基于流量和可靠性的不确定图关键边评估方法研究

作者名

摘 要: 网络中边的重要性评估是研究网络的一项重要内容，针对已有网络中边的重要性评估方法中片面强调最短路径（边介数），难以应用到与不确定图为背景的相关领域，本文构建了基于流量和可靠性指标的不确定图关键边评估的数学模型。该模型针对不确定图中边移除（故障）后对流量和可靠性产生的损失这一角度，分别使用（1）字典序方式、（2）化多目标为单目标方式、（3）多重排序方式，对边的关键度综合评估。针对移除边之后，不确定图流量和可靠性变化的计算，本文提出基于增量的状态划分算法ICA，同时考虑到复杂度，本文又提出改进的基于确定边过滤的状态划分算法FEA。本文最后通过实验证明ICA算法及改进的FEA算法都提高了计算效率，并通过三种方式识别出不确定图关键边。

关键词: 不确定图，关键边，流量，流可靠性

# 引言

在实际的应用中，不确定性是许多系统的固有特性[]，如电力传输网络中的元件、数据通信网络中的节点都存在着发生故障的概率，这种不确定性或是由于测量数据存在误差，或是应用本身包含概率特征而引入，当这种不确定性表达于图数据中，则形成不确定图[1-3]。

根据最大流最小割定理，网络的最大流受限于网络中存在的最小割集，也就是说最小割集中的任意一条边断掉都会使整个网络可以传输的最大流量下降，这样的边就成了整个网络相对于流量的薄弱环节。同样的，不确定图中的边可以看做是从源点到汇点的信息传输通道，而关键边对于网络的信息传输可靠性起到支撑的作用，一旦发生故障，将对整个网络的信息传输产生巨大影响，甚至导致整个网络瘫痪，这样的边就构成了网络相对于可靠性的薄弱环节。为此，针对不确定图中边对于可靠性的重要度进行评估，寻找关键边就成为一项有意义的工作，这对于后期网络维护具有重大的决策和指导意义，对于薄弱环节的改进也可以显著的提高系统的可靠性。

寻找网络中关键边的方法很多，1989年Ball等人提出了通过移除网络中某条边后最短路径变化情况的方法[9]来判断该条边的重要性；2002年Girvan和Newman在介数中心度的基础上，提出了边介数[10](edge-betweenness)概念。通过计算网络中边介数的大小来反映边对网络资小来反映边对网络资源的传输能力和控制能力的强弱。边介数越大，表明网络中任意节点对经过该条边的次数就越多，对网络资源的传输能力和控制能力就越强，在网络中所起到的作用也就越大。因此，边介数在一定程度上反映了边的重要程度。但在不确定图中，边存在发生故障的概率，与不确定图相关的应用中，不光要体现出边对网络传输能力的作用，更要体现出边对于可靠性支撑的作用，因此仅以边介数作为度量关键边的方法[11]具有片面性，不适用于以不确定图为背景的相关应用。为此，本文构建了基于流量和可靠性指标的不确定图关键边评估的数学模型及基本算法流程，并针对实际数据进行了计算分析，获取了综合评估后的不确定图关键边。

# 相关概念

**定义XX.（不确定图）**一个不确定图G是一个五元组G=(V, E, s, t, (C, P))，其中，V是有向图G中顶点的集合，E是G中边的集合，s和t分别为G的源点和汇点，(C,P)是一个二元组且C：E->N是边上容量函数，P：E->(0,1]是边上的概率函数，表明该边能通过的最大容量为C时的概率为P，当边不存在，即边上能通过的容量为0时对应的概率为1-P。



图XXX 不确定图G

如图XXX所示，不确定图G的源点为s，汇点为t，除此之外还包含其他的顶点，边E1（S，V2）上的二元组（2,0.8）表示该边能通过的最大流为2时的概率为0.5，还有0.5的概率该边会出现故障，使其不能通过流量。

在不确定图研究领域中，可能世界模型[]是问题研究的基本模型，它将不确定图扩展成为可能世界实例的集合，而每个可能世界实例对应着一个概率值，且每个可能世界实例都可以被看成是一个确定图，这样就把不确定图中的相关问题转换为确定图问题。对于一个给定的不确定图G，其可能世界空间包含有2|E|个可能世界子图，其中子图概率[]可以表示为子图中边存在或不存在的概率之积。如果一个子图中存在不确定图中的所有边，那么该子图为不确定图的最大子图（MSG）[]。最大子图MSG是一个确定图，其子图概率为所有边存在的概率之积。

**定义XX.（不确定图s-t最大流）**不确定图G对应的最大子图MSG所蕴含的最大流是不确定图G所能达到的最大流。



图XXX 不确定图G所对应的最大子图MSG（G）

如图XXX为不确定图G的最大子图，其对应的子图概率为各边在不确定图G中的概率之积P(MSG(G))= 0.5\*0.6\*0.8\*0.5\*0.8\*0.5\*0.8\*0.8=0.03072。

因为不确定图的最大子图是确定图，由定义XX，可以将不确定图的最大流转化为确定图的最大流方式计算，目前针对最大流这个问题的研究有40多年的历史[2]。典型的最大流算法包括：网络单纯形法[1,5]﹑Ford-Fulkerson方法[3]﹑Edmonds-Karp方法[4]和Dinic方法[1,5]等, 当前的最大流算法主要可以分为两大类：增载算法[5-7]和预流推进算法[8-10]。本文的计算方式采用的是Dinic方法。

**定义XXX.（网络可靠性）**不确定图对应的网络可靠性是指不确定图的所有子图中满足最大流的子图概率之和。

其中g表示满足最大流的子图，A表示不确定图G所有能够满足最大流的子图。

对于不确定图G满足最大流的子图如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

因此，不确定图最大流的网络可靠性为各子图概率之和。

若边E5发生故障之后，剩余不确定图G仍然能够达到最大流，其能仍然能满足最大流的子图如下：

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

因此，当E5发生故障，不确定图最大流的网络可靠性为：

定义XXX.（不确定最大流分布和最大流分布可靠性）

所有能够蕴含该流分布的子图概率之和。

引理：不确定图上存在流量的边的概率之积。

定义XXX.（关键边和关键程度）

对于一条不确定图的边E，如果E发生故障（或被移除），是的不确定图G能够满足的最大流Flow’<Flow，或者最大流分布的可靠性P’<P，则边E为不确定图的关键边。

引理：边E发生故障或被移除，不会使得不确定图的最大流、最大流分布的可靠性和随机流网络可靠性发生改变，则边E为不确定图的非关键边。

实例：如边e1发生故障，使得流量发生改变，则…..

# 计算模型

## 关键边模型

在研究该问题中，为简化模型，我们考虑的都是单故障情形，即只考虑一条边发生故障或断掉的情形，而不存在组合边发生故障的可能。其中边发生故障对不确定图造成的影响都是针对不确定图的最大流。

基于此，本文将不确定图关键边衡量的模型用数学公式表示如下：

其中为边e发生故障之后，不确定图G相对于故障之前最大流的变化量，分别表示不确定图G移除边e之后，随机流网络可靠性和最可靠最大流分布可靠性的变化量，

说明这个模型中为什么有流量的变化，网络可靠性的变化，以及流分布可靠性的变化

## 关键边评估方式

### 化多目标为单目标方式

由于直接求多目标决策问题比较困难，而单目标决策问题又较易求解，因此在样本量不大的情况下，可以考虑将多目标问题转换成单目标问题然后再进行求解的许多方法。将多目标转化为单目标的方法一般的做法是给不同的目标设置权重，设置权重的方法多种多样，这里应该视实际情况而寻找合适的方法，下面介绍两种常用的方式。

（1）线性加权和法

设有一多目标的决策问题，共有f1(x)，f2(x)，…，fm(x)等m个目标，则可以对目标 fi(x) 分别给以权重系数θ\_i（i=1，2，…，m），然后构成一个新的目标函数如下：

计算所有方案的F(x)值，从中找出最大值的方案，即为最优方案。

在多目标决策问题中，或由于各个目标的量纲不同，或有些目标值要求最大而有些要求最小，则可首先将目标值变换成效用值或无量纲值，然后再用线性加权和法计算新的目标函数值并进行比较，以决定方案取舍。

（2）理想点加权法

一个多目标决策问题，要想达到理想解一般是不可能的，但是决策者常希望尽可能接近理想点，或者与理想点的偏离最小。如果考虑各目标与理想点的偏离的重要程度不同，则希望各目标与理想值的偏离的加权和最小。这样，决策规则是选择与理想点的综合距离最小的方案。

设有m个目标的决策问题，现要求各方案的目标值f1(x)，f2(x)，…，fm(x)和一个理想点的值(f1,f2,f3…,fm)，可以通过欧式距离的方式来表示解和目标值的差距，这时可以重新设计一个总的目标函数：

其中θ\_i是第i(i=1,2,…)个目标的权重系数。

### 字典序方式

字典序方式对关键边评估的方式主要将目标按照优先顺序先进行排序，然后根据目标的优先顺序对边再进行排序的方法，本文提供两种字典序的方法。

（1）无边界的字典序方法

无边界字典序法是把目标按照重要程度重新排序，将重要的目标排在前面，例如已知排成f1(x)，f2(x)，…，fm(x)。然后对第1个目标求最优，找出所有最优解集合，用R1表示，接着在集合R1范围内求第2个目标的最优解，并将这时的最优解集合用R2表示，依此类推，直到求出第m个目标的最优解为止。将上述过程用数学语言描述，即

其中。

（2）有边界字典序方法

在实际的应用情况中，一般都会提供比实际需求更大需求的能力，以应对特殊的情况，如在电力系统中一般需要一定的裕度来应对应急情况的出现，在网络系统中，如果需求是1M带宽，但是网络所能承载的能力往往大于1M的带宽以应对特殊的情况。

有边界字典序方法的思想就是在一定可以接受的裕度范围内设置为相同优先级，在满足相同优先级的情况下查看次优先级的目标，直到分类完成为止，该方法可以看做是一个弱字典序的模型。如对于2个数据点对应的数据为A(1,2)，B(1.5,1.5)，在无边界字典序中，首先看第一位的数据，显然B>A,因为第一个目标优先级高，因此就不考虑第二个目标位，结果B>A；然而在有边界字典序方法情况下，如果第一个目标为被分[0,2]被分为一个边界，因为A，B的第一位目标都在这个边界内，因此视为第一个目标的优先级相同，于是需要查看第二位的目标，如果2和1.5不在一个边界，显然A>B。由此可见，使用无边界和有边界获取结果有可能不同，有边界的字典序方法的边界需要根据实际的应用背景来设置。

### 多重排序方式

多重排序方式是直接对多目标决策问题的待选方案的重排次序的方法，然后决定解的取舍，直到最后找打“选好解”。

定义XXX，（劣解和非劣解）对于一个决策空间X中的解x，如果可以找到一个解x’∈X，有f（x）≤f（x’），则称x为一个劣解。相反的，对于一个决策空间X中的解x，如果不能找到一个解x’∈X，使得f（x’）＞f（x），那么称x为一个非劣解。

非劣解也称为有效解，或者pareto解。

非劣解作为多目标决策问题的解来说，虽然是合理的，是可行解的子集合，但通常给出的是无穷多个点。然而，在工程上，一般是希望求出唯一解或适当的解集。

为了从多目标函数的非劣解集中，选出特定的解或子集，必须对f(x)设定评价标准（或决策规则）。决策者必须确定在非劣解上的决策规则或选好规则，将多目标问题标量化。在非劣解中，基于这个决策规则标量化的目标函数称为选好函数，由这一选好函数所确定的解叫做选好最优解。

## 评估方式优劣及选择

对于关键边的评价的选取应该侧重于实际应用的注重点，

对于化多目标为单目标的方法，比较适合图规模较小的情形；字典序的方法更加适合多个目标分主次的情形；重排次序法则更适合应用在大规模的不确定当中。

表4.1表示各种识别模型适于的场合

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **比较项/方法名** | **化多目标为单目标** | **字典序** | **多重排序** |
| **计算速度** | 慢 | 快 | 快 |
| **数据量大小** | 少 | 多 | 多 |
| **目标是否明确主次关系** | 不需要 | 需要 | 不需要 |
| **是否有裕度** | 不需要 | 需要 | 不需要 |
| **是否要求精确** | 精确 | 中等 | 不精确 |

# 计算方法

## 基于增量的状态划分算法ICA

基于增量的状态划分算法ICA（Increment Cost Algorithm）使用的主体框架是基于论文[23]提出的基于极小子图的状态划分算法，该算法通过状态划分规则获得极小子图，根据极小子图定理[23]，极小子图对应的流分布就是不确定图的最可靠最大流分布。

ICA算法首先根据状态划分规则获得的最大流子图区间将边进行分类, 然后对于不同类边设置不同的定量计算规则以减少复杂度，如图XXX为算法ICA的流程图。



图XX 算法ICA流程图

### 不确定图边定性分类

根据状态划分规则[23]可以求解不确定图满足最大流的所有子图区间，本文根据边能够被满足最大流的子图的个数对边进行分类。根据不确定图子图的向量表示法[23]以及向量的偏序关系，本文在获取的子图区间的基础上定义边在所有满足最大流子图的存在率Si。

首先定义sij为边ei在子图区间j的存在状况，根据偏序规则，其中ei=1为在子图区间j中的所有子图都必须包含边ei；ei=0表示在子图区间j中的所有子图都不包含边ei；如果ei=x则表示子图区间j中的子图有包含和不包含两种情况，定义sij如下：

其中i表示边的序号，j表示子图区间的序号。

对于不确定图中的每一条边ei都有边存在率Si，定义如下

其中i为边的序号，i∈{1….n}, n为不确定图G边的个数，j为子图区间的序号，j∈{1…*τ*}, *τ* 为使用状态划分后闭合区间的个数。

根据定义我们可知，Si有如下性质：

其中*τ*为使用状态划分区间算法获得的最大流区间的个数。根据边存在率Si，对边进行定性的分类如下：

1、Si=*τ* ，那么ei为A类边；

2、0＜Si＜*τ* ，那么ei为B类边；

3、Si=0，那么ei为C类边；

根据边存在率Si的定义可知，如果Si=，那么边ei存在于所有的满足最大流的子图中；如果Si=0，表示边ei，不存在任意一个满足最大流的子图中；如果0＜Si＜，表示边ei存在于部分，满足最大流的子图中。

根据以上的定性分析，可以得到如下的一系列的推论。

**推论1. 对于不确定图G中的一条边ei, 如果边ei是A类边，那么边ei为不确定图连通性关键边。**

证明：想要证明A类边是不确定图G的联通性关键边，需要证明两点（1）A类边发生故障，不确定图G不能达到最大流；（2）非A类边断掉，不确定图G任然可以达到最大流。下面将按照这两条分别证明；

（1）因为Ei是A类边，有Si=，根据定义边ei存在于所有的满足最大流的不确定子图中，假设经过划分算保存下来的所有闭合子图空间集为{*C*1, *C*2, …, *Cτ* },满足*Ci* ∩ *Cj =* ∅, *C*1 ∪ *C*2 ∪ … ∪ *Cτ* = *A*, 其中τ 为满足最大流的子图区间的个数, 因为Si=*τ* ，所以满足最大流的子图g一定有g∈A且有ei∈g，如果当ei发生故障之后，剩余不确定图G‘的任意子图g’都不包含ei, 即ei∉g’,则必有g∉A，因此对于ei发生故障后的剩余不确定图G‘的任意子图都不能达到最大流，那么G’也不能达到最大流；

（2）同理，对于一条非A类边，因为Si＜*τ*，则在A中必存在一个子图g，使得ei∉g，如果边ei发生故障，不确定图可以使用子图g传递流量，同时因为g∈A，即g能传递的最大流仍然为最大流，所以对于非A类边发生故障，不确定图G任然能够达到最大流；

的证。

**推论2. 对于不确定图中的一条边ei，如果边ei是B类边，那么ei是不确定图可靠性关键边。**

证明：对于不确定图G的任意一条边ei，如果边ei是B类百年，即如果有0<Si＜*τ* ，则ei发生故障之后，可以找不包含边ei的子图达到最大流，使得最大流不会下降，即连通性不变，但是ei的断掉使得一部分能够达到最大流的子图遭到破坏，使得随机流网络的可靠性下降，此时边ei为不确定图可靠性关键边。

想要证明当0<Si＜*τ* 时ei是不确定图G的可靠性关键边，只需要证明当ei断掉之后，不确定图依然能够达到最大流，但是可靠性下降。

经过划分算保存下来的所有闭合子图空间集为{*C*1, *C*2, …, *Cτ* }, 满足*Ci* ∩ *Cj =* ∅, *C*1 ∪ *C*2 ∪ … ∪ *Cτ* = *A*, 其中τ 为满足最大流的子图区间的个数, 因为0<Si＜*τ* ，则对于任意的ei∈g子图，可以将子图的集合A分为g∈A1和g∉A2，其中满足A1∩A2=∅，A1∪A2=A。

在ei断掉之前，随机流网络的可靠性可以为A中的所有子图概率之和，可以表示为P(A)，而当ei断掉之后，集合A1中的子图不一定能够满足最大流，但是集合A2中的流量可以满可以满足最大流，因此保证了不确定图的连通性不变；同时ei断掉使得A1中至少有一个子图不能满足最大流，因此使得随机流网络的可靠性下降，此时即证明ei为不确定图的可靠性关键边。

的证。

**推论3. 对于不确定图中的一条边ei，如果ei是C类边，那么ei是不确定图的非关键边。**

证明：对于不确定图G中的任意一条边ei，如果ei是C类边，即如果Si=0，则ei断掉之后，原先满足最大流的子图任然能够满足最大流，使得不确定图的最大流不会改变，即连通性不会改变，随机流网络的可靠性性也不会改变，此时边ei为不确定图的非关键边。

想要证明Si=0时，ei是不确定图G的非关键边，只需要证明当ei断掉之后，不确定图的能达到的最大流和随机流网络可靠性不发生改变，即连通性和可靠性都不变即可。

经过划分算法保存下来的所有闭合子图空间集为{*C*1, *C*2, …, *Cτ* }, 满足*Ci* ∩ *Cj =* ∅, *C*1 ∪ *C*2 ∪ … ∪ *Cτ* = *A*, 其中τ 为满足最大流的子图区间的个数, 因为Si=0，那么对于所有的子图区间每一个对应的边ei处都为标记“x”，即任意一个子图区间可以表示为C=（c1,c2…x…cn），其中ci表示为子图区间C的各条边对应的表示，i={1…i-1, i+…n}，则C可以分为两个子图区间（或子图）C1=（c1,c2…0…cn）和C2=（c1,c2…1…cn），当边ei发生故障之后，C2=C1，因为C1中的子图都能够满足最大流，故ei断掉之后C2中的子图也都能够满足最大流，所以不确定图的连通性和随机流可靠性都不会发生改变，此时ei为不确定图G的非关键边。

的证。

### 定量计算

对边进行定性分类可以有效的减少重复计算的次数，对于不同的类别的边设置不同的计算方式是ICA算法的核心思想。

**（1）A 类边的计算**

对于A类边，由推理1可知，其断掉会使流量减少，即不能达到原有的最大流，因此此时原有最大流的网络可靠性和流分布的可靠性都为下降为0。

我们需要重新根据状态划分算法的极小子图理论对剩余不确定图，重新计算获得断掉之后的最大流及其对应的网络可靠性和分布的可靠性。

**（2）B类边的计算**

对于B类边，同样由推论1可以知道，断掉B类边，流量不会减少，此时的重点在于计算剩余的网络可靠性和流分布的可靠性。

对于网络的可靠性，如果子图区间中不包含该边，那么该区间中所有子图依然满足最大流；如果子图区间包含该边，那么判断该子图区间中的其他子图是否大于等于其他不包含该边的子图区间极小子图（可能存在多个）。如果满足，则表示其依然能够满足最大流，否则不能满足，网络的可靠性可以表示为这些断掉B类边任然能够满足最大流的子图概率之和。

对于流分布的可靠性，当一条B类边断掉之后，则判断这条边是否在极小子图上，如果不在极小子图上，则说明极小子图并没有被破坏，最大流分布没有被破坏，流分布的可靠性也不会减少；如果在极小子图上，则首先判断断掉该比边之后的区间下界子图是否满足最大流，如果满足则该区间生成新的下界子图，找到极小子图进行计算，如果不能满足最大流，则需要去除该子图区间，在剩余的区间中找到极小子图进行计算。

图xx 移除B类边计算随机流网络可靠性流程图



图xx 移除B类边，计算不确定图最可靠最大流分布的可靠性

**（3）C类边的计算**

对于C类边的计算，根据推论1，其断掉不会影响连通性，根据推论3，其断掉不会影响可靠性，也就是说C类边断掉不会对不确定图的状态照成任何的影响。

基于以上方式，ICA算法的伪代码如下：

**伪代码**

## 基于确定边过滤的增量状态划分算法ICA-CEF

考虑到传统状态划分算法需要划分的状态空间较大，本节在原有计算方式的基础上提出一种基于确定边过滤的状态划分算法FEA（Filter Edge Algorithm），该算法的主要思路是在使用状态划分算法之前，首先给出能够确定类别的边（定性的边），从而减少状态划分的空间。这些确定边包括割集中的边和悬挂边。

假设不确定图G的边集为E，那么在传统的状态划分算法中，需要划分的状态区间的个数有2|E|个，而在基于过滤集合的状态划分算法中，只要能够确定一条确定边（包括割集中的边或者悬挂边），都能够是状态划分的区间减少一半，显然尽可能多的确定这些边能够很大程度上简化算法复杂度。该算法对于连接度比较高的图效果更好。

FEA算法的是一个基于ICA的算法，只是减少了ICA算法状态划分的初始空间。因此FEA算法的主要着手点就是如何找到所谓的确定边。确定边包括割集中的边和悬挂边。

对于割集中的边，目前求解割集中的边已经被证明是一个NP问题[23]，本文提供一种计算割集中的边算法，该方法不追求找到所有割集中的边，而是尽可能多的找到割集中的边，且满足找到的边一定是割集中的边。该方法的主要思想是首先用最大流最小割算法找到一组割，获取的最大流为全局最大流，然后，根绝割集将图分割为两部分，并补全虚拟源点或虚拟汇点，连接割集边上的顶点到虚拟源点或者虚拟汇点作为一条边，并设置边的容量为一个大于原容量的值；接着，对构造的新图递归使用最大流最小割定理计算局部最大流，如果局部最大流等于全局最大流，则表示该最大流表示的割集也是所求割集，并将该子图继续分割，如果局部最大流大于全局，则舍弃该子图，直到没有可以计算的子图为止，获得的边即为所求部分割集中的边。

对于悬挂边，指的是只有入度或者只有出度的边（特殊的对于源点的入度边、汇点的出度边归为此类），不管单入度边还是单初度边对于不确定图的最大流都是可有可无的，在计算的时候只需要通过图中点的出入度判断即可。

### 割集中的边与悬挂边

目前求解图中所有割集的方法有割集矩阵算法[23], 然而求解图中所有的割集是一个NP问题[24]，当图的规模越来越大，算法复杂度会上升很快，显然是不合适的，因此本文使用一种递归的方式求解割集中的边，该方法的目的是尽可能多的求解割集中的边，而不能保证求得的边包含所有割集中的边。

在一般的图中，割集之间一般有两种形式存在，一种是独立的割集，另一种是关联割集。独立割集就是多个割集之间没有重合的割边，而关联割表示，多个割集中至少存在一条边公用。



图4.5某不确定图的最大子图 图4.6 不确定图最大子图的割集表示

如上图所示，图4.5是某个不确定图的最大子图MSG（G），这个最大子图的其中一个割集如图4.6所示，那么MSG（G）的的割集可以表示为{（ST，SV）（ST，VT）}，可以看出（ST，SV）（ST，VT）两个割集中包含相同的边，则表明两割集是关联割集。同理如果两个割集中不含有相同边，表示两割集为独立割集。

如果求解如图2中的割集，经过划分获得如下的两个子图，如图3.

使用递归的方式求解所有子图中的局部最小割，直到没有子图生成为止，返回所得割集中的边，就是割集中的边。

在一般的图中也会存在一些悬挂边，这些边对于计算不确定图关键程度之前可以确定下来，已减少状态划分算法的划分区间，从而减少算法的复杂度。



图xxx 求解部分割集中的边的算法流程图

证明：使用该算法获取的边都是割集中的边。

悬挂边，指的是只有入度或者只有出度的边（特殊的对于源点的入度边、汇点的出度边归为此类），不管单入度边还是单初度边对于不确定图的最大流都是可有可无的，在计算的时候只需要通过图中点的出入度判断即可。

如下图所示为一个比较特殊的不确定图的最大子图，课件点v1只有初度而没有入度，V2只有入度而没有初度，那么v1便是单出度点，V2是单入度点，又因为这些点都是中间节点，因此与这些点相连的边都不会出现在流分布当中，自然也不会出现在最大流分布当中，所以都可以去除，从而减少状态划分算法的划分空间，从而减少算法的复杂度。



算法xxx FEA算法整体流程图

# 试验及分析

试验部分

# 结束语

正文部

References: Reference

1. 作者. 题目. 刊名(全称), 出版年,卷号(期号):起始页码. [期刊] Text of Reference(当参考文献数<10时用) Text of Reference 1(当参考文献数≥10时用)
2. 作者. 书名. 版次(初版不写), 出版地(城市名): 出版者, 出版年. 起始页码(非必要项).[书籍]
3. 作者. 题目. In(中文用“见”): 整本文献的编者姓名ed(多编者用eds). 文集实际完整名称. 出版地(城市名): 出版者, 出版年. 起止页码.[会议录(论文集、论文汇编等)]
4. 著者. 题名. 学位, 学位授予单位, 出版年.[学位论文]
5. Author. Title. Technical Report, Report No., Publishing place (city name): Publisher, Year (in Chinese with English abstract).[科技报告]

附中文参考文献: 中文参考文献

[5] 著者.题名.科技报告,报告号,出版地(或单位所在地):出版者(或单位),出版年.