$f(x)$ 是一个整系数的多项式, 如果 $f(0)$, $f(1)$ 都是奇数 证明 $f(x)$ 没有整数根

设, $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$

$f(0),f(1)\equiv 1(mod2)\Longrightarrow a_0,\sum_{i=0}^{n}a_i\equiv 1(mod2)$

假设存在一个整数 m, $f(m)=a_nm^n+a_{n-1}^n-1+\cdots+a_0$

显然 m 是个奇数, 否则推出$a_0\equiv 0(mod2)$矛盾

$f(m)-f(1)=a_n(m^n-1)+a_{n-1}(m^{n-1}-1)+\cdots+a_1(m-1)$

$m^i-1=(m-1)(m^{i-1}+m^{i-2}+\cdots+m+1)$

$m-1\equiv 0(mod2)\Longrightarrow m^i-1\equiv 0(mod2)$

$\Longrightarrow f(m)-f(1)\equiv 0(mod2)$

矛盾