中国人民大学 2024 年考研真题

1.(15 分) 已知 n 为正整数，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}$

1 证明思路

首先我们我们看到对 $\frac{i}{n}$ 求和，我们要想到积分：
我们先忽略掉分母中的 n，显然

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}sin\frac{i\pi}{n}=\int_{0}^{1}sin\pi xdx$$

其次，我们需要一定的放缩技巧，即:

$$n<n+\frac{i}{n}<n+1$$

2 开始计算

我们先计算这个值

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1 sin\pi x dx=\frac{-cos\pi x}{\pi}|_0^1=\frac{2}{\pi}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+\frac{i}{n}}\frac{sin\frac{i\pi}{n}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+1}\frac{sin\frac{i\pi}{n}}{n}<\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n+\frac{i}{n}}\frac{sin\frac{i\pi}{n}}{n}<\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{sin\frac{i\pi}{n}}{n}$$

$$\text{显然}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

根据追敛定理得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{i}{n}}=\frac{2}{\pi}$$

证毕