第三节

平面应力状态分析—图解法

一、应力圆的方程式

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha$$

$$\sigma_\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \quad (1)$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \quad (2)$$

将公式（1）、（2）等号两边各自平方，然后相加，即可消去参数 α

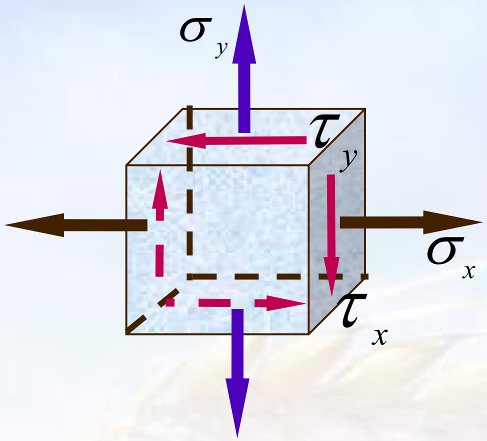
$$(\sigma_\alpha - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2})^2 + \tau_\alpha^{\ 2} = (\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + \tau_x^{\ 2}$$

这个方程恰好表示一个圆，这个圆称为应力圆。

圆心坐标为： **C** $\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2},\ 0 \right)$

圆的半径为： $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_x^{\ 2}}$

二、应力圆的作法



❶ 建立 $\sigma-\tau$ 直角坐标系

以 σ 为横轴，向右为正

以 τ 为纵轴，向上为正

❷ 选择合适的应力比例尺

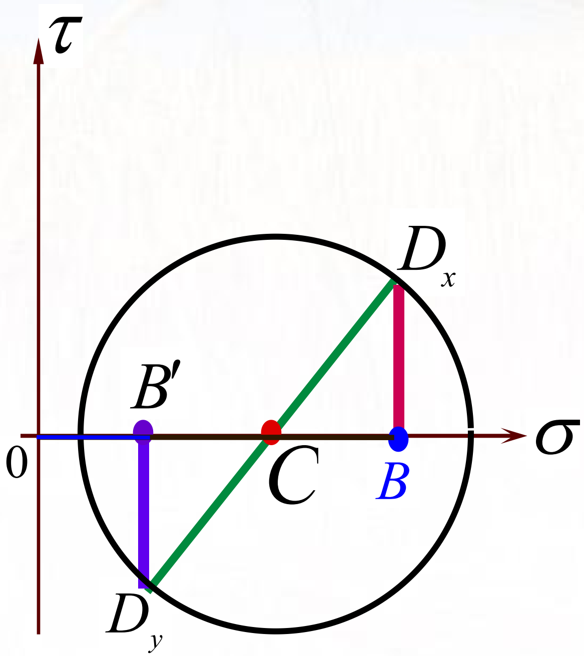
❸ 画应力圆

量取 $OB=\sigma_x$，$BD_x=\tau_x$ 得 D_x 点

量取 $OB'=\sigma_y$，$B'D_y=\tau_y$ 得 D_y 点

连接 D_x、D_y 两点的直线与 σ 轴相交于 C 点

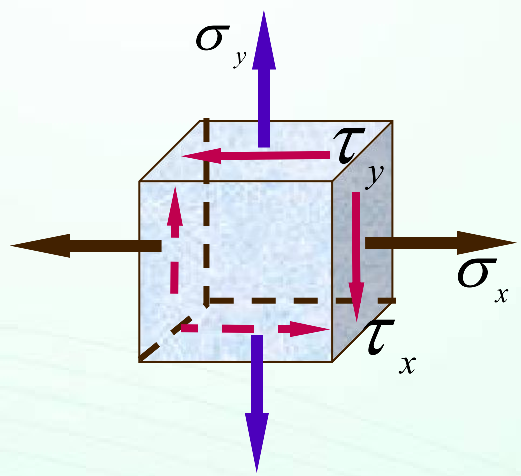
以 C 为圆心，CD_x 为半径作圆，该圆就是相应于该单元体的应力圆

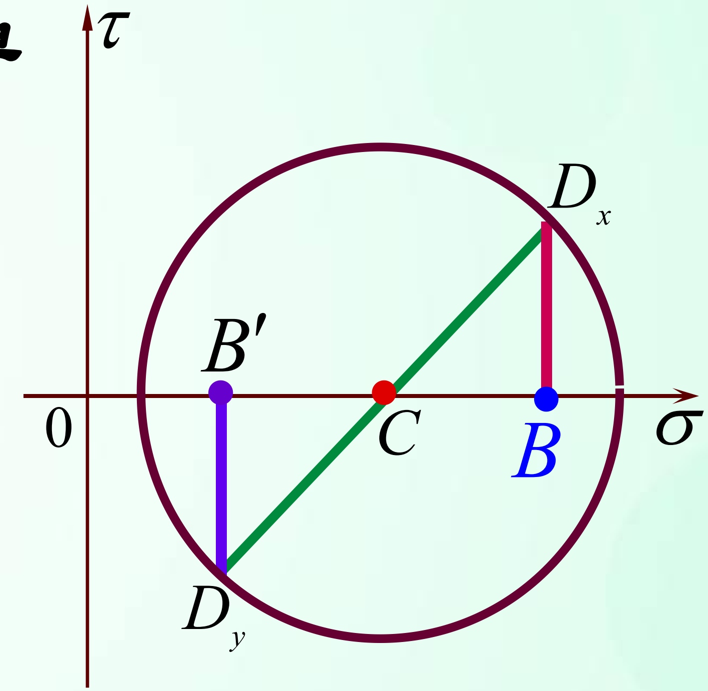


注意：

❶应力圆上D_x点的坐标代表单元体上法线为x的平面上的正应力σ_x 和切应力τ_x

❷CD_x线的位置代表单元体上的x轴





❸应力圆上两点之间的圆弧段所对应的圆心角是单元体上对应两个截面之间夹角的2倍。

总结：图解法（应力圆）的要点是

❶ **点面相对应**—点面之间的对应关系

单元体某一面上的应力，必对应于应力圆上某一点的坐标。

❷ **首先找基准，转向要相同**

半径旋转方向与斜截面法线旋转方向一致。

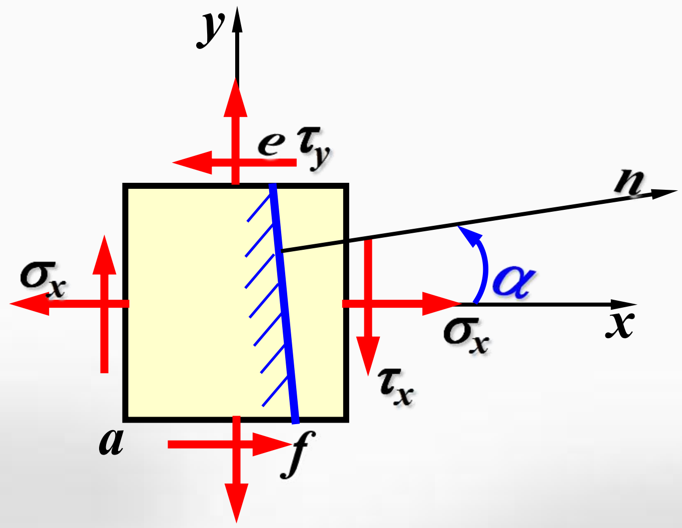
❸ **夹角两倍整**—夹角关系

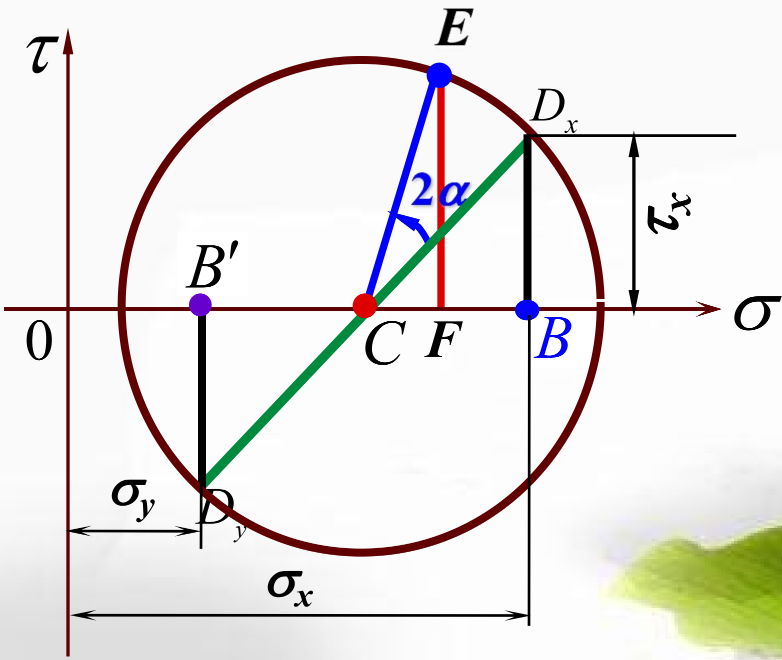
应力圆上转动的角度是单元体上转动角度的2倍

三、应力圆的应用

❶ 可以求单元体任意斜截面上的应力

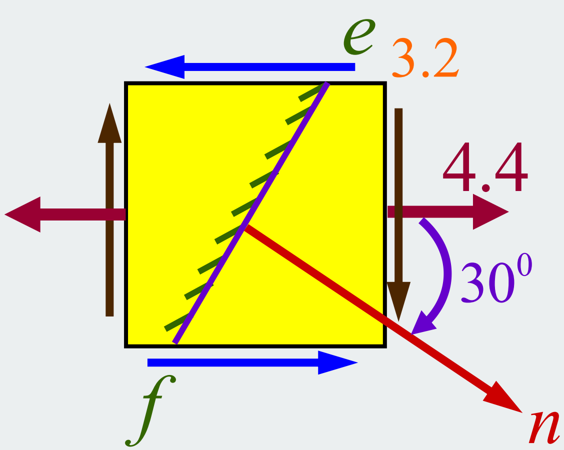
应力圆中以C为圆心，以 CD_x半径为基线按方位角α的转向转动2α得到圆周上 E 点，则E 点的坐标依次为斜截面上的正应力σ_α和切应力τ_α.

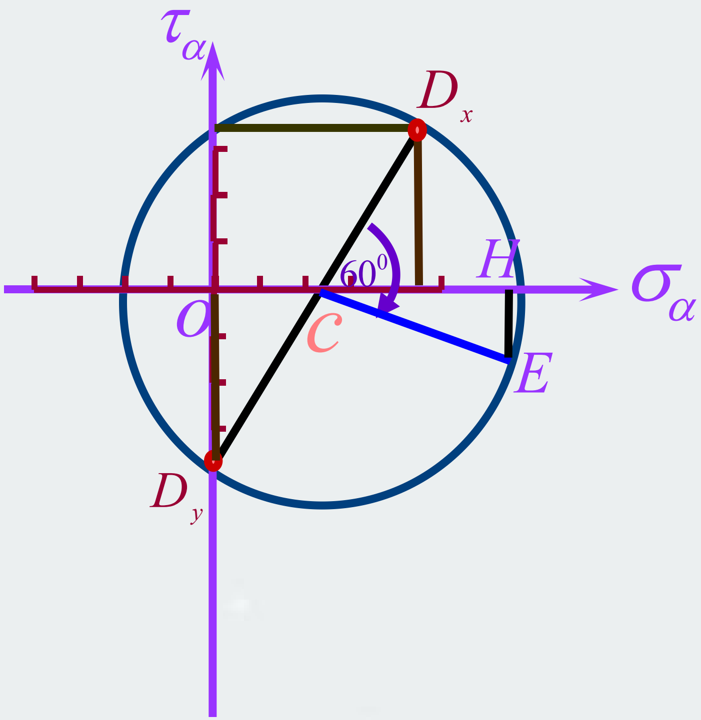




例1

试用图解法计算图示单元体*e--f*截面上的应力。图中应力的单位为*MPa*。



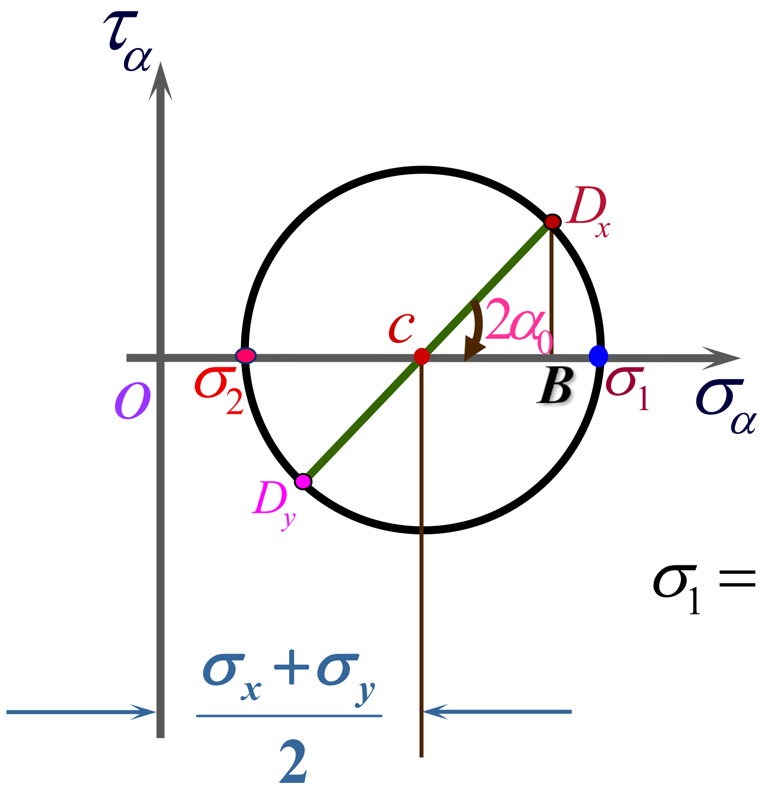


$$\sigma_\alpha = \sigma_{-30^0} = OH = 5.2MPa$$

$$\tau_\alpha = \tau_{-30^0} = HE = -1.3MPa$$

三、应力圆的应用

❷ 可以求主应力大小



切应力等于零的截面称为主平面

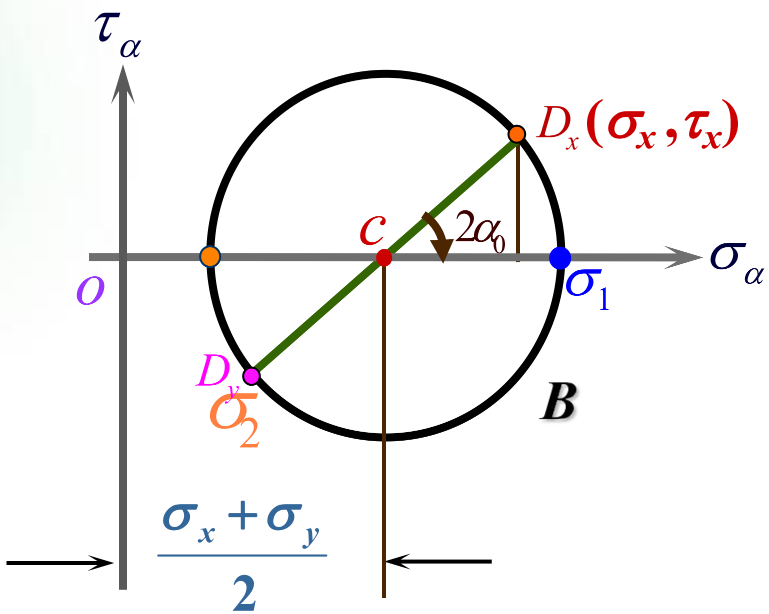
主平面上的正应力为主应力

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

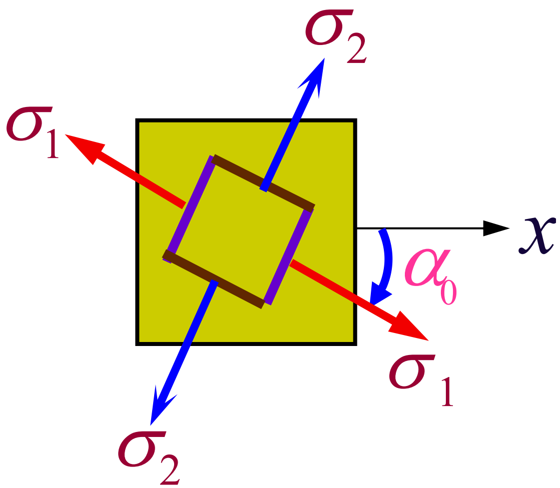
$$\sigma_2=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

三、应力圆的应用

❸ 可以确定主平面的位置

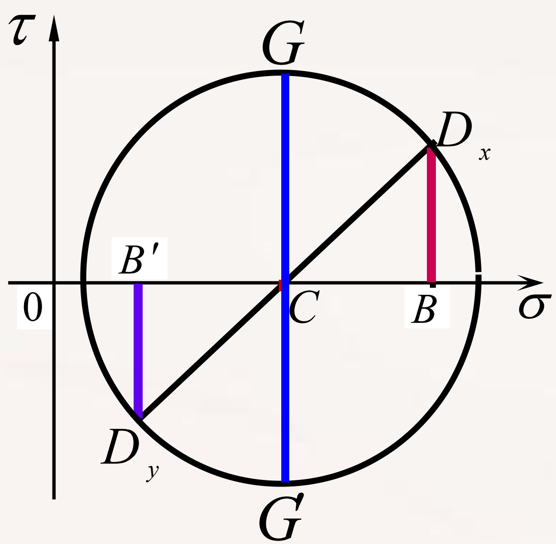


$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\tau_x}{R}$$



三、应力圆的应用

❹ 可以求最大切应力及其作用面



$$\tau_{\max}=CG=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^{\ 2}}$$

$$\tau_{\min}=CG'=-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^{\ 2}}$$

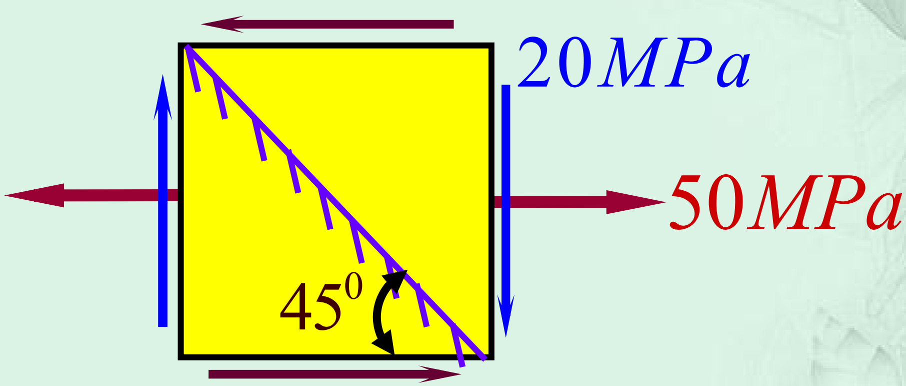
例2

已知应力状态如图所示，试用图解法求：

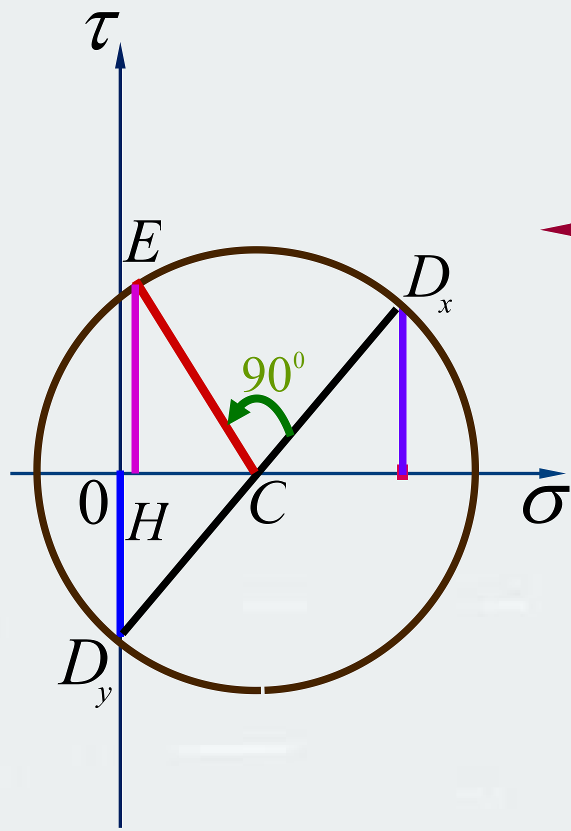
（1）$\alpha=45^0$ 斜截面上的应力；

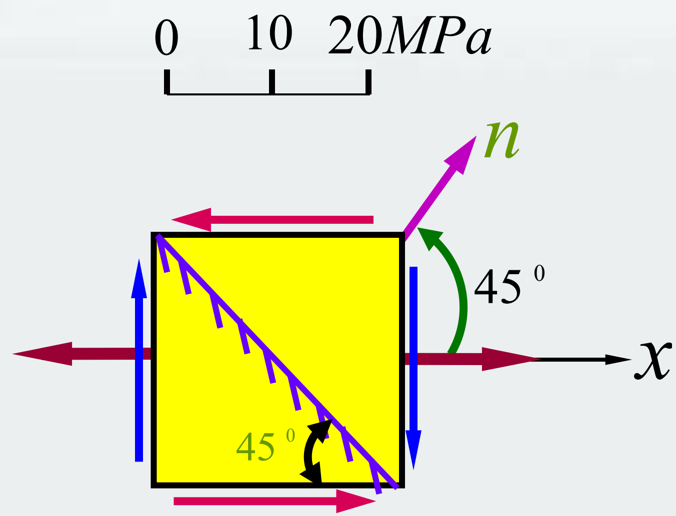
（2）主应力和主平面方位，并画出主应力单元体；

（3）切应力极值。



解： (1) 画应力圆





$$\sigma_{45^0} = OH = 5MPa$$

$$\tau_{45^0} = EH = 25MPa$$

(2) 求 $\alpha = 45^0$ 斜截面上的应力

量取E点的横、纵坐标，再乘以应力比例，得

(3) 求主应力和确定主平面方位

圆心坐标 C：(25MPa , 0)

半径 R：32MPa

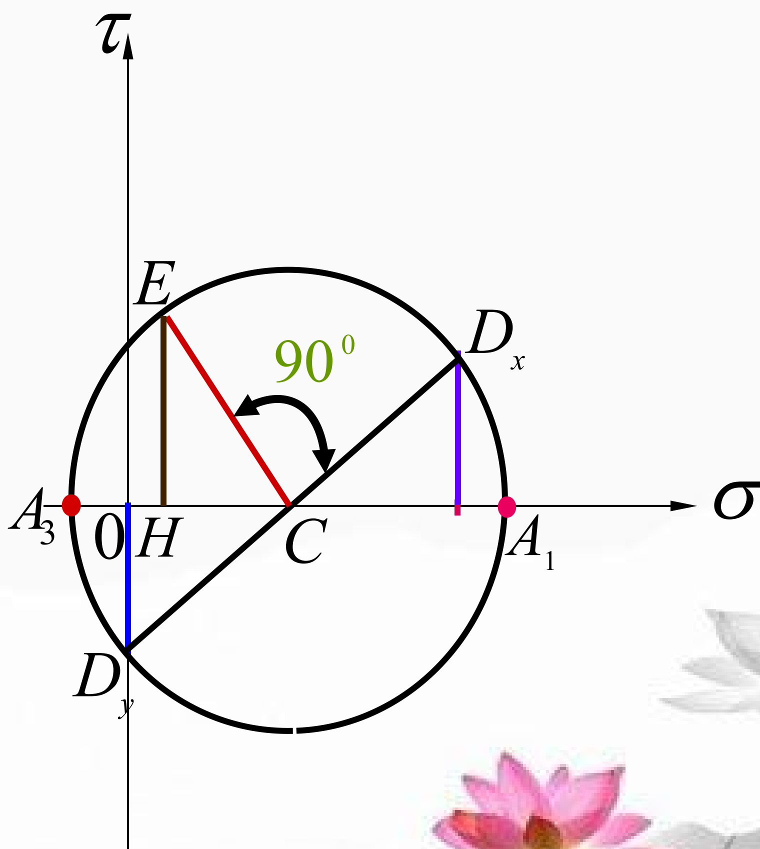
$$\sigma_1 = OA_1 = OC + R$$

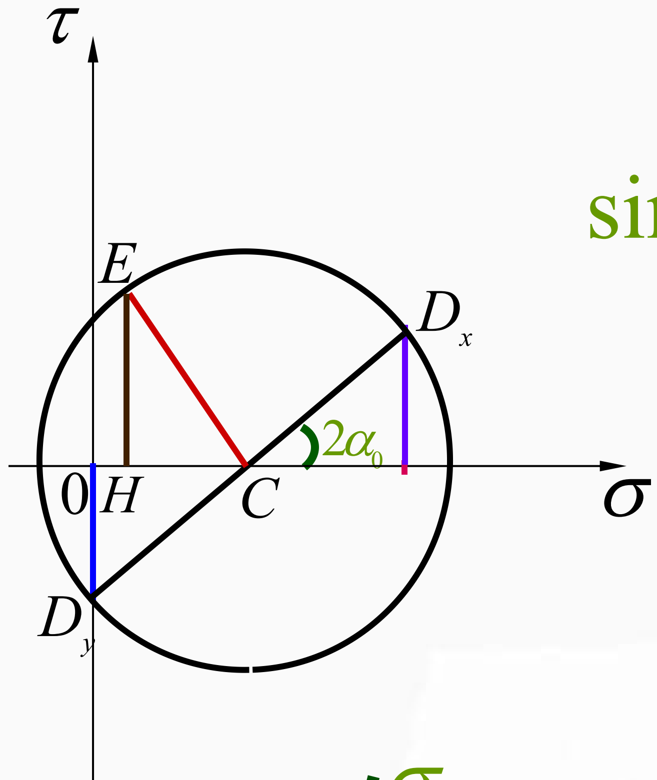
$$= 25 + 32 = 57MPa$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = OA_3 = -(R - OC)$$

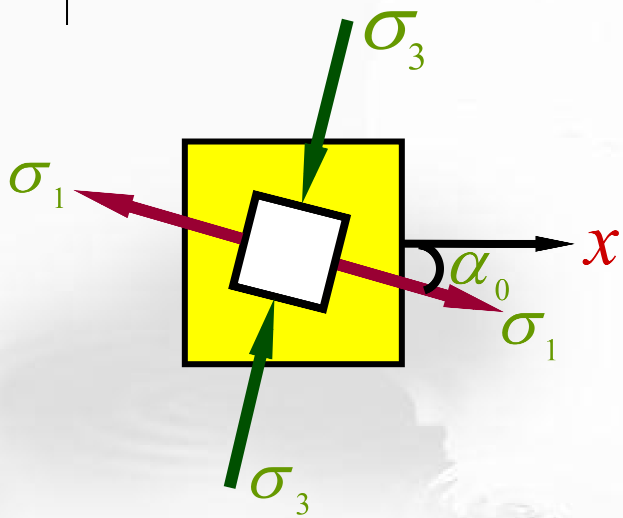
$$= -(32 - 25) = -7MPa$$





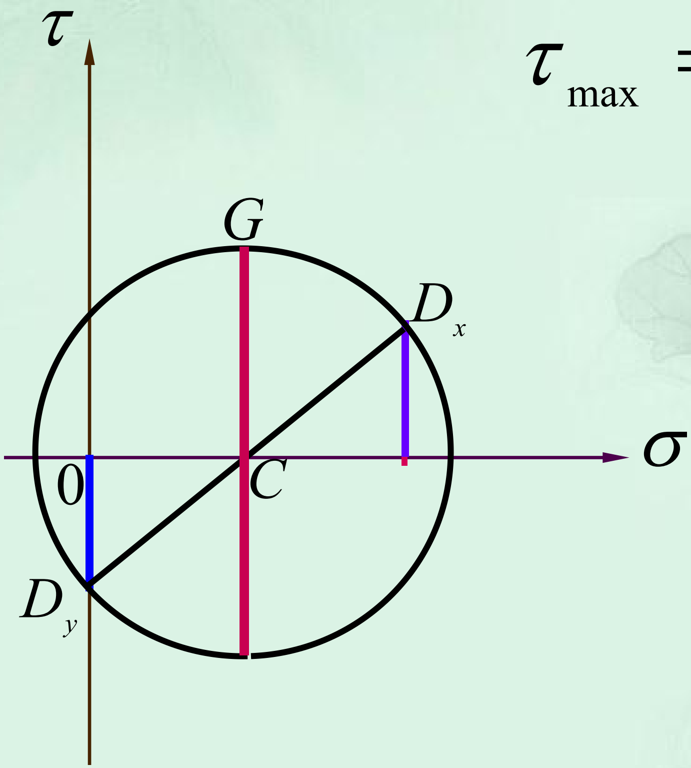
$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\tau_x}{R} = \frac{20}{32} = 0.625$$

$$\alpha_0 = 19.34^0$$



(4) 求切应力极值

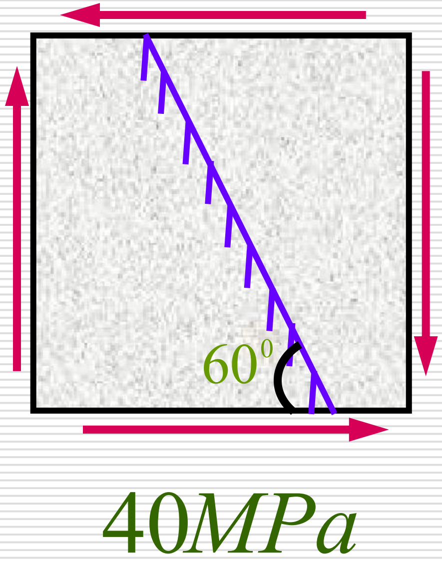
$$\tau_{\max} = CG = R = 32MPa$$




本节结束
www.wallcoo.com

练习题1

应力状态如图所示，试用图解法求：



（1）指定斜截面上的应力；

（2）最大切应力值。

（3）主应力值；

（4）主平面方位。