2024 年厦门大学数学分析

1.(15 分) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}$$

方法 1:

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \cdot k! = (k+1)! - k!$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k \cdot k!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} (k+1)! - k!}{(n+1)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(k+1)! - 1!}{(n+1)!} \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} \\
&= 1
\end{aligned}$$

方法 2:

分母递增，根据 stolz 定理，对于极限:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}$$

我们只需要求出下式的极限即可:

$$\frac{(1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!)-(1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+(n-1)\cdot(n-1)!)}{(n+1)!-n!}$$

$$=\frac{n\cdot n!}{n\cdot n!}$$

$$=1$$