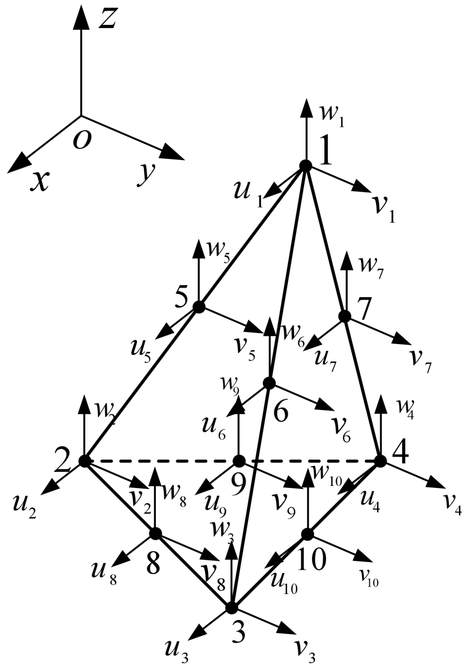
有限元方法及运用大作业

刘文广 B2302S0105

一、单元理论

本次有限元大作业，本人采取的是 10 节点四面体单元，即 C3D10，其节点包括四面体的 4 个顶点及四面体棱边的 6 个中点。在运用 10 节点四面体单元对三维固体结构分析时，首先应将问题域划分为一系列的四面体单元，这种单元有 10 个节点和 4 个表面，每个节点有 3 个自由度（u，v 和 w），每个四面体单元自由度总数为 30，如右图所示：



有限元法主要是将模型划分成有限个单元，通过数值分析手段，求解出每个单元上节点的场变量，如结构场的位移、声场的声压、电磁场的磁场强度等，再对单元内的场变量进行插值，以结构场的位移矢量 u 为例，其插值形式如下：

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \mathbf{N}(x,y,z)\mathbf{d_e}$$

其中$\mathrm{d_e}$为节点位移向量，其形式为：

$$\mathbf{d}_e = \{\underbrace{u_1 \quad v_1 \quad w_1}_{\text{节点1的位移}} \ \underbrace{u_2 \quad v_2 \quad w_2}_{\text{节点2个位移}} \ \cdots \ \underbrace{u_{10} \quad v_{10} \quad w_{10}}_{\text{节点10的位移}}\}^T$$

单元的形函数矩阵$\mathbf{N(x,y,x)d}$ 的形式如下：

$$\mathbf{N}(x,y,z)=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & & N_{10} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & & \cdots & 0 & N_{10} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & & \cdots & 0 & 0 & N_{10} \end{bmatrix}$$

单元节点的形函数若像平面三角形单元一样，通过位移方程求解，其位移方程需构造为完全二次多项式共 10 项，十个方程求解十个未知数，求解复杂，计算量大，因此可通过体积坐标求得，采用划面法可得到形函数有：

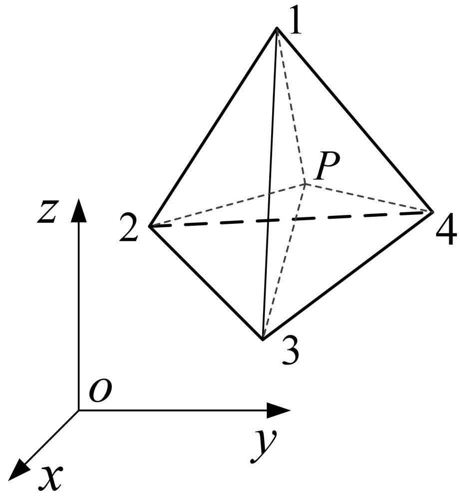
角点形函数：

$$N_i = L_i(2L_i - 1), i = 1,2,3,4$$

边中点形函数：

$$N_j = 4L_iL_k, j = 5,6,7,8,9,10$$

其中，i，k 为与边中点 j 同边的两个角点，L_i为体积坐标，形函数是关于体积坐标的二次函数，对于四面体单元，任意一点 P 的位置如图所示，因此四面体单元体积坐标可用下列比值来表示：



$$L_1 = \frac{V_{P234}}{V}$$
$$L_2 = \frac{V_{P134}}{V}$$
$$L_3 = \frac{V_{P124}}{V}$$
$$L_4 = \frac{V_{P123}}{V}$$

由四面体体积计算公式可知：

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}$$

$$V_{pjmk}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_p & y_p & z_p\\ 1 & x_j & y_j & z_j\\ 1 & x_m & y_m & z_m\\ 1 & x_k & y_k & z_k\end{vmatrix}$$

由于$V_{P234}+V_{P134}+V_{P123}+V_{P124}=1$，此$L_1+L_2+L_3+L_4=1$。

由于直角坐标与体积坐标有下列关系式：

$$\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4\\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\end{Bmatrix}$$

对上式求逆，可用直角坐标表示体积坐标如下：

$$\begin{Bmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\end{Bmatrix}=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix}V_1 & a_1 & b_1 & c_1\\ V_2 & a_2 & b_2 & c_2\\ V_3 & a_3 & b_3 & c_3\\ V_4 & a_4 & b_3 & c_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\ x\\ y\\ z\end{Bmatrix}$$

式中a_i，b_i，c_i分别为表面 i（角点 i 相对的表面）在 x,y,z 平面上的投影面积。

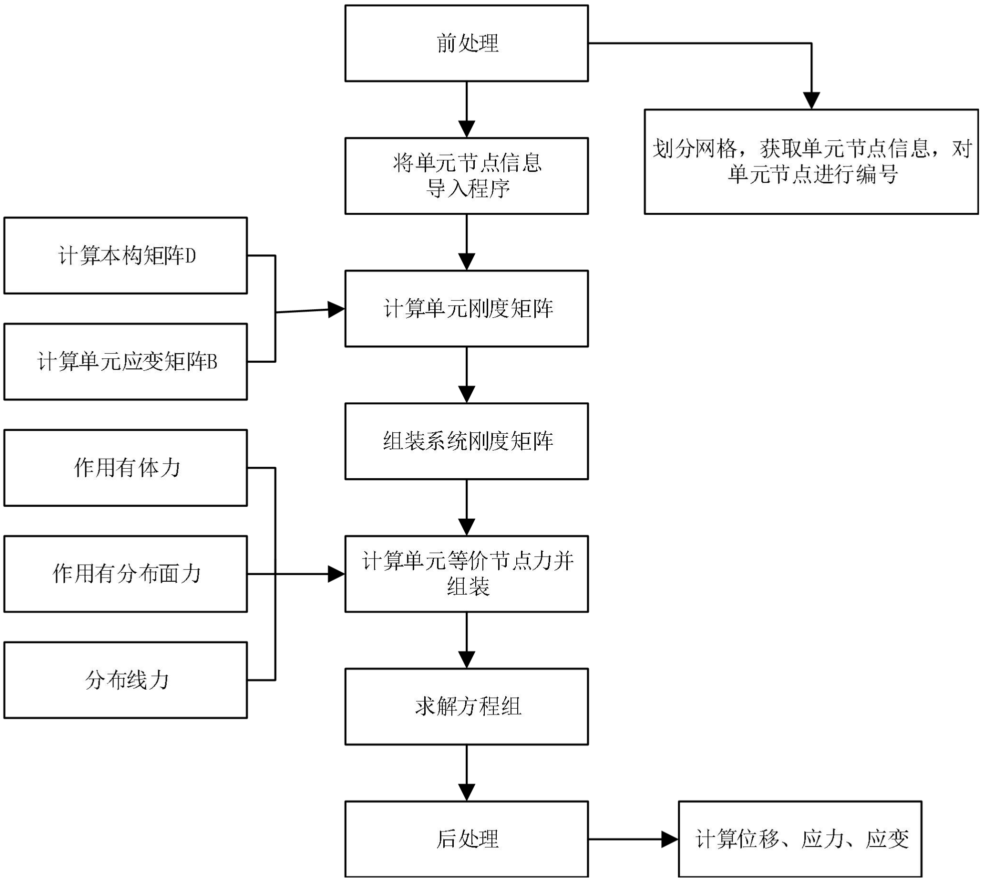
对于 4 节点四面体单元，其形函数$N_i=L_i$，其中 i=1,2,3,4。

四面体的应力应变矩阵即 B 矩阵为：

$$B=[B_1\ \ B_2\ \ \cdots B_{10}]$$

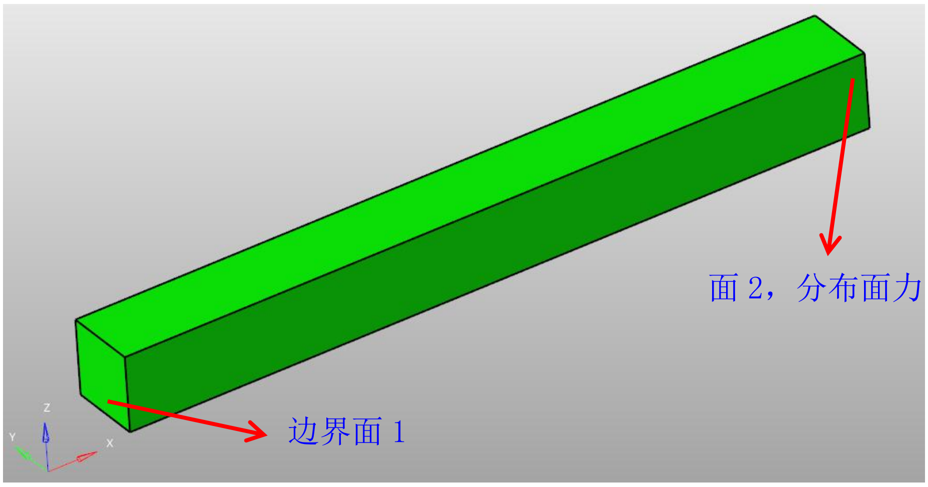
$$[B_i]=\begin{vmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x}\end{vmatrix}$$

二、程序流程图（隐式）



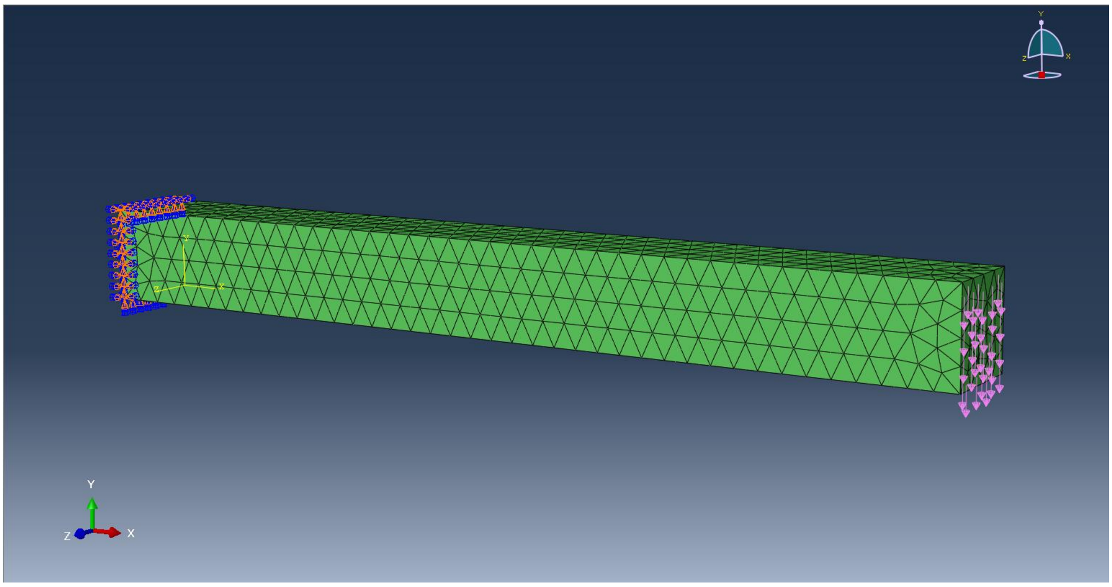
三、问题描述

采用三维梁模型模拟工程上应用较广的悬臂梁，探究其在工作时的形变问题，梁的尺寸为 10m×1m×1m，如图所示：



取单元大小为 0.25m，采用十节点四面体单元，对模型进行划分，得到 2653 个单元，5002 个节点，并在边界面 1 上给定边界条件，即该面上的节点位移向

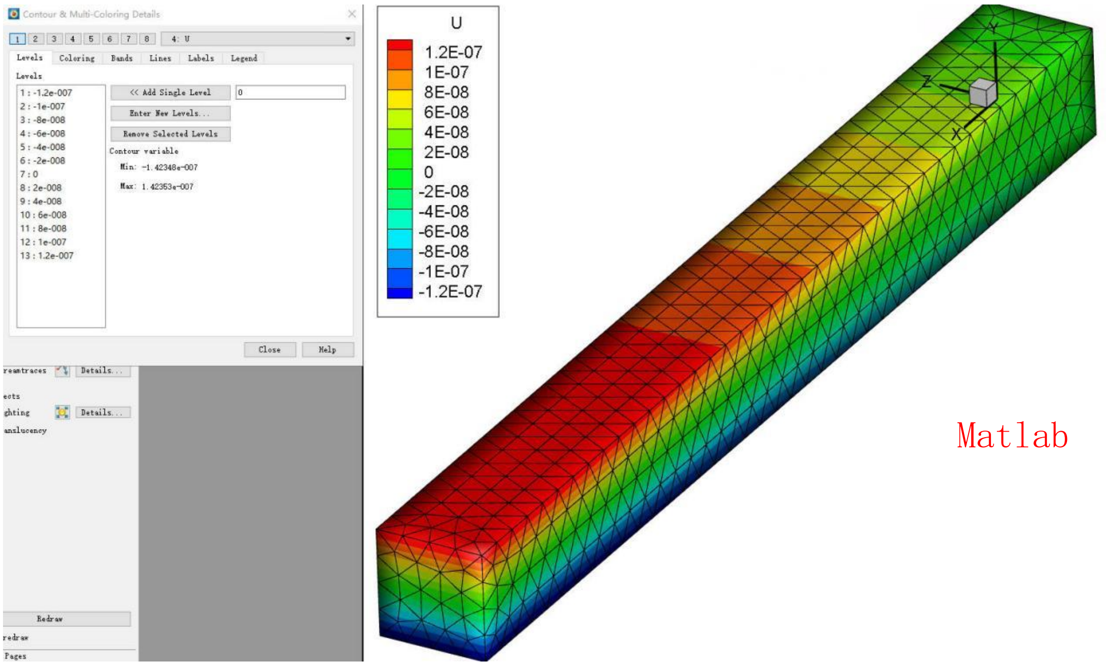
量为 0，在面 2 上施加分布面力，其力方向为沿 y 轴负方向，力大小为 1N，材料为各项同性，杨氏模量为 2.1e9，泊松比为 0.3，如下图所示：

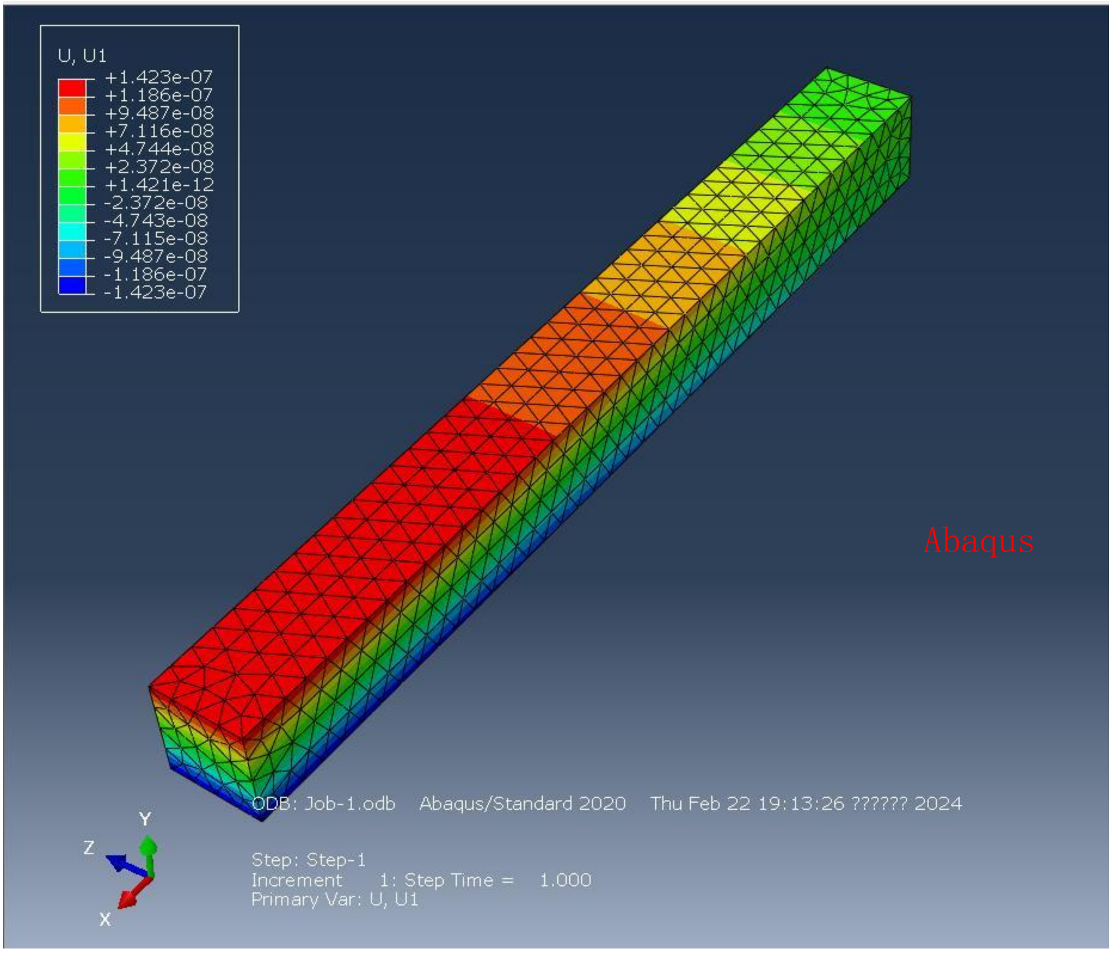


四、计算结果

Matlab 程序计算的位移向量，包括位移在 x、y、z 方向的位移向量及其模，与商业软件 Abaqus 计算结果进行对比，结果如下所示：

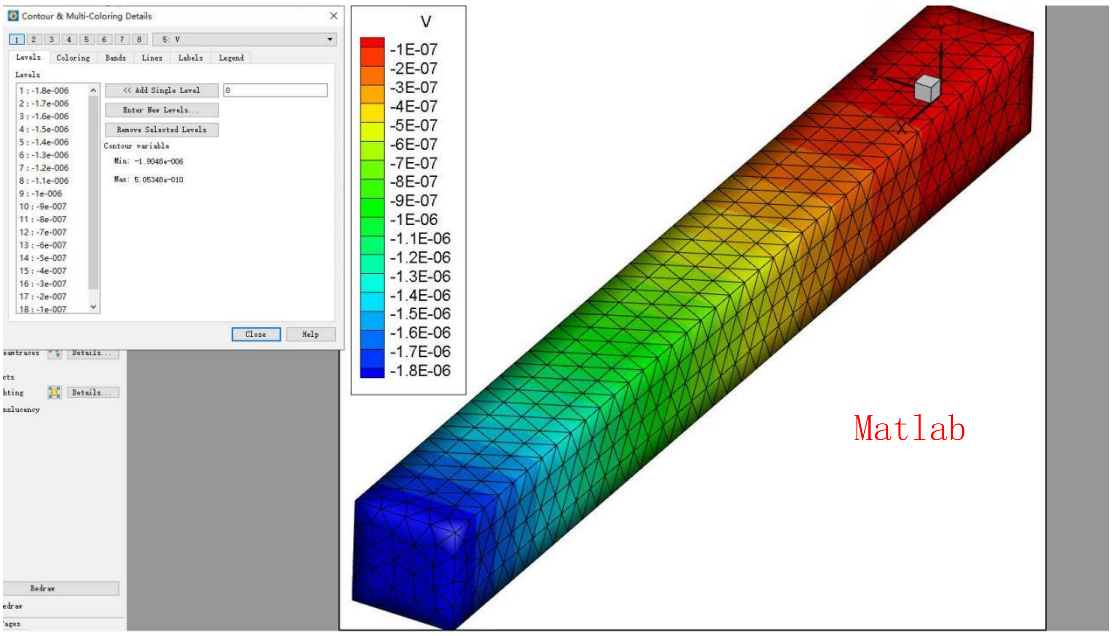
（1）x 方向的位移 DispX：

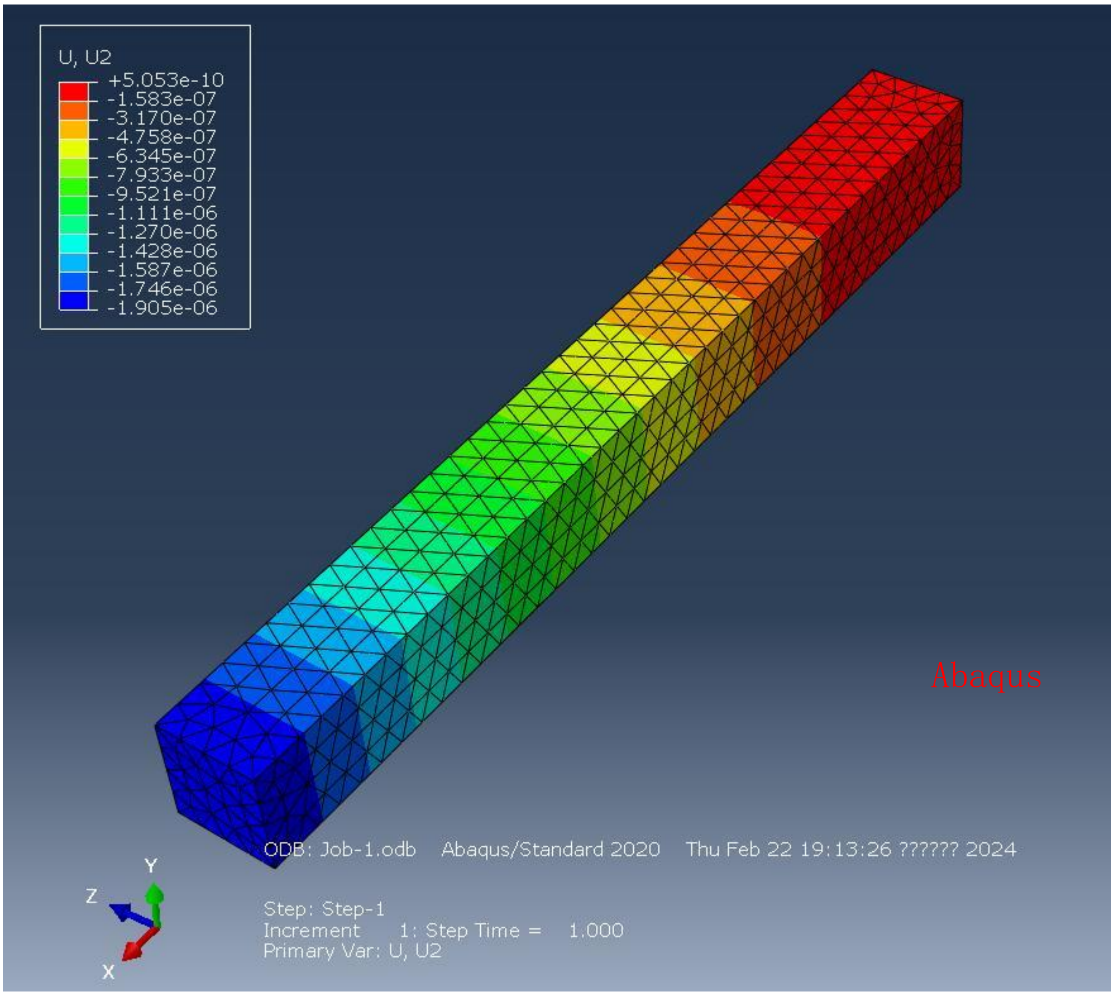




计算	ABAQUS	MATLAB	误差
Max	1.423E-07	1.42353E-07	0.0372%
Min	-1.423E-07	-1.4348E-07	0.0337%

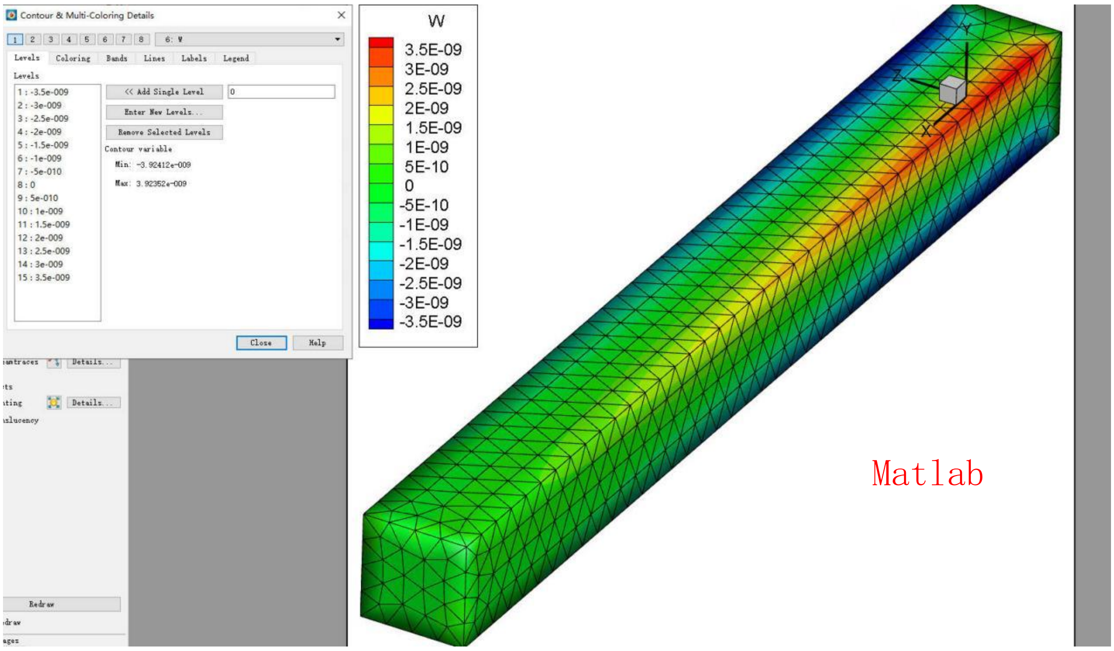
（2）y 方向的位移 DispY：

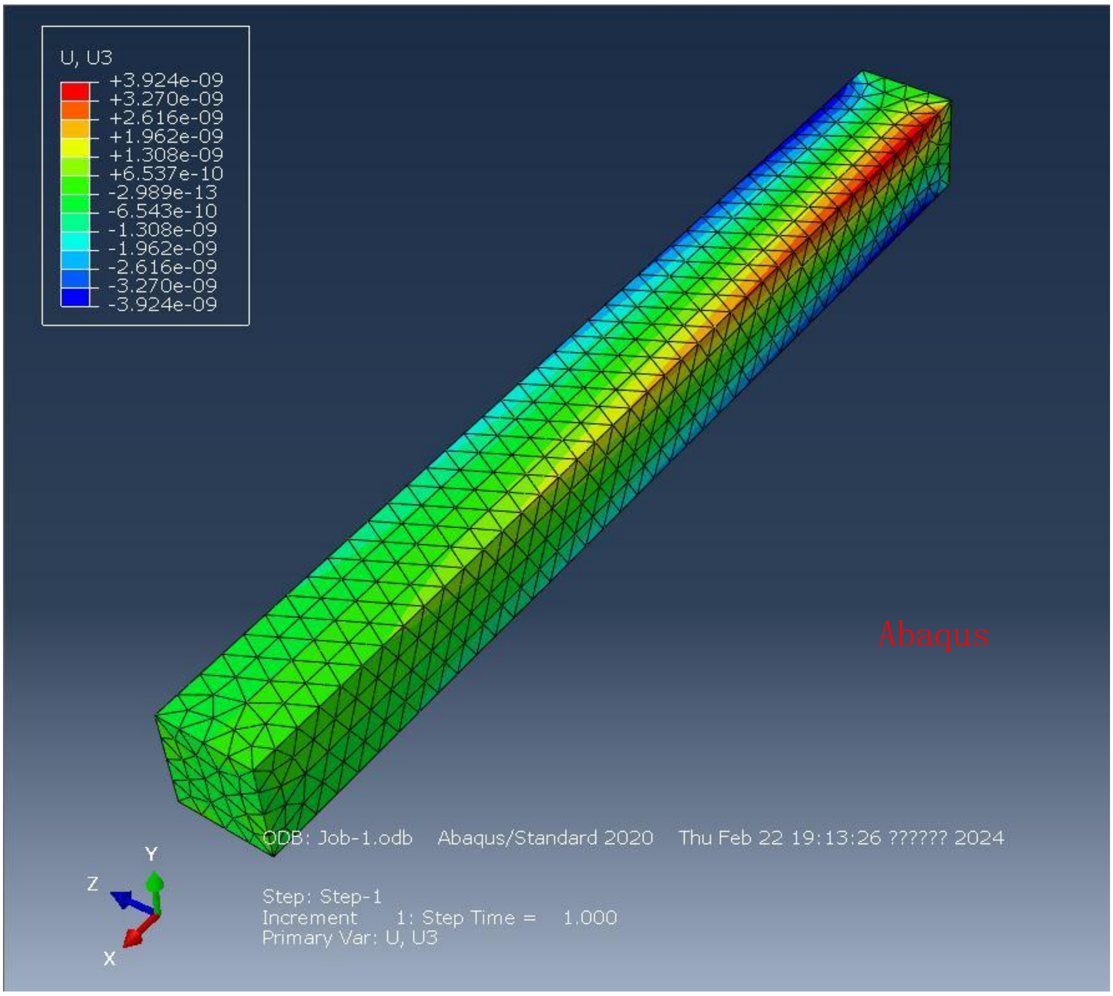




计算	ABAQUS	MATLAB	误差
Max	5.053E-010	5.05348E-010	0.0095%
Min	-1.905E-06	-1.9048E-06	0.0105%

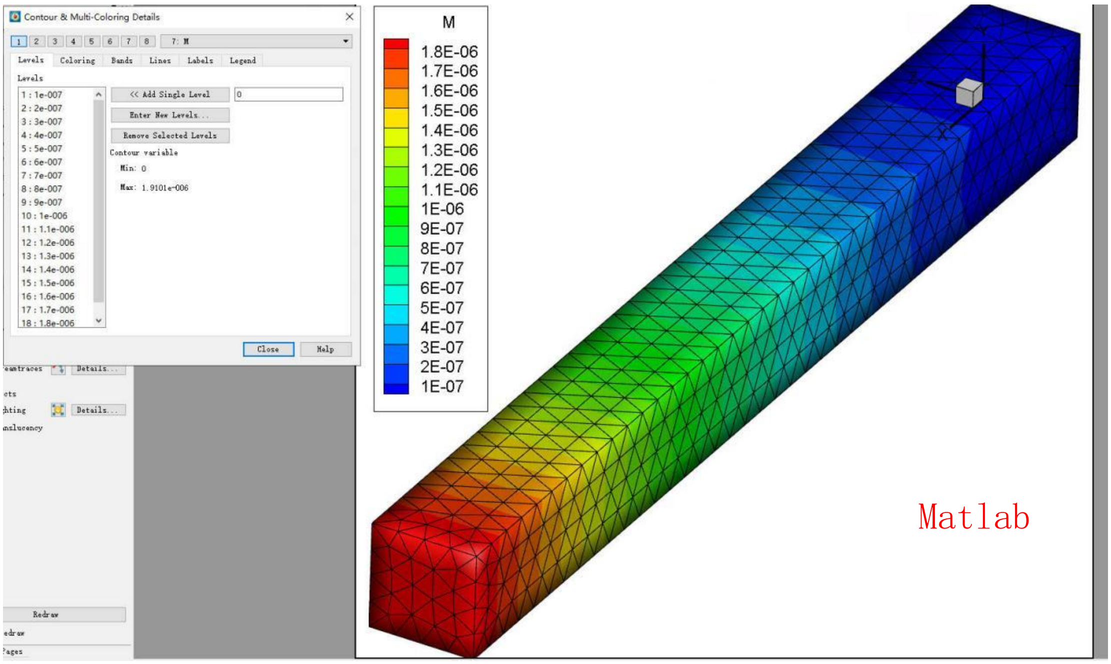
（3）z 方向的位移 DispZ：

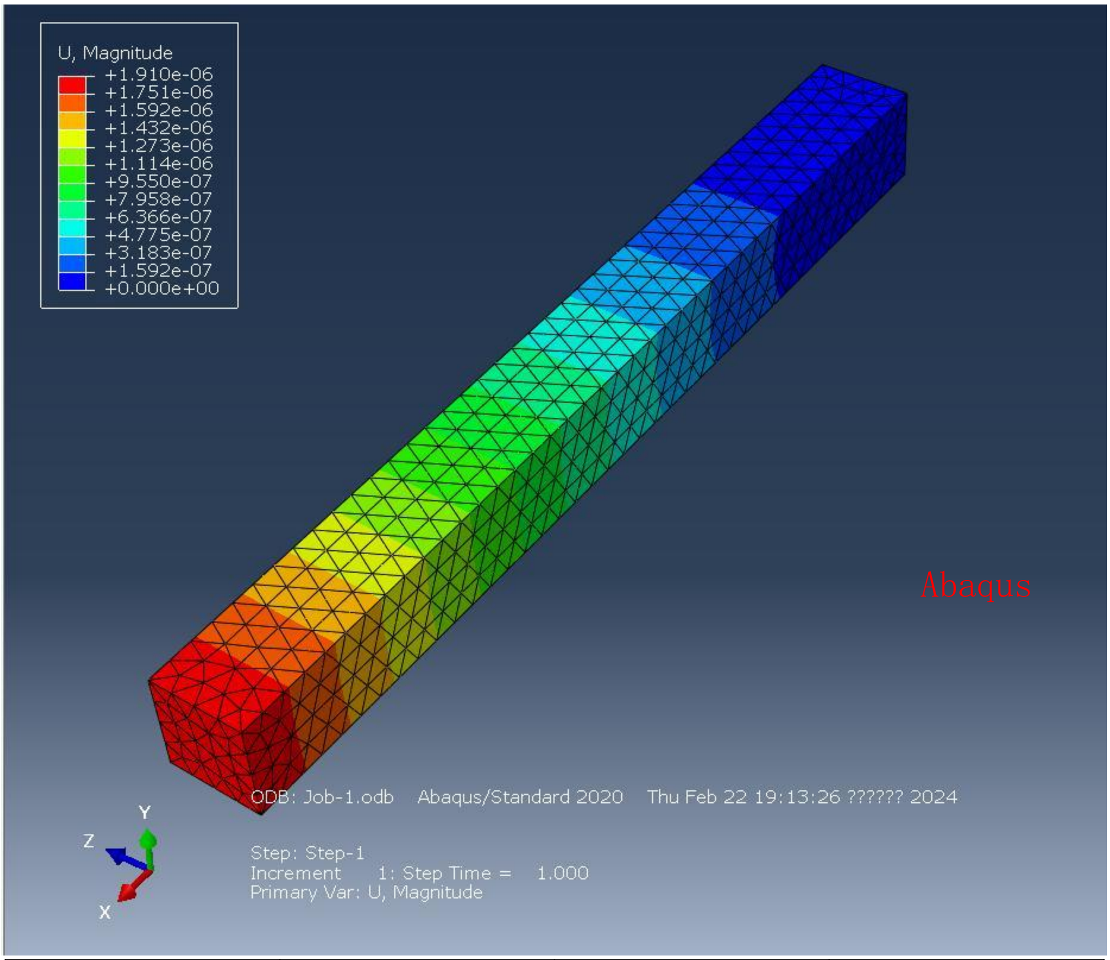




计算	ABAQUS	MATLAB	误差
Max	3.924E-09	3.92352E-09	0.0122%
Min	-3.924E-09	-3.92412E-09	0.0030%

（4）位移的模 Magnitude：





计算	ABAQUS	MATLAB	误差
Max	1.910E-06	1.9101E-06	0.0052%
Min	0	0	0%

五、个人总结

通过本次的有限元大作业，本人熟练掌握了有限元求解结构问题模型的整体思路，并通过 Matlab 程序加以实现，本次的作业采取的是二阶四面体单元，即 10 节点的四面体单元，掌握了如何求解该单元的形函数以及单元的刚度矩阵，该单元相比四节点四面体单元，可采用更少的单元节点数即可逼近精确解，计算精度高（本文没有给出其 4 节点四面体单元和 10 节点四面体单元的计算结果比较），但二阶四面体单元计算时间长，在不需要太高精度的情况下或者 4 节点四面体单元精度足够的情况下，一般采取 4 节点四面体单元提高计算效率。由于二阶四面体单元计算效率较低，一般采取 4 节点四面体单元进行求解，且精度能得到满足，且计算过程较简单，较容易实现，若低阶四面体单元精度不够，可采取非结构化网格，如采取梯度加权法降低单元刚度矩阵的刚度，提高计算精度。

本次大作业采用 Matlab 语言对二阶四面体单元进行实现，程序采取读取文件的方式获取单元节点信息，可提高程序的可利用性，不过程序中无法对程序直接进行前处理，需借助 Hypermesh 进行网格划分得到模型的单元节点信息。另外程序系统刚度矩阵，右边向量虽然采取的稀疏储存，在 Matlab 中 LU 法直接求解，计算效率较低，求解规模较大的问题时所需时间比较长，仍需要完善。

最后通过本次大作业的实现，真正做到了理论结合实际，也深入理解了有限元求解的具体步骤，并进一步理解到有限元法在工程应用中的具体作用。在本次的作业中，本人还明白了一个道理，就是有限元理论知识刚接触有点难，但需要多花时间去钻研，通过程序去实现，才能真正掌握该方法，才能有所突破！