浙江大学 2022 年考研真题

设$x_0 > 0, x_n = arctan\ x_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

1: 证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2: 证明 $\{\sqrt{n}x_n\}$收敛，并求其极限

1 证明思路

首先我们知道 $\{x_n\}$ 递减有界，所以必收敛：

$$arctanx < x \Rightarrow x_n < x_{n-1}$$

其次数列 $\{\sqrt{n}nx_n\}$ 中 $\sqrt{n}$ 和 x_n 都单调，并且 n 趋近于 ∞：

这个题目和前面我一个视频力里讲的上海交大的一道课后题非常像，感兴趣的朋友可以翻下上一个视频:

看到这个形式我们需要想到 Stolz 定理, 即：
设 b_n 单调，并且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$$

如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$$

我们需要一点点小小的技巧, 我们先计算数列 $\{nx_n^2\}$ 的极限

$$nx_n^2 = \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$$

2 开始证明

$$x_0 > 0, arctanx < x \Longrightarrow x_n = arctan\ x_{n-1} < x_{n-1}$$

x_n 单调递减，并且有界, 所以必收敛，我们设

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

我们两边同时取极限有 $a = arctana \Rightarrow a = 0$

$$nx_n^2 = \frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$$

我们看看这个数列

$$\{\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}\}$$

$$\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}} = \frac{x_n^2 x_{n+1}^2}{x_n^2 - x_{n+1}^2} = \frac{x_n^2(arctanx_n)^2}{x_n^2-(arctanx_n)^2}$$

考虑到 arctanx 的泰勒展开式:

$$arctanx = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2(arctanx)^2}{x_n^2-(arctanx_n)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4}{x_n^2-(x_n-\frac{1}{3}x_n^3+o(x_n^3))^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^4}{\frac{2}{3}x_n^4} = \frac{3}{2}$$

由 Stolz 定理知，$\{nx_n^2\}$ 收敛，并且收敛于 $\frac{3}{2}$

故 $\{\sqrt{n}x_n\}$收敛于$\frac{\sqrt{6}}{2}$

证毕