线性方程组

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases}$$

$$\alpha_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{pmatrix} \quad \alpha_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{pmatrix} \cdots \quad \beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_s \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$$

定理1：（线性方程组有解判别定理）该线性方程组有解的充分必要条件是它的系数矩阵秩等于增广矩阵的秩.

定理2：该线性方程组系数矩阵的秩等于n，方程组有唯一解. 秩小于n，则有无穷多个解.

高斯消元法（初等变换）

$$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+8y+z=12 \\ 4y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{②+①\times(-3)} \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2y-2z=6 \\ 4y+z=2 \end{cases} \xrightarrow{③+②\times(-2)} \begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2y-2z=6 \\ 5z=-10 \end{cases}$$

写成矩阵

主元 pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

得到上三角矩阵（upper）

线性空间　给元素装配了加法和数乘的非空集合

1. 非空集合，记为X.

2. 给元素装配加法：① 加法结合律：$u+(v+w)=(u+v)+w$.
② 加法交换律：$u+v=v+u$. ③有单位元：存在一个元素e，使任意 $u\in X$ 都有 $u+e=u$. e为零元，记为0. ④有逆元：对任意 $u\in X$，都对应存在一个 $v\in X$，使 $u+v=0$

3. 给元素装配数乘：①分配律：$a\cdot(v+w)=a\cdot v+a\cdot w$. ②分配律：$(a+b)\cdot v=a\cdot v+b\cdot v$ ③数乘与域乘相兼容：$a(b\cdot v)=ab\cdot v$
④数乘有单位元：存在一个数值 $e\in F$，对任意 $v\in X$，都有 $e\cdot v=v$

线性依赖 linear dependence 与线性独立 linear independence

若矩阵A满足：$x_1v_1+x_2v_2+\cdots x_nv_n=0$（$v_1\cdots v_n$ 的线性组合）
而且只有一种情况满足以上，$x_1\cdots x_n$ 全为0. 称 $v_1\cdots v_n$ 线性独立
若有其他 $x_1\cdots x_n$ 不全为0使以上成立 称 $v_1\cdots v_n$ 线性依赖

写成矩阵形式 $AX=0$，若 $AX=0$ 没有非零解，则A线性独立，若有非零解，则A线性依赖。

向量的基（basic）

对于以上矩阵A，若不是线性独立，把多余的向量去除，剩下向量线性组合同样可以表示整个矩阵空间，剩下的线性独立向量称为基

特点 1. 线性独立 2. 能够生成整个空间

一个空间下的基，都有相同数量的向量，这个数量和这个空间的维度相同。

一个三维空间 R^3 下的基维度是3，意味着必须有3个向量，若只有2个向量，它们只能生成一个平面，所以还需要一个另外的向量。

矩阵转置（A' 或 A^T）

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

性质：$(A')'=A$

$(A+B)'=A'+B'$

$(AB)'=B'A'$

$(\lambda A)'=\lambda A'$

矩阵的逆（求逆矩阵）

对于n阶矩阵A，若存在一个n阶矩阵B，使 $AB=BA=I_n$（n阶单位矩阵），称A可逆，B是A的逆矩阵，A^{-1}

性质：① $(A^{-1})^{-1}=A$ ② $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\times A^{-1}$ ③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ④ $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

矩阵与线性映射

如果 $v_1 \cdots v_n$ 是V的基，且 $T: V \to W$ 是线性的，那么 $Tv_1 \cdots Tv_n$ 的值确定了T在V的任意向量上的值。

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$ $T\in L(V,W)$ 设 $v_1 \cdots v_n$ 是V的基，$w_1 \cdots w_n$ 是W的基。

T关于这些基的矩阵为 $m\times n$ 矩阵 $M(T)$，其中 $A_{j,k}$ 满足 $Tv_k = A_{1,k}w_1+\cdots A_{m,k}w_m$

如果T是从n维空间到m维空间的一个线性映射，$M(T)$ 是一个 $m\times n$ 矩阵。

例：设 $T\in L(F^2,F^3) \Rightarrow T(x,y)=(x+3y,\ 2x+5y,\ 7x+9y)$ T关于 $F^2\ F^3$ 的标准基矩阵为 $M(T)=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$，需要从 F^2 的标准基(1,0),(0,1)和 F^3 的标准基构建 $T(x,y)=(x+3y,\ 2x+5y,\ 7x+9y)$ 的映射。

则有 $T(1,0)=(1,2,7)$ $T(0,1)=(3,5,9)$

矩阵点乘、叉乘.

点乘：标量积、点乘的结果是一个标量.

$\vec{a}=(a_1,a_2\cdots a_n)$ $\vec{b}=(b_1,b_2\cdots b_n)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2\cdots a_nb_n$

几何解释. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

叉乘：向量积、叉乘的结果是一个向量. 且得到的向量与这两个向量形成的坐标平面垂直.

利用行列式计算.

$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)i-(x_1z_2-x_2z_1)j+(x_1y_2-x_2y_1)k$

$\vec{a}\times\vec{b}=(y_1z_2-y_2z_1,-(x_1z_2-x_2z_1),x_1y_2-x_2y_1)$

几何解释. $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

矩阵的特征值与特征向量.

1. 用线性映射表示.

在空间中有一个线性映射f. 若在空间V中存在一个向量α. 满足 $f(\alpha)=\lambda_0\alpha$. 其中$\lambda_0$为一个数. 则向量α为映射f的特征向量. λ_0为映射的特征值.

2. 用矩阵表示.

$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ $f(\alpha)=(f(\alpha_1),f(\alpha_2),\cdots f(\alpha_n))\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\lambda_0\alpha$

$\Rightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$

对角矩阵. (diagonal matrix)

是一个对角线以外的元素全为0的矩阵. 对角线上元素为0或其他值.

$d_{i,j}=0$ if $i\neq j$. $\forall i,j\in\{1,2,\cdots n\}$.

如：$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ 逆矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&\ddots a_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}a_1^{-1}&&\\&a_2^{-1}&\\&&\ddots a_n^{-1}\end{pmatrix}$ 当且仅当 $a_1\cdots a_n\neq0$

性质：

1. 对角矩阵都是对称矩阵.

2. 对角矩阵是上三角及下三角矩阵

3. 单位矩阵 I_n 以及零矩阵恒为对角矩阵. 一维矩阵也是对角矩阵.

4. 矩阵A左乘一个对角矩阵D, 分别用D的对角线元素作用于矩阵A的每一行.

5. 矩阵A右乘一个对角矩阵D, 分别用D的对角线元素作用于矩阵A的每一列

欧几里得空间.

对现实空间的一种规则抽象和推广 (从 $n \le 3$ 推广到n维空间).

欧几里得空间主要定义了内积、距离、角.

内积: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots a_n b_n$

内积几何概念: 两个向量长度与它们夹角余弦的积. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

得到余弦定义: $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

得到角的计算: $\theta = \cos\theta^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$

计算两点之间距离 $d(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$