



金融随机分析II课程论文

真实世界与风险中性世界下的衍生品定价

专业	金融工程
姓名	郑宇浩
学号	41621101
指导教师	陈培敏

真实世界与风险中性世界下的衍生品定价

摘要：本文为推导布莱克——斯科尔斯期权定价模型，先从最基础的布朗运动生成开始，逐步证明其鞅过程属性的满足，再代入生成伊藤过程，同时证明了伊藤——德布林公式的成立。在将股票价格代入到伊藤——德布林公式之后，本文对 HYG、CVS 和 EEM 三只股票进行了步数为 100 天的股票轨道模拟，发现其价格预测能力良好。利用无套利均衡定价理论，本文成功地推导出了关于期权价格的偏微分方程。但为了避免复杂偏微分方程的求解，使得布莱克——斯科尔斯期权定价模型具有更好的可推广性，本文引入哥萨诺夫变换算子，将风险测度由真实世界转换到风险中性世界，再对股票价格的伊藤——德布林公式重新进行推导，同时模拟得到多条风险中性世界下的股票轨道，其同样也具有较好的价格预测能力。同样根据无套利均衡定价理论，本文另外在风险中性世界下推导布莱克——斯科尔斯期权定价模型，其推导过程成功地将复杂的偏微分方程求解转为简单的积分运算，进一步地提高了布莱克——斯科尔斯期权定价模型的可推广性。最后，本文还对布莱克——斯科尔斯期权定价模型进行了实证研究，发现在对 HYG、CVS 和 EEM 三只股票不同到期日的看涨期权定价中，该期权定价模型具有良好的价格预测能力。

关键词：布朗运动 伊藤德布林公式 布莱克斯克尔斯期权定价模型
哥萨诺夫变换 风险中性世界 股票与期权价格预测

一、引言与文献综述

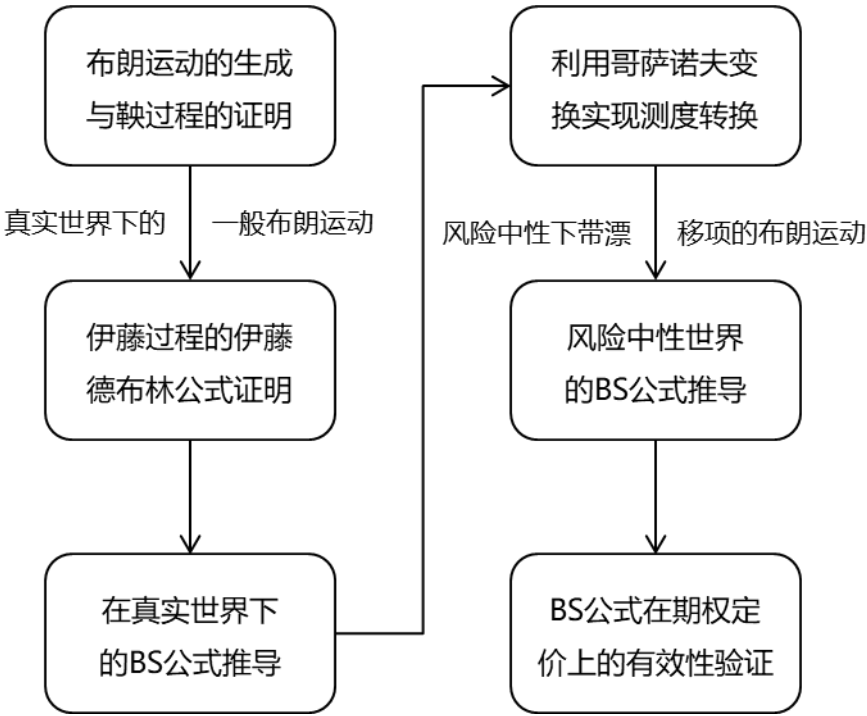
1997 年 10 月 10 日，哈佛商学院教授罗伯特·默顿和斯坦福大学教授迈伦·斯科尔斯因建立了布莱克——斯科尔斯期权定价模型^[1]（Black Scholes Option Pricing Model，以下简称 BS 公式），被授予第二十九届诺贝尔经济学奖。事实上，BS 公式不光可以运用在期权定价上，只要是以标的物的市价波动作为定价依据的金融衍生产品，都可以以 BS 公式为基础进行合理地定价。后期的默顿、斯科尔斯与他的同事费雪·布莱克还曾设想跳出金融领域，将 BS 公式推广到任意一种形式的权利定价上，可见其运用的范围之广^[2]。但在当年默顿与斯科尔斯推导 BS 公式的过程中，他们其实是利用伊藤引理，在事先假定好的不存在无风险套利机会的条件下^[3]，构建出投资于股票市场与现金市场上的个人财富与期权价值相等的公式，这就难以免去需要求解复杂偏微分方程的困难。所幸在数学家布莱克的帮忙下，二人成功地推导出了期权价值的解析解。

在感叹默顿、斯科尔斯和布莱克三人的天才想法之余，我们应该思考，是否还能够从其他角度入手，避免繁琐的偏微分求解过程，也能够成功地推导出 BS 公式？答案是肯定的。早在 1976 年，考克斯和罗斯同样也是在推导期权定价的过程中提出了风险中性定价理论^[4]。他们假设，当市场上不存在任何套利可能性时，如果金融衍生产品的价格仍然依赖于其标的物的话，那么该衍生品的价格与投资者的风险态度无关。这一理论，将后续的大多数金融衍生产品的定价，都限定在了风险中性世界下。不同于真实世界下的衍生品定价要求其贴现率依赖于标的资产的价格波动情况，即 β 值，且预期收益率也难以精准计算，风险中性世界下的定价则采用无风险收益率作为贴现率与预期收益率，大大减小了计算的复杂程度。而且，考克斯和罗斯也给出了严格的证明说明，在从风险中性世界转换到真实世界的过程中，衍生品的贴现率与预期收益率的变换往往是可以相互抵消的，这就使得在风险中性世界下的定价

同样也是有效的。

基于上述理论，哥萨诺夫还提出了从真实世界到风险中性世界的合理变换公式——哥萨诺夫定理^[5]。利用这一测度变换公式，我们可以成功地将 BS 公式在真实世界下的推断，变换到风险中性世界，再在无套利机会的假设下进行公式推导，就可以免去复杂的偏微分方程计算，同样也能得到合理的期权定价公式。本文将分别在真实世界与风险中性世界下推导 BS 公式，研究其推导过程中的异同点，再对推导得出的 BS 公式进行实证分析，探讨其在期权定价上的有效性。具体的研究流程如下图 1：

【图 1】研究流程



二、研究方法

为在真实世界下推导得出 BS 公式，我们先从构建布朗运动开始，并从数学与统计学两种不同角度上证明其满足鞅过程定理，则可以代入生成更为一般的伊藤过程。同时，我们还证明了基于布朗运动的伊藤——德布林公式的成立。在统计学角度上验证了伊藤过程的鞅过程与二次偏差属性之后，我们可以构建基于伊藤过程的伊藤——德布林公式，同时给出了其在股票价格模拟上的运用。基于 HYG、CVS 和 EEM 三只股票在 2018 年 6 月 11 日至 2019 年 6 月 7 日间的所有收盘价的前 150 个数据计算出各只股票收益率与波动率的均值，随后代入股票的伊藤——德布林公式求算出剩余的 50 天多条预期收盘股价轨道，与真实的股价进行对比，计算二者之间的残差平方和均值与均方误差。利用已得到的股票伊藤——德布林公式，我们就可根据无套利均衡定价理论，假设初始财富与期权的初始价值相同，构建关于期权价格的偏微分方程，求解即可得到 BS 期权定价公式。

为能够进一步在风险中性世界下推导 BS 公式，我们引入哥萨诺夫变换算子，将风险测度从真实世界转换到风险中性世界。同时，为在风险中性世界下满足鞅过程定理，我们使用带漂移项的布朗运动，带入生成仍然满足鞅过程及二次偏差属性的伊藤过程，随后即可同样

地构建风险中性世界下基于伊藤过程的伊藤——德布林公式。重复利用前文提到的三只股票的收盘价数据，结合 2018 年 6 月 11 日至 2019 年 6 月 7 日间的美国十年期国债收益率，我们同样可以代入到伊藤——德布林公式中得到风险中性世界下的多条股票轨道，分别与真实世界下的模拟股票轨道与真实股价进行对比。同样根据无套利均衡定价理论，我们也有期权的初始价值等于初始的财富值，但其推导过程将不同与真实世界下的 BS 公式推导需要求解复杂的偏微分方程，风险中性世界下的 BS 公式推导只需进行简单的积分运算。

最终，我们利用推导得到的 BS 期权定价公式，求算 HYG、CVS 和 EEM 三只股票不同到期日下 2019 年 6 月 10 日的期权价格，与真实的期权价格进行对比，验证 BS 期权定价公式的有效性。

三、模型构建

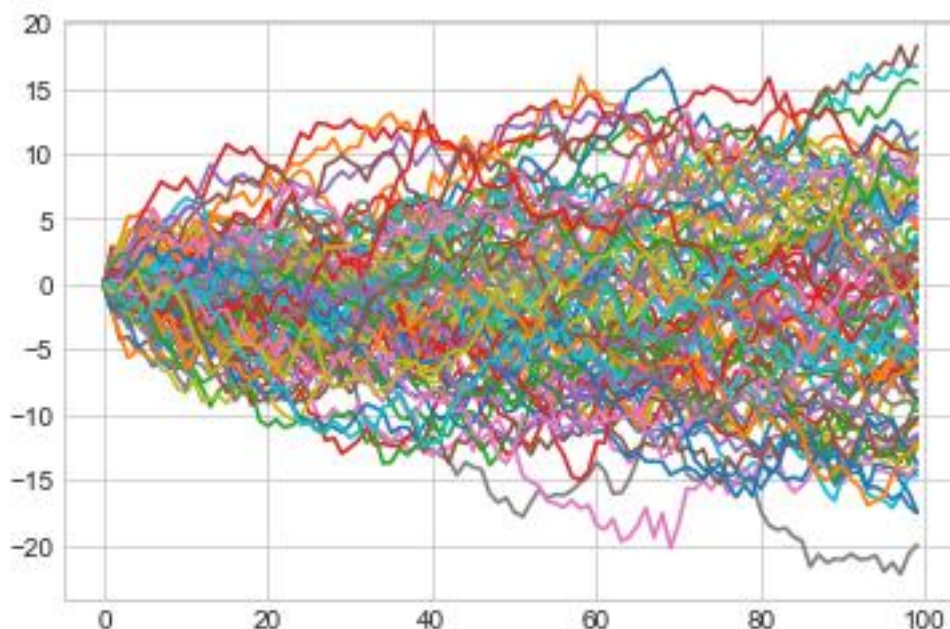
3.1 布朗运动的生成与鞅过程的证明

根据布朗运动的定义^[6]，该随机过程必须满足如下公式 1：

$$\begin{cases} \text{连续函数} & w(0) = 0 \\ \text{独立增量} & w(t_{i+1}) - w(t_i) \sim N(0, t_{i+1} - t_i) \end{cases} \quad (1)$$

则为满足上述公式，我们可以先生成 N 个服从标准正态分布的独立增量 $w(t_{i+1}) - w(t_i)$ ，再由正态分布的可加性将其求和得到服从 $N(0, T)$ 的布朗运动 $w(t)$ 。多个布朗运动的随机过程图如下图 1：

【图 2】100 个布朗运动的随机过程图



在生成布朗运动之后，需要验证的是其是否满足鞅过程。证明过程如下 *Proof 1*：

Proof 1：

$$E(w(t)|F(s)) = E(w(t) - w(s) + w(s)|F(s)) = E(w(t) - w(s)) + w(s) = w(s)$$

□

同时，我们也可以利用已经生成的 100 个布朗运动，从统计学角度上去验证其鞅过程属性，只需证明从第 25 步出发和从 75 步出发的布朗运动的平均值相等，结果如下表 1：

【表 1】条件步数为 25 和 75 的布朗运动条件期望

出发步数	$E(w(100) F(25))$	$E(w(100) F(75))$
平均值	-1.3911	-1.5436

由于生成的布朗运动仅有 100 个，故其条件期望的结果存在一定的偏差，但随着我们模拟次数的增加，二者的数值将会逐步逼近直到 N 取正无穷时完全相等，从而可以验证布朗运动的鞅过程属性。

3.2 伊藤过程的生成与伊藤——德布林公式的证明

满足鞅过程的布朗运动是生成伊藤过程的前提条件^[7]，但在将布朗运动代入生成伊藤过程之前，我们先证明布朗运动的伊藤——德布林公式的成立。公式 2 的证明过程如下 *Proof 2*：

积分形式： $f(T, w(T)) - f(0, w(0))$

$$= \int_0^T f_t(t, w(t)) dt + \int_0^T f_x(t, w(t)) dw(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, w(t)) dt$$

$$\text{微分形式：} df(t, w(t)) = f_t(t, w(t))dt + f_x(t, w(t))dw(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, w(t))dt \quad (2)$$

Proof 2：

$$f(T, w(T)) - f(0, w(0)) = \sum [f(t_{j+1}, w(t_{j+1})) - f(t_j, w(t_j))]$$

由泰勒展开式有：

$$\begin{aligned} &= \sum [f_t(t_j, w(t_j))(t_{j+1} - t_j) + \sum [f_x(t_j, w(t_j))(w(t_{j+1}) - w(t_j))] \\ &= \frac{1}{2} \sum [f_{xx}(t_j, w(t_j))(t_{j+1} - t_j)^2] + \text{高阶无穷小量} \end{aligned}$$

在 $\|I\| \rightarrow 0$ 时有： $dw(t)w(t) = dt$ ， $dt dw(t) = dw(t)dt = 0$ ， $dt dt = 0$ ，则有：

$$f(T, w(T)) - f(0, w(0)) = \int_0^T f_t(t, w(t)) dt + \int_0^T f_x(t, w(t)) dw(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, w(t)) dt$$

$$df(t, w(t)) = f_t(t, w(t))dt + f_x(t, w(t))dw(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, w(t))dt$$

□

将布朗运动代入公式 3 得到伊藤过程。

$$\text{积分形式：} X(t) = X(0) + \int_0^t \Delta(u)dw(u) + \int_0^t \Theta(u)du$$

微分形式： $dX(t) = \Delta(t)dw(t) + \Theta(t)dt$ ($\Delta(t)$ 与 $\Theta(t)$ 为自适应性过程) (3)

为了更好地理解伊藤过程中伴随的波动率问题，如下 *Proof 3* 将证明伊藤过程 $X(t)$ 的二次偏差与其自适应性过程具有如下公式 4 关系：

$$[X,X](t) = \int_0^t \Delta^2(u)du \tag{4}$$

Proof 3:

令 $I(t) = \int_0^t \Delta(u)du$, $R(t) = \int_0^t \Theta(u)du$

$$\begin{aligned} \sum [X(t_{j+1}) - X(t_j)]^2 \\ &= \sum [I(t_{j+1}) - I(t_j)]^2 + \sum [R(t_{j+1}) - R(t_j)]^2 \\ &\quad + \sum [I(t_{j+1}) - I(t_j)][R(t_{j+1}) - R(t_j)] \end{aligned}$$

其中 $\max_{0 \leq k \leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \int_0^t |\Theta(u)|du$

$2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \sum |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \leq 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \int_0^t |\Theta(u)|du$

在 $\|I\| \rightarrow 0$ 时有： $\max_{0 \leq k \leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| = 0$, $\max_{0 \leq k \leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| = 0$, 则有：

$$[X,X](t) = [I,I](t) = \int_0^t \Delta^2(u)du$$

□

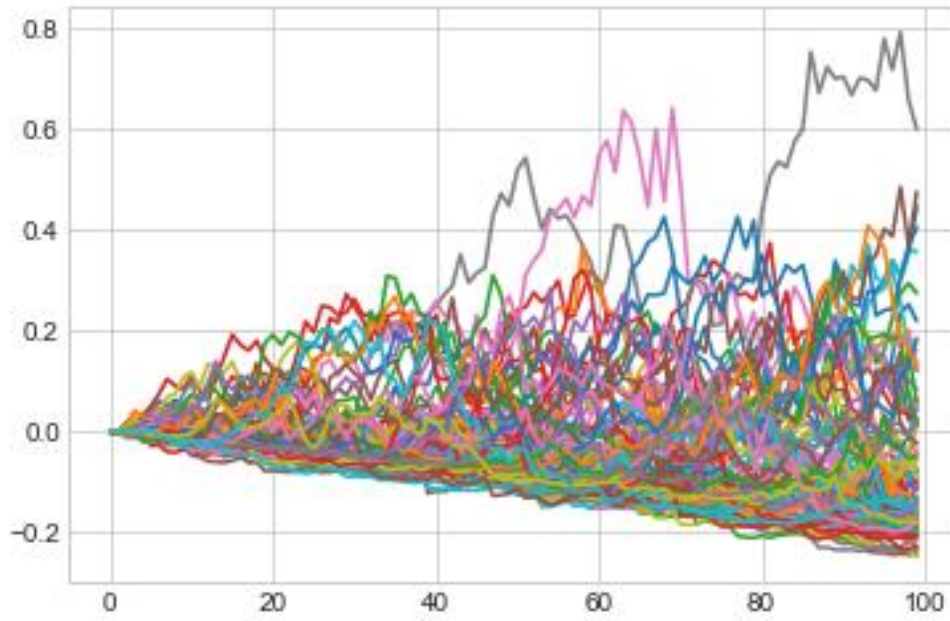
在离散情况下，我们可以用如下公式 5 来模拟生成多个伊藤过程，效果图如下图 3：

$$X(t) = X(0) + \sum_{j=0}^{k-1} \Delta(t_j)(w(t_{j+1}) - w(t_j)) + \Delta(t_k)(w(t) - w(t_k)) \tag{5}$$

同理，我们也能够从统计学意义上去证明其满足鞅过程与二次偏差属性，如下表 2：

【表 2】伊藤过程的鞅过程与二次偏差属性			
定理	公式	左边	右边
鞅过程		$E(X(100) F(25))$	$E(I(100) F(75))$
		-0.0310	-0.0524
二次偏差		$\sum [X(t_{j+1}) - X(t_j)]^2$	$\sum \Delta^2(t_j)$
		0.0572	0.0587

【图 3】100 个伊藤过程的随机过程图



在完成了伊藤过程满足鞅过程属性的证明之后，我们可以将其代入到伊藤——德布林公式，如下公式 6：

积分形式： $f(T, X(T)) - f(0, X(0))$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^T f_t(t, X(t)) dt + \int_0^T f_x(t, X(t)) dX(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X(t)) d[X, X](t) \\
 &= \int_0^T f_t(t, X(t)) dt + \int_0^T f_x(t, X(t)) \Delta(t) dw(t) + \int_0^T f_x(t, X(t)) \Theta(t) dt \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X(t)) \Delta^2(t) dt
 \end{aligned}$$

微分形式： $df(t, X(t)) = f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))dX(t)X(t)$

$$\begin{aligned}
 &= f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))\Delta(t)dw(t) + f_x(t, X(t))\Theta(t)dt \\
 &\quad + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))\Delta^2(t)dt
 \end{aligned} \tag{6}$$

假设标的物的对数收益率服从正态分布，则有如下公式 7：

$$\ln\left(\frac{S(t+1)}{S(t)}\right) \sim N(\alpha, \sigma^2) \Rightarrow S(t) = S(0)e^{X(t)} = S(0)e^{\int_0^t \sigma(s)dw(s) + \int_0^t (\alpha(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2)ds} \tag{7}$$

将标的物价格过程 $S(t)$ 代入伊藤——德布林公式，则有如下公式 8：

$$\begin{aligned}
dS(t) &= f'(X(t))dX(t) + f''(X(t))dX(t)dX(t) = S(0)e^{X(t)}dX(t) + \frac{1}{2}S(0)e^{X(t)}dX(t)dX(t) \\
&= S(t)dX(t) + \frac{1}{2}S(t)dX(t)dX(t) = \alpha(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dw(t)
\end{aligned} \quad (8)$$

依此公式，我们可以生成多条股票轨道，具体步骤如下：

1. 从雅虎财经网站中选取 HYG、CVS、EEM 三只股票，下载其从 2018 年 6 月 11 日至 2019 年 6 月 7 日的所有收盘价；
2. 将历史前 150 天的收盘价作为求算股票收益率与波动率的样本数据集，代入公式 9 求算收益率与波动率的平均值，作为后续生成股票轨道所需 α 与 σ^2 的参数值；

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{150} \sum_{t=2}^{150} \ln\left(\frac{S(t+1)}{S(t)}\right) \\ \sigma^2 = \frac{1}{150} \sum_{t=2}^{150} \ln\left(\frac{S(t+1)}{S(t)}\right)^2 \end{cases} \quad (9)$$

3. 将三只股票在第 150 天的收盘价作为 $S(0)$ ，与第二步中计算得到的 α 、 σ^2 参数值，代入到伊藤——德布林公式 8，模拟生成 25 条股票轨道；
4. 将生成的多条股票轨道与真实的股票价格绘制于同一幅图中，观察其模拟的准确度，最终结果如下图 4；
5. 通过公式 10，我们可以进一步地求算出用伊藤——德布林公式模拟得到的股票轨道与真实的股票价格之间的均方误差，如下表 3；同时，利用公式 11，我们还能够探究残差平方和均值与时间间隔之间的关系如下表 4；

$$MSE = \frac{1}{T-t} \sum_{i=1}^{T-t} (\text{close}_i - \overline{\text{close}}_i)^2 \quad (10)$$

【表 3】三只股票的均方误差

股票名	HYG	CVS	EEM
MSE	7.4209	47.5674	16.0180

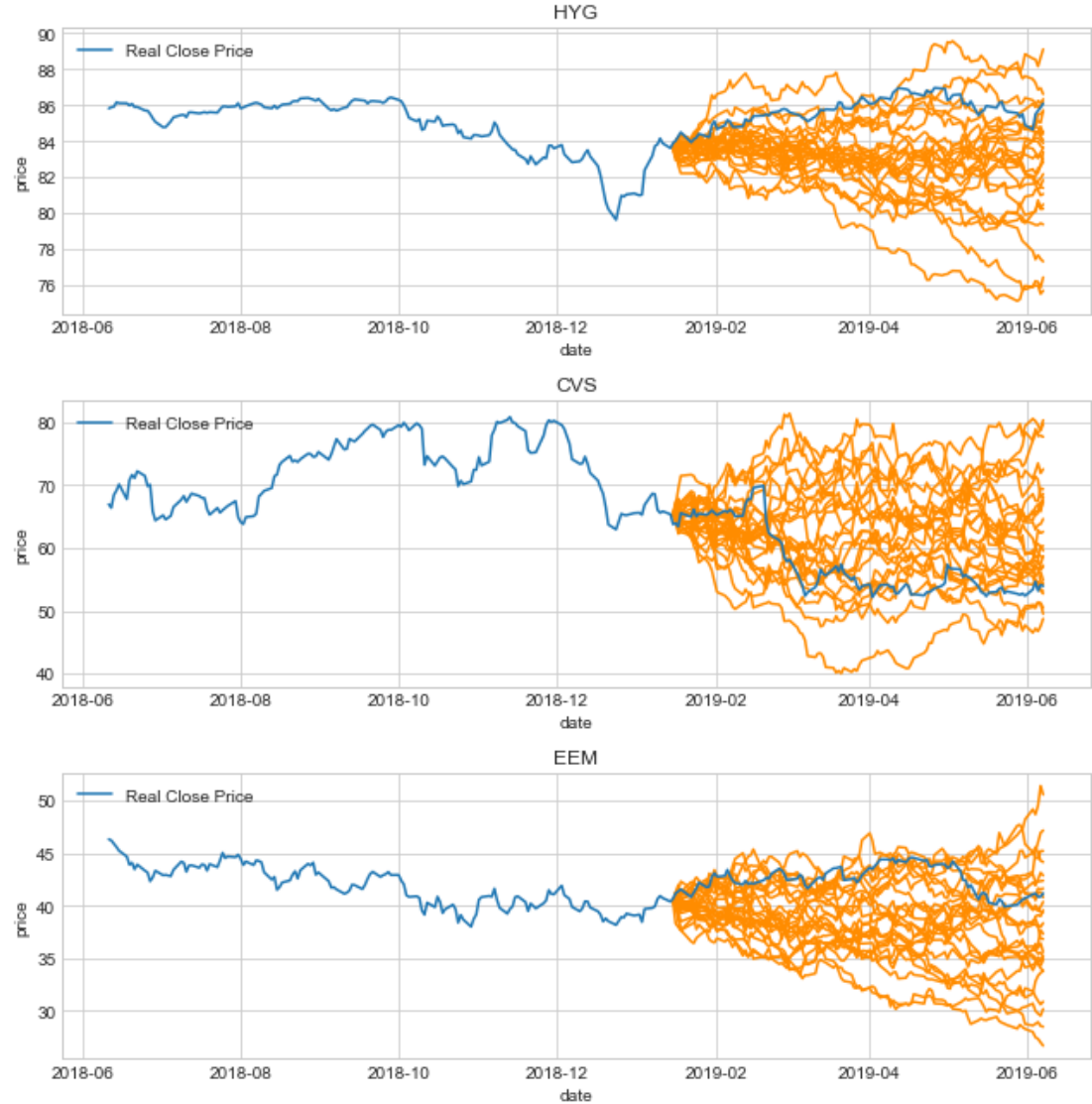
$$\text{error}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\text{close}_{t,i} - \widehat{\text{close}}_{t,i})^2 \quad (11)$$

【表 4】三只股票的真实价格与模拟股票轨道之间的残差平方和均值

股票名 \ 天数	25	50	75	100
HYG	4.8992	12.1652	19.8293	21.3924
CVS	44.7397	153.4215	78.1988	146.6977
EEM	18.2706	24.2439	50.4049	43.7840

与我们预期相符的是，随着时间间隔的扩大，利用伊藤——德布林公式计算的股票轨道会逐渐偏离股票的真实价格，即残差平方和均值逐渐扩大。但由于本研究未对股票价格进行标准化，故可能出现如 CVS 的残差平方和均值一样的异常值，这是由其样本集内数据的高波动率与其自身的高股价造成的。

【图 4】三只股票的真实价格与模拟股票轨道对比图



3.3 真实世界下的 BS 公式推导

假设初始财富为 $W(t)$ 并且分别投资于股票市场 $\Delta(t)$ 份与现金市场，则有如下公式 12:

$$W(t) = \Delta(t)S(t) + W(t) - \Delta(t)S(t) \tag{12}$$

对公式 12 取微分后联立股票的伊藤——德布林公式 8 则有如下公式 13:

$$\begin{aligned}
dW(t) &= d(\Delta(t)S(t) + W(t) - \Delta(t)S(t)) = \Delta(t)dS(t) + d(W(t) - \Delta(t)S(t)) \\
&= \Delta(t)dS(t) + r(W(t) - \Delta(t)S(t))dt \\
&= \Delta(t)(\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dw(t)) + r(W(t) - \Delta(t)S(t))dt \\
&= (rW(t) + \Delta(t)(a - r)S(t))dt + \Delta(t)\sigma S(t)dw(t)
\end{aligned} \tag{13}$$

当我们将期权价值 $C(t, S(t))$ 同样也使用伊藤——德布林公式时，代入公式 6 有如下公式 14:

$$\begin{aligned}
d(C(t, S(t))) &= C_t dt + C_x dS(t) + \frac{1}{2} C_{xx} d(S(t))^2 \\
&= C_t dt + C_x (\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dw(t)) + \frac{1}{2} C_{xx} \sigma^2 S(t)^2 dt \\
&= \left(C_t + \alpha S(t)C_x + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 C_{xx} \right) dt + \sigma S(t)C_x dw(t)
\end{aligned} \tag{14}$$

根据无套利均衡定价理论^[8]，我们有 $d(e^{-r(T-t)}C(t, S(t))) = d(e^{-r(T-t)}W(t))$ 成立，即公式 15:

$$\begin{aligned}
e^{-r(T-t)} \left(-rC(t, S(t)) + C_t + \alpha S(t)C_x + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 C_{xx} \right) dt + e^{-r(T-t)} \sigma S(t)C_x dw(t) \\
= e^{-r(T-t)} \Delta(t)(a - r)S(t)dt + e^{-r(T-t)} \Delta(t)\sigma S(t)dw(t)
\end{aligned} \tag{15}$$

当令 $\Delta(t) = C_x$ 时，有如下公式 16:

$$-rC(t, S(t)) + C_t + \alpha S(t)C_x + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 C_{xx} = C_x(a - r)S(t) \tag{16}$$

解得有如下公式 17:

$$\begin{cases} C(t, S(t)) = S(t)N(d_+) - Ke^{-r(T-t)}N(d_-), \quad C(t, 0) = 0 \quad t \in (0, T) \\ d_+ = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_- = d_+ - \sigma\sqrt{T - t} \\ N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}u^2} du \end{cases} \tag{17}$$

当然，我们还分别知道希腊字母 Δ 、 θ 和 γ 的表达式如下公式 18:

$$\begin{cases} \Delta = C_x = N(d_+) \\ \theta = C_t = -rKe^{-r(T-t)}N(d_-) - \frac{1}{2}\sigma S(t)N'(d_+) < 0 \\ \gamma = C_{xx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}N'(d_+) > 0 \end{cases} \tag{18}$$

3.4 哥萨诺夫风险测度变换

根据上述公式，虽然我们可以成功地推导出 BS 期权定价公式，但实际上求解期权价值

的偏微分方程是相当复杂繁琐的，且该方法不具有可推广性，即当我们要更换为另外一种除股票以外的标的资产时，基础证券的波动率与其对应的金融衍生产品的贴现率都不固定，这就给我们的计算带来了很大的麻烦。所幸的是，1976年考克斯和罗斯提出的风险中性定价理论可以运用于BS公式的推导，只需要在无套利均衡定价公式上，利用哥萨诺夫变换，将风险测度由真实世界转换到风险中性世界下即可。在此之前，我们先研究风险测度变换算子——拉东尼柯迪姆导数 $Z(t)$ ，它满足如下公式 19：

$$\begin{cases} Z(t) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}(t)) \\ \tilde{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z(\omega) dP(\omega) \quad (A \in \mathcal{F}) \\ \tilde{\mathbb{E}}X = \mathbb{E}[XZ], \quad \mathbb{E}X = \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{X}{Z}\right] \\ Z = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{dP} \end{cases} \quad (19)$$

其中，需要注意的一点是， $Z(t)$ 也同为一鞅过程，这是在后期构建哥萨诺夫变换算子时需要满足的一点，具体证明过程如下 *Proof 4*：

Proof 4:

$$\mathbb{E}(Z(t)|\mathcal{F}(s)) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Z|\mathcal{F}(t))|\mathcal{F}(s)\right) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}(s)) = Z(s)$$

□

同时，对资产 Y ，我们有如下公式 20：

$$\tilde{\mathbb{E}}Y = \mathbb{E}[YZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[YZ|\mathcal{F}(t)]] = \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[Z|\mathcal{F}(t)]] = \mathbb{E}[YZ(t)] \quad (20)$$

为使得布朗运动 $w(t)$ 在新的测度——风险中性测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下仍然为一鞅过程，才能代入公式 3 生成伊藤过程，我们令带漂移项的布朗运动 $\tilde{w}(t)$ 与哥萨诺夫变换算子 $Z(t)$ 有如下公式 20 成立：

$$\begin{cases} Z(t) = e^{-\int_0^t \theta(u) dw(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta(u)^2 du} \\ \tilde{w}(t) = w(t) + \int_0^t \theta(u) du \end{cases} \quad (20)$$

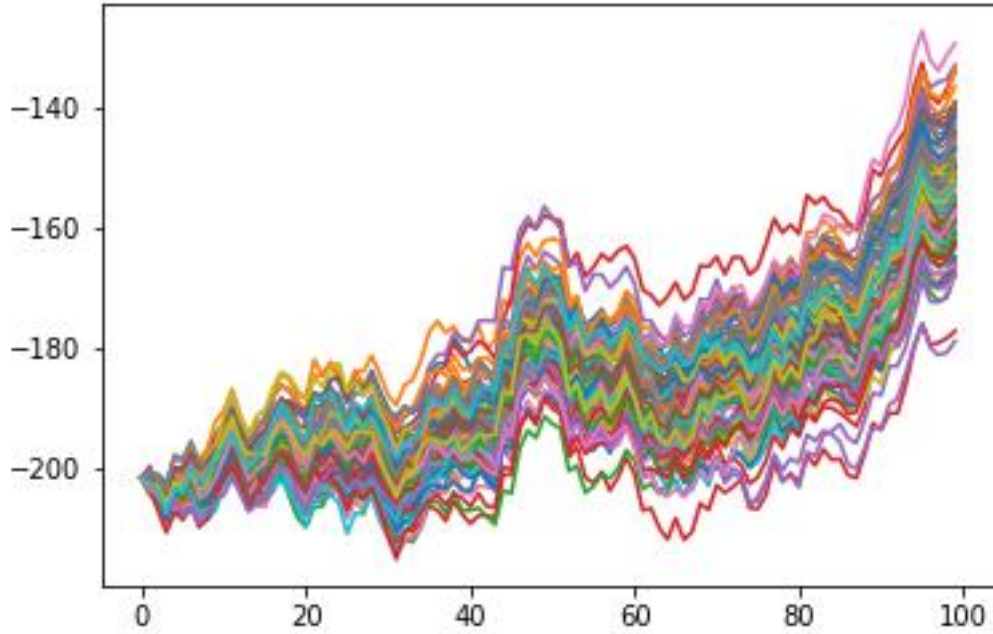
由列维定理可知， $\tilde{w}(t)$ 满足如下公式 22，则其为一布朗运动，即为一鞅过程：

$$\begin{cases} \tilde{w}(0) = w(0) + \int_0^0 \theta(u) du = 0 \\ d\tilde{w}(t)d\tilde{w}(t) = (dw(t) + \theta(t)dt)^2 = dw(t)dw(t) = dt \end{cases} \quad (22)$$

依照上述公式，我们可以绘制带漂移项的布朗运动随机过程图，其中， $\theta(t) = \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)}$ ， α 和 σ

分别为股票 EEM 的历史收益率均值与波动率, R 则为美国十年期国债收益率, 具体结果如下图 5:

【图 5】100 个带漂移项的布朗运动的随机过程图



可以看到, 明显的, 带了漂移项以后的布朗运动过程随着步数的增加呈现上涨趋势, 而不再是随机的游走过程。

此外, $Z(t)$ 也为一鞅过程, 证明过程如下 *Proof 5*:

Proof 5:

$$\begin{aligned}
 X(t) &= -\int_0^t \theta(u) dw(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta(u)^2 du \\
 dZ(t) &= df(X(t)) = f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))dX(t)dX(t) \\
 &= e^{X(t)} \left(-\theta(t)dw(t) - \frac{1}{2} \theta(t)^2 dt \right) + \frac{1}{2} e^{X(t)} \theta(t)^2 dt \\
 &= -\theta(t)Z(t)dW(t) \\
 Z(t) &= Z(0) + \int_0^t \theta(u)Z(u)dw(u) \text{ 为一伊藤过程, 则有:} \\
 Z(t) &\text{为一鞅过程, 且有 } \mathbb{E}Z = \mathbb{E}Z(T) = Z(0) = 1
 \end{aligned}$$

□

依此我们可以知道, $Z(t) = \mathbb{E}(Z(T)|\mathcal{F}(t)) = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}(t))$ ($0 \leq t \leq T$) 为一拉东尼柯迪姆导数。

我们将哥萨诺夫风险测度变换运用于股票定价上, 则在风险中性世界下的股票贴现值有如下公式 23:

$$D(t) = e^{-\int_0^t R(s)ds}$$

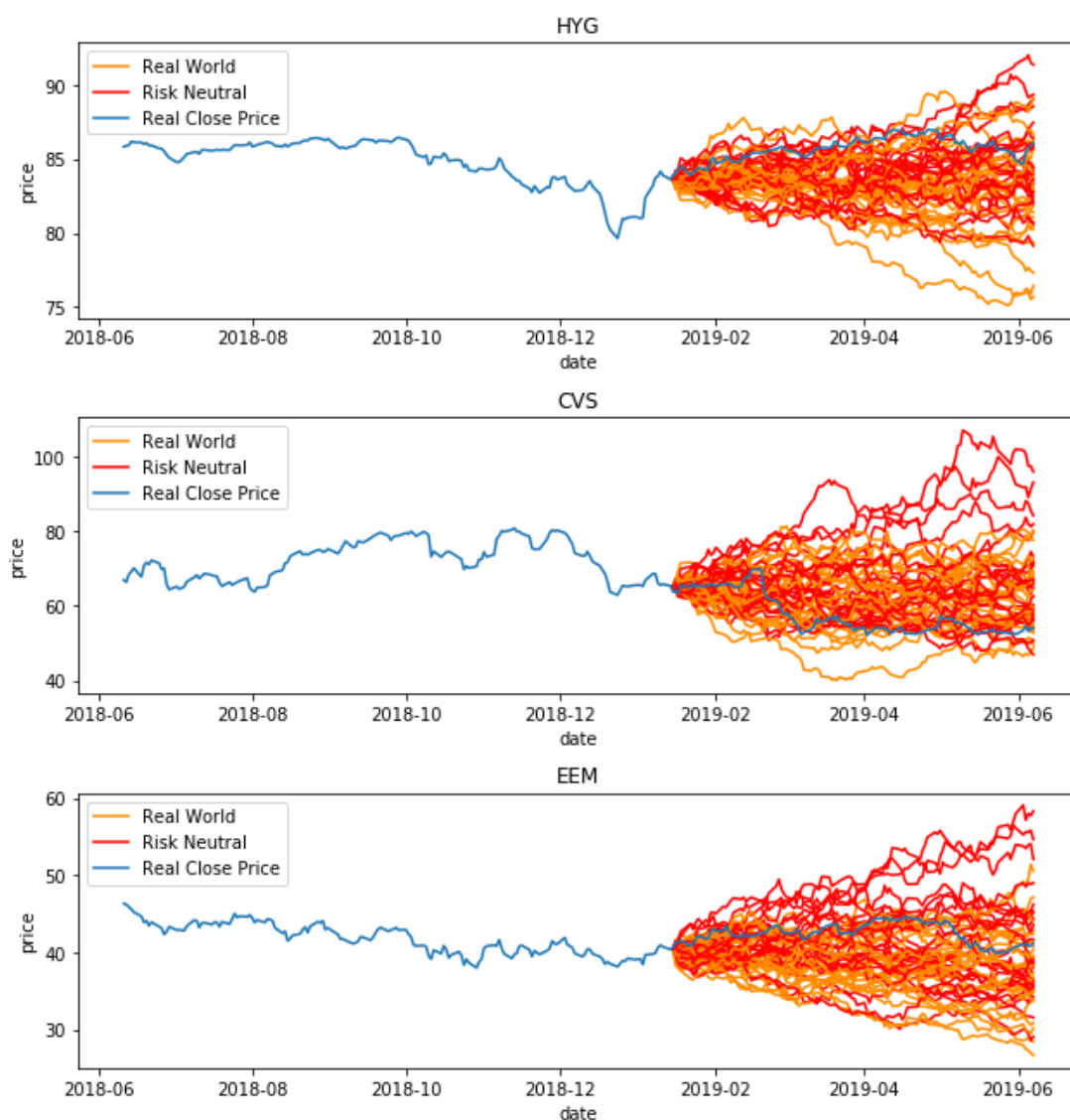
$$\begin{aligned}
D(t)S(t) &= S(0)e^{\int_0^t \sigma(s)dw(s) + \int_0^t \left(\alpha(s) - R(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2\right)ds} \\
d(D(t)S(t)) &= (\alpha(t) - R(t))D(t)S(t)dt + \sigma(t)D(t)S(t)dw(t) \\
&= \sigma(t)D(t)S(t)[\theta(t)dt + dw(t)] \quad \theta(t) = \frac{\alpha(t) - R(t)}{\sigma(t)} \\
&= \sigma(t)D(t)S(t)d\tilde{w}(t) \\
D(t)S(t) &= S(0) + \int_0^t \sigma(u)D(u)S(u)d\tilde{w}(u)
\end{aligned} \tag{23}$$

由于在风险中性测度 $\tilde{\mathbb{P}}$ 下 $\int_0^t \sigma(u)D(u)S(u)d\tilde{w}(u)$ 为一伊藤过程，即为一鞅过程，则未贴现的股票价格有如下公式 24:

$$\begin{aligned}
dS(t) &= R(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)d\tilde{w}(t) \\
S(t) &= S(0)e^{\int_0^t \sigma(s)d\tilde{w}(s) + \int_0^t \left(R(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2\right)ds}
\end{aligned} \tag{24}$$

同样的，依此公式，我们也可以生成风险中性世界下的多条股票轨道，如下图 6 所示。

【图 6】三只股票的真实价格与风险中性世界下的模拟股票轨道对比图



我们还可以利用公式 10 计算出相应的风险中性世界下的股票轨道与真实的股票价格之间的均方误差，具体结果如下表 5：

【表 5】在风险中性世界下计算得到的三只股票的均方误差

股票名	HYG	CVS	EEM
MSE	3.6415	99.5298	3.0997

可以看到，除了带有异常波动率的第二只股票外，在风险中性测度下模拟得到的股票价格与真实股价间的误差要小于直接在真实世界下计算得到的结果。

3.5 风险中性世界下的 BS 公式推导

在公式 12 中，我们利用 $D(t)$ 将个人财富在风险中性世界中贴现到现值，同样地由无套利均衡定价理论，我们有如下公式 25：

$$\begin{aligned} C(t, S(t)) &= W(t) = \frac{1}{D(t)} D(t) W(t) = \frac{1}{D(t)} \tilde{\mathbb{E}}(D(T) W(T) | \mathcal{F}(t)) \\ &= \frac{1}{D(t)} \tilde{\mathbb{E}}(D(T) C(T, S(T)) | \mathcal{F}(t)) = \tilde{\mathbb{E}}\left(e^{-\int_t^T R(s) ds} (S(T) - K)^+ | \mathcal{F}(t)\right) \quad (25) \end{aligned}$$

将股票在风险中性世界下的定价公式 24 代入，同时令 $\tau = T - t$ ， $Y = -\frac{\tilde{w}(T) - \tilde{w}(t)}{\sqrt{T-t}}$ ，则有如下公式 26：

$$\begin{aligned} C(t, S(t)) &= \tilde{\mathbb{E}}(e^{-R\tau} (S(T) - K)^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-R\tau} \left(S(t) e^{-\sigma\sqrt{\tau}Y + (R - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau} - K \right)^+ e^{-\frac{1}{2}Y^2} dy \\ \text{显然有 } y &\leq d_-, \text{ 则有:} \\ C(t, S(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-R\tau} \left(S(t) e^{-\sigma\sqrt{\tau}Y + (R - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau} - K \right)^+ e^{-\frac{1}{2}Y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} S(t) e^{-\frac{1}{2}Y^2 - \sigma\sqrt{\tau}Y - \frac{1}{2}\sigma^2\tau} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-R\tau} K e^{-\frac{1}{2}Y^2} dy \\ &= \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-\frac{1}{2}(Y + \sigma\sqrt{\tau})^2} dy - K e^{-R\tau} N(d_-) \\ &= \frac{S(t)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_+} e^{-\frac{1}{2}Y^2} dy - K e^{-R\tau} N(d_-) \\ &= S(t) N(d_+) - K e^{-R\tau} N(d_-) \quad (26) \end{aligned}$$

观察上式的推导过程，我们发现在风险中性测度下推导 BS 期权定价公式不需要求解复杂的偏微分方程，却而代之的是较为简单的积分运算，大大减少了我们的计算量，也为后期将基础证券推广到除股票以外的标的资产，为不同的金融衍生产品定价做了良好的铺垫。

四、实证分析

根据公式 17 与公式 26 的推导过程，我们都能够得到 BS 期权定价公式，但对于其预测真实期权价值的准确性，我们还需要对其进行实证研究，具体步骤如下：

1. 利用前文已下载得到的 HYG、CVS、EEM 三只股票自 2018 年 6 月 11 日到 2019 年 6 月 7 日的所有收盘价，代入公式 9 求得更新至 2019 年 6 月 7 日的历史收益率与波动率的平均值，作为后续生成股票轨道所需 α 与 σ^2 的参数值；
2. 分别利用公式 8 与公式 24 模拟生成 1000 条真实世界下与风险中性世界下的股票轨道，步数分别为 5 天、10 天与 50 天，对应于后期需要预测的到期日为 2019 年 6 月 14 日、6 月 21 日和 8 月 16 日的多个期权；
3. 将模拟生成的股票轨道分别代入到真实世界与风险中性世界下的 BS 期权定价公式中，求得相应的预测价格，与真实的期权价格作对比，结果如下表 6 所示：

【表 6】利用 BS 期权定价公式求算出的期权价格结果

标的股票名	到期日(τ 天)	2019/06/14(5 天)	2019/06/21(10 天)	2019/08/16(50 天)
HYG	真实价格	4.67	15.03	30.07
	真实世界下	4.06	16.13	32.00
	风险中性世界	4.06	16.15	31.88
CVS	真实价格	5.72	19.06	25.80
	真实世界下	5.65	14.42	27.11
	风险中性世界	5.89	14.74	29.07
EEM	真实价格	6.65	20.10	17.85
	真实世界下	8.00	20.76	17.05
	风险中性世界	8.06	20.91	18.02

由此可见，即便是在距离到期日还有 50 天之久的情况下，BS 期权定价公式仍然能够较为精准地预测出三只股票的真实期权价格。

五、结论

本文通过对原有的 BS 期权定价公式的推导过程引入风险中性定价理论，成功地避开了求解复杂偏微分方程的困难，使得 BS 公式具有了进一步的可推广性，并从统计学角度上证明了无论是在真实世界还是风险中性世界下，股票与期权的定价都与真实价格相差无几，模型具有很好的价格预测能力。

参考文献

- [1] Black, Fischer, Scholes, Myron; The Pricing of Options and Corporate Liabilities; Journal of Political Economy, 1973, 81(3):637-654
- [2] Merton RC; Theory of Rational Option Pricing; The Bell Journal of Economics and Management Science, 1973, 4(1):141-183
- [3] Merton RC; An Intertemporal Capital Asset Pricing Model; Econometrica, 1973
- [4] Harrison M, D Kreps; Martingales and Arbitrage in Multi-Period Securities Markets; Journal of Economic Theory, 1979

- [5] Bruno Feunou, Cédric Okou; Risk Neutral Moment Based Estimation of Affine Option Pricing Models; Journal of Applied Econometrics, 2018(7)
- [6] Liping Xu; Viability for Stochastic Functional Differential Equations with Infinite Memory Driven by a Fractional Brownian Motion; Statistical Mechanics and its Applications
- [7] 黄伟民; 布朗运动理论向金融经济领域的延拓; 大学物理, 1999(01)
- [8] Massimo Marinacci, Federico Severino; Weak time-derivatives and no-arbitrage pricing; Finance and Stochastics, 2018, Vol.22 (4), pp.1007-1036

