$$a_1 > 0, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \text{求证：} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\sqrt{2n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{n}=2$$

根据 stolz 定理，我们仅需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}^2-a_n^2=2$即可

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2-a_n^2=2$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=2$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}(a_{n+1}+a_n)=2$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} 1+\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$$

$$\Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

下证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

$a_1>0$,显然a_n单调 假设有界

假设$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$,两边取极限$\alpha=\alpha+\frac{1}{\alpha}$,矛盾

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$$

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}\Longrightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{a_n^2}$$

两边取极限$lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$

证毕