第八章 空间解析几何与向量代数

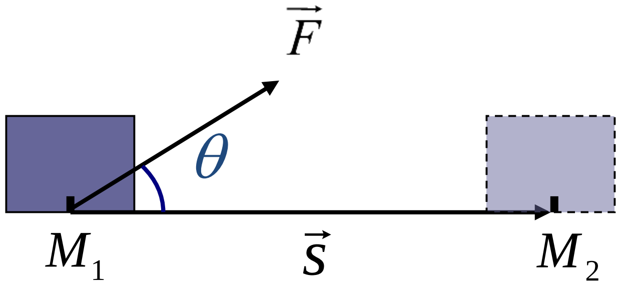
第二讲 数量积 向量积 混合积

主讲 杨雨苗 讲师

一、两向量的数量积

引例 设一物体在常力$\vec{F}$作用下，沿与力夹角为θ的直线移动，位移为$\vec{s}$，则力$\vec{F}$所做的功为

$$W = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$$



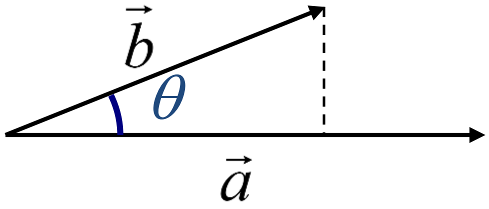
$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{s}}$$

1 **定义** 设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为θ，

称 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的**数量积**（点积）. 记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$

当 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$|\vec{b}|\cos\theta \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} Prj_{\vec{a}}\vec{b}$$



故 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,Prj_{\vec{a}}\vec{b}$

同理,当 $\vec{b} \neq \vec{0}$ 时, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\,Prj_{\vec{b}}\vec{a}$

2 性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

(2) $\vec{a},\vec{b}$ 为两个非零向量, 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \rightleftarrows \vec{a} \perp \vec{b}$$

$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\Updownarrow$

$(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\pi}{2}$

3　运算规律

（1）交换律　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

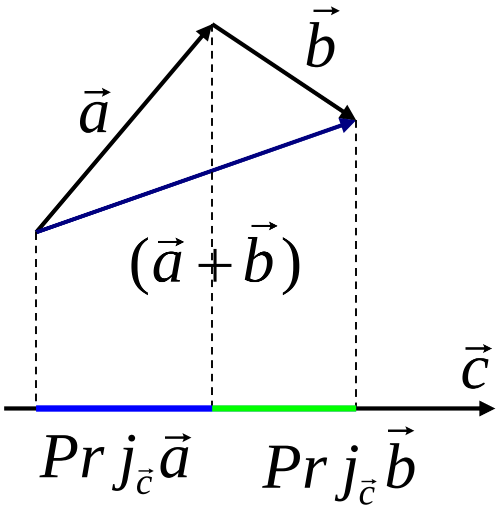
（2）结合律　$(\lambda,\mu$为实数$)$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot(\mu\vec{b}))=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

（3）分配律　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$



$Prj_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})$

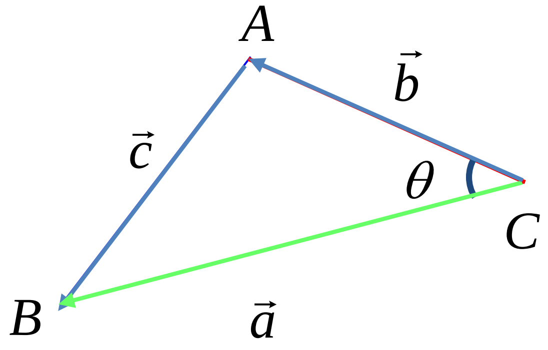
证明(3) 当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时，显然成立；

当 $\vec{c}\neq\vec{0}$ 时，

$$
\begin{aligned}
(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= |\vec{c}|Prj_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= |\vec{c}|(Prj_{\vec{c}}\vec{a}+Prj_{\vec{c}}\vec{b}) \\
&= |\vec{c}|Prj_{\vec{c}}\vec{a}+|\vec{c}|Prj_{\vec{c}}\vec{b} \\
&= \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}
\end{aligned}
$$

例1 证明三角形余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$



证 如图，设 $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{CA} = \vec{b}$，$\overrightarrow{AB} = \vec{c}$

则 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

$$|\vec{c}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$a = |\vec{a}|, b = |\vec{b}|, c = |\vec{c}|$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

4 数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

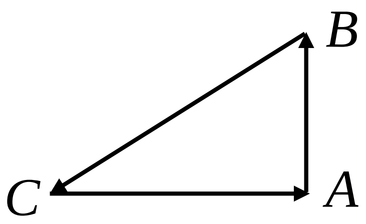
$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

两向量的夹角公式： 若 $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$，则

$$\boxed{\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}$$

例2 已知$A(-1,2,3)$，$B(1,1,1)$，$C(0,0,5)$

证明 $\triangle ABC$为直角三角形.



证 $\overrightarrow{AB}=(2,-1,-2)$ $\overrightarrow{BC}=(-1,-1,4)$

$\overrightarrow{CA}=(-1,2,-2)$

则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-2-2+4=0$

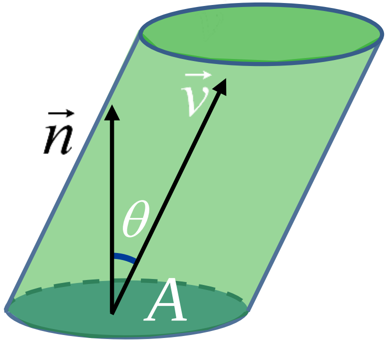
所以 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ 即$\triangle ABC$为直角三角形.

例3 设均匀流速为 $\vec{v}$ 的流体流过一个面积为A的平面域，且 $\vec{v}$ 与该平面域的单位垂直向量 $\vec{n}$ 的夹角为 θ，求单位时间内流过该平面域的流体的质量P (流体密度为 ρ) .

解 $P=\rho A\left|\vec{v}\right|\cos\theta$

$\vec{n}$ 为单位向量

$=\rho A\vec{v}\cdot\vec{n}$



单位时间内流过的体积 $A\left|\vec{v}\right|\cos\theta$

视频2

二、两向量的向量积

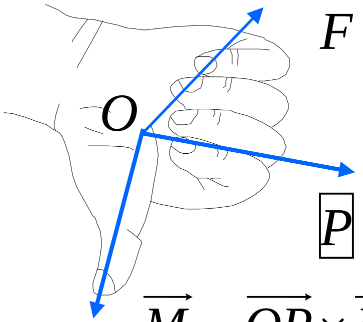
引例 设O 为杠杆L 的支点,有一个与杠杆夹角为θ的力$\vec{F}$作用在杠杆的P点上，则力$\vec{F}$对支点O的力矩是一个向量$\overrightarrow{M}$

$$|\overrightarrow{M}| = |\overrightarrow{OQ}||\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}||\vec{F}|\sin\theta$$

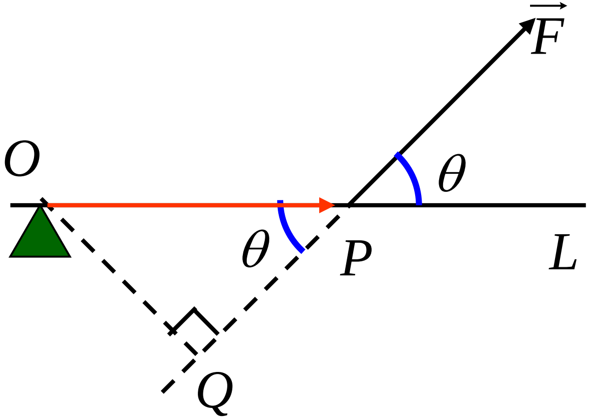
$\overrightarrow{OP}$, $\vec{F}$, $\overrightarrow{M}$ 符合右手规则

$\overrightarrow{M} \perp \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{M} \perp \vec{F}$



$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F}$



$$|\overrightarrow{OQ}| = |\overrightarrow{OP}|\sin\theta$$

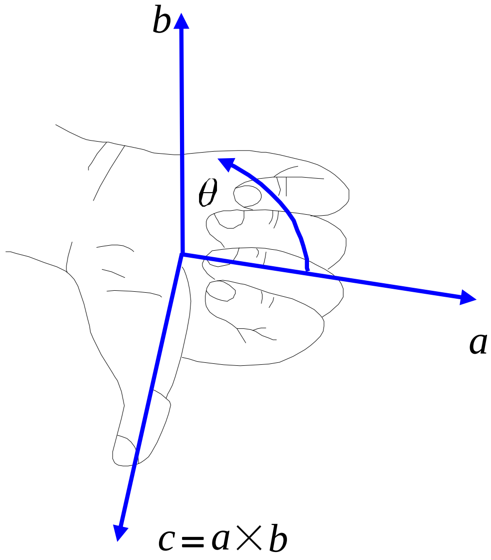
1 定义 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ，定义

$$\text{向量}\,\vec{c}\begin{cases}\text{方向} \quad \vec{c}\perp\vec{a},\ \ \vec{c}\perp\vec{b} \ \ \text{且符合右手规则} \\ \text{模} \quad |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\end{cases}$$

称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的 **向量积**，记作

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \quad \text{（叉积）}$$

引例中的力矩 $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{F}$



2 性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为非零向量，则$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

证明 当$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$时，

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0$$

$$\Longleftrightarrow \sin\theta=0\text{，即 }\theta=0\text{ 或 }\pi$$

$$\Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

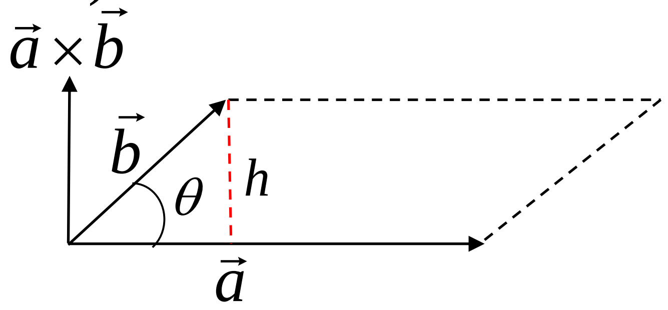
3 运算规律

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

4 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的几何意义



$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta=|\vec{a}|\cdot h$

表示平行四边形的面积

平行四边形的高

5 向量积的坐标表示式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$，$\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

故$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

例4 已知 $\vec{a}=(2,0,-3)$, $\vec{b}=(-4,-3,-1)$,

求与$\vec{a}$和$\vec{b}$均垂直的单位向量.

解 因为 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 0 & -3\\ -4 & -3 & -1\end{vmatrix}=-9\vec{i}+14\vec{j}-6\vec{k}$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{9^2+14^2+6^2}=\sqrt{315}$$

所求单位向量 $\pm\dfrac{1}{|\vec{a}\times\vec{b}|}\vec{a}\times\vec{b}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{315}}(-9,14,-6)$

视频3

三、向量的混合积

1 定义　设三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$,先作向量积$\vec{a}\times\vec{b}$，再作数量积 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, 得到的数量称为三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积,

记作 $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$

下面我们来看混合积的坐标表示式.

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$

$$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

$$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$$

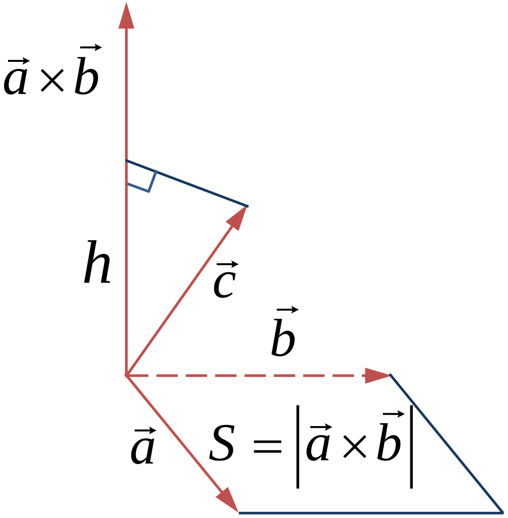
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}+(-1)\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x+(-1)\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z$$

$$=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$

2 几何意义

混合积是一个数，它的绝对值表示以向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为棱的平行六面体的体积.



若 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 成右手系，$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\geq 0$

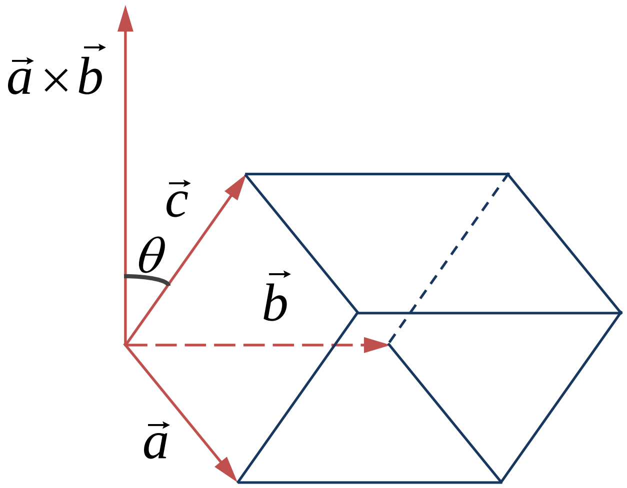
若 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 成左手系， $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\leq 0$

事实上，由于 $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin(\vec{a},\vec{b})$ 表示边长为 $|\vec{a}|$、$\left|\vec{b}\right|$ 的平行四边形面积

若$\vec{a}\times\vec{b}$与 $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$与$\vec{b}$ 所在平面的一侧，即$\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{c}$之间的夹角θ为锐角，则 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta>0$；

若$\vec{a}\times\vec{b}$与 $\vec{c}$ 在$\vec{a}$与$\vec{b}$ 所在平面的两侧，即$\vec{a}\times\vec{b}$与$\vec{c}$之间的夹角θ为钝角，则 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta<0$，$\left|\vec{c}\right|\cos\theta$为平行六面体的高；

$$V=\pm\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta=\pm[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$$



非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面的充分必要条件是 $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$

由此可知，空间四点 A、B、C、D 共面的充分必要条件是

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}]=0$$

例5 已知 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2$, 计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

解 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{a}+\vec{c})$

$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}$

$+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}+(\vec{b}\times\vec{b})\cdot\vec{a}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$

$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+0+0+0+0+0+0+(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=4$

数量积

向量积

混合积

谢　谢　！