

有限元方法及应用——期末报告

姓名：徐媛娜

学号：S230200184

班级：2302

一、问题描述

自冲铆接是一种利用大压力将铆钉直接压入待铆接板材，待铆接板材在铆钉的压力作用下和铆钉发生塑性变形，成型后扩张于铆模之中，形成稳定连接的一种全新的板材连接技术。这个过程的关键便是铆钉钉腿刺穿上板并在下板形成倒八字结构，刺穿上板并不能损伤下板，因此需要找到板材与铆钉成型区域的应力应变情况。假设已知一块厚度为 2mm 的薄钢板，铆钉直径为 1.2mm，钢板的质量密度为 7.5g/cm³，泊松比为 0.26，杨氏模量为 206GPa，探究钢板在不同压力下的形变与应力应变情况。

二、基本原理

有限元法（FEM）是求解两个或三个空间变量的偏微分方程 Q 的通用数值方法。为了解决一个问题，FEM 将一个大系统细分为更小、更简单的部分，这些部分称为有限元。这是通过空间维度中的特定空间离散化来实现的，该离散化是通过构建对象的网格来实现的：解的数值域，它具有有限数量的点。边值问题的有限元法公式化最终产生代数方程组，该方法在域上逼近未知函数。然后将模拟这些有限元的简单方程组合成一个更大的方程组，以模拟整个问题。然后，FEM 通过变分法最小化相关误差函数来近似解。

我们在研究一个三维空间问题时候，自变量不仅要考虑时间因素，同时还有空间坐标变换。在数学中，我们把这种方程称之为偏微分方程。也就是说，偏微分方程能描述的连续体的各个点随时间连续变化的情况，本质上就是一种“场”的描述。有限元的基本求解过程是将问题转换为偏微分方程，然后设置边界条件，将系统离散为很多个有限数量的点单元，对每个点单元进行求解。

在一个连续介质中，互相连接的点是无限的，因而具有无限个自由度。但如果把这个连续介质离散成有限个单元的组合体，这些单元在有限个结点上相互连接，包含有限个自由度，从而可以用矩阵方法进行分析。以二维连续介质为例，有限单元法分析的基本步骤：

1. 用虚拟的直线把原介质分割成有限个三角形单元，这些直线是单元的边界，几条直线的交点称为结点；
2. 假定各单元在结点上互相较接，结点位移是基本的未知量；
3. 选择一个函数，用单元的三个结点的位移唯一的表示单元内任一点的位移，此函数称为位移函数；
4. 通过位移函数，用结点位移唯一地表示单元内任一点的应变（几何方程）；再利用广义虎克定律（物理方程），用结点位移唯一地表示单元内任一点的应力；

5. 利用能量原理，找到与单元内部应力状态等效的结点力；再利用单元应力与结点位移的关系，建立等效结点力与结点位移的关系（单元刚度矩阵）；
 6. 将每一单元所承受的载荷，按静力等效原则移置到结点上；
 7. 在每一结点上建立用结点位移表示的静力平衡方程，得到一个线性方程组；解出这个方程组，求出结点位移；进而求出每个单元的应力。
- 以平面三角形为例，

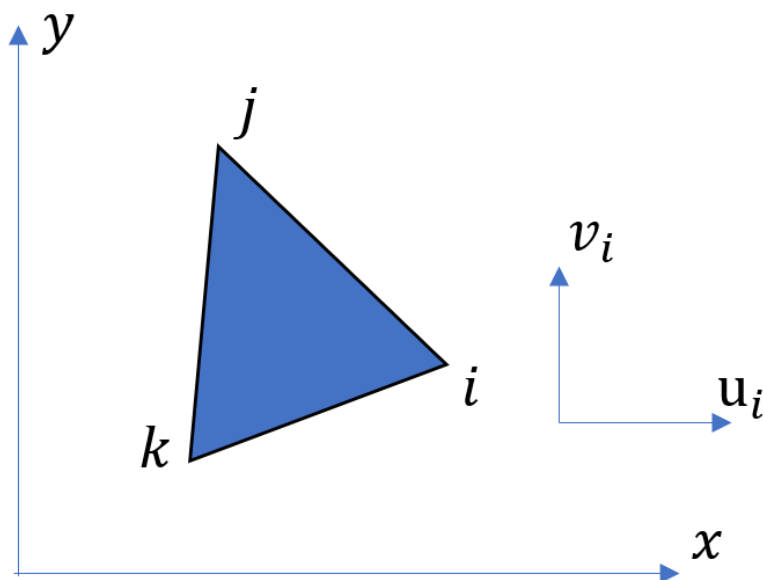


图 1 三角形单元示意图

节点位移的分量为：

$$\{\delta\}^e = \{u_i; v_i; u_j; v_j; u_k; v_k\}$$

为了能用结点位移表示单元应变和应力，必须假定单元内任一点的位移分量是坐标的某种函数。即位移函数：

$$u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y;$$

$$v = \beta_4 + \beta_5 x + \beta_6 y;$$

上式中的 6 个系数可以用 6 个结点位移表示，根据克莱姆法则，解得 6 个系数，再次代回位移函数，得到位移函数的简单表达式：

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k;$$

$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k;$$

上式中 N_i , N_j , N_k 是坐标的函数，反映了单元的位移形态，称为形函数。

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A}$$

$$N_j = \frac{a_j + b_j x + c_j y}{2A}$$

$$N_k = \frac{a_k + b_k x + c_k y}{2A}$$

根据解析几何的概念，A 等于三角形的面积。为了不致成为负值，结点 i、j、k 的顺序必须是逆时针方向的。

$$A = \frac{1}{2} [1 \ x_i \ y_i; 1 \ x_j \ y_j; 1 \ x_k \ y_k]$$

由位移函数可知，单元边界上位移是线性变化的，即两个相邻单元在其公共结点上具有相同的结点位移，在其公共边界上亦具有相同的位移。也就是说，位移函数保证了相邻单元之间位移的连续性。

单元应变：

$$\varepsilon = \{\varepsilon_x; \varepsilon_y; \gamma_{xy}\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = [B_i; B_j; B_k] \{\varepsilon\}^e$$

其中， $[B_i]$:

$$[B_i] = \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \ 0; 0 \ \frac{\partial N_i}{\partial y}; \frac{\partial N_i}{\partial y} \ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right] = \frac{1}{2A} [b_i \ 0; 0 \ c_i; b_i \ c_i]$$

单元应力：

$$\{\sigma_x; \sigma_y; \sigma_z\} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[1 \ \mu \ 0; \mu \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ \frac{1-\mu}{1} \right] \{\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z\}$$

弹性矩阵：

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \left[1 \ \mu \ 0; \mu \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ \frac{1-\mu}{1} \right]$$

采用三角形单元进行求解，在 matlab 软件中建立偏微分方程，并设置材料的相关参数，如弹性模量、泊松比等，设置边界条件，在自冲铆接过程，我们会采用一些方法将带连接板材的非铆接区域进行固定，该薄板厚度为 0.2mm，如图所示，铆接区域为薄板中心区域的一小块圆柱体积，由 Face2、Face1 组成，我们需要将 Face4、5 进行固定，并在 Face1 上施加一定的力，模拟铆接过程。

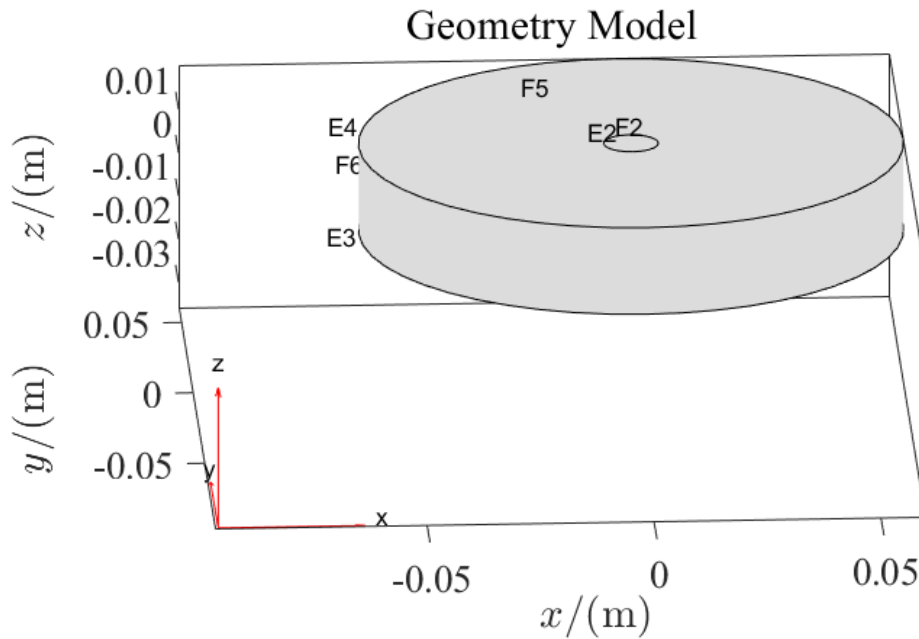


图 2 三维模型示意图

三、程序流程图：

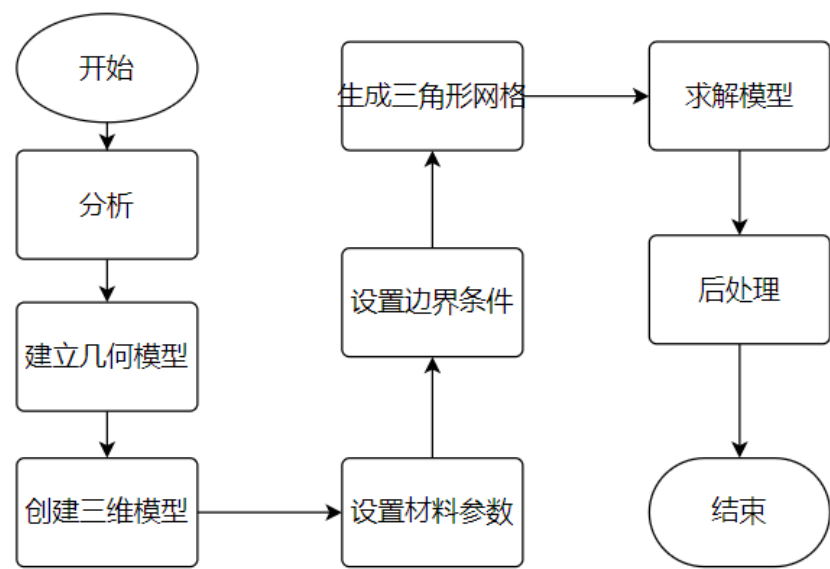


图 3 程序流程图

四、输出结果

压力为 1000 帕时，输出结果为：

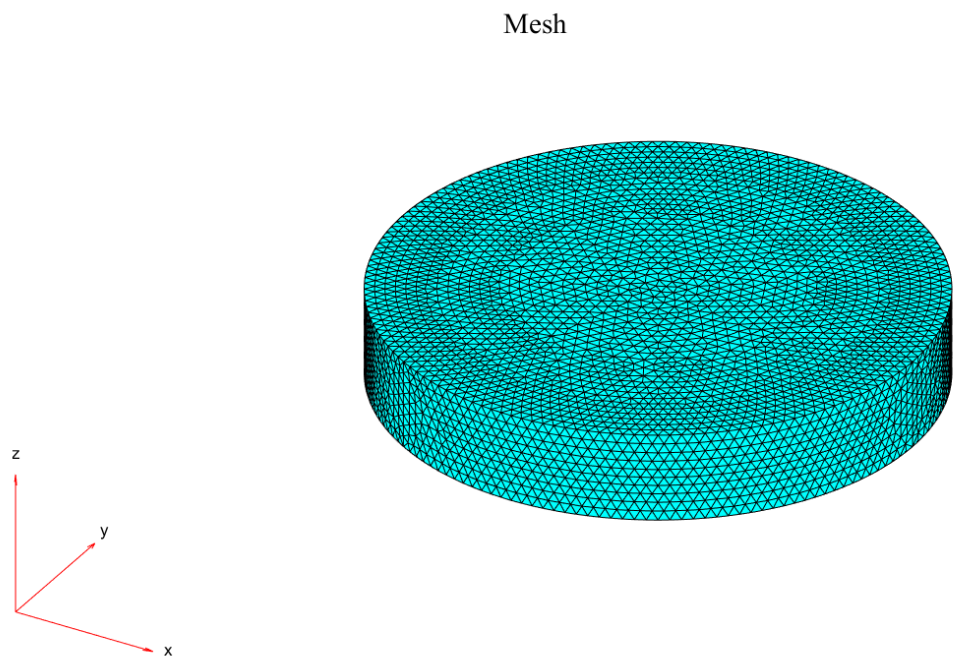


图 4.1 网格划分图（网格大小为 $0.006 \times 0.4 = 0.0024\text{mm}$ ）

Displacement Magnitude

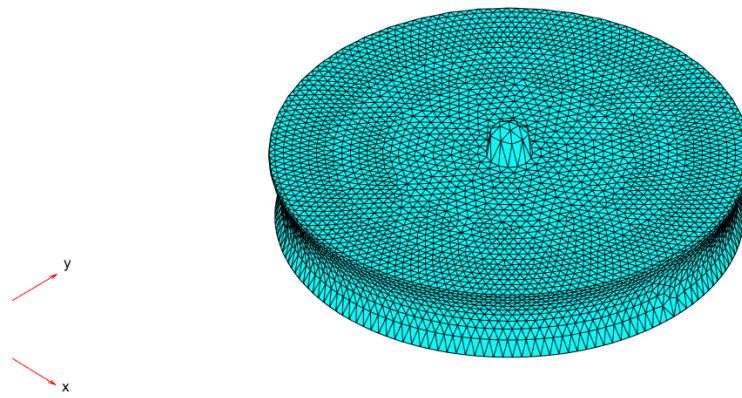


图 4.2 网格变形图 1

Displacement Magnitude

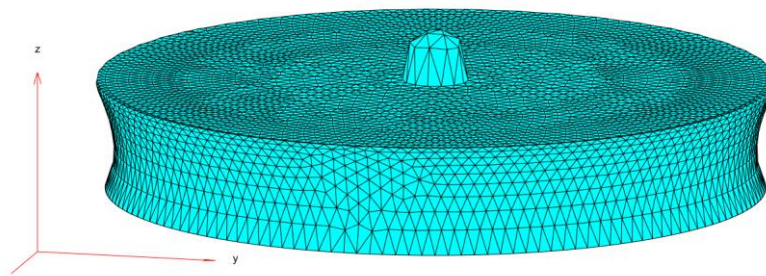


图 4.3 网格变形图 2

Stress-zz

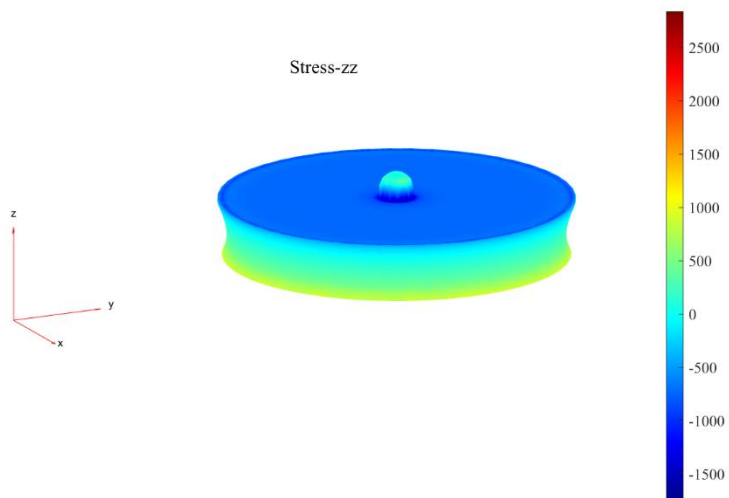


图 4.4 z 轴法向应力形变图 1

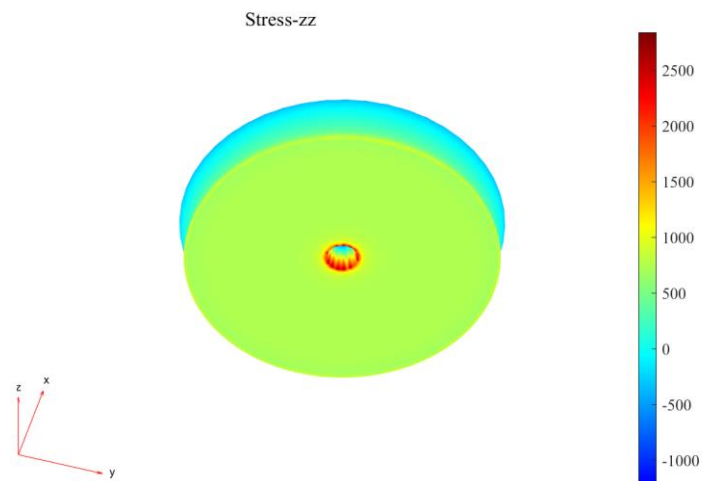


图 4.5 z 轴法向应力形变图 2

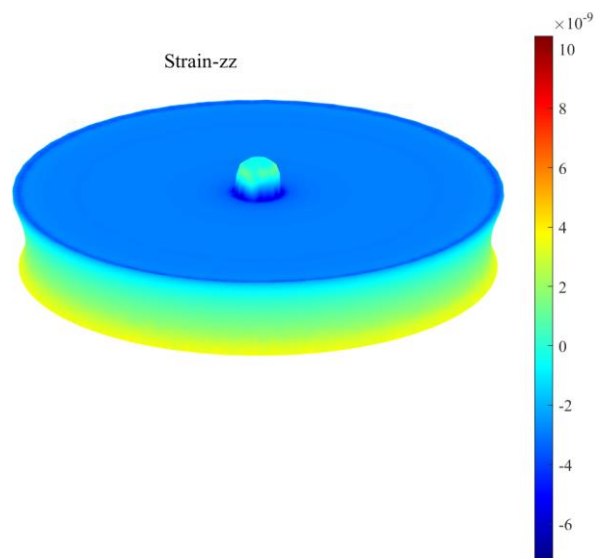


图 4.6 z 轴法向应变图 1

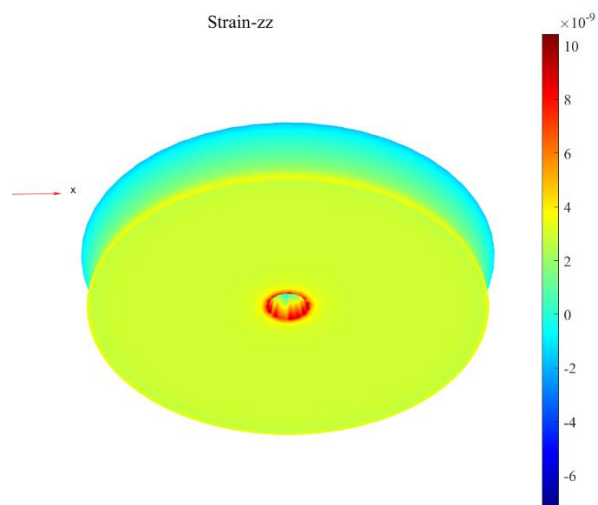


图 4.7 z 轴法向应变图 1

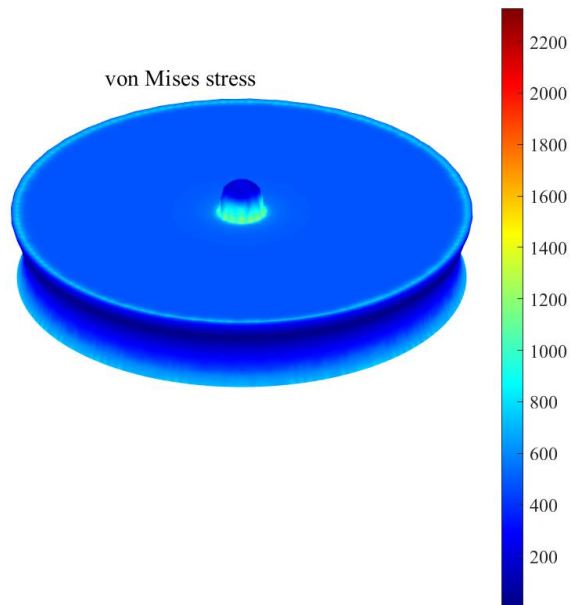


图 4.8 米塞斯应力图 1

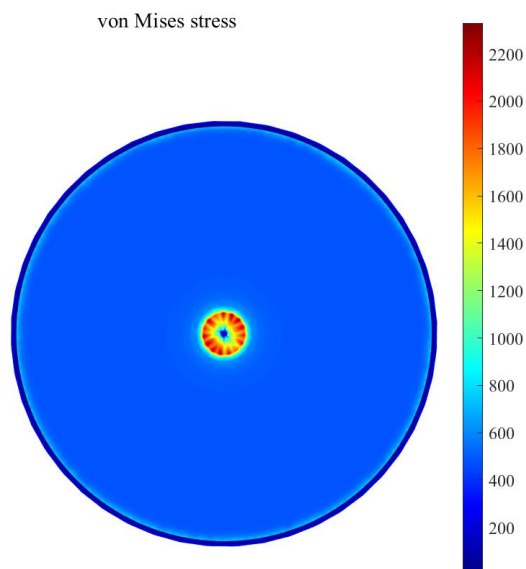


图 4.9 米塞斯应力图 2

五、程序

% 求解薄钢板的铆接区域在均布压力作用下的空间应力应变问题。

clear all;%清除所有

close all;%关闭所有窗口

clc;

%-----参数设置-----%

% 所有属性采用 SI 单位.

global L s t E nu p D g;%创建全局变量

L=0.060;% 板半径 m

```

s=0.006;% 连接区域的半径 m
t=0.02;%板厚度 m
D=7.5e3;%材料的质量密度 kg/m3
E=2.06E+011;% 材料杨氏模量.pa
nu = 0.26;%泊松比.
p= 1000000;%基本压力.pa
g=9.8;%重力加速度
%-----创建集合偏微分模型-----%
% 创建模型.
SPRModel = createpde("structural","static-solid");%创建用于求解空间应力问题的结构模型
gm = multicylinder([s,L],t);%创建带有铆接区域的薄钢板 3D 计算区域
SPRModel.Geometry = gm;%将创建的 gm 三维几何图形添加到模型容器中
GeometryModelFigure = ...
    figure('Name','Geometry Model','NumberTitle','off');%绘图， 三维模型示意图， 标题为
    Geometry Model
GeometryModelAxes = ...
    axes(GeometryModelFigure,'NextPlot','add ','...%在不清空或重置当前图窗的前提下添加
    新的图形对象。
    'Box','on',... %将当前坐标区的 Box 属性设置为 "on" 在坐标区周围显示框轮
    廓。
    'FontName','Times New Roman','FontSize', 16);%设置字体为新罗马， 字号 16
GeometryModel = ...%绘制 PDE 几何模型
    pdegplot(SPRModel,'EdgeLabels','on','FaceLabels','on');%查看边标签和面标签。在图的顶
    部添加空间以清楚地查看顶部边缘。
xlabel(GeometryModelAxes,' $x/\text{m}$ ','$','Interpreter','latex');%设置 x 轴标签， 单位， 使用
    LaTeX 标记解释字符
ylabel(GeometryModelAxes,' $y/\text{m}$ ','$','Interpreter','latex');%设置 y 轴标签， 单位， 使用
    LaTeX 标记解释字符
zlabel(GeometryModelAxes,' $z/\text{m}$ ','$','Interpreter','latex');%设置 z 轴标签， 单位， 使用
    LaTeX 标记解释字符
title(GeometryModelAxes,'Geometry Model');%设置图片名称 Geometry Model

%设置模型的材料参数
structuralProperties(SPRModel,"YoungsModulus",E,...
                    "PoissonsRatio",nu,...
                    "MassDensity",D);%设置几何模型的杨氏模量、泊松比、
    质量密度
structuralBodyLoad(SPRModel, ...
                    "GravitationalAcceleration",[0;0;g]);%设置模型在 z 轴方向受重力

%设置边界条件， 根据板材实际中所有约束设置边界条件
%structuralBC(SPRModel,"Face",6,"Constraint","fixed");%固定三维模型的面 6
structuralBC(SPRModel,"Face",4,"Constraint","fixed");%固定三维模型的面 4
structuralBC(SPRModel,"Face",5,"Constraint","fixed");%固定三维模型的面 5

```



```
structuralBoundaryLoad(SPRModel,...  
                        'Face',1,'SurfaceTraction',[0.000,0.000,p]);%指定三维模型面 1 的牵  
引力。
```

```
% 生成网格
```

```
generateMesh(SPRModel,...  
             'Hmax',0.400 * s,...%创建一个目标最大元素边缘长度为 0.5*s 的网格。  
             'GeometricOrder','quadratic');%表示二次元的三角形或四面体在其角和边中心  
具有节点。
```

```
MeshFigure = ...
```

```
    figure('Name','Mesh','NumberTitle','off');%绘图， 图片名称 Mesh
```

```
MeshAxes = ...
```

```
    axes(MeshFigure, 'NextPlot', 'add',...%在不清空或重置当前图窗的前提下添加新的图形对  
象
```

```
        'Box','on',...
```

```
        'FontName','Times New Roman','FontSize',16);%设置字体为新罗马， 字
```

```
号 16
```

```
hMesh = ...
```

```
    pdeplot3D(SPRModel);%绘图， 显示网格
```

```
title(MeshAxes, 'Mesh');%设置图片名称 Mesh
```

```
%求解模型
```

```
R = solve(SPRModel);
```

```
savefig('Cantilever.fig');%保存
```

```
% 计算网格位移幅度.
```

```
hFigureDisplacement = ...
```

```
    figure('Name','Displacement Magnitude','NumberTitle','off');%绘图网格变形
```

```
hAxesDisplacement= ...
```

```
    axes(hFigureDisplacement,'NextPlot','add ',...
```

```
        'Box','on',...
```

```
        'FontName','Times New Roman','FontSize', 16);%设置字体为
```

```
新罗马， 字号 16
```

```
hDisplacement = ...
```

```
    pdeplot3D(SPRModel,"ColorMapData",R.Stress.Magnitude, ...
```

```
        "Deformation",R.Displacement)%绘制网格变形幅度
```

```
axis equal;
```

```
title(hAxesDisplacement,'Displacement Magnitude');%设置图片名称 Displacement Magnitude
```

```
%法向应力绘制变形形状
```

```
hFigureStress = ...
```

```
    figure('Name','Stress-zz','NumberTitle','off');%绘图网格变形
```

```
hAxesStress= ...
```

```
    axes(hFigureStress,'NextPlot','add ',...
```

```

                                'Box','on',...
                                'FontName','Times New Roman','FontSize', 16);%设置字体为新罗马,
字号 16
hDisplacement = ...
    pdeplot3D(SPRModel,"ColorMapData",R.Stress.szz, ...%用法向应力的 z 分量绘制变
    形形状
                                "Deformation",R.Displacement)
axis equal;
title(hAxesStress,'Stress-zz');%设置图片名称 Stress-zz

%法向应变变形显示
hFigureStrain = ...
    figure('Name','Strain-zz','NumberTitle','off');%绘图网格变形
hAxesStrain= ...
    axes(hFigureStrain,'NextPlot','add ',...
                                'Box','on',...
                                'FontName','Times New Roman','FontSize', 16);%设置字体为新罗马,
字号 16
hDisplacement = ...
    pdeplot3D(SPRModel,"ColorMapData",R.Strain.ezz, ...
                                "Deformation",R.Displacement)%用法向应变的 z 分量绘制变形
    形状
axis equal;
title(hAxesStrain,'Strain-zz');%设置图片名称 Stress-zz

%米塞斯应力.
hFigureMises = ...
    figure('Name','von Mises Stress','NumberTitle','off');
hAxesMises = ...
    axes(hFigureMises,'NextPlot','add',...
                                'Box','on',...
                                'FontName','Times New Roman','FontSize',16);%设置字体为新罗马,
字号 16
hMises = ...
    pdeplot3D(SPRModel,"ColorMapData",R.VonMisesStress, ...
                                "Deformation",R.Displacement)%用米塞斯应力绘制变形形状
axis equal;
title(hAxesMises,'von Mises stress');%设置图片名称 von Mises stress

```