

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

两边取 \ln ，仅需证明 $\frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{n} - \ln n = -1$

$$\frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{n} - \ln n = \frac{\sum_{i=1}^n \ln i - n \ln n}{n}$$

利用 stolz 定律，仅需证明

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ln i - (n+1) \ln(n+1) - \left(\sum_{i=1}^n \ln i - n \ln n \right) = -1 \text{ 即可}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n+1} \ln i - (n+1) \ln(n+1) + 1 - \left(\sum_{i=1}^n \ln i - n \ln n \right) \\ &= \ln(n+1) - (n+1) \ln(n+1) + n \ln(n) \\ &= n \ln(n) - n \ln(n+1) \\ &= \ln \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ e &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

得证