微分方程

含有未知函数及其导数的方程

如：$\frac{dy}{dx}=5x+3$. $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$.

常微分方程 (Ordinary Differential Equation, ODE)：只含有一个独立变量的微分方程

偏微分方程：微分方程中的未知函数包含两个或两个以上的独立变量.

微分方程阶数取决于方程中出现的最高次导数的阶数.

特解是满足方程的某一个解. 通解指满足方程的一组解.

分离变量法

将一个偏微分方程分解为两个或多个只含有一个变量的常微分方程.

① $\frac{d}{dx}f(x)=g(x)[h(f(x))]$

设变量 $y=f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=g(x)h(y) \xrightarrow{h(y)\neq 0} \frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$

令 $\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx=K$ 由于任何一边的表达式与另外一边的变量无关.

因此可以得到两个易解的常微分方程

② 或写成

$\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx \Rightarrow \int\frac{1}{h(y)}dy=\int g(x)dx$

斜率场 slope field.

$\int 2xdx+C$ C可以为任意值. slope field的意义就是把所有可能的C值都表示出来.

slope field 画的是 $dy/dx=2x$ 一系列图像. 对应画出的函数为 $y=x^2+C$

常微分方程的近似计算和误差估计.

满足可以用逐步逼近求解的初值问题的解一定是存在且唯一的.

满足利普希茨条件的微分方程可以使用逐步逼近法.

若 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 且在初值条件附近的某个区域满足以下关系

$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$ 则说 $f(x,y)$ 在R上满足利普希茨条件. 其中L为利普希茨常数

近似估计原理.

$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \le \frac{ML^n}{(n+1)!} h^{n+1}$

M—初值所f近能取到的最大值.
$h = \min(a, \frac{b}{M})$　L—利普希茨常数.
n—迭带次数.

微分方程数值解法.

1. 欧拉法　$u(t+h) = u(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, u(\tau)) d\tau$

设 $t_1 = t_0 + h \Rightarrow u_1 = u_0 + h f(t_0, u_0)$ 类似地利用 u_1 和 $f(t_1, u_1)$ 计算得到 $u(t_2)$ 的近似值.

$$\begin{cases} u_0 = u_0 \\ u_{n+1} = u_n + h f(t_n, u_n) \quad n \ge 0 \end{cases}$$

几何意义：用一条通过 (t_0, u_0) 的折线来近似代替过 (t_0, u_0) 的积分曲线.

2. Runge-Kutta

设初值的解 $u(t)$ 有 $q+1$ 次连续导数. 考虑 $u(t)$ 在 $t=t_0$ 处的 Taylor 展开.
可得局部截断误差 $u(t_0+h) - u_1 = O(h^{q+1})$

根据 $u(t+h) = u(t) + \int_t^{t+h} f(\tau, u(\tau)) d\tau$ 及中值定理.

$\int_t^{t+h} f(\tau, u(\tau)) d\tau = h f(t_n + \theta h, u(t_n + \theta h))$

$\Downarrow$

$u(t_n + h) = u(t_n) + h f(t_n + \theta h, u(t_n + \theta h))$ 但 $f(t_n+\theta h, u(t_n+\theta h))$ 无法计算. 利用 f 上位于 $[t_n, t_n+h]$ 上若干个点值的线性组合来近似.

$u_{n+1} = u(t_n) + h \sum_{i=1}^{s} w_i k_i$

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, u(t_n)) \\ k_i = f(t_n + h\alpha_i, u(t_n) + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j) \end{cases}$$

根据 Taylor 级数展开，使 Taylor 一阶至三级系数相同得到近似解.

待定系数法　$y'' + py' + qy = f(x)$　对应齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$.

设非齐次方程的特解为 $\bar{y} = Q(x) e^{\lambda x}$　通解 $y = Y + \bar{y}$

将特解代入原方程 $Q''(x) + (2\lambda + p) Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q) Q(x) = P_m(x)$

① 若 λ 不是特征方程的根. $\lambda^2 + p\lambda + q \ne 0$

② 若 λ 是特征方程的单根　$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $2\lambda + p \ne 0$

③ 若 λ 是特征方程的重根　$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$　$\bar{y} = x^2 Q_m(x) e^{\lambda x}$

设 $\bar{y} = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$,　$k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$

例: $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$ 通解.

特征方程 $r^2-6r+9=0 \Rightarrow r_1, r_2=3$.

对应通解. $Y=(C_1+C_2x)e^{3x}$, 设 $\bar{y}=ax^2+bx+c$

得 $9ax^2+(9b-12a)x+(2a-6b+9c)=2x^2-x+3$.

解 $a=\frac{2}{9}$ $b=\frac{5}{27}$ $c=\frac{11}{27} \Rightarrow \bar{y}=\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$

通解 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}$

高阶线性常微分方程 (降阶)

定理1. 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是 $y''+Py'+Qy=0$ 的两个解则

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$

同理若 $y_1(x), y_2(x) \cdots y_n(x)$ 满足 $k_1y_1+k_2y_2+\cdots k_ny_n=0$

则称这n个函数在区间上线性相关. 否则线性无关.

定理2. 若 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是 $y''+Py'+Qy=0$ 的线性无关特解. 则

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ (通解)

若 $y_1(x), y_2(x) \cdots y_n(x)$ 是齐次线性方程 $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots$

$a_n(x)y=0$ 的n个线性无关解. 通解为

$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \ldots C_ny_n(x)$

定理3. 设 $y^*(x)$ 是 $y''+Py'+Qy=f(x)$ 的一个特解 $Y(x)$ 是通解.

则 $y=Y(x)+y^*(x)$

定理4. 若 $y''+Py'+Qy=f_1(x)+f_2(x)$, $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别为

$\begin{cases} y''+Py'+Qy=f_1(x) \\ y''+Py'+Qy=f_2(x) \end{cases}$ 的特解. 则 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 是原方程

特解

二分法. 若 $f\in[a,b]$ 且 $f(a)\cdot f(b)<0$ 则 f 在 (a,b) 上必有一根.

误差分析. $x_1=\frac{a+b}{2}$ 有误差 $|x_1-x^*|\le\frac{b-a}{2}$, 第k步产生的误

差 $|x_k-x^*|\le\frac{b-a}{2^k}$, 对于给定精度 ε, 可估计二分法所

需的步数 k:

$$\frac{b-a}{2^k}<\varepsilon \Rightarrow k>\frac{[\ln(b-a)-\ln\varepsilon]}{\ln 2}$$

迭代法 若 $\exists x^*$ 使 $x^*=\varphi(x^*)$ 则称 x^* 为 $\varphi(x)$ 的一个不动点.

任取 x_0 构造迭代 $x_1=\varphi(x_0)$，$x_2=\varphi(x_1)$ $\cdots$ $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 若 $\{x_k\}$ 的极限存在，设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$ 则有 $x^*=\varphi(x^*)$

x^* 是 φ 的不动点。此时称 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛。

$$x^*=\lim_{k\to\infty} x_k=\lim_{k\to\infty}\varphi(x_{k-1})=\varphi(\lim_{k\to\infty} x_{k-1})=\varphi(x^*)$$

例1. 求 $x^3-x^2-1=0$ 在 $[1.3, 1.6]$ 内的根。

$x^3=x^2+1 \iff x=\sqrt[3]{(1+x^2)}$ 建立迭代格式 $x_{k+1}=(1+x_k^2)^{\frac{1}{3}}$

取 $x_0=1.3$

$k=0$ $x_1=(1+x_0^2)^{\frac{1}{3}}=1.3907$

$k=1$ $x_2=(1+x_1^2)^{\frac{1}{3}}=1.4316$

$k=2$ $x_3=(1+x_2^2)^{\frac{1}{3}}=1.4501$