分类号 ______________ 密级 ______________

UDC ______________ 编号 ______________

中国科学院研究生院
博士学位论文

Kadison-Singer 代数

袁巍

指导教师 葛力明 研究员

中国科学院数学与系统科学研究院

申请学位级别 博士 学科专业名称 算子代数

论文提交日期 2008年7月 论文答辩日期 2008年7月

培养单位 中国科学院数学与系统科学研究院

学位授予单位 中国科学院研究生院

答辩委员会主席 ______________

Kadison-Singer Algebras

Wei Yuan

Supervisor:

Prof. Liming Ge

Institute of Mathematics
Academy of Mathematics and Systems Science
Chinese Academy of Sciences

August, 2010

Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of Ph.D.
in Operator algebra

摘　要

本文中，我们定义了一类新的非自伴代数——Kadison-Singer代数，简记为KS-代数。此代数集合了上三角代数，自反代数，von Neumann代数的特点。粗略来说，KS-代数即为相对于其对角子代数的极大上三角自反代数。许多自伴代数的特性都在KS-代数中得以反映。正因如此，定义过程中，我们直接借鉴了von Neumann代数中的一些概念。事实上，KS-代数的不变子空间格更好的反映了KS-代数与von Neumann代数之间的联系。这些自反格是KS-代数对角子代数换位子的“极小生成元”。

本文共有三章。在第一章的最后，我们引入了Kadison-Singer代数，及Kadison-Singer格的定义，并相对KS-代数的对角子代数将其进行了分类。在第二章，我们首先构造了一系列以超有限因子为对角子代数的Kadison-Singer因子，并完全确定了与之相对应的Kadison-Singer格，其后我们研究了这些代数的换位子，最后引入了格不变量用以区分在本章得到的格。在第三章，我们回忆了由两个投影决定的自反代数的一些性质。接下来描述了由三个自由投影决定的自反格，并证明其为Kadison-Singer格，进而得到其决定的代数为Kadison-Singer代数。同时我们证明了此格（除去投影0，I）同胚于二维球面。随后我们对于有限von Neumann代数中的投影格引入了一种新的连通关系，并说明任意格在此连通关系下得到的所有连通分支依然构成格，称其为约化格。其后我们决定了一些已知的格所对应的约化格。最后，我们以对另一类极大上三角性的讨论结束了全文。

关键词： von Neumann代数，超有限，不变子空间，格，自由投影，Kadison-Signer代数

Abstract

In this paper, we defined a new class of non selfadjoint operator algebras– Kadison-Singer algebras or KS-algebras for simplicity. These algebras combine triangularity, reflexivity and von Neumann algebra property into one consideration. Generally speaking, KS-algebras are reflexive, maximal triangular with respect to its "diagonal subalgebra". Many selfadjoint features are preserved in them and concepts can be borrowed directly from the theory of von Neumann algebras. In fact, a more direct connection of KS-algebras and von Neumann algebras is through the lattice of invariant projections of a KS-algebra. The lattice is reflexive and "minimally generating" in the sense that it generates the commutant of the diagonal as a von Neumann algebra.

The paper has three chapters. At the end of the first chapter, we give the definition of Kadison-Singer algebras(as well as corresponding Kadison-Singer lattices) and a basic classification according to their diagonals. In chapter 2, we construct Kadision-Singer factors with hyperfinite factors as their diagonals, study their commutant and describe the corresponding Kadison-Singer lattices in details. At the end, a lattice invariant is introduced to distinguish these lattices. In chapter 3, we first review the result of reflexive algebras determined by two projections, then describe the reflexive lattice generated by three free projections and show that it is a Kadison-Singer lattice and thus the corresponding algebra is a Kadison-Singer algebra. We also show that this lattice is homeomorphic to two-dimensional sphere $\mathcal{S}^2$(plus two distinct points corresponding to 0 and I). Then we introduce a notation of connectedness of projections in a lattice of projections in a finite von Neumann and show that all connected components form another lattice, called a reduced lattice. Reduced lattices of most of our examples were computed. We end this paper by discussing maximal triangularity in different aspects.

Keywords: von Neumann algebras, hyperfinite, invariant space, lattice, free projection, Kadison-Singer algebras

目　　录

摘要 **i**

目录 **v**

第一章　引言及预备知识 **1**

1.1　有关自伴代数的历史背景 1

1.2　Kadison-Singer代数的定义 17

第二章　超有限KS-代数及其格 **23**

2.1　超有限型KS-因子 23

2.2　Kadsion-Singer格Lat(Alg($\mathcal{L}_\infty$)) 29

2.3　Alg($\mathcal{L}^{(n)}$)的换位子 38

第三章　三个投影生成的自反格及其决定的KS-代数 **45**

3.1　二个投影生成的自反格及其决定的KS-代数 45

3.2　三个投影生成的自反格 50

3.3　Kadison-Singer代数Alg($\mathcal{F}_3$) 59

3.4　约化格 65

3.5　关于极大性的讨论 67

参考文献 **73**

第一章　引言及预备知识

1.1　有关自伴代数的历史背景

在完成了早期关于单个算子的工作后，von Neumann将注意力转向了对于算子族的研究[34]，并开创了现在被称为von Neumann代数的学科。其关于“算子环”（Rings of operators）的系列文章[6, 7, 35, 8]在之后的半个世纪中引导了相关领域的研究。现代算子代数中很多概念及研究课题都源于von Neumann的工作。本节中我们将介绍本领域的基本概念，及发展至今的主要结果。

若$\mathcal{H}$是复数域$\mathbb{C}$上的线性空间。映射$\langle\ ,\rangle:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$被称作正定的内积，如果对任意的向量$x,y,z\in\mathcal{H}$，$a,b\in\mathbb{C}$，

(1) $\langle ax+by,z\rangle=a\langle x,z\rangle+b\langle y,z\rangle$；

(2) $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$;

(3) $\langle x,x\rangle\geq 0$;

(4) $\langle x,x\rangle=0$当且仅当$x=0$。

若$\langle\ ,\rangle$是$\mathcal{H}$上正定的内积且$\mathcal{H}$关于范数$\|x\|=\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$是完备的赋范线性空间，则称$\mathcal{H}$是一个希尔伯特空间(Hilbert space)。如果$\mathcal{K}$是另外一个希尔伯特空间，对于从$\mathcal{H}$到$\mathcal{K}$的线性映射T，定义T的范数为

$$\|T\|=\sup\{\|Tx\|:\ x\in\mathcal{H},\|x\|\leq 1\}。$$

若$\|T\|<\infty$，则称T为有界(或连续)线性算子。用$\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$表示从希尔伯特空间$\mathcal{H}$到希尔伯特空间$\mathcal{K}$上的所有有界线性算子组成的集合。对于$T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$，存在$\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$中唯一的有界线性算子$T^*$,使得对于任意的向量$x\in\mathcal{H},y\in\mathcal{K}$，均有

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle,$$

T^*就被称为T的共轭算子(adjoint operator)。$*$运算满足：对任意的$A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, $a,b\in\mathbb{C}$，

(1)　$(aA+bB)^*=\overline{a}A^*+\overline{b}B^*$;

(2) $(A^*)^* = A$;

(3) $\|A^*A\| = \|A\|^2$;

(4) $\|A^*\| = \|A\|$。

若$\mathcal{H} = \mathcal{K}$，则可证明$(AB)^* = B^*A^*$。用$\mathcal{B}(\mathcal{H})$表示$\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{H})$，即有$\mathcal{B}(\mathcal{H})$关于$*$运算是封闭的。如果$\mathcal{A}$是$B(\mathcal{H})$中的代数，且满足:对于任意$T \in \mathcal{A}$，有$T^* \in \mathcal{A}$, 就称$\mathcal{A}$为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的$*$-子代数（或者自伴子代数），反之则称为非自伴代数。

称$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中满足$T^*T = TT^*$的算子T为正规算子(normal operator)；进一步如果有$T = T^*$,就称T为自伴算子(self-adjoint)。如果$T^*T = I$,则称T是等距算子(isometry)；若还满足$TT^* = I$，则称T为酉算子(unitary). 对于满足以下的自伴算子T：对任意的$x \in \mathcal{H}$，有$\langle Tx, x\rangle \geq 0$，我们称之为正算子(positive operator)，可记作$T \geq 0$。$T_1 \geq T_2$既是说$T_1 - T_2 \geq 0$。此即在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的自伴算子集合上引入了一种偏序结构。

在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上有三种常用的拓扑：范数拓扑（一致拓扑），强算子拓扑和弱算子拓扑。范数拓扑顾名思义既是由算子范数$\|\ \|$诱导的拓扑。$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的算子序列T_n一致收敛于T，当且仅当$\|T_n - T\| \to 0$。设$x \in \mathcal{H}$，x在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$上定义了半范数$\rho_x(T) = \|Tx\|$ $(T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$，由半范数族$\{\rho_x : x \in \mathcal{H}\}$诱导的弱拓扑称为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$上的强算子拓扑。$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的算子网$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$强算子收敛于$T$，当且仅当对任意$x \in \mathcal{H}$，$\|(T_\lambda - T)x\| \to 0$。设$x, y \in \mathcal{H}$，则在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$上可定义半范数$\omega_{x,y}(T) = |\langle Tx, y\rangle|$ $(T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}))$。由半范数族$\{\omega_{x,y} : x, y \in \mathcal{H}\}$诱导的弱拓扑就被称为弱算子拓扑。由此，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的算子网$\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$弱算子收敛于$T$，当且仅当对任意$x, y \in \mathcal{H}$, $\langle T_\lambda x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle$。除此以外，超弱拓扑是在研究von Neumann代数时另一种经常用到的拓扑，它是保证形如$f(A) = \sum_n \langle Ax_n, y_n\rangle$ $(\sum(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) < \infty)$的泛函为连续的最弱的拓扑。

根据定义，可以看出范数拓扑是上述拓扑中最强的，而强算子拓扑强于弱算子拓扑，超弱拓扑强于弱算子拓扑。当Hilbert空间$\mathcal{H}$为有限维时，以上几种拓扑等价。von Neumann代数是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中弱算子闭的*-子代数，若对于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的任意*-子代数按范数取闭包，就得到了另一类被广泛研究的代数，即C^*-代数。特别的，每个von Neumann代数都为C^*-代数。为了更好的理解von Neumann代数，我们首先介绍一些关于C^*代数的基本知识。

设$\mathcal{A}$是$\mathbb{C}$或$\mathbb{R}$上的有单位元I的代数，若存在$\mathcal{A}$上的范数$\|\ \|$使得对$\mathcal{A}$中任

意的元素A, B, $\|AB\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$，而且$\|I\| = 1$，则称$\mathcal{A}$是赋范代数。如果$\mathcal{A}$相对于此范数是完备的，就称$\mathcal{A}$是Banach代数。在复Banach代数$\mathcal{A}$ 上定义映射$*: A \mapsto A^*$，使得对任意的$A, B \in \mathcal{A}$有，$(aA+bB)^* = \overline{a}A^* + \overline{b}B^*$，$(AB)^* = B^*A^*$，并且$(A^*)^* = A$。此映射被称为对合映射（involution）。C*-代数$\mathcal{A}$就是具备满足$\|TT^*\| = \|T\|^2$（$\forall T \in \mathcal{A}$）的对合运算的复Banach代数。

例 1.1. 如果X为紧Hausdorff空间，则X上全体连续函数$C(X)$，关于上确界范数，以函数的共轭为对和运算，形成交换的C*-代数。

若C*-代数$\mathcal{A}$ 的双边理想只有它自身，则称这种C*-代数为单的(simple) C*-代数。

C*-代数$\mathcal{A}$中的元素A如果满足$AA^* = A^*A$，称为正规元；若还有$AA^* = A^*A = I$，则称为酉元。A被称为正元，记为$A \geq 0$，当且仅当存在一个自伴元$B \in \mathcal{A}$（$B^* = B$），使得$A = B^2$。以下我们记$\mathcal{A}$中正元的集合为$\mathcal{A}^+$。

称$\mathcal{A}$上对于任意$A \in \mathcal{A}^+$满足$\rho(A) \geq 0$的线性范函ρ为正线性范函。并且我们知道ρ为正线性范函当且仅当ρ有界，并且$\|\rho\| = \rho(I)$。特别的，称$\mathcal{A}$上范数为1的正线性范函ρ为$\mathcal{A}$上的态（state）。$\mathcal{A}$上的态ρ被称为忠实的，如果对于属于$\mathcal{A}$的任意非零正算子A有$\rho(A) > 0$。对于Hilbert空间$\mathcal{H}$中的任意单位向量ξ，可定义$\mathcal{B}(\mathcal{H})$上的向量态如下：对于任意$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，令$\omega_\xi(A) = < A\xi, \xi >$。令$S(\mathcal{A}) = \{\rho \in \mathcal{A}^* : \|\rho\| = \rho(I) = 1\}$ 为C*-代数$\mathcal{A}$上所有态的集合（其中$\mathcal{A}^*$为$\mathcal{A}$上所有连续线性范函的集合），称为$\mathcal{A}$的态空间。则有$S(\mathcal{A})$为$\mathcal{A}^*$中的弱*紧凸集，由Krein-Milman定理知$S(\mathcal{A})$含有极点（extreme point），记$S(\mathcal{A})$中所有极点构成的集合为$\mathcal{P}(\mathcal{A})$，有$S(\mathcal{A})$为$\mathcal{P}(\mathcal{A})$的弱*-凸闭包。我们称$\mathcal{P}(\mathcal{A})$中的元素为$\mathcal{A}$上的纯态（pure state）。

当$\mathcal{A}$为交换C*-代数时，线性范函ρ为纯态当且仅当对于任意A，$B \in \mathcal{A}$有$\rho(AB) = \rho(A)\rho(B)$。由此$\mathcal{A}$上纯态全体的集合$\mathcal{P}(\mathcal{A})$是$S(\mathcal{A})$的闭子集。利用全体纯态，可以得到以下结果。

定理 1.1. *对于任意交换C*-代数，都存在一个紧的Hausdorff空间X，及从$\mathcal{A}$到$C(X)$上的代数同构φ，使得对$\mathcal{A}$中的任意元A有，$\varphi(A^*) = \overline{\varphi(A)}$, $\|A\| = \|\varphi(A)\|$ $(= sup\{|\varphi(A)(x)| : x \in X\})$。*

由此可将交换C*-代数$\mathcal{A}$与某个紧Hausdorff空间X上的连续函数空间$C(X)$等同起来。因为X上的拓扑性质可由$C(X)$中的代数性质得以反映，在此意义下，

自然的将一般的C*-代数（不一定交换）对应为“非交换的函数空间”$C(X)$，继而对应了“非交换的拓扑空间”X，进而将一般C*-代数理论理解为非交换的拓扑理论。

令$\mathcal{B}$为某一C*-代数。称映射$\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$为同态，如果$\varphi$是保单位元的代数同态，且对任意的$A \in \mathcal{A}$有$\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$。如果$\varphi$还是单射，则称$\varphi$为同构。若存在C*-代数$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$间的同构，就称$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$同构，记为$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$。C*-代数间的同态是保持范数不增的，同构是保持范数不变的，即有C*-代数的同态象亦为C*-代数。特别的，称从$\mathcal{A}$到$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的同态φ为$\mathcal{A}$在Hilbert空间$\mathcal{H}$上的表示。如果$\varphi(\mathcal{A})$在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的一次换位子是平凡的，即$\varphi(\mathcal{A})' = \mathbb{C}I$，称$\varphi$是$\mathcal{A}$在$\mathcal{H}$上的不可约表示，否则称为可约表示。如果表示$\varphi$为同构，则称为忠实（faithful）表示。

事实上，任何一个C*-代数都可以忠实地表示到某个Hilbert空间上。令ρ为C*-代数$\mathcal{A}$上的态,定义$\rho(B^*A) = \langle A, B\rangle$，则$\langle\, ,\, \rangle$是$\mathcal{A}$上的内积。由于$\langle\, ,\, \rangle$满足Cauchy-Schwarz不等式，即有$\mathcal{J}_\rho = \{A \in \mathcal{A} :\ \rho(A^*A) = 0\}$为$\mathcal{A}$上一个范数闭的左理想。于是可以在商空间$\mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$上自然的定义一个正定的内积：

$$\langle A + \mathcal{J}_\rho, B + \mathcal{J}_\rho\rangle = \langle A, B\rangle = \rho(B^*A) \quad (A, B \in \mathcal{A})。$$

用$\mathcal{H}_\rho$表示$\mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$在此内积下完备化得到的Hilbert空间。

若对$\mathcal{A}$中的任意元素A，定义$\varphi(A)(T + \mathcal{J}_\rho) = AT + \mathcal{J}_\rho$，则有在$\mathcal{A}/\mathcal{J}_\rho$ 上此算子$\varphi(A)$的范数小于等于$\|A\|$。由Hann-Banach定理知这个算子可唯一地扩张为$\mathcal{H}_\rho$上的有界算子。不难验证$\varphi(aA+B) = a\varphi(A)+\varphi(B)$，$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$，$\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$，$\varphi(I) = I$。此外还有$\|\varphi(A)\| \leq \|A\|$，进而$\varphi(\mathcal{A})$为C*-代数。在此构造下，就有$\rho(A) = \langle\varphi(A)(I + \mathcal{J}_\rho),\ I + \mathcal{J}_\rho\rangle$，即可将$\rho$视为$\mathcal{B}(\mathcal{H}_\rho)$上某向量态在$\varphi(\mathcal{A})$上的限制。记单位向量$I + \mathcal{J}_\rho$为$\xi_\rho$，即有$\varphi(\mathcal{A})\xi_\rho$在$\mathcal{H}_\rho$中稠密。一般的，若$\varphi$为C*-代数$\mathcal{A}$在Hilbert空间$\mathcal{H}$上的表示。如果$\mathcal{H}$中的向量$\xi$满足$\varphi(\mathcal{A})\xi$在$\mathcal{H}$中稠密，就称$\xi$为$\varphi(\mathcal{A})$ 的生成（generating）向量或循环（cyclic）向量。

上述由给定C*-代数$\mathcal{A}$的态ρ来构造相应表示（$\varphi_\rho, \mathcal{H}_\rho, \xi_\rho$）的方法被称为GNS（Gelfand-Neumark-Segal）构造，是研究C*-代数的基本工具之一。并且对于态ρ，通过GNS构造得到的表示为不可约的，当且仅当ρ为$\mathcal{A}$上的纯态。进一步，如果令$\mathcal{H}$为相对于某C*-代数$\mathcal{A}$上所有态作GNS构造得到的Hilbert空间做直和得到的Hilbert空间，则自然的得到$\mathcal{A}$在$\mathcal{H}$上的表示（即表示的直和），可

以证明此表示为忠实的（Gelfand-Neumark定理）。即任何C*-代数都同构于某个$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的C*-子代数。

张量积为从已知代数得到新代数的常规运算。对于C*-代数也可定义相应范畴中的张量积运算。

若$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$是C*-代数，记$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$为$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$的代数张量积。如果存在$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$上的范数$\gamma$，使得$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$成为一个赋范代数，且对任意$T\in\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$有$\gamma(T^*T)=\gamma(T)^2$，称$\gamma$是一个C*-范数。一般来说对于C*-代数$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$，满足上述条件的范数并不唯一。但有任意C*-范数都为交叉范数（cross norm），也就是说$\gamma(A\otimes B)=\gamma(A\otimes I)\gamma(I\otimes B)$。$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$关于范数$\gamma$的完备化就称为$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$关于$\gamma$的C*-代数张量积，记为$\mathcal{A}\otimes_{\gamma}\mathcal{B}$。如果不需要特别强调C*-范数$\gamma$的话，也可以用$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$来表示。

下面我们介绍两种$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$上常用的C*-范数。

其中一种就是空间C*-范数（spatial C*-norm）。在介绍其具体构造前，先回忆Hilbert空间张量积的概念。

如果$\mathcal{H}$和$\mathcal{K}$是向量空间，定义集合$\{x\otimes y:\ x\in\mathcal{H},\ y\in\mathcal{K}\}$的线性扩张为$\mathcal{H}$和$\mathcal{K}$的代数张量积，记为$\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}$。称形如$x\otimes y$的元素为单张量积（simple tensor product）。设$\mathcal{H}$和$\mathcal{K}$为Hilbert空间，可以证明存在$\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}$上唯一的内积$\langle\ ,\ \rangle$，使得$\langle x\otimes y,x'\otimes y'\rangle=\langle x,x'\rangle\langle y,y'\rangle$（$x,x'\in\mathcal{H},y,y'\in\mathcal{K}$）。这样$\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}$成为一个内积空间。$\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}$在此内积下的完备化就称为$\mathcal{H}$和$\mathcal{K}$的张量积，记为$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$。

若$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$是分别作用在希尔伯特空间$\mathcal{H}$和$\mathcal{K}$上的C*-代数，定义$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$为$\mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$中由$\{A\otimes I:\ A\in\mathcal{A}\}$和$\{I\otimes B:\ B\in\mathcal{B}\}$生成的C*-子代数。称$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$为$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的空间张量积(spatial tensor product)。$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$上由$\mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$上算子范数诱导的范数就是空间C*-范数。若$\mathcal{A}_1$和$\mathcal{B}_1$是分别作用在希尔伯特空间$\mathcal{H}_1$和$\mathcal{K}_1$上的C*-代数，并且$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$分别和$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$同构，就有$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$和$\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_1$同构（空间张量积）。对$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$上任意的C*-范数$\gamma$，$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$中元素的$\gamma$范数总大于等于它的空间范数。因此也称空间C*-范数为最小范数，并用$\mathcal{A}\otimes_{min}\mathcal{B}$表示$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$的空间张量积。

对应于极小范数，另一种常用的C*-范数即为所谓的极大范数。令$\Lambda=\{\gamma:\gamma\text{ 是 }\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}\text{上的C*-范数}\}$。对$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$中的任一个元素$C$，定义$\|C\|_{max}=sup_{\gamma\in\Lambda}\{\gamma(C)\}$。可以验证$\|C\|_{max}$是$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$上的一个C*-范数，由定义可知，此

范数即为$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$上所有C*-范数中最大的，称为极大范数。$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$关于极大范数的完备化就称为$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的极大张量积。

一般来说对于C*-代数$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$，$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$上的极小范数与极大范数并不相同。但对于一类被称为核型（nuclear）的特殊C*-代数，却能保证代数张量积上有唯一的C*-范数。即若$\mathcal{A}$为核型的C*-代数，那么对于任意C*-代数$\mathcal{B}$，$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$上只存在一个C*-范数。事实上，所有交换C*-代数都是核型的，有限维C*-代数也为核型的。这是因为，若$\mathcal{A}$是一个有限维C*-代数，可以把$\mathcal{A}$写成$\mathcal{A}=M_{n_1}(\mathbb{C})\oplus\cdots\oplus M_{n_k}(\mathbb{C})$。令$\mathcal{B}$为任意一个C*-代数，定义从$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$到$(M_{n_1}(\mathbb{C})\otimes\mathcal{B})\oplus\cdots\oplus(M_{n_k}(\mathbb{C})\otimes\mathcal{B})$的线性映射$\pi$，使得$\pi((a_1,\ldots,a_k)\otimes b)=(a_1\otimes b_1,\ldots,a_k\otimes b_k)$，则这个线性映射是*-同构。因此$\mathcal{A}\otimes_{alg}\mathcal{B}$上就有一个完备的C*-范数，由此可推出其具有唯一的C*-范数。事实上，如果一个*代数$\mathcal{W}$上有一个完备的C*-范数$\|\ \ \|$，则$\mathcal{W}$上就只有这一个C*-范数。假若γ是$\mathcal{W}$的另一个C*-范数，用$\widetilde{\mathcal{W}}$表示$\mathcal{W}$相对于γ的完备化。则包含映射$(\mathcal{W},\|\ \ \|)\to(\widetilde{\mathcal{W}},\gamma)$就是单的*-同态，从而是等距映射。因此$\gamma=\|\ \ \|$。这就证明了有限维C*-代数是核型的。

另一类更加重要的核型C*-代数是UHF代数。容易证明若$\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2\ldots$是某C*-代数$\mathcal{A}$的核型C*-子代数，当$i<j$时，$\mathcal{A}_i\subseteq\mathcal{A}_j$，如果$\mathcal{A}$是$\bigcup\mathcal{A}_i$的范数闭包，则$\mathcal{A}$也是核型的。C*-代数$\mathcal{A}$被称为UHF代数当且仅当存在$\mathcal{A}$中的一列单调递增的有限维C*-子代数$\{\mathcal{A}_k\}$，使得$\cup_k\mathcal{A}_k$在$\mathcal{A}$中稠密，并且每个$\mathcal{A}_k$同构于某个矩阵代数$M_{n_k}(\mathbb{C})$。不难证明UHF代数都是单的。因此$\mathcal{A}$的每一个表示都是忠实的。

可以用有限维C*-代数序列的无限张量积来构造UHF代数。一般的，一族C*-代数的无限张量积可以定义为有限子族的（空间）张量积的归纳极限（inductive limit）。令$\{\mathcal{A}_\alpha:\ \alpha\in\Lambda\}$为一族C*-代数，我们用$\otimes_\alpha\mathcal{A}_\alpha$表示它们的无限张量积。对$\alpha\in\Lambda$，若$\rho_\alpha$是$\mathcal{A}_\alpha$上的态，就存在张量积$\otimes_\alpha\mathcal{A}_\alpha$上唯一的态$\otimes_\alpha\rho_\alpha$使得

$$\rho(A_1\otimes\cdots\otimes A_n)=\rho_{\alpha(1)}(A_1)\cdots\rho_{\alpha(n)}(A_n),$$

其中$A_j\in\mathcal{A}_{\alpha(j)}$，$\{\alpha(1),\cdots,\alpha(n)\}\subset\Lambda$。这样的态$\rho$被称为张量积上的乘积态（product state），乘积态在无限张量积的研究中起着非常重要的作用。

由前所述，UHF代数$\mathcal{A}$为其自身的一列单调递增的子代数$\{\mathcal{A}_k\}$的范数闭包，并且$\mathcal{A}_k$与矩阵代数$M_{n_k}(\mathbb{C})$同构，于是有n_k整除n_{k+1}。如果$\mathcal{B}_{k+1}$是$\mathcal{A}_k$在$\mathcal{A}_{k+1}$的相对换为子，则$\mathcal{B}_{k+1}$同构于矩阵代数$M_{n_{k+1}/n_k}(\mathbb{C})$，可以证明$\mathcal{A}$同构于$\{\mathcal{B}_k\}$的

张量积。UHF代数中的一个基本问题是决定由$\{M_{2^k}(\mathbb{C})\}$生成的UHF代数和由$\{M_{3^k}(\mathbb{C})\}$生成的UHF代数是否同构？或再弱一点的问题：由$\{M_{2^k}(\mathbb{C})\}$生成的UHF代数是否包含一个同构于$M_3(\mathbb{C})$的C*-子代数？

Glimn通过对UHF代数引入如下不变量将其完全分类，进而否定回答了上述问题。设$\mathcal{A}$，$\{\mathcal{A}_k\}$和n_k的意义如上。对任意素数p，定义$m_p = sup\{r : \text{存在}k,\text{使得}p^r\text{整除}n_k\}$。此处$m_p$可能取0，$\infty$，或某个正整数。记$n(\mathcal{A}) = 2^{m_2}3^{m_3}5^{m_5}\cdots$，Glimm证明了以下结果：

定理 1.2. *两个UHF代数$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$是*-同构的，当且仅当$n(\mathcal{A}) = n(\mathcal{B})$。*

以适当的序来构造矩阵代数的（无限）张量积,即有对任意给定的不变量$n(\mathcal{A})$，都可以构造相应的UHF代数$\mathcal{A}$。由上述定理知存在无限多不同构的UHF代数。若对表示在某Hilbert空间上的UHF代数取弱算子闭包，就得到了所谓的超有限型von Neumann代数（超有限型因子）。在下一章中，我们将从UHF代数出发构造超有限型Kadison-Singer代数。在此之前，将注意力由C*-代数转回到von Neumann代数。

对于von Neumann代数的研究实际上早于对C*-代数的研究。作为一类特殊的C*-代数，即$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的弱算子闭子代数，von Neumann代数有很多特有的性质。以下对于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子集$\mathcal{A}$，记$\mathcal{A}' = \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : AB = BA, \forall A \in \mathcal{A}\}$，即$\mathcal{A}$在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的换位子。在[34]中von Neumann给出了如下定理：

定理 1.3. *（双换位定理）若$\mathcal{M}$是一个作用在希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的von Neumann代数，则$\mathcal{M}'$也是von Neumann代数，并且$(\mathcal{M}')' = \mathcal{M}$。*

作为von Neumann在此领域中最早的结果之一，双换位定理给出了von Neumann代数的等价代数刻画。此定理最令人惊讶的特点在于其不需要任何有关拓扑的假设。可以说从一开始拓扑与代数就在von Neumann代数中达到了某种程度的和谐统一。

由前面的讨论我们知道，任意交换的von Neumann 代数（交换的C*-代数）都同构于某个$C(X)$，其中X为某个紧Hausdorff空间。并且von Neumann代数的性质使得X具有下述特殊性质，即X中的每个开集的闭包依然是开的。我们称这样的空间为极端不连通的（extremely disconnected）。但反之并不成立，即便X是极端不连通的紧Hausdorff空间，$C(X)$也有可能不同构于任何一个交

换vonNeumann代数。实际上，交换von Neumann代数的函数表示需要用测度论来刻画。

令μ为集合S上的一个($\sigma-$有限)测度，$L^2(S,\mu) = \{f : \int |f|^2 d\mu < \infty\}$。则$L^2(S,\mu)$在内积$\langle f,\ g\rangle = \int f\bar{g}d\mu$下成为Hilbert空间。若$f$是$S$ 上的本性有界可测函数（$f \in L^\infty(S,\mu)$），则可定义乘法算子M_f为$M_f(g) = f \cdot g$，$\forall g \in L^2(S,\mu)$。由所有的乘法算子构成的代数$\mathcal{A}$就是$L^2(S,\mu)$上的一个交换von Neumann代数，而且与每一个乘法算子交换的算子也为乘法算子，即$\mathcal{A}$为$\mathcal{B}(L^2(S,\mu))$的极大交换(maximal abelian)von Neumann子代数。

具体来说，如果取S和μ为下列情况：[0,1]，Lebesgue 测度；有限或可数无限个点的集合，计数测度；或两个测度空间的并，就得到交换von Neumann代数的具体例子。可以证明，可分Hilbert空间上的交换von Neumann代数总是同构于上述的某种构造。并且一个极大交换von Neumann代数到$L^\infty(S,\mu)$上的同构是由它的作用空间（可分Hilbert空间）到$L^2(S,\mu)$上的酉变换诱导的。

可见，交换von Neumann代数理论脱胎于测度论，所以一般von Neumann代数理论也可以看作是非交换的测度论。在此观点的指导下，自然地将von Neumann代数中的投影（自伴的幂等算子，即满足$E = E^* = E^2$）类比为测度空间上可测集的特征函数。即可以把von Neumann代数中的投影视为非交换测度空间上的可测集。上述讨论暗示了von Neumann代数含有大量的投影。事实上，对于任意von Neumann代数$\mathcal{M}$，其中投影的线性扩张为$\mathcal{M}$的范数稠子集。所以投影在von Neumann代数的研究中起着非常重要的作用，F.Murray与J.von Neumann正是通过对投影的研究将von Neumann代数分类的。

称两个投影E和F正交如果$EF = 0$。若E，F是投影且$EF = E = FE$，则称E是F的子投影，用$E \le F$表示。包含E，F的值域的最小闭子空间所对应的投影称为E和F的并，记为$E \vee F$，而对应于E，F值域的公共闭子空间的投影叫做E与F的交，用$E \wedge F$表示。令$\mathcal{M}$为von Neumann代数，$\mathcal{M}$中的投影E，F称为等价的，如果存在$V \in \mathcal{M}$使得$V^*V = E$，$VV^* = F$，记为$E \sim F$，其中V是从$E(\mathcal{H})$到$F(\mathcal{H})$的部分等距算子。若E与F的一个子投影等价，则用$E \precsim F$表示，而E与F的一个子投影等价但不与F等价，记为$E \prec F$。在进一步讨论投影间的等价关系前，我们简要介绍研究von Neumann代数的另一重要工具。

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的每一个算子T都可以被唯一地分解为VH的形式，其中H是正

自伴算子，且$H^2 = T^*T$，V是从H的值域的闭包（记作$r(H)$）到$r(T)$的等距映射，并将$r(H)$的正交补映为0。称V为从起始空间（initial space）$r(H)$到终止空间（final space）$r(T)$的部分等距。如果我们用$R(H)$表示值域为$r(H)$的投影，则有$V^*V = R(H)$，$VV^* = R(T)$. 上述分解被称为T的极分解（polar decomposition）。若T属于某von Neumann代数$\mathcal{M}$，则T极分解中的H和V依然属于$\mathcal{M}$，于是在$\mathcal{M}$中有$R(H) \sim R(T)$。

应用极分解，对于von Neumann代数$\mathcal{M}$中的算子T，由$R(H) = R(T^*)$，立得$R(T) \sim R(T^*)$。应用此事实，我们就知道对$\mathcal{M}$中的任意算子A和任意投影E，F有EAF和FA^*E 的值域投影是等价的。因此若对于$\mathcal{M}$中的任意算子A，EAF都等于0，就说明E和F没有非零的等价子投影。所以一般来说von Neumann代数中的投影并不一定可以比较。但如果$\mathcal{M}$的中心平凡（即$\mathcal{M}' \cap \mathcal{M} = \{\mathbb{C}I\}$），我们称之为因子，可以证明若$\mathcal{M}$中的投影$E$，$F$对于$\mathcal{M}$中的任意算子$A$满足$EAF = 0$，则有$E$或$F$为0。由此即得，因子中任意两个非零投影都有等价的非零子投影。类似于测度论的讨论就有$E \precsim F$，或$F \precsim E$。应用Cantor-Bernstein定理的证明方法，可以得到若E和F是von Neumann代数$\mathcal{M}$中的投影，并且$E \precsim F$，$F \precsim E$，则$E \sim F$。由是可见$\precsim$给出von Neumann代数投影等价类上的偏序。并且$\precsim$ 给出von Neumann代数$\mathcal{M}$中投影等价类上的全序当且仅当$\mathcal{M}$为因子。

应用以上概念，可以定义所谓的有限投影和无限投影。令E为von Neumann代数$\mathcal{M}$中的投影，如果E不能等价于自身的任何真子投影，则称E为有限投影，Murray和von Neumann 证明了两个有限投影的并依然为有限投影；反之若E能和自身的某个真子投影等价，就称E为无限投影。进一步对于无限投影E，如果对任意的中心投影P（$P \in \mathcal{M}' \cap \mathcal{M}$）满足$PE = 0$，或$PE$为无限投影，则称$E$为真无限（properly infinite）投影。

令$\mathcal{M}$为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中von Neumann代数，记其中心为$\mathcal{C}$（$= \mathcal{M}' \cap \mathcal{M}$），$E$为$\mathcal{M}$中的投影。如果$P \in \mathcal{M}$是使得$PE = E$的最小中心投影（即$P$是投影，且$P \in \mathcal{C}$），就称$P$为$E$在$\mathcal{M}$中的中心覆盖（central carrier）。若E是$\mathcal{M}$中的投影，并且$E\mathcal{M}E$是交换von Neumann代数（此时有$E\mathcal{M}E = \mathcal{C}E$），则称$E$是$\mathcal{M}$的交换投影，或阿贝尔投影，特别的，如果$E\mathcal{M}E = \mathbb{C}E$，就称$E$为$\mathcal{M}$的极小投影。现在我们可以根据von Neumann代数中投影的性质，将其分为I型，II型和III型。

令$\mathcal{M}$为属于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的von Neumann代数。如果$\mathcal{M}$中存在一个交换投影使得

其中心覆盖为I，就称$\mathcal{M}$是I型的von Neumann代数。若I是n个互相等价的交换投影的和（$n \in \mathbb{N}$或$n = \infty$），则称$\mathcal{M}$为I_n型的von Neumann代数。如果$\mathcal{M}$中没有非零的交换投影，但包含一个中心覆盖为I的有限投影，就称$\mathcal{M}$是II型的von Neumann代数；此时，若I为有限的，则称$\mathcal{M}$为II_1型的von Neumann代数；若I是真无限的，则称$\mathcal{M}$为II_∞型的von Neumann代数。如果$\mathcal{M}$中不包含非零的有限投影，就称$\mathcal{M}$是III型的von Neumann代数。如果$\mathcal{M}$不包含无限投影，就称$\mathcal{M}$为有限的von Neumann代数。

一般的，根据von Neumann代数的分解定理有，任何von Neumann代数$\mathcal{M}$（$\subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$）都可唯一分解成

$$\mathcal{M} = (\oplus_{n \leq dim(\mathcal{H})} \mathcal{M}P_n) \oplus \mathcal{M}P_{c_1} \oplus \mathcal{M}P_{c_\infty} \oplus \mathcal{M}P_\infty,$$

其中P_n（$n \leq dim(\mathcal{H})$），P_{c_1}，P_{c_∞}和P_∞为$\mathcal{M}$的中心投影使得，$\mathcal{M}P_n$为I_n型或$P_n = 0$，$\mathcal{M}P_{c_1}$为II_1型或$P_{c_1} = 0$，$\mathcal{M}P_{c_\infty}$为II_∞型或$P_{c_\infty} = 0$，$\mathcal{M}P_\infty$为III型或$P_\infty = 0$。并且以上投影的和为I。

由以上定理可以看出，中心在研究von Neumann代数的结构时起到了至关重要的作用。von Neumann代数$\mathcal{M}$的中心$\mathcal{C}$依然是一个von Neumann代数，并且相对于$\mathcal{C}$中的投影P，$\mathcal{M}$成为了$\mathcal{M}P$和$\mathcal{M}(I-P)$的直和。所以在某种意义下，von Neumann代数的分类可归结为对因子的分类。由von Neumann代数的分解定理得到，因子必为I_n ($n \in \mathbb{N}$或$n = \infty$)型，II_1型，II_∞型或者III型。

I型因子可由其中的极小投影完全刻画，是有所情况中最为简单的。事实上我们有如下结果。

定理 1.4. *如果因子$\mathcal{M}$有极小投影，则I为一族极小正交投影的和，$\mathcal{M}$同构于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中Hilbert空间$\mathcal{H}$的维数与$\mathcal{M}$中最大的相互正交的极小投影集合的势相同。*

值得指出的是，当von Neumann证明以上关于因子分类的结果时，III型因子是否存在还不为人所知。即使II型因子的存在性也并不显然。Murray和von Neuamann利用今天被称为群测度空间构造的方法给出了II型和III型因子的例子。下面我们简要描述此方法。

设(S, Ω, μ)为可数分离的测度空间，离散群G中的元素为S上的保测变换。并且要求G自由的作用在S上，即对于任意不包含e的G的有限子集K，

和Ω中任意测度大于0的可测集E，存在E的测度大于0的可测子集F使得对于任意$k \in K$，有$k(F) \cap F$为零测集。记$\mathcal{A}$为是测度空间上的乘法代数。由Radon-nikodým定理知，对G中的任意元g，存在S上的非负实值函数φ_g，使得对S上的任意非负可测函数x有

$$\int_S x(g(s))d\mu(s) = \int_S x(s)\varphi_g(s)d\mu(s), \quad s \in S。$$

对任意$g \in G$，定义U_g为$(U_g f)(s) = [\varphi_g(s)]^{\frac{1}{2}} f(g^{-1}(s))$ $(f \in L^2(S, \Omega, \mu),\ s \in S)$。则有$U:\ g \mapsto U_g$ 为G到$L^2(S, \Omega, \mu)$上的酉表示，且对G中任意的$g(\neq e)$，$\mathcal{A} \cap (U_g \mathcal{A}) = \{0\}$。

群测度构造将给出作用在Hilbert空间$\mathcal{K} = L^2(\mu) \otimes l^2(G)$上的von Neumann代数。可将$\mathcal{K}$视为$\oplus_{g\in G}\mathcal{H}_g$，$\mathcal{H}_g = L^2(S, \Omega, \mu)$。换句话说，

$$\mathcal{K} = \{x:\ x \text{ 是从 } G \text{ 到 } L^2(S, \Omega, \mu) \text{ 的函数, 且满足 } \sum_{g\in G} \|x(g)\|^2 < \infty\}。$$

其上内积为$\langle x,\, y\rangle = \sum_{g\in G}\langle x(g),\, y(g)\rangle$。对$\mathcal{B}(L^2(\mu))$中的任意算子$B$，定义$\mathcal{B}(\mathcal{K})$中的算子$\Phi(B)$，使得$(\Phi(B)x)(g) = Bx(g)$，对于$G$中的元素$g$，定义$\mathcal{B}(\mathcal{K})$中的酉算子$(V(g)x)(g') = U(g)x(g^{-1}g')$，其中$x \in \mathcal{K}$。则由$\Phi(\mathcal{A})$和$\{V(g)\}_{g\in G}$所生成的von Neumann代数$\mathcal{M}$即为所求。如果群$G$在$S$上的作用满足以下条件：对于$S$的可测子集$X$，若对于$G$中任意元素$g$有$\mu(g(X)\backslash X) = 0$，就可推出$\mu(X) = 0$或$\mu(S\backslash X) = 0$成立，那么称$G$遍历地作用在$S$上。

定理 1.5. *G，S，$\mathcal{M}$的意义如上。若G遍历的作用在S上，则$\mathcal{M}$为因子，且在此条件下*

（1）$\mathcal{M}$是I型因子当且仅当S中的某些点有正测度。此时$\mathcal{M}$ 是I_n型因子当且仅当S中的点的个数是n.

（2）如果S上有一个$G-$不变测度μ_0使得只要$\mu(S_0) = 0$，就有$\mu_0(S_0) = 0$，则$\mathcal{M}$是II型因子。此外，若$\mu_0(S) < \infty$，$\mathcal{M}$为II_1型因子；若$\mu_0(S) = \infty$，则$\mathcal{M}$为II_∞型因子。

（3）若（1）中条间不成立，且不存在（2）中所描述的测度μ_0，$\mathcal{M}$就为III型因子。

选择不同的测度空间和不同的群作用，就得到了不同因子的例子。

1. 令S为整数群，取计数测度，即每个整数对应的测度为1，G是S的所有平移所构成的群。这样构造的因子是I_∞型的。若用阶数为n的循环群代替S，则得到I_n型因子。

2. 令S为单位圆周，取其上的Lebesgue测度。G是S某个角度为γ的无理旋转所生成的群，则G遍历的作用在S上，群测度构造给出II_1型因子。

3. 令S是具有Lebesgue测度的实数集$\mathbb{R}$，G是所有有理平移所构成的群，则G遍历的作用在S上，上述构造给出II_∞型因子。

4. 同样令S为具有Lebesgue测度的实数集$\mathbb{R}$，G是所有有理仿射平移（$s \mapsto as+b$，a，b都是有理数）所构成的群，则我们得到III型因子。

将群测度构造一般化，就衍生出von Neumann代数与群作用的交叉积。由于篇幅所限，我们仅介绍von Neumann代数与离散群的交叉积。

令$\mathcal{M}$为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的von Neumann代数，（离散）群G为$Aut(\mathcal{M})$（$\mathcal{M}$的自同构群）的子群。定义$\mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes l^2(G))$中的算子如下：

$$\pi(A)\xi(g) = g^{-1}(A)\xi(g) \quad \xi \in \mathcal{H}\otimes l^2(G), g \in G, A \in \mathcal{M};$$

$$(V_g\xi)(h) = \xi(g^{-1}h) \quad \xi \in \mathcal{H}\otimes l^2(G), g, h \in G。$$

则$\mathcal{M}$与G的交叉积，即是由算子$\pi(A)$，V_g生成的von Neumann代数，记为$\mathcal{M} \rtimes G$。

如果对von Neumann代数$\mathcal{M} = \mathbb{C}1$，与群$G$做交叉积（$G$平凡作用在$\mathcal{M}$上），就得到了所谓的群von Neumann代数，记为$\mathcal{L}_G$。特别的当G为I.C.C（无限共轭类）群时，$\mathcal{L}_G$为因子。两个最有名的I.C.C群为：整数集上所有有限置换构成的群Π；由n个元（$n \geq 2$）生成的自由群$\mathcal{F}_n$。这两种群所生成的群von Neumann代数对于von Neumann代数理论有着极其重要的意义，其中$\mathcal{L}_\Pi$为唯一的超有限II_1型因子。

von Neumann代数$\mathcal{M}$被称为超有限（hyperfinite or AFD)的，如果它是由一列单调递增的有限维von Neumann子代数所生成的。在[8]中，Murray和von Neumann证明了所有超有限II_1型因子都是*-同构的（而$\mathcal{L}_{F_n}$与$\mathcal{L}_\Pi$不同构），即在*-同构意义下，超有限II_1型因子唯一。除了用群测度构造外，通过有限维矩阵代数$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$的无限张量积也可得到超有限型因子。要达到此目的，我们需

要将以前得到的UHF代数通过GNS构造表示到某个Hilbert空间上，之后取弱算子闭包即得到超有限von Neumann代数。而得到的代数是否为因子，为I型，II型，还是III型von Neumann代数则取决于态的选取。

T.Powers在[28]中给出了UHF代数相对其上态ω做GNS构造得到因子的充要条件。

定理 1.6. *设$\mathfrak{A}$为UHF代数，$\{M_i : i = 1, 2, \ldots\}$为生成$\mathfrak{A}$的单调递增的$I_{n_i}$型因子。对于$\mathfrak{A}$上的态$\omega$，以下条件等价。*
（1）相对ω做GNS构造取弱算子闭包后得到因子。
（2）对$\mathfrak{A}$中的任意算子A，存在只依赖于A的整数$r > 0$，使得对于任意$B \in M_r' \cap \mathfrak{A}$有$|\omega(AB) - \omega(A)\omega(B)| \leq \|B\|$。
（3）对$\mathfrak{A}$中的任意算子A，存在$\mathfrak{A}$中的I_m型因子M，使得对于任意$B \in M' \cap \mathfrak{A}$有$|\omega(AB) - \omega(A)\omega(B)| \leq \|B\|$。

由此定理，易见对于UHF的任意非零乘积态做GNS构造，我们都将得到因子。在同一篇文章中，Powers从$n(\mathfrak{A}) = 2^\infty$的UHF代数$\mathfrak{A}$出发构造了不可数多个互不同构的III型因子。其构造方法就是对于$0 \leq \lambda \leq 1$ 选取$M_2(\mathbb{C})$上的态，

$$\widetilde{\omega}(A) = tr(AD), \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+1} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda+1} \end{pmatrix},$$

并用$\widetilde{\omega}$诱导$\mathfrak{A}$上的乘积态$\omega = \otimes\widetilde{\omega}$。接下来取相对于$\omega$做GNS构造得到的代数的弱算子闭包，即得到互不同构的因子。当$\lambda = 0$时，得到I_∞型因子；若$\lambda = 1$，结果为II_1型因子；而对于$0 < \lambda < I$，就得到了被称为III_λ型（将在下文定义）的III型因子，并且当$\lambda_1 \neq \lambda_2$时，III_{λ_1}型因子与III_{λ_2}型因子不同构。

注意到在上述构造中，当$\lambda = 1$时，$\mathfrak{a}$上的乘积态ω具有一个特殊的性质，对于A，B属于$\mathfrak{a}$，$\omega(AB) = \omega(BA)$。一般的，称C*-代数上满足上述条件的态为迹态（tracial state），通常记von Neumann上的迹态为τ。易见$\mathfrak{a}$上的乘积态ω，可扩展为超有限因子$\mathcal{R}$上的态，仍记为ω。并且ω满足，对$\mathcal{R}$中的任意正交投影族$\{E_\alpha\}$，有$\tau(\sum_\alpha E_\alpha) = \sum_\alpha \tau(E_\alpha)$，以后称von Neumann代数上满足上述条件的态为正规态（normal state）。如果对任意$A > 0$，von Neumann代数上的态ρ满足$\rho(A) > 0$, 则称这个态是忠实的（faithful）。若将∞加入态的取值范围，就得到了权（weight）的概念。称映射$\rho : \mathcal{M}^+ \to [0, \infty]$为von Neumann代

数$\mathcal{M}$上的权，如果对任意$H, K \in \mathcal{M}^+$和$a > 0$有$\rho(aH + K) = a\rho(H) + \rho(K)$。称权$\rho$为忠实的，如果对任意$H > 0$有$\rho(H) > 0$。称$\rho$为半有限的，如果$\{H \in \mathcal{M}^+ : \rho(H) < \infty\}$ 的线性扩张在$\mathcal{M}$中弱算子稠密。称ρ是正规的，如果在$\mathcal{M}$上存在一族正规的正线性泛函$\{\rho_a : a \in \mathbb{A}\}$，使得对任意$H \in \mathcal{M}^+$有$\rho(H) = \sum_{a\in\mathbb{A}} \rho_a(H)$。

von Neumann代数的类型决定了其上能否存在具有某种特殊性质的权。事实上，正规半有限迹权的存在性及其限制在投影集上的值域完全决定了因子的类型。如果因子$\mathcal{M}$上没有正规半有限的迹权，则是III型的；若$\mathcal{M}$不是III型的，则存在其上的忠实正规半有限迹权ρ。将ρ限制在投影集上，在规范化条件下有：当值域为$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$(n可以∞)时，因子是I_n型的；值域为$[0, 1]$时，因子是II_1型的；值域为$[0, \infty]$时，因子是II_∞型的。特别的，von Neumann代数$\mathcal{M}$是有限的，当且仅当存在其上的忠实正规迹态τ。此时，可定义由τ诱导的迹范数（或二范数）$\| \|_2$如下：对于$\mathcal{M}$中的算子A，$\|A\|_2 = \tau(A^*A)^{1/2}$。

将注意力再次转回到Powers的构造上（$\lambda \neq 0$），易见在通过GNS构造得到的Hilbert空间$\mathcal{H}$中，I对应的单位向量ξ满足$\mathcal{R}\xi$，$\mathcal{R}'\xi$都是$\mathcal{H}$的稠子空间。一般的，设$\mathcal{M}$为表示在Hilbert空间$\mathcal{H}$上的von Nuemann代数，如果$\mathcal{H}$中存在向量ξ使得$\mathcal{M}\xi$，$\mathcal{M}'\xi$皆为$\mathcal{H}$稠子空间，即ξ为$\mathcal{M}$的循环，分离向量（$\xi \in \mathcal{H}$被称为$\mathcal{M}$的分离向量，如果$\mathcal{M}'\xi$在$\mathcal{H}$中稠），那么称此表示为$\mathcal{M}$的标准表示，并有如下结论：

定理 1.7 (酉表示定理). *设$\mathcal{M}_1$和$\mathcal{M}_2$是分别以标准形式作用在希尔伯特空间$\mathcal{H}_1$和$\mathcal{H}_2$上的von Neumann代数。若φ是从$\mathcal{M}_1$到$\mathcal{M}_2$上的*-同构，则存在从$\mathcal{H}_1$到$\mathcal{H}_2$ 上的酉变换U，使得对任意$A \in \mathcal{M}_1$有$\varphi(A) = UAU^{-1}$。*

构造新的因子是算子代数早期发展的主要活动之一，但是在系列文章[35]，[6]，[7]，[8]发表过后的近30年里，算子代数并没有受到应有的重视，虽然此间也取得了一些成果，但总的来说算子代数的发展处于低潮。直到60年代末，Tomita-Takesaki理论[18]的出现，才使算子代数取得了革命性的发展。Tomita-Takesaki理论为III型因子的研究提供的全新的方法，Alain Connes应用此理论成功的第一次对超有限III型因子进行了分类[1]。连同此工作，Connes凭借其关于内射因子（injective factor）的分类[2]，及超有限II_1型因子自同构群的研究在1983年获得菲尔兹奖（Fields Medal）。以下我们简要介绍Tomita-Takesaki理论。

令$\mathcal{M}$为作用在Hilbert空间$\mathcal{H}$上的von Neumann代数。假设$\Omega \in \mathcal{H}$为$\mathcal{M}$的循环分离向量。则以下

$$S_0 : A\Omega \mapsto A^*\Omega, \quad A \in \mathcal{M}$$

给出了稠定（densely defined）的共轭（conjugate）线性算子，记其闭包为S。令$S = J\Delta$为S的极分解，其中J为反酉（antiunitary）算子，Δ为可逆正算子（一般为无界算子），称为模算子。Tomita-Takesaki理论的一个基本事实为：对于任意$t \in \mathbb{R}$，

$$\sigma_t(A) = \Delta^{it} A \Delta^{-it} \in \mathcal{M}, \quad A \in \mathcal{M} \quad (i\text{为虚数单位}),$$

定义了$\mathcal{M}$上的*-自同构。称单参数自同构群$\{\sigma_t : t \in \mathbb{R}\}$为相对于$\Omega$的模自同构群。模自同构群可以被用来将III型因子与其它类型的因子区分开来。事实上，对于因子$\mathcal{M}$，以下成立，

$$\sigma_t(A) = U_t A U_t^*, \quad A \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R},$$

其中U_t为$\mathcal{M}$中的酉算子（即对于任意t，σ_t为$\mathcal{M}$的内自同构），当且仅当$\mathcal{M}$为I型，或II型。

不动点代数$\mathcal{M}^\sigma = \{A \in \mathcal{M} : \sigma_t(A) = A, \forall t \in \mathbb{R}\}$，被称为相对于$\Omega$（或相对于由$\Omega$诱导的向量态）的中心化子（centralizer）。$\mathcal{M}^\sigma$为von Neumann代数，令$\mathcal{C}(\mathcal{M}^\sigma)$为$\mathcal{M}^\sigma$的中心，对于每一个属于$\mathcal{C}(\mathcal{M}^\sigma)$的投影$e$，相对于作用在Hilbert空间$\overline{\{e\mathcal{M}e\Omega\}}$上的von Neumann代数$e\mathcal{M}e$，及$e\mathcal{M}e$的循环分离向量$e\Omega$，类似之前构造模算子$\Delta_e$。当$\mathcal{M}$为III型因子时，

$$\Gamma = \cap_e Spectrum(\Delta_e) \setminus \{0\} = \begin{cases} \{1\}, \\ \{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}, \quad 0 < \lambda < 1, \\ \{t \in \mathbb{R}^+\} \end{cases}$$

为正实数构成的乘法群$\mathbb{R}_+^*$的闭子群，且与循环分离向量的选取无关，于是Γ为III型因子的同构不变量，称为Connes谱。对应于以上三种不同情况，Connes
将III型因子进一步分为III_0型，III_λ型（$0 < \lambda < 1$），及III_1型。不仅如此，Connes还证明了所有超有限III_λ型因子都同构于上文介绍的Power在[28] 中构造

的因子。而超有限III_1型因子的唯一性则由U.Haagerup在[29]中予以说明。不同于以上两种情况，存在无穷多互不同构的超有限III_0型因子。

较之其它无限维因子，II_1型因子在某种程度上更为接近有限维的矩阵因子$M_n(\mathbb{C})$。其一，II_1型因子与$M_n(\mathbb{C})$一样有唯一的迹态（其值域为$[0,1]$）。其二两者的类似，也体现在附属于II_1型因子的无界算子所具有的良好性质上。一般来说由于定义域与值域的关系，两个无界算子的和与积并不一定有意义。但对于附属于II_1型因子的算子来说，以上困难在很大程度上将不复存在。事实上附属于II_1型因子的所有算子构成一个代数。80年代初，在Jones发展了指标理论后，关于II_1型因子子因子的研究逐渐成为von Neumann代数研究中的新热点。下面我们简介绍Jones在[30]中给出的惊人结果。

令$\mathcal{M}$为作用在Hilbert空间$\mathcal{H}$上的von Neumann代数，其换位子为$\mathcal{M}'$。假设$\mathcal{M}$，$\mathcal{M}'$都是II_1型因子。记$\tau_{\mathcal{M}}$，$\tau_{\mathcal{M}'}$为$\mathcal{M}$，$\mathcal{M}'$上的迹态。对于$\mathcal{H}$中的任意向量ξ，记$[\mathcal{M}\xi] \in \mathcal{M}'$为到闭子空间$\overline{\mathcal{M}\xi}$上的投影，类似$[\mathcal{M}'\xi] \in \mathcal{M}$为到闭子空间$\overline{\mathcal{M}'\xi}$上的投影。则由Murray和von Neumann的结果知

$$dim_{\mathcal{M}}(\mathcal{H}) \equiv \frac{\tau_{\mathcal{M}'}([\mathcal{M}\xi])}{\tau_{\mathcal{M}}([\mathcal{M}'\xi])}$$

与ξ的选取无关，称为扭合（coupling）常数。从某种意义上，扭合常数度量了Hilbert空间相对于von Neumann代数$\mathcal{M}$的大小。Jones应用扭合常数来测量II_1型因子子因子的大小。受到群中子群指标的启发，他遂将以上称为子因子的指标，其定义如下。

令$\mathcal{N}$为II_1型因子$\mathcal{M}$（$\subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$）的子因子，则$\mathcal{M}$上的迹态就诱导了$\mathcal{N}$上的迹态，此处我们还假设$\mathcal{N}'$也为$\mathrm{II}_1$型因子。则指标即为

$$[\mathcal{M}:\mathcal{N}] = \frac{dim_{\mathcal{N}}(\mathcal{H})}{dim_{\mathcal{M}}(\mathcal{H})}。$$

指标$[\mathcal{M}:\mathcal{N}]$并不一定为整数。事实上，Jones在[30]中证明指标的取值范围为

$$\{t \in \mathbb{R} : t \geq 4\} \cup \{4cos^2(\pi/p) : p \in \mathbb{N}, p \geq 3\}。$$

此结果对于日后的研究产生了深远的影响。Vaughan F.R.Jones由于建立了von Neumann代数与几何拓扑间的联系于1992年被授予菲尔兹奖。而指标理论则是通往其日后发现的第一步。

近些年来，为研究R.Kadison于1967年提出的二元生成自由群因子$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_2}$和三元生成自由群因子$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_3}$ 是否同构的问题，D.Voiculescu [4]开辟了自由概率论这一崭新的领域。在古典概率论中，随机变量是定义在概率空间上的函数，所有的随机变量构成一个交换代数。D.Voiculescu用非交换的算子代数来代替这个交换代数，而概率测度则以算子代数上具有特定性质的线性泛函来替代，继而引入了"自由独立性"，并得到了相应的中心极限定理。在自由概率论中，古典概率论中的正态分布被Wigner的半圆周分布所替代。其后，D.Voiculescu又在[32]中引入了自由熵的概念，并以自由概率论和自由熵为工具，证明了$\mathcal{L}_{\mathcal{F}_2} \cong \mathcal{L}_{\mathcal{F}_5}\overline{\otimes}M_2(\mathbb{C})$，及自由群因子没有Cartan子代数[33]。葛力明教授推广了Voiculescu估计自由熵的方法，证明了自由群因子是素因子[10]（即不能分解成两个II_1型因子的张量积）且没有单的极大交换子代数[9]。这些结果解决了算子代数中几个古老而重要的问题。

从下一节开始，我们将开始讨论非自伴算子代数。

1.2 Kadison-Singer代数的定义

定义 1.1. Hilbert空间$\mathcal{H}$的（闭）子空间$\mathcal{H}_1$为有界算子A（$\subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$）的不变子空间，当且仅当对任意$\xi \in \mathcal{H}_1$，$A\xi \in \mathcal{H}_1$。若令$P$为到$\mathcal{H}_1$上的正交投影，则可将上述条件叙述为$(I-P)AP=0$。以下在不引起混淆的情况下，我们将不区分正交投影与其对应的闭子空间。

定义 1.2. 令$\mathcal{H}$为Hilbert空间，$S \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的全体投影。记$S$中所有算子的公共闭不变子空间为$\mathrm{Lat}(S) = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H})) : (I-P)AP = 0, A \in S\}$。可以说明$\mathrm{Lat}(S)$中的全体投影构成一个格，称为$S$的不变子空间格。此外有$\{0, I\} \subset \mathrm{Lat}(S)$，并且$\mathrm{Lat}(S)$为强算子拓扑下的闭集。

不变子空间问题（invariant subspace problem）是非自伴算子理论中长期悬而未决的问题：

是否每个无限可分Hilbert空间$\mathcal{H}$上的有界算子都有非平凡的不变子空间？

此处非平凡不变子空间的意思是此子空间不能为0或$\mathcal{H}$本身。用刚刚引进的记号，也可将不变子空间问题重新叙述如下：

是否无限可分Hilbert空间$\mathcal{H}$上的任意有界算子T都满足$\mathrm{Lat}(T) \neq \{0, I\}$?

von Neumann首先证明Hilbert空间上的紧算子总有非平凡的不变子空间（未发表）。其后俄国数学家V.Lomonosov于1973年用全新的方法证明了如下结果：

定理 1.8. *设T（$\neq cI, c \in \mathbb{C}$）为banach空间上的有界算子，如果$T$与一个紧算子交换，则$T$有非平凡的超不变子空间$\mathcal{S}$（hyperinvaiant subspace），即$\mathcal{S}$同时为所有与T交换的算子的不变子空间。*

起初人们认为Lomonosov's定理将会导致不变子空间问题的肯定回答，但Hadwin-Nordgren-Radjavi-Rosenthal于1980年给出了不与任何紧算子交换的算子的例子，使这一希望化为泡影。由此可见无限维可分Hilbert空间上的算子结构是极其复杂的。如果不要求算子作用在Hilbert空间上，Per Enflo于70年代末，构造了Banach空间（不包含Hilbert空间的情况）上没有非平凡不变子空间的有界算子的例子，但时至今日不变子空间问题作依然没有被解决。

平行于不变子空间问题，Kadison在[25]中提出了可迁代数问题（transitive algebra problem）。

定义 1.3. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子代数$\mathfrak{A}$被称为可迁代数，如果$\mathfrak{A}$是包含I的弱算子闭代数，并且$\mathrm{Lat}(\mathfrak{A}) = \{0, I\}$。

可迁代数问题即为：如果$\mathfrak{A}$为$\mathcal{H}$上的可迁代数，是否必有$\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$？注意到，可迁代数问题的肯定回答隐含了不变子空间问题的肯定回答。事实上，假设A（$\neq cI, c \in \mathbb{C}$）为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的算子，记$\mathfrak{A}$（$\ni A$）为$A$的换位子。由于$A \neq cI$，$\mathfrak{A} \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$，于是，可迁代数问题的肯定回答就说明$\mathrm{Lat}(\mathfrak{A}) \neq \{0, I\}$，进而$A$有非平凡的不变子空间。

有关可迁代数问题的第一个部分结果是Arveson在[3]中证明的：

定理 1.9. *若$\mathfrak{A}$是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的可迁代数，并且$\mathfrak{A}$包含$\mathcal{H}$上的极大交换子代数（m.a.s.a），就有$\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$。*

可迁代数问题的回答，有赖于对非自伴代数的研究，这是因为，对于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的自伴弱算子闭代数，即von Neumann代数，应用双换位定理立得以下：

定理 1.10. *$\mathcal{B}(\mathcal{H})$为唯一的可迁von Neumann代数。*

下面我们介绍两种代数。自反（reflexive）代数是一类完全由其不变子空间决定的代数，定义如下：

定义 1.4. 对于Hilbert空间$\mathcal{H}$中任意闭子空间集合$\mathcal{S}$，令$\mathrm{Alg}(\mathcal{S}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : (I-P)AP = 0, P \in \mathcal{S}\}$。易见$\mathrm{Alg}(\mathcal{S})$为包含$I$的弱算子闭代数。一般的有$\mathcal{S} \subset \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{S}))$，若有$\mathcal{S} = \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{S}))$，即称$\mathcal{S}$为自反格。如果$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的代数$\mathfrak{A}$满足：$\mathfrak{A} = \mathrm{Alg}(\mathrm{Lat}(\mathfrak{A}))$，就称$\mathfrak{A}$为自反代数。

为了将有限矩阵代数中上三角子代数的概念推广到无限维空间上去，Kadison和Singer在[26]中引入了被称为上三角（triangular）算子代数的非自伴代数。

定义 1.5. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子代数$\mathfrak{A}$被称为上三角代数如果，$\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A}$为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的极大交换子代数。此时，称$\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A}$为$\mathfrak{A}$的对角。

综合以上两种概念，Ringrose在[23]，[24]中研究了一类被称为套（nest）代数的非自伴代数。

定义 1.6. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子代数$\mathfrak{A}$被称为套代数，如果$\mathfrak{A}$为自反代数，并且$\mathrm{Lat}(\mathfrak{A})$为套，即子空间之间的包含关系诱导了$\mathrm{Lat}(\mathfrak{A})$上的全序。从以上条件就可推出$\mathrm{Lat}(\mathfrak{A})$的投影互相交换。

借鉴了三角代数，自反代数，von Neumann代数的想法，我们进一步推广上述概念，定义了一类新的非自伴代数——Kadison-Singer代数。其具体定义如下：

定义 1.7. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子代数$\mathfrak{A}$被称为Kadison-Singer（算子）代数（或KS-代数）如果$\mathfrak{A}$满足以下两个条件，

1. $\mathfrak{A}$是自反代数，
2. 如果$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的自反子代数$\mathfrak{B}$，包含$\mathfrak{A}$（$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$），并且$\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}^* = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^*$，那么$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$。

当KS-代数$\mathfrak{A}$的对角子代数（$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^*$）为因子时，我们称此类KS-代数为KS-因子，或Kadison-Singer因子。我们称$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的的投影格$\mathcal{L}$为Kadison-Singer格（或KS-格），如果$\mathcal{L}$是生成von Neumann代数$\mathcal{L}''$的最小自反格，换句话说也就是$\mathcal{L}$自反，并且$\mathrm{Alg}(\mathcal{L})$ 是Kadison-Singer代数。

显然套代数是KS-代数。由于套生成交换von Neumann代数，我们可将其视为“I型”KS-代数，而将一般的KS-代数视为量子化的套代数。KS-代数的极大性对应于其不变子空间格的极小性，也就是说其任何自反子格都不能生成对角代数的换位子。

以下引理可由KS-代数的定义直接导出。

引理 1.11. *如果$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子代数$\mathfrak{A}$为Kadison-Singer代数，令$\mathcal{M}$为$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*$在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的换位子。则格$Lat(\mathfrak{A})$属于$\mathcal{M}$, 并且生成von Neumann代数$\mathcal{M}$。*

证明. 由于$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*$为von Neumann代数，则$Lat(\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*) \subseteq \mathcal{M}$，所以$Lat(\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}$。令$\mathcal{N}$为$Lat(\mathfrak{A})$生成的von Neumann代数。由上则知$\mathcal{N}$为$\mathcal{M}$的子代数，由此推出$\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{N}'$。另外显然有$\mathcal{N}' \subseteq \mathrm{Alg}(Lat(\mathfrak{A})) = \mathfrak{A}$。并且因为$\mathcal{N}'$是自伴代数，$\mathcal{N}' \subseteq \mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^* = \mathcal{M}'$。则$\mathcal{N}' = \mathcal{M}'$，由此可知$\mathcal{N} = \mathcal{M}$。 ■

我们称KS-代数$\mathfrak{A} \subset (\mathcal{B}(\mathcal{H}))$为I，II，或III型因子，如果其对角子代数作为von Neumann代数为I，II，或III型因子。同样我们可将II型KS-因子进一步分为II_1型或II_∞型。并当$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*$作用在$\mathcal{H}$上为标准表示时（即在$\mathcal{H}$中存在$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*$的循环分离向量），我们称此类KS-代数为标准型，或标准KS-代数。

在以下章节中，我们将给出一些以II型或III型因子为对角的非平凡KS-代数的例子。在此之前我们首先证明在此条件下KS-代数确为非自伴代数。

定理 1.12. *如果$\mathfrak{A}$为以II型或III型von Neumann代数为对角的KS-代数，那么$\mathfrak{A}$是非自伴代数。*

证明. 假设$\mathfrak{A}$为自伴代数，则由定理条件可知$\mathfrak{A}'$亦为II型或III型von Neumann代数，所以存在$\mathfrak{A}'$的同构于$M_2(\mathbb{C})$的子代数$\mathcal{M}_2$。如果令

$$\mathcal{L} = \{P|P \in \mathcal{M}_2' \cap \mathcal{P}(\mathfrak{A}')\} \cup \{E_{11}, \frac{1}{2}\sum_{i,j} E_{ij}\},$$

此处E_{ij}为$\mathcal{M}_2$的矩阵单位，则容易验证$\mathcal{L}$生成$\mathfrak{A}'$，$\mathrm{Alg}(\mathcal{L})$为非自伴的自反代数，且包含$\mathfrak{A}$。类似前述引理可知$\mathrm{Alg}\mathcal{L} \cap \mathrm{Alg}\mathcal{L}^* = \mathfrak{A}$，这与$\mathfrak{A}$为KS-代数相矛盾。

■

事实上，类似于以上方法，容易证明除$\mathfrak{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathrm{Alg}(0, I)$的情况外，即使当对角为I型von Neumann代数时，任意非平凡的KS-代数都是非自伴代数。

如此我们可将标准KS-代数视为关于其对角von Neumann代数的极大上三角代数。

定义 1.8. 我们称两个Kadison-Singer代数$\mathfrak{A}_1$（$\subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$），$\mathfrak{A}_2$（$\subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$）同构，当且仅当存在从$\mathfrak{A}_1$ 到$\mathfrak{A}_2$的保范（代数）同构φ。特别的，如果φ 为从$\mathcal{H}_1$到$\mathcal{H}_2$的酉算子U所诱导，即对任意A属于$\mathfrak{A}_1$，$\varphi(A) = UAU^*$，我们称$\mathfrak{A}_1$与$\mathfrak{A}_2$酉等价。

易见上述定义中的保范条件保证了两个KS-代数间的同构诱导了相应对角子代数的*-同构。

定义 1.9. 我们称两个不变子空间格为空间（spatial）同构的，当且仅当格的同构诱导了其生成的von Neumann代数间的*-同构。

之所以要求格的同构要诱导其生成的von Neumann代数间的*-同构，是因为单纯的格之间的同构并不能保留太多的信息。例如，II_1型因子中由两个在迹态下取值为$\frac{1}{2}$的自由投影生成的格$\mathcal{L}_0$，在代数意义下（即保持并，交运算，及次序），与二维欧式空间上两个一维投影生成的格同构。以下我们称此类仅保持格结构的同构为格之间的代数同构。

第二章　超有限KS-代数及其格

2.1　超有限型KS-因子

在本节，我们将构造一类超有限型Kadison-Singer因子。为此，首先引进以下记号。

令$M_n(\mathbb{C})$（$n>1$）的无限（空间）张量积在范数闭包下生成的UHF C^*-代数为$\mathfrak{A}_n$（$=\overline{\otimes_1^\infty M_n(\mathbb{C})}$）。记$M_n(\mathbb{C})$在$\mathfrak{A}_n$中的第k个拷贝为$M_n^{(k)}(\mathbb{C})$，及$E_{ij}^{(k)}$，$i$，$j=1$，…，$n$，为$M_n^{(k)}(\mathbb{C})$的标准矩阵单位（$k=1$，$2\ldots$）。应用以上记号，可将$\mathfrak{A}_n$写为$\overline{M_n^{(1)}\otimes M_n^{(2)}\otimes\cdots}$。令$\mathcal{N}_m=M_n^{(1)}(\mathbb{C})\otimes M_n^{(2)}(\mathbb{C})\otimes\cdots\otimes M_n^{(m)}(\mathbb{C})$（$\cong M_{n^m}(\mathbb{C})$），则$\mathfrak{A}_n=\overline{\cup_{m=1}^\infty\mathcal{N}_m}$。以下我们将对m归纳定义属于$\mathcal{N}_m$的投影集合。

当$m=1$时，令$P_{1j}=\sum_{i=1}^j E_{ii}^{(1)}$，$j=1$，…，$n-1$，$P_{1n}=\frac{1}{n}\sum_{s,t=1}^n E_{st}^{(1)}$。现假设对$k\le m-1$，$j=1$，…，$n$，我们已经定义了$P_{kj}$（$\in\mathcal{N}_k$），则令

$$P_{mj}=P_{m-1,n-1}+(I-P_{m-1,n-1})\sum_{i=1}^{j}E_{ii}^{(m)},\qquad j=1,\ldots,n-1,\tag{2.1}$$

$$P_{mn}=P_{m-1,n-1}+(I-P_{m-1,n-1})\left(\frac{1}{n}\sum_{s,t=1}^{n}E_{st}^{(m)}\right)。\tag{2.2}$$

将由$\{P_{kj}:1\le k\le m,1\le j\le n\}$生成的格记为$\mathcal{L}_m$，并令$\mathcal{L}_\infty=\cup_m\mathcal{L}_m$，即$\mathcal{L}_\infty$为$\{P_{kj}:k\ge1,1\le j\le n\}$生成的格。

若ρ_n为$M_n(\mathbb{C})$上的忠实态，我们可将其扩展成$\mathfrak{A}_n$上的乘积态ρ，即$\rho=\rho_n\otimes\rho_n\otimes\cdots$。现对（$\mathfrak{A}_n$，$\rho$）做GNS构造，记诱导出的Hilbert空间为$\mathcal{H}$。由[28]中的结果，$\mathfrak{A}_n$在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的弱算子闭包为超有限型因子，记为$\mathcal{R}$。特别的，当$\rho_n$为迹态时，$\mathcal{R}$为$II_1$型因子。则$\mathcal{L}_m$和$\mathcal{L}_\infty$即为$\mathcal{R}$中的投影格。

在叙述本节主要结果前，我们先证明以下简单事实。

引理 2.1. $\mathcal{L}_m$为有限维*von Neumann*代数$\mathcal{N}_m$的生成元，即$\mathcal{L}_m''=\mathcal{N}_m$。

证明. 用数学归纳法证明此引理。当$m=1$时，易见$E_{ii}^{(1)}\in\mathcal{L}_1''$，则$nE_{ii}^{(1)}P_{1n}E_{jj}^{(1)}=E_{ij}^{(1)}\in L_1''$。即当$m=1$时，引理成立。

现假设对于$m\leq k$，$\mathcal{L}_m''=\mathcal{N}_m$成立，因$\mathcal{L}_k\subset L_{k+1}$，所以$\mathcal{N}_k\subset\mathcal{L}_{k+1}''$。由此推出$\sum_{i=1}^{j}E_{ii}^{(k+1)}$（$j=1$，…，$n-1$）和$\sum_{s,t=1}^{n}E_{st}^{(k+1)}$属于$\mathcal{L}_{k+1}''$，则类似$m=1$的情况，可以证明$\mathcal{L}_{k+1}''=\mathcal{N}_{k+1}$。 ∎

以下定理为本章的主要结果。

定理 2.2. *应用以上记号，若$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子代数$\mathfrak{A}$满足以下条件，*

1. $\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)\subset\mathfrak{A}$，
2. $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*=\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)\cap\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)^*$，

则$\mathfrak{A}=\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。

下述为以上定理的直接推论。

推论 2.3. $\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$*为以超有限因子$\mathcal{R}'$为对角的Kadsion-Singer因子。*

要证明上述结论，我们需要以下结果。

引理 2.4. *由以上定义，$\mathcal{L}_1\subset\mathcal{N}_1$，$E_{ij}^{(1)}$，$i$，$j=1$，…，$n$为$\mathcal{N}_1$的矩阵单位。我们有*

$$\begin{aligned}\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)=\{T\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):\quad & E_{ii}^{(1)}TE_{jj}^{(1)}=0,\qquad 1\leq j<i\leq n;\\ & \sum_{j=1}^{n}E_{11}^{(1)}TE_{j1}^{(1)}=\sum_{j=2}^{n}E_{12}^{(1)}TE_{j1}^{(1)}=\cdots=E_{1n}^{(1)}TE_{n1}^{(1)}\}.\end{aligned}$$

证明. 令T为$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$中的某个算子。首先，由$P_{1j}=\sum_{i=1}^{j}E_{ii}^{(1)}\in\mathcal{L}_1$（$j=1$，…，$n-1$）属于$\mathcal{L}_1$的事实，可推出$E_{ii}^{(1)}TE_{jj}^{(1)}=0$，$1\leq j<i\leq n$。其次由于$TP_{1n}^{(1)}=P_{1n}^{(1)}TP_{1n}^{(1)}$，可知

$$nT\sum_{i,j=1}^{n}E_{ij}^{(1)}=(\sum_{i,j=1}^{n}E_{ij}^{(1)})T(\sum_{i,j=1}^{n}E_{ij}^{(1)})。$$

在上式左侧乘以$E_{1l}^{(1)}$，同时于右侧乘以$E_{11}^{(1)}$，则得到以下关系，

$$nE_{1l}^{(1)}T\sum_{i=1}^{n}E_{i1}^{(1)}=n\sum_{i=1}^{n}E_{1l}^{(1)}TE_{i1}^{(1)}=(\sum_{j=1}^{n}E_{1j}^{(1)})T(\sum_{i=1}^{n}E_{i1}^{(1)})=\sum_{i,j=1}^{n}E_{1i}^{(1)}TE_{j1}^{(1)}。$$

注意到上述关系式的右侧与l无关，令$l=1$，…，n，并结合$E_{ii}^{(1)}TE_{jj}^{(1)}=0$（$1\leq j<i\leq n$）的事实，就得到了命题中的关系

$$\sum_{i=1}^{n}E_{11}^{(1)}TE_{i1}^{(1)}=\sum_{i=2}^{n}E_{12}^{(1)}TE_{i1}^{(1)}=\cdots=E_{1n}^{(1)}TE_{n1}^{(1)}。$$

反之容易验证，若算子T满足命题中的条件，则T属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$。 ∎

在$\mathcal{B}(\mathcal{H})\cong\mathcal{B}(E_{11}^{(1)}\mathcal{H})\otimes M_n^{(1)}$的意义下，我们可将$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的元素表示为矩阵形式。特别的，$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$中的算子为相对于套$\{P_{1j}\}_{j=1}^{n-1}$的上三角元。即$T\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$，则有

$$T=\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n}\\ 0 & T_{22} & \cdots & T_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & T_{nn}\end{pmatrix}$$

不仅如此，易见由上述引理，我们可以任意选择严格上三角部分，即我们可以任意选择$\{T_{ij}\}_{i<j}$，并应用以下等式确定T的对角部分，

$$\sum_{i=1}^{n}T_{1i}=\sum_{i=2}^{n}T_{2i}=\cdots=T_{nn},$$

进而确保T属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$。

引理 2.5. *对任意属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$的算子$T$，存在$T_1$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)\cap\mathcal{L}_1'$，$T_2$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$（$\subset\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$）满足$T=T_1+T_2$。特别的，当$E_{nn}^{(1)}TE_{nn}^{(1)}=0$时，$T=T_2\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。*

证明. 假设$T\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$，令

$$T_1=\sum_{i=1}^{n}E_{in}^{(1)}TE_{ni}^{(1)},\qquad T_2=T-T_1。\tag{2.3}$$

易见$E_{ii}^{(1)}T_1E_{jj}^{(1)}=0$（$i\neq j$），并且对任意$l,k$有

$$E_{lk}^{(1)}T_1=E_{lk}^{(1)}\sum_{i=1}^{n}E_{in}^{(1)}TE_{ni}^{(1)}=E_{ln}^{(1)}TE_{nk}^{(1)}=T_1E_{lk}^{(1)}。$$

此既说明$T_1\in\mathcal{L}_1'\ (=\mathcal{N}_1')$。

由以上显然有$T_2\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$。则对于$k=1,\ldots,n$，我们有$T_2P_{1k}=P_{1k}T_2P_{1k}$。下面我们需要说明对于$j\geq 2$及$k=1,\ldots,n$，等式$T_2P_{jk}=P_{jk}T_2P_{jk}$成立。从$P_{jk}$的定义可以看出，对于$j\geq 2$，$I-P_{jk}\leq E_{nn}^{(1)}$。则由$T_2$的定义可知，

$$E_{nn}^{(1)}T_2=E_{nn}^{(1)}\sum_{1\leq l\leq k\leq n}E_{ll}^{(1)}T_2E_{kk}^{(1)}=E_{nn}^{(1)}T_2E_{nn}^{(1)}=E_{nn}^{(1)}(T-T_1)E_{nn}^{(1)}=0。$$

以上表明$0=(I-P_{jk})T_2=(I-P_{jk})T_2P_{jk}$，即$T_2\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。 ∎

完全类似以上证明的第二部分，我们得到以下引理。在后文中我们将不加指出的应用此结论。

引理 2.6. 对于任意$m\geq 1$，如果$T\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$，并且$(I-P_{m,n-1})T=0$，则$T\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。

进一步注意到，$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$和$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_{m+1})$中算子的区别仅仅存在于限制在$I-P_{m,n-1}\ (=E_{nn}^{(1)}\otimes\cdots\otimes E_{nn}^{(m)})$上的部分。严格说来，我们有如下引理。

引理 2.7. *若T属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$，则$T$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_{m+1})$当且仅当对于$j=1,\ldots,n$，投影$(I-P_{m,n-1})P_{m+1,j}(I-P_{m,n-1})$对应的Hilbert子空间为$(I-P_{m,n-1})T(I-P_{m,n-1})$的不变子空间。*

证明. 因为T属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$，则$T$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_{m+1})$当且仅当对于$j=1,\ldots,n$，$(I-P_{m+1,j})TP_{m+1,j}=0$。从定义可知$P_{m+1,j}=P_{m,n-1}+(I-P_{m,n-1})Q_j$，此处$Q_j$为$\sum_{i=1}^{j}E_{ii}^{(m+1)}$，当$j=1,\ldots,n-1$，$Q_n=\frac{1}{n}\sum_{s,t=1}^{n}E_{st}^{(m+1)}$。则有

$$\begin{aligned}0&=(I-P_{m+1,j})TP_{m+1,j}\\&=(I-P_{m,n-1})(I-Q_j)T[P_{m,n-1}+(I-P_{m,n-1})Q_j]\\&=(I-Q_j)(I-P_{m,n-1})T(I-P_{m,n-1})Q_j。\end{aligned}$$

以上即说明$(I-P_{m,n-1})P_{m+1,j}(I-P_{m,n-1})$对应的Hilber子空间为$(I-P_{m,n-1})T(I-P_{m,n-1})$的不变子空间。 ∎

由以上结论，应用数学归纳法，不难证明如下事实，此处我们仅给出证明概要。

引理 2.8. *对任意T属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$，存在$T_1$，...，$T_{m+1}$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$，满足$T = T_1+\cdots+T_{m+1}$，且对于$i=1$，...，$m$有$T_i \in \mathcal{N}'_{i-1}\cap\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$，$(I-P_{i,n-1})T_i = 0$（此处令$\mathcal{N}_0 = \mathbf{C}I$），而$T_{m+1}\in\mathcal{N}'_m\cap\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$。*

证明. 对于$m=1$的情况，我们已在引理2.5中证明。下面假设对$m\le k$命题成立。

若T属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_{k+1})$，由于$\mathcal{L}_k\subset\mathcal{L}_{k+1}$，$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_{k+1})\subset\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_k)$，则由假设我们有$T=\sum_{i=1}^{k+1}T_i$，其中$T_{k+1}\in\mathcal{N}'_k\cap Alg\mathcal{L}_{k+1}$。结合引理2.7，完全类似于2.5的证明，可将$T_{k+1}$进一步分解为$\widetilde{T_{k+1}}$与$T_{k+2}$之和，此处$\widetilde{T_{k+1}}\in\mathcal{N}'_k\cap\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$，$T_{k+2}\in\mathcal{N}'_{k+1}\cap\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_{k+1})$。则由数学归纳，命题得证。 ∎

易见，对于任意$T\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$，由上述引理，$T=(\sum_{i=1}^m T_i)+T_{m+1}$，并且因为$T_i\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$（$i=1$，...，$m$），所以$\sum_{i=1}^m T_i$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$，而$T_{m+1}\in\mathcal{N}'_m\cap\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$。我们将此事实叙述为如下推论。

推论 2.9. *若$T\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$，存在$T_1$，$T_2$使得$T=T_1+T_2$，并且$T_1\in\mathcal{N}'_m$，$T_2\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。*

以下命题为证明定理1.4的关键步骤。

引理 2.10. *如果$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的算子T与$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$生成的代数$\mathfrak{A}$满足$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*=\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)\cap\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)^*=\mathcal{R}'$，则$T\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$。*

证明. 对于给定的满足条件的算子T，可选取$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$中的算子$T_0$（由引理2.5前的说明，及引理2.6），使得相对于$\mathcal{N}_1$中的矩阵单位$E_{ij}^{(1)}$，$T-T_0$为下三角算子，即对$i<j$，$E_{ii}^{(1)}(T-T_0)E_{jj}^{(1)}=0$。则不失一般性，我们可以假设$T$本身即为下三角算子。

现我们首先说明T为对角算子。如果T的某个严格下三角部分非零，令i_0为使得$E_{i_0i_0}^{(1)}TE_{jj}^{(1)}\neq 0$（对于某$j<i_0$）成立的最大整数，并记其中最大的$j$为$j_0$。则当$i>j$并且$i>i_0$，或$i=i_0>j>j_0$时，我们有$E_{ii}^{(1)}TE_{jj}^{(1)}=0$。容易验

证$E^{(1)}_{j_0,i_0-1}-E^{(1)}_{j_0i_0}\in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$（应用引理2.4，2.6）。则$T(E^{(1)}_{j_0,i_0-1}-E^{(1)}_{j_0i_0})\in\mathfrak{A}$。令$T_1=T(E^{(1)}_{j_0,i_0-1}-E^{(1)}_{j_0i_0})$。则

$$\begin{aligned}T_1&=\sum_{n\geq k\geq l\geq 1}E^{(1)}_{kk}TE^{(1)}_{ll}(E^{(1)}_{j_0,i_0-1}-E^{(1)}_{j_0i_0})\\&=\sum_{i_0\geq k\geq j_0}E^{(1)}_{kk}T(E^{(1)}_{j_0,i_0-1}-E^{(1)}_{j_0i_0})。\end{aligned}$$

若令

$$\begin{aligned}T_2&=E^{(1)}_{i_0i_0}T(E^{(1)}_{j_0,i_0-1}-E^{(1)}_{j_0i_0})\\T_3&=\sum_{i_0>k\geq j_0}E^{(1)}_{kk}T(E^{(1)}_{j_0,i_0-1}-E^{(1)}_{j_0i_0})\end{aligned}$$

则$T_1=T_2+T_3$，同样由引理2.4，2.6，可知$T_3\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。此即表明$T_2\in\mathfrak{A}$。

令$E^{(1)}_{i_0i_0}TE^{(1)}_{j_0i_0}=HV$为$E^{(1)}_{i_0i_0}TE^{(1)}_{j_0i_0}$在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的极分解，其中$H$为正算子，$V$为部分等距算子。由假设$E^{(1)}_{i_0i_0}TE^{(1)}_{j_0j_0}\neq 0$，即知$H\neq 0$，$E^{(1)}_{i_0i_0}H=HE^{(1)}_{i_0i_0}=H$，并且$E^{(1)}_{i_0i_0}V=VE^{(1)}_{i_0i_0}=V$。则$T_2=HVE^{(1)}_{i_0,i_0-1}-HV$。定义$T_4$，$T_5$如下，

$$\begin{aligned}T_4&=-E^{(1)}_{i_0-1,i_0}V^*E^{(1)}_{i_0,i_0-1}+E^{(1)}_{i_0-1,i_0}V^*E^{(1)}_{i_0i_0},\\T_5&=E^{(1)}_{i_0-1,i_0}HE^{(1)}_{i_0,i_0-1}-E^{(1)}_{i_0-1,i_0}HE^{(1)}_{i_0i_0}。\end{aligned}$$

注意到T_4，T_5属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。如果使

$$\begin{aligned}T_6=T_2T_4+T_5&=(HVE^{(1)}_{i_0,i_0-1}-HV)(-E^{(1)}_{i_0-1,i_0}V^*E^{(1)}_{i_0,i_0-1}+E^{(1)}_{i_0-1,i_0}V^*E^{(1)}_{i_0i_0})\\&\quad+E^{(1)}_{i_0-1,i_0}HE^{(1)}_{i_0,i_0-1}-E^{(1)}_{i_0-1,i_0}HE^{(1)}_{i_0i_0}\\&=-HE^{(1)}_{i_0,i_0-1}+HE^{(1)}_{i_0i_0}+E^{(1)}_{i_0-1,i_0}HE^{(1)}_{i_0,i_0-1}-E^{(1)}_{i_0-1,i_0}HE^{(1)}_{i_0i_0}\\&=-HE^{(1)}_{i_0,i_0-1}+H+E^{(1)}_{i_0-1,i_0}HE^{(1)}_{i_0,i_0-1}-E^{(1)}_{i_0-1,i_0}H,\end{aligned}$$

就有$T_6\in\mathfrak{A}$，并且$T_6^*=T_6$。但显然T_6并非上三角算子，于是有$T_6\notin\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。这就说明$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}^*\neq\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)\cap\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)^*$，与已知矛盾，则$T$为对角算子。于是不妨假设$T=\sum_{j=1}^n E^{(1)}_{jj}TE^{(1)}_{jj}$，下面只需说明$E^{(1)}_{11}TE^{(1)}_{11}=E^{(1)}_{1j}TE^{(1)}_{j1}$（$j=1,\ldots,n$），则命题得证。

若不然，即存在某个i使得$E_{11}^{(1)}TE_{11}^{(1)} \neq E_{1i}^{(1)}TE_{i1}^{(1)}$。令

$$T_7 = (E_{11}^{(1)} - E_{1i}^{(1)})T = E_{11}^{(1)}TE_{11}^{(1)} - E_{1i}^{(1)}TE_{ii}^{(1)}。$$

由于$E_{11}^{(1)} - E_{1i}^{(1)}$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$，可知$T_7 \in \mathfrak{A}$。并再次应用引理2.4，2.6 可知$T_8 = -E_{1i}^{(1)}TE_{i1}^{(1)} + E_{1i}^{(1)}TE_{ii}^{(1)}$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。即有

$$0 \neq T_7 + T_8 = E_{11}^{(1)}TE_{11}^{(1)} - E_{1i}^{(1)}TE_{i1}^{(1)} \in \mathfrak{A}。$$

同样对$T_7 + T_8$做极分解得到$T_7 + T_8 = V'H'$，此处V'为部分等距算子。易知$V'^* - V'^*E_{12}^{(1)} \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。于是得到

$$(V'^* - V'^*E_{12}^{(1)})(T_7 + T_8) = H' \in \mathfrak{A}。$$

H'是自伴算子，但显然H'不属于$\mathcal{N}_1'$（$\supseteq \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty) \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)^*$）。这表明$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^* \neq \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty) \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)^*$，从而与已知矛盾。继而我们有$E_{11}^{(1)}TE_{11}^{(1)} = \cdots = E_{1n}^{(1)}TE_{n1}^{(1)}$，进而$T \in \mathcal{L}_1' \subseteq \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$。 ■

基于以上事实，简单的数学归纳即可给出定理2.2的证明。我们简述证明如下。

定理2.2的证明. 不失一般性，可以假设$\mathfrak{A}$由T和$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$生成。从以上引理得到$T \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$。如果$T$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$，但不属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_{m+1})$ 。由推论2.9，知$T = S + T'$，其中$S \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$，$T' \in \mathcal{N}_m' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m)$。现如果我们只考虑$\mathcal{N}_m'$中的算子，及矩阵单位$E_{ij}^{(m+1)}$（$i$，$j = 1$，...，$n$），则完全类似引理2.10证明中的计算，可以证明$T' \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_{m+1})$。此即表明$T \in \cap_{m=1}^{\infty}\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_m) = \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。 ■

注意到上述定理的证明并不依赖于$\mathfrak{A}$再任何拓扑下的完备性。此既说明$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$ 在代数的意义下极大。在下一节，我们将讨论Kadsion-Singer格$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$的性质。

2.2 Kadsion-Singer格$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$

判断任意给定的不变子空间格是否为Kadsion-Singer格一般来说并不容易的。现只有针对于套，或一些具有极小生成性的有限分配格（将在下一章中给出一些例子）的少量结果。在本节中，我们将证明上节中定义的格$\mathcal{L}_\infty$的强算

子闭包为Kadsion-Singer格。并对当ρ 为迹态的情况完全描述$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$中投影在迹态下的取值情况。从现在起，当$\rho$为$\mathfrak{A}_n$上迹态（由$M_n(\mathbb{C})$上唯一的迹态诱导）时，我们改记$\rho$为$\tau$。令$\mathcal{R}$为$\mathcal{L}_\infty$（或$\mathfrak{A}_n$）生成的超有限型因子，则$\mathcal{R}$的换位子$\mathcal{R}'$就是$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$的对角代数。并且$\mathfrak{A}_n$上的态$\rho$自然扩充成为$\mathcal{R}$上的态，我们依然记为$\rho$（当$\rho$为迹态时，改记为$\tau$）。

下述为本节的主要结果。

定理 2.11. 记$\mathcal{L}^{(n)}$为$\mathcal{L}_\infty$在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的强算子闭包，其中*Hilbert*空间$\mathcal{H}$由$(\mathfrak{A}_n,\rho)$的*GNS*构造给出。则$\mathcal{L}^{(n)}=\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$。

为了更好的理解$\mathcal{L}^{(n)}$的结构，我们首先研究格$\mathcal{L}_m$的性质。由$\mathcal{L}_1$的生成元P_{1j},$j=1,\ldots,n$的定义，可知$\mathcal{L}_1$包含一个$\mathcal{N}_1(\cong M_n(\mathbf{C}))$中的套$\{0,P_{11},\ldots,P_{1,n-1},I\}$，及一个极小投影$P_{1n}$。易见$P_{1n}\wedge P_{1j}=0$（$1\le j\le n-1$），且$P_{1j}$与$P_{1n}$的并给出$\mathcal{N}_1$中的另一个套$\{0,P_{1n},P_{1n}\vee P_{11},\ldots,P_{1n}\vee P_{1,n-1}=I\}$。若相对于$\mathcal{N}_1$中的矩阵单位$E_{ij}^{(1)}$，$i$，$j=1$，$\ldots$，$n$，将以上套中的投影表示为矩阵形式，则对于$0\le k\le n-1$（此处令$P_{1n}\vee P_{10}=P_{1n}$）有

$$P_{1n}\vee P_{1k}=\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix}1&&\\&\ddots&\\&&1\end{pmatrix}}^{k} & \\ & \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{n-k}&\cdots&\frac{1}{n-k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{1}{n-k}&\cdots&\frac{1}{n-k}\end{pmatrix}}_{n-k}\end{pmatrix}。$$

可验证$\mathcal{L}_1$即为这两个套组成，并且对任意$1\le k\le n-1$，存在且仅存在两个$\mathcal{L}_1$中的投影其迹值为$\frac{k}{n}$。以下我们给出$\mathcal{L}_1$的Hasse图，

$$\begin{tikzcd}
 & P_{11} \arrow[r] \arrow[ddr] & P_{12} \arrow[r] \arrow[ddr] & \cdots \arrow[r] & P_{1n-2} \arrow[r] \arrow[ddr] & P_{1n-1} \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & & & I \\
 & P_{1n} \arrow[r] & P_{1n}\vee P_{11} \arrow[r] & P_{1n}\vee P_{12} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{1n}\vee P_{1n-2} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

简单的矩阵计算可以给出$\mathcal{L}_2$中的投影，粗略来说，$\mathcal{L}_2$中的投影P，如果不属于$\mathcal{L}_1$，则或$0 < P < P_{1n}$，$P_{1n} \vee P_{1n-1} < P < I$，或存在$0 \le k \le n-2$，使得$P_{1n} \vee P_{1k} < P < P_{1n} \vee P_{1k+1}$。并且0和$P_{1n}$，$P_{1n} \vee P_{1n-1}$和$I$，或$P_{1n} \vee P_{1k}$与$P_{1n} \vee P_{1k+1}$间的投影都形成与$\mathcal{L}_1$中投影同样的双链结构。为了准确描述$\mathcal{L}^{(n)}$中的投影，我们引进如下记号，对于$k = 1, 2, \ldots$，令

$$E_i^{(k)} = \sum_{l=1}^{i} E_{ll}^{(k)} \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$F_i^{(k)} = \frac{1}{i} \sum_{n \ge l, m > n-i} E_{lm}^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, n。$$

因为当$k \neq k'$时，$E_{ij}^{(k)}$与$E_{i'j'}^{(k')}$交换，所以$E_i^{(k)}$ and $F_i^{(k)}$属于$\mathcal{N}_{k-1}' \cap \mathcal{N}_k$ $(\mathcal{N}_0 = \mathbf{C}I)$。并且当$j \le n-i$时，有$E_i^{(k)} F_j^{(k)} = 0$。进一步，对于乘积态$\rho$，我们假设

$$\rho(E_i^{(k)}) = x_i \quad (x_n = 1); \quad \rho(F_i^{(k)}) = y_i，$$

并记$c = max\{y_1, \ldots, y_n\}$（由于$\rho$忠实，$0 < c < 1$）。注意到，对于迹态有$\tau(E_i^{(k)}) = \frac{i}{n}$, $\tau(F_i^{(k)}) = \frac{1}{n}$。

应用上述记号，我们将以上描述严格叙述为以下引理。

引理 2.12. *若P属于$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$，并且$P \neq 0, I$。则存在某整数$i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$，使得$P = E_i^{(1)} + F_{n-i}^{(1)} Q$，其中$Q$为$\mathcal{N}_1'$中的投影，且$Q \in Lat(\mathcal{N}_1' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$。反之，如果投影$P$有如上形式，则$P \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$。*

证明. 首先我们证明当$P = E_i^{(1)} + F_{n-i}^{(1)} Q$时，此处$Q$的含义与引理中相同，$P \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$。

对任意$T \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$，由引理2.5，$T = T_1 + T_2$，其中$T_1 \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$，$(I - P_{1,n-1}) T_1 = 0$，$T_2 \in \mathcal{N}_1' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。因$E_i^{(1)} = P_{1i} \in \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_\infty$，对于$j \in \{1, 2\}$，我们有$(I - E_i^{(1)}) T_j E_i^{(1)} = 0$。并且可以直接验证$F_{n-i}^{(1)}(I - E_i^{(1)}) = F_{n-i}^{(1)} = (I - E_i^{(1)}) F_{n-i}^{(1)}$。则$F_{n-i}^{(1)} T E_i^{(1)} = 0$。由于$Q$ 与$\mathcal{N}_1$交换，有

$$\begin{aligned}(I-P)TP &= (I - E_i^{(1)} - F_{n-i}^{(1)} Q) T (E_i^{(1)} + F_{n-i}^{(1)} Q) \\ &= (I - E_i^{(1)}) T F_{n-i}^{(1)} Q - F_{n-i}^{(1)} Q T E_i^{(1)} - F_{n-i}^{(1)} Q T F_{n-i}^{(1)} Q \\ &= (I - E_i^{(1)}) T F_{n-i}^{(1)} Q - Q F_{n-i}^{(1)} (I - E_i^{(1)}) T F_{n-i}^{(1)} Q。\end{aligned}$$

若以T_1或T_2替换T，上述等式依然成立。由假设，$Q \in \mathrm{Lat}(\mathcal{N}_1' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$，$E_i^{(1)}F_{n-i}^{(1)} \in \mathcal{N}_1$，及$T_2 \in \mathcal{N}_1' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$，我们有

$$(I-P)T_2P = ((I-E_i^{(1)})F_{n-i}^{(1)} - QF_{n-i}^{(1)}(I-E_i^{(1)}))T_2Q = F_{n-1}^{(1)}(I-Q)T_2Q = 0。$$

下面只需说明$(I-E_i^{(1)})T_1F_{n-i}^{(1)} = 0$，则有$(I-P)T_1P = 0$。注意到

$$(n-i)(I-E_i^{(1)})T_1F_{n-i}^{(1)} = (\sum_{j=i+1}^{n} E_{jj}^{(1)})T_1(\sum_{l,m=i+1}^{n} E_{lm}^{(1)}) = \sum_{j,m=i+1}^{n}\sum_{l=j}^{n} E_{jj}^{(1)}T_1E_{lm}^{(1)}。$$

由$(I-P_{n-1}^{(1)})T_1 = E_{nn}^{(1)}T_1 = 0$及引理2.4，可知$\sum_{l=j}^{n} E_{jj}^{(1)}T_1E_{lm}^{(1)} = 0$。所以$(n-i)(I-E_i^{(1)})T_1F_{n-i}^{(1)} = 0$。于是$(I-P)TP = 0$，这就说明$P \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$。

现假设$P \in \mathrm{LatAlg}(\mathcal{L}_\infty))$，$P \neq 0, I$。令$i_0$, $1 \le i_0 \le n$为使$E_{i_0i_0}^{(1)}PE_{i_0i_0}^{(1)} \neq E_{i_0i_0}^{(1)}$成立的最小整数。则对与$1 \le i \le i_0-1$有$E_{ii}^{(1)}PE_{ii}^{(1)} = E_{ii}^{(1)}$，并且$P = E_{i_0-1}^{(1)} + P_1$，此处$P_1$为对$i \le i_0-1$满足$E_i^{(1)}P_1 = 0$的投影。

首先假设$i_0 \le n-1$。对任意$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$和$i_1 \ge i_0+1$，令$A_{i_1} = E_{i_0i_0}^{(1)}A(E_{i_0i_0}^{(1)} - E_{i_0i_1}^{(1)})$。则$A_{i_1} \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$。由$P \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$有

$$0 = (I-E_{i_0-1}^{(1)}-P_1)A_{i_1}(E_{i_0-1}^{(1)}+P_1) = (I-P_1)E_{i_0i_0}^{(1)}A(E_{i_0i_0}^{(1)}-E_{i_0i_1}^{(1)})P_1。$$

因$E_{i_0i_0}^{(1)}(I-P_1)E_{i_0i_0}^{(1)} \neq 0$，上述等式说明对于任意$i_1 \ge i_0$，$E_{i_0i_0}^{(1)}P_1 = E_{i_0i_1}^{(1)}P_1$。在上式两侧右乘$P_1E_{i_0i_0}^{(1)} = P_1E_{ji_0}^{(1)}$（$P_1E_{i_0i_0}^{(1)} = (E_{i_0i_0}^{(1)}P_1)^* = (E_{i_0j}^{(1)}P_1)^* = P_1E_{ji_0}^{(1)}$），就得到$E_{i_0i_0}^{(1)}P_1E_{i_0i_0}^{(1)} = E_{i_0i_1}^{(1)}P_1E_{ji_0}^{(1)}$（$i_1, j \ge i_0$）。即表明存在$\mathcal{N}_1'$中的投影$Q$，使得$P_1 = F_{n-i_0+1}^{(1)}Q$。

当$i_0 = n$时，自然的P_1可以写成$F_1^{(1)}Q$，其中$Q \in \mathcal{N}_1'$。因$P \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$，由引理2.5，容易看出$Q \in \mathrm{Lat}(\mathcal{N}_1' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$。 ■

应用数学归纳法重复应用以上证明的方法，我们得到以下推论。

推论 2.13. 对任意$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$中的投影$P$，存在$Q \in \mathcal{N}_k' \cap \mathrm{Lat}(\mathcal{N}_k' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$，及整数$a_k$使得

$$P = E_{a_1}^{(1)} + F_{n-a_1}^{(1)}E_{a_2}^{(2)} + \cdots + (\prod_{i=1}^{k-1} F_{n-a_i}^{(i)})E_{a_k}^{(k)} + (\prod_{i=1}^{k} F_{n-a_i}^{(i)})Q, \tag{2.4}$$

其中$0 \le a_i \le n-1$。并且当$Q=0$或I时，$P \in \mathcal{L}_\infty$。若定义$x_0=0$，我们有

$$\rho(P)=x_{a_1}+y_{n-a_1}x_{a_2}+\cdots+(\prod_{i=1}^{k-1}y_{n-a_i})x_{a_k}+(\prod_{i=1}^{k}y_{n-a_i})\rho(Q)。$$

特别的，当ρ为迹态时，$\tau(P)=\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i}+\frac{\tau(Q)}{n^k}\in\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i},\ \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{n^i}+\frac{1}{n^k}\right]\subseteq$ $[0,1]$。

有了上述对$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$中投影的刻画，我们开始证明定理2.11。

定理2.11的证明. 首先注意到此处$\mathcal{H}$为对（$\mathfrak{A}_n$，ρ）做GNS构造导出，记I在$\mathcal{H}$中对应的单位向量为ξ。则对于任意$A\in\mathfrak{A}_n$，$\rho(A)=<T\xi,\xi>$，并且常规方法可以证明ξ为$\mathcal{R}$（$\mathfrak{A}_n$的强算子闭包）的循环分离向量。以下我们依然记$\mathcal{R}$上的向量态$A\to<A\xi,\xi>$为ρ。

则要证明$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$为$\mathcal{L}_\infty$在$(\mathcal{B}(\mathcal{H}))_1$（$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的单位球）中的强算子闭包，只需说明对任意$P\in\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$，$\varepsilon>0$，存在$\mathcal{L}_\infty$中的投影$P_\varepsilon$，使得$\|(P_\varepsilon-P)\xi\|\le\varepsilon$。若$P\notin\mathcal{L}_\infty$，令$k\in\mathbb{N}$使得$c^{\frac{k}{2}}<\varepsilon$（$c=max\{y_1,\ldots,y_n\}$），则由推论2.13

$$P=E_{a_1}^{(1)}+F_{n-a_1}^{(1)}E_{a_2}^{(2)}+\cdots+(\prod_{i=1}^{k-1}F_{n-a_i}^{(i)})E_{a_k}^{(k)}+(\prod_{i=1}^{k}F_{n-a_i}^{(i)})Q,$$

可令

$$P_\varepsilon=E_{a_1}^{(1)}+F_{n-a_1}^{(1)}E_{a_2}^{(2)}+\cdots+(\prod_{i=1}^{k-1}F_{n-a_i}^{(i)})E_{a_k}^{(k)}\in\mathcal{L}_\infty,$$

即可验证

$$\begin{aligned}\|(P_\varepsilon-P)\xi\|^2&=<(\prod_{i=1}^{k}F_{n-a_i}^{(i)})Q\xi,\xi>=\rho((\prod_{i=1}^{k}F_{n-a_i}^{(i)})Q)\\&=(\prod_{i=1}^{k}y_{n-a_i})\rho(Q)<c^k\text{（最后一个等式由乘积态的性质得到），}\end{aligned}$$

这就说明$\|(P_\varepsilon-P)\xi\|\le\varepsilon$。 ■

对于当ρ为迹态的情况，我们可以完全刻画$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$中投影在迹态下的取值情况。我们将结果叙述为以下定理。

定理 2.14. *若ρ为迹态，记$\mathcal{L}^{(n)}$为$\mathcal{L}_\infty$在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的强算子闭包，其中Hilbert空间$\mathcal{H}$由$(\mathfrak{A}_n,\tau)$的GNS构造给出。则$\mathcal{L}^{(n)} = \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$。并且对于$r \in (0,1)$，若存在$a$，$l$属于$\mathbf{N}$使得$r = \frac{a}{n^l}$，那么$\mathcal{L}^{(n)}$中只存在两个投影其迹值为$r$；除此以外则只有一个投影其迹取值为$r$。*

证明. 只需证明关于迹值的部分。事实上由推论2.13，可以看出对于$r = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{n^i}$，其中$0 \le a_i \le n-1$，并且$a_k \neq 0$，只有当

$$P = \sum_{j=1}^{k}(\prod_{i=1}^{j-1} F^{(i)}_{n-a_i})E^{(j)}_{a_j}, \qquad (\text{let } \prod_{i=1}^{0} F^{(i)}_{n-a_i} = I) \quad \text{或}$$

$$P = \sum_{j=1}^{k-1}(\prod_{i=1}^{j-1} F^{(i)}_{n-a_i})E^{(j)}_{a_j} + (\prod_{i=1}^{k-1} F^{(i)}_{n-a_i})E^{(k)}_{a_k-1} + (\prod_{i=1}^{k-1} F^{(i)}_{n-a_i})F^{(k)}_{n-a_k+1}$$

时有$\tau(P) = \sum_{i=1}^k \frac{a_i}{n^i}$，注意到若将$r$表示为$\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{n^i}$，则上述第一个投影对应于且等式（2.4）中$Q = 0$的情况，而第二个投影对应于将$r$表示为$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{n^i} + \frac{a_k-1}{n^k} + \frac{1}{n^k}$，$Q = I$的情况。由于对任意$r = \frac{a}{n^l}$（$0 < a < n^l$），我们都可以将其写成$\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{n^i}$的形式，下面只需对$r \in (0,1)$，且对任意正整数$l$和$a$（$0 < a < n^l$），$r \neq \frac{a}{n^l}$的情况说明存在唯一的$\mathcal{L}^{(n)}$中的投影$P$，使得$\tau(P) = r$，即完成了定理证明。

为此，我们首先指出对于上述r，存在唯一的n进制展开，即$r = \sum_{k=1}^\infty \frac{a_k}{n^k}$，此处我们要求$0 \le a_k \le n-1$，并且有无穷多个$a_k$不等于0或$n-1$（因为若存在$k_0 \in \mathbb{N}$，使得对任意$k \ge k_0$，有$a_k = n-1$，则$r$实际上可以被写成$\frac{a}{n^l}$。例如当$n = 10$时，有$0.09999\cdots = 0.1$ ）。由推论2.13，若P_1，P_2满足$\tau(P_1) = \tau(P_2) = r$，则对于任意的$k \in \mathbb{N}$，存在$Q_1$，$Q_2$属于$\mathcal{N}_k' \cap \mathrm{Lat}(\mathcal{N}_k' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty))$使得

$$P_1 = E^{(1)}_{a_1} + F^{(1)}_{n-a_1}E^{(2)}_{a_2} + \cdots + (\prod_{i=1}^{k-1} F^{(i)}_{n-a_i})E^{(k)}_{a_k} + (\prod_{i=1}^{k} F^{(i)}_{n-a_i})Q_1,$$

$$P_2 = E^{(1)}_{a_1} + F^{(1)}_{n-a_1}E^{(2)}_{a_2} + \cdots + (\prod_{i=1}^{k-1} F^{(i)}_{n-a_i})E^{(k)}_{a_k} + (\prod_{i=1}^{k} F^{(i)}_{n-a_i})Q_2。$$

于是我们有

$$\|P_1 - P_2\|_2 = \|(\prod_{i=1}^{k} F_{n-a_i}^{(i)})(Q_1 - Q_2)\|_2$$

$$\leq 2\|(\prod_{i=1}^{k} F_{n-a_i}^{(i)})\|_2 = (\frac{1}{n})^{k/2},$$

这就说明$P_1 = P_2$。事实上，若记此投影为P，并令

$$P_k = \sum_{j=1}^{k}(\prod_{i=1}^{j-1} F_{n-a_i}^{(i)})E_{a_j}^{(j)} \in \mathcal{L}_\infty, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

可以看出，$P_1 < P_2 < \cdots < P_k < \cdots < P$，且$\lim_{k\to\infty} \tau(P_k) = r = \tau(P)$。 ∎

接下来我们将证明当$n \neq k$（n，$k > 1$）时，$\mathcal{L}^{(n)}$与$\mathcal{L}^{(k)}$代数不同构。这就给出了可数个代数不同构的Kadsion-Singer格。

定理 2.15. 当$n \neq k$时，以下两个格$\mathcal{L}^{(n)}$，$\mathcal{L}^{(k)}$不代数同构。

此定理的证明基于以下三个引理。在证明它们之前我们先给出如下记号。

定义 2.1. 对$\mathcal{L}^{(n)}$的任意子集S，我们令

$$\mathcal{Z}(\mathcal{S}) = \{P \in \mathcal{L}^{(n)} :\ P \wedge Q = 0,\ \text{for all } Q \in \mathcal{S}\}。$$

由引理2.13，容易得到下述结果。

引理 2.16. $\mathcal{L}^{(n)}$中的投影P为极小投影，当且仅当$P = (\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)})E_1^{(m+1)}(m = 0, 1, \ldots)$。注意当$m = 0$时，$P = E_1^{(1)}$。

引理 2.17. 对$m \geq 0$，$0 \leq a_i \leq n-1$，和$Q \in \mathcal{N}'_{m+1} \cap \mathrm{Lat}(\mathcal{N}'_{m+1} \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)}))$，若

$$P = E_{a_1}^{(1)} + F_{n-a_1}^{(1)}E_{a_2}^{(2)} + \cdots + (\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-a_i}^{(i)})E_{a_m}^{(m)} + (\prod_{i=1}^{m} F_{n-a_i}^{(i)})E_{a_{m+1}}^{(m+1)}$$

$$+ (\prod_{i=1}^{m} F_{n-a_i}^{(i)})F_{n-a_{m+1}}^{(m+1)}Q \in \mathcal{L}^{(n)}\ (\ \prod_{i=1}^{k} F_{n-a_i}^{(i)} = 0, k < 0\ )。$$

则$P \in \mathcal{Z}((\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)})E_1^{(m+1)})$，当且仅当$a_{m+1} = 0$。

证明. 若$a_{m+1} > 0$，令

$$P_1 = E_{a_1}^{(1)} + F_{n-a_1}^{(1)} E_{a_2}^{(2)} + \cdots + (\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_m}^{(m)} + (\prod_{i=1}^{m} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_{m+1}}^{(m+1)} (\leq P),$$

我们将验证，$(\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)} \leq P_1$，这就说明$a_{m+1}$必须为0。当$m = 0$时，$P_1 = E_{a_1}^{(1)}$，则显然$E_1^{(1)} \leq E_{a_1}^{(1)}$。下面假设$m > 0$。则有

$$\begin{aligned} P_1(\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}) &= [E_{a_1}^{(1)} + F_{n-a_1}^{(1)} E_{a_2}^{(2)} + \cdots + (\prod_{i=1}^{m-2} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_{m-1}}^{(m-1)}](\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}) \\ &+ [(\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_m}^{(m)} + (\prod_{i=1}^{m} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_{m+1}}^{(m+1)}](\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}), \end{aligned}$$

注意到$[E_{a_m}^{(m)} + F_{n-a_m}^{(m)}] F_n^{(m)} = F_n^{(m)}$，于是

$$\begin{aligned} &[(\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_m}^{(m)} + (\prod_{i=1}^{m} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_{m+1}}^{(m+1)}](\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}) \\ &= (\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-a_i}^{(i)})(\prod_{i=1}^{m-1} F_n^{(i)})[E_{a_m}^{(m)} + F_{n-a_m}^{(m)}] F_n^{(m)} E_1^{(m+1)} \\ &= (\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-a_i}^{(i)})(\prod_{i=1}^{m-1} F_n^{(i)}) F_n^{(m)} E_1^{(m+1)}, \end{aligned}$$

继而

$$\begin{aligned} P_1(\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}) &= [E_{a_1}^{(1)} + F_{n-a_1}^{(1)} E_{a_2}^{(2)} + \cdots + (\prod_{i=1}^{m-2} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_{m-1}}^{(m-1)} + (\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-a_i}^{(i)})] \\ &\times (\prod_{i=1}^{m-1} F_n^{(i)}) F_n^{(m)} E_1^{(m+1)}, \end{aligned}$$

重复类似的计算，就得到$P_1(\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}) = (\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}$，即说明$(\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)} \leq P_1$。

反之，若$a_{m+1} = 0$，则

$$P = E_{a_1}^{(1)} + F_{n-a_1}^{(1)} E_{a_2}^{(2)} + \cdots + (\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_m}^{(m)} + (\prod_{i=1}^{m} F_{n-a_i}^{(i)}) F_n^{(m+1)} Q。$$

令$\xi \in P(\mathcal{H}) \wedge (\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}(\mathcal{H})$，并$E = (I - E_{n-1}^{(1)})(I - E_{n-1}^{(2)}) \cdots (I - E_{n-1}^{(m+1)})$。则有$E\xi = E(\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)} \xi = 0$。但同时还可以看出

$$\begin{aligned} 0 = PEP\xi &= (\prod_{i=1}^m F_{n-a_i}^{(i)}) F_n^{(m+1)} E (\prod_{i=1}^m F_{n-a_i}^{(i)}) F_n^{(m+1)} Q\xi \\ &= (\prod_{i=1}^m F_{n-a_i}^{(i)} (I - E_{n-1}^{(i)}) F_{n-a_i}^{(i)}) F_n^{(m+1)} (I - E_{n-1}^{m+1}) F_n^{(m+1)} Q\xi \\ &= \frac{1}{n} (\prod_{i=1}^m \frac{1}{n - a_i}) (\prod_{i=1}^m F_{n-a_i}^{(i)}) F_n^{(m+1)} Q\xi。\end{aligned}$$

这就说明$\xi \in (\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}(\mathcal{H}) \wedge P_1(\mathcal{H})$，此处$P_1 = P - (\prod_{i=1}^m F_{n-a_i}^{(i)}) F_n^{(m+1)} Q$。现在令$\widetilde{E} = (I - E_{n-1}^{(1)})(I - E_{n-1}^{(2)}) \cdots (I - E_{n-1}^{(m)})$，则有$\widetilde{E}\xi = \widetilde{E} P_1 \xi = 0$，并且

$$\begin{aligned} 0 = (\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)} \widetilde{E} (\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)} \xi = (\prod_{i=1}^m F_n^{(i)} (I - E_n^{(i)}) F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)} \xi \\ = \frac{1}{n^m} (\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)} \xi = \frac{1}{n^m} \xi。\end{aligned}$$

于是得到$\xi = 0$，进而$P \wedge (\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)} = 0$。 ■

引理 2.18. 对$\mathcal{L}^{(n)}$中的任意极小投影$(\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)} (m = 0, 1, \ldots)$，我们有

$$\mathcal{Z}(\mathcal{Z}(\{(\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}\})) = \{(\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_k^{(m+1)} | k = 0, 1, \ldots n-1\}。$$

证明. 由前引理知

$$\begin{aligned} &\mathcal{Z}(\{(\prod_{i=1}^m F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}\}) \\ &\quad = \{E_{a_1}^{(1)} + F_{n-a_1}^{(1)} E_{a_2}^{(2)} + \cdots + (\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-a_i}^{(i)}) E_{a_m}^{(m)} + (\prod_{i=1}^m F_{n-a_i}^{(i)}) F_n^{(m+1)} Q : \\ &\qquad 0 \le a_i \le n-1, Q \in \mathcal{N}_{m+1}' \cap Lat(\mathcal{N}_{m+1}' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)}))\}。\end{aligned}$$

假设

$$E = E_{b_1}^{(1)} + F_{n-b_1}^{(1)} E_{b_2}^{(2)} + \cdots + (\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-b_i}^{(i)}) E_{b_m}^{(m)} + (\prod_{i=1}^{m} F_{n-b_i}^{(i)}) E_{b_{m+1}}^{(m+1)}$$

$$+ (\prod_{i=1}^{m} F_{n-b_i}^{(i)}) F_{n-b_{m+1}}^{(m+1)} Q \in \mathcal{Z}(\mathcal{Z}(\{(\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)}) E_1^{(m+1)}\})),$$

由于$E_{b_1}^{(1)}+F_{n-b_1}^{(1)}E_{b_2}^{(2)}+\cdots+(\prod_{i=1}^{m-1} F_{n-b_i}^{(i)})E_{b_m}^{(m)} \in \mathcal{Z}(\{(\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)})E_1^{(m+1)}\})$，则$E = (\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)})[E_{b_{m+1}}^{(m+1)}+F_{n-b_{m+1}}^{(m+1)}Q]$。注意到$E_{b_{m+1}}^{(m+1)}+F_{n-b_{m+1}}^{(m+1)}Q = E_{b_{m+1}}^{(m+1)} \vee F_n^{(m+1)}Q$，由$(\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)})F_n^{(m+1)}Q \leq E$，就可推出$Q = 0$，$E = (\prod_{i=1}^{m} F_n^{(i)})E_{b_{m+1}}^{(m+1)}(0 \leq b_{m+1} \leq n-1)$。现在套用引理2.17的证明方法，容易看出命题成立。 ∎

定理2.15的证明. 由引理2.18知，对任意$\mathcal{L}^{(n)}$中的极小投影P，我们有$\#\mathcal{Z}(\mathcal{Z}(P)) = n$，这显然为$\mathcal{L}^{(n)}$的代数不变量。即得定理。 ∎

2.3 $\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$的换位子

为了方便，首先给出下面的记号。令

$$T^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} E_{in}^{(k)} \quad k = 1, 2, \ldots。$$

引理 2.19. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的算子A属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})'$当且仅当$A = a_0 I + A_1 T^{(1)}$，其中$a_0 \in \mathbb{C}$，$A_1 \in \mathcal{N}_1' \cap (\mathcal{N}_1' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)}))'$。

证明. 对任意$B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，$0 < l < n$，$k > l$，$E_{ll}^{(1)}B(E_{ll}^{(1)} - E_{lk}^{(1)}) \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$。若$A \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})'$，则有

$$E_{ll}^{(1)}B(E_{ll}^{(1)} - E_{lk}^{(1)})[\sum_{i,j} E_{ii}^{(1)}AE_{jj}^{(1)}] = \sum_{j=1}^{n} E_{ll}^{(1)}B(E_{ll}^{(1)} - E_{lk}^{(1)})AE_{jj}^{(1)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E_{ii}^{(1)}AE_{ll}^{(1)}BE_{ll}^{(1)} - \sum_{i=1}^{n} E_{ii}^{(1)}AE_{ll}^{(1)}BE_{lk}^{(1)} = [\sum_{i,j} E_{ii}^{(1)}AE_{jj}^{(1)}]E_{ll}^{(1)}B(E_{ll}^{(1)} - E_{lk}^{(1)})。$$

比较以上中间两个等式可见当$i \neq l$时，$E_{ii}^{(1)}AE_{ll}^{(1)}BE_{ll}^{(1)} = 0$,即$E_{ii}^{(1)}AE_{ll}^{(1)} = 0$。并且当$l = 1$时，在上式两端乘以$E_{11}^{(1)}$，就得到$E_{11}^{(1)}BE_{11}^{(1)}E_{11}^{(1)}AE_{11}^{(1)} = E_{11}^{(1)}AE_{11}^{(1)}BE_{11}^{(1)}$，

此即表明存在$a_0 \in \mathbb{C}$，使得$E_{11}^{(1)}AE_{11}^{(1)} = a_0E_{11}^{(1)}$。类似的当$l = 1$，在上式左端乘以$E_{11}^{(1)}$，右端乘以$E_{kk}^{(1)}$，对于$k < n$，得到

$$-E_{11}^{(1)}BE_{1k}^{(1)}AE_{kk}^{(1)} = -E_{11}^{(1)}AE_{11}^{(1)}BE_{1k}^{(1)} = -a_0E_{11}^{(1)}BE_{1k}^{(1)},$$

此即表明$E_{kk}^{(1)}AE_{kk}^{(1)} = a_0E_{kk}^{(1)}$（$k < n$）。

依然假设$l = 1$，在等式左侧乘以$E_{11}^{(1)}$，右侧乘以$E_{nn}^{(1)}$，当$k < n$时，就得到$E_{11}^{(1)}BE_{11}^{(1)}(E_{11}^{(1)} - E_{1k}^{(1)})AE_{nn}^{(1)} = 0$，即$E_{11}^{(1)}AE_{nn}^{(1)} = E_{1k}^{(1)}AE_{nn}^{(1)}$。而对于$k = n$，

$$E_{11}^{(1)}BE_{11}^{(1)}(E_{11}^{(1)} - E_{1n}^{(1)})AE_{nn}^{(1)} = -E_{11}^{(1)}AE_{11}^{(1)}BE_{1n}^{(1)} = -a_0E_{11}^{(1)}BE_{1n}^{(1)}。$$

由此得到$E_{11}^{(1)}AE_{nn}^{(1)} = E_{1n}^{(1)}AE_{nn}^{(1)} - a_0E_{1n}^{(1)}$。这就说明存在$A_1 \in \mathcal{N}_1'$，使得$A = a_0I + A_1T^{(1)}$。下面说明$A_1 \in (\mathcal{N}_1' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)}))'$。并且不妨假设$a_0 = 0$，即$A = A_1T^{(1)}$。

首先验证对于任意$B \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$，并且$E_{nn}^{(1)}BE_{nn}^{(1)} = 0$，$AB = BA$。事实上

$$AB = A_1\sum_{i=1}^{n} E_{in}^{(1)}(I - E_{nn}^{(1)})B = 0,$$

并且注意到$\sum_{j=1}^{n} E_{11}^{(1)}TE_{jn}^{(1)} = \sum_{j=2}^{n} E_{12}^{(1)}TE_{jn}^{(1)} = \cdots = 0$，

$$\begin{aligned} BA &= (\sum_{i\le j}^{n} E_{ii}^{(1)}BE_{jj}^{(1)})(\sum_{k=1}^{n} E_{kn}^{(1)})A_1 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=i}^{n} E_{ii}^{(1)}BE_{jn}^{(1)}) = 0。\end{aligned}$$

由引理2.4，可知$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$中的任意算子都可写成$B_1$，$B_2$之和，其中$E_{nn}^{(1)}B_1E_{nn}^{(1)} = 0$，$B_2 \in \mathcal{N}_1' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$。于是$A = A_1T^{(1)}$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})'$，当且仅当$A_1 \in \mathcal{N}_1' \cap (\mathcal{N}_1' \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)}))'$。 ■

注 1. 事实上，上述引理既是说明，相对于$\mathcal{N}_1$中的矩阵单位，$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})'$中的算

子A都为如下形式

$$\begin{pmatrix} a_0 & & & A_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & a_0 & A_1 \\ & & & a_0+A_1 \end{pmatrix}。$$

并且从此矩阵形式可以看出，$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})' \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_1)$。

由数学归纳法，并用证明引理2.19的方法可以得到如下结果。

定理 2.20. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的算子A属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})'$，当且仅当对任意$k \geq 0$，存在$\{a_i\}_{i=0}^k \subset \mathbb{C}$，$A_{k+1} \in \mathcal{N}'_{k+1} \cap (\mathcal{N}'_{k+1} \cap \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)}))'$，使得

$$A = a_0 I + a_1 T^{(1)} + \cdots + a_k \prod_{i=1}^{k} T^{(i)} + (\prod_{i=1}^{k+1} T^{(i)}) A_{k+1}。$$

并且从上式可见$A \in \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_k)$。

因为对任意$k > 0$，由上述定理有$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})' \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{L}_k)$，由此可知$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})' \subset \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$，则上定理隐含了以下推论。

推论 2.21. $\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$的中心等于其换位子。

一般来说对于非自伴算子代数$\mathfrak{A}$，双换位定理并不成立，即$\mathfrak{A}'' \neq \mathfrak{A}$。此处也不例外，我们指出当$n \geq 3$时，$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})'' \neq \mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$。下面我么仅针对$n = 3$的情况给出属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})''$，但不在$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$中算子的例子，而$n > 3$时，完全类似可以给出相应反例。

相对于$\mathcal{N}_1$中的矩阵单位，我们说明下述算子

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(3)})''/\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(3)})$。由引理2.19，只需说明$T$与具有注1中矩阵形式的算子交换即可。以下矩阵计算即可验证此事实。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_0 & 0 & A_1 \\ 0 & a_0 & A_1 \\ 0 & 0 & a_0 + A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -a_1 & 0 \\ a_1 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_0 & 0 & A_1 \\ 0 & a_0 & A_1 \\ 0 & 0 & a_0 + A_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}。$$

显然T并非上三角算子，所以T不属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(3)})$。

但对于$n=2$时，我们可以证明$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(2)})$具有双交换性质。在此之前，我们进一步研究$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})'$中算子的性质。

引理 2.22. *$T^{(k)}$为幂等算子。*

证明. 证明即简单的验证，

$$(T^{(k)})^2 = \sum_{i,j}^{n} E_{in}^{(k)} E_{jn}^{(k)} = T^{(k)}。 \qquad \blacksquare$$

由此可知$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})'$中的算子$\prod_{i=1}^{k} T^{(i)}$（$k=1,2\ldots$）都为幂等元。以下关于幂等元的性质是众所周知的，为完整起见我们在此给出简要证明。

引理 2.23. *T为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的幂等元，记$P_1 = Ran(T)$，$P_2 = Ran(I-T)$，则$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$与$T$交换当且仅当$(I-P_i)BP_i = 0 (i=1,2)$，即$A \in \mathrm{Alg}(P_1, P_2)$。*

证明. 首先，从$AT = TA = TAT$，可知$(I-T)AT = 0$，及$TA(I-T) = 0$，由此即得$A \in \mathrm{Alg}(P_1, P_2)$。反之，注意到$P_1 T = T$，$TP_2 = 0$。则若$(I-P_2)AP_2 = 0$，有0=$T(I-P_2)AP_2(I-T) = TA(I-T)$，类似的有$(I-T)AT = 0$，即$TA = AT$。

下面我们给出$\prod_{i=1}^{k} T^{(i)} (k=1,2,\ldots)$，及$I - \prod_{i=1}^{k} T^{(i)}$的值域所对应的投影。

引理 2.24. 对应于$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})'$中幂等元$\prod_{i=1}^k T^{(i)}$及$I-\prod_{i=1}^k T^{(i)}$值域的投影为

$$P_1 = Ran(\prod_{i=1}^k T^{(i)}) = \prod_{i=1}^k F_n^{(i)}$$

$$P_2 = Ran(I-\prod_{i=1}^k T^{(i)}) = E_{n-1}^{(1)} + F_1^{(1)}E_{n-1}^{(2)} + \cdots + (\prod_{i=1}^{k-1} F_1^{(i)})E_{n-1}^{(k)}。$$

证明. 由于$\prod_{i=1}^k T^{(i)}$及$I-\prod_{i=1}^k T^{(i)}$为幂等元，只需验证

$$\prod_{i=1}^k T^{(i)} = P_1(\prod_{i=1}^k T^{(i)}), \quad P_1 = (\prod_{i=1}^k T^{(i)})P_1，及$$

$$I-\prod_{i=1}^k T^{(i)} = P_2(I-\prod_{i=1}^k T^{(i)}), \quad P_2 = (I-\prod_{i=1}^k T^{(i)})P_2。$$

前两个等式容易验证，在此只证明后两个等式。

首先注意到$I-\prod_{i=1}^k T^{(i)} = P_2(I-\prod_{i=1}^k T^{(i)})$当且仅当$I-P_2 = (I-P_2)\prod_{i=1}^k T^{(i)}$，而

$$\begin{aligned} I-P_2 &= I - E_{n-1}^{(1)} - F_1^{(1)}E_{n-1}^{(2)} - \cdots - (\prod_{i=1}^{k-1} F_1^{(i)})E_{n-1}^{(k)} \\ &= F_1^{(1)} - F_1^{(1)}E_{n-1}^{(2)} - \cdots - (\prod_{i=1}^{k-1} F_1^{(i)})E_{n-1}^{(k)} \quad (I-E_{n-1}^{(k)} = F_1^{(k)} = E_{nn}^{(k)}) \\ &= \ldots = \prod_{i=1}^k F_1^{(i)} = \prod_{i=1}^k E_{nn}^{(i)}。\end{aligned}$$

于是有

$$(I-P_2)\prod_{i=1}^k T^{(i)} = (\prod_{i=1}^k E_{nn}^{(i)})\prod_{i=1}^k(\sum_{j=1}^n E_{jn}^{(i)}) = \prod_{i=1}^k E_{nn}^{(i)} = (I-P_2)。$$

最后一个等式成立当且仅当$\prod_{i=1}^k T^{(i)}P_2 = 0$，由

$$T^{(i)}E_{n-1}^{(i)} = (\sum_{j=1}^n E_{jn}^{(i)})(\sum_{l=1}^{n-1} E_{ll}^{(i)}) = 0，$$

易见上式成立。 ∎

现在回忆当$n=2$时，$\mathcal{L}_\infty$由以下投影生成

$$P_{m1}=P_{m-1,1}+(I-P_{m-1,1})E_{11}^{(m)},$$

$$P_{m2}=P_{m-1,1}+(I-P_{m-1,1})\left(\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(m)}\right),$$

$m=1,2\ldots$，且$P_{11}=E_{11}^{(1)}$，$P_{12}=\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(1)}$。所以

$$P_{m1}=E_{11}^{(1)}+E_{22}^{(1)}E_{11}^{(2)}+\cdots+(\prod_{i=1}^{m-1}E_{22}^{(i)})E_{11}^{(m)},$$

$$P_{m2}=E_{11}^{(1)}+E_{22}^{(1)}E_{11}^{(2)}+\cdots+(\prod_{i=1}^{m-2}E_{22}^{(i)})E_{11}^{(m-1)}+(\prod_{i=1}^{m-1}E_{22}^{(i)})(\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(m)})。$$

下面我们证明当$n=2$时，$\prod_{i=1}^{k}T^{(i)}$，及$I-\prod_{i=1}^{k}T^{(i)}$的值域对应的投影生成$\mathcal{L}_\infty$，继而有如下结果。

定理 2.25. $\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(2)})''=\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(2)})$。

证明. 由引理2.24知当$n=2$时，有

$$Ran(\prod_{i=1}^{k}T^{(i)})=\prod_{i=1}^{k}F_n^{(i)}=\prod_{i=1}^{k}(\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(i)}),$$

$$Ran(I-\prod_{i=1}^{k}T^{(i)})=E_{11}^{(1)}+E_{22}^{(1)}E_{11}^{(2)}+\cdots+(\prod_{i=1}^{k-1}E_{22}^{(i)})E_{11}^{(k)}。$$

可见$Ran(I-\prod_{i=1}^{k}T^{(i)})=P_{k1}(k=1,2\ldots)$，$Ran(T^{(1)})=P_{12}$。现在我们证明对于$k=1,2\ldots$，

$$Ran(\prod_{i=1}^{k+1}T^{(i)})\vee Ran(I-\prod_{i=1}^{k}T^{(i)})=\prod_{i=1}^{k+1}(\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(i)})\vee P_{k,1}$$

$$=E_{11}^{(1)}+E_{22}^{(1)}E_{11}^{(2)}+\cdots+(\prod_{i=1}^{k-1}E_{22}^{(i)})E_{11}^{(k)}+(\prod_{i=1}^{k}E_{22}^{(i)})(\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(k+1)})=P_{k+1,2}。$$

易见$I-P_{k+1,2}=(\prod_{i=1}^{k}E_{22}^{(i)})(I-\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(k+1)})$，可以验证

$$(I-P_{k+1,2})Ran(\prod_{i=1}^{k+1}T^{(i)})=0,\qquad (I-P_{k+1,2})P_{k,1}=0。$$

这说明$Ran(\prod_{i=1}^{k+1}T^{(i)})\vee Ran(I-\prod_{i=1}^{k}T^{(i)})\leq P_{k+1,2}$。要证明$Ran(\prod_{i=1}^{k+1}T^{(i)})\vee Ran(I-\prod_{i=1}^{k}T^{(i)})\geq P_{k+1,2}$，只需说明对于任意$\xi\in(\prod_{i=1}^{k}E_{22}^{(i)})(\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(k+1)})\mathcal{H}$，$\xi=\xi_1+\xi_2$，其中$\xi_1\in P_{k,1}\mathcal{H}$，$\xi_2\in\prod_{i=1}^{k+1}(\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(i)})\mathcal{H}$。事实上，若令

$$\begin{aligned}\xi_2&=2^k\prod_{i=1}^{k+1}(\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(i)})\xi=\prod_{i=1}^{k}[(\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(i)})E_{22}^{(i)}](\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(k+1)})\xi\\&=\prod_{i=1}^{k}(E_{12}^{(i)}+E_{22}^{(i)})(\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{2}E_{st}^{(k+1)})\xi=\xi-\xi_1。\end{aligned}$$

容易验证$\xi_1\in P_{k,1}\mathcal{H}$。

若$A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(2)})''$，由引理2.20，$A(\prod_{i=1}^{k}T^{(i)})=(\prod_{i=1}^{k}T^{(i)})A(k=1,2\ldots)$，则从引理2.23，及以上所证，就得到$A\in\mathrm{Alg}(\mathcal{L}_\infty)$，即$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(2)})''\subset\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(2)})$。而$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(2)})\subset\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(2)})''$显然成立，于是定理得证。 ∎

第三章　三个投影生成的自反格及其决定的KS-代数

3.1　二个投影生成的自反格及其决定的KS-代数

P.R.Halmos在[21]中讨论了Hilbert空间上两个投影的关系及性质。在此我们简要回忆其主要结果。

定义 3.1. 令P，Q为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的两个投影，我们称此两投影处于“一般位置”（general postion），当且仅当$P \wedge Q = 0$，$P \vee Q = I$，$(I-P) \wedge Q$，$(I-P) \vee Q = I$。

注 2. 注意到由以上定义，若$\mathcal{H}_1$，$\mathcal{H}_2$为分别对应于P，Q值域的闭子空间。则P，Q处于一般位置当且仅当$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$，$\mathcal{H}_1^{\perp} \cap \mathcal{H}_2 = \{0\}$，$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2^{\perp} = \{0\}$，$\mathcal{H}_1^{\perp} \cap \mathcal{H}_2^{\perp} = \{0\}$。

对于处于一般位置的投影有如下众所周知的结果，此处省略证明。令$\mathcal{M} = \{P, Q\}''$，由P，Q生成的von Neumann代数。

引理 3.1. *$P\mathcal{M}P$为由PQP生成的交换von Neumann代数。*

引理 3.2. *在$\mathcal{M}$中存在由$P = E_{11}$的矩阵单位$\{E_{ij}\}_{i,j}^{2}$，则$\mathcal{M} \cong P\mathcal{M}P \otimes M_2(\mathbb{C})$。并且$P \sim Q$。*

注 3. 由上引理可知$\mathcal{M}$酉同构于$\mathcal{A} \otimes M_2(\mathbb{C})$，$\mathcal{A}$为由某正算子$H$（$0 \leq H \leq I$）生成的交换von Neumann代数。并且相对于$M_2(\mathbb{C})$的标准矩阵单位有

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I-H)} \\ \sqrt{H(I-H)} & I-H \end{pmatrix}。$$

由于P，Q处于一般位置，进一步可知$Ker(H) = \{0\}$，$Ker(I-H) = \{0\}$。事实上，若两投影P，Q有以上的矩阵形式，则它们处于一般位置当且仅当$Ker(H) = \{0\}$，$Ker(I-H) = \{0\}$。

对于一般的情况，可先将$\mathcal{H}$分解为$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2^{\perp} \oplus \mathcal{H}_1^{\perp} \cap \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1^{\perp} \cap \mathcal{H}_2^{\perp} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}$。易见以上分解中的直和项都为$P$，$Q$的不变自空间。并且限制在$\widetilde{\mathcal{H}}$上，

P，Q处于一般位置。则在适当表示下，P，Q有矩阵形式

$$P=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ 0 & I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & 0\\ 0 & \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} & 0\\ 0 & \begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I-H)}\\ \sqrt{H(I-H)} & I-H\end{pmatrix}\end{pmatrix}。$$

由以上讨论我们有如下常用结论。

引理 3.3. 对于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的任意两个投影P，Q，在由P，Q生成的*von Neumann*代数中有$P\vee Q-P\sim Q-P\wedge Q$。特别的，若$P$，$Q$属于某有限*von Neumann*代数$\mathcal{M}$，令$\tau$为$\mathcal{M}$上的迹态，我们有

$$\tau(P\vee Q)=\tau(P)+\tau(Q)-\tau(P\wedge Q)。$$

Halmos在[22]中证明了$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中任意两个投影生成的格都为自反格。下面针对两个处于一般位置（事实上，此处是否处于一般位置并不重要，类似的计算可以证明任意两个投影生成的格都为自反格）的投影给出证明方法。并且我们将在下一节中推广此方法，用于处理三个投影的情况。

由注释3，不失一般性，我们可以认为P，Q属于$M_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$（作用在$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$上），并且有形式

$$P=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I-H)}\\ \sqrt{H(I-H)} & I-H\end{pmatrix}。$$

使用以上符号，我们可以完全刻画$\mathrm{Alg}(P,Q)$中的算子。

引理 3.4. $\mathrm{Alg}(P,Q)=\{\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}\in M_2(\mathcal{B}(\mathcal{H})):\sqrt{H}T_3\sqrt{I-H}-\sqrt{I-H}T_1\sqrt{H}=\sqrt{I-H}T_2\sqrt{I-H}\}$。

证明. 首先，显然P为$M_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$中某算子$T=\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_4 & T_3 \end{pmatrix}$的不变子空间，当且仅当$T_4=0$，即为相对于$P$的上三角算子。其次注意到，

$$Q=\begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I-H)} \\ \sqrt{H(I-H)} & I-H \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \sqrt{H} & \sqrt{I-H} \\ \sqrt{I-H} & -\sqrt{H} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{H} & \sqrt{I-H} \\ \sqrt{I-H} & -\sqrt{H} \end{pmatrix}。$$

记酉算子$U=\begin{pmatrix} \sqrt{H} & \sqrt{I-H} \\ \sqrt{I-H} & -\sqrt{H} \end{pmatrix}$，则$(I-Q)TQ=0$，当且仅当$(I-P)UTUP=0$。即相对于$P$，$UTU$依然为上三角算子，矩阵计算给出

$$\begin{pmatrix} \sqrt{H} & \sqrt{I-H} \\ \sqrt{I-H} & -\sqrt{H} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{H} & \sqrt{I-H} \\ \sqrt{I-H} & -\sqrt{H} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} * & * \\ \sqrt{I-H}T_1\sqrt{H}+\sqrt{I-H}T_2\sqrt{I-H}-\sqrt{H}T_3\sqrt{I-H} & * \end{pmatrix},$$

即得到$\sqrt{I-H}T_1\sqrt{H}+\sqrt{I-H}T_2\sqrt{I-H}-\sqrt{H}T_3\sqrt{I-H}=0$。 ∎

注 4. 注意到上述证明中并没有用到P，Q处于一般位置的事实，实际上只要P，Q有引理中的形式，引理结论成立。

由于可以完全刻画$\mathrm{Alg}(P,Q)$，证明格$\{0,P,Q,I\}$自反只是简单的矩阵计算，我们省略证明，仅将结论叙述如下。

推论 3.5. *若P，Q为处于一般位置的两个投影，则*$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(P,Q))=\{0,P,Q,I\}$。

从以上结论易见$\mathrm{Alg}(P,Q)$为Kadison-Singer代数。并且类似于上节中定义的$\mathrm{Alg}(\mathcal{L}^{(n)})$，$\mathrm{Alg}(P,Q)$也为代数极大。

引理 3.6. 令$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I-H)} \\ \sqrt{H(I-H)} & I-H \end{pmatrix}$为$M_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$中投影，并且$H$和$I-H$可逆，则若$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$与$\mathrm{Alg}(P,Q)$生成的代数$\mathfrak{A}$满足$\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A} = \mathrm{Alg}(P,Q)^* \cap \mathrm{Alg}(P,Q)$，就有$T \in \mathrm{Alg}(P,Q)$。

证明. 首先易见

$$\mathrm{Alg}(P,Q)^* \cap \mathrm{Alg}(P,Q) = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in \{H\}''\}。$$

由引理3.4，

$$T_1 = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -T_{12}\sqrt{\frac{I-H}{H}} & T_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} + T_{12}\sqrt{\frac{I-H}{H}} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A},$$

所以

$$T_2 = T_1 \begin{pmatrix} I & -\sqrt{\frac{H}{I-H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} + T_{12}\sqrt{\frac{I-H}{H}} & -(T_{11} + T_{12}\sqrt{\frac{I-H}{H}})\sqrt{\frac{H}{I-H}} \\ T_{21} & -T_{21}\sqrt{\frac{H}{I-H}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}。$$

则$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_{21} & -T_{21}\sqrt{\frac{H}{I-H}} \end{pmatrix}$属于$\mathfrak{A}$。令$T_{21}$的极分解为$H_1U_1$。于是

$$T_4 = T_3 \begin{pmatrix} U_1^*\sqrt{\frac{I-H}{H}} & -U_1^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ H_1\sqrt{\frac{I-H}{H}} & -H_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}。$$

进而有

$$T_4 + \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{I-H}{H}}H_1\sqrt{\frac{I-H}{H}} & \sqrt{\frac{I-H}{H}}H_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{I-H}{H}}H_1\sqrt{\frac{I-H}{H}} & \sqrt{\frac{I-H}{H}}H_1 \\ H_1\sqrt{\frac{I-H}{H}} & -H_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A},$$

但由引理条件，上述成立，当且仅当$H_1 = 0$。以下我们假设$T_{21} = 0$。并且由于$\begin{pmatrix} T_{11} & \sqrt{\frac{H}{I-H}}A_{22} - A_{11}\sqrt{\frac{H}{I-H}} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}(P,Q)$，可即一步假设$T = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。下面只需证明此形式的$T$必须为零。则引理得证。

若$T \neq 0$，令

$$T_5 = T - \begin{pmatrix} -T_{12}\sqrt{\frac{I-H}{H}} & T_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{12}\sqrt{\frac{I-H}{H}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A},$$

使U_2H_2为$T_{12}\sqrt{\frac{I-H}{H}}$的极分解，则有

$$\begin{pmatrix} U_2^* & -U_2^*\sqrt{\frac{H}{I-H}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T_5 = \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A},$$

可见$H_2 = 0$，即$T = 0$。　■

一般来说当Hilbert空间为无限维时，P，Q处于一般位置并不能保证H和$I-H$可逆。但由$ker(H) = 0$，$ker(I-H) = 0$，及谱定理可知，存在交换von Neumann代数$\{H\}''$中的一列投影$\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得$P_n \leq P_m$（$n \leq m$），P_n强算子收敛于I，并且$H|_{P_n\mathcal{H}}$，$(I-H)|_{P_n\mathcal{H}}$可逆。而且有$\begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}$属于$\mathrm{Alg}(P,Q)$。由此我们可以证明引理3.6的结论对任意处于一般位置的两个投影成立。

定理 3.7. 令$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I-H)} \\ \sqrt{H(I-H)} & I-H \end{pmatrix}$为$M_2(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$中位于一般位置的投影，若$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$与$\mathrm{Alg}(P,Q)$生成的代数$\mathfrak{A}$满足$\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A} = \mathrm{Alg}(P,Q)^* \cap \mathrm{Alg}(P,Q)$，就有$T \in \mathrm{Alg}(P,Q)$。

证明. 令P_n为以上讨论中的投影，以下记$\begin{pmatrix} P_n & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}$为$\widetilde{P_n}$。只需证明对任意$n$有$\widetilde{P_n}T\widetilde{P_n} \in \mathrm{Alg}(P,Q)$，由$\widetilde{P_n}T\widetilde{P_n}$强算子收敛于$T$，并且$\mathrm{Alg}(P,Q)$为强算子闭的，即得结论。易见由于$\widetilde{P_n} \in \mathrm{Alg}(P,Q)$，$\widetilde{P_n}T\widetilde{P_n}$与$\widetilde{P_n}\mathrm{Alg}(P,Q)\widetilde{P_n}$生成的代数$\widetilde{\mathfrak{A}}$属于$\widetilde{P_n}\mathfrak{A}\widetilde{P_n}$。而且$\widetilde{\mathfrak{A}}^* \cap \widetilde{\mathfrak{A}} \subset \widetilde{P_n}\mathfrak{A}\widetilde{P_n}^* \cap \widetilde{P_n}\mathfrak{A}\widetilde{P_n} = \widetilde{P_n}(\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A})\widetilde{P_n} = \widetilde{P_n}(\mathrm{Alg}(P,Q)^* \cap \mathrm{Alg}(P,Q))\widetilde{P_n} = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} : A \in \{H\}'', P_nA = A\}$。加之可以验证投影$P\widetilde{P_n}$，$Q\widetilde{P_n}$ 限制在$\widetilde{P_n}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$上处于一般位置，并由引理3.4，$\widetilde{P_n}\mathrm{Alg}(P,Q)\widetilde{P_n}|_{\widetilde{P_n}\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}} =$

Alg$(P|_{\widetilde{P_n}\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}, Q|_{\widetilde{P_n}\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})})$。现在对$\widetilde{P_n}T\widetilde{P_n}|_{\widetilde{P_n}\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$，及投影$P|_{\widetilde{P_n}\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$，$Q|_{\widetilde{P_n}\mathcal{H}\oplus\mathcal{H})}$，应用引理3.6，即得结论。 ■

以上是对于两个投影的讨论，在下一节中我们将推广本节中的方法，用以研究某一类由三个投影生成的自反格。

3.2 三个投影生成的自反格

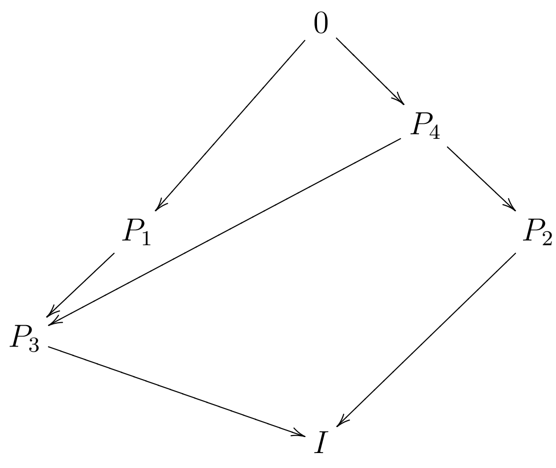
一般来说由三个投影生成的格比较复杂。而几乎所有已知的作用在可分Hilbert空间上的因子都可由三个投影生成，也从一个侧面反映了这一事实。在正式开始本节的讨论前，我们首先给出一个例子。

例 3.1. 假设$\mathcal{N} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$为由一个正算子$H$（$0 \leq H \leq I$），及一投影$P$生成的因子。令$\mathcal{M} = M_2(\mathcal{N}) \subset M_2(\mathcal{B}(H))$（作用在$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$上）。此处可视$M_2(\mathbb{C})$为$\mathcal{M}$的子因子，并且$\mathcal{N}$为$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$在$\mathcal{M}$中的相对换位子。进步要求$ker(H) = \{0\}$，$ker(I - H) = \{0\}$。相对于$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$的标准矩阵单位，令

$$P_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} H & \sqrt{H(I-H)} \\ \sqrt{H(I-H)} & I-H \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}, P_4 = P_2 \wedge P_3。$$

有$P_1 \wedge P_2 = 0$，及$P_1 \vee P_2 = I$。容易验证由$\{P_1, P_2, P_3\}$生成的格$\mathcal{L} = \{0, I, P_1, P_2, P_3, P_4\}$为分配格，其Hasse图为



所以由[22]中的结果知$\mathcal{L}$自反。而且由构造可知，$\mathcal{L}$生成von Neumann代数$\mathcal{M}$。更进一步有$\mathcal{L}$的任意子格都不能生成$\mathcal{M}$。即$\mathcal{L}$为Kadsion-Singer格，$\mathrm{Alg}(\mathcal{L})$为Kadsion-Singer因子。

由此构造，我们可以实现以大多数已知因子为对角的Kadsion-Singer代数。譬如，可以选择由相对自由的正算子H，及在迹态下取值为$\frac{1}{2}$的投影P生成的II_1型因子$\mathcal{N}$，其中也可要求H相对$\mathcal{N}$上迹态的分布与$[0,1]$上的函数$cos^2\frac{\pi}{2}\theta$（相对于Lebesgue测度）相同。同时若令τ为$\mathcal{M}$上的迹态，则在此假设下，我们有$\tau(P_1)=\tau(P_2)=\frac{1}{2}$, $\tau(P_3)=\frac{3}{4}$ and $\tau(P_4)=\frac{1}{4}$，并$\mathrm{Alg}(\mathcal{L})$为$II_1$型Kadsion-Singer因子。

判断一个不变子空间格是否自反，即便当格为有限时，也并不容易，有限分配格皆自反[22]。但是大多数格并非分配格。非分配格中最简单的当属双三角格（double triangle），顾名思义，此格的Hasse图由两个三角型组成，

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ P_1 \arrow[dr] & P_2 \arrow[d] & P_3 \arrow[dl] \\ & I & \end{tikzcd}$$

从图中可见，P_1，P_2，P_3三个投影满足$P_i\vee P_j=I$，$P_i\wedge P_j=0$，其中$i\neq j$，$i,j=1,2,3$。如果一个格包含双三角格，则此格必不分配。II_1型因子中的三个在迹态下取值为$\frac{1}{2}$的自由投影，连同$0,I$，组成一个双三角格。以下，我们首先简要描述由三个自由投影生成的II_1型因子。对于自由性及分布的基本知识，读者可以参考[4]。

令群$G_n=\underbrace{\mathbf{Z}_2*\cdots*\mathbf{Z}_2}_{n}$，即为$n$个$\mathbf{Z}_2$的自由积，这里$n\geq 2$或$=\infty$。当$n\geq 3$时，$G_n$为i.c.c群，其对应的群von Neumann代数$\mathcal{L}_{G_n}$为作用在Hilbert空间$l^2(G_n)$（见[27]）上的II_1型因子。若U_1，...，U_n为$\mathcal{L}_{G_n}$中对应于群G_n的生成元的n个酉算子，则U_1，...，U_n为$\mathcal{L}_{G_n}$的生成元，并且由群的性质有$U_j^2=I$。于是$\frac{I+U_j}{2}$，$j=1,\ldots,n$，为$\mathcal{L}_{G_n}$中在迹态下取值为$\frac{1}{2}$的投影。记由此n个投影加上$0,I$组成的格为$\mathcal{F}_n$。

显然，$\mathcal{F}_n$为$\mathcal{L}_{G_n}$的极小生成格，即$\mathcal{F}_n$的任意子格不能生成$\mathcal{L}_{G_n}$。于是自然的会问当$n \geq 3$时，$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_n)$是否为Kadison-Singer代数？而格$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_n))$又该怎样如何描述。当$n = 2$时，如同在上一节中指出的，Halmos[22]已证明$\mathcal{F}_2$为自反格，由此$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_2)$极大，为Kadison-Singer代数。在本章中，我们将针对$n = 3$的情况回答以上两个问题。以下将会看到$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$ 的确是KS-代数，且$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)) \setminus \{0, I\}$同胚于二维球面$S^2$。

为了讨论方便，我们将$\mathcal{L}_{G_3}$实现为由$M_2(\mathbb{C})$及其在$\mathcal{L}_{G_3}$中的相对换为子$\mathcal{M}$生成的von Neumann代数，并相对于$M_2(\mathbb{C})$的标准矩阵单位，将以上定义的生成$\mathcal{L}_{G_3}$的三个投影记为

$$P_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} H_1 & \sqrt{H_1(I-H_1)} \\ \sqrt{H_1(I-H_1)} & I - H_1 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} H_2 & \sqrt{H_2(I-H_2)}V \\ V^*\sqrt{H_2(I-H_2)} & V^*(I-H_2)V \end{pmatrix}。$$

由P_1，P_2，P_3的自由性就有H_1，H_2和V相互自由，并且H_1 和H_2有与$\cos^2\frac{\pi}{2}\theta$在$[0,1]$上相对于Lebesgue测度相同的的分布，$V$为Haar酉算子。可看出由以上假定，$\mathcal{L}_{G_3}$的子代数$\mathcal{M}$由$H_1$，$H_2$和$V$生成。从现在开始记$\mathcal{F}_3 = \{0, I, P_1, P_2, P_3\}$，$\mathcal{H} = l^2(G_3)$。

当$M_2(\mathbb{C})$为$\mathcal{L}_{G_3}$的子代数时，也可将$\mathcal{B}(\mathcal{H})$视为$M_2(\mathbb{C})\otimes\mathcal{B}$，其中$\mathcal{B}$为$M_2(\mathbb{C})$在$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的换位子。则相对于$M_2(\mathbb{C})$的标准矩阵单位，任意$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的算子都可被记为以$\mathcal{B}$中算子为矩阵元素的$2\times 2$矩阵。事实上，当$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1$时，$\mathcal{H}_1$为某Hilbert空间（譬如可令$\mathcal{H}_1 = P_1\mathcal{H}$），就有$\mathcal{B} \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$.

由于$P_1 \in \mathcal{F}_3$，属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$的算子必为上三角。用证明引理3.4的方法，可以得到以下对$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$的刻画，在此我们将不赘述证明。

引理 3.8. 使用以上记号，则$\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$，其中$T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{B}$，当且仅当

$$\sqrt{I-H_1}T_2\sqrt{I-H_1} = \sqrt{H_1}T_3\sqrt{I-H_1} - \sqrt{I-H_1}T_1\sqrt{H_1};$$

$$\sqrt{I-H_2}T_2V^*\sqrt{I-H_2} = \sqrt{H_2}VT_3V^*\sqrt{I-H_2} - \sqrt{I-H_2}T_1\sqrt{H_2}。$$

应用附属于$\mathcal{L}_{G_3}$的无界算子，可以构造很多属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$的有限秩（finite rank）算子。在此我们指出所有附属于有限von Neumann代数的无界算子形成一个代数[27]。并且任意有限个无界算子的值域的交都为Hilbert空间的稠子空间。

对$\mathcal{H}$中的任意向量x，y，记如下定义的秩一算子

$$z \longmapsto \langle z, x\rangle y, \quad \forall z \in \mathcal{H}$$

为$x \otimes y$。若ξ，η为属于$\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}$，$\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V$，及其共轭算子$(\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V)^*$的公共值域的两个向量。可令

$$T_1 = \xi \otimes (\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}} - \sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V)\eta$$

$$T_3 = ((\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}} - \sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V)^*\xi) \otimes \eta,$$

并由引理3.8可决定T_2如下

$$T_2 = \sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}T_3 - T_1\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}$$

使得$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$，并由以上构造易见$T$为有限秩算子（最多为秩四算子）。这就说明了$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$包含很多有限秩算子（即而包含很多紧算子）。事实上，从下面的讨论可看出，在某种程度上可以认为$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$几乎包含了$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的一个拷贝。

在继续讨论以前，我们指出$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$包含紧算子源于三个自由投影不足以提供足够的限制。虽然现在不知道多少自由投影可以保证没有紧算子以这些自由投影为不变子空间，但可证明以下。

定理 3.9. *令$G_\infty = *_{n\in\mathbb{N}}(\mathbb{Z}_2)_n = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 * \cdots$，在群因子$\mathcal{L}_{G_\infty}$（$\subset \mathcal{B}(l^2(G_\infty))$）中如前定义投影$P_n = \frac{I+U_n}{2}$，记$\mathcal{F}_\infty$为由$\{0, I, P_n : n \in \mathbb{N}\}$生成的格。则有$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_\infty)$不包含紧算子。*

证明此结论前，首先给出以下已知结论，并简要证明。

引理 3.10. *对$l^2(G_\infty)$中任意有限个单位向量$\{\xi_i\}_{i=1}^n$，及任意$\varepsilon > 0$，存在$m \in \mathbb{N}$使得对任意$k > m$，有$| < U_k\xi_1, \xi_i > | < \varepsilon (i = 1, 2, \ldots, n)$。即当$n$趋于无穷时，$\{U_n\}_{n=1}^\infty$弱算子趋于0。*

证明. 由于$\xi_i = \sum_{g\in G_\infty}^{\infty} a_g^i g$，此处在不引起混淆的前提下同时用$g$表示群$G_\infty$中的元素，和$l^2(G_\infty)$中的单位正交基。令$\{g_j\}_{j=1}^{n_0}$为$G_\infty$中的有限集满足，若P为到有限维闭子空间$\overline{span(\{g_j\}_{j=1}^{n_0})}$上的投影，则有$\|P\xi_i\| > 1-\varepsilon^2(i=1,2\ldots,n)$。现在选取$m$使得对任意$k > m$，$U_k$（自然的将酉算子与$G_\infty$的生成元等同起来）不出现在$g_j$中。于是若将$\xi_i$分解为$\xi_i^1+\xi_i^2$，其中$\xi_i^1 = P\xi_i$，由群的自由性即有$< U_k\xi_1^1, \xi_i^1 >= 0$。于是

$$\begin{aligned}
| < U_k\xi_1, \xi_i > | &= | < U_k\xi_1^1 + U_k\xi_1^2, \xi_i^1+\xi_i^2 > | \\
&= | < U_k\xi_1^1, \xi_i^2 > + < U_k\xi_1^2, \xi_i > | \\
&\le \|U_k\xi_1^1\|\|\xi_i^2\| + \|U_k\xi_1^2\| \le 2\varepsilon。
\end{aligned}$$

■

引理 3.11. *若T为$\mathcal{B}(l^2(G_\infty))$中的紧算子，则$\lim_k \|TU_k\| = 0$（此处将$U_k$视为$l^2(G_\infty)$中的单位向量）。*

证明. 不失一般性，假设$\|T\| = 1$。如果$\lim_k \|TU_k\| \neq 0$, 由于T为紧算子，不妨认为$\lim_k TU_k = \xi \neq 0$。于是对任意$0 < \varepsilon < \frac{\|\xi\|}{3}$，存在$k_0 \in \mathbb{N}$使得若$k \ge k_0$，则有$\|TU_{k_0} - TU_k\| < \varepsilon$，即得$\|TU_{k_0}\| \ge \frac{2\|\xi\|}{3}$。进而对任意$N \in \mathbb{N}$有

$$\begin{aligned}
1 \ge \|T^*TU_{k_0}\|^2 &\ge \sum_{k=k_0}^{k_0+N} | < T^*TU_{k_0}U_k > |^2 \\
&\ge N\|TU_{k_0}\|^2(\|TU_{k_0}\| - \varepsilon)^2 \\
&\ge \frac{N\|TU_{k_0}\|^2\|\xi\|^2}{9}。
\end{aligned}$$

即得到矛盾。 ■

定理3.9的证明. 如果T为$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_\infty)$中的非零紧算子，并且$\|T\| = 1$。不失一般性，可以认为$T1 = \xi \neq 0$。这是因为，如果$T \neq 0$，则必存在$g \in G$，使得$Tg \neq 0$。又有$TR_g$（$R_g$ 为右乘算子）依然为$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_\infty)$中的紧算子。由是可令$TR_g$代替$T$继续讨论。

因为$T \in \mathrm{Alg}(\mathcal{F}_\infty)$，所以$(I-P_n)TP_n = 0$，即$(1-U_n)T(1+U_n)1 = 0$。由上面引理可知

$$\lim_n \|(1-U_n)\xi\| = \lim_n \|(1-U_n)TU_n\| \le 2\lim_n \|TU_n\| = 0。$$

但同时我们可以找到$n_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意$m > n_0$，$| < U_m\xi, \xi > | < \frac{1}{2}\|\xi\|^2$成立，继而

$$\begin{aligned}\|(1-U_m)\xi\|^2 &=< (1-U_m)\xi, (1-U_m)\xi > \\ &\ge \|\xi\|^2。\end{aligned}$$

则以上两不等式相互矛盾，即$\xi \neq 0$的假设不成立，定理得证。 ∎

现在我们继续对$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$的讨论。首先给出以下为人所知的事实，为完整起见同时给出其证明。

引理 3.12. *若U为II_1型因子$\mathcal{M}$（$\subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$）中的Haar酉元，$A$为$\mathcal{M}$中的算子（或附属于$\mathcal{M}$的无界算子）。并且$A$与$U$自由，则任意非零复数都不属于$AU$的点谱。*

证明. 首先注意到，$0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$为$AU$的点谱当且仅当1为$\frac{1}{\lambda}AU$的点谱。而$\frac{1}{\lambda}A$和$U$依然满足引理中的条件，所以只需证明在引理条件下1不为AU的点谱。其次如果A为附属于$\mathcal{M}$的无界算子，若存在$\beta \in \mathcal{H}$，使得$AU\beta = \beta$，则投影$P = \overline{\{\mathcal{M}'\beta\}} \in \mathcal{M}$。并且对任意$\xi \in P\mathcal{H}$，有$AU\xi = \xi$。由极分解定理及$II_1$型因子的性质，我们可以选取$Q \in \{A\}''$，使得$AQ$为有界算子，并且$Q \wedge UPU^* \neq 0$。若选取$\xi \in P\mathcal{H}$使得$U\xi \in Q\mathcal{H}$，则$AQU\xi = AU\xi = \xi$。而$AQ$和$U$依然满足引理条件。可见只需对于$\|A\| < \infty$的情况证明在引理条件下1不为$AU$的点谱即可。

现在假设A有界，若1为AU的点谱，由A与U自由，及U为haar酉元可知，对于任意$\lambda \in \mathbb{C}$，$|\lambda| = 1$，都有A与λU自由，并且1为λAU的点谱。这就说明对任意$|\lambda| = 1$，λ属于AU的点谱。同样由于A与U的自由性，如果记P_λ为对应于AU点谱λ的谱投影，则对任意$|\lambda_1| = 1$，$|\lambda_2| = 1$有$P_{\lambda_1} \sim P_{\lambda_2}$。下面我们将归纳证明如果$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$为$n$（$n \ge 2$）个不同的范数为1的复数，则有$P_{\lambda_n} \wedge (\vee_{i=1}^{n-1} P_{\lambda_i}) = 0$。

$n=2$时结论自然成立。假设对于$n\leq k\in\mathbb{N}$结论成立。令$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{k+1}$为$k+1$个范数等于1的复数。如果$\xi\in(P_{\lambda_{k+1}}\wedge(\vee_{i=1}^{k}P_{\lambda_i}))\mathcal{H}$，对任意$\varepsilon>0$，存在$\xi_i\in P_{\lambda_i}\mathcal{H}(i=1,2,\ldots k)$使得

$$\|\xi-\xi_1-\xi_2-\ldots-\xi_k\|<\varepsilon,$$

于是有

$$\|\lambda_{k+1}\xi-\lambda_1\xi_1-\lambda_2\xi_2-\ldots-\lambda_k\xi_k\|<\|A\|\varepsilon。$$

由以上两个不等式可以得到

$$\|(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\xi-(\lambda_1-\lambda_k)\xi_1-(\lambda_2-\lambda_k)\xi_2-\ldots-(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\xi_{k-1}\|<(\|A\|+1)\varepsilon,$$

这等价于

$$\|\xi-\frac{(\lambda_1-\lambda_k)}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}\xi_1-\frac{(\lambda_2-\lambda_k)}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}\xi_2-\ldots-\frac{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)}{(\lambda_{k+1}-\lambda_k)}\xi_{k-1}\|<\frac{(\|A\|+1)}{\|\lambda_{k+1}-\lambda_k\|}\varepsilon,$$

此即说明ξ事实上属于$(P_{\lambda_{k+1}}\wedge(\vee_{i=1}^{k-1}P_{\lambda_i}))\mathcal{H}$，但由归纳假设$P_{\lambda_{k+1}}\wedge(\vee_{i=1}^{k-1}P_{\lambda_i})=0$，结论得证。若$\tau$为$\mathcal{M}$的忠实迹态，由于$P_{\lambda_1}\sim P_{\lambda_2}$，$\tau(P_{\lambda_1})=\tau(P_{\lambda_2})$。现在反复应用引理3.3中等式，可得到

$$1\geq\tau(\vee_{i=1}^{n}P_{\lambda_i})=n\tau(P_{\lambda_1}),\quad\forall n\in\mathbb{N},$$

以上成立当且仅当$\tau(P_{\lambda_1})=0$，即$P_{\lambda_1}=0$，于是有1不为AU的点谱。 ∎

接下来，我们开始描述Lat(Alg($\mathcal{F}_3$))的结构。在此过程中将频繁使用无界算子进行计算。由前所述附属于II_1型因子$\mathcal{L}_{G_3}=M_2(\mathcal{M})$的无界算子构成一个代数，并由算子的函数演算（function calculus），下文中用到的无界算子几乎都可被视为相对于Lebesgue测度定义在$(0,1)$区间上的（正）函数。譬如将H（$=H_1$或H_2）与$\cos^2\frac{\pi}{2}\theta$等同时，$I-H$，$\sqrt{H(I-H)}$，$\sqrt{H^{-1}}$，$\sqrt{(I-H)^{-1}}$可被视为三角函数，并且其中一个被确定时，其余随之确定。同时由引理3.12可知，许多自由（非自伴）算子的的线性组合，如

$$\begin{aligned}&\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}-\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V\\&=\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}(I-\sqrt{H_1^{-1}(I-H_1)}\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V),\end{aligned}$$

都可逆（其逆可能为无界算子）。

当S,T为附属于$\mathcal{L}_{G_3}$，或有限von Neumann代数的无界算子时，对于$X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，算子$SXT$可被视为有界算子$SE_\varepsilon XF_\varepsilon T$在弱算子拓扑下的极限，其中$E_\varepsilon$和$F_\varepsilon$ 为属于$\mathcal{L}_{G_3}$（或相应的有限von Neumann代数）的投影，使得SE_ε和$F_\varepsilon T$为有界算子，并且当ε趋于0时，E_ε，F_ε强算子趋于I。由此，对于属于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的弱算子稠子代数$\cup_\varepsilon E_\varepsilon \mathcal{B}(\mathcal{H}) F_\varepsilon$的算子$X$，$SXT$为有界算子。

在以上的意义下，现将引理3.8重新叙述为如下形式。

引理 3.13. *$H_1, H_2, V \in \mathcal{M} \subset \mathcal{L}_{G_3}$由引理3.8中给定，令$S = \sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}} - \sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V$为附属于$\mathcal{M}$的无界算子。对$T \in \mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$，存在$A \in \mathcal{B}$使得*

$$T = \begin{pmatrix} A & \sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}S^{-1}AS - A\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}} \\ 0 & S^{-1}AS \end{pmatrix}。$$

反之，若$A \in \mathcal{B}$使得$S^{-1}AS$和$\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}S^{-1}AS - A\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}$为有界算子，则$T$属于$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$。

由以上引理，及之前讨论，可见满足上述条件的算子为$\mathcal{B}$中在强算子拓扑下的稠子集，由此可知$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$包含众多算子，特别的$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3) \cap \mathcal{L}_{G_3}$为无限维。应用此事实，不难证明$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$中非平凡的投影（及不为$0, I$），在$\mathcal{L}_{G_3}$的迹态$\tau$下都取值为$\frac{1}{2}$。我们将此事实叙述为以下推论。

推论 3.14. *对$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)) \backslash \{0, I, P_1\}$中的任意投影$Q$，有$Q \wedge P_1 = 0$，$Q \vee P_1 = I$，并且$\tau(Q) = \frac{1}{2}$。*

证明. 对任意$Q \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$，可知$Q \wedge P_1 \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$，即在引理3.13中算子$T$的$(1,1)$位置的算子$A$的作用下不变，由前讨论即知$Q \wedge P_1$在$\mathcal{B}$的某强算子拓扑稠子集的作用下不变，就可推出$Q \wedge P_1 = P_1$或0。类似的可以证明$Q \vee P_1 = I$ or P_1。继而对$Q \neq P_1$，应用引理3.3中等式就有$\tau(Q) = \tau(Q \vee P_1) - \tau(P_1) + \tau(Q \wedge P_1) = 1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$。 ∎

注 5. 注意到以上推论实际证明了对于任意属于$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)) \setminus \{0, I\}$的投影$Q_1, Q_2$，以下成立$Q_1 \wedge Q_2 = 0$，$Q_1 \vee Q_2 = I$。

以下对于属于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的有界算子，或附属于某有限von Neumann代数的无界算子X，我们记supp(X)为X的支撑集，即X^*X的值域投影。当$\mathrm{supp}(X)=\mathrm{supp}(X^*)=I$时，$X$可逆（其逆可能是无界算子）。

定理 3.15. *对于*$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))\setminus\{0,I,P_1\}$*中的任意投影*$Q$*，存在*$K$*和*$U$*属于*$\mathcal{M}$*使得*

$$Q=\begin{pmatrix} K & \sqrt{K(I-K)}U \\ U^*\sqrt{K(I-K)} & U^*(I-K)U \end{pmatrix},$$

并且$\sqrt{K(I-K)^{-1}}$*（或*K*）和*U*由无界算子*

$$\begin{aligned}&(1+a)\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}-a\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V\\ &=aS+\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}=\sqrt{K(I-K)^{-1}}U\end{aligned}$$

的极分解唯一确定，其中$a\in\mathbb{C}$*。反之，对于任意给定*$a\in\mathbb{C}$*，由上述极分解给定的*U*和*K*可（由定理中的形式）唯一给出*$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$*中的投影*$Q$*。*

证明. 对于属于$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))\setminus\{0,I,P_1\}$的投影$Q$，相对于$M_2(\mathbb{C})$中的矩阵单位（即相对于$P_1$），可以将其写为

$$Q=\begin{pmatrix} K & \sqrt{K(I-K)}U \\ U^*\sqrt{K(I-K)} & U^*(I-K)U \end{pmatrix},$$

其中K（$0\le K\le I$），U（总可适当选取，使得U为酉算子，不失一般性可以假设U为酉算子）属于$\mathcal{M}$，并且由推论3.14可知，$\mathrm{supp}(I-K)=I$。从引理3.13知对于$A\in\mathcal{B}$（$M_2(\mathbf{C})$在$\mathcal{B}(l^2(G_3))$中的换位子，$\mathcal{B}\cong\mathcal{B}(\mathcal{H})$，$\mathcal{H}$为某一Hilbert空间），使得$S^{-1}AS$，$\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}S^{-1}AS$，和$A\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}$为有界算子，则

$$T=\begin{pmatrix} A & \sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}S^{-1}AS-A\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}} \\ 0 & S^{-1}AS \end{pmatrix}\in\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3),$$

并且满足以上条件的算子在强算子拓扑下为$\mathcal{B}$中的稠子集。从此即得

$$\begin{aligned}&(I-K)A\sqrt{K(I-K)}U+(I-K)\Big[\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}S^{-1}AS\\ &-A\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}\Big]U^*(I-K)U-\sqrt{K(I-K)}US^{-1}ASU^*(I-K)U=0,\end{aligned}$$

再由supp$(I-K)=I$，$I-K$可逆，就得到

$$\sqrt{I-K}A\left[\sqrt{K}-\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}U^*\sqrt{I-K}\right]$$
$$=\left[\sqrt{K}U-\sqrt{I-K}\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}\right]S^{-1}ASU^*\sqrt{I-K}。$$

于是

$$A[\sqrt{K}-\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}U^*\sqrt{I-K}](SU^*\sqrt{I-K})^{-1}$$
$$=\sqrt{(I-K)^{-1}}[\sqrt{K}U-\sqrt{I-K}\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}]S^{-1}A。$$

因为令上等式成立的算子形成的子代数在$\mathcal{B}$（$\cong\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$）强算子稠。就有，存在$a\in\mathbb{C}$使得

$$a\sqrt{I-K}=[\sqrt{K}U-\sqrt{I-K}\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}]S^{-1},$$
$$aSU^*\sqrt{I-K}=\sqrt{K}-\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}U^*\sqrt{I-K}。$$

这就说明

$$\sqrt{K(I-K)^{-1}}U=aS+\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}。$$

由引理3.12可以推出supp$(K)=I$，且U为酉算子。反之，若K和U由以上等式给定。由引理3.13，可以验证定理中给定的投影Q属于Lat(Alg($\mathcal{F}_3$))。 ■

3.3　Kadison-Singer代数Alg($\mathcal{F}_3$)

本节中，我们将证明Lat(Alg($\mathcal{F}_3$))是Kadsion-Singer格，进而有Alg($\mathcal{F}_3$)为Kadsion-Singer代数。要证明此事实，我们需要一下两个引理。

引理 3.16. 对于Lat(Alg($\mathcal{F}_3$)) $\setminus\{0,I,P_1\}$中任意两个投影Q_1，Q_2，我们有Alg($\{P_1,Q_1,Q_2\}$) = Alg($\mathcal{F}_3$)。

证明. 由定理3.15，可以假设对于$i=1$，2有

$$Q_i=\begin{pmatrix} K_i & \sqrt{K_i(I-K_i)}U_i \\ U_i^*\sqrt{K_i(I-K_i)} & U_i^*(I-K_i)U_i \end{pmatrix}，且$$

$$\sqrt{K_i(I-K_i)^{-1}}U_i=(1+a_i)\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}-a_i\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V$$
$$=a_iS+\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}},$$

其中a_1，$a_2 \in \mathbb{C}$，并且$a_1 \neq a_2$。于是有

$$\sqrt{K_1(I-K_1)^{-1}}U_1 - \sqrt{K_2(I-K_2)^{-1}}U_2 = (a_1-a_2)S。$$

现在用$(a_1-a_2)S$替换引理3.13中的S，就可看出$\mathrm{Alg}(\{P_1,Q_1,Q_2\}) = \mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$。

■

引理 3.17. 对于任意属于$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)) \setminus \{0,I\}$的三个投影$Q_1,Q_2$和$Q_3$，有$P_1 \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\{Q_1,Q_2,Q_3\}))$。

证明. 与前引理同样，假设对于$i=1$，2，3，

$$Q_i = \begin{pmatrix} K_i & \sqrt{K_i(I-K_i)}U_i \\ U_i^*\sqrt{K_i(I-K_i)} & U_i^*(I-K_i)U_i \end{pmatrix},$$

a_1，a_2，a_3为三互不相等复数。

要证明本引理，只需说明如果

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Alg}(\{Q_1,Q_2,Q_3\}),$$

则$A_{21}=0$。现假设A属于$\mathrm{Alg}(\{Q_1,Q_2,Q_3\})$。于是对于$i=1$，2，3有$(I-Q_i)AQ_i=0$。比较等式$AQ_i=Q_iAQ_i$两端$2\times 2$矩阵的$(1,2)$ 位置得到

$$\begin{aligned}(I-K_i)(A_{11}&\sqrt{K_i(I-K_i)}U_i+A_{12}U_i^*(I-K_i)U_i)\\ &= \sqrt{K_i(I-K_i)}U_i(A_{21}\sqrt{K_i(I-K_i)}U_i + A_{22}U_i^*(I-K_i)U_i)。\end{aligned}$$

在II_1型因子$\mathcal{L}_{G_3}$中选取投影E_ε使得$E_\varepsilon\sqrt{K_i(I-K_i)^{-1}}$（$i=1,2,3$），$E_\varepsilon S$，$E_\varepsilon\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}$都为有界算子，并且当$\varepsilon\to 0$时，$E_\varepsilon$强算子收敛到$I$。则对于任意

$\xi \in (\cap_{i=1}^3 \mathcal{D}(U_i^*(I-K_i)^{-1}U_i)) \cap (\mathcal{D}(S)) \cap (\mathcal{D}(\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}))$（为$\mathcal{H}$中的稠子集）

以下等式成立

$$A_{11}\sqrt{K_i(I-K_i)^{-1}}U_i\xi + A_{12}\xi = \sqrt{K_i(I-K_i)^{-1}}U_i[A_{21}\sqrt{K_i(I-K_i)^{-1}}U_i\xi + A_{22}\xi]。$$

又从$\sqrt{K_i(I-K_i)^{-1}}U_i = a_iS + \sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}$，则对于$i$，$j=1$，2，3有

$$\begin{aligned}E_\varepsilon\sqrt{K_i(I-K_i)^{-1}}U_iA_{21}\sqrt{K_i(I-K_i)^{-1}}U_i\xi - E_\varepsilon\sqrt{K_j(I-K_j)^{-1}}U_jA_{21}\sqrt{K_j(I-K_j)^{-1}}U_j\xi\\ = (a_i-a_j)[E_\varepsilon A_{11}S\xi - E_\varepsilon SA_{22}\xi]。\end{aligned}$$

由此推出

$$
\begin{aligned}
&(a_1-a_2)E_\varepsilon\sqrt{K_3(I-K_3)^{-1}}U_3A_{21}\sqrt{K_3(I-K_3)^{-1}}U_3\xi+\\
&(a_2-a_3)E_\varepsilon\sqrt{K_1(I-K_1)^{-1}}U_1A_{21}\sqrt{K_1(I-K_1)^{-1}}U_1\xi+\\
&(a_3-a_1)E_\varepsilon\sqrt{K_2(I-K_2)^{-1}}U_2A_{21}\sqrt{K_2(I-K_2)^{-1}}U_2\xi=0。
\end{aligned}
$$

再次应用关系$\sqrt{K_i(I-K_i)^{-1}}U_i=a_iS+\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}$，从上等式就有

$$
\begin{aligned}
&[a_3^2(a_1-a_2)+a_1^2(a_2-a_3)+a_2^2(a_3-a_1)]E_\varepsilon SA_{21}S\xi\\
&+[a_3(a_1-a_2)+a_1(a_2-a_3)+a_2(a_3-a_1)][E_\varepsilon SA_{21}\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}\xi\\
&\quad+E_\varepsilon\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}A_{21}S\xi]\\
&+[(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_1)]E_\varepsilon\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}A_{21}\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}\xi=0，
\end{aligned}
$$

即有

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)E_\varepsilon SA_{21}S\xi=0。$$

此式就说明$A_{21}=0$，于是命题成立。

引理 3.18. 由$\mathbb{C}$到$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$定义如下一一映射

$$\mathbb{C}\to\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))\quad:a\to Q_a=\begin{pmatrix}K_a & \sqrt{K_a(I-K_a)}U_a\\ U_a^*\sqrt{K_a(I-K_a)} & U_a^*(I-K_a)U_a\end{pmatrix},$$

$$\sqrt{K_a(I-K_a)^{-1}}U_a=aS+\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}。$$

则当$\mathbb{C}$赋予通常意义下的范数拓扑，$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$赋予$\|.\|_2$范数拓扑时，此映射为连续映射。

证明. 只需证明当$a\to a_0$时，$\|Q_a-Q_{a_0}\|_2\to0$。从以下（$tr(.)$为$\mathcal{M}$上的迹态）

$$
\begin{aligned}
\|Q_a-Q_{a_0}\|_2^2&=1-2\tau(Q_aQ_{a_0})\\
&=1-tr(K_aK_{a_0})-tr(\sqrt{K_a(I-K_a)}U_aU_{a_0}^*\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})})\\
&-tr(U_a^*\sqrt{K_a(I-K_a)}\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}U_{a_0})\\
&-tr(U_a^*(I-K_a)U_aU_{a_0}^*(I-K_{a_0})U_{a_0})
\end{aligned}
$$

可见只需证明当$a \to a_0$时，

$$|tr((K_a - K_{a_0})K_{a_0})| \to 0, \tag{3.1}$$

$$|tr((\sqrt{K_a(I-K_a)}U_a - \sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}U_{a_0})U_{a_0}^*\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})})| \to 0, \tag{3.2}$$

$$|tr((U_a^*\sqrt{K_a(I-K_a)} - U_{a_0}^*\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})})\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}U_{a_0})| \to 0, \tag{3.3}$$

$$|tr(K_a - K_{a_0})| \to 0, \quad |tr((U_a^*K_aU_a - U_{a_0}^*K_{a_0}U_{a_0})U_{a_0}^*K_{a_0}U_{a_0})| \to 0。 \tag{3.4}$$

以下我们只证明(3.1)，(3.2)，其余可类似证明。

首先注意到对任意$a \in \mathbb{C}$，

$$K_a(I-K_a)^{-1} = |a|^2SS^* + aS\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}} + \overline{a}\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}S^* + H_1(I-H_1)^{-1}。$$

以下记$F(a) = |a|^2SS^* + aS\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}} + \overline{a}\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}S^* + H_1(I-H_1)^{-1}$。于是

$$K_a = F(a)(I+F(a))^{-1}。$$

对于任意$\varepsilon > 0$，可选取投影$F_\varepsilon \in \mathcal{M}$使得，若$E_\varepsilon = Range((I+F(a_0))^{-1}F_\varepsilon) \in \mathcal{M}$，则$SS^*E_\varepsilon$，$S\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}E_\varepsilon$，$\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}S^*E_\varepsilon$，$\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}E_\varepsilon$都为有界算子，并且$tr(I-F_\varepsilon) = tr(I-E_\varepsilon) < \varepsilon^2$。由此知存在$\beta > 0$，只要$|a-a_0| < \beta$，就有$\|F(a)E_\varepsilon - F(a_0)E_\varepsilon\| < \varepsilon$。于是

$$\begin{aligned}|tr((K_a - K_{a_0})K_{a_0})| &\le |tr(K_{a_0}(K_a - K_{a_0})F_\varepsilon)| + |tr(K_{a_0}(K_a - K_{a_0})(I-F_\varepsilon))| \\ &\le |tr(K_{a_0}(I+F(a))^{-1}(F(a)-F(a_0))(I+F(a_0))^{-1}F_\varepsilon)| + 2\varepsilon \le 3\varepsilon。\end{aligned}$$

要证明(3.2)，类似的,对任意$\varepsilon > 0$，选取投影$P_\varepsilon \in \mathcal{M}$使得，$SP_\varepsilon$，$\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}P_\varepsilon$为有界算子，并且$tr(I-P_\varepsilon) < \varepsilon^2$。同样的就存在$\beta_1 > 0$使得只要$|a-a_0| < \beta_1$，就有

$$\|\sqrt{K_a(I-K_a)^{-1}}U_aP_\varepsilon - \sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})^{-1}}U_{a_0}P_\varepsilon\| \le \varepsilon。$$

于是

$$
\begin{aligned}
&|tr((\sqrt{K_a(I-K_a)}U_a-\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}U_{a_0})U_{a_0}^*\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})})|\\
&\le |tr(U_{a_0}^*\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}(\sqrt{K_a(I-K_a)}U_a-\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}U_{a_0})P_\varepsilon)|\\
&+|tr(U_{a_0}^*\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}(\sqrt{K_a(I-K_a)}U_a-\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}U_{a_0})(I-P_\varepsilon))|\\
&\le |tr(U_{a_0}^*\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}(I-K_a)[\sqrt{K_a(I-K_a)^{-1}}U_aP_\varepsilon-\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})^{-1}}U_{a_0}P_\varepsilon])|\\
&+|tr(\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})^{-1}}U_{a_0}P_\varepsilon U_{a_0}^*\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}(K_{a_0}-K_a))|+2\varepsilon\\
&\le |tr(\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})^{-1}}U_{a_0}P_\varepsilon U_{a_0}^*\sqrt{K_{a_0}(I-K_{a_0})}(K_{a_0}-K_a))|+3\varepsilon。
\end{aligned}
$$

再用证明(3.1)的方法对上不等式进行估计，即可证明(3.2)。 ∎

完全类似以上，我们得到如下结果。

引理 3.19. *应用引理3.18中的符号有，当$a\to\infty$，Q_a强算子收敛于P_1。*

注意到使用引理3.18的符号有$P_2=Q_0$，$P_3=Q_{-1}$，由引理3.19，我们可以定义Q_∞为P_1，即得到如下定理。

定理 3.20. *$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)$是$KS$-代数，并且$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$中的投影$P$若不为$0$，$I$，$P_1$，则*

$$
P=\begin{pmatrix} K & \sqrt{K(I-K)}U \\ U^*\sqrt{K(I-K)} & U^*(I-K)U \end{pmatrix},
$$

其中K和U由如下极分解唯一决定

$$
(a+1)\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}-a\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V=\sqrt{K(I-K)^{-1}}U,\quad a\in\mathbb{C}。
$$

此外还有$\tau(P)=\frac{1}{2}$，及当a趋于∞时，投影P强算子收敛于P_1。一般的有$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))\setminus\{0,I\}$同胚于$S^2$。

证明. 首先由引理3.18，3.19可以看出映射

$$
S^2\to \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))\setminus\{0,I\}:\quad a\to\begin{cases} Q_a, & a\in\mathbb{C}\\ P_1, & a=\infty\end{cases}
$$

（Q_a的意义与引理3.18中相同）为从S^2（$\mathbb{C}$的一点紧化）到$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)) \setminus \{0, I\}$（取二范数拓扑）上的连续映射，由于$S^2$为紧集，并且$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)) \setminus \{0, I\}$为Hausdorff空间，即得此映射为同胚。

剩下我们只需证明格$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$的极小性。显然如果子格$\mathcal{L}_1$只包含$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$的两个投影$Q_1, Q_2$，则$\mathcal{L}_1$不能生成$II_1$型因子$\mathcal{L}_{G_3}$。由引理3.17，若$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$的自反子格包含大于等于三个非平凡投影，则此子格与$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$相同。于是定理得证。 ■

虽然上述定理是对于三个自由投影生成的格$\mathcal{F}_3$叙述的，但对于某些并不自由的三个投影P_1，P_2和P_3，也可得到类似结论。我们知道许多因子都可由三个投影生成。特别的令$\mathcal{M}$为II_1型因子，τ为$\mathcal{M}$上的迹态。$M_2(\mathbf{C}) \subseteq \mathcal{M}$，并且$M_2(\mathbf{C})' \cap \mathcal{M} = \mathcal{N}$为由$H_1$，$H_2$和$V$生成的$\mathcal{M}$的子因子，此处$0 \le H_1$，$H_2 \le I$，$V$为酉元。不妨假设$\mathcal{M}$作用在$\mathcal{H} = L^2(\mathcal{M}, \tau)$上。令$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{C})$为$\mathcal{M}$中的投影。进一步若有

$$P_2 = \begin{pmatrix} H_1 & \sqrt{H_1(I-H_1)} \\ \sqrt{H_1(I-H_1)} & I - H_1 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} H_2 & \sqrt{H_2(I-H_2)}V \\ V^*\sqrt{H_2(I-H_2)} & V^*(I-H_2)V \end{pmatrix}$$

为$\mathcal{M}$中的投影，并且满足$P_2 \vee P_3 = I$，$P_2 \wedge P_3 = 0$，及$\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}$，$\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}$和
$\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}} - \sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V$都为有界可逆算子。可以检验，当$H_1$，$H_2$相互自由，其谱属于$(0,1)$且不相交，$V = I$，并且$\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}}$与$\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}$的谱互不相交时，之前条件满足。

定理 3.21. 由以上假设及符号有，$\mathrm{Alg}(\{P_1, P_2, P_3\})$为*Kadison-Singer*代数，并且$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\{P_1, P_2, P_3\}))$由以下决定：$P \in \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\{P_1, P_2, P_3\}))$，则$P \ne 0, I, P_1$当且仅当有

$$P = \begin{pmatrix} L & \sqrt{L(I-L)}U \\ U^*\sqrt{L(I-L)} & I - U^*LU \end{pmatrix},$$

其中L和U由下述极分解唯一决定，$(a+1)\sqrt{H_1(I-H_1)^{-1}} - a\sqrt{H_2(I-H_2)^{-1}}V = \sqrt{L(I-L)^{-1}}U$，$a \in \mathbf{C}$。由此可知$\tau(P) = \frac{1}{2}$。

上述定理的证明与定理3.20的证明完全类似。并且同样可以验证，当$a \to \infty$时，定理3.21中的投影P强算子收敛于P_1。于是即有$\mathcal{L} = \mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\{P_1, P_2, P_3\}))\setminus \{0, I\}$同胚于复平面的一点紧化（即为$S^2$）。

当格包含四个或四个以上属于某von Neumann代数的投影时，情况将更为复杂。即使对于$\mathcal{F}_4$（由四个自由投影生成的格），目前我们也还不能完全确定$\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_4))$，但由已知的结果，可以得到其包含数个$S^2$。对于$n \geq 4$，决定$\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_n)$是否包含紧算子是我们感兴趣的问题。

3.4　约化格

本节中我们将对于属于有限von Neumann代数的格，定义其中投影之间的等价关系。

定义 3.2. 若$\mathcal{L}$为属于有限von Neumann代数$\mathcal{M}$的投影格，对于$\mathcal{M}$上的某忠实正规迹态τ，称$\mathcal{L}$中的投影P，Q为连通的（connected），当且仅当对于任意$\varepsilon > 0$，存在$\mathcal{L}$中的投影P_1，P_2，…，P_n，使得$P_1 = P$，$P_n = Q$，$|\tau(P_j - P_{j+1})| < \varepsilon$，并且对于$j = 1$，…，$n-1$有，$P_j \leq P_{j+1}$或$P_j \geq P_{j+1}$。

记包含P的联通分支为$O(P)$，即为$\mathcal{L}$中所有与P连通的投影的集合。令$\Gamma_0(\mathcal{L})$为$\mathcal{L}$中所有连通分支的集合。以下将看到$\mathcal{L}$上的格结构可自然地诱导$\Gamma_0(\mathcal{L})$上的格结构，在此意义下，我们称$\Gamma_0(\mathcal{L})$为$\mathcal{L}$的约化格。

由以上定义易见，如果$\mathcal{L}$为连续套，则$\Gamma_0(\mathcal{L})$将只包含一个点。下面给出关于连通分支的基本事实。

命题 3.22. *若$\mathcal{L}$为属于有限von Neumann代数$\mathcal{M}$的投影格，P，$Q \in \mathcal{L}$。如果$O(P) \neq O(Q)$，则$O(P) \cap O(Q) = \emptyset$。*

此命题的证明可由定义直接给出。若$O(P)$，$O(Q)$为$\Gamma_0(\mathcal{L})$中的两个等价类，则对于任意$Q_1 \in O(Q)$，易知$O(P \vee Q) = O(P \vee Q_1)$。事实上，由定义对于任意$\varepsilon$，存在$P_1$，$P_2$，…，$P_n$，$P_1 = Q$，$P_n = Q_1$，$|\tau(P_j - P_{j+1})| < \varepsilon$，并且对于$j = 1$，…，$n-1$有，$P_j \leq P_{j+1}$或$P_j \geq P_{j+1}$。不妨假设$P_j \leq P_{j+1}$，则$P_{j+1} = P_j \vee P'$，$\tau(P') \leq \varepsilon$，于是有

$$|\tau(P \vee P_j) - \tau(P \vee P_{j+1})| = |\tau(P \vee P_j) - \tau(P \vee P_j \vee P')|$$

$$= |\tau(P') - \tau((P \vee P_j) \wedge P')| \leq \varepsilon。$$

就说明$P\vee Q$与$P\vee Q_1$连通。所以$O(P\vee Q)$只取决于$O(P)$ 和$O(Q)$，而与$O(P)$，$O(Q)$
中代表元的选取无关。由是可以定义$O(P)\vee O(Q)=O(P\vee Q)$。类似的，可以证明定义$O(P)\wedge O(Q)=O(P\wedge Q)$合理。显然在以上定义下，$\mathcal{L}$上的格结构诱导了$\Gamma_0(\mathcal{L})$上的格结构。由定义，立得如下定理。

定理 3.23. 若$\mathcal{L}$为有限*von Neumann*代数$\mathcal{M}$中的投影格，τ为$\mathcal{M}$的某个（忠实，正规）迹态。如果$\tau(\mathcal{L})$ 只含有有限个值，则$\Gamma_0(\mathcal{L})$与$\mathcal{L}$相等（即$\mathcal{L}$中每个连通分支都为独点集）。

从以上定理，我们知道$\Gamma_0(\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3)))=\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{F}_3))$。若$\mathcal{L}$ 为Kadison-Singer格，并且$\mathcal{L}$生成一个有限von Neumann代数。如果$\Gamma_0(\mathcal{L})$只包含一个点，我们称$\mathcal{L}$为可缩的（contractible）。譬如，连续套为可缩的。并且显然约化格不能包含连续套。下面的定理表明定理3.23的逆命题不成立。

定理 3.24. 若$\mathcal{L}^{(n)}$为第二章中（对于迹态τ）给出的格，则有$\Gamma_0(\mathcal{L}^{(n)})=\mathcal{L}^{(n)}$。

以上定理的证明有赖于以下两个引理（下述证明中的符号请参考第二章相应内容）。

引理 3.25. 令$P=E_i^{(1)}+F_{n-i}^{(1)}Q$为$\mathcal{L}^{(n)}$中投影，则$\widetilde{P}=E_j^{(1)}+F_{n-j}^{(1)}\widetilde{Q}\le P$当且仅当$j\le i$，且$\widetilde{Q}\le Q$。并有$|\tau(P)-\tau(Q)|=\frac{i-j}{n}+\frac{\tau(Q-\widetilde{Q})}{n}$。

上述引理的证明十分简单（如可考虑投影在迹态下的取值），在此省略证明。但需注意到，引理说明若在两投影$P=E_i^{(1)}+F_{n-i}^{(1)}Q$，$\widetilde{P}=E_j^{(1)}+F_{n-j}^{(1)}\widetilde{Q}$满足$P\le\widetilde{P}$，或$P\ge\widetilde{P}$的前提下，$|\tau(P-\widetilde{P})|<\frac{1}{n}$必有$i=j$。有了以上观察，容易得到以下引理。

引理 3.26. 令$P_1=E_{i_1}^{(1)}+F_{n-i_1}^{(1)}Q_1$，$P_2=E_{i_2}^{(1)}+F_{n-i_2}^{(1)}Q_2$为$\mathcal{L}^{(n)}$中的两投影，如果$i_1\ne i_2$，则有$P_1$，$P_2$不连通。

证明. 假设P_1，P_2连通，则由定义有，对于$\varepsilon<\frac{1}{n}$，存在$\mathcal{L}^{(n)}$中的投影$\widetilde{P}_1$，$\widetilde{P}_2$，$\ldots$，$\widetilde{P}_m$，使得$P_1=\widetilde{P}_1$，$\widetilde{P}_m=P_2$，$|\tau(\widetilde{P}_j-\widetilde{P}_{j+1})|<\varepsilon$，并且$\widetilde{P}_j\le\widetilde{P}_{j+1}$或$\widetilde{P}_j\ge\widetilde{P}_{j+1}$。由前讨论，因为$\widetilde{P}_1=P_1=E_{i_1}^{(1)}+F_{n-i_1}^{(1)}Q_1$，就有$\widetilde{P}_2=E_{i_1}^{(1)}+F_{n-i_1}^{(1)}\widetilde{Q_2}$，归

纳即有$\widetilde{P}_j = E^{(1)}_{i_1} + F^{(1)}_{n-i_1}\widetilde{Q_j}(j=1,2,\dots m)$。特别的

$$E^{(1)}_{i_1} + F^{(1)}_{n-i_1}\widetilde{Q_m} = \widetilde{P}_m = P_2 = E^{(1)}_{i_2} + F^{(1)}_{n-i_2}Q_2,$$

与假设矛盾。 ■

应用以上方法，简单的数学归纳即得定理3.24，在此仅给出证明概要。

定理3.24的证明. 只需说明若P_1，P_2为$\mathcal{L}^{(n)}$中两个不相同的投影，则P_1，P_2不连通。

如果$P_1 \neq P_2$，则必存在$k \in \mathbb{N}$使得

$$P_1 = E^{(1)}_{a_1} + F^{(1)}_{n-a_1}E^{(2)}_{a_2} + \cdots + (\prod_{i=1}^{k-2} F^{(i)}_{n-a_i})E^{(k-1)}_{a_{k-1}} + (\prod_{i=1}^{k-1} F^{(i)}_{n-a_i})E^{(k)}_{a_k} + (\prod_{i=1}^{k} F^{(i)}_{n-a_i})Q_1,$$

$$P_2 = E^{(1)}_{a_1} + F^{(1)}_{n-a_1}E^{(2)}_{a_2} + \cdots + (\prod_{i=1}^{k-2} F^{(i)}_{n-a_i})E^{(k-1)}_{a_{k-1}} + (\prod_{i=1}^{k-1} F^{(i)}_{n-a_i})E^{(k)}_{b_k} + (\prod_{i=1}^{k-1} F^{(i)}_{n-a_i})F^{(k)}_{n-b_k}Q_2,$$

其中$a_k \neq b_k$，则类似引理3.26的证明，应用数学归纳法即得结论。 ■

在结束本章前，我们给出另一种以von Neumann代数为对角的极大上三角代数（不是在Kadison-Singer代数意义下）的构造方法。

3.5　关于极大性的讨论

在定义Kadison-Singer代数时，我们要求代数相对于所有对角相同的自反代数极大。我们在第二章中构造的“极大上三角”代数不仅相对于所有自反代数极大，而且相对于所有代数具有极大性，即不需自反性，或相对于任何拓扑为闭集的假设。一般来说，要满足代数极大性并不容易。在本节中我们去掉自反性假设，但保留相对于弱算子拓扑闭的假设，构造一类相对于所有弱算子闭代数极大的，以von Neumann代数为对角的“上三角”代数。

假设$\mathcal{M}$为作用在Hilbert空间$\mathcal{H}_0$上的von Neumann代数，且存在$\mathcal{M}$中的可逆正算子H_1，…，H_n满足H_1^2，H_2^2，…，H_n^2为$\mathcal{M}$的生成元。由[GS]，可知许多von Neumann代数都可由有限个可逆正算子生成，特别的，所有III型的von Neumann代数都满足上述条件。令$\mathcal{H}$为$n+1$个$\mathcal{H}_0$的直和。则$\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cong M_{n+1}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_0))$。由此，我们同时将$M_{n+1}(\mathbb{C})$和$\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$视为$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子代数。令$E_{ij}$，$i$，$j=1$，…，$n+1$，为$M_{n+1}(\mathbb{C})$的矩阵单位。相对于以上矩阵单位，我们可以将$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中元素记为以$\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$中算子为矩阵元的算子矩阵。则得到以下定理。

定理 3.27. 若定义弱算子闭代数

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} A & * & \dots & * \\ 0 & H_1^{-1}AH_1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_n^{-1}AH_n \end{pmatrix} : \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0) \right\},$$

其中$*$代表该位置可取$\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$中任意元素为值。则$\mathfrak{A}$满足$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^* = M_{n+1}(\mathcal{M})'$ ($\cong \mathcal{M}' \cap \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$)。并且$\mathfrak{A}$在之前提到的意义下极大，即对于任意满足$\mathfrak{A} \subset \mathcal{W}$的弱算子闭代数$\mathcal{W}$，如果$\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^* = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^*$，就有$\mathcal{W} = \mathfrak{A}$。

下面我们证明此结论。

引理 3.28. $\mathfrak{A}$弱算子闭，且满足$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^* = M_{n+1}(\mathcal{M})'$。

证明. 首先说明$\mathfrak{A}$弱算子闭。由$\mathfrak{A}$的定义有$A \in \mathfrak{A}$当且仅当

$$E_{i,i}AE_{j,j} = 0(i > j) \tag{3.5}$$

$$E_{1,1}AE_{1,1} = H_iE_{1,i+1}AE_{i+1,1}H_i^{-1}。 \tag{3.6}$$

则显然有，如果$T_\alpha \xrightarrow{\text{WOT}} T$，$T_\alpha \in \mathfrak{A}$，$E_{i,i}TE_{j,j} = \lim_\alpha E_{i,i}T_\alpha E_{j,j} = 0(i > j)$，及

$$\begin{aligned} E_{1,1}TE_{1,1} &= \lim_\alpha E_{1,1}T_\alpha E_{1,1} \\ &= \lim_\alpha H_iE_{1,i+1}T_\alpha E_{i+1,1}H_i^{-1} \\ &= H_iE_{1,i+1}TE_{i+1,1}H_i^{-1}, \end{aligned}$$

这就说明$T \in \mathfrak{A}$。

要证明$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}^* = M_{n+1}(\mathcal{M})'$，只需说明任意属于$\mathfrak{A}$的自伴算子$H$属于$M_{n+1}(\mathcal{M})'$。由(3.5)，(3.6) 易见，对于$H \in \mathfrak{A}$有

$$E_{i,i}HE_{j,j} = 0(i \neq j),$$

$$E_{1,1}HE_{1,1} = H_iE_{1,i+1}HE_{i+1,1}H_i^{-1},$$

$$E_{1,1}HE_{1,1} = H_i^{-1}E_{1,i+1}HE_{i+1,1}H_i,$$

由假设$\{H_1{}^2, H_2{}^2, \dots, H_n{}^2\}'' = \mathcal{M}$，可见上述等式正说明$H \in M_{n+1}(\mathcal{M})'$。 ∎

引理 3.29. 对于$M_{n+1}(\mathcal{B}(\mathcal{H}_0))$中的算子$T$，如果由$\mathfrak{A}$与$T$生成的代数$\mathcal{W}$（不需要取弱算子闭包）满足$\mathcal{W}^* \cap \mathcal{W} = M_{n+1}(\mathcal{M})'$，则有$E_{i,i}TE_{j,j} = 0$，$i > j$，$i, j = 1, \ldots n+1$。

证明. 如果存在$i > 1$使得$E_{i,i}TE_{1,1} \neq 0$，令

$$E_{1,1}UHE_{1,1} = E_{1,i}TE_{1,1} = E_{1,i}T - \sum_{j=2}^{n+1} E_{1,i}TE_{j,j}$$

为$E_{1,i}TE_{1,1}(\in \mathcal{W})$的极分解，则有

$$E_{1,1}HE_{1,1} = (E_{1,1}U^*E_{1,1} + \sum_{j=2}^{n+1} H_{j-1}^{-1}E_{j,1}U^*E_{1,j}H_{j-1})E_{1,1}UHE_{1,1} \in \mathcal{W},$$

但显然$E_{1,1}HE_{1,1}$不属于$M_{n+1}(\mathcal{M})'$，与假设矛盾。类似的，可证明其余情况。

■

定理*3.27*的证明. 要证明定理，只需说明对于属于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的算子T，如果T与$\mathfrak{A}$生成的弱算子闭代数$\mathcal{W}$满足$\mathcal{W}^* \cap \mathcal{W} = M_{n+1}(\mathcal{M})'$，即有$T \in \mathfrak{A}$。由引理3.29，以及$\mathfrak{A}$的构造，不妨假设

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & H_1^{-1}A_2H_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & H_n^{-1}A_{n+1}H_n \end{pmatrix} \in \mathcal{W}。$$

以下将证明$A_1 = A_2 = \ldots = A_{n+1}$，等价于要说明$A_1 - A_{n+1} = A_2 - A_{n+1} = \ldots = 0$。如若不然，不失一般性可假设$A_1 - A_{n+1} \neq 0$，$A_1 - A_{n+1} \geq 0$。事实

上，如果令UK为$A_1 - A_{n+1}$的极分解，就有

$$\begin{pmatrix} U^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1^{-1}U^*H_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_n^{-1}U^*H_n \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} A_1 - A_{n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & H_1^{-1}(A_2 - A_{n+1})H_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_{n-1}^{-1}(A_n - A_{n+1})H_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1^{-1}U^*(A_2 - A_{n+1})H_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}。$$

由以上讨论，现假设$A_1 \geq 0$，$A_{n+1} = 0$。选取$\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$中的一维投影$P$，使得$PA_1P = c_1P \neq 0$，于是有

$$\frac{1}{c_1}\begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1^{-1}PH_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_n^{-1}PH_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1^{-1}A_2H_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_1^{-1}PH_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H_n^{-1}PH_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2H_1^{-1}PH_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{W},$$

其中$c_iP = \frac{1}{c_1}PA_iP$（$i = 2, \dots, n$）。由算子的函数演算，不妨假设$c_i = 1$（$i = 2, \dots, n$）。令$\{e_\alpha\}_\alpha$，为$\mathcal{H}$的一组标准正交基，并且$Pe_{\alpha_0} = e_{\alpha_0}$。使$V_\alpha$为将$e_\alpha$映为$e_{\alpha_0}$的部分等距算子，则有$\sum_\alpha V_\alpha PV_\alpha^* = I$（其有限和弱算子收敛

为I）。于是

$$\begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{W}^* \cap \mathcal{W},$$

则假设与引理条件矛盾，定理得证。 ∎

注 6. 对于定理3.27中定义的代数，如果投影$P = (P_{ij})_{i,j=1}^{n+1} \in \mathrm{Lat}(\mathfrak{A})$，$P_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$，简单的矩阵计算即可验证$P$必须为对角矩阵，并且$(I - P_{ii})TP_{jj} = 0$，对于$i < j$，及任意$T$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$。就有$P = \sum_{j=1}^{k} E_{jj}$，$k$为某不大于$n+1$的自然数。此即说明

$$\mathrm{Lat}(\mathfrak{A}) = \{0, E_{11}, \dots, \sum_{j=1}^{n} E_{jj}, I\}。$$

同时显然$\mathfrak{A} \subsetneqq \mathrm{Alg}(\mathrm{Lat}(\mathfrak{A}))$，即$\mathfrak{A}$不为自反代数。

参考文献

[1] A.Connes. Uneclassification des facteurs de type III. *Ann.Sci.école*, 6:133–152, 1973.

[2] A.Connes. Classification of injective factors, cases $\mathrm{II}_1, \mathrm{II}_\infty, \mathrm{III}_\lambda, \lambda \neq 1$. *Ann.Math.*, 104:73–115, 1976.

[3] W.B. Arveson. A density theorem for operator algebras. *Duke Math.J*, 34:635–647, 1967.

[4] K.Dykema D.Voiculescu and A.Nica. Free random variables. *CRM Monograph Series*, 1, 1992.

[5] Ken Dykema. Free products of hyperfinite von neumann algebras and free dimension. *Duke Math.J.*

[6] J. von Neumann F.J. Murray. On rings of operators. *Ann.Math.*, 37:116–229, 1936.

[7] J. von Neumann F.J. Murray. On rings of operators, II. *Trans.Amer.Math.Soc.*, 41:208–248, 1937.

[8] J. von Neumann F.J. Murray. On rings of operators, IV. *Ann.Math.*, 44:716–808, 1943.

[9] L. Ge. Applications of free entropy to finite von neumann algebras I. *Amer.J.Math*, 119:467–458, 1997.

[10] L. Ge. Applications of free entropy to finite von neumann algebras II. *Ann.Math*, 147:no.1,143–157, 1998.

[11] Liming Ge and Wei Yuan. Kadison-singer algebras, I - hyperfinite case. *to appear.*

[12] Liming Ge and Wei Yuan. Kadison-singer algebras, II - finite case. *to appear.*

[13] H.Radjavi and P.Rosenthal. *Invariant Subspaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1973.

[14] J.Glimm. On acertain class of operator algebras. *Trans.Amer.Math.Soc*, 95:318–340, 1960.

[15] J.Glimm. Type I C^*-algebras. *Ann.Math.*, 73:572–611, 1961.

[16] K.Harrison. On lattices of invariant subspaces. *Doctoral Thesis*, 1970.

[17] L.Ge and J.Shen. On the generator problem of von neumann algebras. *Proc. of ICCM (Hong Kong)*, 2004.

[18] M.Takesaki. *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications,Lecture Notes in Mathematics*, volume 128. Springer-Verlag,Heidelberg, 1970.

[19] M.Takesaki. Duality for corssed products and the structure of von neumann algebras of type III. *Acta.Math.*, 131:249–310, 1973.

[20] M.Tomita. Standard forms of von neumann algebras. *Fifth Functional Analysis Symposium of the Math.Soc.Japan,Aenddai*, 1967.

[21] P.Halmos. Two subspaces. *Trans.Amer.Math.Soc.*, 144:381–389, 1969.

[22] P.Halmos. Reflexive lattices of subspaces. *J.London Math.Soc.*, 4:257–263, 1971.

[23] J.R. Ringrose. On some algebras of operators. *Proc.London Math.Soc.*, (3) 15:61–83, 1965.

[24] J.R. Ringrose. On some algebras of operators II. *Proc.London Math.Soc.*, (3) 16:385–402, 1966.

[25] R.Kadison. On the orthogonalization of operator representations. *Amer.J.Math.*, 78:600–621, 1955.

[26] R.Kadison and I.Singer. Triangular operator algebras. fundamentals and hyperreducible theory. *Amer.J.Math.*, 82:227–259, 1960.

[27] R.Kadison and J.Ringrose. *Fundamentals of the Operator Algebras*, volume I and II. Academic Press, Orlando, 1983 and 1986.

[28] R.Powers. Representations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von neumann rings. *Ann.Math.*, 86:138–171, 1967.

[29] U.Haagerup. Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1. *Acta.Math*, 158:95–148, 1987.

[30] V.Jones. Index for subfactors. *Invent.Math.*, 72:1–25, 1983.

[31] Dan Voiculescu. Circular and semicircular systems and free product factors. *Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, Progress in Mathematics*, 92, 1990.

[32] Dan Voiculescu. The analogues of entropy and of fisher's information measure in free probablity theory II. *Invent.Math.*, 118:411–440, 1994.

[33] Dan Voiculescu. The analogues of entropy and of fisher's information measure in free probablity theory III:the absence of cartan subalgebras. *Geom.Funct.Anal.*, vol6, no.1:172–199, 1996.

[34] J. von Neumann. Zur algebra der funktionaloperatoren und theorie der normalen operatoren. *Math.Ann.*, 102:370–437, 1929.

[35] J. von Neumann. On rings of operators, III. *Ann.Math.*, 41:94–161, 1940.

作者在攻读博士学位期间的工作

[1] Liming Ge, Wei Yuan. Kadison-Singer Algebras, I –Hyperfinite Case, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America(PNAS) (to appear).

[2] Liming Ge, Wei Yuan. Kadison-Singer Algebras, II –Finite Case, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America(PNAS) (to appear).

[3] 吴文明，袁巍，《冯.诺依曼代数交叉积的一点注记》 《数学学报》中文版，Vol.51(4),803-808,2007.

作者在攻读博士学位期间参加的学术会议

- 国际算子理论和算子代数会议，2005年7月，西安。
- 巴拿赫空间与算子空间国际会议，2007年7月，天津。

致 谢

感谢葛力明，李炳仁两位老师对我的指导，沈军浩教授，M. Ravichandran，吴文明，阮颖彬，王力广，李卫华，赵建伟，季安安，吴劲松，对我的帮助。没有他们的支持和鼓励本文的完成是不可能的。