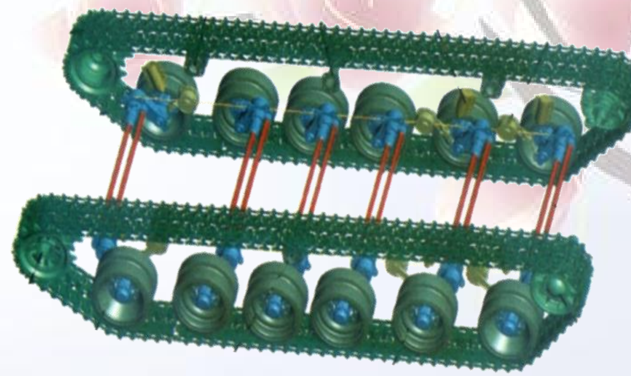
第四节

圆轴扭转时的应力与强度计算

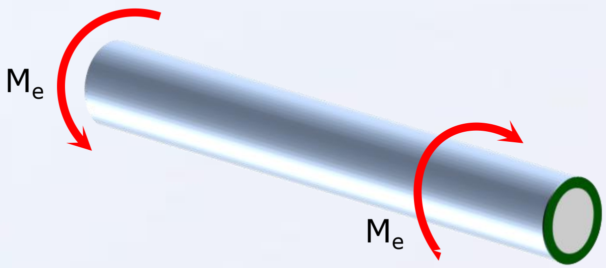
导　入

同学们，上一节课我们学习了圆轴扭转时的内力分析，我们今天将讨论新的问题，在讨论新问题之前，先来思考一个问题：

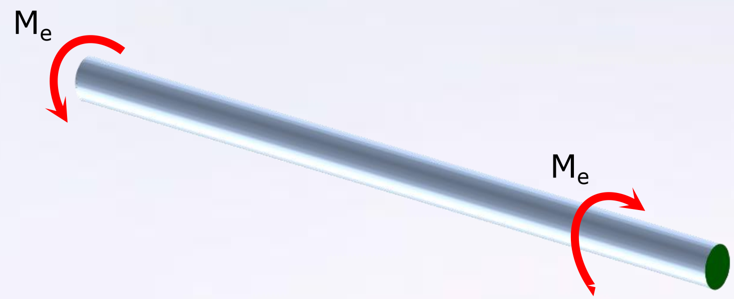
问题一： 汽车的主传动轴，可以将其简化成两端受力偶距作用的空心轴；而坦克底盘减震系统中的扭力轴则可以简化为两端受力偶距作用的实心轴。在承载能力相同的条件下，采用空心轴与实心轴有何区别，如何选取？



主传动轴

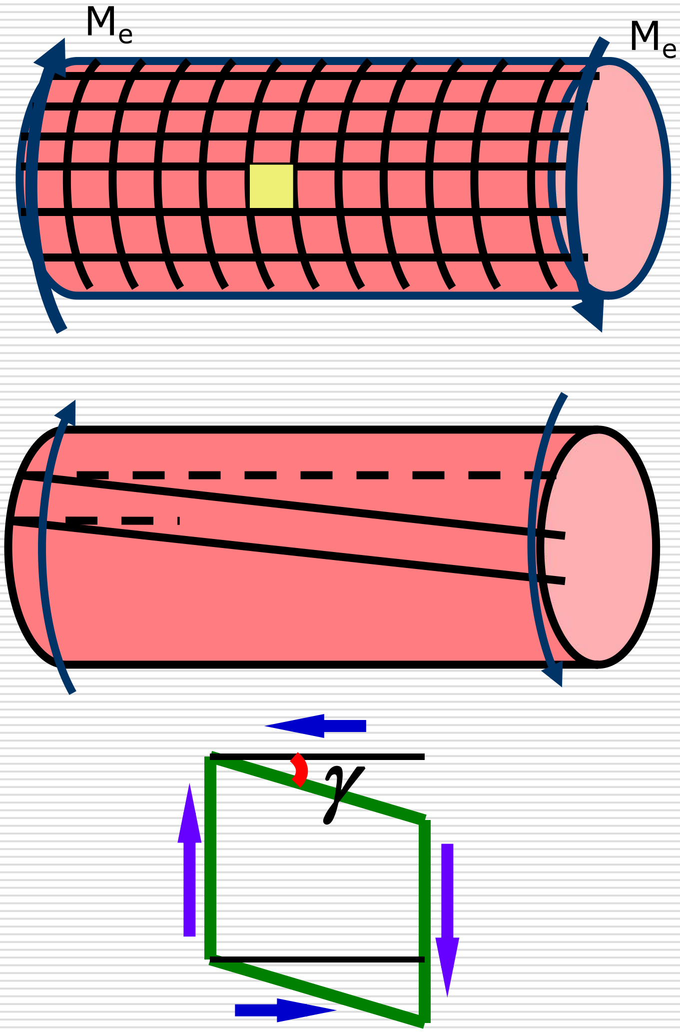


扭力轴



在承载能力相同的条件下，采用空心轴或实心轴有什么区别？如何选取?

一、圆轴扭转时横截面上的应力



实验观察

实心圆轴，在其表面等距离地画上圆周线和纵向线，然后在轴端施加外力偶矩，观察到圆轴表面上各圆周线的形状、大小和间距均未改变，仅作了相对转动；各纵向线均倾斜了一微小角度。

圆轴扭转的平面假设：

❶变形前原为平面的横截面，变形后，仍为平面，其形状、大小以及横截面间的距离均保持不变

❷半径仍为直线

推知：

圆轴扭转时，其**横截面**上没有正应力，**只有切应力**，且**切应力垂直于半径**。

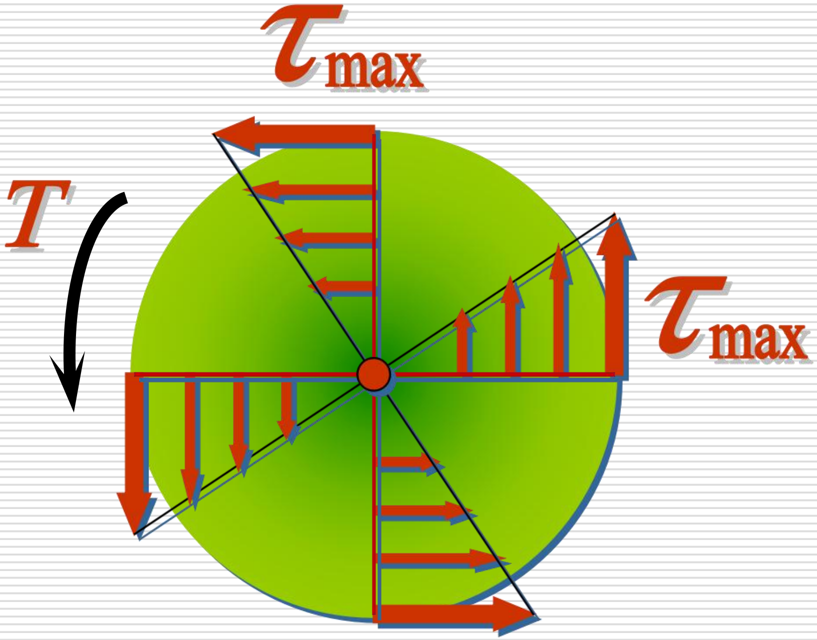
$$\tau_{\rho} = \frac{T\rho}{I_P}$$

I_p-截面的极惯性矩

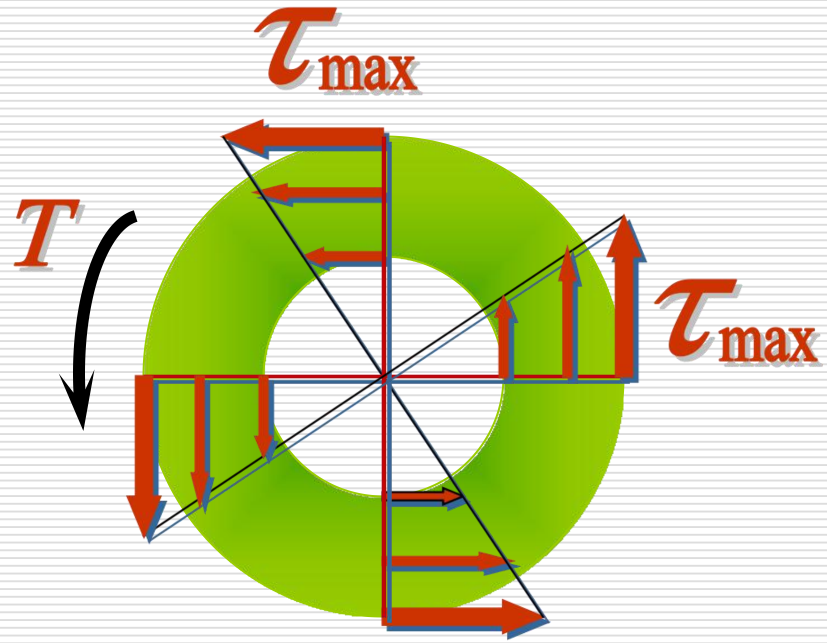
圆轴扭转时横截面上任意点

切应力计算公式

切应力分布规律



（实心截面）



（空心截面）

工程上采用空心截面构件：提高强度，节约材料，重量轻，结构轻便，应用广泛。

最大切应力：

$$\tau_{\max} = \frac{TR}{I_p} = \frac{T}{I_p/R}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}$$

$$W_p = \frac{I_p}{R}$$

（抗扭截面系数）

★对于实心圆截面：$I_p = \dfrac{\pi D^4}{32}$

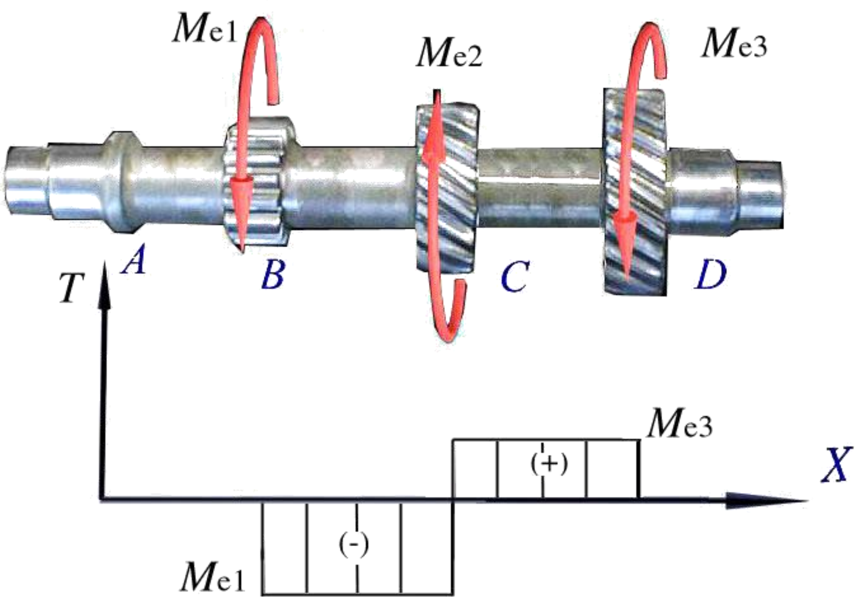
$$W_p = I_p \big/ R = \pi D^3 \big/ 16$$

★对于空心圆截面：$I_p = \dfrac{1}{32}\pi D^4(1-\alpha^4)$

$$W_p = I_p \big/ R = \pi D^3(1-\alpha^4) \big/ 16$$

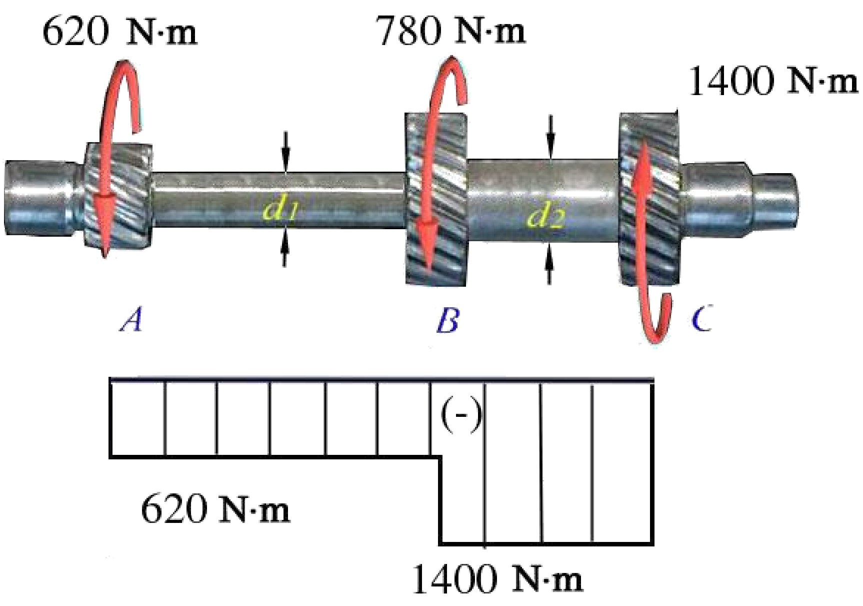
二、扭转强度条件：$\tau_{\max} \le [\tau]$

1. 等截面圆轴：



$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{W_p} \le [\tau]$$

2. 阶梯形圆轴：



$$\tau_{\max} = \left|\frac{T}{W_p}\right|_{\max} \le [\tau]$$

三、强度条件的应用 $\tau_{\max} = \dfrac{T_{\max}}{W_t} \le [\tau]$

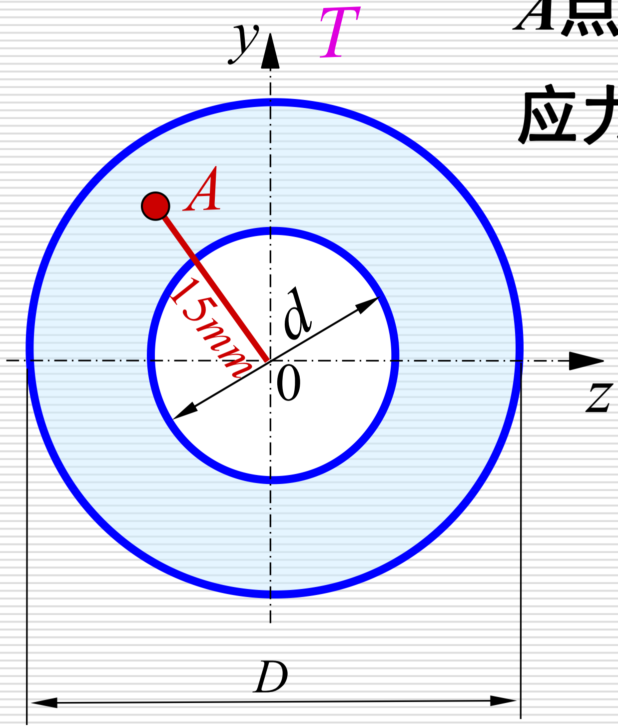
（1）校核强度 $$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_t} \le [\tau]$$

（2）设计截面 $$W_t \ge \frac{T_{max}}{[\tau]}$$

（3）确定载荷 $$T_{max} \le W_t[\tau]$$

课堂练习

内外径分别为$20mm$和$40mm$的空心圆截面轴，受扭矩$T=1kN\cdot m$作用，计算横截面上A点的切应力及横截面上的最大和最小切应力。



解：
$$\tau_A = \frac{T\rho_A}{I_\rho}$$

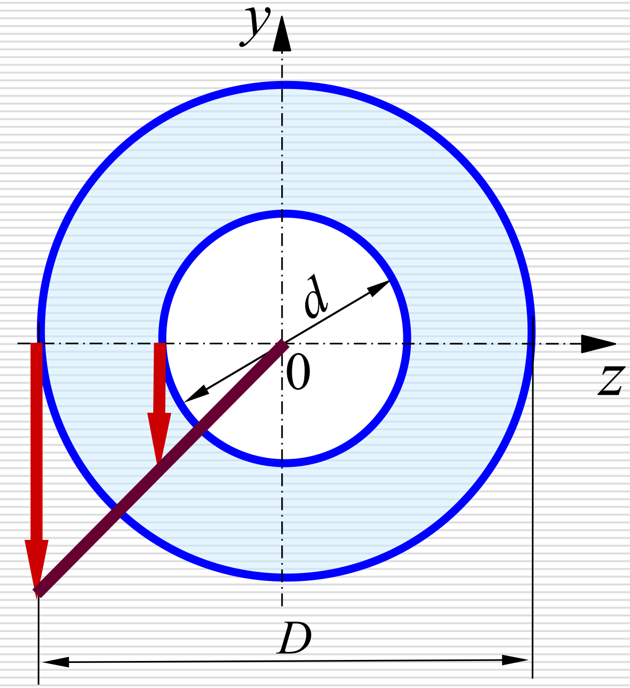
$$= \frac{1000 \times 15 \times 10^{-3} \times 32}{3.14 \times 40^4 \times 10^{-12}\left[1-\left(\frac{20}{40}\right)^4\right]}$$

$$= 63.69\,MPa$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_\rho} = \frac{16T}{\pi D^3\left(1-\alpha^4\right)}$$

$$= \frac{16\times 1000}{3.14\times 40^3\times 10^{-9}(1-0.5^4)}$$

$$= 84.93\ \mathbf{MPa}$$



方法一

$$\frac{\tau_{\mathbf{min}}}{\tau_{\mathbf{max}}} = \frac{10}{20}$$

$$\tau_{\min} = \frac{1}{2}\tau_{\max} = \frac{1}{2}\times 84.93$$

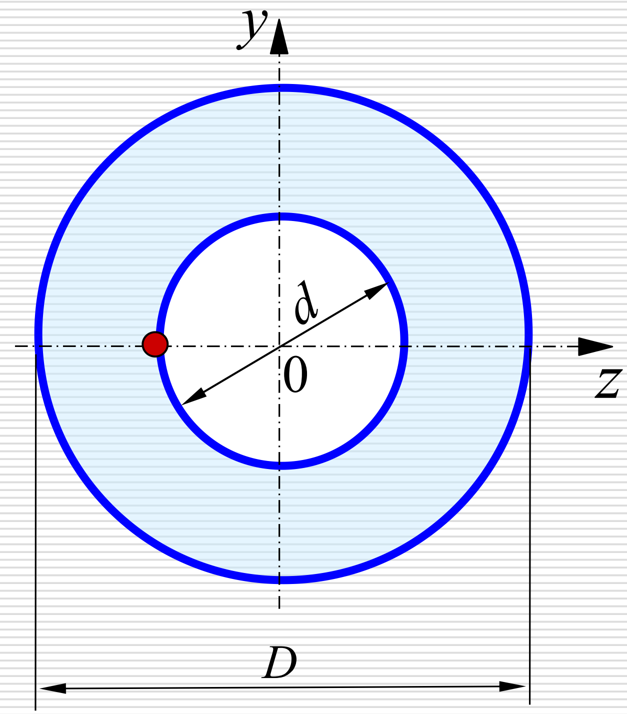
$$= 42.47\ MPa$$

方法二

$$\tau_{\min} = \frac{Tr}{I_P} = \frac{32Tr}{\pi D^4\left(1-\alpha^4\right)}$$

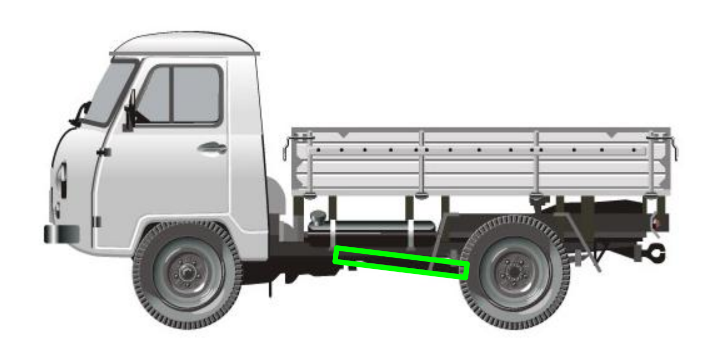
$$= \frac{32\times 1000\times 10\times 10^{-3}}{3.14\times 40^4\times 10^{-12}\left(1-0.5^4\right)}$$

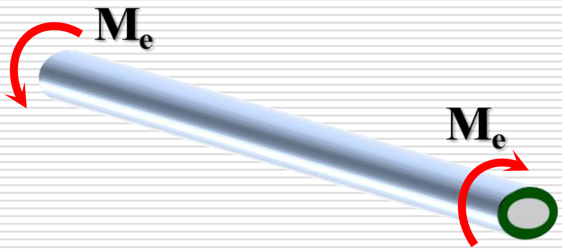
$$= 42.47MPa$$



例题 3

由无缝钢管制成的汽车传动轴，外径D=89mm、壁厚δ=2.5mm，材料为20号钢，使用时的最大扭矩T=1930$N\cdot m$,[τ]=70MPa.校核此轴的强度。





解：（1）计算抗扭截面模量

$$W_p = \frac{1}{16}\pi D^3(1-\alpha^4)$$

$$= \frac{1}{16}\times 3.14\times 89^3\left[1-\left(\frac{84}{89}\right)^4\right] = 29cm^3$$

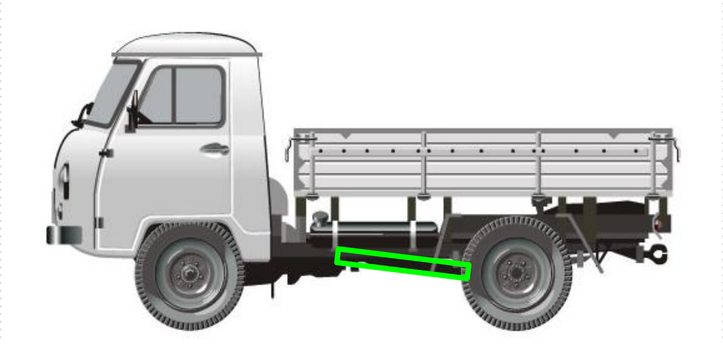
（2） 强度校核

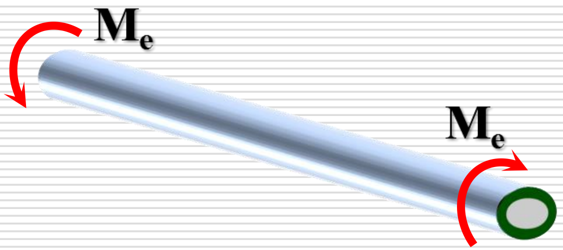
$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{1930}{29\times 10^{-6}} = 66.7\text{MPa} < [\tau]$$

该轴满足强度要求

例题 4

如把上例中的传动轴改为实心轴，要求它与原来的空心轴强度相同，试确定其直径。并比较实心轴和空心轴的重量。





解：（1）确定实心轴直径D_1

当实心轴和空心轴的最大应力同为[τ]时

$$\frac{T}{W_p}=[\tau] \qquad W_P=\frac{1}{16}\pi D_1^3$$

$$\frac{1}{16}\pi D_1^3=\frac{T}{[\tau]}=\frac{1930}{66.7\times10^6}$$

$$D_1=53mm$$

（2）两者重量的比较

实心轴和空心轴横截面面积为

$$A_1 = \frac{1}{4}\pi D_1^2 = \frac{\pi(0.053)^2}{4} = 22.1\times 10^{-4}\ m^2$$

$$A_2 = \frac{1}{4}\pi(D^2 - d^2) = \frac{\pi(0.089^2 - 0.084^2)}{4} = 6.79\times 10^{-4} m^2$$

在两轴长度相等，材料相同的情况下，两轴重量之比等于横截面面积之比。

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{6.79\times 10^{-4}}{22.1\times 10^{-4}} = 0.31$$

可见在强度相同的条件下，空心轴的重量仅为实心轴的31%

也就节省了近70%的材料

❶除了汽车上的传动轴采用空心轴外，飞机、轮船的某些轴常采用空心轴，以减轻重量。车床主轴采用空心轴既提高了强度和刚度，又便于加工长工件。

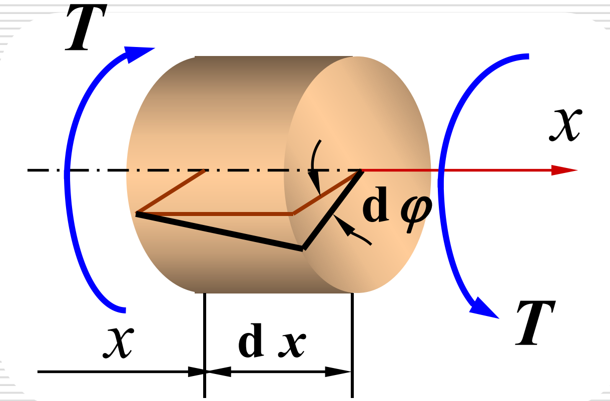
❷事物是辨证的，对于某一些轴是不宜采用空心轴的，比如将直径较小的长轴加工成空心轴，则因工艺复杂，反而增加成本，并不经济。此外，空心轴体积较大，在机器中要占用较大空间，而且如轴壁太薄，还会因扭转而不能保持稳定性。

第五节

圆轴扭转时的变形与刚度计算

一、相对扭转角

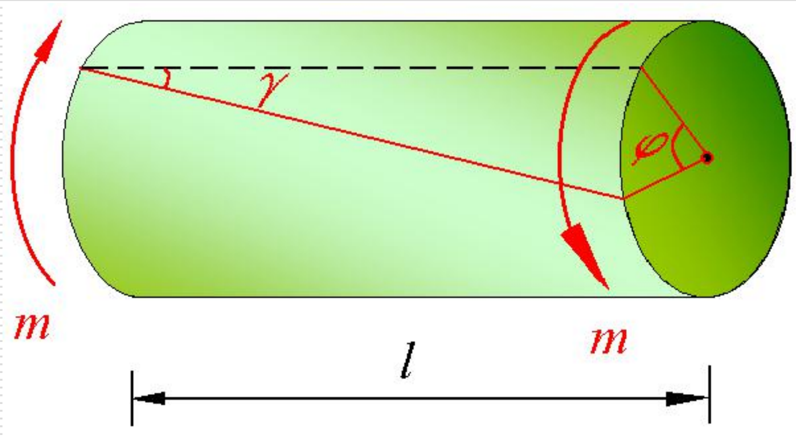
轴的扭转变形用两横截面间的**相对扭转角**表示



$$\mathrm{d}\varphi = \frac{T}{GI_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}x$$

$$\varphi = \int_{l} \frac{T}{GI_{\mathrm{p}}}\mathrm{d}x \quad （弧度）$$

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_{p}} \quad （rad）$$



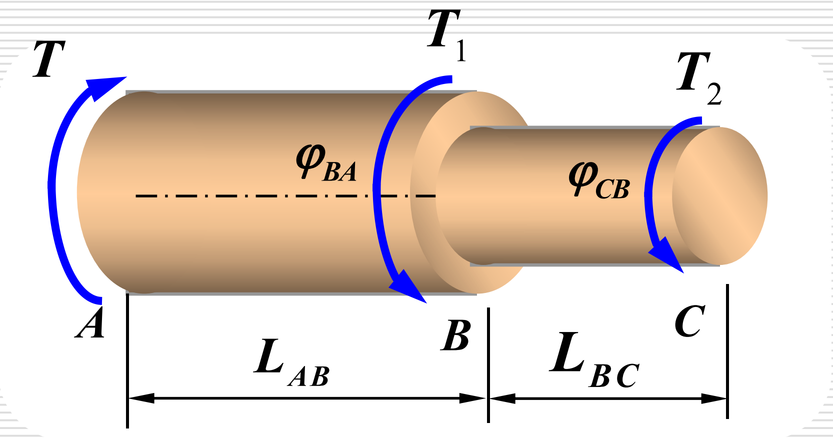
***GI$_p$* — 抗扭刚度**

一、相对扭转角

$$\varphi=\frac{Tl}{GI_p}\quad（rad）$$

注意：若T、l、G、I_P发生变化时需采用叠加法计算其总变形。

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i l_i}{G_i I_{pi}}$$



$$\varphi_{AC}=\varphi_{AB}+\varphi_{BC}$$

二、单位长度扭转角

$$\theta = \frac{\mathbf{d}\varphi}{\mathbf{d}x} = \frac{T}{GI_P} \qquad \text{（rad/m）}$$

$$\theta = \frac{T}{GI_\mathrm{p}} \times \frac{180^\circ}{\pi} \qquad \text{（°/m）}$$

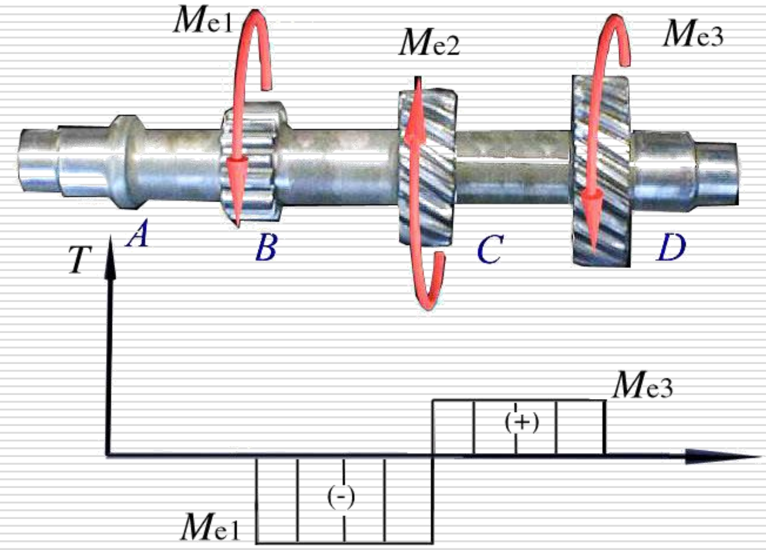
受扭圆轴不但要满足强度条件，还要满足刚度要求。

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_\mathrm{p}} \times \frac{180^\circ}{\pi} \le [\theta]$$

三、扭转刚度条件

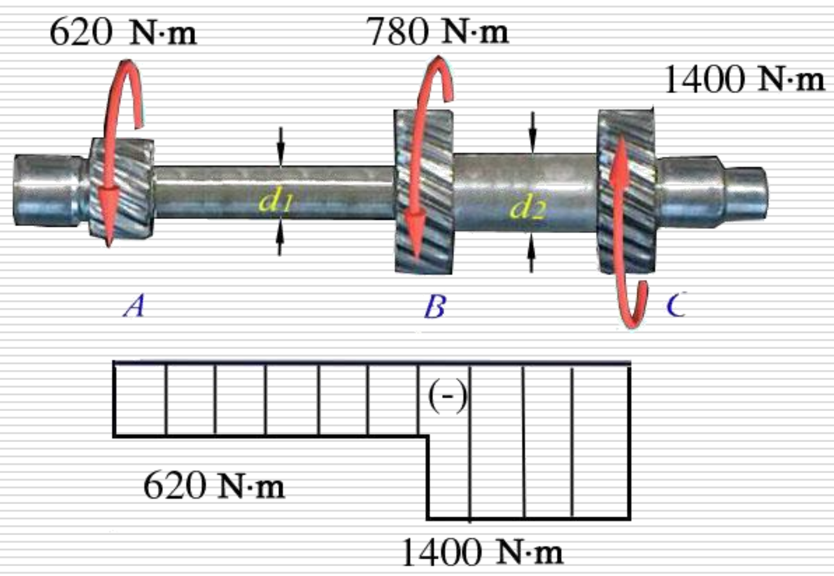
1.等截面圆轴

$$\theta_{\max}=\frac{T_{\max}}{GI_{\mathrm{p}}}\times\frac{180^\circ}{\pi}\le[\theta]$$



2.变截面圆轴

$$\theta_{\max}=\left(\frac{T}{GI_{\mathrm{p}}}\right)_{\max}\times\frac{180^\circ}{\pi}\le[\theta]$$



$[\theta]$ 许用单位扭转角

例题5 某传动轴所承受的扭矩T=200Nm，轴的直径d=40mm，材料的[τ]=40MPa，剪切弹性模量G=80GPa，许可单位长度转角[θ]=1°/m。试校核轴的强度和刚度。

解：（1） 校核轴的强度

$$\tau_{\max}=\frac{T}{W_p}=\frac{16T}{\pi d^3}=\frac{16\times 200}{3.14\times 40^3\times 10^{-9}}=15.92MPa<[\tau]$$

（2） 校核轴的刚度

$$\theta_{\max}=\frac{T}{GI_{\mathrm{p}}}\times\frac{180^{\circ}}{\pi}=\frac{32T}{G\pi d^4}\times\frac{180^0}{\pi}=\frac{32\times 200\times 180^0}{80\times 10^9\times\pi^2\times 40^4\times 10^{-12}}$$

$$\theta_{\max}=0.57\,^0/m<[\theta]$$

该轴满足强度和刚度条件

例题 6

主传动轴传递的功率$P=60kW$，$n=250rpm$，传动轴的许用切应力为$[\tau]=40MPa$，许用单位长度扭转角$[\theta]=0.5°/m$，切变模量$G=80GPa$，试计算传动轴所需的直径。

解：（1）计算轴的扭矩

$$T = 9549\frac{60}{250} = 2292\ \mathrm{N \cdot m}$$

(2）根据强度条件确定直径

$$\frac{T}{W_p} \le [\tau]$$

$$W_P \ge \frac{T}{[\tau]}$$

$$\frac{\pi d^3}{16} \ge \frac{2292}{40 \times 10^6} \qquad d \ge 66.3\ \mathbf{mm}$$

(3）根据刚度条件确定直径

$$\frac{T}{GI_p} \times \frac{180}{\pi} \le [\theta]$$

$$I_P \ge \frac{T \times 180^0}{G\pi[\theta]} \qquad I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\frac{\pi d^4}{32} \ge \frac{2292 \times 180^0}{80 \times 10^9 \times 3.14 \times 0.5}$$

$$d \ge 76\ \mathbf{mm}$$

综合考虑强度和刚度要求取轴直径

$$d = 76\ \mathrm{mm}$$

小结

1. 受扭物体的受力和变形特点

2. 扭矩计算，扭矩图绘制

3. 圆轴扭转时横截面上的应力计算及强度计算

$$\tau = \frac{T\rho}{I_P} \qquad \tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_P} \leq [\tau]$$

4. 圆轴扭转时的变形及刚度计算

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_P} \qquad \varphi' = \frac{T}{GI_P} \times \frac{180}{\pi} \leq [\varphi']$$


谢谢大家
第四章结束