有限元大作业

1.问题描述

设有一带孔带倒角的薄板，如图 1 所示，其厚度方向的尺寸比其他两个方向的尺寸小许多，在板边上受有平行于板面并沿板厚均匀分布的载荷。

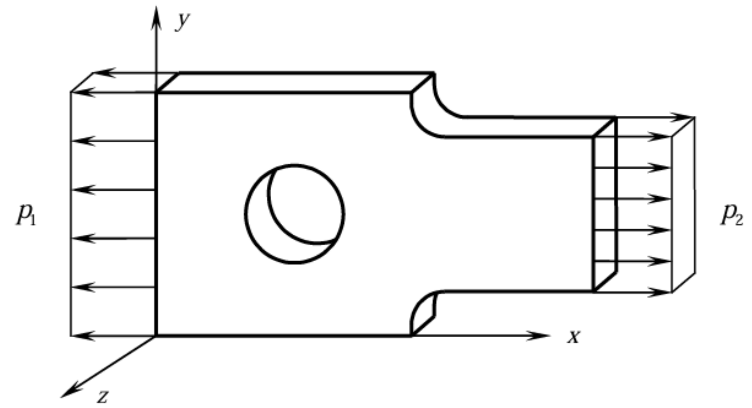


图 1.平面应力问题

现在对此图形进行一定的简化，将薄板的中心孔改为正方形，右上角和右下角的倒角改为长方形缺口，如图 2 所示，此薄板全长 1m，宽 0.5m，厚 0.01m，中心正方形边长 0.1m，右上角和右下角的长方形缺口尺寸为 0.2×0.1m。将薄板左端固定住，右端施加受有平行于板面并沿板厚均匀分布的载荷 100KN，求解应力场。

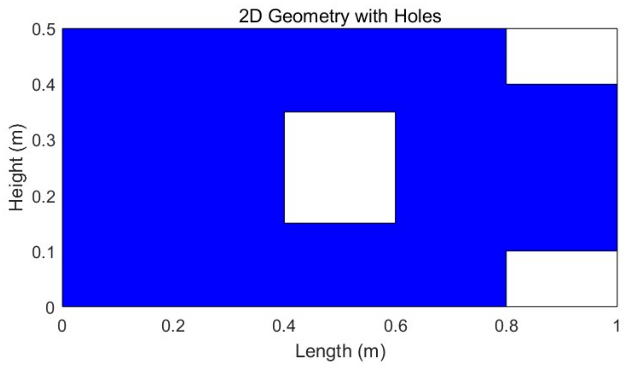


图 2.简化平面应力问题

2.基本理论

2.1 平面应力问题

厚度方向尺寸比其他两个方向小得多，此类问题被称为平面应力问题。板内各点的六个应力分量中，沿 z 轴的正应力σ_x、σ_y和τ_{xy}均为零，而剩下的σ_x、σ_y和τ_{xy}三个应力分量都是平行于 xy 平面的。

平面问题中的基本物理量为位移$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u & V \end{bmatrix}^T$，应力$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \tau_{xy} \end{bmatrix}^T$和应变$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{xy} \end{bmatrix}^T$。几何关系可以简化为：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial y\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix} \tag{1}$$

应力应变关系为：

$$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{2}$$

对于平面应力问题，弹性矩阵 **D** 为：

$$\mathbf{D}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\mu)/2\end{bmatrix} \tag{3}$$

2.2 三角形单元

有限元需要把物体离散化，在平面应力问题中，选择三角形单元作为离散使用的单元。三角形单元每个结点位移在单元平面内有两个分量。整个单元将有六个结点位移分量，可用列阵表示为：

$$\boldsymbol{\delta}^e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_i^T & \boldsymbol{\delta}_j^T & \boldsymbol{\delta}_m^T\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}u_i & V_i & u_j & V_j & u_m & V_m\end{bmatrix}^T \tag{4}$$

其中子矩阵：

$$\boldsymbol{\delta}_i=\begin{bmatrix}u_i & v_i\end{bmatrix}^T \quad (i,j,m) \tag{5}$$

选择最简单的线性函数作为位移模式，即

$$u=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y,\quad v=\alpha_4+\alpha_5 x+\alpha_6 y \tag{6}$$

三角形三个节点的位移即可表示为：

$$\begin{aligned}u_i&=\alpha_1+\alpha_2 X_i+\alpha_3 y_i & V_i&=\alpha_4+\alpha_5 X_i+\alpha_6 y_i\\ u_j&=\alpha_1+\alpha_2 X_j+\alpha_3 y_j & V_j&=\alpha_4+\alpha_5 X_j+\alpha_6 y_j\\ u_m&=\alpha_1+\alpha_2 X_m+\alpha_3 y_m & V_m&=\alpha_4+\alpha_5 X_m+\alpha_6 y_m\end{aligned} \tag{7}$$

单元的位移模式为：

$$u=N_i u_i+N_j u_j+N_m u_m \quad V=N_i V_i+N_j V_j+N_m V_m \tag{8}$$

其中型函数 N_i、N_j 和 N_m 为：

$$N_i=\frac{1}{2\Delta}\left(a_i+b_i x+c_i y\right) \quad (i,j,m) \tag{9}$$

式中：

$$2\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_i & y_i\\ 1 & x_j & y_j\\ 1 & x_m & y_m\end{vmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}a_i&=x_j y_m-x_m y_j\\ b_i&=y_j-y_m \qquad (i,j,m)\\ c_i&=-\left(x_j-x_m\right)\end{aligned} \tag{11}$$

3.求解流程

3.1 建立模型

根据问题描述，建立此平面应力问题的模型，模型图如图 2 所示，代码见 t0.m。

3.2 划分网格

选择三角形单元作为离散单元，使用 matlab 的 PDE 工具箱，设置最大单元尺寸为 0.03m^2，生成如图三所示网格。生成节点 602 个，单元 1075 个，最大单元尺寸为 0.03m^2，最小单元尺寸为 0.015m^2。代码见 t1.m。

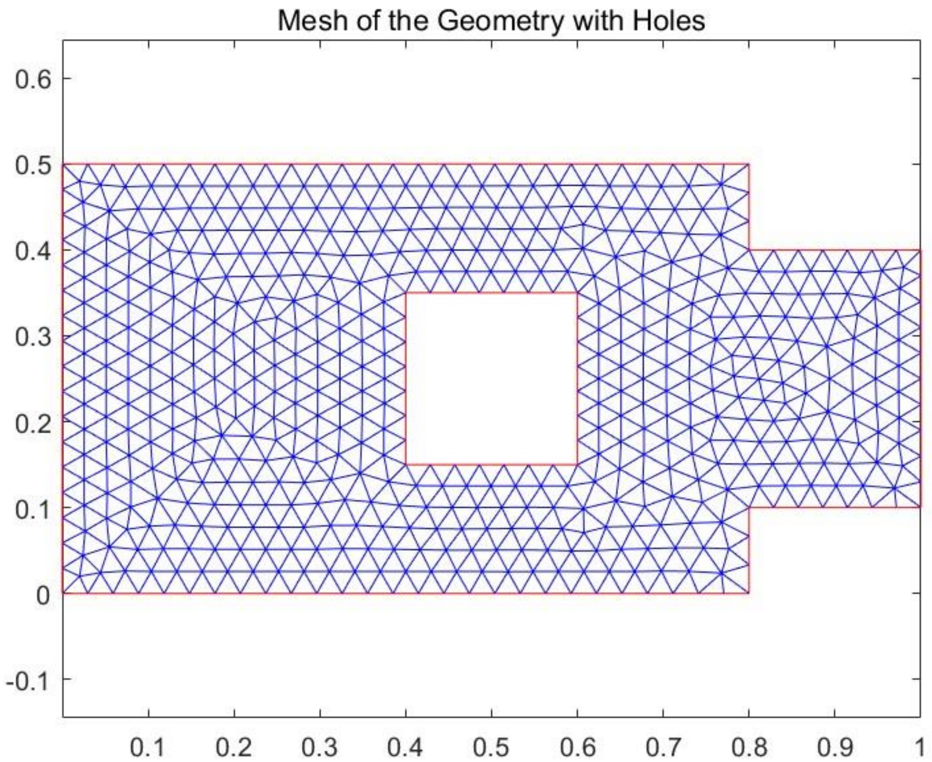


图 3.划分网格

3.3 组装刚度矩阵

根据刚度矩阵组装理论，求解局部刚度矩阵，组装整体刚度矩阵。代码见 t2.m。

3.4 添加边界条件、载荷与求解

根据问题描述，施加左端固定的边界条件与右端载荷的条件，并进行求解。节点受载荷后位置如图 4 所示。代码见 t3.m。

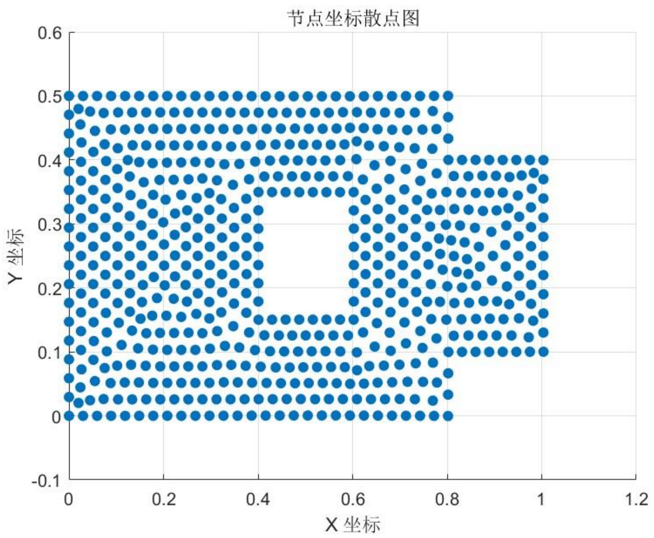


图 4.节点受载荷后坐标散点图

节点位移前后位置对比如图 5 所示，代码见 t4.m。

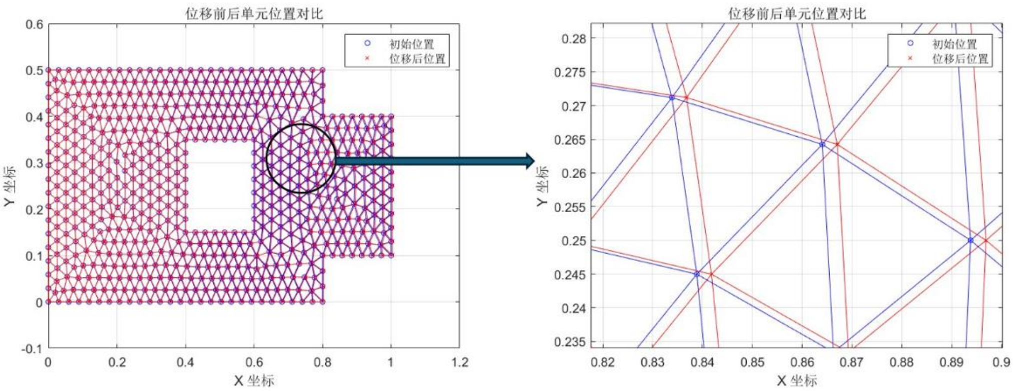
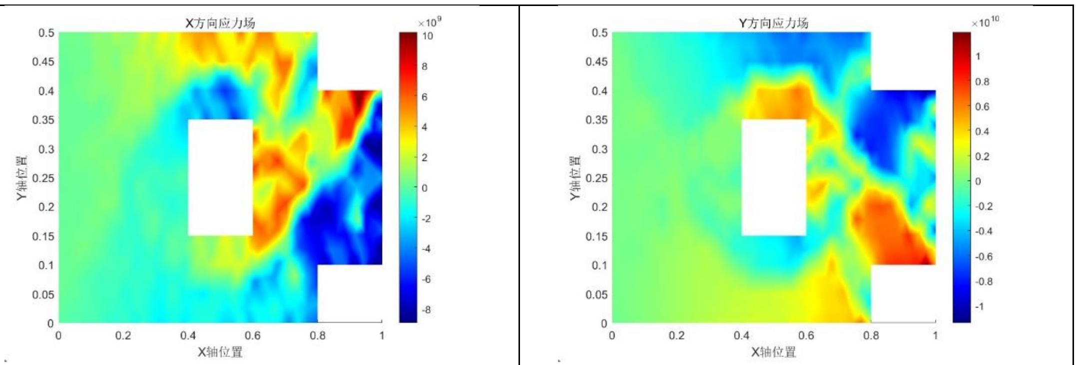


图 5.节点位移前后位置对比图

3.5 应力场

将位移场带入求解应力场的理论计算公式中，使用双线性插值方法。这种插值方法在矩形单元上进行插值，通过在四个角点上已知的值之间进行线性插值，从而得到单元内部其他点的近似值。应力场如图 6 所示。



（a） (b)

图 6.应力场

图 6（a）可以观察到薄板的右上角、右下角和中心孔右侧受到的 X 方向应力较大，其中右上角红色区域压力在 6000~10000MPa 范围，右下角蓝色区域压力在 6000~9000MPa 范围，中心孔右侧红色区域压力在 4000~6000MPa 范围。图 6（b）可以观察到薄板的右上角、右下角和中心孔上侧受到的 Y 方向应力较大，其中右上角蓝色区域压力在 6000~10000MPa 范围，右下角红色区域压力在 6000~11000MPa 范围，中心孔上侧红色区域压力在 4000~6000MPa 范围。