第八章 空间解析几何与向量代数

第一讲 向量及其线性运算

主讲 杨雨茜 讲师

回顾

基本概念 向量的定义、向量的模、单位向量、零向量、负向量、

向量之间的关系：向量平行、 向量相等、 向量共面、

向量的线性运算与坐标表示：平面向量的线性运算、

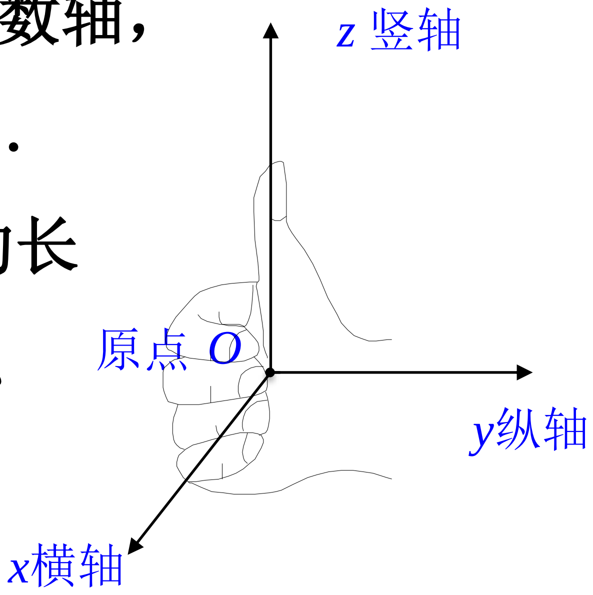
平面向量的坐标表示、 平面向量平行的坐标表示等

一、空间直角坐标系

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，这样的三条坐标轴就组成了空间直角坐标系.

这三条数轴都以 O 为原点且具有相同的长度单位，分别称为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴)，统称坐标轴.

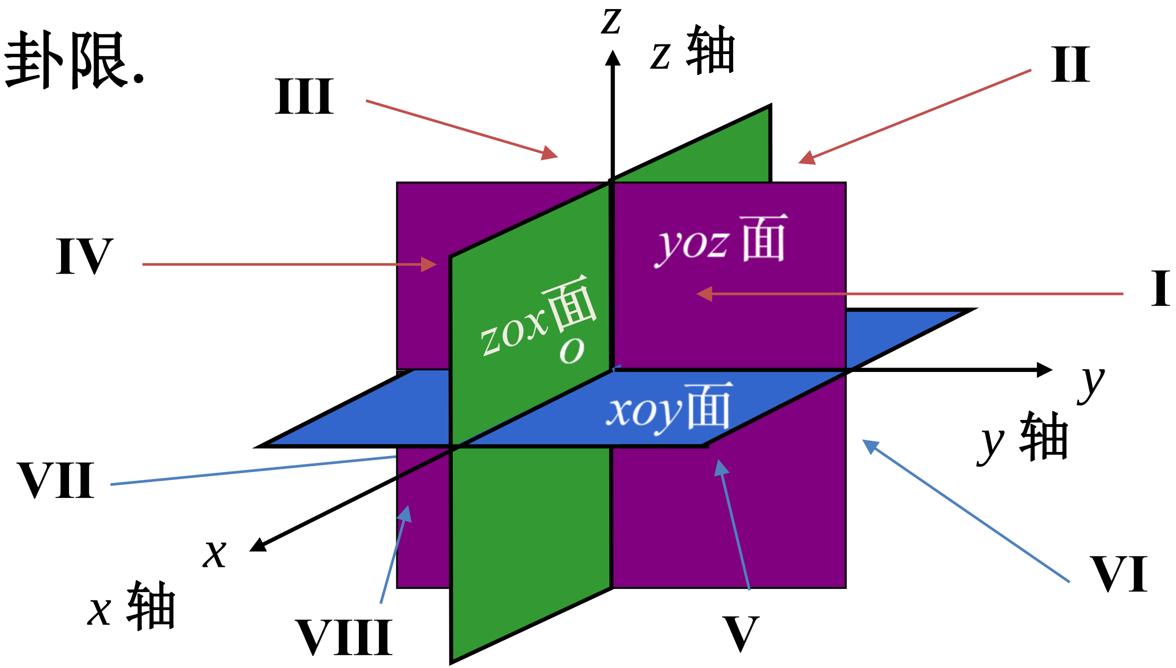
其正向符合右手规则.



三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面，这样定出的三个平面统称为坐标面，分别为*xoy*面、*yoz*面、*xoz*面

它们把空间分成八个卦限.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限



在直角坐标系下

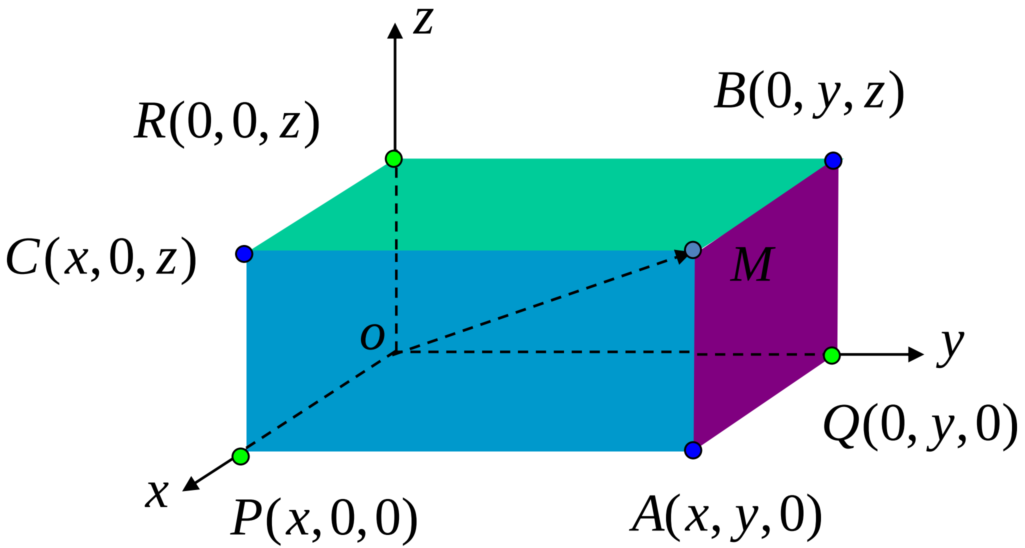
点 M $\longleftrightarrow$ 有序数组 (x, y, z) (称为点 M 的坐标)

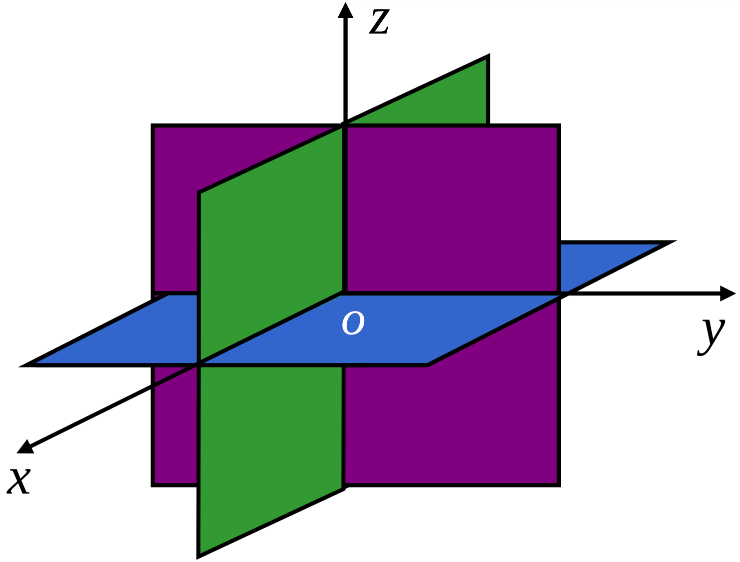
特殊点的坐标

原点 $O(0,0,0)$

坐标轴上的点 P, Q , R

坐标面上的点 A , B , C





坐标轴

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

坐标面

$$xoy\text{面} \leftrightarrow z=0$$

$$yoz\text{面} \leftrightarrow x=0$$

$$zox\text{面} \leftrightarrow y=0$$

视频2

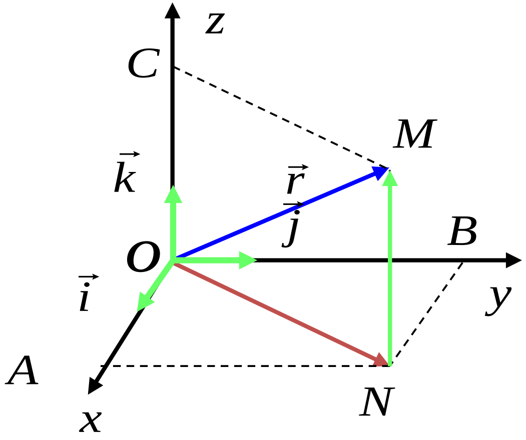
二、向量的坐标表示

在空间直角坐标系下，任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

以 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位向量，设点 M 的坐标为 $M(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\ \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\ \overrightarrow{OC}=z\vec{k}$$

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)$$



此式称为向量 $\vec{r}$ 的坐标分解式，

$x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的分向量.

三、向量的线性运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, λ 为实数，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

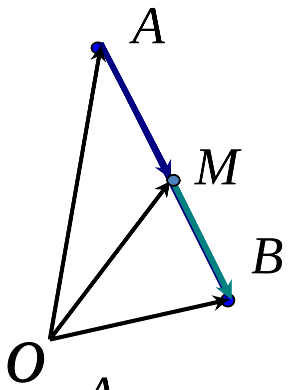
平行向量对应坐标成比例

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，$\vec{b}\,//\,\vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a}$

$$\Longleftrightarrow \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} b_x&=\lambda a_x\\ b_y&=\lambda a_y\\ b_z&=\lambda a_z\end{aligned}}$$

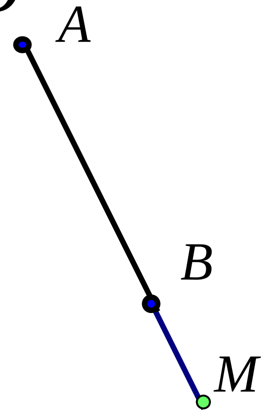
例1 已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$ 及实数 $\lambda \neq -1$，在AB直线上求一点M，使 $\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB}$.



解 设 M 的坐标为 (x, y, z)，如图所示

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\,\overrightarrow{MB} \qquad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \qquad \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$$



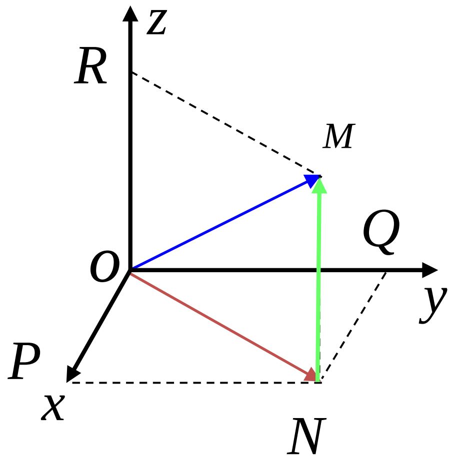
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA} + \lambda\,\overrightarrow{OB})$$

即 $$(x, y, z) = \frac{1}{1+\lambda}(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

四、向量的模、方向角、投影

1　向量的模与两点间的距离公式

设 $\vec{r}=(x,y,z)$, 作 $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 则有



$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OP}=x\vec{i},\overrightarrow{OQ}=y\vec{j},\overrightarrow{OR}=z\vec{k},}$$

由勾股定理得

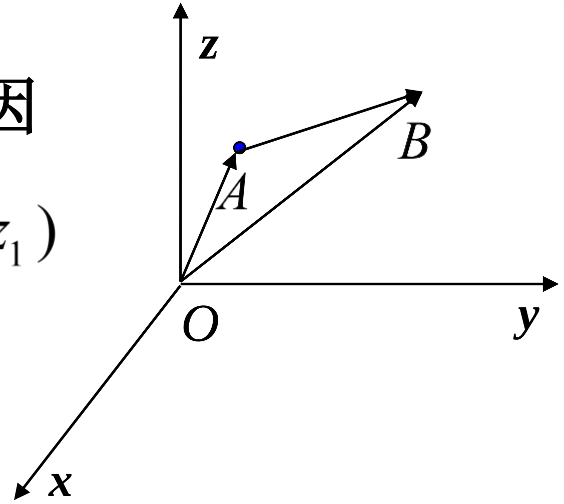
$$|\vec{r}|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}$$

$$\boxed{\left|\overrightarrow{OP}\right|=|x|,\left|\overrightarrow{OQ}\right|=|y|,\left|\overrightarrow{OR}\right|=|z|}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

对两点 $A(x_1, y_1, z_1)$ 与 $B(x_2, y_2, z_2)$，因

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



得两点间的距离公式:

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}|$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例2 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 设该点为 $M(0,0,z)$,

因为 $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$,

$$\sqrt{(-4)^2+1^2+(7-z)^2} = \sqrt{3^2+5^2+(-2-z)^2}$$

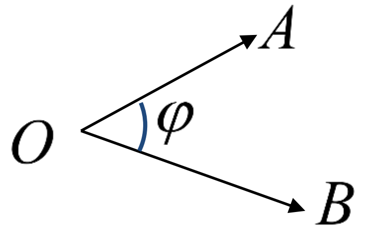
解得 $z = \dfrac{14}{9}$,

故所求点为 $M(0,0,\dfrac{14}{9})$.

2 方向角与方向余弦

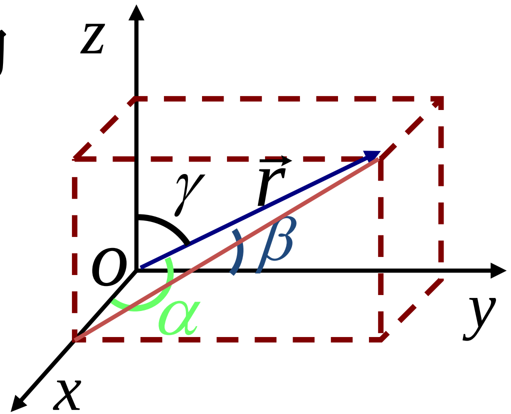
设有两非零向量$\vec{a},\vec{b}$，任取空间一点O，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，

称 $\varphi=\angle AOB\ (0\le\varphi\le\pi)$ 为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角.



记作$\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\varphi$ 或 $\widehat{(\vec{b},\vec{a})}=\varphi$

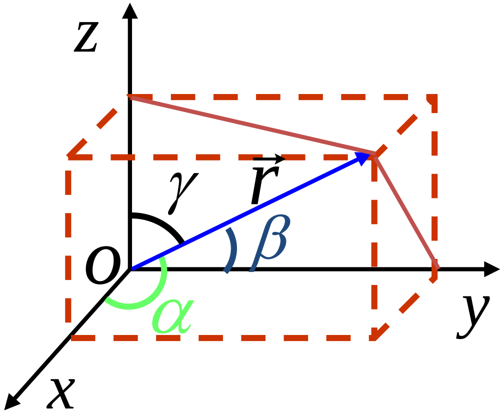
类似可定义向量与坐标轴，坐标轴与坐标轴的夹角.



给定 $\vec{r}=(x,y,z)\neq\vec{0}$，称 $\vec{r}$ 与三坐标轴的

夹角α,β,γ为其方向角.

方向角的余弦称为其方向余弦.



$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

方向余弦的性质 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

与向量 $\vec{r}$ 同方向的单位向量 $\overrightarrow{e_r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

例3 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})$

$$=(-1,1,-\sqrt{2})$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

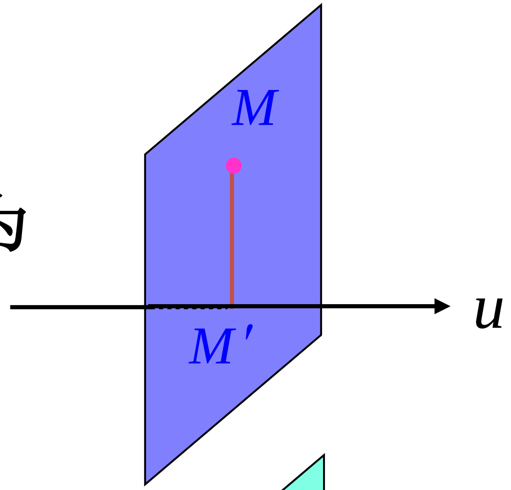
$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

视频3

3　向量在轴上的投影与投影定理

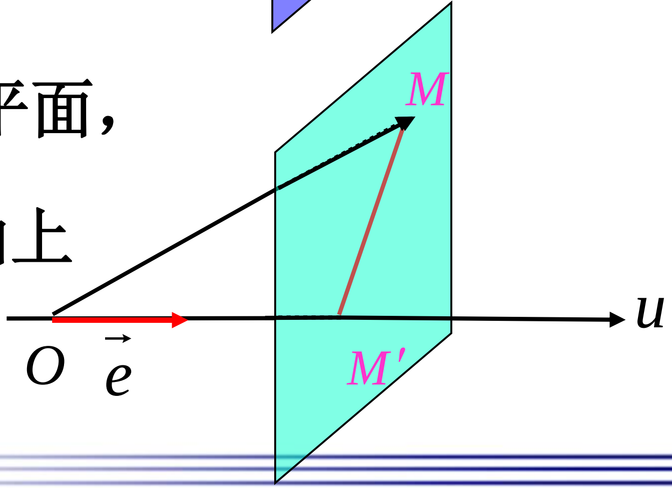
(1) 空间一点在轴上的投影

过点M作与轴u 垂直的平面，交点M' 即为点M在轴u 上的投影。



(2) 空间向量(向径)在轴上的投影

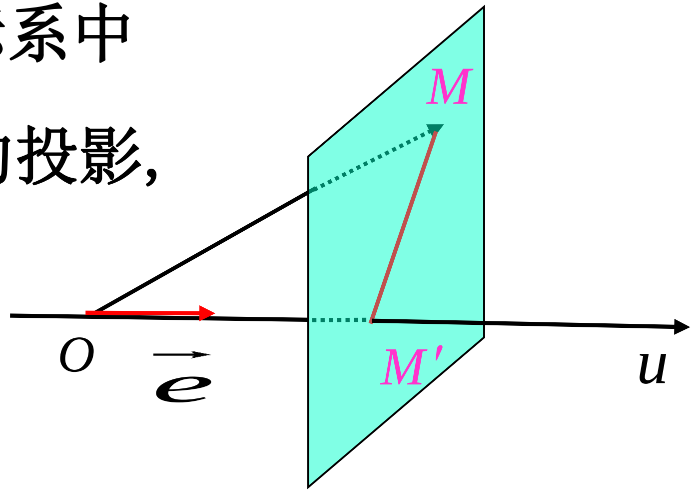
给定$\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, 过$M$点作与轴$u$垂直的平面，交$u$轴于$M'$，则向量$\overrightarrow{OM'}$称为向量 $\vec{r}$ 在u轴上的分向量.



设 $\overrightarrow{OM'} = \lambda \vec{e}$, 则数 λ 称为向量 $\vec{r}$ 在u轴上的投影,

记为 $Prj_u \vec{r}$. 由此定义, 向量 $\vec{a}$ 在 $Oxyz$ 坐标系中

的坐标 a_x, a_y, a_z 就是 $\vec{a}$ 在三个坐标轴上的投影,

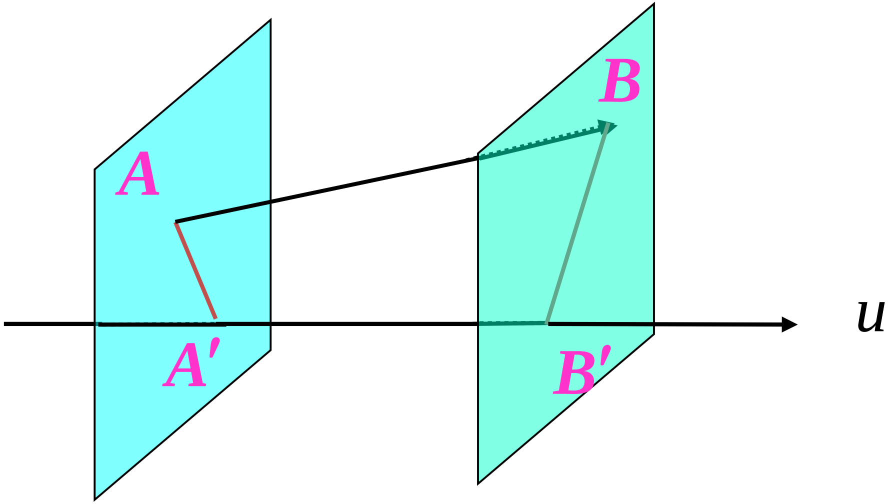


即 $a_x = Prj_x \vec{a},$

$a_y = Prj_y \vec{a},$

$a_z = Prj_z \vec{a}.$

注 空间向量在轴上的投影



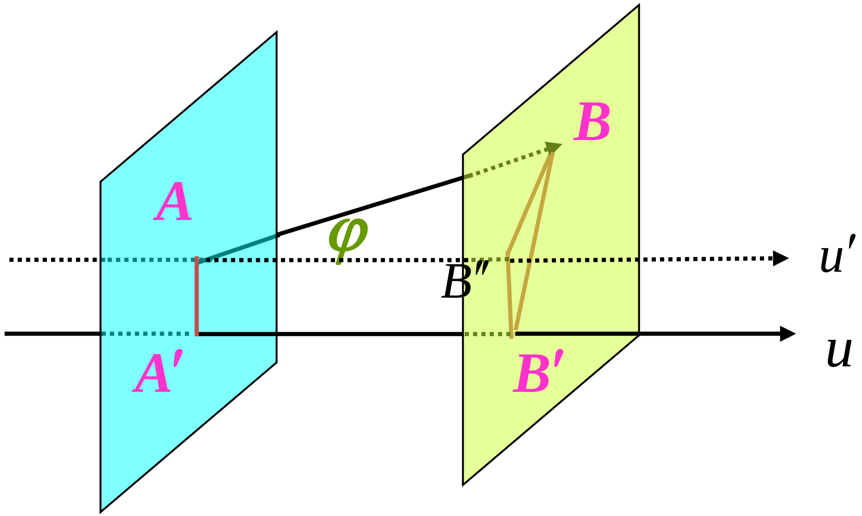
已知向量的起点A和终点B在轴u上的投影分别为A',B'，那么轴u上的有向线段$\overline{A'B'}$的值，称为向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影。

向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影记为$Prj_u\overrightarrow{AB}=A'B'$

向量投影的性质

性质1 $Prj_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi, \varphi = (\overrightarrow{AB}, u)$ 投影定理

证



$$Prj_u \overrightarrow{AB} = Prj_{u'} \overrightarrow{AB}$$

$$= AB'' = A'B'$$

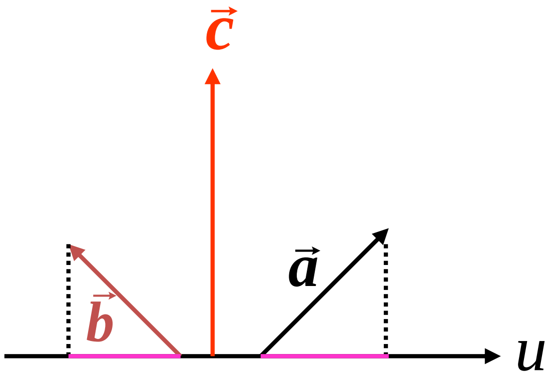
$$= |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$$

投影定理说明

(1) $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$，　投影为正；

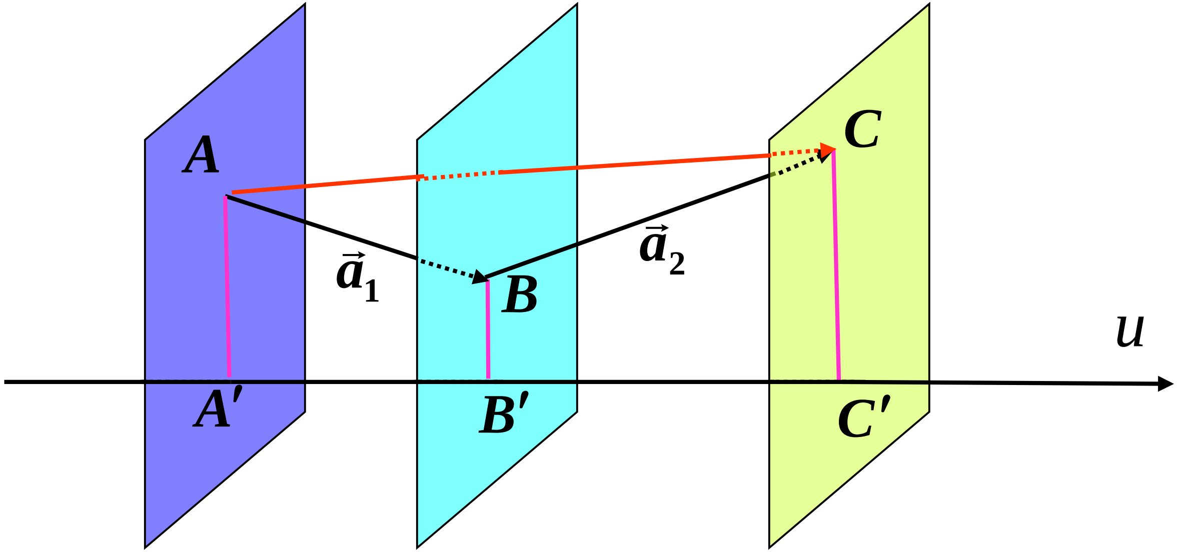
(2) $\dfrac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$，　投影为负；

(3) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$，　投影为零；



（4）相等向量在同一轴上投影相等；

性质2 $Prj_u(\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}) = Prj_u\overrightarrow{a_1} + Prj_u\overrightarrow{a_2}$ （可推广到有限多个）



性质3 $Prj(\lambda\vec{a}) = \lambda Prj\vec{a}.$

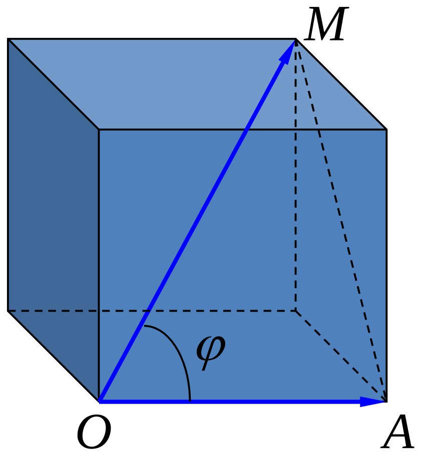
例4 设正方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|OA| = a$，求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $Prj_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

解 设 $\angle MOA = \varphi$，有

$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

于是

$$Prj_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OA}|\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



谢　谢　！