上海交通大学数学分析课后题

设$x_i \in (0,1), x_{n+1} = x_n(1-x_n)(n=1,2,3,\cdots)$

证明：$\{nx_n\}$收敛并求其极限

1 证明思路

首先 $\{x_n\}$ **递减有界，所以必收敛**:

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 < 0$$

其次 $\{nx_n\}$**n 和** x_n **都单调，并且 n 趋近于** ∞:

看到这个形式我们需要想到 Stolz 定理 m，即:

设 b_n 单调，并且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

我们需要一点点小小的技巧

$$nx_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$$

2 开始证明

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^2 < 0$$

x_n 单调递减，并且有界, 所以必收敛，我们设

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, 我们两边同时取极限有 $a = a(1-a) \Rightarrow a = 0$

$$nx_n = \frac{n}{\frac{1}{x_n}}$$

我们看看这个数列

$$\{\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}}\}$$

$$\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} = \frac{x_n x_{n+1}}{x_n^2} = \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - x_n$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(1 - x_n) = 1$$

由 Stolz 定理知，$\{nx_n\}$ 收敛，并且收敛于 1

证毕