee SH. Reliability evaluation of a flow network. IEEE Transactions on Reliability 1980;29:24-6.
8. Xue J. On multi-state system analysis. IEEE Transactions on Reliability 1985;34:329-37.
9. M.O. Ball, Computing network reliability. Operations Research, vol.27, pp. 823–838, 1979.
10. Zhao Peixin,Zhang Xin. A survey on reliability evaluation of stochastic flow networks in terms of minimal paths. Information Engineering and Computer Science 2009.
11. Lin JS, Jane CC, Yuan J. On reliability evaluation of a capacitated-flow network in terms of minimal path sets. Networks,vol.25. pp.131-138,1995.
12. Y.-K.Lin. System reliability evaluation for a multi-state supply chain network with failure nodes using minimal paths. IEEE.Trans.Reliability,vol,58,pp,34-40,2009.
13. Jane CC, Lin JS, Yuan J. On reliability evaluation of a limited-flow network in terms of minimal cut sets. IEEE Transactions on Reliability 1993;42:354-61.
14. Y.-K.Lin. A Simple Algorithm for reliability evaluation of a stochastic-flow network with node failure. Computer & Operations Research 28(2001)1277-1285.
15. J.E.Ramirez-Marquez, D.W.Coit. A monte-carlo simulation approach for approximating multi-state two terminals reliability. Reliability Engineering & System Safety.vol.87,pp.253-264,2005.
16. P. Doulliez , E. Jamoulle. Transportation networks with random arc capacities. RAIRO, vol. 3, pp. 45–60, 1972.
17. C. Alexopoulos. Note on state-space decomposition methods for analyzing stochastic flow networks,” IEEE Trans. Reliability, vol. 44, pp.354–357, 1995.
18. C.-C. Jane and Y.-W. Laih. A practical algorithm for computing multi-state two-terminal reliability. IEEE Trans.Reliability,vol.57,pp.295-302,2008.
19. C.-C. Jane and Y.-W. Laih. Computing multi-state two-terminal reliability through critical arc states that interrupt demand. IEEE Trans.Reliability,vol.59.No.2,2010
20. 戴一奇. 输电网络的静态可靠性分析. 水电能源科学.vol.3.No.4,1985.
21. 王芳,候朝桢. 一种随机流网络可靠性的新算法. 通信学报.vol.25.No.1,2004.
22. 蔡伟, 张栢礼, 吕建华. 不确定图最可靠最大流算法研究. 计算机学报, 2012, 35(11): 23712380.
23. 党耀国, 刘思峰, 方志耕. 网络最大流的割集矩阵算法[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 23(9):125-128. DOI:10.3321/j.issn:1000-6788.2003.09.022.
24. 季桂树, 卢志渊, 李庆春. 一种求解最小割集问题的新思路[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(2):98-100. DOI:10.3321/j.issn:1002-8331.2003.02.034.