高数期中考

①对任意实数满足 $f(x+y)=f(x)f(y)$，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 $f'(x)$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)\Rightarrow f(0)=0$ 或 $f(0)=1$

①若 $f(0)=0\Rightarrow f(0+x)=f(0)f(x)=0\Rightarrow$ 函数 $f(x)=0\Rightarrow f'(x)=0$

②若 $f(0)=1\Rightarrow f'(x)=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=f(x)\cdot f'(0)$

$y'=f'(0)y\Rightarrow y'=ky$ $\quad y=e^{kx+C}$

②设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{5}{x_n})$，$n=1,2,\dots$ 且 $x_1>0$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，求其极限

$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{5}{x_n^2})$

证明的是 x_{n+1} 即从 x_2 开始 $x_{n+1}\geq\sqrt5$，x_1 取值不定

$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{5}{x_n})\geq\sqrt5\ (n=1,2,\dots)$

x_1 不管. $\quad x_n\geq\sqrt5\ (n=2,\dots$ 从 $n=2$ 开始)

从 $n=2$ 开始 $\quad x=\sqrt5$ 时 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=1\Rightarrow x_n=\sqrt5$

$\downarrow$ $\quad x_n>\sqrt5$ 时 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 单减有下界

$x_2=\frac{1}{2}(x_1+\frac{5}{x_1})$

x_2 开始与后面产生规律？

Created by yuan

Created by yuan