第八章 向量代数与空间解析几何

第三讲 平面及其方程

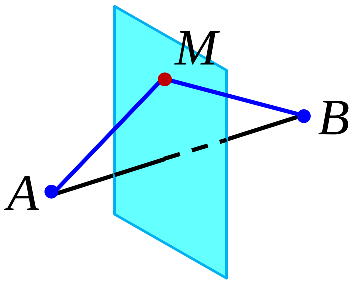
主讲 田阗副教授

引例 求到两定点$A(1,2,3)$和 $B(2,-1,4)$等距离的点的轨迹方程.

解 设轨迹上的动点为$M(x,y,z)$，则$|AM|=|BM|$，即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得 $2x-6y+2z-7=0$.



说明 动点轨迹为线段AB的垂直平分面.

一、曲面方程与空间曲线方程的概念

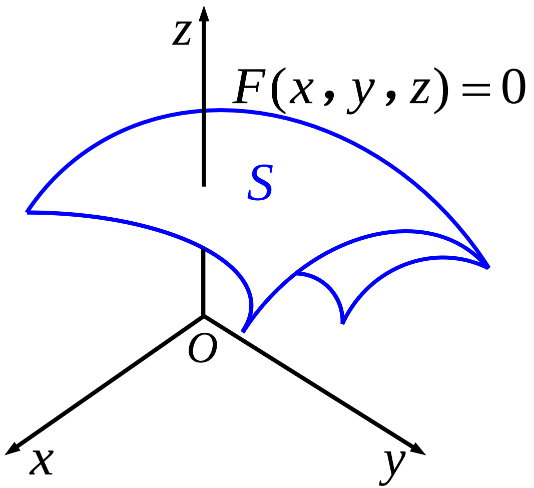
定义1 如果曲面 S 与三元方程 $F(x,y,z)=0$ 有下述关系：

（1）曲面 S 上任一点的坐标都满足此方程；

（2）不在曲面 S 上的点的坐标不满足方程，

则 $F(x,y,z)=0$ 叫做曲面 S 的方程，

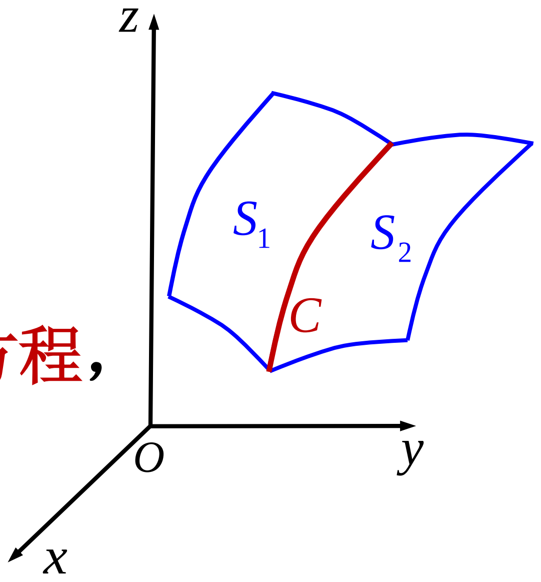
而曲面 S 就叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.



定义2 如果曲线 C 与方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 满足关系：

（1）曲线 C 上任一点的坐标都满足方程组；

（2）不在曲线 C 上的点的坐标不满足方程组，



则方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 叫做空间曲线 C 的方程，

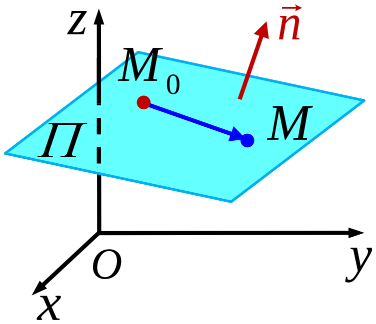
而曲线 C 就叫做方程组的图形.

二、平面的点法式方程

设平面 Π 通过定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A, B, C)$

任取点 $M(x, y, z) \in \Pi$，则有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$，于是 $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}=0$，

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$



上式称为平面的点法式方程，

非零向量 $\vec{n}$ 称为平面 Π 的法线向量(法向量).

例1 求下列平面方程

（1）平面过点$(2,-3,0)$且以$\vec{n}=(1,-2,3)$为法线向量；

（2）平面过点$M(2,9,-6)$且与线段OM垂直.

解（1）$1\cdot(x-2)+(-2)\cdot(y-(-3))+3\cdot(z-0)=0$，

所求平面的方程为$x-2y+3z-8=0$.

（2）法向量为$\vec{n}=\overrightarrow{OM}=(2,9,-6)$，

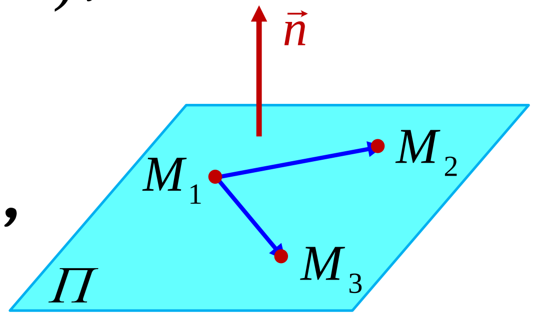
所求平面的方程为$2\cdot(x-2)+9\cdot(y-9)+(-6)\cdot(z-(-6))=0$，

即 $2x+9y-6z-121=0$.

例2 求过三点 $M_1(2,-1,4)$, $M_2(-1,3,-2)$, $M_3(0,2,3)$ 的平面方程.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6)$, $\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$,

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=(14,9,-1),$$



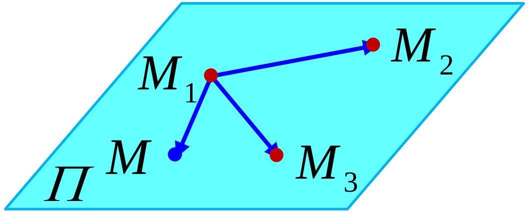
所求平面的方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$.

注 不在一条直线上的三点确定一个平面.

三向量$\overrightarrow{M_1M}$,$\overrightarrow{M_1M_2}$,$\overrightarrow{M_1M_3}$共面，则它们的混合积为零.

过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)\,(k=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$



上式称为平面的三点式方程.

三、平面的一般方程

平面 ⟷ 三元一次方程

设有三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0\ (A^2+B^2+C^2\neq 0)$，

任取一组 $(x_0\,,y_0\,,z_0)$，满足方程 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$，

以上两式相减，得 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

定义 方程 $\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ 称为平面的**一般方程**，

其中 $\vec{n}=(A,B,C)$ 即为该平面的一个法向量.

注 特殊平面的图形 $\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$

（1）当 $D=0$ 时，$Ax+By+Cz=0$ 表示通过原点的平面；

（2）当 $A=0$ 时，$By+Cz+D=0$ 表示与 x 轴平行的平面，

当 $A=D=0$ 时，$By+Cz=0$ 表示过 x 轴的平面；

（3）当 $A=B=0$ 时，$Cz+D=0$ 表示与 xOy 面平行的平面，

当 $A=B=D=0$ 时，$z=0$ 表示坐标面 xOy 面.

例3 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 由于平面过原点，设平面方程为$Ax+By+Cz=0$，

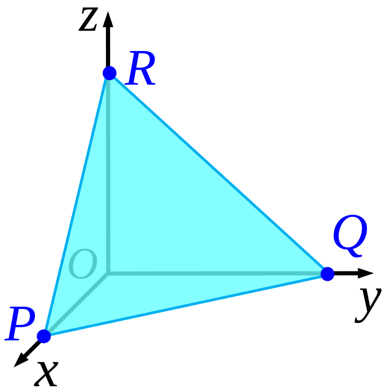
由平面过点$(6,-3,2)$，知 $6A-3B+2C=0$，

由平面垂直于 $4x-y+2z=8$，知 $4A-B+2C=0$，

解得$A=B=-\dfrac{2}{3}C$，所求平面方程为$2x+2y-3z=0$.

例4 设一平面与 x、y 和 z 轴的交点依次为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$ 与 $R(0,0,c)$，其中 a,b,c 均不为零，求这平面的方程.

解 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，



即有 $\begin{cases} aA+D=0, \\ bB+D=0, \\ cC+D=0, \end{cases}$ 解得

$$A=-\frac{D}{a}, B=-\frac{D}{b}, C=-\frac{D}{c},$$

代入方程得 $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$ 这个方程称为平面的截距式方程.

总结 平面基本方程

（1） 点法式方程 $\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$

（2） 一般方程 $\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$

（3） 截距式方程 $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$

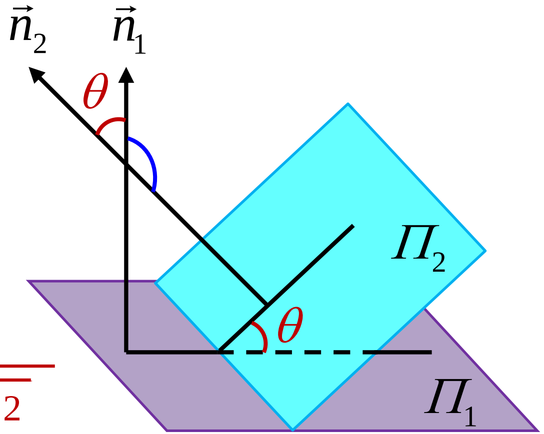
（4） 三点式方程 $\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$

四、两平面的夹角

定义 两平面法向量的夹角(锐角或直角)称为两平面的夹角.

Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$， Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，

$\vec{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$， $\vec{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$，



平面 Π_1 与平面 Π_2 夹角的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

例5 求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解 $\vec{n}_1=(1,-1,2)$，$\vec{n}_2=(2,1,1)$，应用公式有

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$=\frac{|1\times2+(-1)\times1+2\times1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$$

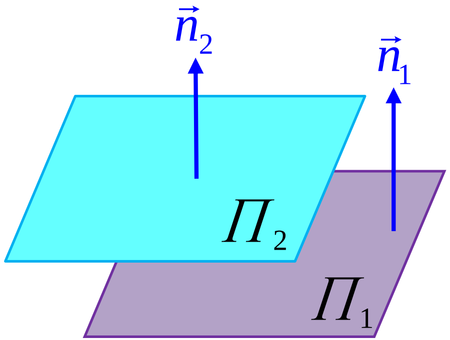
因此，所求夹角 $\theta=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$.

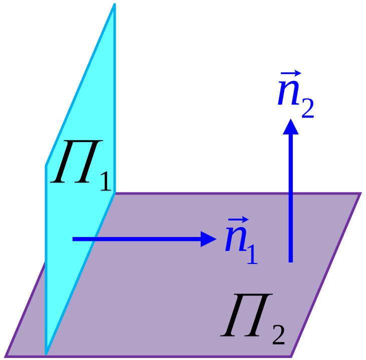
两平面平行或垂直的充要条件

Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，

$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$





（1）$\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

（2）$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

例6 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$的平面方程.

解 设所求平面的法向量为$\vec{n}=(A,B,C)$，所以有

$$\begin{cases} A-B+C=0, \\ 3A+2B-12C=0, \end{cases}$$

解得 $A=2C,B=3C,$

注 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ $=10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k}$

故所求平面方程为$2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0$，

即 $2x+3y+z-6=0.$

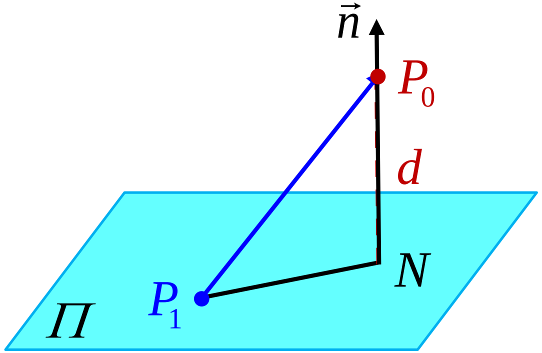
五、点到平面的距离

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 Π：$Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求点 P_0 到平面 Π 的距离 d.

在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，

$$d = |\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{P_1P_0}| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$= \frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



点到平面的距离公式

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$$

例7 求点$(2,1,1)$到平面$x+y-z+1=0$的距离.

解 $A=B=D=1$，$C=-1$，点$(x_0,y_0,z_0)=(2,1,1)$，

所求距离为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

$$=\frac{|1\times2+1\times1-1\times1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\sqrt{3}.$$

平面的方程

两平面的夹角

点到平面的距离

谢　谢　！