目录

正态分布时的贝叶斯判则

1 问题描述

设有符合正态分布的两类训练样本，并且设

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = 0.5 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \{(3,4),(3,8),(2,6),(4,6)\} \\ \omega_2 &= \{(3,0),(3,-4),(1,-2),(5,-2)\}\end{aligned} \tag{2}$$

求：

(1) 识别函数

(2) 识别界面方程

(3) 作图

2 解决方案

2.1 识别函数

对于正态分布时的贝叶斯分类，，一般情况的识别函数是

$$d_i(X) = X^T W_i X + w_i^T X + w_{i0} \tag{3}$$

其中，

$$\begin{aligned}
W_i &= -\frac{1}{2}\Sigma_i^{-1} \in \Re^{n\times n} \\
w_i &= \Sigma_i^{-1} M_i \in \Re^n \\
w_{i0} &= -\frac{1}{2} M_i^T \Sigma_i^{-1} M_i - \frac{1}{2}\ln|\Sigma_i| + \ln P(\omega_i) \\
M_i &= E[X]\big|_{X\in\omega_i} = \frac{1}{N_i}\sum_{X\in\omega_i} X \\
\Sigma_i &= E\left[(X-M_i)(X-M_i)^T\right]\Big|_{X\in\omega_i} = \frac{1}{N_i}\sum_{X\in\omega_i}(X-M_i)(X-M_i)^T
\end{aligned} \tag{4}$$

代入 $\omega_1 = \{(3,4),(3,8),(2,6),(4,6)\}$ 和 $\omega_2 = \{(3,0),(3,-4),(1,-2),(5,-2)\}$，并且令 $X = (x_1 \quad x_2)^T$，可以得到识别函数是

$$\begin{aligned}
d_1(x_1,x_2) &= -x_1^2 - 0.25x_2^2 + 6x_1 + 3x_2 - 18.6931 \\
d_2(x_1,x_2) &= -0.25x_1^2 - 0.25x_2^2 + 1.5x_1 - x_2 - 4.6363
\end{aligned} \tag{5}$$

2.2 识别界面

令 $d_1(x_1,x_2) = d_2(x_1,x_2)$，即可得到识别界面方程，这是关于 X 的二次型。利用(5)式的结果，可求得分界面方程是

$$-0.75x_1^2+4.5x_1+4x_2-14.0569=0 \tag{6}$$

2.3 仿真作图

仿真程序给出的计算结果如下：

```
d1(x1,x2) = (-1.000000)*x1^2 + (-0.250000)*x2^2 + (6.000000)*x1 + (3.000000)*x2 + (-18.693147)
d2(x1,x2) = (-0.250000)*x1^2 + (-0.250000)*x2^2 + (1.500000)*x1 + (-1.000000)*x2 + (-4.636294)
(-0.750000)*x1^2 + (0.000000)*x2^2 + (4.500000)*x1 + (4.000000)*x2 + (-14.056853) = 0
```

可以看出，结果与上述分析是一致的。

作图的结果如图 1 所示。

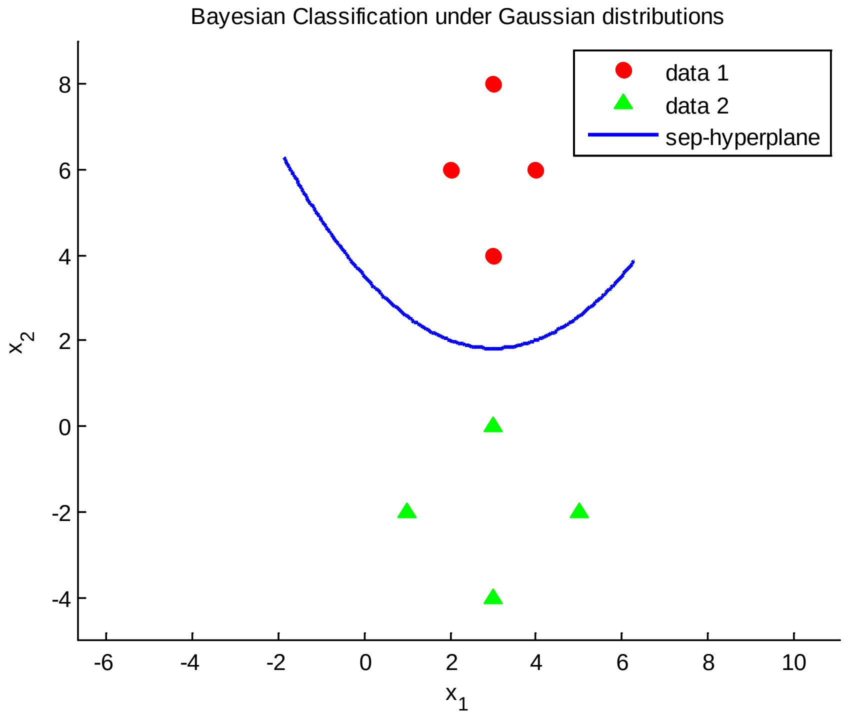

图 1 正态分布贝叶斯判则对应的分界面

3 结果分析

可以看出，分界面是二次函数类型，即关于 X 的二次型。相比于最小欧式距离判别准则，该方法可以得到非线性的分界面。对比分析如下：

(1) 最小欧式距离判别准则没有考虑数据的先验分布，可以认为不区分各个特征的方差，这种情况下，当类先验概率相等时，正态分布时的贝叶斯判则等价于欧式距离判则。

(2) 正态分布时的贝叶斯判则考虑了数据的先验分布。以图 1 结果为例，数据集 2 的分布更为松散，即数据集对应的方差更大，而数据集 1 则更为紧凑。考虑这一先验信息后，分界面朝分布紧凑的数据集弯曲，以减小将分布松散的数据集误判的可能性。