中国人民大学 2024 年考研真题

2.(15 分) 设 f(x) 在$[0,\infty)$上有定义，并且一致连续，已知

$$\lim_{n\to\infty} f(x+n) = 0(\text{n 为自然数}), \text{对}\forall x > 0$$

证明: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

1 证明思路

首先我们用 ϵ,δ 语言来看下什么是一致连续和极限:

f(x) 一致连续, 表示 $\forall\epsilon>0,\ \exists\delta,\ \forall|x_1-x_2|<\delta,\ |f(x_1)-f(x_2)|<\epsilon$

其次，我们取 x=1，数列 $f(N)$ 显然收敛于 0

从这里我们可以自然的想到，把 (0,1) 区间按照 δ 拆成 k 段:

对任意的一个区间 $(a_1,a_2),|a_1-a_2|<\delta,\exists N_1,\forall n>N_1,f(n+a_1)<\epsilon$ 那么我们取 $N=max(\{N_i\}),i=1,2,3,\cdots,k$

$\forall x>N,f(x)=f([x]+a_i+\delta_1)$ 其中 $[x]>n,\delta_1<\delta$

显然, $|f([x]+a_i+\delta_1)-f([x]+a_i)|<\epsilon$

到这里基本上证明已经走通了

2 开始证明

f(x) 一致连续

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{2}$$

我们取 $k = [\frac{1}{\delta}] + 1$ 令 $a_i = \frac{i}{k}, i = 1, 2, 3, \cdots, k-1$
显然对 $\forall a_i, \exists N_i, \forall n > N_i, f(a_i + n) < \frac{\epsilon}{2}$
我们取 $N = max(N_i), \forall x > N, x = [x] + a_i + \delta_1, [x] > N, \delta_1 < \delta,$
$f(x) = f([x] + a_i + \delta_1) < |f([x] + a_i + \delta_1) - f([x] + a_i)| + |f([x] + a_i)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

证毕